PC4 - ONDE DE SURFACE

Cours : MEC 567 - Hydrodynamique de l'environnement

Année : 2018-2019

Ernesto Horne, Jean-Marc Chomaz

Cette PC établit la relation de dispersion des ondes de surface dans le cas d'une profondeur infinie. Dans le cas d'une profondeur finie, la mesure de la pression au fond permet de calculer l'amplitude et la longueur d'onde de la houle

Rappel 1: Les équations d'Euler pour un fluide parfait et incompressible (c'est l'équation de Navier Stokes avec viscosité nulle) :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U}.\nabla \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g.\mathbf{e_z} \tag{1}$$

Rappel 2: Il est possible de démontrer, en regardant par exemple les composantes, que

$$\mathbf{U}.\nabla \mathbf{U} = \frac{1}{2}\nabla \mathbf{U}^2 + (\nabla \times \mathbf{U}) \times \mathbf{U}, \tag{2}$$

nous admettrons ce résultat.

1 Milieu très profond

On considère une couche fluide infiniment profonde dont la surface libre, d'équation $z = \eta(x,t)$, est en contact avec l'atmosphère de pression constante p_a. On travaille en 2D, et $\mathbf{U}(x,y,t) = u.\mathbf{e_x} + w.\mathbf{e_z}$, et $p(x,z,t)$ est le champ de pression.

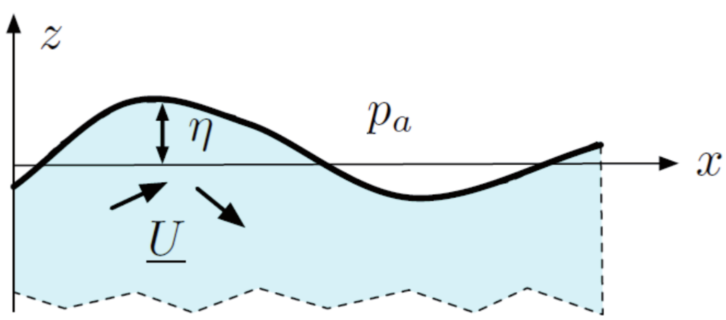

Figure 1: Couche infiniment profonde à surface libre d'équation $z = \eta(x,t)$

1. Le mouvement du fluide est supposé irrotationnel. Donner une écriture simplifiée des équations d'Euler qui régit le champ de vitesse $\mathbf{U}$ du fluide. Soit un potentiel Φ, par propriétés des opérateurs on a toujours $\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$, en déduire que l'on peut poser Φ comme le potentiel de $\mathbf{U}$. Quelle équation doit satisfaire Φ, puis donné l'expression du champ de pression p dans le fluide.

2. Interpréter la condition cinématique en $z = \eta(x,t)$ qui s'écrit $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u.\frac{\partial \eta}{\partial x} = w$. Qu'impose la condition cinématique en $z = -\infty$ (on considère un fond plat), puis la condition dynamique en $z = \eta(x,t)$?

3. Dans l'état non perturbé, la surface libre est supposée plate soit $z = 0$, la pression vaut $p_0(z) = p_a - \rho g z$, la vitesse $\mathbf{U} = 0$. On linéarise maintenant le problème en posant $p = p_0(z) + \bar{p}$ et en supposant que $\bar{p}$, η et Φ sont des petites perturbations.

   Ecrivez les équations et les conditions limites linéarisées du problème, pour obtenir le système d'équations : $\nabla^2 \Phi = 0$, $p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ avec les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -g\eta$ en $z = 0$ et $\lim_{z \to -\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$.

4. On cherche des solutions ayant un comportement ondulatoire en x pour η et donc pour Φ qui lui est couplé. On pose $\Phi = H(z) exp(ikx - i\omega t)$ et $\eta = \eta_m exp(ikx - i\omega t)$ avec $\omega > 0$. Montrer que $H(z) = H_m exp(kz)$, où H_m est une amplitude complexe arbitraire. Etablir la relation entre H_m et η_m.

5. Déterminer la relation de dispersion $\omega^2 = gk$

6. Si l'on choisit η_m réel, montrer alors que les expression réelle sont $\eta = \eta_m.cos(kx - \omega t)$ et $\Phi = \frac{g\eta_m}{\omega}.exp(kz).\sin(kx - \omega t)$. Montrer alors que les trajectoires autour d'une position moyenne x_0 , z_0 des ces petites oscillations sont des cercles.

7. Montrer qu'à une profondeur égale à la longueur d'onde, la houle devient négligeable.

2 Mesure de la Houle

On souhaite mesurer l'amplitude η_m et la longueur d'onde $L = 2\pi/k$ d'une houle monochromatique à l'aide d'un capteur de pression disposé au fond de la couche fluide d'épaisseur h_r.

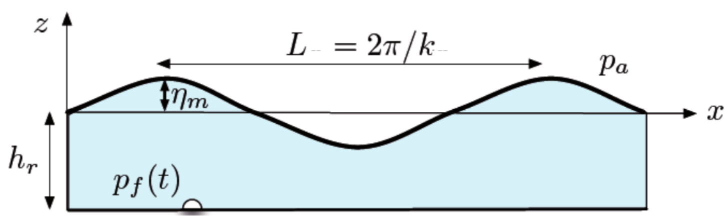

Figure 2: Capteur de pression pour mesurer l'amplitude et la longueur d'onde de la houle.

1. Dans ce problème, l'épaisseur de fluide est finie, ré-écrire le système d'équation et les conditions aux limites linéarisées de la question 3 pour ce cas.

2. Indiquer les étapes qui conduisent à l'expression $\eta = \eta_m.\cos(kx - \omega t)$ et $\Phi = \frac{g\eta_m}{\omega}\frac{\cosh[k(z+h_r)]}{\cosh(kh_r)}\sin(kx - \omega t)$ avec $\omega = \sqrt{gk\tanh(kh_r)}$.

3. On note $p_f(t)$ le signal de pression enregistré par le capteur. On rappelle que le champ de pression s'écrit $p = p_a - \rho g z - \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}$. En déduire que $p_f = p_s + p_m\cos(\omega t + \phi)$ où p_m est une constante que l'on exprimera en fonction de η_m et k. En déduire la détermination de k et η_m à partir des valeurs de ω et p_m mesurées par le capteur. On suppose que l'on sait inverser graphiquement la fonction $F(\xi) = \xi\tanh\xi$.

   En supposant que $h_r = 14.4$ m, calculer la longueur d'onde L et la hauteur H des vagues si la période mesurée est $T = 6.24$ s et la fluctuation $p_m = 10^3$ Pa. (on prendra g = 10).

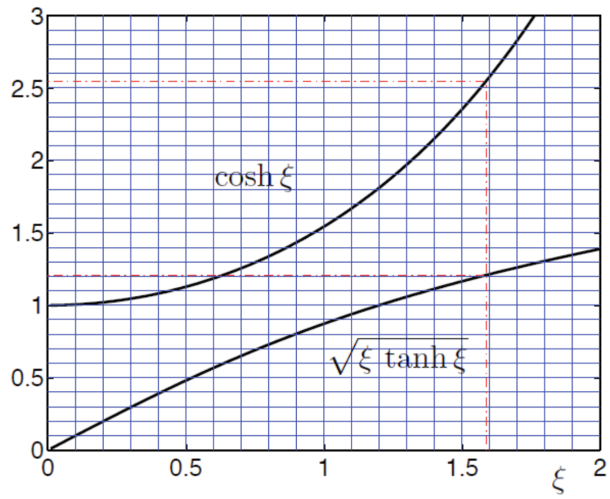

Figure 3: Tracé des fonctions $\cosh(\xi)$ et $F(\xi) = \sqrt{\xi\tanh(\xi)}$

Annexe

Pour une surface de contact séparant deux fluides non miscibles la condition de saut impose que $(\mathbf{U} - \mathbf{W}).\mathbf{n} = 0$ où $\mathbf{U}$ est la vitesse du fluide, $\mathbf{W}$ la vitesse de la surface et n sa normale. Dans notre problème la surface s'écrit $F = z - \eta(x,t) = 0$. La normale est $\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$. Par définition la vitesse normale $\mathbf{W} = W\mathbf{n}$ de propagation en M est telle que la dérivée de F "à la vitesse W" soit nulle :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{W}\nabla F = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n})|\nabla F| = 0 \tag{3}$$

Par conséquent la vitesse de propagation de F est donnée par

$$\mathbf{W} = -\frac{\partial F/\partial t}{|\nabla F|}\mathbf{n} \tag{4}$$

Finalement la condition de saut permet d'écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla F = 0 \tag{5}$$

En d'autre termes, la dérivée particulaire de F est nulle, cette dernière est à tout instant constituée des mêmes particules de fluide. C'est une surface matériel.