Cours : MEC 567 - Hydrodynamique de l'environnement

Année : 2018-2019

Ernesto Horne, Jean-Marc Chomaz

PC 5 : Onde interne

1-Ondes de gravité internes

On considère deux couches fluides superposées (voir figure 1) constituées au repos d'une couche de masse volumique ρ_1 et de vitesse nulle, située entre $z = 0$ et $z = h_1$, et d'une couche de masse volumique $\rho_2 > \rho_1$ et de vitesse nulle, comprise entre les plans horizontaux d'équations respectives $z = 0$ et $z = -\infty$

On se restreint aux mouvements bidimensionnels dans le plan vertical (x, z) et on note $\underline{U_1}(x, z, t)$, $\underline{U_2}(x, z, t)$, $p_1(x, z, t)$ et $p_2(x, z, t)$ les champs de vitesse et de pression respectifs dans les deux couches, ainsi que $\xi(x, t)$ la surface libre en contact avec l'atmosphère de pression constante et $\eta(x, t)$ l'élévations de l'interface entre les deux fluides supposés non miscibles.

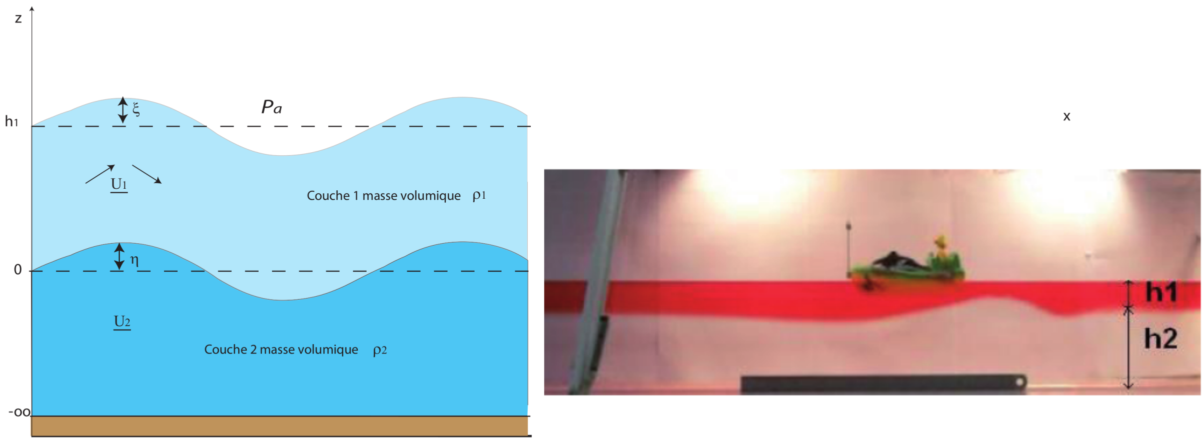

Figure 1: *Écoulements bi-couches avec $\rho_2 > \rho_1$.*

1. On suppose que l'écoulement est modélisé par les équations d'Euler incompressibles. Écrire le système d'équations ainsi que les conditions aux limites en $z = -\infty$, en $z = h_1 + \xi(x, t)$ et en $z = \eta(x, t)$

2. Formuler les hypothèses conduisant à l'existence de potentiels de vitesse ϕ_1 et ϕ_2 tels que $\underline{U_1} = \underline{\text{grad}}\,\phi_1$ et $\underline{U_2} = \underline{\text{grad}}\,\phi_2$. En déduire que l'on peut écrire

$$\Delta\,\phi_i \qquad \text{et} \qquad p_i = p_r - \rho_i \left[g\,z + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\underline{\text{grad}}\phi_i)^2 \right] \qquad \text{pour } i \in \{1, 2\}\ , \tag{1}$$

où p_r est un constante tel que $p_r = p_a + \rho_1\,g\,h_1$

3. On linéarise maintenant le problème en supposant que $\xi(x, t)$, $\eta(x, t)$ et ϕ_i sont des petites perturbations. Ecrivez les équations et les conditions limites linéarisées du problème

4. Montrer que l'on peut éliminer η et ξ des conditions aux limites pour se ramener au système d'équations:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \qquad \text{en} \quad z = 0 \tag{2}$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) \qquad \text{en} \quad z = 0 \tag{3}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \qquad \text{en} \quad z = H_1 \tag{4}$$

5. On cherche des solutions ayant un comportement ondulatoire en x. On pose $\phi_i = H_i(z)e^{ik\,x - iwt}$. Montrer que $H_1(z) = A(\cosh(k(z-h1) + \frac{w^2}{kg}\sinh(k(z-h1))$, où A est une amplitude complexe arbitraire. En déduire la relation de dispersion est donnée par :

$$\left[\frac{w^2}{gk}-1\right]\left[\frac{w^2}{gk}(\rho_1\mathrm{sinh}kh_1+\rho_2\mathrm{cosh}kh_1)-(\rho_2-\rho_1)\mathrm{sinh}(kh_1)\right]=0 \tag{5}$$

6. Etudier le mode dit barotrope ($w^2 = gk$), i.e donner les profils de vitesses et le profil de ξ et η on prendra $\xi = \xi_m e^{i(kx-wt)}$ où ξ_m est réel.
7. On étudie le mode barocline, montrer que la relation de dispersion s'écrit

$$w_g^2 = \frac{g(\rho_2-\rho_1)\,k}{\rho_2\coth(k\,h_1)+\rho_1} \tag{6}$$

8. On se place dans le cas où $k\,h_1 \to 0$, (longueur d'onde L grande par rapport à l'épaisseur h_1). Simplifier dans ce cas la relation de dispersion et estimer la vitesse de phase c_ϕ. Calculer, la distance parcouru par l'onde de gravité en 10 seconde avec $h_1 = 2.5\,cm$ et $\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2} = 2\%$.
9. On se place dans le cas $k\,h_1 \to 0$, Donner le profil de vitesses de u_1 et u_2, et le profil η on prendra $\xi = \xi_m e^{i(kx-wt)}$ où ξ_m est réel. Que se passe t-il à l'interface η_m

Annexe

Pour une surface de contact séparant deux fluides non miscibles la condition de saut impose que $(\underline{U}-\underline{W}).\underline{n} = 0$ où $\underline{U}$ est la vitesse du fluide, $\underline{W}$ la vitesse de la surface et $\underline{n}$ sa normale. Dans notre problème la surface s'écrit $F = z - \eta(x,t) = 0$. La normale est $\underline{n} = \underline{\mathrm{grad}}F/\mid\underline{\mathrm{grad}}F\mid$. Par définition la vitesse normale $\underline{W} = W\,\underline{n}$ de propagation en M est telle que la dérivée de F "à la vitesse $\underline{W}$" soit nulle :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \underline{W}.\underline{\mathrm{grad}}\,F = \frac{\partial F}{\partial t} + (\underline{W}.\underline{n})\mid\underline{\mathrm{grad}}\,F\mid = 0$$

Par conséquent la vitesse de propagation de F est donnée par

$$\underline{W} = -\frac{\partial F/\partial t}{\mid\underline{\mathrm{grad}}\,F\mid}\underline{n}$$

Finalement la condition de saut permet d'écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U}.\underline{\mathrm{grad}}\,F = 0$$

En d'autre termes, la dérivée particulaire de F est nulle, cette dernière est à tout instant constituée des mêmes particules de fluide. C'est une surface matériel.