Cours : MEC 567 - Hydrodynamique de l'environnement

Année : 2018-2019

Ernesto Horne, Jean-Marc Chomaz

PC 7 : Seiches et Marées

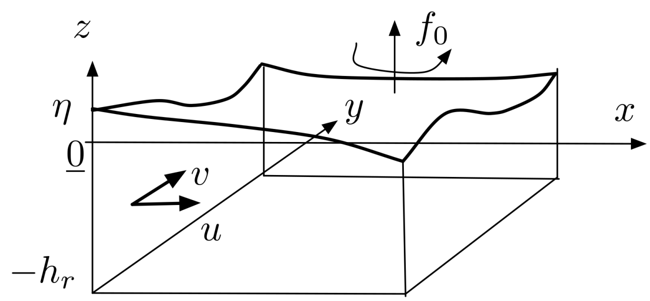


Figure 1: Géométrie d'une couche d'eau en rotation avec h_r et f_o constants.

Dans cette PC, nous utiliserons les équations de Saint Venant linéaires (équations de Navier Stockes moyennées sur la hauteur) qui s'écrivent avec le paramètre de Coriolis f_o et h_r constants :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f_o\, v = -g\, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + f_o\, u = -g\, \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_r\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

La seconde équation traduit la conservation de la masse fluide.

1-Reflexion dans un bassin

On considère une couche fluide dans un bassin fermé par des parois verticales d'équations respectives $x = 0$, $x = L_x$, $y = 0$, et $y = L_y$. La profondeur h_r du fluide au repos est constante et on note $c_r = \sqrt{g\, h_r}$. On suppose que les parois sont réfléchissantes et que les ondes observées ont une longueur d'onde grande devant la profondeur. On notera (u, v) les composantes de la vitesse horizontale et $\eta(x, y, t)$ la hauteur de la surface libre.

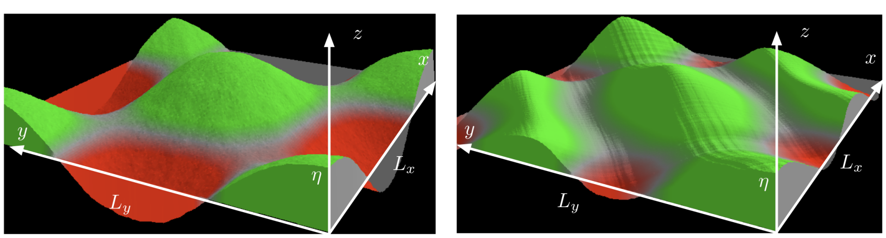


Figure 2: Géométrie du bassin fermé et exemples de modes propres.

1. Écrire les équations de Saint Venant 2D linéaire dans le cas où il n'y a pas de rotation ($f_o = 0$). Éliminer le champ de champ de vitesse pour ne ne garder qu'une équation en η. Écrire la relation de dispersion des ondes monochromatiques obtenues en cherchant une solution de la forme $\eta = \eta_m \exp(i\, k_x\, x + \; i\, k_y\, y \; - i\, w\, t)$. Écrire les conditions aux limites correspondant à la géométrie du bassin.

2. Montrer que l'élévation de la surface libre pour les modes propres de la cavité s'écrit:

$$\eta = \eta_o \cos(k_x\, x) \cos(k_y\, y) \cos(w_n\, t)$$

où w_n sont des pulsations que l'on décrira. Décrire la structure des six premiers modes propres d'oscillation de la cavité classés par ordre de fréquences propres croissantes lorsque $\beta = L_x^2/L_y^2 = 3$. Indiquer les valeurs de nombres $A_n = w_n^2\, L_x^2/(\pi\, c_r)^2$. Pour chacun de ces modes, tracer les lignes d'amplitudes nulle.

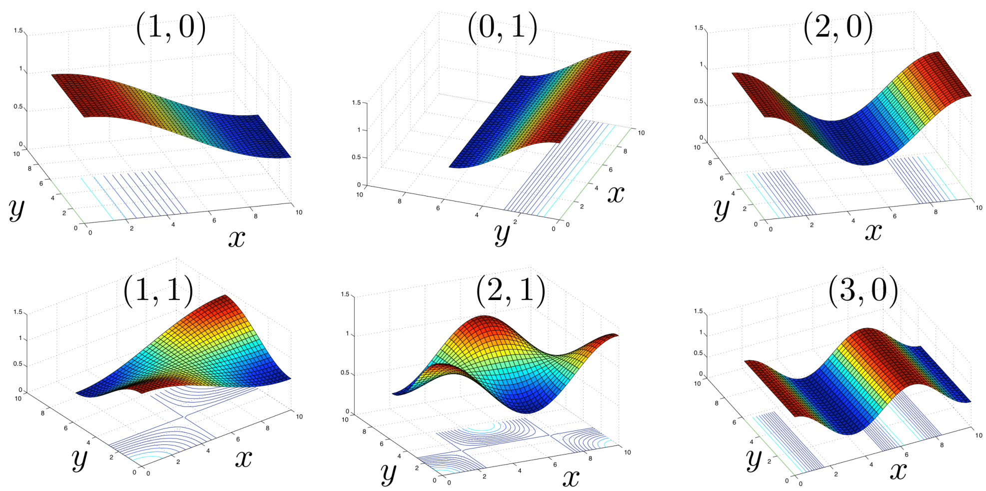


Figure 3: Classement des modes propres par ordre de fréquences croissante

2- Onde de Poincaré (où onde d'inertie-gravité)

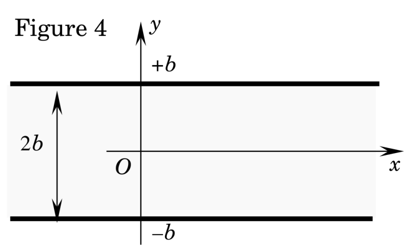
Ecrire les équations du modèle de Saint-Venant 2D linéaire dans le cas d'une profondeur h_r constante et d'un paramètre de Coriolis f_0 non nul. On note $c_r = \sqrt{g\, h_r}$. Calculer alors la relation de dispersion des ondes planes $(u, v, \eta) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta})\exp(ik_x x + ik_y y - iwt)$, où $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta})$ sont des amplitudes complexes, dans le cas particulier $k_y = 0$ puis dans le cas général. Exprimer le champ de vitesse $\underline{U}$ de ces ondes de Poincaré lorsque $\eta = \eta_m\, cos(k_x - wt)$ avec η_m réel et $k_y = 0$.

3- Cas particulier: les ondes de Kelvin, application à la marée dans la manche

On cherche maintenant à caractériser une onde de Poincaré soumise à l'influence d'une côte. Pour ce faire on considère une milieu semi infinie $y \in [0, +\infty[$. La côte se trouvant à $y = 0$. On cherche alors des solutions de la forme $(u, v, \eta) = (\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{\eta}(y))\exp(ik_x x - iwt)$. Par élimination de u et η dans le système d'équations de Saint venant, il est possible de montrer que les solutions sont de la forme : $(u, v, \eta) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta})exp(-\alpha\, y)\exp(ik_x x - iwt)$ avec $\alpha\, y > 0$. Ces ondes sont dites de Kelvin.

1. Montrer que $v = 0$, $w^2 = g\, h_r\, k_x^2$ et $\alpha = f_o/\sqrt{g\, h_r} * \text{signe}(k_x)$. Vérifier que seule l'onde avec $k_x > 0$ existe. Donner la géométrie des lignes d'égale amplitude, et des lignes d'égale phase (lignes cotidales).

Figure 4



2. On considère un canal infini d'axe $0x$, de profondeur h_r et de largeur $2b$ constante (figure 4). On suppose que deux ondes de sens inverse se propagent dans le canal. Verifier que la somme de ces

deux ondes s'écrit :

$$\eta = \eta_m[e^{-y/a}\cos(k_x\, x - wt) + re^{y/a}\cos(-k_x\, x - wt)]$$

où r caractérise le rapport des amplitudes.

3. On suppose $r = 1$ Montrer qu'il existe des points à marnage nul (dits points amphidromiques). Quelle est la distance entre deux points amphidromiques ?

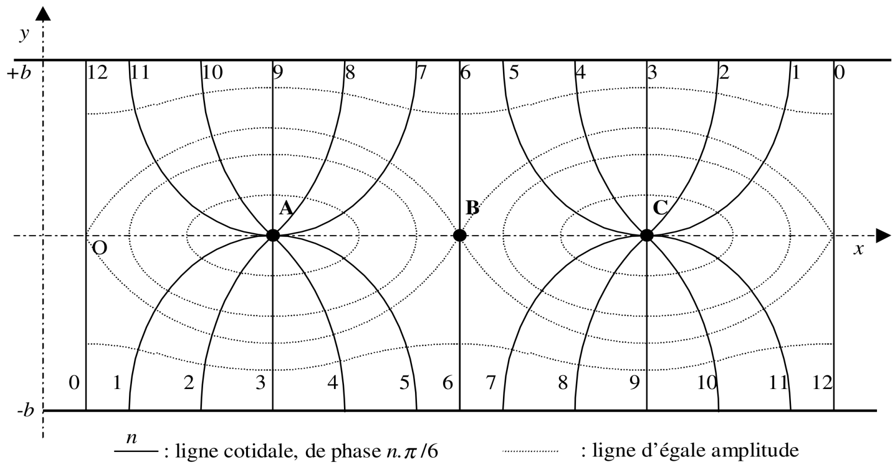


Figure 4: Amphidromie de Kelvin (dans le cas où a=1)

4. Evaluer la distance entre deux points amphidromiques si l'on prend une période de marée de 12h et une profondeur de 4000 m.

5. Dans le cas où $r \neq 1$ il est possible de montrer que les points amphidromiques se trouvent sur $y_o = -\frac{\sqrt{gh_r}}{2f_o}\ln \mathrm{r}$ avec 0<r<1. Discuter de la position des points amphidromiques dans la Manche, en fonction de r, A.N. h_r=61 m, b =60 km, $f_o = 1.1\, 10^{-4}s^-1$.

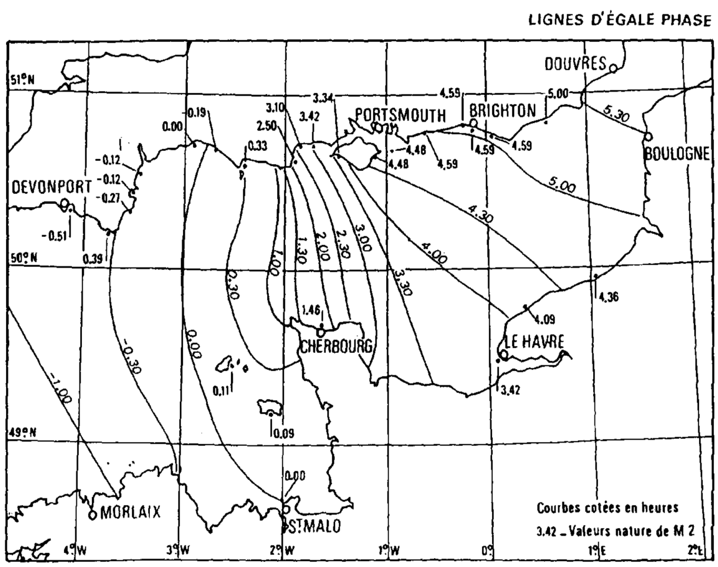


Figure 5: Onde de Marée dans la Manche (lignes cotidales uniquement)

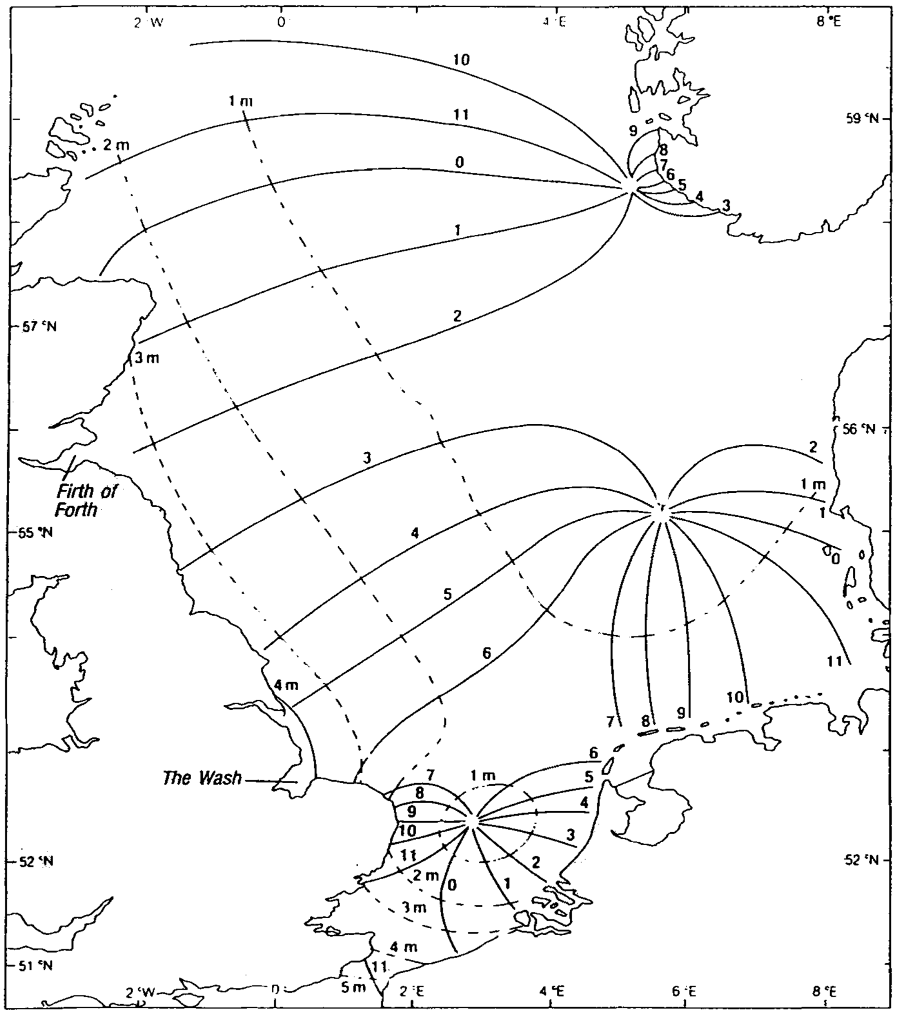


Figure 6: Onde de Marée en Mer du Nord