Cours : MEC 567 - Hydrodynamique de l'environnement

Année : 2018-2019

Ernesto Horne, Jean-Marc Chomaz

PC 6 : Refraction et Morphodynamique

1-Loi de Snel

On s'interesse à la réfraction de la houle au voisinage d'une plage dont le vecteur d'onde $\underline{k_o}$ fait un angle θ_o avec l'horizontal, dans la zone A (Figure 1) la profondeur h est constante et $h = h_o$. On suppose le milieu peu profond, la relation de dispersion s'écrit alors : $w = W(\underline{k}) = k\sqrt{g\,h}$ où $k = |\underline{k}|$. Le problème est invariant en temps, la houle est donc caractérisée par sa pulsation w_o (ou sa période T_o). Dans la zone B, on considère que la bathymétrie (profondeur de la mer) ne dépend que de x, i.e $h = f(x)$, le problème est donc invariant en y et on peut donc écrire dans la zone B, $k_y = k_{yo}$.

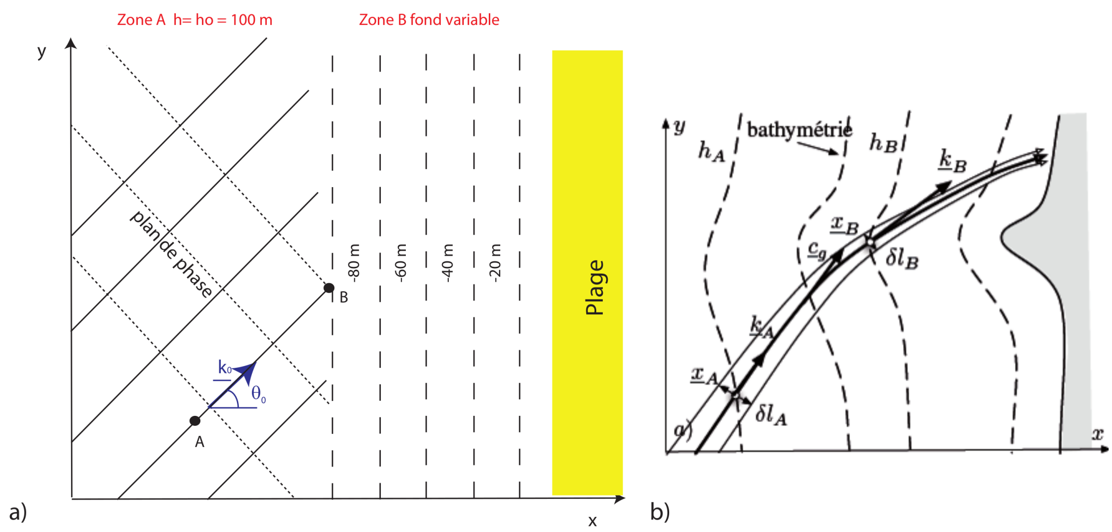


Figure 1: *a) Propagation de la houle dans un milieu homogène puis refraction sur une bathymétrie homogène en y. b) Refraction sur une bathymétrie inhomogène*

1. On définit les coordonées polaires (k, θ) d'un vecteur d'onde $\underline{k}$. On considère deux points A et B de coordonnées $\underline{x_A}$ et $\underline{x_B}$ appartenant au même rayon (rayon = trajectoire du vecteur d'onde $\underline{k}$). On note $\underline{k_A}$ et $\underline{k_B}$ les vecteurs d'ondes au points A et B et (k_A,θ_A) et (k_B,θ_B) les coordonnées polaires associées. Démontrer que $k_A \sin\theta_A = k_B \sin\theta_B$
2. La relation de dispersion peut se mettre sous la forme $W = c(x)k$ où k est le module de $\underline{k}$. On appelle indice de refraction le nombre $n(x) = c_o/c(x)$ où c_o est une vitesse de référence constante. Démontrer la loi de Snel $n_A \sin\theta_\mathrm{A} = n_B \sin\theta_B$ où n_A et n_B sont les indices de réfractions des points A et B
3. Dessiner les rayons sur la zone b de la figure 1. On prendra $\theta_o = 45$.

En notant $H = 2\eta_m$ la hauteur de la houle, on peut montrer que l'énergie totale[1] de la houle s'écrit $W^T = \frac{1}{8}\,\rho\,g\,H^2$. Le flux d'énergie étant conservé entre deux rayons, si l'on note δl_A la distance entre deux rayons au voisinage de A figure 1B, et δl_B la distance entre ces deux même rayon au voisinage du point B, on peut alors écrire :

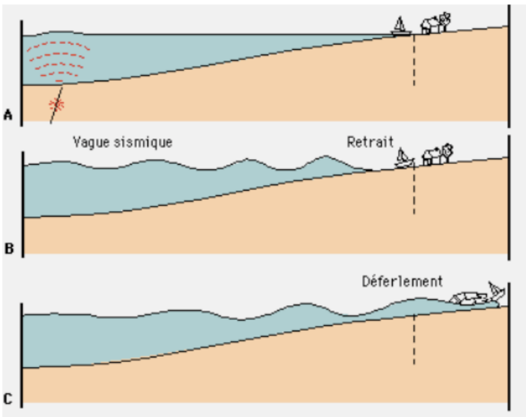
$$\delta l_A C_{gA}\, W^T(\underline{x}_A) = \delta l_B C_{gB}\, W^T(\underline{x}_B)$$

1. En déduire la relation $\frac{H_B}{H_A} = K_s\,K_r$ où K_r est le coefficient de refraction et $K_r = \sqrt{\delta l_A/\delta l_B}$ et K_s est le coefficient de "shoaling'. Donner une interpretation de ces deux coefficients.
2. Montrer que pour notre problème $\frac{H_B}{H_A} = \sqrt{\frac{\sin 2\theta_A}{\sin 2\theta_B}}$

[1] Il s'agit d'une densité d'énergie intégrée sur la hauteur

2-Tsunami

Un tremblement de terre abaisse la surface de l'océan d'une hauteur $H_0 = 1$ m sur un disque de rayon $r_0 = 100$ km à une distance $d = 1600$ km de la côte où la profondeur de l'océan est $h_0 = 4000$ m. On étudie le tsunami généré par cet effondrement.



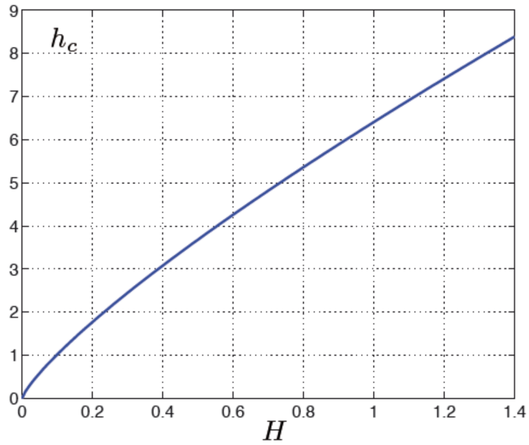


Figure 2: *)a Schéma d'un tsunami. b) Fonction* $h_c(H) = h_o^{1/5}\left(\frac{H}{0.8}\right)^{4/5}$ *pour* $h_0 = 4$ *km.*

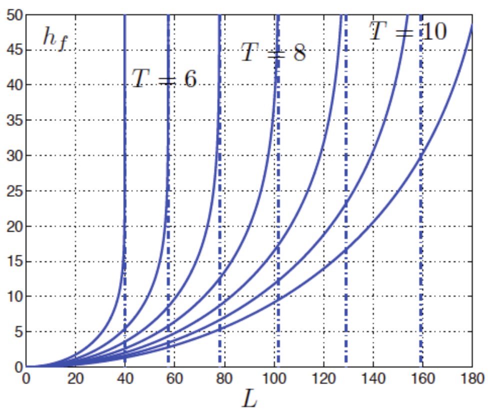
Dans ce problème on utilisera le critère de Munk si h_f est la profondeur et H la hauteur de la vague, il y aura déferlement pour $H/h_f = 0.8$

1. Quelle est la vitesse du tsunami. A quelle profondeur h_c le tsunami déferle-t-il et quelle est la surcote H_c qui inonde le rivage ? Que deviennent ces valeurs pour $H_0 = 4$ m? On pourra utiliser le graphique de la Figure 2b.

3-Déferlement de la houle sur une plage

Le critère de déferlement de Munk n'est valable que dans le cas "eau peu profonde". Il est possible d'utiliser le cas général le critère de Miche :

$$H/L = 0.14 \tanh\left(\frac{2\pi h_f}{L}\right) = 0.14 \tanh\left(k\, h_f\right)$$



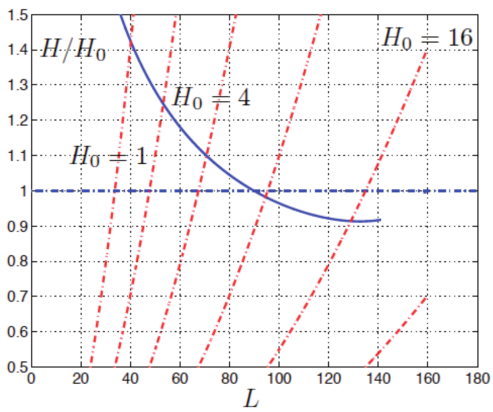


Figure 3: Fonction $h_{f(T,L)} = \frac{L}{2\pi}\mathrm{argth}(\frac{2\pi L}{g T^2})$ pour les périodes $T = 5, 6, ...11\, s$.

b) En bleu, fonction $K_s(T,L) = H(T,L)/H_o = \sqrt{\frac{g T^2}{4\pi L}}\left[\frac{1}{2} + \frac{2\pi h_f(T,L)/L}{\sinh[4\pi h_f(T,L)/L]}\right]^{-1/2}$ pour la période $T = 10\, s$ et critère de Miche $H_c(T,L)/H_o = 0.14\, L \tanh[2\pi h_f(T,L)/L]/H_o$ pour les hauteurs au large $H_o = 1, 2, 4, ..., 32$ m.

On considère une houle monochromatique de période $T = 10s$ dont les rayons sont perpendiculaires aux isobathes $h_f(x) = \beta(x)$ avec $\beta = 0.1$.

1. Quelle est la longueur d'onde L_0 au large ? Montrer que $cg_0 = \frac{g}{2w}$ au large. A quelles profondeurs déferlent les houles de hauteurs respectives au large $H_0 = 1$ m et $H_0 = 4$ m ? On pourra utiliser le tracé graphique des fonctions de la Figure 3.
2. Quel est le type de déferlement dans les deux cas (on pourra utiliser la classification de la Figure 4)?

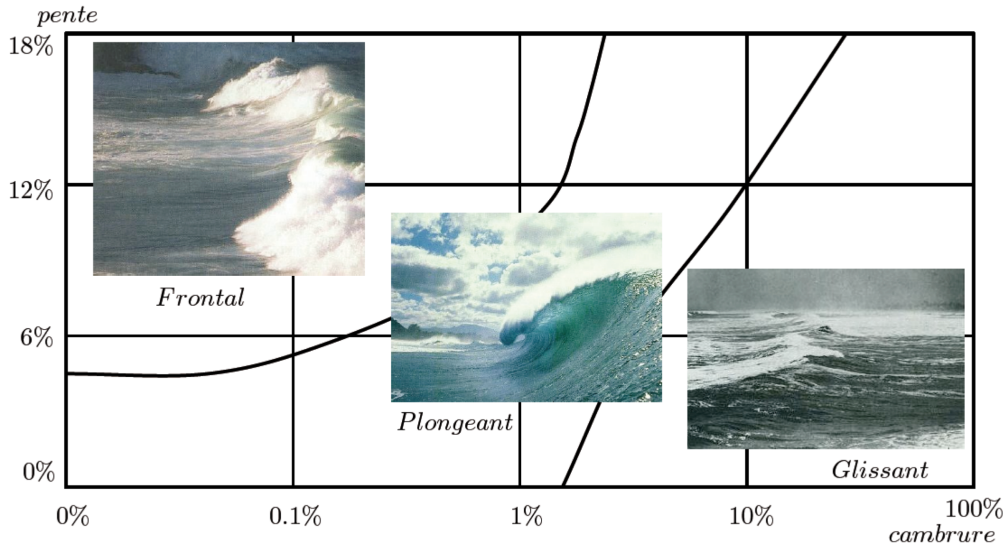


Figure 4: Type de déferlement dans le plan (cambrure = H/L; pente du fond de la mer)

1. Quel est l'ordre de grandeur de la puissance disponible dans une houle arrivant sur une cote de longueur $d = 100$ km avec $T = 10$ s et $H_o = 1$ m.

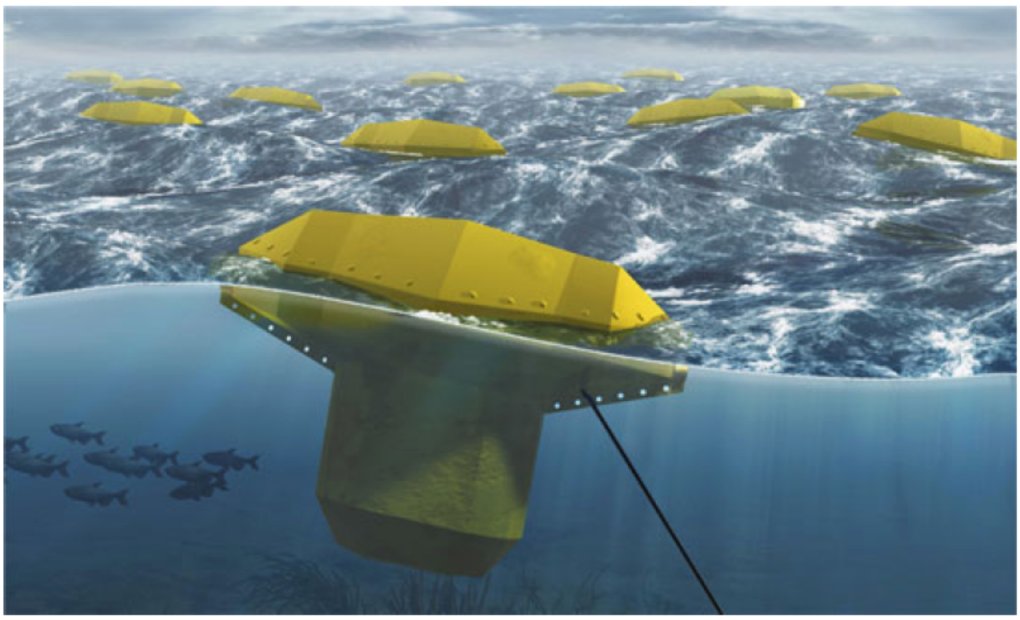


Figure 5: Récupération de l'energie de la Houle (Projet SEAREV, Ecole Centrale de Nantes)