



École Polytechnique
Laboratoire d'Hydrodynamique

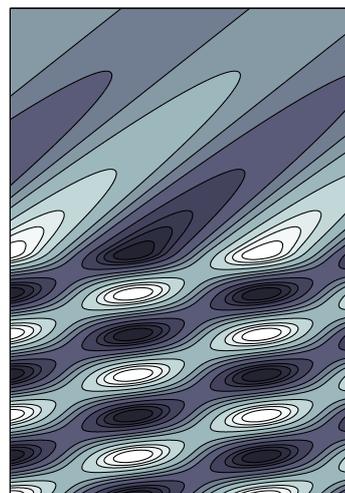
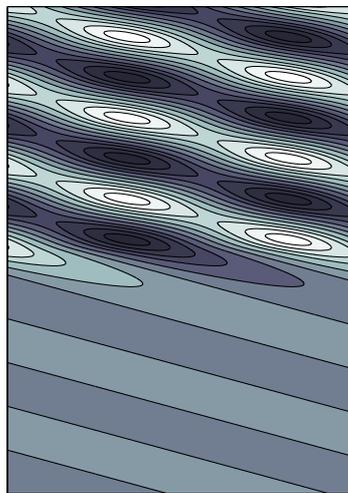
Thèse présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mécanique

par

Rémi VIOLETTE

MODÈLE LINÉAIRE DES VIBRATIONS INDUITES PAR
VORTEX DE STRUCTURES ÉLANCÉES



Soutenu le 15 janvier 2009 devant le jury composé de

M. André LANEVILLE	rapporteur	Université de Sherbrooke, Canada
M. Lionel SCHOUVEILER	rapporteur	IRPHE - Université Paul Cézanne, Marseille
M. John CHAPLIN	examineur	University of Southampton, UK
M. Didier LUCOR	examineur	Institut Jean Le Rond d'Alembert, CNRS, Paris
M. Julien SZYDLOWSKI	examineur	Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison
M. Emmanuel de LANGRE	directeur de thèse	Ecole Polytechnique, Palaiseau
M. Christian BERHAULT	invité	Principia R&D, La Ciotat

École Polytechnique
Laboratoire d'Hydrodynamique

Thèse présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Spécialité : Mécanique

par

Rémi VIOLETTE

**MODÈLE LINÉAIRE DES VIBRATIONS INDUITES PAR
VORTEX DE STRUCTURES ÉLANCÉES**

Soutenu le 15 janvier 2009 devant le jury composé de

M. André LANEVILLE	rapporteur	Université de Sherbrooke, Canada
M. Lionel SCHOUVEILER	rapporteur	IRPHE - Université Paul Cézanne, Marseille
M. John CHAPLIN	examineur	University of Southampton, UK
M. Didier LUCOR	examineur	Institut Jean Le Rond d'Alembert, CNRS, Paris
M. Julien SZYDLOWSKI	examineur	Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison
M. Emmanuel de LANGRE	directeur de thèse	Ecole Polytechnique, Palaiseau
M. Christian BERHAULT	invité	Principia R&D, La Ciotat

MODELE LINEAIRE DES VIBRATIONS INDUITES PAR VORTEX DE STRUCTURES ELANCEES

Les structures dites « offshore » vibrent sous l'effet des courants marins. Ces vibrations, induites par le détachement périodique de tourbillons dans le sillage de la structure (d'où le nom vibrations induites par vortex), endommagent par fatigue les câbles et les éléments de tuyauteries qui relient à la plateforme d'exploitation les têtes de puits de pétrole situés au niveau du sol marin. Une compréhension du comportement dynamique de ces structures sous l'effet du détachement tourbillonnaire est donc essentielle à l'étape de design. A l'intérieur de cette thèse, nous démontrons qu'en utilisant le concept d'oscillateur fluide et stabilité linéaire, on peut comprendre et reproduire de façon qualitative les caractéristiques principales des VIV sur les structures élancées en écoulements uniformes et non uniformes. Les arguments justifiant l'utilisation de la méthode de modélisation choisie sont présentés au deuxième chapitre. Les troisième et quatrième chapitres sont respectivement dédiés aux écoulements uniformes et non uniformes. Dans les deux cas, la théorie est développée à partir d'une analyse de stabilité linéaire des systèmes d'ondes structure-sillage. La méthodologie proposée constitue un outil de design efficace, puisqu'il permet la connaissance de la dynamique de configurations complexes et que son coût en terme de temps de calcul est très faible.

Mots clefs : Interactions fluide structure, Vibrations induites par vortex, Stabilité linéaire, Oscillateur fluide, Structures souples élancées, Propagation d'ondes

LINEAR MODEL FOR VORTEX-INDUCED VIBRATIONS OF SLENDER STRUCTURES

Offshore structures vibrate under the influence of sea currents. These vibrations, induced by the periodic shedding of vortices in the structure wake (hence the name vortex-induced vibrations), cause fatigue damage of cables and piping elements that connect the platform to oil wellheads located at the seabed. An understanding of the dynamic behavior of these structures under the effect of vortex shedding is essential in the design stage. Within this thesis, we demonstrate that by using the concept of wake oscillator and linear stability, we can understand and reproduce qualitatively the main characteristics of VIV of slender structures in uniform and not uniform flows. The arguments justifying the use of the chosen method of modeling are presented in the second chapter. The third and fourth chapters are devoted respectively to uniform and non-uniform flows. In both cases, the theory is developed from a linear stability analysis of the structure-wake wave systems. The proposed methodology is an effective design tool : it allows the knowledge of the dynamics of complex configurations and its cost in terms of computational time is very low.

Keywords : Fluid-structure interactions, Vortex-induced vibrations, Linear stability, Wake-oscillator, Flexible slender structures, Wave propagation

Illustration de la page couverture :

Formes génériques de réponse retrouvées en régime linéaire pour les écoulements non uniformes : *Système d'Ondes Primaire* (gauche) et *Système d'Ondes Secondaire* (droite). La théorie concernant ces formes de réponse est présentée dans le cadre du quatrième chapitre portant sur les vibrations induites par vortex de structures élancées en écoulements non uniformes.

*à Lorraine, Donald
et Yannick*

Remerciements

(La véritable conclusion de cette thèse)

Le meilleur moyen de réussir, c'est de ne pas travailler. C'est cette phrase bizarre, qu'un vieil ami m'a dite un jour, qui me traverse l'esprit au moment d'aborder l'écriture de ces lignes. Elle est d'autant plus déconcertante qu'elle m'a été lancée par quelqu'un abonné aux longues heures supplémentaires au boulot... et qui continue de travailler malgré l'âge de la retraite atteinte depuis quelques années déjà! Finalement, la signification de cette phrase est toute simple si l'on associe une connotation négative au verbe travailler. Je la traduirai donc librement ainsi : « *Le meilleur moyen de réussir, c'est d'aimer ce que l'on fait, d'avoir du plaisir...* ». Mon temps à Paris tire à sa fin et en regardant derrière je réalise à quel point j'ai adoré mon expérience ici, et que cela a grandement contribué au succès de ce projet de thèse. C'est pour cette raison que cette phrase, à première vue bizarre, me vient en tête au moment d'exprimer ma gratitude aux gens avec qui j'ai eu tant de plaisir à l'intérieur de ma période parisienne.

Je tiens à remercier Emmanuel de Langre. Il m'est difficile de bien résumer les raisons principales de ma reconnaissance envers lui : il y en a trop! De façon désordonnée : pour sa patience sans limite (j'ai pourtant cherché!), pour ce qu'il m'a appris, pour son enthousiasme, pour sa confiance en moi et pour son dévouement. Je me rappelle un matin il y a trois ans à l'aéroport Charles-de-Gaulles. Ce jour-là, la SNCF avait décidé de souhaiter la bienvenue aux voyageurs en faisant grève. Emmanuel, encore un peu endormi, était venu me chercher en voiture vers les huit heures du matin!

Je veux également exprimer toute ma gratitude à Julien Szydowski pour m'avoir aidé, conseillé et soutenu au cours de cette thèse. Aussi, pour avoir toujours fait le maximum possible afin que mes passages à l'IFP soient toujours des plus agréables.

En ce qui a trait au LadHyX, l'ambiance y est tout simplement géniale. J'ai eu vraiment beaucoup de bonheur à y côtoyer les gens qui y forment en quelque sorte une petite ONU : parfois plus de dix nations sont représentées à l'intérieur des pauses-café d'après déjeuner! Dans le contexte très familial du labo, la porte de chacun est toujours ouverte afin de partager expérience et savoir, que ce soit pour la science ou toute autre chose. Dans ce sens, je tiens à remercier Patrick, Jean-Marc, Paul M, Paul B, Charles, Carlo, Sabine (Madame Ortiz) pour leur temps et leur soutien. Je tiens également à remercier chaleureusement Pascal et Peter, respectivement mes maîtres pour les travaux expérimentaux et ceux de mécanique des fluides numériques. Je veux aussi remercier mes collègues thésards passés et présents. En particulier Mathieu, Fred, Christoph (compagnons de soirées, de voyages, d'escalade, de pauses-café, colocataires, cuisiniers et organisateurs de pot de thèse!). Un merci spécial à Fred pour la compagnie durant les dures soirées de fin de thèse au labo et les nombreux encouragements. Merci aussi aux collègues thésards et postdoc des séminaires IFS. Je désire également remercier mes compagnons de bureau pour leur bonne humeur

et leur patience à l'endroit de mes sautes d'humeur : Maria-Luisa à la fin, Monsieur Max., Cécile, Cédric, Alan. Je suis également très reconnaissant envers Danny et Alex pour leur assistance précieuse concernant l'informatique, à Antonio pour l'aide sur les manips et à Thérèse et Sandrine pour leur bonne humeur et leurs encouragements, mais également pour l'aide administrative sans laquelle je me serais complètement égaré!

Mes passages hebdomadaires à l'IFP ont été particulièrement plaisants et m'ont grandement servi au cours de ces trois ans. Pour ces deux raisons, je tiens à remercier les gens que j'ai eu la chance de côtoyer là-bas. Oi Philippe! Toute ma gratitude va aussi à Sophie Bissierier de la DRH pour m'avoir énormément aidé en ce qui a trait aux démarches administratives. Sans elle, ce mémoire serait plutôt un récit s'approchant de celui d'un des *Douze travaux d'Astérix*.

Je veux remercier mes amis parisiens d'adoption : merci pour les soirées, les dîners, les voyages et enfin d'avoir partagé votre culture avec moi. Merci à Benoît, mon colocataire de dernière année aux genoux d'acier. Merci de m'avoir fait sentir chez moi et aussi pour les encouragements dans la dernière ligne droite. Un merci spécial à Francesco et Anna pour avoir été les artisans d'un pot de thèse magnifique. Je tiens à remercier également mes amis du Québec. Si à chaque fois mes retours dans la Belle Province étaient des bouffées d'air frais, c'est en grande partie grâce à eux.

Je tiens à remercier messieurs André Laneville, Lionel Schouveiller, John Chaplin, Didier Lucor et Christian Berhault pour avoir accepté d'évaluer cette thèse. Discuter de ce travail avec eux fut pour moi une très belle expérience. De plus, je tiens également à remercier messieurs Lucor et Chaplin pour le partage de leurs données.

Mon directeur de recherche à la maîtrise a participé à cette aventure avant même qu'elle ne commence. Lorsque l'opportunité d'effectuer cette thèse s'est ouverte à moi en 2005, j'étais plutôt réticent. Paris est vraiment loin de Montréal et, surtout, finir une thèse avec succès m'apparaissait hors de ma portée. Je tiens à remercier Michel Pettigrew de l'Ecole Polytechnique de Montréal pour m'avoir encouragé, voire poussé, à me lancer dans cette aventure qui fut, après tout, l'une des meilleures expériences de ma vie.

De par leur présence et leur soutien infaillible, ma famille a été et continue d'être la base solide qui m'apporte stabilité et réconfort, et ce même à des milliers de kilomètres de distance. Pour cette raison et mille autres encore je leur dédie ce mémoire.

Les travaux décrits dans ce manuscrit ont été réalisés dans le cadre d'une thèse de doctorat financée par l'Institut Français du Pétrole (IFP) selon une convention CIFRE entre l'IFP et le Laboratoire d'Hydrodynamique de l'Ecole Polytechnique (LadHyX), à Palaiseau. Cette thèse s'est déroulée de décembre 2005 à janvier 2009 au LadHyX sous la direction d'Emmanuel de Langre de l'Ecole Polytechnique et partiellement au sein de la Division Mécanique Appliquée de l'IFP, à Rueil-Malmaison. Le promoteur IFP de cette thèse était Julien Szydlowski.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Vibration induite par vortex d'un cylindre rigide	2
1.1.1	Sillage pour un cylindre fixe	2
1.1.2	Sillage pour un cylindre en mouvement forcé	2
1.1.3	Accrochage cylindre-sillage	3
1.1.4	Modélisation des vibrations induites par vortex.	4
1.2	VIV de structures souples	7
1.2.1	Considérations pratiques : Risers	7
1.2.2	Accrochage multiple	9
1.2.3	Accrochage robuste	10
1.2.4	Ondes de VIV	11
1.2.5	Séparation en espace des fréquences de vibration	13
1.3	Modélisations choisies	16
1.3.1	Modèle d'oscillateur fluide de Facchinetti	17
1.3.2	L'accrochage comme une instabilité linéaire	20
1.4	Proposition	22
2	Validation du concept d'oscillateur fluide	24
2.1	Modèle non linéaire en écoulements non uniformes	25
2.2	Validation du modèle linéaire pour les VIV d'un cylindre rigide	28
2.2.1	Théorie	28
2.2.2	Evolution de la plage d'accrochage	32
2.2.3	Evolution de la masse ajoutée avec la vitesse réduite	33
2.3	Conclusion	37
3	Structures élancées en écoulements uniformes	39
3.1	Théorie linéaire	40
3.1.1	Câble droit infini	42
3.1.2	Câble droit fini	45
3.2	Comparaisons avec les résultats expérimentaux	51
3.2.1	Nombres d'ondes instables	51
3.2.2	Transition entre modes	52
3.2.3	Partage en temps de la fréquence	56

3.3	Conclusion.	57
4	Structures élancées en écoulements non uniformes	60
4.1	Théorie	61
4.1.1	Caractéristiques de la configuration	62
4.1.2	Systèmes d'ondes admissibles	63
4.1.3	Fréquence des systèmes d'ondes	66
4.1.4	Forme des systèmes (P) et (S)	67
4.1.5	Effet du ratio des vitesses réduites R	69
4.1.6	Apparition d'ondes stationnaires	72
4.1.7	Compétition des échelles de temps et d'espace	73
4.2	Comparaisons avec des calculs DNS	78
4.2.1	Caractéristiques du cas test	78
4.2.2	Forme spatiale des modes	80
4.2.3	Temps d'envahissement	81
4.3	Conclusion.	84
5	Conclusions et perspectives	85
5.1	Conclusions importantes de la thèse	85
5.2	Perspectives de travaux futurs	88
A	Publications	97

Chapitre 1

Introduction

La rareté ainsi que l'augmentation du prix du pétrole incitent depuis quelques années les industriels à exploiter des champs pétroliers offshore situés à des profondeurs marines de plus en plus importantes. Le savoir, ainsi que les technologies qui en découlent, doivent donc nécessairement progresser afin de faire face aux défis techniques liés à cette activité en évolution. Les liaisons fond-surface, par exemple les risers et les lignes d'ancrage soumis aux courants marins, peuvent avoir des comportements vibratoires encore mal compris à ce jour.

Cette thèse concerne donc les vibrations induites par vortex de structures élancées en écoulements uniformes et non uniformes en lien avec cette problématique. A l'intérieur de cette introduction, nous abordons en premier le sujet de telles vibrations pour des structures rigides montées élastiquement. Notamment, les points importants de l'accrochage sont soulignés. Cette revue constitue la base théorique sur les VIV qui est ensuite utilisée pour identifier les questions encore ouvertes concernant les vibrations induites par vortex de structures élancées, ou structures souples. Nous montrons également la justification pratique d'un tel questionnement avec l'exemple concret des liaisons fond-surface utilisées dans l'industrie pétrolière offshore. Nous effectuons ensuite une revue de la littérature orientée sur ces questions. Nous terminons cette introduction en présentant la méthode de modélisation que nous utiliserons pour y répondre.

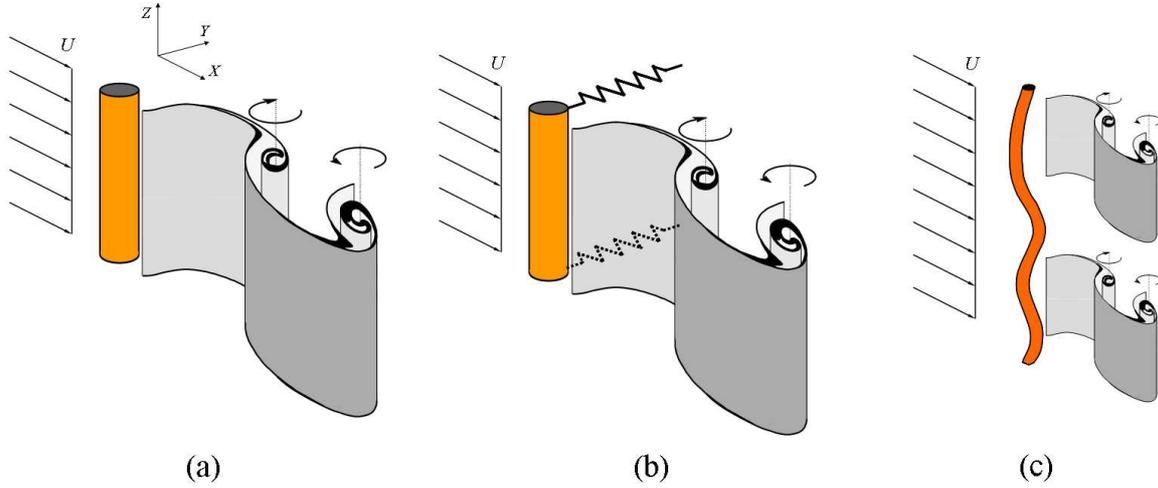


FIGURE 1.1: (a) Allée de sillage pour un cylindre fixe, (b) cylindre rigide supporté élastiquement, (c) structure élancée ou structure souple.

1.1 Vibration induite par vortex d'un cylindre rigide

1.1.1 Sillage pour un cylindre fixe

L'écoulement autour d'un cylindre fixe de section circulaire génère un profil de vitesse instable derrière ce dernier, Huerre & Monkewitz (1990) et Oertel (1990). Cette instabilité linéaire est de nature absolue, c'est-à-dire que les perturbations croissent localement et conduisent, après l'action limitative des non linéarités du système, à une oscillation auto-entretenu envahissante (Triantafyllou *et al.*, 1986). Dans ce cas précis, ceci se matérialise sous la forme bien connue de l'allée tourbillonnaire de Bénard-Karman. La figure 1.1a illustre l'allée de sillage qui se développe derrière un cylindre fixe.

C'est à Strouhal que l'on doit l'expression de la fréquence de détachement tourbillonnaire (Strouhal, 1878). En fait, ce dernier n'a pas effectué ses observations sur le sillage lui-même mais indirectement par le bruit émis par une corde tendue. Selon ses observations la fréquence varie proportionnellement à la vitesse de l'écoulement et inversement au diamètre

$$f_v = S_T \frac{U}{D} \quad (1.1)$$

où f_v est la fréquence du détachement, U la vitesse d'écoulement, D le diamètre et S_T le nombre de Strouhal.

1.1.2 Sillage pour un cylindre en mouvement forcé

L'obstacle, s'il est lui-même en mouvement, agit sur le sillage. Pour bien interpréter les différents effets, on utilise un second paramètre sans dimension : la vitesse réduite

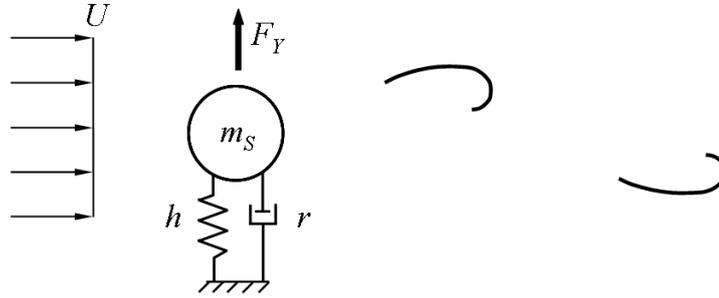


FIGURE 1.2: Schéma du système cylindre-sillage.

(Blevins, 1990)

$$U_R = \frac{U}{fD}, \quad (1.2)$$

où f est la fréquence du mouvement périodique prescrit du solide. Cette dernière exprime le rapport entre le temps caractéristique du solide ($1/f$) et le temps de convection du fluide (D/U). Bishop & Hassan (1964) rapportent des résultats d'une campagne expérimentale où ils ont mesuré l'effet d'un mouvement sinusoïdal du cylindre à amplitude et fréquence prescrites sur le sillage. Ils ont montré que l'amplitude de la portance est amplifiée de façon significative lorsque la fréquence du mouvement du cylindre se rapproche de celle du sillage et que la phase effectue un saut d'environ 180° . Selon la même méthode expérimentale, Sarpkaya (1978) et Gopalkrishnan (1993), mesurent la force fluctuante ressentie par un cylindre rigide en mouvement prescrit. Comme Bishop et Hassan, ils trouvent que l'amplitude de cette force ainsi que sa phase avec le cylindre dépendent de la vitesse réduite et de l'amplitude des oscillations forcées. Toujours en mouvement forcé, Stansby (1976) montre que la fréquence du détachement tourbillonnaire s'accroche à celle du cylindre lorsque la vitesse réduite est proche de $1/S_T$. Ces résultats montrent que le sillage répond fortement au mouvement de l'obstacle. Nous discutons au prochain paragraphe du couplage fort qui se produit lorsque le système cylindre-sillage interagit librement.

1.1.3 Accrochage cylindre-sillage

Nous étudions ici la réponse d'un cylindre de masse m_S supporté par un ressort de rigidité h et un amortisseur r lorsque ce dernier interagit avec son sillage figure 1.2. L'équation dynamique de cette structure s'écrit :

$$m_S \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + r \frac{\partial Y}{\partial T} + hY = F_Y, \quad (1.3)$$

où T est le temps et F_Y la force de portance fluctuante. Il est d'usage d'exprimer cette dernière selon le coefficient de portance fluctuant C_L :

$$F_Y = \frac{1}{2} \rho D U^2 C_L, \quad C_L(Y, \frac{\partial Y}{\partial T}, \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2}, T). \quad (1.4)$$

Deux nouveaux paramètres importants apparaissent ici : le nombre de masse μ et le ratio d'amortissement ξ de la structure.

$$\mu = \frac{(m_S + \frac{\pi}{4}\rho D^2 C_{M_0})}{\rho D^2}, \quad \xi = \frac{r}{2\sqrt{hm_S}}. \quad (1.5)$$

où C_{M_0} est le coefficient de masse ajoutée du fluide au repos et ρ la densité du fluide. La vitesse réduite, dans ce cas-ci, est définie avec la fréquence naturelle du cylindre dans l'eau stagnante f_S .

$$f_S = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h}{m_T}}, \quad (1.6)$$

où $m_T = \mu\rho D^2$. La figure 1.3 montre l'évolution de l'amplitude et de la fréquence des vibrations du cylindre en fonction de la vitesse réduite. L'amplitude de vibration est importante lorsque la vitesse réduite est de l'ordre de l'inverse du nombre de Strouhal. Dans cette zone, la fréquence de vibration du cylindre, mais également la fréquence principale du sillage, dévient de la loi de Strouhal (figure 1.3). Ce régime, caractérisé par le fait que la fréquence de vibration et la fréquence du sillage soient solidaires, est couramment appelé accrochage (*lock-in*).

Mis à part le comportement de la fréquence, nous choisissons de souligner trois points importants à propos de la physique de l'accrochage. Premièrement, l'amplitude maximale du mouvement se limite à l'ordre du diamètre du cylindre. Elle dépend du nombre de masse et du ratio d'amortissement du système. L'amplitude de vibration augmente lorsque ces deux paramètres diminuent (Williamson & Govardhan, 2004). Shiels *et al.* (2001) démontrent que lorsque le ratio d'amortissement et le nombre de masse tendent vers zéro, l'amplitude se limite à une valeur proche du diamètre. En deuxième point, l'étendue de la plage d'accrochage augmente lorsque le nombre de masse et le ratio d'amortissement diminuent (King *et al.*, 1973, Griffin & Ramberg, 1982, Khalak & Williamson, 1997). Le troisième point concerne le coefficient de traînée moyen. Ce dernier s'exprime par

$$C_D = \frac{F_X}{\frac{1}{2}\rho DU^2}, \quad (1.7)$$

où F_X est la force moyenne appliquée sur le cylindre dans la direction de l'écoulement (direction X sur la figure 1.1). Lorsqu'il y a accrochage, cette quantité augmente de façon significative (voir Tanida *et al.*, 1973 et Sarpkaya, 1978 pour un cylindre rigide et Chaplin *et al.*, 2005*b* et Vandiver, 1983 pour des structures souples). Par exemple, Sarpkaya (1978), trouve expérimentalement pour un cylindre rigide que le coefficient de traînée moyen atteint presque le triple de la valeur mesurée dans le cas où ce dernier est fixe.

1.1.4 Modélisation des vibrations induites par vortex.

De nombreux travaux théoriques ont été effectués depuis les années 70 afin de comprendre et surtout prédire les vibrations induites par vortex. Nous décrivons ici les

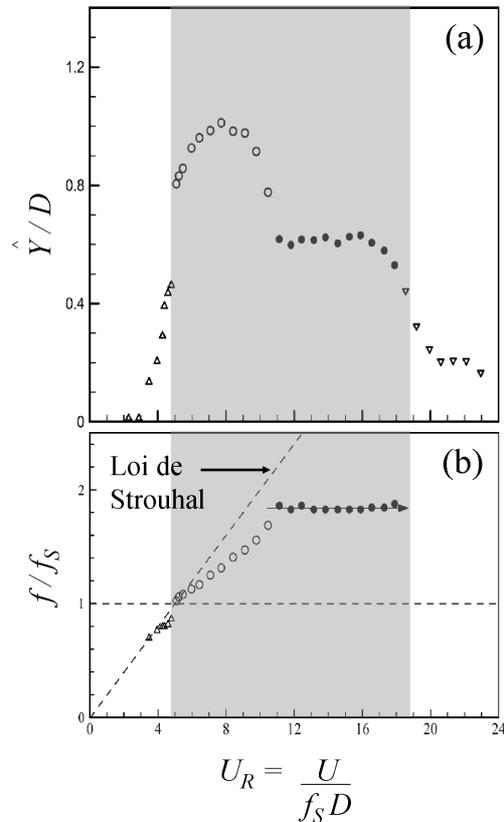


FIGURE 1.3: Evolution de l'amplitude de vibration (a) et de la fréquence (b) pour un cylindre avec $\mu = 1.73$ et $\xi = 0.0045$ (Govardhan & Williamson, 2004). La zone en gris délimite la plage d'accrochage.

méthodes les plus classiques. On évoque également rapidement le sujet des VIV de structures souples, comme les câbles et les poutres tendues.

Méthodes numériques (DNS)

Une des méthodes consiste à résoudre numériquement les équations de Navier Stokes autour du cylindre pour en déduire les efforts sur ce dernier. On calcule ainsi son mouvement à chaque pas de temps et le forçage conséquent appliqué au fluide. Ce forçage peut être pris en compte de différentes façons. On peut par exemple utiliser un système de coordonnées solide à l'oscillateur mécanique (Newman & Karniadakis, 1997, Willden & Graham, 2001), un maillage fluide déformable (Ahn & Kallinderis, 2006) ou une combinaison entre un système de coordonnées eulérien (appliqué au fluide) et lagrangien (appliqué au solide) (Peskin, 2003). En résolvant les équations tridimensionnelles du fluide, on peut reproduire assez fidèlement la physique de l'accrochage (Lucor *et al.*, 2005, Blackburn *et al.*, 2001). Les simulations bidimensionnelles, moins coûteuses en temps de calcul représentent une bonne approximation (Willden & Graham, 2001, Willden, 2006,

Prasanth & Mittal, 2008). Pour les structures souples, l'approche tridimensionnelle devient rapidement prohibitive par rapport au temps de calcul puisque le coût augmente de façon importante dans le cas de hauts Reynolds et de longues structures. Ceci explique le peu de résultats publiés (Newman & Karniadakis, 1997, Evangelinos & Karniadakis, 1999 et Lucor *et al.*, 2006). Une des façons de procéder pour alléger le temps de calcul est de simuler par tranches bidimensionnelles disposées à égale distance sur la structure (Willden & Graham, 2004, Yamamoto *et al.*, 2004).

Modèle de force décomposée

Puisque, comme il a été montré plus tôt, le mouvement du cylindre affecte les forces appliquées sur lui par son sillage, il est cohérent de considérer le forçage F_Y de l'équation 1.3 comme fonction des caractéristiques de ce mouvement. Cette idée est la base du modèle de force décomposée de Sarpkaya (1978). Selon ce dernier, on peut exprimer la force F_Y de l'équation 1.3 de la façon suivante

$$F_Y = -m_A(U_R, \hat{Y}) \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} - c_A(U_R, \hat{Y}) \frac{\partial Y}{\partial T}, \quad (1.8)$$

où m_A et c_A sont respectivement la masse et l'amortissement ajoutés. Le terme \hat{Y} est l'amplitude de vibration du cylindre. Selon Sarpkaya (1978), cette façon de faire reproduit les amplitudes de vibrations trouvées en fonction de la vitesse réduite. Cependant, le modèle nécessite les données expérimentales pour m_A et c_A obtenues en vibration forcée pour différentes amplitudes et vitesses réduites. Pour les structures souples, une des techniques consiste à séparer ces dernières en zones où le fluide injecte de l'énergie et où elle en soutire, et ce, pour chaque mode structurel. L'amplitude de chaque mode est donc obtenue à partir d'une balance d'énergie (Vandiver, 1994).

Modèles d'oscillateur fluide

Selon ce que nous avons rapporté à la section 1.1.2, les caractéristiques du sillage varient avec le mouvement du cylindre. Bishop & Hassan (1964) notent que les comportements observés expérimentalement se rapprochent de ceux d'un oscillateur mécanique sous forçage périodique. Les auteurs concluent d'ailleurs en proposant de modéliser le sillage comme tel. Cette idée constitue la base des modèles de type oscillateur fluide : on modélise une partie du sillage comme un oscillateur mécanique forcé par le mouvement du cylindre (figure 1.4). Cet oscillateur est non linéaire pour modéliser le caractère limitatif des VIV. Depuis le premier modèle de ce type par Hartlen & Currie (1970), plusieurs autres ont vu le jour (par exemple Skop & Griffin, 1973, Skop & Balasubramanian, 1997, Iwan & Blevins, 1974). Gabbai & Benaroya (2008) montrent qu'un certain nombre de ces modèles peuvent être dérivés en utilisant le principe d'Hamilton démontrant ainsi leur origine physique.

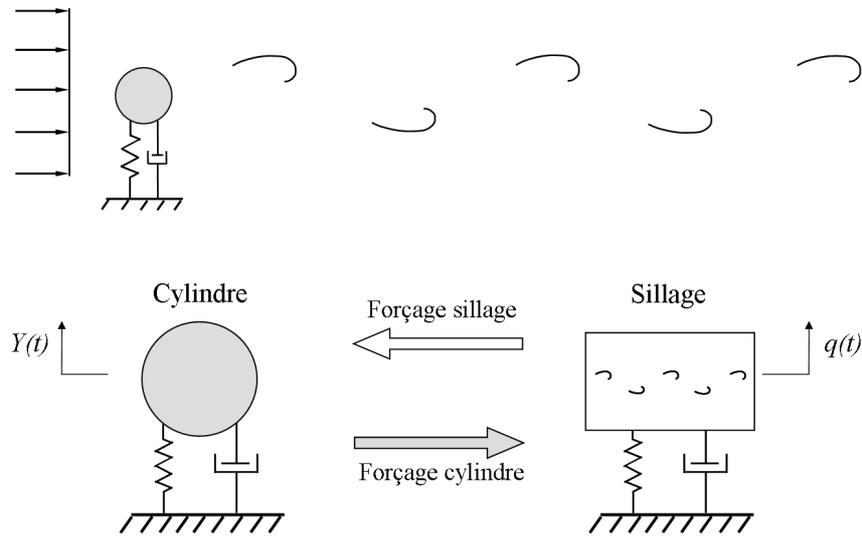


FIGURE 1.4: Illustration du concept des modèles oscillateur fluide.

1.2 VIV de structures souples

A la dernière section, nous avons expliqué les points importants des vibrations induites par vortex (VIV) d'un cylindre rigide supporté élastiquement. Les caractéristiques que nous avons notées sur l'accrochage concernent l'amplitude de vibration, la plage de vitesses où il se produit et l'amplification de la traînée qui en résulte. Les connaissances acquises sur ces caractéristiques, obtenues à la suite d'un nombre important d'études expérimentales et théoriques, sont considérables (voir Williamson & Govardhan, 2004, Sarpkaya, 2004, Gabbai & Benaroya, 2005). Ces éléments principaux de l'accrochage nous permettent maintenant de soulever plusieurs questions importantes concernant les VIV de structures élancées.

1.2.1 Considérations pratiques : Risers

Il existe des applications pratiques importantes qui motivent l'étude des VIV. En effet, les vibrations soutenues causées par le détachement tourbillonnaire entraînent la fatigue des matériaux, ce qui réduit la vie en service des structures offshore, notamment les *risers*. Notons également que ce mécanisme de vibrations constitue un problème pour d'autres structures comme par exemple : les cheminées, les lignes de haute tension et les faisceaux de tubes d'échangeurs de chaleur.

En ce qui a trait aux risers, ces éléments de tuyauteries sont utilisés pour transporter le pétrole à partir des têtes de puits situées sur le sol marin jusqu'à la plateforme d'exploitation qui se trouve à la surface de l'eau (figure 1.5). Ils servent également pour acheminer, selon le chemin inverse, des fluides à injecter dans le réservoir pétrolier pour

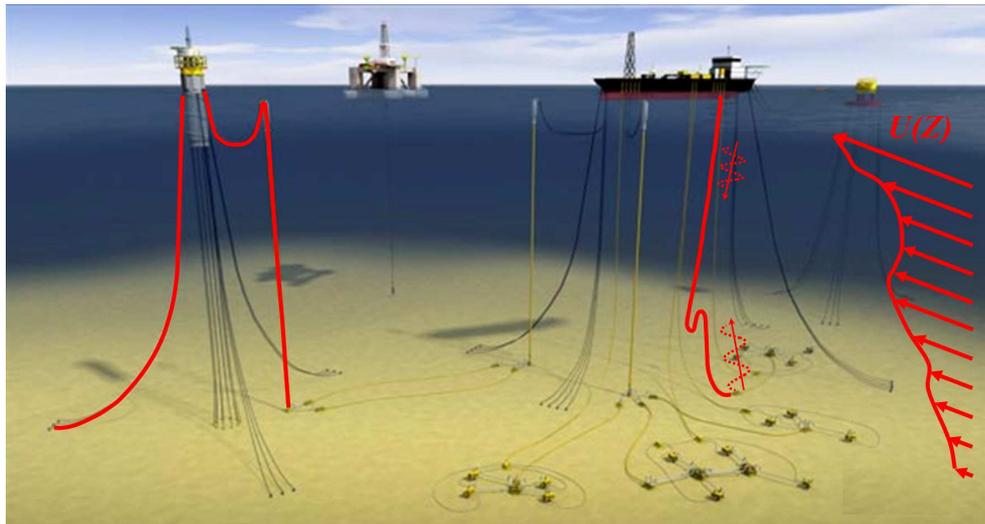


FIGURE 1.5: Différents types de configurations de risers utilisés dans l'industrie pétrolière offshore. Source : *mcs.com*

à augmenter la pression (eau chaude, CO_2). La distance verticale à parcourir entre la plateforme et le sol marin peut aller au-delà de 1000 mètres. Par exemple, le champ de Tupi près des côtes brésiliennes est situé à plus de 2200 mètres sous l'eau. Ces structures, ainsi que les lignes d'ancrage des plateformes, sont susceptibles de vibrer sous l'influence de leur sillage causé par les courants marins. Les caractéristiques du problème se résument en quatre points. Premièrement, le rapport d'aspect (longueur sur diamètre) est très grand (de l'ordre de 10^3). Deuxièmement, l'écoulement est non uniforme puisque les courants marins varient avec la profondeur. Troisièmement, le nombre de masse μ est de l'ordre de 1 à 10. Quatrièmement, les structures considérées ont un faible amortissement structural. Les deux derniers points montrent que la réponse aura une amplitude de l'ordre du diamètre de la structure (Govardhan & Williamson, 2004). Les deux premiers conditionnent plutôt la forme que prendra cette réponse.

Les principaux paramètres influençant la vie en fatigue d'une structure sont l'amplitude de la contrainte alternée, l'intensité de la contrainte moyenne et le nombre de cycles par unité de temps, c'est-à-dire la fréquence. En dehors des effets du mouvement imposés de la houle, la contrainte fluctuante est essentiellement associée à la flexion due aux ondes de VIV : l'amplitude et la longueur des ondes sont donc les éléments importants ici. Pour ce qui est de la contrainte moyenne, elle a deux composantes : une due à la gravité et l'autre à la traînée. Il est important de mentionner ici que la traînée est source d'autres problèmes comme le déplacement des risers (occasionnant possiblement des collisions entre eux) et l'augmentation de la charge des attaches de risers au niveau de la plateforme. Comme mentionné au paragraphe 1.1.3, la traînée est plus importante lorsqu'il y a accrochage. On peut également rajouter que selon que la forme de la réponse du riser est sous forme d'ondes de vibrations stationnaires ou propagatrices les dommages

en fatigue ne seront pas localisés de la même façon. En excluant l'amplitude que nous considérons de l'ordre du diamètre, quatre facteurs sont donc importants pour la fatigue :

- (a) la longueur d'ondes de vibration,
- (b) la fréquence,
- (c) la présence ou non d'accrochage,
- (d) la nature propagatrice ou stationnaire des ondes.

Malgré les résultats importants existants sur l'accrochage d'un cylindre rigide supporté élastiquement, section 1.1, les vibrations induites par vortex de systèmes longs en écoulements non uniformes, et même en écoulements uniformes, restent un sujet mal compris.

Tenter d'apporter des réponses concernant les quatre facteurs mentionnés implique plusieurs questions. Premièrement, *quelle est l'étendue de la plage d'accrochage des différentes fréquences naturelles de la structure lorsque l'écoulement est uniforme?* Deuxièmement, *trouve-t-on toujours un accrochage entre le sillage et une fréquence naturelle de la structure en écoulements uniformes et non uniformes?* Troisièmement, *quelles sont les conditions favorables à l'établissement d'ondes stationnaires.* Quatrièmement, *en écoulements non uniformes, existe-t-il une seule fréquence de vibration ou plusieurs? Si plusieurs fréquences sont présentes, le sont-elles toutes pour l'ensemble du système?* Les quatre paragraphes suivants présentent l'état des connaissances sur les quatre questions posées.

1.2.2 Accrochage multiple

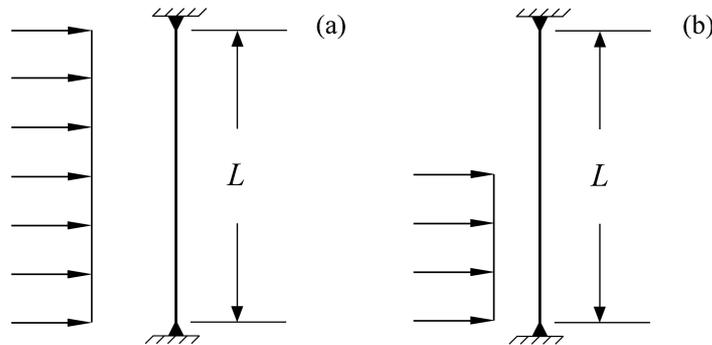


FIGURE 1.6: Configuration expérimentale pour (a) King (1995), Trim *et al.* (2005) et (b) Chaplin *et al.* (2005b).

Nous présentons ici les résultats de deux expériences (King, 1995, Trim *et al.*, 2005). Pour ces dernières, une structure souple de longueur L articulée à ses extrémités est soumise à un écoulement uniforme (figure 1.6a). Les caractéristiques de ces deux expériences sont présentées au tableau 1.1. Pour de telles structures, on peut représenter le mouvement selon

$$Y(Z, T) = \sum Y_n(T) \sin\left(\frac{n\pi Z}{L}\right), \quad (1.9)$$

où n est le numéro de mode spatial et $Y_n(T)$ est le facteur modal correspondant. La figure 1.7 présente l'évolution de la fréquence f du mouvement et du numéro de mode, n , dominant en fonction de la vitesse d'écoulement pour les deux expériences. Pour le premier cas, on constate que la fréquence d'oscillation évolue de façon discontinue, comme un escalier. Chaque marche de cet escalier correspond à la plage d'accrochage d'un mode. Par contre, on voit que le comportement est différent pour la deuxième expérience : la variation est linéaire. La figure 1.7c montre l'évolution du numéro du mode dominant. On voit que différents modes dominent pour une plage de vitesses restreinte. La plage d'accrochage des différents modes est donc plus réduite pour la deuxième expérience. Par contre, les caractéristiques de la structure pour les deux expériences sont différentes en ce qui a trait au nombre de masse et de la densité modale (nombre de fréquences naturelles de la structure contenues à l'intérieur d'une plage de 1 Hertz). Il est difficile ici d'évaluer leurs effets respectifs. On remarque en examinant la figure 1.7a qu'à la limite des différentes plages d'accrochage, la structure peut répondre sur différents modes pour une vitesse donnée. Ce phénomène est l'objet du prochain paragraphe.

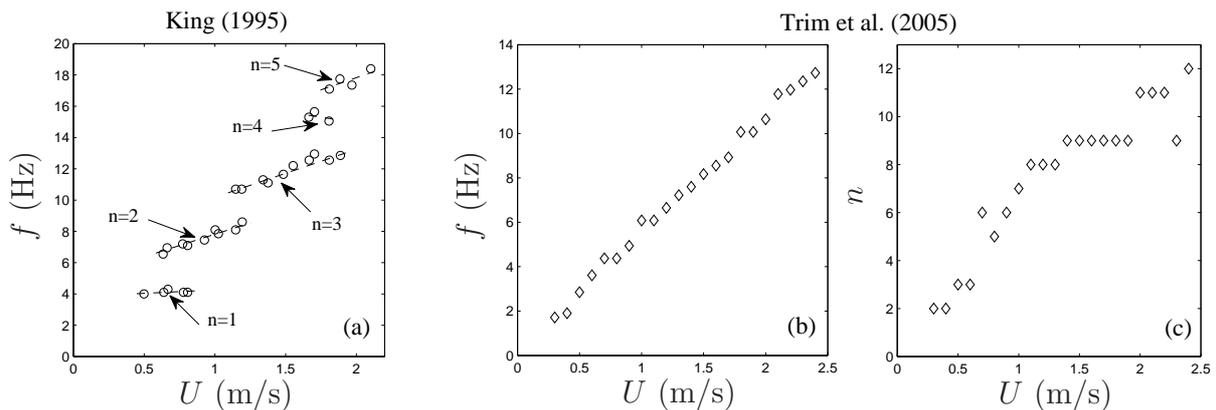


FIGURE 1.7: Résultats expérimentaux sur l'évolution de la fréquence de vibration f et du numéro de mode n en accrochage en fonction de la vitesse d'écoulement : (a) (King, 1995), (b) et (c) évolution de la fréquence de vibration et du numéro de mode dominant (Trim *et al.*, 2005).

1.2.3 Accrochage robuste

Chaplin *et al.* (2005b) rapportent des mesures expérimentales de VIV pour une poutre tendue en écoulements uniformes sur une moitié de sa longueur (l'autre moitié étant dans une eau stagnante). La configuration apparaît à la figure (1.6b). Les auteurs mentionnent que dans la plupart des conditions testées la réponse de la structure est régulière, une seule forme spatiale associée à une seule fréquence dominante. Cependant, pour un certain nombre de conditions, la réponse est fortement modulée en temps. La figure 1.8 illustre un exemple de ce genre de situation. On y trouve l'évolution avec le temps

	Expérience 1	Expérience 2
Référence	King (1995)	Trim <i>et al.</i> (2005)
Nombre de masse μ	4.16	2.04
Densité modale $1/f_{S_1}$	0.256	1.30
Tension adimensionnée $\Theta D^2/EI$	∞	0.0980
Rapport d'aspect L/D	280	1400
Reynolds Re	9 000 à 40 000	6 000 à 70 000

TABLE 1.1: Propriétés mécaniques de la structure utilisée dans les expériences de King (1995) et Trim *et al.* (2005).

des facteurs modaux des modes 7 et 8 (Y_n dans l'équation 1.9). Elle montre également l'évolution de la pseudo-fréquence avec le temps de Y_7 et Y_8 obtenue par la méthode des ondelettes. On remarque que le temps de la réponse se sépare en 2 régimes : le premier dominé par la réponse du mode 8 (régime A) et le deuxième dominé par le mode 7 (régime B). Les auteurs expliquent que le changement de régime est causé vraisemblablement par des perturbations dans le système comme des vibrations ponctuelles dans le montage expérimental. Pour certains cas, aucun régime robuste n'est atteint. L'évolution des pseudo-fréquences avec le temps montre clairement que les deux régimes ont des fréquences distinctes. Le câble vibre donc principalement avec une seule fréquence dominante pour chaque régime. Ces deux fréquences dominantes se partagent le temps. Ce phénomène est également observé en écoulements non uniformes (Swithenbank, 2007, Vandiver *et al.*, 1996). Pour ces cas particuliers, les méthodes de calculs de VIV prédisent une réponse dominée par l'un ou l'autre des modes (voire Chaplin *et al.* 2005a). Cependant, ces derniers ne tiennent pas compte de la présence ou non de partage en temps des fréquences. Ce détail est important puisque l'absence d'un accrochage robuste implique une traînée moins importante, Chaplin *et al.* (2005b).

1.2.4 Ondes de VIV

En écoulements non uniformes, une structure courte aura une réponse sous forme d'ondes stationnaires, figure 1.9a (Vandiver, 1993). Cependant, lorsque cette dernière est longue, elle répond par des ondes propagatrices, figure 1.9b. Ces comportements ont été observés expérimentalement sur le terrain (Alexander, 1981, Marcollo *et al.*, 2007) et en laboratoire (Lie & Kaasen, 2006). Vandiver (1993) établit un critère pour évaluer quel type d'ondes sera observé

$$\begin{aligned}
 &\text{si } \zeta n < 0.2 && \text{ondes stationnaires} \\
 &\text{si } \zeta n > 2 && \text{ondes propagatrices}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

où n est le numéro du mode sollicité par le sillage et ζ est l'amortissement de ce mode, incluant l'amortissement fluide. Le numéro du mode est toujours défini selon la relation

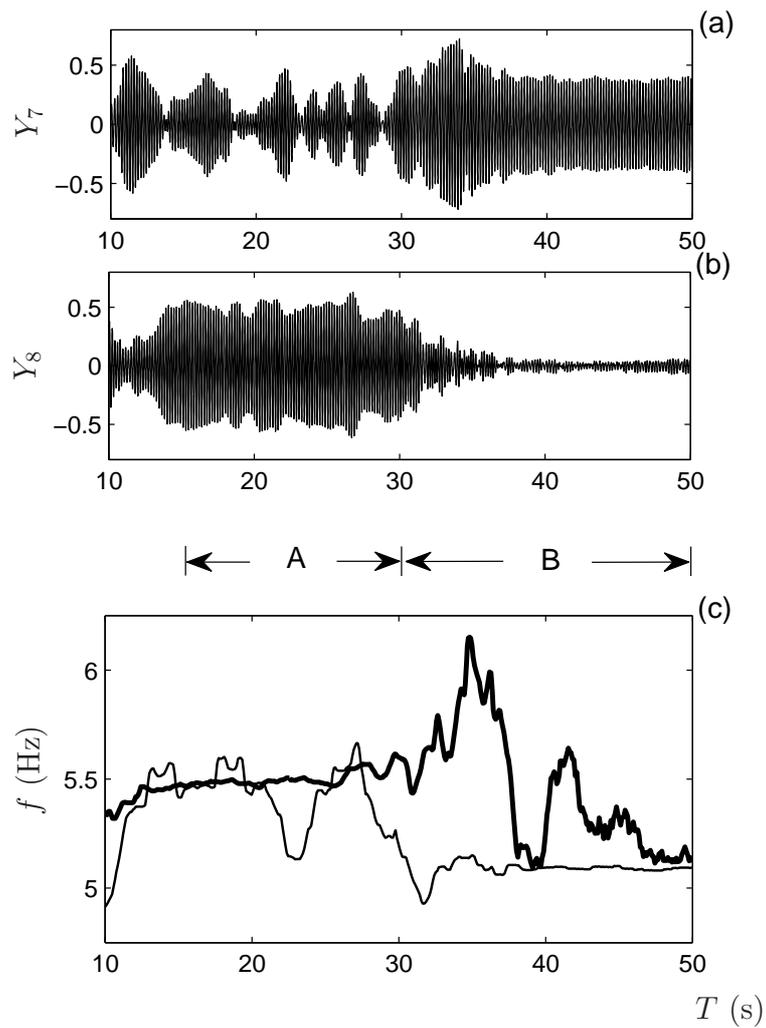


FIGURE 1.8: Cas de partage en temps rapporté par Chaplin *et al.* (2005b) : (a)-(b) évolution avec le temps de Y_7 et Y_8 , (c) évolution avec le temps de la pseudo-fréquence du mode 7 (trait fin) et du mode 8 (trait gras).

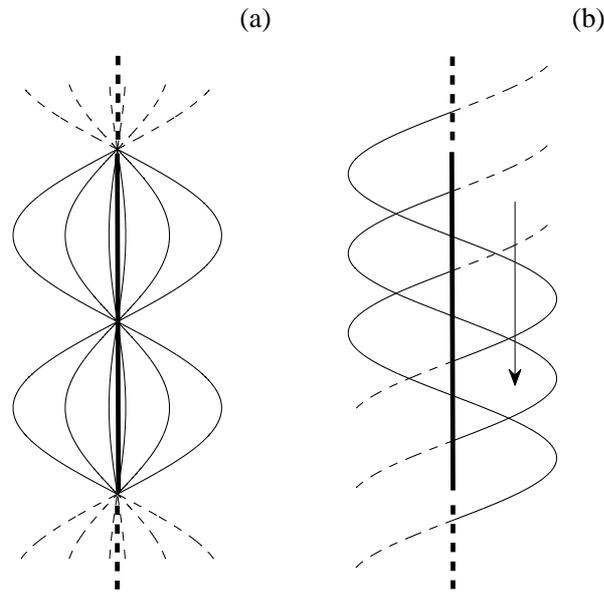


FIGURE 1.9: (a) onde stationnaire, (b) onde propagatrice.

1.9. Ce critère qualitatif établit donc que l'on doit juger de la longueur d'une structure par rapport à la longueur des ondes et de l'amortissement associé. Pour $\zeta n > 2$ les ondes de VIV générées sont trop atténuées avant d'atteindre les attaches où elles sont réfléchies. Une onde stationnaire ne peut donc pas se former par interférence (figure 1.10b). Pour $\zeta n < 0.2$, c'est le cas contraire : les ondes sont trop peu atténuées et une onde stationnaire apparaît. Pour $0.2 < \zeta n < 2$, on retrouve un mélange d'ondes propagatrices et d'ondes stationnaires. Dans ce cas, le critère ne donne aucune information sur la répartition spatiale de ces deux types d'ondes (voir figure 1.11).

1.2.5 Séparation en espace des fréquences de vibration

Kim *et al.* (1985) rapportent des résultats expérimentaux sur un câble ayant un rapport d'aspect élevé ($L/D \sim 10^5$) en écoulements non uniformes. Les fréquences de vibration qu'ils ont mesurées aux extrémités du câble et au milieu sont nettement différentes. Les auteurs basent leur raisonnement sur l'atténuation des ondes par l'amortissement pour expliquer ce phénomène. Imaginons un câble ayant une longueur plus grande de plusieurs ordres de grandeur que les longueurs d'ondes de vibration. Si ce dernier est soumis à un écoulement non uniforme, des ondes seront irradiées à partir des zones d'accrochage locales. Ces ondes diminueront en amplitude en se propageant à cause de l'amortissement. Les auteurs avancent l'idée que dans ce cas, ces ondes de différentes fréquences auront une amplitude négligeable lorsqu'elles auront atteint une autre région de fréquence différente (figure 1.12).

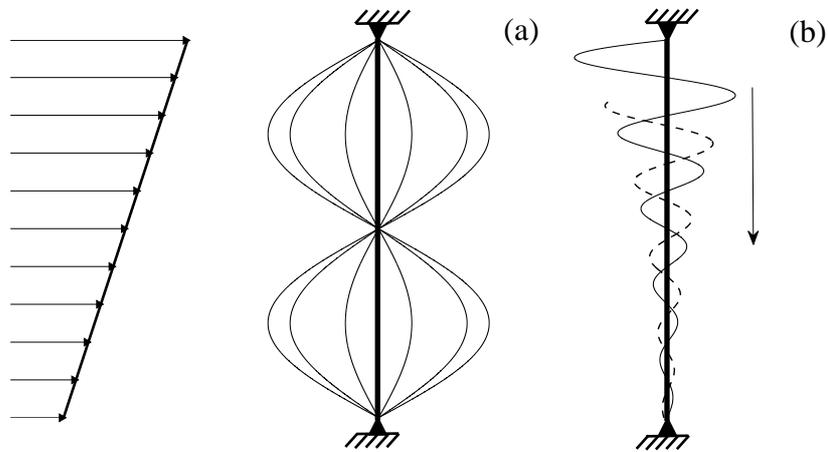


FIGURE 1.10: Illustration du critère de Vandiver (1993) : (a) grande longueur d'ondes, (b) petite longueur d'ondes.

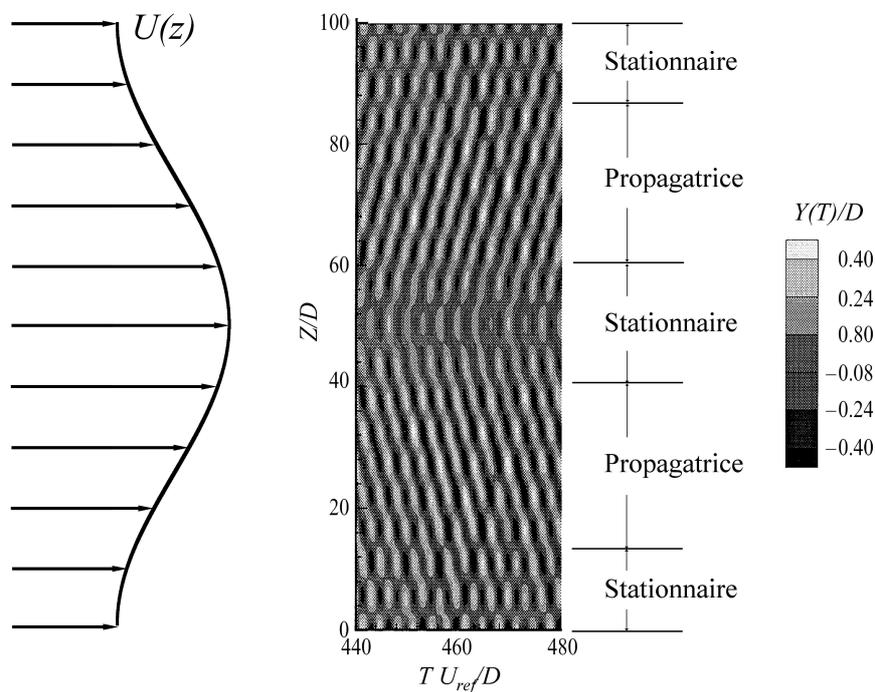


FIGURE 1.11: Evolution avec le temps et l'espace du mouvement d'un câble aux conditions limites périodiques soumis à un écoulement non uniforme calculé par DNS (Newman & Karniadakis, 1997).

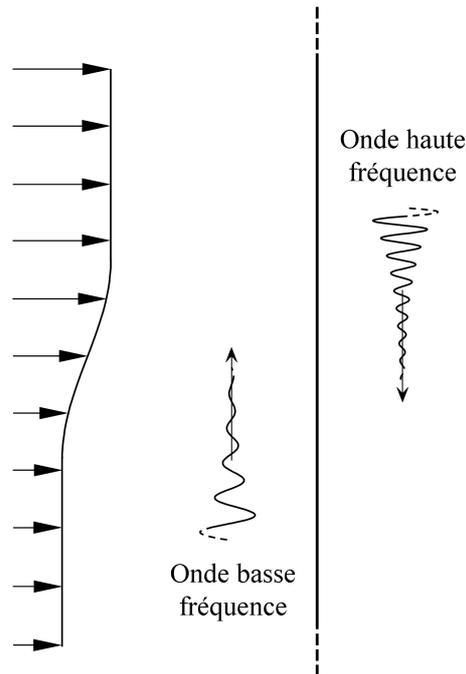


FIGURE 1.12: Principe évoqué par Kim *et al.* (1985) pour expliquer la séparation des fréquences de vibration en espace. Les ondes provenant de chacune des zones d'écoulement constants sont atténuées avant d'atteindre les zones de différentes vitesses.

Lucor *et al.* (2006) rapportent des résultats de calculs numériques tridimensionnels DNS sur une poutre tendue soumise à deux écoulements non uniformes : l'un ayant un profil linéaire et l'autre exponentiel, figure 1.13. La figure 1.13 montre le spectre d'amplitude moyenné en espace pour les profils linéaire et exponentiel. On constate que pour le cas linéairement cisailé, les fréquences adimensionnelles dominantes sont regroupées autour d'une valeur de 0.2. Avec le profil d'écoulement exponentiel, plusieurs fréquences sont présentes. D'après les auteurs, les différentes amplitudes de ces fréquences varient avec la position : les hautes fréquences ont une amplitude plus importante en haut de la structure et vice versa pour les basses fréquences. Il existe donc une séparation spatiale des fréquences de vibration dans ce cas similaire à celle observée par Kim *et al.* (1985).

L'argument de l'atténuation des ondes de Kim *et al.* (1985) n'explique pas ici pourquoi on ne retrouve pas également une séparation de fréquences pour le profil d'écoulement linéaire : la longueur d'onde pour les fréquences élevées est similaire pour les deux profils d'écoulement, Lucor *et al.* (2006). De plus, selon Vandiver (1993) l'amortissement fluide est proportionnel à la vitesse d'écoulement. Donc, l'amortissement est plus élevé dans le cas du profil linéaire puisque la vitesse d'écoulement y est plus importante en moyenne. L'argumentation sur l'amortissement des ondes pour expliquer la séparation en espace

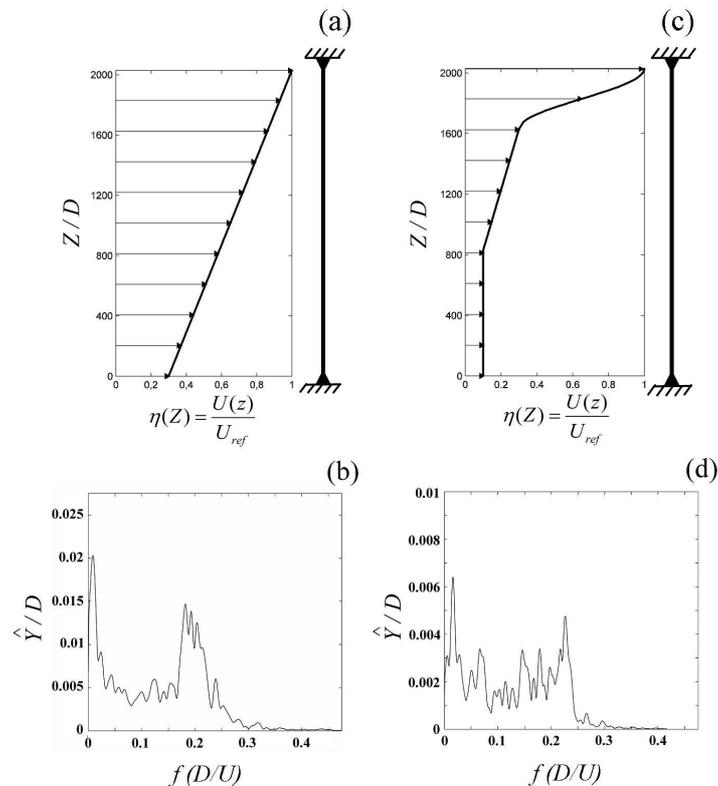


FIGURE 1.13: Cas de séparation de fréquence obtenus par Lucor *et al.* (2006) : (a) profil d'écoulement linéaire, (b) amplitude de vibration de la poutre moyennée en espace en fonction de la fréquence pour le profil d'écoulement linéaire, (c) profil d'écoulement exponentiel, (d) amplitude de vibration de la poutre moyennée en espace en fonction de la fréquence pour le profil d'écoulement exponentiel.

des fréquences de vibration n'explique pas ici les résultats de calculs DNS de Lucor *et al.* (2006)

1.3 Modélisations choisies

D'après cette revue sur la dynamique des structures élancées sous l'effet du détachement tourbillonnaire il apparaît que certains points sont mal compris, notamment en ce qui concerne : (a) l'étendue de la plage d'accrochage pour chaque fréquence en écoulements uniformes, (b) la présence ou non de partage en temps de la réponse vibratoire (ou en d'autres mots l'absence de réponse régulière et robuste), (c) le caractère propagateur ou stationnaire des ondes de VIV et (d) la présence ou non de la séparation en espace des fréquences de vibrations en écoulements non uniformes. Ces éléments sont importants pour l'évaluation de la vie en fatigue de ces structures. Nous choisissons d'aborder ces

points à l'aide d'une approche théorique basée sur une modélisation du sillage par un oscillateur fluide.

1.3.1 Modèle d'oscillateur fluide de Facchinetti

Cylindre rigide supporté élastiquement

Le modèle de Facchinetti est présenté premièrement pour le cas simple d'un cylindre rigide monté élastiquement. Nous rappelons ici l'équation du mouvement d'une telle structure

$$m_S \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + r \frac{\partial Y}{\partial T} + hY = F_Y. \quad (1.11)$$

Facchinetti *et al.* (2004a) séparent la force fluide F_Y en trois parties : la première est la force provenant du sillage, la deuxième est une force inertielle due à la masse du fluide déplacé et la troisième est une force d'amortissement. Cette dernière est causée par la traînée moyenne et son expression est obtenue en linéarisant la projection de la force de traînée sur la direction transverse, voir Blevins (1990). La force F_Y s'écrit donc :

$$F_Y = \frac{1}{4} \rho U^2 D C_{L_0} q(T) - \frac{\pi}{4} \rho D^2 C_{M_0} \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} - \frac{1}{2} \rho D U C_D \frac{\partial Y}{\partial T}, \quad (1.12)$$

où C_{L_0} est le coefficient de portance fluctuante mesuré sur un cylindre fixe, C_D est le coefficient de traînée moyen pour un cylindre fixe et C_{M_0} est le coefficient de masse ajoutée pour un fluide non visqueux au repos ($C_{M_0} = 1$). Dans l'équation 1.12, la variable $q(T)$ représente l'amplification de la portance par rapport au cas du cylindre fixe, elle s'exprime

$$q(T) = \frac{2C_L(T)}{C_{L_0}}. \quad (1.13)$$

Le comportement de cette variable sillage est modélisé ici en utilisant l'équation de van der Pol

$$\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + \varepsilon \left(2\pi S_T \frac{U}{D} \right) (q^2 - 1) \frac{\partial q}{\partial T} + \left(2\pi S_T \frac{U}{D} \right)^2 q = B, \quad (1.14)$$

où B modélise le forçage que génère le mouvement du cylindre sur le sillage. Dans l'équation 1.14, l'amortissement négatif $-\varepsilon(\partial q/\partial T)$ permet la croissance en temps de l'amplitude de la variable q si cette dernière est perturbée de l'état $q = 0$. Ceci modélise le caractère instable de l'écoulement derrière un cylindre fixe (section 1.1.1). A noter que la constante ε est une constante empirique. Le terme non linéaire, $\varepsilon q^2(\partial q/\partial T)$, négligeable pour de faibles amplitudes de q , assure la saturation, c'est-à-dire l'arrêt de la croissance et le maintient de l'amplitude de q à une valeur finie. La figure 1.14b montre l'évolution de la variable sillage en fonction du temps dans le cas d'un cylindre rigide fixe. Ces résultats sont obtenus en intégrant numériquement l'équation 1.14 pour $B = 0$. On y voit bien la croissance temporelle de l'amplitude due à l'amortissement linéaire négatif jusqu'à saturation causée par la non linéarité. Cette courbe est comparée avec les résultats expérimentaux de Strykowski & Sreenivasan (1990), figure 1.14a. La figure montre l'évolution temporelle

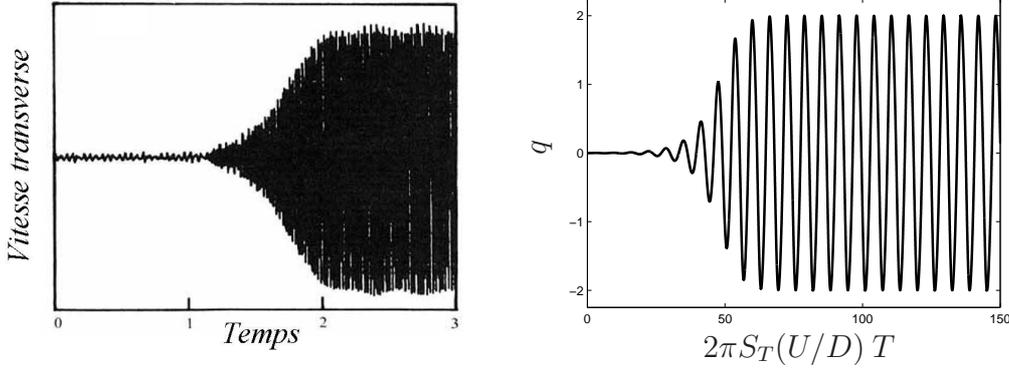


FIGURE 1.14: A gauche, l'évolution temporelle de la vitesse d'écoulement transverse en un point derrière un cylindre fixe, mesures expérimentales de Strykowski & Sreenivasan (1990). A droite, évolution temporelle de la variable sillage $q(t)$ obtenue par intégration numérique de l'équation 1.14, le cylindre est fixe ($B = 0$).

de la vitesse du fluide en un point donné dans le sillage d'un cylindre fixe. Cette vitesse est mesurée dans la direction perpendiculaire à l'écoulement moyen. L'équation de van der Pol reproduit bien qualitativement la tendance observée en expérience.

Dans Facchinetti *et al.* (2004a), une étude sur la formulation de B est présentée. Les résultats de cette étude montrent que le forçage provenant du mouvement du cylindre le plus approprié afin de reproduire la physique des VIV est proportionnel à l'accélération de la structure

$$B = \frac{A}{D} \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2}, \quad (1.15)$$

où A est une constante empirique. La valeur des constantes empiriques A et ϵ (equation 1.14) ont été calibrées pour reproduire des mesures expérimentales faites sur le sillage de cylindres rigides en mouvement forcé, $A = 12$ et $\epsilon = 0.3$ (voir Facchinetti *et al.*, 2004a). Nous utiliserons ces valeurs pour l'ensemble du manuscrit. Autre A et ϵ , trois autres constantes empiriques doivent être quantifiées, soit : C_{L_0} , C_D et S_T . L'interprétation physique de ces dernières a été présentée plus tôt. L'évolution de ces paramètres selon le nombre de Reynolds, $Re = UD/\nu$ où ν est la viscosité cinématique, est bien documentée (voir par exemple Norberg, 2003).

Le temps et le mouvement sans dimension s'écrivent

$$t = \frac{2\pi S_T U}{D} T, \quad y = \frac{Y}{D} \quad (1.16)$$

Les équations d'état selon ces nouvelles variables sans dimension s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(2\varrho\delta + \frac{\gamma}{\mu}\right) \frac{\partial y}{\partial t} + \delta^2 y = Mq, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \varepsilon (q^2 - 1) \frac{\partial q}{\partial t} + q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (1.18)$$

où le nombre de masse μ est défini par la relation 1.5 et les paramètres M , γ , δ , et ϱ s'expriment

$$\begin{aligned} M &= \frac{C_{L_0}}{16\pi^2 S_T^2 \mu}, & \gamma &= \frac{C_D}{4\pi S_T}, \\ \delta &= \frac{1}{S_T U_R}, & \varrho &= \frac{r}{2\sqrt{(m_S + \frac{\pi}{4}\rho D^2) h}}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Comme le mentionnent Facchinetti *et al.* (2004a), le terme M est un nombre sans dimension qui quantifie l'action du sillage sur le cylindre. On nomme couramment le terme γ paramètre de stall (Facchinetti *et al.*, 2004a).

La réponse trouvée du système est périodique et peut s'écrire $y(t) = \hat{y}\sin(\omega t)$ et $q(t) = \hat{q}\sin(\omega t - \phi_G)$. La figure 1.15 montre l'évolution des caractéristiques de la réponse en fonction de la vitesse réduite. Cette figure montre que le modèle de Facchinetti reproduit de façon qualitative la physique de l'accrochage, c'est-à-dire : la déviation de la fréquence du sillage, l'augmentation de l'amplitude de vibration du cylindre, l'amplification de la portance et le saut de l'angle de phase. De plus, le modèle de Facchinetti prédit l'existence d'un nombre de masse critique en dessous duquel la plage d'accrochage n'a plus de limite supérieure : l'accrochage persiste même pour des vitesses d'écoulements très élevées (figure 1.15e). Puisqu'ici les structures d'intérêts ont un faible nombre de masse (section 1.2.1), le modèle phénoménologique de Facchinetti démontre sa pertinence, du moins dans le cas d'un cylindre rigide monté élastiquement. Qu'en est-il pour les structures souples ?

Structures souples

Facchinetti *et al.* (2004b) et Mathelin & de Langre (2005) ont élargi le modèle aux structures souples en écoulements non uniformes. Pour une poutre de rigidité EI sous tension Θ , leur modèle s'écrit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\frac{\gamma\eta}{\mu}\right) \frac{\partial y}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = \eta^2 M q. \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \varepsilon\eta (q^2 - 1) \frac{\partial q}{\partial t} + \eta^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (1.21)$$

où

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{\Theta}{m_S + \frac{\pi}{4}\rho D^2 C_{M_0}} \left(\frac{1}{2\pi U_{ref}}\right)^2, \\ b^2 &= \frac{EI}{m_S + \frac{\pi}{4}\rho D^2 C_{M_0}} \left(\frac{1}{2\pi U_{ref} D}\right)^2, \\ \eta &= \frac{U(z)}{U_{ref}}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

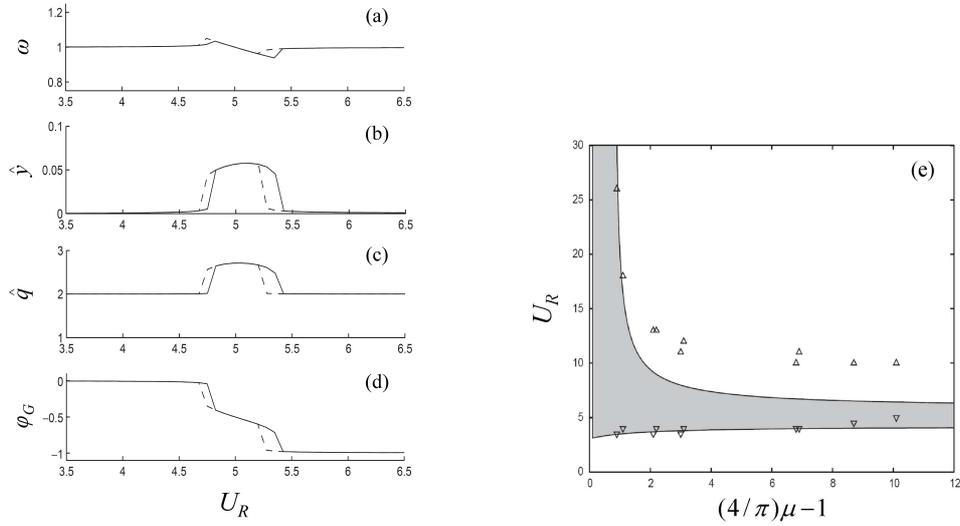


FIGURE 1.15: Prédiction du modèle de Facchinetti pour l'évolution avec la vitesse réduite de (a) la pulsation (b) l'amplitude du cylindre (c) l'amplification de la portance, (d) l'angle de phase entre le mouvement du cylindre et la fluctuation de portance (Facchinetti *et al.*, 2004a). En (e), évolution de la plage d'accrochage avec le nombre de masse, modèle de Facchinetti (zone grise), mesures expérimentales par Govardhan & Williamson (2000), (∇) début de la plage d'accrochage, (Δ) fin de la plage d'accrochage.

Dans l'équation 1.22, U_{ref} est une vitesse de référence arbitraire. Cette dernière est utilisée pour définir le temps adimensionnel t de l'équation 1.16. Aucun terme d'interaction en z n'est considéré ici sur la variable $q(z, t)$. Mathelin & de Langre (2005) montrent que l'interaction en z du sillage a un impact négligeable sur la réponse du système : l'interaction en espace du sillage se produit principalement de façon indirecte à l'aide du mouvement de la structure. De plus, l'amortissement structural n'est pas considéré ici.

En intégrant numériquement le système en temps et en espace à l'aide de la méthode des différences finies, Facchinetti *et al.* (2004b) comparent la prédiction du modèle oscillateur fluide et celles obtenues par calculs DNS tridimensionnels pour un câble tendu infini. La figure 1.16 montre la comparaison entre les deux méthodes de calculs. Les conditions initiales utilisées ici sont celles correspondant à une onde stationnaire. On peut voir que le modèle oscillateur fluide reproduit bien les résultats de calculs DNS en écoulements uniformes. Cependant, il n'existe pas de comparaison de ce type en écoulements *non uniformes*.

1.3.2 L'accrochage comme une instabilité linéaire

La croissance temporelle des VIV avant saturation est très similaire à celle d'une instabilité linéaire comme le montre les résultats expérimentaux obtenus par Brika &

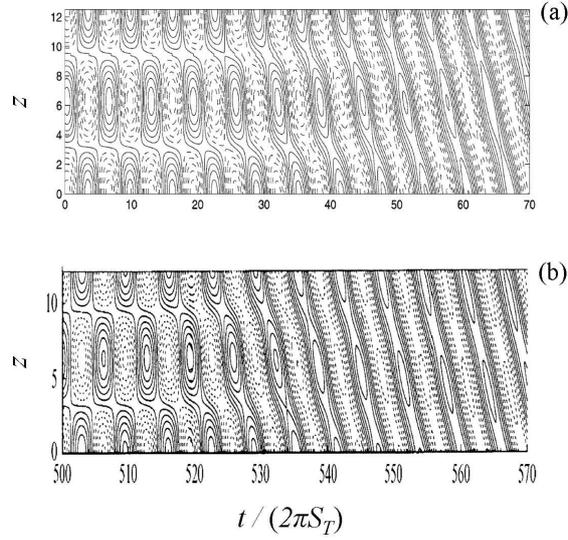


FIGURE 1.16: Comparaison entre les calculs DNS (Newman & Karniadakis, 1997) et le modèle de Facchinetti (Facchinetti *et al.*, 2004b) pour un câble tendu infini en écoulement uniforme : (a) modèle de Facchinetti, (b) Calcul DNS. On voit sur la figure les courbes isovaleur du déplacement du câble.

Laneville (1995), figure 1.17. L'idée d'interpréter les VIV comme une instabilité linéaire a été étudiée par de Langre (2006) pour un cylindre rigide supporté élastiquement. Ce dernier, à l'intérieur d'une publication récente, utilise une version linéarisée du modèle oscillateur fluide de Facchinetti *et al.* (2004a). L'intérêt d'un tel modèle linéaire étant la facilité d'établissement des solutions analytiques. Cette approche linéaire a déjà été utilisée par Nakamura (1969). Un système linéaire tel que celui du modèle simplifié étudié par de Langre (2006) est connu pour être propice à l'établissement d'une instabilité par confusion de fréquences ou *coupled mode flutter*, Blevins (1990).

En définissant le temps adimensionnel

$$t = \sqrt{\frac{h}{m_S + \frac{\pi}{4}\rho D^2}} T, \quad (1.23)$$

et en négligeant les termes d'amortissement, de Langre (2006) écrit les équations linéarisées du modèle de Facchinetti simplifié

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y = M\Omega^2 q, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \Omega^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (1.25)$$

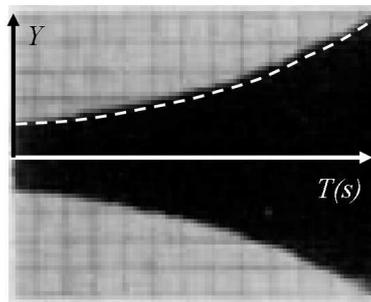


FIGURE 1.17: Evolution du déplacement avec le temps d'un cylindre souple soumis à un écoulement d'air uniforme. Le régime saturé n'est pas montré. Tiré de Brika & Laneville (1995)

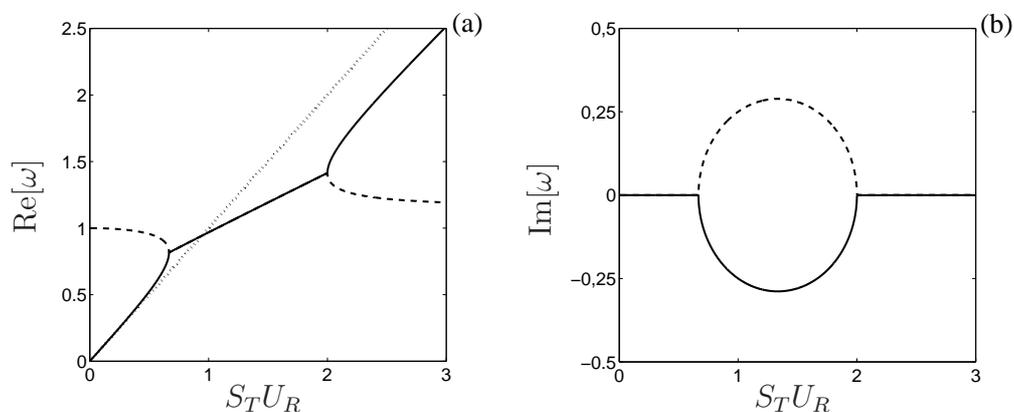


FIGURE 1.18: Evolution des caractéristiques du système en fonction du paramètre Ω pour $AM = 0.25$: (a) partie réelle de la pulsation, (b) partie imaginaire de la pulsation. La fréquence de Strouhal apparaît en pointillés en (a). Modèle par de Langre (2006)

avec $\Omega = S_T U_R$. En cherchant une solution de la forme $y = \hat{y}e^{i\omega t}$ et $q = \hat{q}e^{i\omega t}$, on trouve facilement l'évolution de la pulsation ω en fonction de la vitesse réduite, figure 1.18. On retrouve bien la confusion de fréquences pour une plage de vitesse incluant l'accrochage parfait ($U_R = 1/S_T$). Dans cette plage de U_R , le taux de croissance est positif ($\text{Im}[\omega] < 0$). Le système est donc instable et l'amplitude de la réponse croît avec le temps. L'accrochage peut donc être vu comme une instabilité causée par la confusion des fréquences de deux oscillateurs, le sillage et la structure.

1.4 Proposition

A l'intérieur de cette introduction, nous avons présenté en premier une revue des connaissances sur la phénoménologie des vibrations induites par vortex d'un cylindre rigide supporté élastiquement. A partir de ce résumé, nous avons soulevé plusieurs questions en ce qui a trait aux VIV de structures très élancées soumises à des écoulements uniformes

et non uniformes. Ces questions s'énoncent ainsi :

- *Quelle est l'étendue de la plage d'accrochage des différentes fréquences naturelles de la structure lorsque l'écoulement est uniforme ?*
- *Trouve-t-on toujours un accrochage entre le sillage et une fréquence naturelle de la structure en écoulements uniformes et non uniformes ?*
- *Quelles conditions sont favorables à l'apparition d'ondes propagatrices ou stationnaires ?*
- *En écoulements non uniformes, existe-t-il une seule fréquence de vibration ou plusieurs ? Si plusieurs fréquences sont présentes, le sont-elles toutes pour l'ensemble du système ?*

Toutes ces questions ont une justification pratique. Elles ont un impact direct sur la vie en fatigue des risers. Après une revue des connaissances acquises sur le comportement des structures souples en vibrations induites par vortex, on peut conclure qu'il existe un besoin pour une meilleure compréhension concernant les questions formulées ci-dessus. Dans cette optique, cette thèse propose l'idée suivante :

En utilisant le concept d'oscillateur fluide et d'instabilité linéaire par confusion de fréquences, on peut comprendre et reproduire de façon qualitative les caractéristiques principales des VIV sur les structures élancées en écoulements uniformes et non uniformes.

Au chapitre 2, nous présenterons des arguments pour justifier l'utilisation du modèle oscillateur fluide linéaire pour étudier les structures souples. Nous y montrerons que le modèle *non linéaire* de Facchinetti représente bien les calculs DNS de vibrations induites par vortex en écoulements non uniformes. Egalement, nous allons démontrer que le modèle linéaire reproduit la physique des VIV pour un cylindre rigide supporté élastiquement. Le chapitre 3 est dédié aux structures élancées en écoulements uniformes. Les développements théoriques qui en découlent seront utilisés à l'intérieur du chapitre 4 portant sur les écoulements non uniformes

Chapitre 2

Validation du concept d'oscillateur fluide

Dans ce chapitre, l'objectif est de démontrer la pertinence du concept d'oscillateur fluide pour répondre aux questions énoncées à l'introduction. Il possède deux parties. Premièrement, nous montrons que le modèle *non linéaire* de Facchinetti reproduit bien les prédictions de calculs DNS pour une poutre tendue soumise à différents profils d'écoulements. Nous voulons montrer ainsi la validité de l'approche phénoménologique pour des structures souples en écoulements non uniformes. A noter que d'autres cas de comparaison ont fait l'objet d'une publication présentée en annexe.

Deuxièmement, nous démontrons que le modèle oscillateur fluide *linéaire* reproduit la physique des VIV pour un cylindre rigide libre de vibrer. En plus d'une validation, cette partie sert à établir les bases de l'analyse linéaire pour les chapitres 3 et 4. Dans un premier temps, nous expliquons plus en détail le modèle linéaire déjà survolé à la section 1.3.2. Ensuite, nous voyons comment cette théorie reproduit de façon qualitative les résultats expérimentaux sur l'augmentation de la taille de la plage d'accrochage avec la décroissance du nombre de Scruton. Enfin, nous montrons que le modèle linéaire reproduit fidèlement l'évolution du coefficient de masse ajoutée C_M avec la vitesse réduite.

2.1 Modèle non linéaire en écoulements non uniformes

Nous voulons montrer dans cette section que le modèle d'oscillateur fluide non linéaire de Facchinetti (Facchinetti *et al.*, 2004b, Mathelin & de Langre, 2005) reproduit la physique des VIV en écoulements non uniformes pour une structure souple. Nous rappelons ici les équations adimensionnées du modèle présentées à la section 1.3

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\frac{\gamma \eta}{\mu} \right) \frac{\partial y}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = \eta^2 M q. \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \varepsilon \eta (q^2 - 1) \frac{\partial q}{\partial t} + \eta^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Les deux profils d'écoulements étudiés sont montrés à la figure 2.1. Nous appellerons maintenant le profil d'écoulement linéaire cas A et le profil d'écoulement exponentiel cas B. Pour ces deux configurations, la structure est une poutre tendue. Les caractéristiques de cette dernière apparaissent au tableau 2.1. Lucor *et al.* (2006) rapportent les prédictions de vibrations de cette structure obtenues par calculs DNS tridimensionnels couplés avec le mouvement de la poutre. Le nombre de Reynolds, basé sur le diamètre de la structure, est de 1000 dans les deux cas à la vitesse la plus élevée, U_{ref} . Comme mentionné à la section 1.2.5, Lucor *et al.* (2006) trouvent une séparation de fréquences pour le cas B, mais pas pour le cas A. Les spectres d'amplitude moyennés en espace sont rappelés à la figure 2.1.

Nous rapportons maintenant le résultat du calcul effectué à l'aide du modèle oscillateur fluide. Le tableau 2.1 montre les paramètres phénoménologiques que nous avons utilisés. Le coefficient de traînée C_D et le nombre de Strouhal S_T sont ceux rapportés par Chaplin *et al.* (2005b) pour une poutre tendue en écoulements uniformes et le C_{L_0} correspond au Reynolds des cas présents (Norberg, 2003). On utilise également la valeur du coefficient de masse ajoutée pour un fluide non visqueux au repos. La question de la masse ajoutée, sera discutée à la section 2.2.3. Les figures 2.2 et 2.3 montrent la comparaison entre le modèle de Facchinetti et la DNS pour le cas A et B respectivement. On y voit la valeur r.m.s. du déplacement de la structure en fonction de z pour les deux méthodes de calculs et la densité spectrale de puissance (DSP) du mouvement prédit par le modèle oscillateur fluide en trois positions éloignées.

On choisit de mentionner trois points importants de cette comparaison. Premièrement, la DSP présente trois pics très rapprochés pour le cas A aux trois positions différentes. Par contre, nous trouvons deux pics éloignés en fréquences pour le cas B. La fréquence

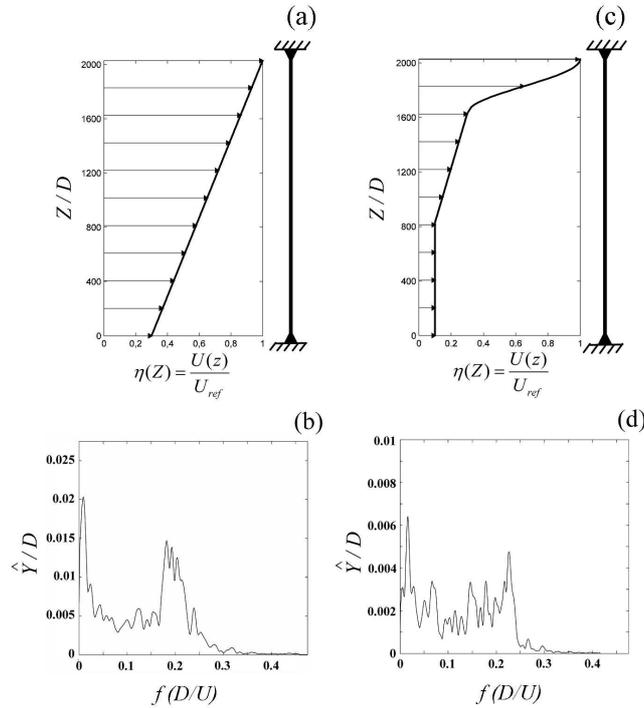


FIGURE 2.1: Cas A : (a) profil d'écoulement linéaire, (b) spectre d'amplitude moyenné en espace de la poutre. Cas B : (c) profil d'écoulement exponentiel, (d) spectre d'amplitude moyenné en espace de la poutre. Lucor *et al.* (2006)

plus faible possède une amplitude importante dans le bas de la structure tandis que la fréquence la plus grande domine dans le haut. Ce résultat montre que le modèle phénoménologique reproduit la prédiction de la DNS pour la séparation en espace des fréquences. Deuxièmement, le modèle de Facchinetti reproduit bien la répartition des ondes propagatrices et stationnaires obtenue par la DNS. En effet, les deux méthodes prédisent toutes deux une forme de réponse dans le bas de la structure qui se rapproche de celle d'une onde stationnaire pour le cas A et les deux modèles prédisent des ondes propagatrices partout pour le cas B. Troisièmement, le modèle de Facchinetti prédit une amplitude de vibration environ deux fois plus grande dans le cas A que dans le cas B. Ceci est conforme avec les résultats de la DNS. De cette comparaison, nous concluons qu'il est pertinent d'utiliser un modèle oscillateur fluide pour étudier les VIV de structures souples en écoulements non uniformes. La prochaine et dernière étape de validation consiste à démontrer que le modèle linéaire reproduit bien la physique de l'accrochage pour un cylindre rigide. Ce point est abordé à la section suivante.

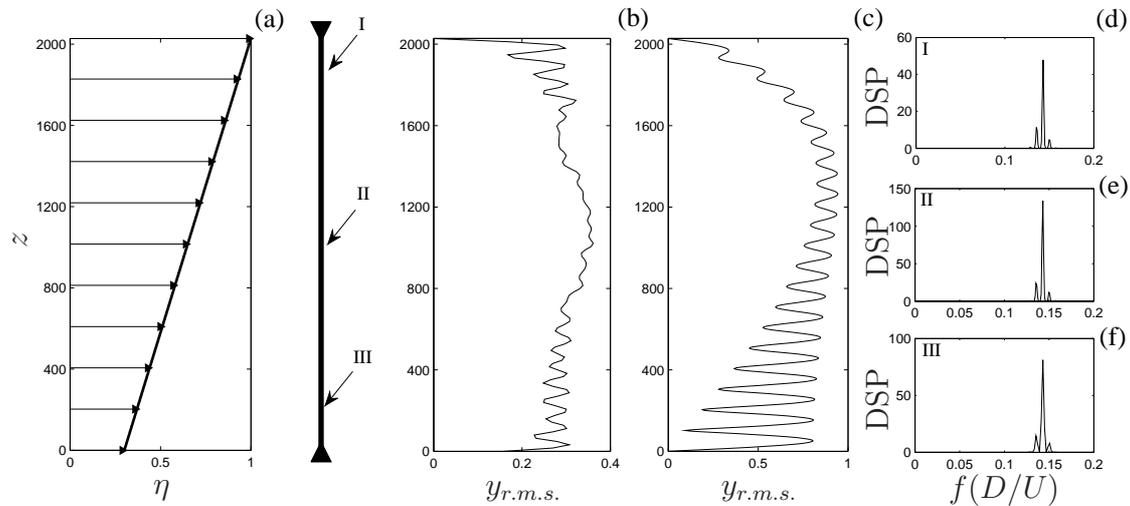


FIGURE 2.2: Prédiction des vibrations induites par vortex d'une poutre tendue soumise à un profil d'écoulement linéaire, Cas A : (a) configuration étudiée, (b) valeur r.m.s. du déplacement de la structure prédite par la DNS (Lucor *et al.*, 2006), (c) valeur r.m.s. du déplacement de la structure prédite par le modèle oscillateur fluide non linéaire, (d)-(f) densité de puissance spectrale du déplacement prédit par le modèle de Facchinetti en trois points sur la structure.

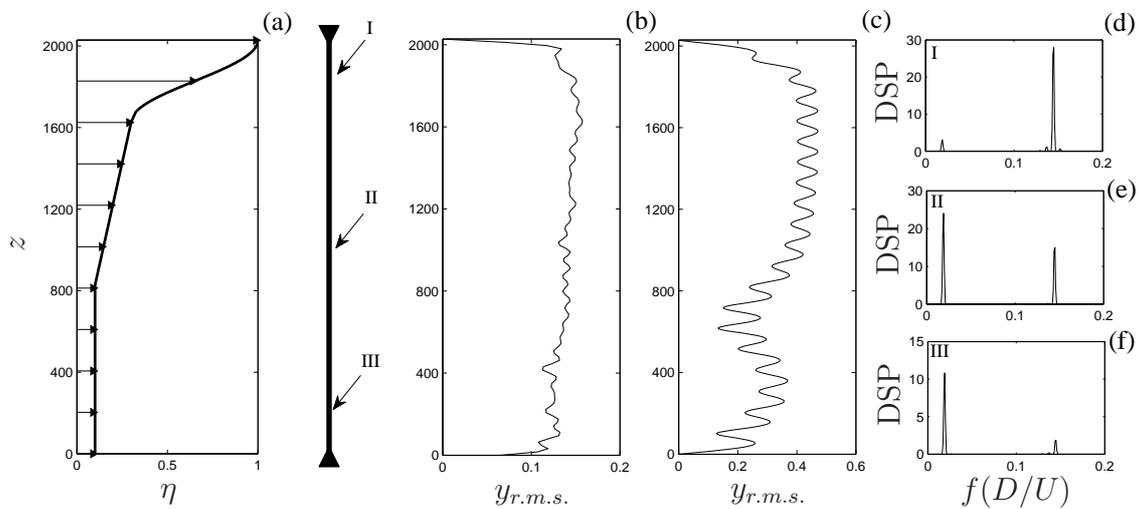


FIGURE 2.3: Prédiction des vibrations induites par vortex d'une poutre tendue soumise à un profil d'écoulement exponentiel, Cas B : (a) configuration étudiée, (b) valeur r.m.s. du déplacement de la structure prédite par la DNS (Lucor *et al.*, 2006), (c) valeur r.m.s. du déplacement de la structure prédite par le modèle oscillateur fluide non linéaire, (d)-(f) densité de puissance spectrale du déplacement prédit par le modèle de Facchinetti en trois points sur la structure.

Paramètres phénoménologique		Caractéristiques poutre	
C_{L_0}	0.8	μ	2.79
C_D	2	c	27.8
S_T	0.17	b	357
C_{M_0}	1	L/D	2028

TABLE 2.1: Paramètres phénoménologiques utilisé et caractéristiques de la structure.

2.2 Validation du modèle linéaire pour les VIV d'un cylindre rigide

2.2.1 Théorie

Ici, nous présentons de façon plus détaillée la théorie linéaire évoquée au premier chapitre. Nous commençons par revoir les caractéristiques de l'instabilité pour le modèle sans amortissement (de Langre, 2006) pour ensuite étudier le cas avec amortissement. Dans ce but, nous rappelons ici les équations dimensionnelles du système cylindre-sillage

$$m_S \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + 2\xi \sqrt{hm_S} \frac{\partial Y}{\partial T} + hY = F_Y, \quad (2.3)$$

avec

$$F_Y = \frac{1}{4} \rho U^2 D C_{L_0} q - \left(\frac{\pi}{4} \rho D^2 C_{M_0} \right) \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} - \frac{1}{2} \rho D U C_D \frac{\partial Y}{\partial T}, \quad (2.4)$$

et

$$\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} - \varepsilon \left(2\pi S_T \frac{U}{D} \right) \frac{\partial q}{\partial T} + \left(2\pi S_T \frac{U}{D} \right)^2 q = \frac{A}{D} \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2}. \quad (2.5)$$

Dans l'équation 2.3, ξ est le ratio d'amortissement obtenu avec la fréquence naturelle du cylindre en air. Comme à la section 2.1, $C_{M_0} = 1$. Pour le modèle linéaire, nous utilisons les mêmes variables sans dimension que de Langre (2006)

$$t = \sqrt{\frac{h}{m_S + \frac{\pi}{4} \rho D^2}} T, \quad y = \frac{Y}{D}. \quad (2.6)$$

Les équations sans dimension du système s'écrivent donc

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\sigma + \frac{\gamma}{\mu} \Omega \right) \frac{\partial y}{\partial t} + y = M \Omega^2 q, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \varepsilon \Omega \frac{\partial q}{\partial t} + \Omega^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (2.8)$$

Dans l'équation 2.7 le terme σ s'exprime

$$\sigma = 2\xi \sqrt{\frac{1}{1 + (4\mu/\pi - 1)^{-1}}}. \quad (2.9)$$

Modèle linéaire sans amortissement

En cherchant une solution du type $y = \hat{y}e^{i\omega t}$ et $q = \hat{q}e^{i\omega t}$ où \hat{y} , \hat{q} et ω sont respectivement l'amplitude de la structure, l'amplitude du sillage et la pulsation complexe des oscillations, on obtient du système 2.7 et 2.8 sans amortissement (de Langre,2006)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + (1 - AM)\Omega^2 \pm \sqrt{(1 + (1 - AM)\Omega^2)^2 - 4\Omega^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.10)$$

$$G = \frac{\hat{q}}{\hat{y}} = \frac{1 - \omega^2}{M\Omega^2} = \frac{\omega A}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (2.11)$$

La figure 2.4 présente l'évolution de la pulsation et du ratio des déformées modales en fonction du paramètre $\Omega = S_T U_R$ pour $AM = 0.25$. De la figure 2.4, on remarque qu'il existe deux fréquences neutres, c'est-à-dire ayant une partie imaginaire nulle, pour les Ω faibles et élevés. Les valeurs de $|G|$ associées montrent que ces deux dernières correspondent à un mode solide S et un mode fluide F. La fréquence du mode fluide semble suivre la loi de Strouhal (en pointillés sur la figure 2.4a) pour Ω faible et suivre une tendance similaire à cette dernière pour les Ω élevés. Le mode solide, quant à lui, possède une fréquence qui s'approche de celle d'un oscillateur libre avec la masse ajoutée potentielle. De Langre (2006) montre que le mode fluide est celui qui domine la réponse à cause de la nature instable du sillage. La figure 2.4 montre que l'amplitude du sillage est très importante par rapport à celle du cylindre pour ces modes fluides.

Les fréquences deviennent conjuguées complexes lorsque les deux parties réelles convergent vers une valeur commune conservée pour une certaine plage de vitesses. La fréquence de partie imaginaire positive représente un mode oscillatoire amorti en temps tandis que celle de partie imaginaire négative est plutôt liée à un mode instable, donc amplifié en temps. La plage de Ω où l'on trouve ce mode instable inclut le $S_T U_R = 1$, l'accrochage parfait. L'étendue de cette dernière s'écrit (de Langre,2006)

$$\frac{1}{1 + \sqrt{AM}} < \Omega < \frac{1}{1 - \sqrt{AM}}. \quad (2.12)$$

A l'intérieur de cette plage de Ω , la partie réelle et la partie imaginaire de la fréquence s'écrivent respectivement

$$\text{Re}[\omega] = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2\Omega + (1 - AM)\Omega^2} \quad (2.13)$$

$$\text{Im}[\omega] = \frac{1}{2} \sqrt{-1 + 2\Omega - (1 - AM)\Omega^2} \quad (2.14)$$

Le taux de croissance maximum est rencontré lorsque $\Omega_{max} = 1/(1 - AM)$. Dans une telle condition, la fréquence sans dimension s'écrit

$$\omega_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 - AM}{1 - AM}} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{AM} - 1}} \quad (2.15)$$

De l'équation 2.12, on remarque que la plage de Ω croît avec le paramètre AM . Egalement, le taux de croissance maximum augmente avec AM . Comme montré au chapitre 1 à la section 1.3.1, le terme AM est proportionnel à l'inverse du nombre de masse μ , donc la plage d'instabilité ainsi que le taux de croissance maximal augmentent lorsque le nombre de masse diminue. On sait de la section 1.1.3 que la plage d'accrochage pour un cylindre rigide augmente lorsque le nombre de masse diminue. Le dernier point que nous voulons aborder sur la plage de Ω instables concerne l'angle de phase φ_G . A l'intérieur de la plage de vitesses d'instabilité, cette quantité passe de 0 à π . Une variation similaire est observée expérimentalement pour l'angle de phase entre la portance fluctuante et les vibrations d'un cylindre (Khalak & Williamson, 1999). Nous observons donc, tout comme de Langre (2006) qu'il existe des similarités importantes entre la théorie linéaire et la physique de l'accrochage. Nous allons montrer plus loin que ces similarités sont encore plus importantes, mais avant nous devons discuter de l'effet des termes d'amortissement dans le système d'équations 2.7-2.8.

Modèle linéaire avec amortissement

En tenant compte des termes d'amortissement, l'équation de ω s'exprime

$$\mathcal{D}(\omega) = [-\omega^2 + i\omega \left(\sigma + \frac{\gamma}{\mu} \Omega \right) + 1] [-\omega^2 - i\varepsilon\Omega\omega + \Omega^2] + AM\Omega^2\omega^2 = 0. \quad (2.16)$$

De ce polynôme en ω , on trouve une valeur ayant une partie imaginaire négative pour tout Ω différent de zéro. On normalise ce taux de croissance par celui que l'on trouve pour la variable q lorsque le cylindre est fixe, soit $\varepsilon\Omega/2$ selon l'équation 2.8. La figure 2.5 montre l'évolution du ratio entre le taux de croissance trouvé avec l'équation 2.16 et celui dans le cas du cylindre fixe. On voit que l'instabilité est amplifiée lorsque le cylindre est libre de vibrer. On constate également que plus le nombre de masse est petit, plus cette amplification est forte et se produit pour une plage de Ω importante.

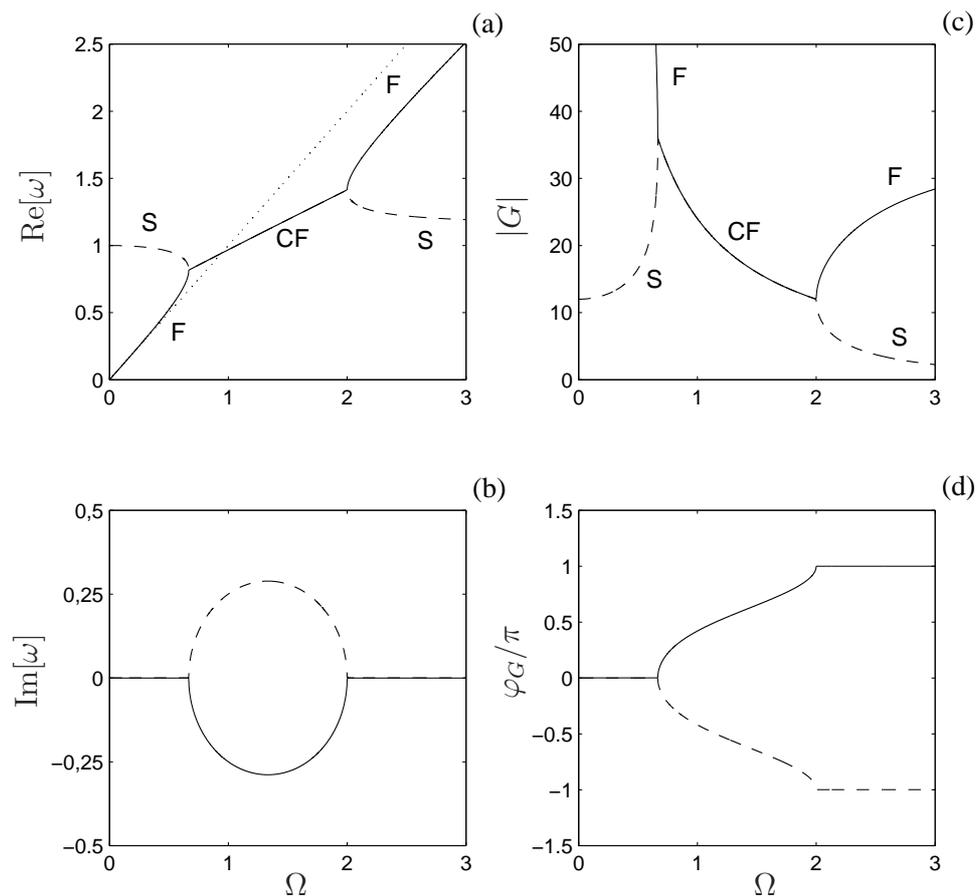


FIGURE 2.4: Evolution des caractéristiques du système en fonction du paramètre Ω pour $AM = 0.25$: (a) partie réelle de la pulsation, (b) partie imaginaire de la pulsation, (c) module du ratio d'amplitudes et (d) l'angle de phase entre y et q . A l'intérieur de la figure, S fait référence au mode solide, F au mode fluide et CF au mode instable (confusion de fréquences). La fréquence de Strouhal apparaît en pointillés sur la figure 2.4 (a). Sur chacune des figures, le trait plein montre le mode dominant (de Langre, 2006).

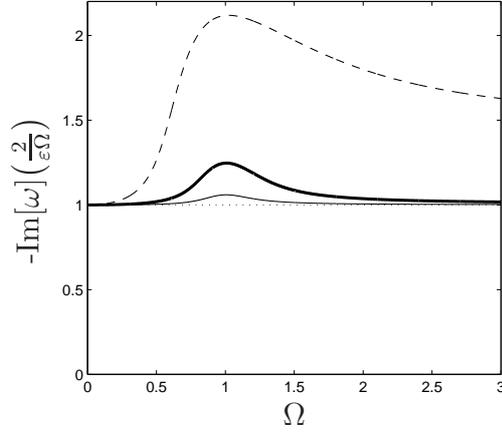


FIGURE 2.5: Amplification du taux de croissance de l'instabilité sillage en fonction de Ω pour $\mu = 2$ (trait brisé), $\mu = 20$ (trait continu gras) et $\mu = 100$ (trait continu fin). Les paramètres utilisés sont $C_{L0} = 0.3$, $S_T = 0.2$, $C_D = 2$, $\xi = 0.05$.

À la section suivante, nous verrons comment le modèle linéaire reproduit l'évolution de la plage d'accrochage avec un nombre sans dimension qui regroupe le nombre de masse μ et le ratio d'amortissement ξ : le nombre de Scruton.

2.2.2 Evolution de la plage d'accrochage

King *et al.* (1973) rapportent des résultats expérimentaux sur l'évolution de la plage d'accrochage en fonction du nombre de Scruton, Sc . Ce paramètre sans dimension s'exprime

$$Sc = \frac{2\pi\xi m_S}{\rho D^2} = 2\pi\xi \left(\mu - \frac{\pi}{4} \right). \quad (2.17)$$

La figure 2.6a montre la démarcation de la plage d'accrochage rapportée par King *et al.* (1973). La plage d'accrochage diminue lorsque Sc croît jusqu'à disparaître à partir d'une certaine valeur. L'évolution de l'amplification du taux de croissance linéaire discutée au dernier paragraphe apparaît à la figure 2.6b. Puisqu'il n'est pas possible de rassembler les termes μ et ξ dans l'équation 2.16, nous fixons la valeur de ξ et faisons varier μ . Cette figure montre l'évolution des courbes d'isovaleur d'amplification de l'instabilité, c'est-à-dire $-\text{Im}[\omega] \left(\frac{2}{\epsilon\Omega} \right)$. Chaque isocourbe délimite une surface dans laquelle l'amplification de l'instabilité est croissante. La forme de ces surfaces ressemble bien à celle de la zone d'accrochage trouvée expérimentalement. Nous concluons donc que les courbes d'isovaleur de taux d'amplification linéaire peuvent être associées aux limites de la zone d'accrochage.

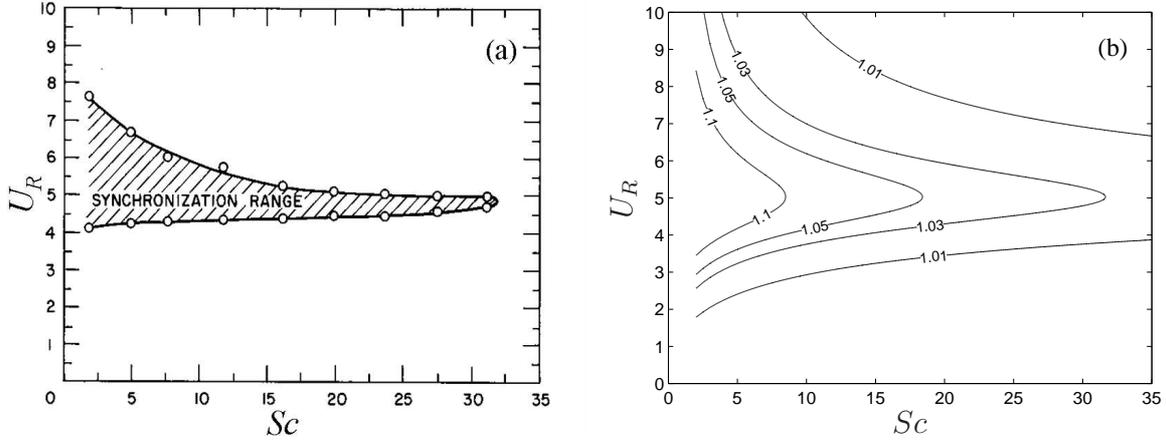


FIGURE 2.6: (a) Mesure expérimentale sur l'évolution de la plage d'accrochage avec le nombre de Scruton Sc (King *et al.*, 1973), (b) évolution de l'amplification du taux de croissance linéaire en fonction du nombre de Sc . Paramètres utilisés pour le modèle linéaire : $C_{L_0} = 0.2$, $S_T = 0.2$, $C_D = 2$, $\xi = 0.05$

2.2.3 Evolution de la masse ajoutée avec la vitesse réduite

Nous voulons vérifier ici si le modèle linéaire reproduit l'évolution du coefficient de masse ajoutée C_{M_A} avec la vitesse réduite. Comme mentionné à la section 1.1.4, on peut exprimer la force de portance fluctuante en deux parties : l'une proportionnelle à l'accélération et l'autre en opposition de phase avec la vitesse. La première est une force inertielle ajoutée au cylindre, la masse ajoutée m_A et la deuxième un amortissement ajouté c_A . La force totale F_Y s'écrit donc

$$F_Y = -m_A \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} - c_A \frac{\partial Y}{\partial T}. \quad (2.18)$$

Comme mentionné plus tôt, nous nous intéressons à la masse ajoutée m_A . Il est d'usage de normaliser cette quantité par la densité ρ et le diamètre D pour obtenir le coefficient de masse ajoutée C_{M_A} (Gopalkrishnan, 1993)

$$C_{M_A} = \frac{m_A}{\frac{\pi}{4} \rho D^2}. \quad (2.19)$$

La figure 2.7 montre l'évolution de cette quantité avec la vitesse réduite pour : (a) un mouvement prescrit du cylindre d'amplitude $\hat{Y}/D = 0.3$ et (b) lorsque le cylindre est libre de vibrer. Cette quantité varie de façon significative avec la vitesse réduite. On voit même qu'elle devient négative à partir d'un certain U_R . La masse apparente du cylindre

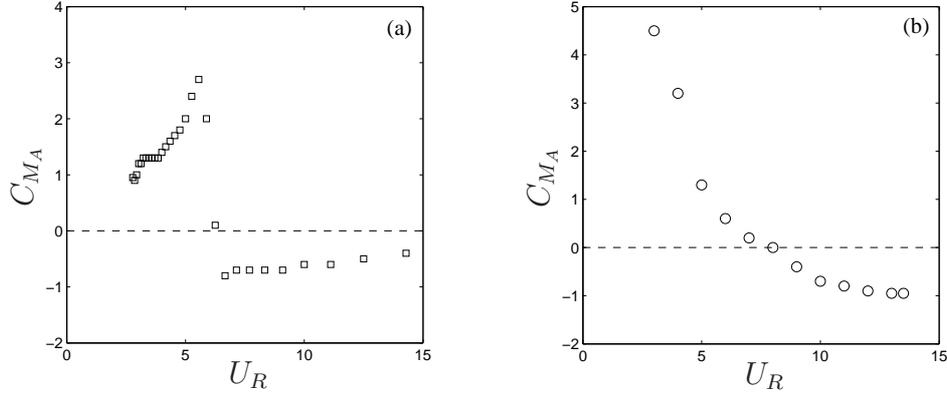


FIGURE 2.7: Evolution de la masse ajoutée en vibration (a) forcée pour $\hat{Y}/D = 0.3$ (Gopalkrishnan, 1993) et (b) libre avec $\mu = 2.08$ (Vikestad *et al.*, 2000).

devient donc inférieure à sa vraie valeur. Willden & Graham (2001) utilisent ce résultat pour expliquer le fait que l'accrochage pour un cylindre de faible masse s'étend jusqu'à des vitesses élevées où la fréquence d'oscillation est loin de sa fréquence naturelle en eau stagnante (figure 2.8). Ils utilisent également l'argument de masse ajoutée négative pour expliquer certains comportements de structures souples (Willden & Graham, 2004). Puisque l'évolution de la masse ajoutée en fonction de la vitesse réduite est utilisée pour expliquer des phénomènes observés en VIV dans le cas du cylindre rigide et des structures souples, nous considérons qu'il est important que le modèle linéaire reproduise les résultats présentés à la figure 2.7. Nous commençons par le cas en mouvement forcé.

Masse ajoutée en vibration forcée

Nous commençons par rappeler l'expression de la force fluide F_Y pour le modèle linéaire

$$F_Y = \frac{1}{4}\rho U^2 D C_{L_0} q - \left(\frac{\pi}{4}\rho D^2 C_{M_0}\right) \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} - \frac{1}{2}\rho D U C_D \frac{\partial Y}{\partial T}. \quad (2.20)$$

Puisque l'on s'intéresse uniquement à la partie proportionnelle à l'accélération, on ne considère pas le terme d'amortissement fluide dans l'équation 2.20. A noter ici que C_{M_0} , le coefficient de masse ajoutée pour un fluide au repos que nous utilisons pour le modèle, ne doit pas être confondu avec C_{MA} . Comme le montre la figure 2.7a, on a

$$\lim_{U_R \rightarrow 0} C_{MA} = C_{M_0}.$$

En imposant un mouvement sinusoïdal au cylindre $Y(T) = \hat{Y} \sin(2\pi fT)$, la variable q évoluera selon $q(T) = \hat{q} \sin(2\pi fT + \varphi)$. On exprime la composante de q proportionnelle à

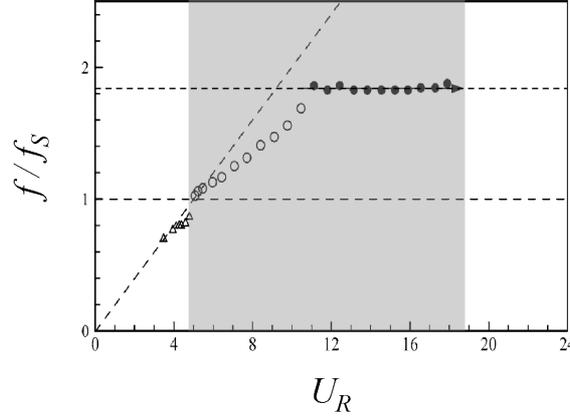


FIGURE 2.8: Evolution de la fréquence des oscillations f en fonction de U_R pour un cylindre avec $\mu = 1.73$ (Govardhan & Williamson, 2004). La plage d'accrochage est montrée en gris. On voit que la fréquence de vibration du cylindre à l'accrochage s'éloigne considérablement de sa fréquence naturelle f_S .

l'accélération du cylindre, de la façon suivante

$$q_{m_A} = \left(\frac{\cos \varphi}{-4\pi^2 f^2} \right) \left(\frac{\hat{q}}{\hat{Y}} \right). \quad (2.21)$$

En utilisant les équations 2.18, 2.19, 2.20 et 2.21, on trouve l'expression de C_{M_A} selon le modèle linéaire

$$C_{M_A} = \left(\frac{C_{L_0} U_R^2}{4\pi^3} \right) \left(\frac{\hat{q}}{\hat{y}} \right) \cos \varphi + C_{M_0}. \quad (2.22)$$

Il s'agit maintenant de trouver le ratio d'amplitude \hat{q}/\hat{y} et la phase φ . Puisque l'équation 2.8 contient seulement des variables sans dimension, nous travaillons maintenant avec l'équation 2.8 pour évaluer ces quantités. Par contre, le temps adimensionnel s'exprime ici $t = 2\pi f T$ où f est la fréquence du mouvement forcé du cylindre. La solution de l'équation 2.8 est classique (Rao, 2003)

$$\frac{\hat{q}}{\hat{y}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - (S_T U_R)^2)^2 + (\varepsilon S_T U_R)^2}}. \quad (2.23)$$

La figure 2.9 compare l'évolution de C_{M_A} obtenue expérimentalement et celle prédite par le modèle linéaire pour $C_{L_0} = 0.2$ (Norberg, 2003) et $S_T = 0.2$. L'accord qualitatif entre le modèle et les résultats d'expériences est bon. L'ordre de grandeur pour C_{M_A} de la prédiction est en accord avec les mesures de Gopalkrishnan (1993). On constate également que l'approche linéaire reproduit les caractéristiques importantes de ces mesures : la présence d'un maximum près de $U_R = 5$ suivi d'une décroissance rapide vers un minimum autour de $U_R = 6$.

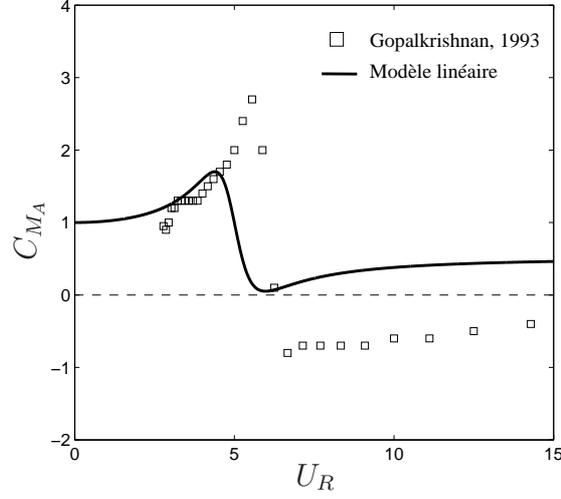


FIGURE 2.9: Comparaison entre les prédictions du modèle linéaire et les expériences (Gopalkrishnan, 1993) pour le coefficient de masse ajoutée C_{MA} d'un cylindre rigide en mouvement forcé. Paramètres utilisés pour le modèle linéaire : $C_{L_0} = 0.2$, $S_T = 0.2$, $C_{M_0} = 1$. L'amplitude de vibration du cylindre dans les expériences est $\hat{Y}/D = 0.3$.

Masse ajoutée en vibration libre

Nous terminons cette section sur la masse ajoutée en comparant les prédictions du modèle linéaire avec les résultats expérimentaux de Vikestad *et al.* (2000) présentés à la figure 2.7. La quantité à déterminer est toujours la composante de q proportionnelle à l'accélération du cylinder, la quantité q_{m_A} . Pour y arriver, on résout le système d'équations sans dimension 2.7-2.8 en utilisant une solution de la forme $y = \hat{y}e^{i\omega t}$ et $q = \hat{q}e^{i\omega t}$ où \hat{q} et \hat{y} sont des quantités complexes. L'équation 2.22 s'écrit donc maintenant

$$C_{MA} = \text{Re}[1/\omega^2] \left(\frac{C_{L_0} U_R^2}{4\pi^3} \right) \text{Re}[G] + C_{M_0}, \quad (2.24)$$

où $G = \hat{q}/\hat{y}$. Des équations 2.7 et 2.8, on trouve le ratio des amplitudes G

$$G = \frac{\hat{q}}{\hat{y}} = \frac{(1 - \omega^2) + i \left(\frac{\gamma}{\mu} \Omega \right)}{M\Omega^2} = \frac{-A\omega^2}{(\Omega^2 - \omega^2) - i\varepsilon\Omega\omega}. \quad (2.25)$$

Nous ne considérons pas l'amortissement structural ici puisqu'il est négligeable par rapport à l'amortissement causé par l'écoulement pour cette expérience. La pulsation ω est déterminée à l'aide de l'équation 2.16. Nous utilisons les mêmes valeurs que précédemment pour C_{L_0} et S_T , et un coefficient de traînée de $C_D = 2$. La figure 2.10 montre la comparaison entre le modèle linéaire et les résultats expérimentaux. L'accord entre la théorie et

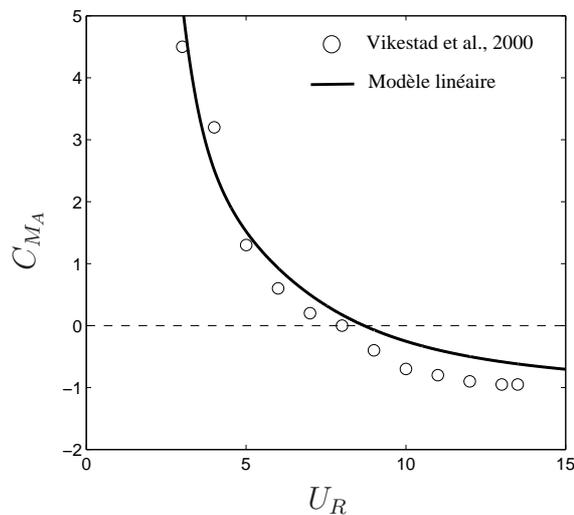


FIGURE 2.10: Comparaison entre les prédictions du modèle linéaire et les expériences (Vikestad *et al.*, 2000) pour le coefficient de masse ajoutée C_{MA} d'un cylindre rigide libre de vibrer ayant un nombre de masse $\mu = 2.08$. Paramètres utilisés pour le modèle linéaire : $C_{L_0} = 0.2$, $S_T = 0.2$, $C_D = 2$, $C_{M_0} = 1$.

l'expérience est excellent.

Des comparaisons présentées dans cette partie dédiée à la masse ajoutée, nous concluons que le modèle linéaire reproduit l'évolution en fonction de la vitesse réduite du coefficient de masse ajoutée C_{MA} observée dans les expériences. Nous avons montré que, pour notre modèle, la variation de cette quantité avec U_R est incluse dans la dynamique de la variable sillage q en vibration forcée, et dans l'interaction entre l'oscillateur fluide et le cylindre lorsque ce dernier est libre de vibrer. Ce résultat va dans le sens de la séparation des forces potentielles (dans notre cas C_{M_0} pour les forces inertielles), et des forces reliées à la dynamique du sillage, q (Lighthill, 1986). L'idée que la méthode de modélisation de type oscillateur fluide reproduise l'évolution de la masse ajoutée n'est pas nouvelle (Hartlen & Currie, 1970, Facchinetti *et al.*, 2004a). Cependant, nous démontrons ici que cet aspect des VIV est reproduit par un système d'oscillateurs *linéaires* couplés.

2.3 Conclusion

Pour ce deuxième chapitre, nous avons comme objectif de démontrer la validité du concept oscillateur fluide pour l'étude qui sera présentée aux deux chapitres suivants.

Dans un premier temps, nous avons montré que le modèle *non linéaire* de Facchinetti arrivait à reproduire la physique des VIV en écoulements non uniformes. Notamment, nous avons reproduit les résultats portant sur la séparation de fréquences obtenus par DNS (Lucor *et al.*, 2006). Nous concluons donc que le concept d'oscillateur fluide est adéquat pour étudier les VIV en écoulements non uniformes.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié la version *linéaire* de ce modèle pour un cylindre rigide libre de vibrer. Le but de cette section était double. Son premier objectif était de jeter les bases nécessaires afin de bien comprendre la théorie qui suit concernant l'analyse de stabilité linéaire de structures souples en écoulements uniformes, ce qui a été fait au début à la section 2.2.1. On y a vu que le système comprenant deux oscillateurs couplés, le cylindre et son sillage, était instable pour une plage de vitesses réduites incluant l'accrochage parfait $U_R = 1/S_T$. Cette instabilité provient d'une confusion de fréquences entre deux modes : un mode sillage et un autre structure. Le deuxième but était de démontrer au lecteur que la physique de l'accrochage dans le cas du cylindre rigide était bien reproduite par cette théorie. Pour ce faire, nous avons montré que l'approche linéaire arrivait à bien reproduire la tendance observée en expérience en ce qui a trait à l'évolution de la plage d'accrochage avec le nombre de Scruton qui regroupe la masse et l'amortissement du cylindre. Nous avons vu que le système cylindre-sillage présente une amplification de l'instabilité du sillage (pour un cylindre fixe) sur une plage de vitesses réduites fidèle à celle observée dans les expériences. Pour terminer, nous avons montré que l'évolution du coefficient de masse ajoutée C_{MA} observée expérimentalement en vibration libre et forcée était reproduite par la théorie linéaire.

Chapitre 3

Structures élancées en écoulements uniformes

Le sujet des vibrations induites par vortex de structures souples en écoulements uniformes est abordé ici par l'approche linéaire. Dans un premier temps, la théorie est développée pour un câble droit tendu et infini en se concentrant sur des solutions de type ondes propagatrices. Cette étape sert à mettre en évidence le mécanisme d'instabilité et ses caractéristiques principales. Dans un deuxième temps on traite le cas des structures finies où les nombres d'ondes admis sont discrets. Pour terminer, une comparaison entre la théorie linéaire et les résultats d'expériences est présentée.

3.1 Théorie linéaire

Tout comme au chapitre 2, on cherche au travers de solutions analytiques simples les effets des différents paramètres sur la dynamique des vibrations induites par vortex, mais cette fois pour des structures souples. Dans cette optique, le développement de la théorie porte sur la structure la plus simple à analyser : le câble droit tendu. Les mêmes concepts sont appliqués plus loin à des poutres tendues, structures plus représentatives des risers. En considérant seulement le déplacement du câble dans la direction transverse de l'écoulement $Y(Z, T)$, son équation du mouvement s'écrit :

$$m_S \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + r_S \frac{\partial Y}{\partial T} - \Theta \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} = F_Y, \quad (3.1)$$

avec

$$F_Y = \frac{1}{4} \rho U^2 D C_{L_0} q - \frac{1}{2} \rho D C_D U \frac{\partial Y}{\partial T} - \frac{\pi}{4} \rho D^2 C_{M_0} \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2}, \quad (3.2)$$

où Θ est la tension. Tout comme au chapitre 2, on a $C_{M_0} = 1$. La dynamique de la fluctuation de portance, $q(Z, T)$, apparaissant à l'intérieur de l'équation 3.2 est modélisée par (Facchinetti *et al.*, 2004b)

$$\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} - \varepsilon \left(2\pi S_T \frac{U}{D} \right) \frac{\partial q}{\partial T} + \left(2\pi S_T \frac{U}{D} \right)^2 q = A \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2}. \quad (3.3)$$

Nous étudions le système représenté par les équations 3.1 et 3.3 en considérant le sillage et la structure comme un milieu unique dans lequel se propagent des ondes possédant chacune deux composantes : une solide (reliée au mouvement du câble Y) et l'autre fluide (reliée à la fluctuation de la force de portance q), figure 3.1. Comme au chapitre 2, on adimensionne le système d'équations 3.1-3.3. Puisque pour le premier cas auquel nous nous intéresserons, le câble infini, il n'existe pas de fréquences naturelles nous utilisons la vitesse de phase \mathcal{C} du câble sans amortissement pour définir le temps sans dimension. Cette vitesse de phase s'exprime

$$\mathcal{C} = \sqrt{\frac{\Theta}{m_S + \frac{\pi}{4} \rho D^2 C_{M_0}}}. \quad (3.4)$$

On utilise toujours ici le diamètre de la structure comme échelle de longueur de référence. Les variables sans dimension s'écrivent donc

$$t = \frac{\mathcal{C}}{D} T, \quad y = \frac{Y}{D}, \quad z = \frac{Z}{D}. \quad (3.5)$$

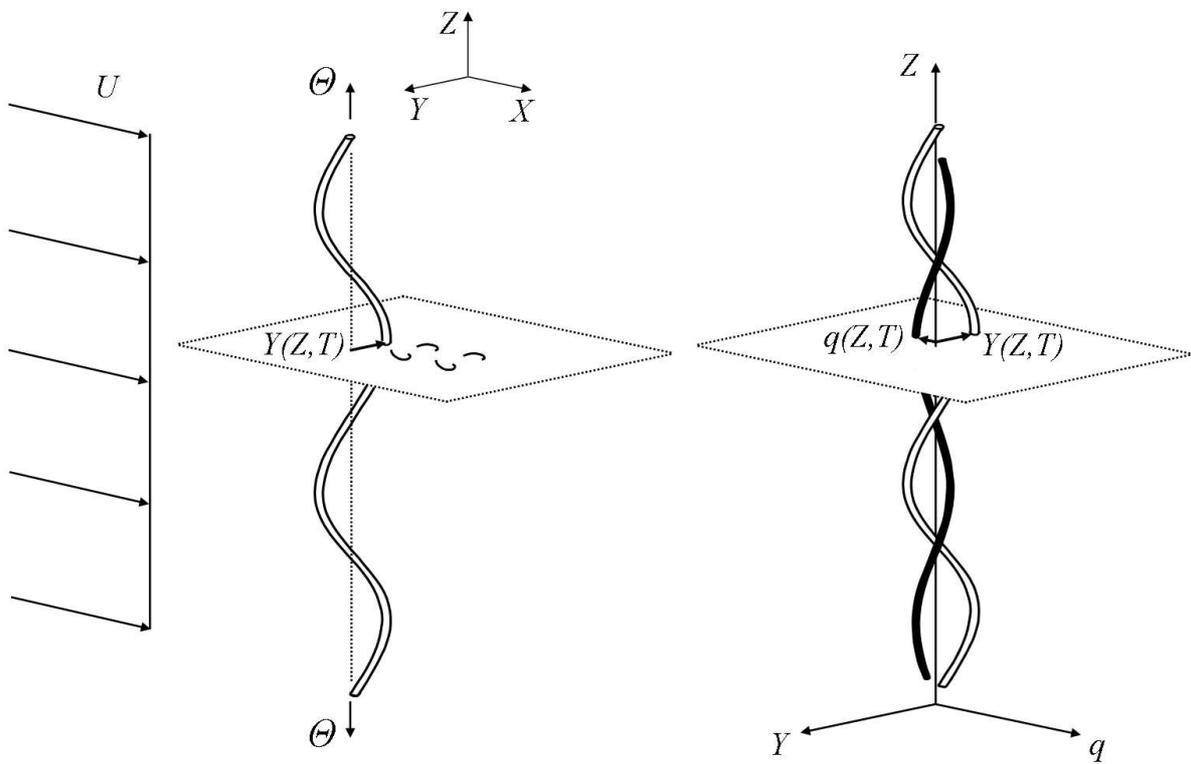


FIGURE 3.1: On propose ici de considérer le sillage et la structure comme un milieu unique (figure de droite) représentant deux éléments distincts en interaction (figure de gauche).

En utilisant les variables sans dimension, les équations 3.1 et 3.3 s'écrivent

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\sigma + \frac{\gamma u}{\mu} \right) \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = Mu^2 q, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \varepsilon u \frac{\partial q}{\partial t} + u^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (3.7)$$

où

$$\sigma = \left(\frac{D}{m_T C} \right) r_s, \quad u = 2\pi S_T \frac{U}{C}. \quad (3.8)$$

Les termes γ , μ , ε , A et M sont les mêmes qu'au chapitre 1. La variable u correspond au rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse de phase du câble sans amortissement dans l'eau stagnante. Pour la suite, on y fera référence en tant que vitesse réduite du système. Afin de simplifier l'analyse, on néglige les termes d'amortissement dans le système 3.6-3.7. Le système d'équations simplifié prend alors la forme suivante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = Mu^2 q, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + u^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (3.10)$$

3.1.1 Câble droit infini

Nous présentons maintenant l'analyse de stabilité du système 3.9-3.10 pour le cas du câble infini. Nous commençons par trouver la relation de dispersion pour ensuite obtenir la pulsation en fonction du nombre d'onde pour u fixe. Nous déterminons par la suite la plage de nombres d'onde où une instabilité se produit et les équations de la valeur réelle et imaginaire de la pulsation associées. Avec ces développements analytiques, nous discutons de la physique de l'instabilité pour terminer avec l'évaluation du taux de croissance temporel maximum possible à vitesse réduite donnée.

Relation de dispersion

Pour étudier le système 3.9-3.10, nous cherchons une solution sous forme d'ondes propagatrices

$$\begin{bmatrix} y(z, t) \\ q(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{q} \end{bmatrix} e^{i(\omega t + kz)}, \quad (3.11)$$

(ω étant la pulsation, k le nombre d'onde, \hat{y} et \hat{q} l'amplitude complexe de la partie structurale et sillage des ondes respectivement). On obtient de cette façon la relation de dispersion du système, $\mathcal{D}(\omega, k; u)$

$$\mathcal{D}(\omega, k; u) = \omega^4 + [(AM - 1)u^2 - k^2]\omega^2 + k^2 u^2 = 0. \quad (3.12)$$

On note que cette relation peut se mettre sous la forme $\mathcal{D}(\bar{\omega}, \bar{k})$ où $\bar{\omega} = \omega/u$ et $\bar{k} = k/u$. Cependant, pour faciliter l'interprétation physique des résultats nous conservons la forme 3.12. A l'aide de $\mathcal{D}(\omega, k; u)$, nous pouvons maintenant étudier la stabilité du système câble-sillage à vitesse réduite donnée. Cette analyse est faite selon le problème temporel, c'est-à-dire pour k réel. Pour ce faire, nous exprimons ω en fonction de k

$$\omega(k, u) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[k^2 + (1 - AM) u^2 \pm \sqrt{(k^2 + (1 - AM) u^2)^2 - 4k^2 u^2} \right]^{1/2}. \quad (3.13)$$

De l'équation 3.13, on sait qu'il existe quatre pulsations pour chaque nombre d'onde. Elles viennent en deux paires de signes opposés ce qui signifie que les ondes de même ω se propagent en directions opposées l'une à l'autre.

Plage de nombres d'onde instables

De l'équation 3.13, on constate que ω est complexe lorsque

$$-2ku < k^2 + (1 - AM) u^2 < 2ku. \quad (3.14)$$

On peut définir à l'aide de l'inégalité 3.14 la plage de nombres d'onde où la pulsation est complexe

$$u(1 - \sqrt{AM}) < k < u(1 + \sqrt{AM}). \quad (3.15)$$

Pour les nombres d'onde satisfaisant 3.15 on trouve quatre pulsations. Comme précédemment, elles viennent en deux paires de signes opposés. La partie réelle et la partie imaginaire de ω s'écrivent respectivement pour $\text{Re}[\omega] > 0$

$$\text{Re}[\omega] = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + 2uk + (1 - AM)u^2}, \quad (3.16)$$

$$\text{Im}[\omega] = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-k^2 + 2uk + (AM - 1)u^2}. \quad (3.17)$$

On retrouve donc une onde instable (son amplitude croît en temps) et une onde amortie (son amplitude décroît avec le temps). Nous avons donc identifié une instabilité temporelle pour le système câble-sillage. L'équation 3.15 définit pour quels k cette instabilité se produit pour une vitesse réduite u donnée et les equations 3.16-3.17 fournissent la pulsation complexe. Avant d'aller plus loin, nous analysons les caractéristiques physiques de cette instabilité.

Caractéristiques physiques de l'instabilité

La figure 3.2 montre la partie réelle et imaginaire de ω en fonction de k pour $u = 1$ et $AM = 0.25$. Seules les pulsations ayant une partie réelle positive sont montrées. La

figure montre également le ratio des amplitudes G . Cette quantité qui est déterminée à partir des équations 3.9 et 3.10 s'exprime

$$G = \frac{\hat{q}}{\hat{y}} = \frac{k^2 - \omega^2}{Mu^2} = \frac{A\omega^2}{\omega^2 - u^2}. \quad (3.18)$$

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, on voit que deux ondes neutres existent pour les nombres d'ondes k bas et élevés. On constate également que ces dernières possèdent un ratio d'amplitude G différent : l'une se caractérise par une très forte amplitude du sillage (notée F) et l'autre par une amplitude plus forte du côté solide (notée S). Pour ces nombres d'ondes, la pulsation varie linéairement avec k pour les ondes S, montrant ainsi un comportement qui se rapproche de celui d'un câble tendu sans forçage externe du fluide. Du côté du sillage, on observe plutôt que la pulsation est indépendante du nombre d'onde. Ce comportement est normal puisqu'il n'y a aucun couplage en z pour la variable q . Ces deux pulsations réelles convergent vers une valeur unique, menant ainsi à deux valeurs complexes conjuguées pour une certaine plage de k . L'angle de phase entre la structure et son sillage varie de π à 2π à l'intérieur de la plage de nombres d'onde instables.

De ce qui est présenté à la figure 3.2, on trouve donc que le système câble-sillage représenté par le système d'équations 3.9-3.10 présente, comme dans le cas étudié du cylindre rigide supporté élastiquement au chapitre 2, une instabilité temporelle. Cette dernière se produit lorsqu'une confusion survient entre les pulsations de deux ondes, l'une dite structure (S) et l'autre dite sillage (F). La réponse d'un tel système instable prend la forme de deux ondes se propageant en sens opposés (en tenant compte de la pulsation de signe opposé que la figure 3.2 ne montre pas).

Taux de croissance maximal à u donnée

Sur la figure 3.2, on remarque que la partie imaginaire de ω passe par un minimum. Ceci signifie qu'il existe un taux de croissance maximal pour une vitesse réduite donnée. De l'équation 3.17, on trouve qu'à une vitesse réduite u donnée, le nombre d'onde le plus instable correspond à $k_{max} = u$. La pulsation complexe sans dimension correspondantes, ω_{max} , s'exprime

$$\omega_{max} = u \sqrt{1 - \frac{AM}{4}} - iu \frac{\sqrt{AM}}{2}. \quad (3.19)$$

D'après l'équation 3.19, le taux de croissance temporel maximum du système à une vitesse réduite donnée varie linéairement avec u . Il augmente aussi linéairement avec la racine

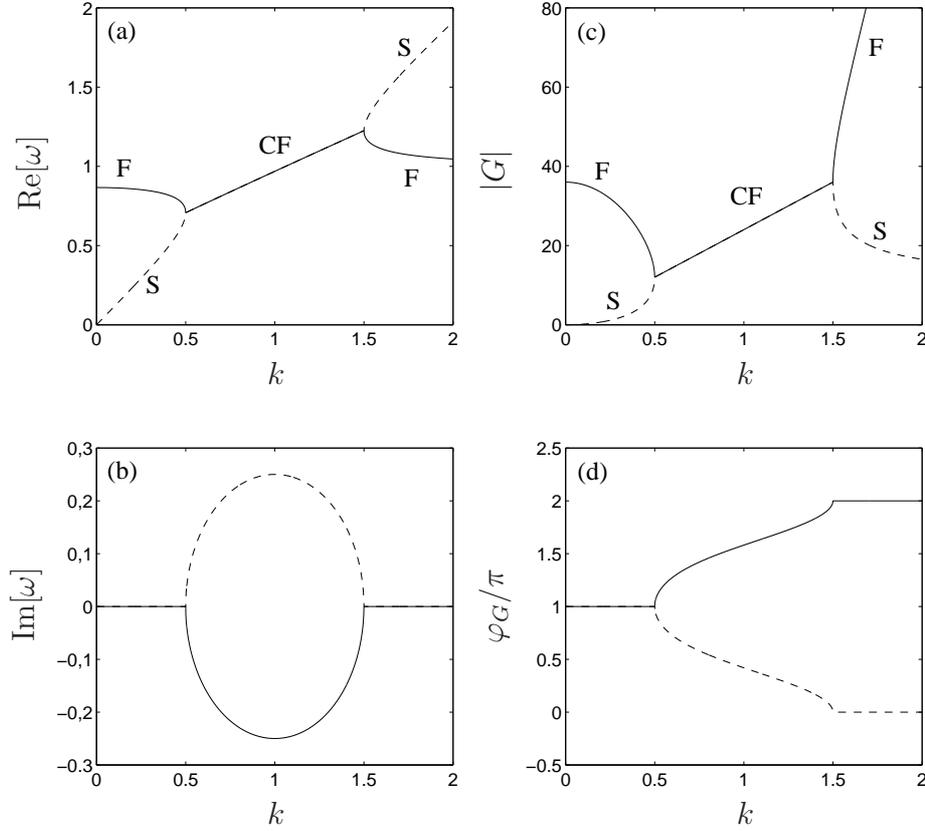


FIGURE 3.2: Pulsation complexe ω et ratio des amplitudes G en fonction du nombre d'onde k pour $u = 1$ et $AM = 0.25$: (a) partie réelle de ω , (b) partie imaginaire de ω , (c) module du ratio d'amplitudes $|G|$, (d) angle de phase entre le sillage et la structure φ_G .

carrée du facteur AM qui, lui, reflète le niveau d'interaction entre le sillage et le câble. Ces résultats sur le nombre d'onde le plus instable nous serviront au chapitre 4 portant sur les écoulements non uniformes.

3.1.2 Câble droit fini

Après avoir compris le mécanisme d'instabilité pour le câble infini, nous pouvons maintenant aborder le cas où des conditions aux limites sont présentes. Nous commençons cette partie du chapitre en expliquant le comportement du système 3.9-3.10 lorsque l'on fait varier la vitesse réduite pour un nombre d'onde fixe. Par la suite, nous nous intéressons à la plage d'instabilité pour un mode d'un câble fixe, puis aux caractéristiques de la plage de vitesses où deux modes sont instables.

Pulsations complexes en fonction de la vitesse réduite

De l'équation 3.15, on trouve la plage de vitesses réduites instables lorsque k est donné

$$\frac{k}{1 + \sqrt{AM}} < u < \frac{k}{1 - \sqrt{AM}} \quad (3.20)$$

Pour ces valeurs de u , la partie réelle et imaginaire de la pulsation ω sont données par les équations 3.16 et 3.17 respectivement. En dehors de cette plage, l'équation 3.13 fournit ω réel. La figure 3.3 montre l'évolution de la pulsation et du ratio d'amplitude pour $k = 1$. On remarque que le comportement de ces deux quantités est indentique à celui du cylindre rigide (chapitre 2, section 2.2.1).

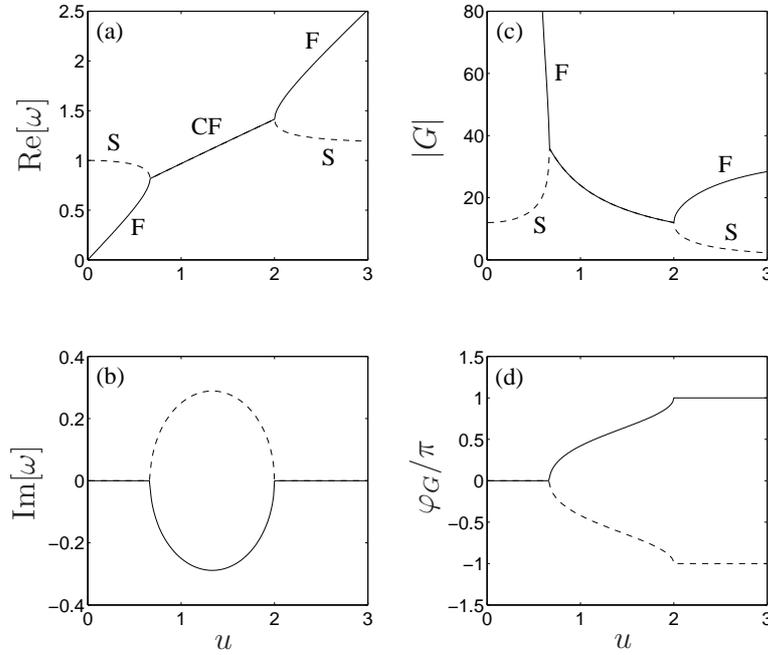


FIGURE 3.3: Pulsation complexe ω et ratio des amplitudes G en fonction de u pour $k = 1$ et $AM = 0.25$: (a) partie réelle de ω , (b) partie imaginaire de ω , (c) module du ratio d'amplitudes $|G|$, (d) angle de phase entre le sillage et la structure φ_G .

Plage d'instabilité pour un mode

L'étape suivante consiste à imposer une restriction sur les nombres d'onde admissibles par le milieu en appliquant des conditions limites. Nous nous intéressons ici au comportement d'un câble de rapport d'aspect $L/D = \Lambda$ dont on fixe les extrémités, figure

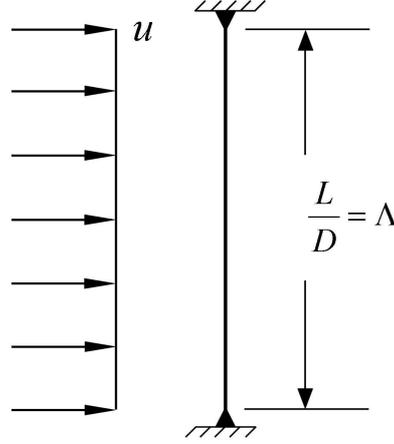


FIGURE 3.4: Câble droit tendu en écoulements uniformes. Les extrémités sont fixées.

3.4. Pour une telle configuration, les conditions aux limites pour la structure sont

$$\begin{aligned} y(0, t) &= 0 \\ y(\Lambda, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Puisqu'aucune intraction en z n'est présente dans l'équation du sillage, aucune condition limite n'est nécessaire pour ce dernier. Etant donné que nous continuons ici à chercher des solutions avec k réel, les nombres d'ondes admissibles par un tel système sont

$$k_n = \frac{\pi}{\Lambda} n, \quad (3.22)$$

avec $n = 1, 2, 3, \dots$. Dans ce cas, la terminologie « numéro de mode » est applicable. Il est intéressant à ce point de caractériser le système à l'intérieur de la plage de vitesses réduites où le mode n est instable. En réécrivant l'équation 3.20, on trouve un taux de croissance temporel positif pour des vitesses réduites qui satisfont

$$\left(\frac{\pi}{\Lambda}\right) \frac{n}{1 + \sqrt{AM}} \leq u \leq \left(\frac{\pi}{\Lambda}\right) \frac{n}{1 - \sqrt{AM}}. \quad (3.23)$$

A l'intérieur de cette plage de vitesses réduites, on obtient à partir des équations 3.16 et 3.17 la fréquence complexe

$$\operatorname{Re}[\omega] = \frac{\pi}{2\Lambda} \sqrt{n^2 + 2n \left(\frac{\Lambda}{\pi} u\right) + (1 - AM) \left(\frac{\Lambda}{\pi} u\right)^2}, \quad (3.24)$$

$$\operatorname{Im}[\omega] = -\frac{\pi}{2\Lambda} \sqrt{-n^2 + 2n \left(\frac{\Lambda}{\pi} u\right) + (AM - 1) \left(\frac{\Lambda}{\pi} u\right)^2}. \quad (3.25)$$

$$(3.26)$$

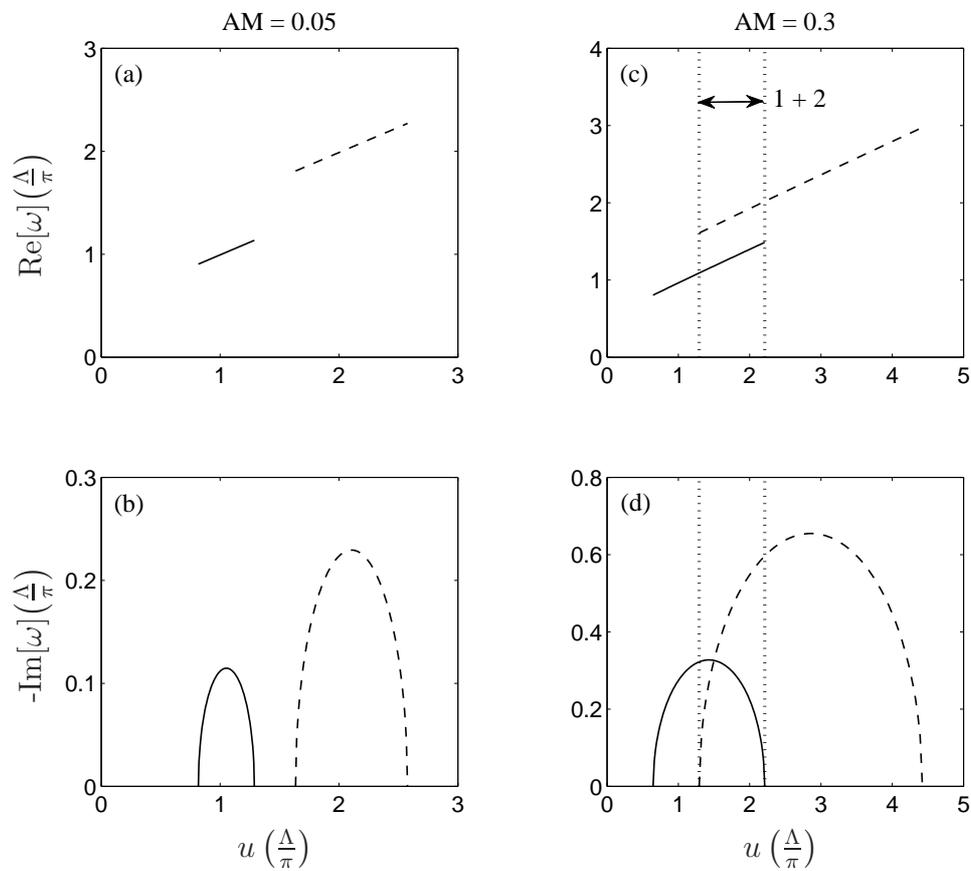


FIGURE 3.5: Evolution de $\text{Re}[\omega]$ (a)-(c) et de $\text{Im}[\omega]$ (b)-(d) avec u . $n = 1$ (trait plein), $n = 2$ (trait brisé).

La figure 3.5 montre l'évolution de ces deux quantités en fonction de u pour $n = 1, 2$ pour deux valeurs de AM . Les pulsations neutres sont omises ici pour ne pas alourdir la figure. Leur forme est la même qu'à la figure 3.3. De la figure 3.5, on constate que la variation de $\text{Re}[\omega]$ de chaque mode est quasi linéaire. On note également que cette quantité évolue de façon discontinue d'un mode à l'autre (forme d'escalier).

Zones de chevauchement des plages d'instabilité

En examinant la figure 3.5, on remarque que les plages d'instabilité pour les deux modes peuvent se chevaucher. C'est le cas pour $AM = 0.3$, mais pas pour $AM = 0.05$. Ce résultat important indique qu'il est possible qu'à une vitesse réduite donnée plus d'un mode possède un taux de croissance non nul.

En utilisant l'équation 3.23 et en définissant comme Δu_n la plage de vitesses réduites où les modes n et $n + 1$ sont tous les deux instables, on trouve

$$\Delta u_n = \frac{\pi}{\Lambda} \left[\left(\frac{2\sqrt{AM}}{1-AM} \right) n - 1 \right]. \quad (3.27)$$

D'après la relation 3.27, la plage de chevauchement entre deux modes adjacents augmente linéairement avec le numéro de mode n . De plus, la pente de cette droite dépend du paramètre AM . Donc, plus AM est élevé, plus les plages de chevauchement sont étendues. De l'équation 3.27, on obtient la condition nécessaire pour qu'il y ait chevauchement

$$\left(\frac{2\sqrt{AM}}{1-AM} \right) n > 1. \quad (3.28)$$

Cette condition montre qu'avec AM grand, le chevauchement se produit pour de petits numéros de modes.

Croisement des taux de croissance

Dans le cas où les plages d'instabilité de deux modes se chevauchent, on peut trouver la vitesse réduite à laquelle les taux de croissance se croisent $u_{transition}$. En égalant les taux de croissance de deux modes adjacents n et $n + 1$ (équation 3.25), on trouve

$$u_{transition} = \left(\frac{2n+1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{\Lambda} \right). \quad (3.29)$$

Cette équation n'est bien sûr valide que dans le cas où la condition 3.28 est remplie. Le point important à noter ici est que, si AM est assez grand pour qu'il y ait chevauchement de plages d'instabilité entre deux modes adjacents, $u_{transition}$ est indépendant de AM . Selon la définition de la vitesse réduite, on trouve la valeur dimensionnelle de la vitesse de transition $U_{transition}$

$$U_{transition} = \frac{f_n D}{S_T} \left(1 + \frac{1}{2n} \right), \quad (3.30)$$

où f_n est la fréquence propre du mode n . On remarque donc que la vitesse de transition entre le mode n et $n + 1$ est fonction uniquement des fréquences propres de la structure, du diamètre et du nombre de Strouhal.

Proximité des taux de croissance

On connaît maintenant la condition à satisfaire pour avoir deux modes adjacents instables sur une plage de u commun, l'étendue de cette dernière si elle existe, et le point

où les deux taux de croissance se croisent. Le dernier point que nous abordons concerne la proximité des taux de croissance dans cette plage de u . A l'aide de l'équation 3.25, on trouve le ratio des taux de croissance des modes n et $n + 1$

$$H_n = \frac{\text{Im}[\omega_{n+1}]}{\text{Im}[\omega_n]} = \sqrt{1 + \frac{2 \left[\left(\frac{\Delta u}{\pi} \right) - n \right] - 1}{-n^2 + 2n \left(\frac{\Delta u}{\pi} \right) + (AM - 1) \left(\frac{\Delta u}{\pi} \right)^2}}. \quad (3.31)$$

Cette équation n'est valable que dans la plage de chevauchement définie par les équations 3.27 et 3.29.

Nous examinons en premier l'effet du paramètre AM sur H_n . La figure 3.6a montre l'évolution de H_6 près de la vitesse de croisement $u_{transition}$ pour deux valeurs de AM différentes. On remarque que les taux de croissance s'éloignent plus rapidement dans le cas à AM faible. Donc, plus AM est grand, plus la plage de vitesses réduites où les taux de croissance de deux modes adjacents sont rapprochés sera grande. Deuxièmement, nous examinons l'effet du numéro de mode sur H_n , figure 3.6b. Cette dernière montre la valeur de H_n pour deux paires de modes adjacents. Le paramètre AM est gardé constant. On remarque que les taux de croissance restent proches pour une plus grande plage de u dans le cas des modes élevés. Donc, plus les modes sont élevés, plus la plage de u où les taux de croissance seront proches est grande. Nous verrons l'effet de la proximité des taux de croissance à la prochaine section où nous présentons des comparaisons entre la théorie linéaire et des résultats expérimentaux.

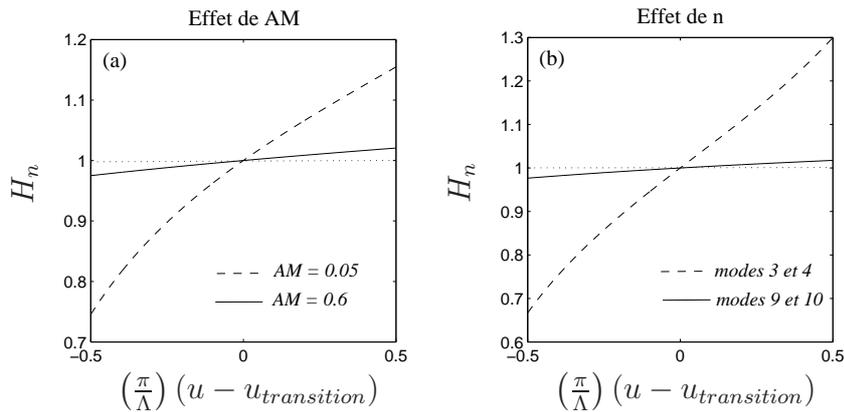


FIGURE 3.6: Ratio des taux de croissance H_n de deux modes adjacents dans la plage de chevauchement : (a) Effet de AM pour les modes 6 et 7, (b) Effet du numéro de mode n pour $AM = 0.25$.

3.2 Comparaisons avec les résultats expérimentaux

3.2.1 Nombres d'ondes instables

A la section 3.1.1, on a observé que, à vitesse réduite u donnée, il existe une plage de nombres d'ondes réels pour laquelle la réponse du système câble/sillage croît en amplitude avec le temps. Les limites de cette plage sont fournies par la relation 3.15. Pour les nombres d'ondes qui y sont inclus, la fréquence des oscillations du système s'exprime par l'équation 3.16. En dehors des valeurs de k instables les ondes sont neutres ce qui signifie donc que leur amplitude devrait devenir rapidement négligeable par rapport à leurs équivalents instables. Suivant cette logique, les nombres d'ondes observés en pratique ne devraient pas se trouver à l'extérieur de la plage de k définie par la relation 3.15, du moins lorsque l'amplitude est importante.

A la section 1.2.2, des résultats d'expériences concernant un câble soumis à un écoulement uniforme ont été évoqués. Comme mentionné à l'intérieur de la section 1.2.2, le numéro du mode dominant à chacune des vitesses a également été rapporté. Les caractéristiques de l'expérience apparaissent au tableau 1.1. A l'aide des résultats de cette expérience, nous vérifions la validité des relations 3.15 et 3.16. Pour ce faire, le paramètre M , équation 1.19, doit être quantifié. Puisque le nombre de masse μ est connu, les seuls paramètres nécessaires sont C_{L_0} et S_T . Pour la plage de Reynolds considérée, une valeur de C_{L_0} de 0.2 est choisie selon Norberg (2003). Pour le nombre de Strouhal, on utilise, comme nous l'avons fait à la section 2.1, une valeur de 0.17. Dans le but de rassembler les données, on normalise la fréquence adimensionnée $\text{Re}[\omega]$ par la vitesse réduite u . Pour l'expérience, le nombre d'onde et la fréquence sans dimension normalisés par rapport à la vitesse réduite s'expriment donc

$$\frac{k}{u} = \frac{1}{2\pi S_T} \left(\frac{\Theta}{\frac{\pi}{4} \rho D^2 U \left(\frac{4\mu}{\pi} - 1 \right)} \right) \left(\frac{n\pi}{\lambda} \right) \quad (3.32)$$

$$\frac{\text{Re}[\omega]}{u} = \frac{fD}{S_T U} \quad (3.33)$$

Le terme n réfère au mode dominant observé dans les expériences, tandis que le paramètre f réfère à la fréquence de vibration observée, figure 3.7a. La comparaison entre la prédiction de la théorie linéaire et les résultats expérimentaux pour deux tensions différentes apparaît à la figure 3.7(b). La figure montre que la grande majorité des points expérimentaux se retrouvent à l'intérieur de la plage de nombres d'ondes instables prédits

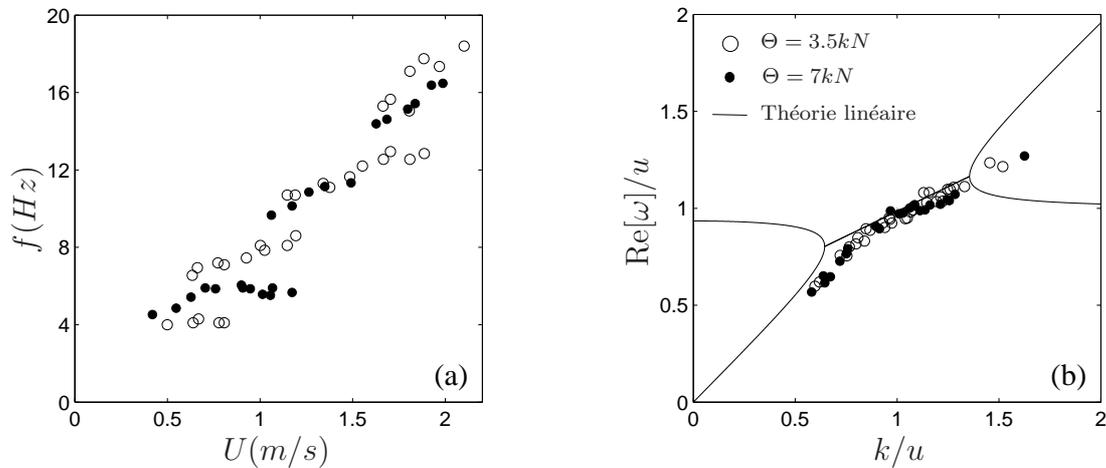


FIGURE 3.7: (a) Evolution de la fréquence de vibration avec la vitesse d'écoulement (redessiné à partir de King, 1995), (b) comparaison entre le modèle linéaire et l'expérience.

par la théorie. De plus, les fréquences des oscillations tombent toutes très près de la courbe du modèle linéaire.

3.2.2 Transition entre modes

À partir des résultats théoriques obtenus à la section 3.1.2, nous avons remarqué que pour une structure finie soumise à un écoulement uniforme, les domaines d'instabilité des différents modes pouvaient se chevaucher. *Lorsque plusieurs modes sont instables, on fait l'hypothèse que le mode ayant le taux de croissance le plus important dominera la réponse.* Notre but ici est de valider cette hypothèse par une comparaison avec les résultats d'expériences. Pour ceci, on utilise des résultats d'une campagne expérimentale rapportés par Chaplin *et al.* (2005b)

La figure 3.8 montre un schéma de leur montage expérimental. Il consiste essentiellement en une poutre tendue soumise à un écoulement uniforme sur une partie de sa longueur, l'autre partie étant dans l'eau stagnante. Le tableau 3.1 présente les caractéristiques mécaniques de la structure. La tension indiquée est celle mesurée au haut de la poutre. Les nombres de Reynolds testés vont de 2500 à 25000. L'écoulement sur la structure est créé en tractant cette dernière dans l'eau stagnante d'un canal. La structure est donc installée sur un chariot monté sur rails. Les auteurs représentent le mouvement

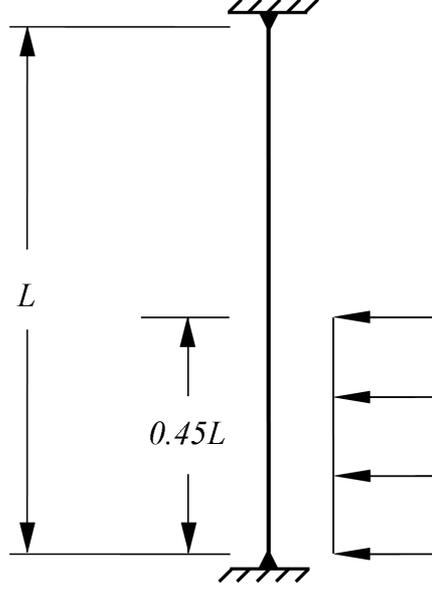


FIGURE 3.8: Schéma de la configuration expérimentale utilisée par Chaplin *et al.* (2005b).

de la structure par

$$Y(Z, T) = \sum_n Y_n(T) \sin\left(\frac{n\pi Z}{L}\right) \quad (3.34)$$

où n est le numéro du mode et $Y_n(T)$ est son facteur modal évalué pour chaque mesure dans le temps. La figure 3.9a montre le numéro du mode dominant pour une tension fixe au haut de la structure à cinq vitesses consécutives. Comme le montre la figure, le mode 2 domine pour les plus faibles vitesses tandis que le mode trois est plus important pour celles plus élevées.

L (m)	13.12	Θ (N)	1925
D (m)	0.028	EI (Nm ²)	29.1
m_S (kg/m)	1.8	$\partial\theta/\partial Z$ (N/m)	12.1

TABLE 3.1: Propriétés mécaniques de la structure étudiée (Chaplin *et al.*, 2005b).

Pour la structure considérée, les équations du modèle linéaire s'écrivent

$$m_T \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + \left(\frac{1}{2} \rho D C_D U\right) \frac{\partial Y}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Theta \frac{\partial Y}{\partial Z}\right) + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial Z^4} = \frac{1}{4} \rho U^2 D C_{L_0} q, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} - \varepsilon \left(2\pi S_T \frac{U}{D}\right) \frac{\partial q}{\partial T} + \left(2\pi S_T \frac{U}{D}\right)^2 q = \frac{A}{D} \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2}, \quad (3.36)$$

avec $m_T = m_S + \frac{\pi}{4}\rho D^2 C_{M_0}$. L'amortissement de la structure est négligé puisqu'il est petit devant l'amortissement fluide. Nous choisissons d'utiliser ici les équations dimensionnelles puisque l'on désire comparer directement les résultats du modèle avec ceux de Chaplin *et al.* (2005b).

Pour étudier le système d'équations linéaires 3.35-3.36, nous effectuons un calcul modal numérique. Pour ce faire, nous approximons les dérivées en Z à l'aide des différences centrées finies d'ordre 2. Le milieu structure-sillage est ainsi discrétisé en $j+r$ oscillateurs couplés. On a donc un système dynamique de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_S & \mathcal{M}_{FS} \\ \mathcal{M}_{SF} & \mathcal{M}_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathcal{Y}} \\ \ddot{\mathcal{Q}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{R}_S & \mathcal{R}_{FS} \\ \mathcal{R}_{SF} & \mathcal{R}_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{Y}} \\ \dot{\mathcal{Q}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{K}_S & \mathcal{K}_{FS} \\ \mathcal{K}_{SF} & \mathcal{K}_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{Q} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

où $\mathcal{Y} = [Y_1(T) \cdots Y_j(T)]^T$ et $\mathcal{Q} = [q_1(T) \cdots q_r(T)]^T$, où r est le nombre de points de discrétisation à l'intérieur de la zone d'écoulement. Pour résoudre le système 3.37, on cherche une solution de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_Y \\ V_Q \end{pmatrix} e^{i\omega' T}, \quad (3.38)$$

où ω' est la pulsation et V_Y et V_Q sont les vecteurs propres de la poutre et du sillage respectivement. Pour simuler les attaches de la structure, on impose des conditions de flexion et de déplacement nuls aux extrémités

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2}(0, T) &= \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2}(L, T) = 0, \\ Y(0, T) &= Y(L, T) = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Les termes d'amortissement sont conservés pour le calcul. Comme les nombres de Reynolds atteints ici sont similaires à ceux de la section précédente, on conserve les mêmes valeurs pour les paramètres empiriques C_{L_0} et S_T . Pour le coefficient de traînée, une valeur de $C_D = 2$ est utilisée afin d'être cohérent avec les mesures de cette quantité par Chaplin *et al.* (2005b).

Par ce calcul, on trouve que V_Y et V_Q sont complexes. La figure 3.9(c)-(d) montre V_Y des deux modes les plus instables. On reconnaît la proximité de la forme des modes linéaires avec celle définie par l'équation 3.34 pour $n = 2$ et $n = 3$. Les taux de croissance prédits par le modèle linéaire pour ces deux modes sont tracés en figure 3.9b. On peut y voir que le mode 2 possède un taux de croissance supérieur au mode 3 pour les vitesses

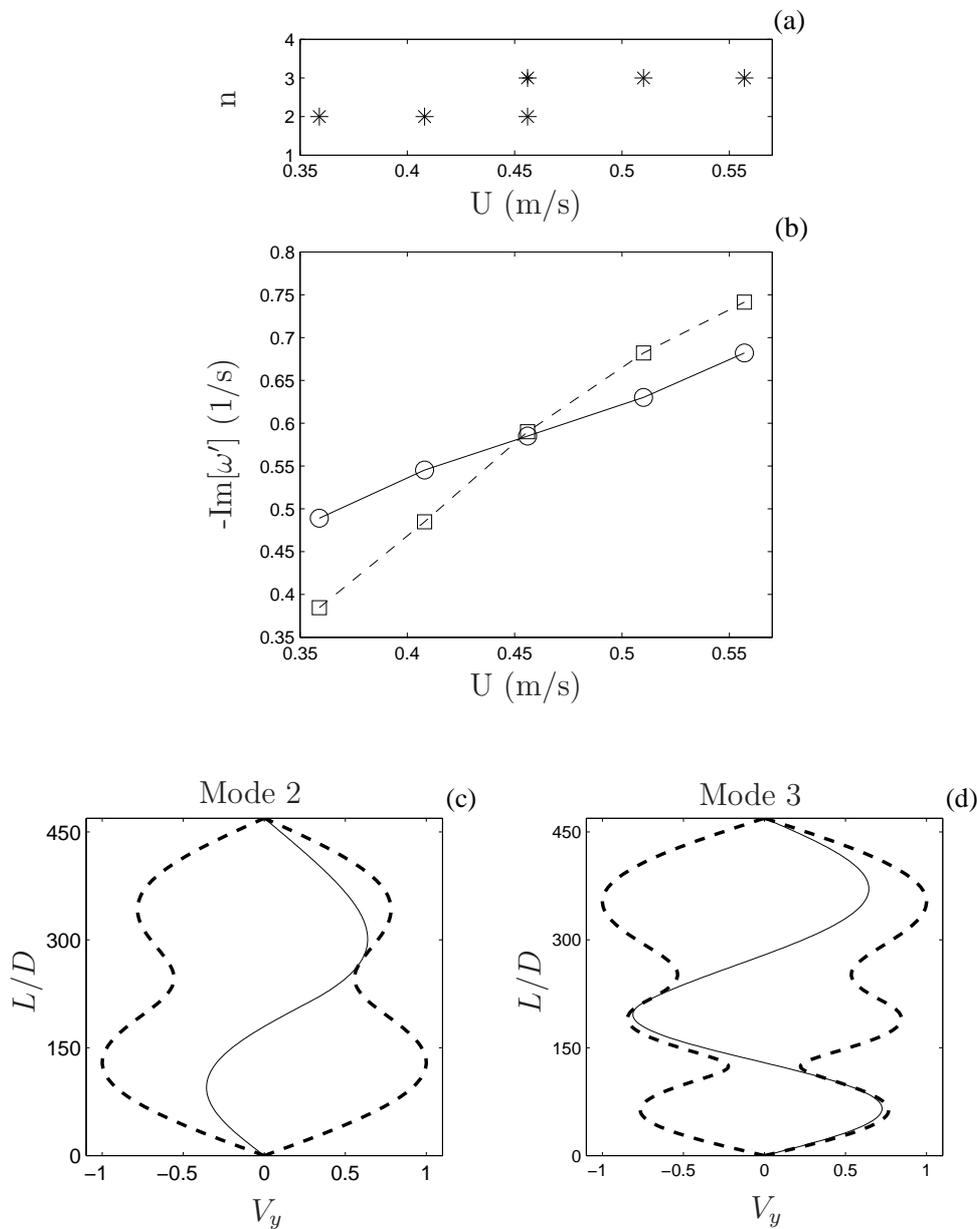


FIGURE 3.9: Comparaison entre les mesures expérimentales et la théorie linéaire pour le mode dominant : (a) mesures expérimentales du numéro de mode spatial dominant tel que rapportées par Chaplin *et al.* (2005b), (b) taux de croissance prédit par la théorie linéaire pour le mode 2 (cercle) et le mode 3 (carré), (c)-(d) forme spatiale des modes 2 et 3 pour la structure, $|V_Y|$ (trait brisé) et $\text{Re}[V_Y]$ (trait continu).

les plus faibles. Pour $U = 0.46 \text{ m/s}$, les taux de croissance des deux modes se croisent et, pour les vitesses les plus hautes, le mode 3 devient le plus important en termes de taux de croissance. Ce basculement du mode 2 au mode 3 se compare bien avec les expériences,

figure 3.9a. Comme mentionné plus tôt, les deux plus faibles vitesses sont dominées par le mode 2 tandis que les deux plus hautes sont dominées par le mode 3. Pour ces vitesses, les auteurs mentionnent que la réponse de la poutre est très périodique. Donc, selon les comparaisons effectuées, les taux de croissance prédits par le modèle linéaire ont un lien direct avec le contenu modal de la réponse saturée non linéaire. La vitesse $U = 0.46m/s$ est un cas particulier où les facteurs modaux $Y_n(T)$ varient de façon considérable dans le temps. Ce type de réponse multimodal est étudié à la prochaine section.

3.2.3 Partage en temps de la fréquence

Comme mentionné à la section 1.2.3, Chaplin *et al.* (2005b) rapportent quelques cas de ce qu'ils nomment « mode switching » que l'on traduit ici par « saut de modes ». Ces sauts de modes sont, d'après les auteurs, amorcés par des perturbations ponctuelles dans le système, telles des vibrations soudaines dues à des irrégularités des rails sur lesquels le chariot transportant la maquette circule. La figure 3.10 montre un exemple de saut de modes. On voit clairement deux régimes distincts. La première forme de réponse, que l'on nomme régime A, est dominée par le mode 8. La deuxième forme, le régime B, est un mélange des modes 6 et 7. Les modes 4 à 7 participent également à la réponse, mais ne sont pas montrés ici. La réponse temporelle de la poutre est montrée pour les deux régimes à la figure 3.11 (a et e). Cette figure montre également le déplacement de cette structure à un temps donné.

Pour cette configuration, le calcul modal numérique linéaire prédit deux modes avec des taux de croissance pratiquement identiques que l'on associe au régime A et au régime B respectivement. Dans les deux situations, l'analyse modale donne des parties réelles de fréquences négatives et positives, signifiant que les ondes se propagent dans les deux directions : vers le haut et vers le bas avec un angle de phase inconnu. La forme de ces modes linéaires est comparée avec la réponse de la poutre à la figure 3.11. On y voit que la longueur d'ondes prédite pour les deux modes est proche de celle de l'expérience pour les deux régimes respectifs. Cependant, la théorie linéaire prédit que l'amplitude des ondes décroît de manière exponentielle dans la partie où la structure est dans l'eau stagnante. Cette particularité dans les prédictions du modèle linéaire, apparaissant lorsque l'écoulement présente une non uniformité, sera examinée plus en profondeur dans le cadre du chapitre 4.

La figure 3.10 (d et e) montre l'évolution des pseudo-fréquences des facteurs mo-

daux 6 à 8 de l'expérience. Ces pseudo-fréquences ont été obtenues par la méthode des ondelettes. A chaque cycle, la fréquence correspondant au coefficient d'ondelettes maximum est notée pour chacun des signaux. Ces fréquences sont moyennées sur dix cycles de vibration. Les fréquences des deux régimes sont bien dissemblables. Comme mentionné à la section 1.2.3, ces deux fréquences partagent le temps de la réponse. Les fréquences des deux modes linéaires sont comparées sur la figure à celles des expériences. Ces fréquences prédites par le modèle linéaire se rapprochent bien de celles des deux régimes. Ce résultat et celui présenté plus tôt à la section 3.2.2 indiquent que le partage en temps des fréquences, ou saut de mode, est symptomatique du fait que deux (ou plusieurs) modes possèdent des taux de croissance très similaires, et donc croissent en amplitude au même rythme rendant le système très sensible aux perturbations (voir par exemple Vandiver, 1993).

3.3 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons identifié premièrement à l'aide d'un système simple, c'est-à-dire un câble infini sans amortissement, le mécanisme d'instabilité et ses principales caractéristiques. Il s'agit d'une instabilité par confusion de fréquences entre deux ondes, l'une structurelle et l'autre sillage. La réponse instable comprend donc deux ondes se propageant en sens inverse dans le domaine et dont l'amplitude croît en temps.

En ce qui a trait aux structures finies, la plage de vitesses réduites où chaque nombre d'onde admissibles est le plus instable a été définie. Il apparaît que la densité modale, le nombre de Strouhal et le diamètre sont les facteurs déterminants pour définir où les taux de croissance de deux modes adjacents se croisent, et donc la plage de vitesses où un nombre d'onde et une fréquence devraient vraisemblablement dominer le système. Cependant, la proximité de ces taux de croissance est étroitement liée à l'intensité de l'interaction entre la structure et le sillage (paramètre AM). Nous concluons que plus cette interaction est forte, plus la transition entre deux modes sera floue.

Nous avons confirmé ces résultats de la théorie linéaire par des comparaisons avec des résultats d'expériences disponibles dans la littérature. Dans un premier temps, la plage de nombres d'onde instables ainsi que les fréquences correspondantes prédites par la théorie linéaire ont été validées avec les expériences de King (1995). Dans un deuxième temps, nous avons établi un lien étroit entre le mode ayant le taux de croissance le plus

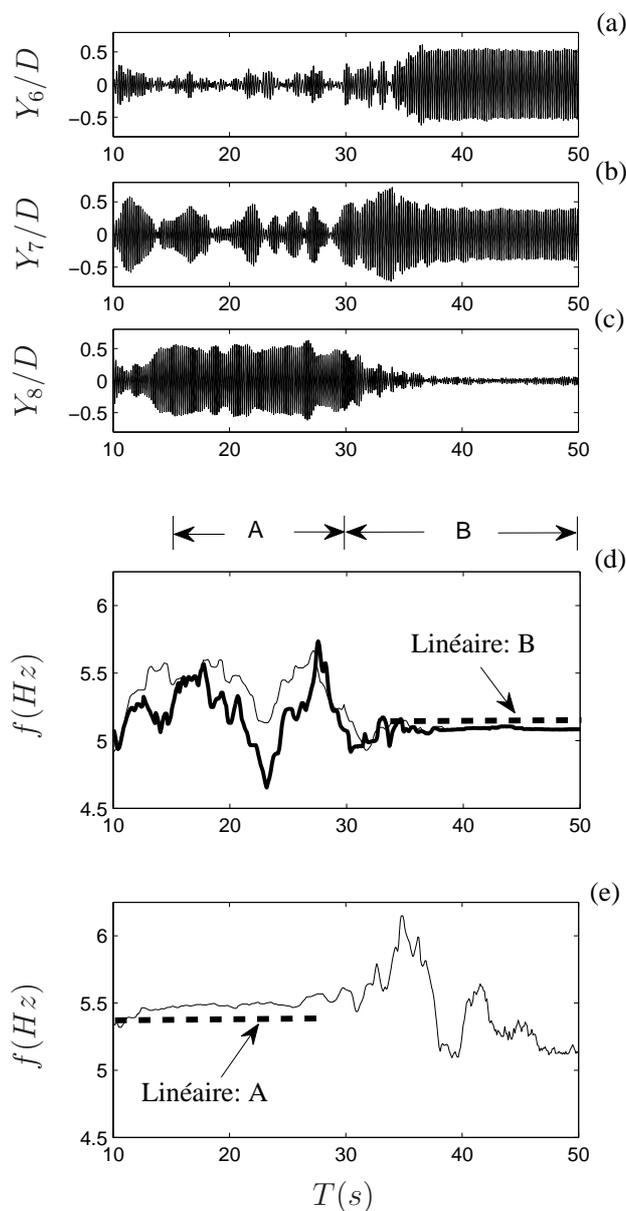


FIGURE 3.10: (a)-(c) Evolution avec le temps des facteurs modaux des modes 6 à 8, (d) évolution de la pseudo-fréquence avec le temps pour le mode 7 (trait fin) et du mode 6 (trait gras), (e) évolution de la pseudo-fréquence avec le temps pour le mode 8. La fréquence prédite pour le régime A apparaît en (e) tandis que celle pour le régime B est montrée en (d). Expérience de Chaplin *et al.* (2005b).

important du système et son occurrence dans les expériences à l'aide de comparaisons avec les résultats de Chaplin *et al.* (2005b). Pour terminer, nous avons fourni une explication pour le partage en fréquences. En effet, les conditions propices à l'apparition de

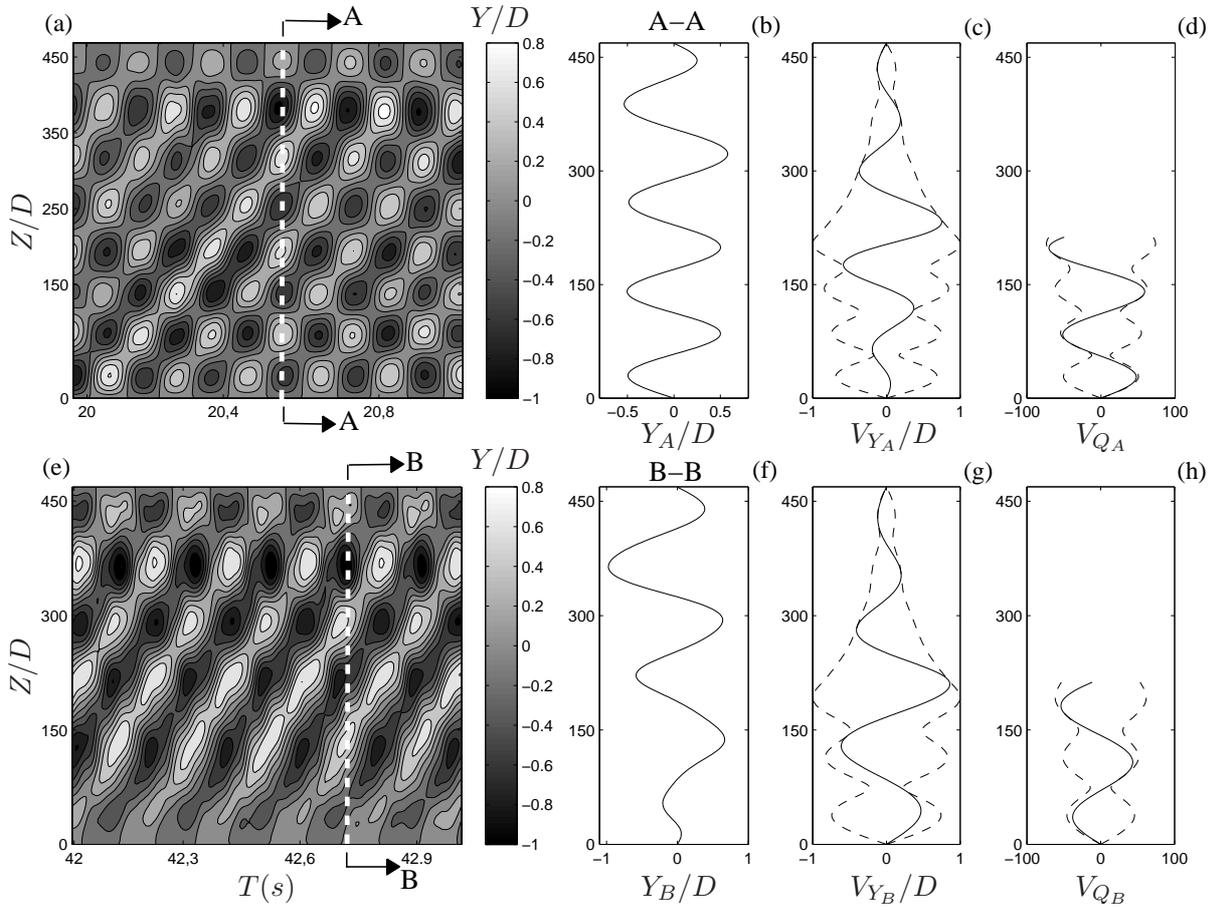


FIGURE 3.11: Régime A : (a) Réponse en temps et espace de la structure pour l'expérience, (b) déplacement instantané de la structure, (c) prédiction linéaire de la forme du mode pour la structure, (d) prédiction linéaire pour la forme du mode pour le sillage. Régime B : (e) Réponse en temps et espace de la structure pour l'expérience, (f) déplacement instantané de la structure, (g) prédiction linéaire de la forme du mode pour la structure, (h) prédiction linéaire pour la forme du mode pour le sillage. La tension à la tête de la structure est de 1 073 N, la vitesse est de 0.9 m/s. Expérience de Chaplin *et al.* (2005b).

ce phénomène correspondent à des taux de croissance très proches prédits par la théorie linéaire. L'explication est simple ici : puisqu'il existe deux (ou plusieurs) modes aussi instables les uns que les autres, il semble logique que ces derniers aient autant de chances d'apparaître à l'intérieur de la réponse saturée du système. Notons ici que cette idée peut être étendue aux écoulements non uniformes. Cependant, dans ce cas un autre effet peut entrer en jeu : la séparation spatiale des modes dominants. Nous abordons cette question à l'intérieur du prochain chapitre.

Chapitre 4

Structures élancées en écoulements non uniformes

Au chapitre 3, nous avons vu que, pour une structure infinie en écoulements uniformes, il existe, à vitesse réduite donnée, une plage de nombre d'onde instables, c'est-à-dire dont l'amplitude croît en temps. A l'intérieur de ce quatrième chapitre, nous examinons comment une échelle spatiale apparaît lorsque l'on introduit une non uniformité dans l'écoulement.

Dans un premier temps, nous développons la théorie pour un système non uniforme simple. A partir de cette analyse, nous établirons des comportements généraux sur les écoulements non uniformes. Nous aborderons ensuite un cas pratique complexe où une séparation en espace des fréquences est observée.

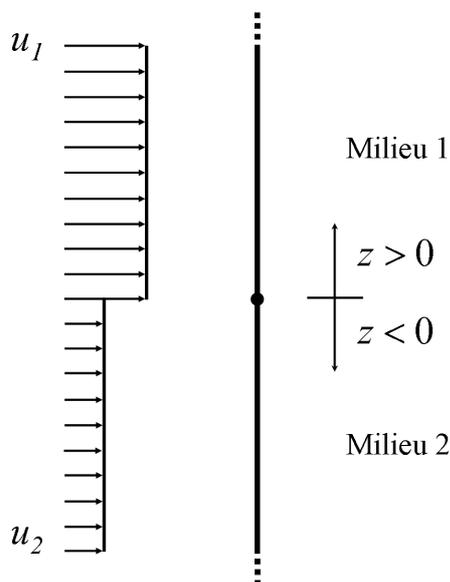


FIGURE 4.1: Configuration d'écoulements non uniformes étudié. Deux milieux caractérisés par leur propre vitesse réduite sont connectés en $z = 0$.

4.1 Théorie

A cette section, nous étudions une configuration simple d'écoulements non uniformes. Il s'agit d'un câble droit infini soumis à deux profils de vitesses uniformes (figure 4.1). Cette configuration comporte donc deux milieux semi-infinis connectés en $z = 0$. Ces derniers sont caractérisés par des vitesses réduites différentes, u_1 pour $z > 0$ et u_2 pour $z < 0$, avec $u_1 > u_2$.

Cette section contient sept parties. Premièrement, nous présentons les caractéristiques de la configuration étudiée. Deuxièmement, nous déterminons les types de réponses qu'elle peut admettre. Nous nommons ces types de réponses « systèmes d'ondes ». Troisièmement, nous trouvons le régime le plus instable de ces systèmes d'ondes ainsi que leur fréquence complexe. Quatrièmement, nous dérivons la forme des deux systèmes d'ondes principaux. Cinquièmement, nous évaluons l'effet du ratio des vitesses réduites u_1 et u_2 sur les formes de réponses trouvées précédemment. Sixièmement, nous mettons en évidence l'apparition d'ondes stationnaires dans le système lorsque le paramètre AM augmente. Nous terminons par discuter d'une caractéristique importante de la configuration étudiée : la compétition entre l'échelle temporelle, définie par la croissance en temps des systèmes d'ondes, et l'échelle spatiale, définie par la non uniformité en espace de leur amplitude.

4.1.1 Caractéristiques de la configuration

Relation de dispersion

Nous posons ω_1 et k respectivement comme pulsation et nombre d'onde du milieu 1 ainsi que ω_2 et p respectivement comme pulsation et nombre d'onde du milieu 2. Nous pouvons maintenant écrire la relation de dispersion pour les deux milieux (équation 3.12)

$$\mathcal{D}_1(\omega_1, k; u_1) = \omega_1^4 + [(AM - 1)u_1^2 - k^2]\omega_1^2 + k^2u_1^2 = 0, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{D}_2(\omega_2, p; u_2) = \omega_2^4 + [(AM - 1)u_2^2 - p^2]\omega_2^2 + p^2u_2^2 = 0. \quad (4.2)$$

Nous aurons besoin pour les développements suivants de l'expression des nombres d'onde en fonction de la pulsation. A l'aide de 4.1 et 4.2, on a

$$k = \pm\omega_1 \sqrt{1 + \frac{AMu_1^2}{\omega_1^2 - u_1^2}}, \quad (4.3)$$

$$p = \pm\omega_2 \sqrt{1 + \frac{AMu_2^2}{\omega_2^2 - u_2^2}}. \quad (4.4)$$

Comme au chapitre 3 (section 3.1), nous considérons que chaque onde comporte une partie sillage et une partie structure. On exprime donc l'évolution du mouvement de la structure et du sillage dans chaque milieu par une seule variable, $\chi_1(z, t)$ et $\chi_2(z, t)$. On a donc

$$\begin{bmatrix} y_1(z, t) \\ q_1(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ G_1 \end{bmatrix} \chi_1(z, t), \quad (4.5)$$

pour le milieu 1 et

$$\begin{bmatrix} y_2(z, t) \\ q_2(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ G_2 \end{bmatrix} \chi_2(z, t), \quad (4.6)$$

pour le milieu 2. On a également $G_1 = \hat{q}_1/\hat{y}_1$ et $G_2 = \hat{q}_2/\hat{y}_2$. Les indices 1 et 2 réfèrent à des quantités reliées aux milieux 1 et 2 respectivement. Les termes \hat{y}_1 , \hat{q}_1 , \hat{y}_2 et \hat{q}_2 représentent l'amplitude de chaque partie des ondes.

Enoncé des conditions sur le système

Le système étudié ici (figure 4.1) implique une connexion des deux milieux en $z = 0$. Cette connexion implique des conditions qui concernent la partie structurale des ondes puisque seul le câble présente une interaction en z . Le mouvement de la structure en $z = 0$ pour les deux milieux doit donc satisfaire une condition de continuité de déplacement et

de tension. En considérant la définition de χ_1 et χ_2 présentée plus tôt, ces conditions s'écrivent

$$\chi_1(0, t) = \chi_2(0, t), \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial z}(0, t) = \frac{\partial \chi_2}{\partial z}(0, t). \quad (4.8)$$

Ces conditions de continuité en déplacement et de première dérivée spatiale impliquent que chaque fréquence complexe présente dans un milieu le soit également dans l'autre, donc $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Nous cherchons ici des réponses dont l'amplitude croît avec le temps, donc ω est complexe non réel. Pour finir, nous nous intéressons aux réponses qui ont une amplitude finie lorsque $z \rightarrow \pm\infty$.

Forme de la réponse

Nous avons vu que le système avait nécessairement des fréquences communes. Nous nous intéressons maintenant à la forme de la réponse pour une fréquence ω donnée. Des équations 4.3 et 4.4, on sait qu'il existe dans chaque milieu deux ondes se propageant en directions opposées pour une fréquence. La réponse des deux milieux peut donc être écrite

$$\chi_1(z, t) = P_1 e^{i(\omega t + k^+ z)} + N_1 e^{i(\omega t + k^- z)}, \quad (4.9)$$

$$\chi_2(z, t) = P_2 e^{i(\omega t + p^+ z)} + N_2 e^{i(\omega t + p^- z)}, \quad (4.10)$$

où P et N sont les amplitudes des ondes qui se propagent respectivement vers les z positifs et négatifs. Par soucis de clarté, on note maintenant k et p en omettant les signes $+$ et $-$. La figure 4.2 illustre ce type de réponse.

4.1.2 Systèmes d'ondes admissibles

Maintenant que nous connaissons la relation de dispersion de chaque milieu et les conditions de raccord, nous pouvons chercher les systèmes d'ondes admissibles pour la configuration étudiée. Par système d'ondes, on entend ici tout système n'ayant qu'une fréquence et qui respecte :

- (a) la relation de dispersion des deux milieux (équations 4.3 et 4.4),
- (b) les conditions de raccord en $z = 0$ (équations 4.7 et 4.8),
- (c) la condition d'amplitude finie lorsque $z \rightarrow \pm\infty$.

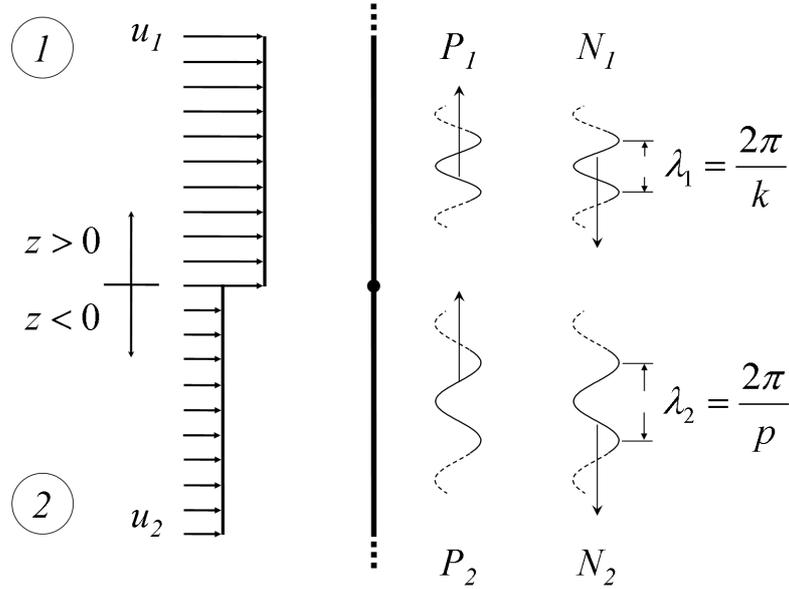


FIGURE 4.2: Configuration des ondes dans le cas d'une seule fréquence commune.

De plus, nous nous concentrons seulement sur les systèmes d'ondes dont l'amplitude croît en temps, donc avec $\text{Im}[\omega] < 0$.

Cas où k et p sont complexes

Le cas le plus général implique des nombres d'onde k et p complexes. D'après les équations 4.3 et 4.4, il y a une onde dans chaque milieu qui ne respecte pas la condition d'amplitude finie lorsque $z \rightarrow \pm\infty$. Donc, une seule onde se propage dans chaque milieu, figure 4.3. Par contre, les conditions 4.7 et 4.8 ne peuvent pas être satisfaites à la fois pour un tel cas si les deux nombres d'onde ne sont pas égaux. On conclut donc qu'il est impossible qu'à la fois k et p soient complexes non réels.

Système d'ondes conditionnel (C)

Le deuxième type de solutions considérées est caractérisé par k et p réels (figure 4.3). Cette configuration respecte les conditions 4.7 et 4.8 pour tous k et p . Puisque la fréquence complexe doit être la même partout, les plages de nombres d'onde instables pour les deux milieux doivent se chevaucher. A partir de 3.15, cette exigence se formule

$$\frac{u_2}{u_1} \geq \frac{1 - \sqrt{AM}}{\sqrt{1 - AM}}. \quad (4.11)$$

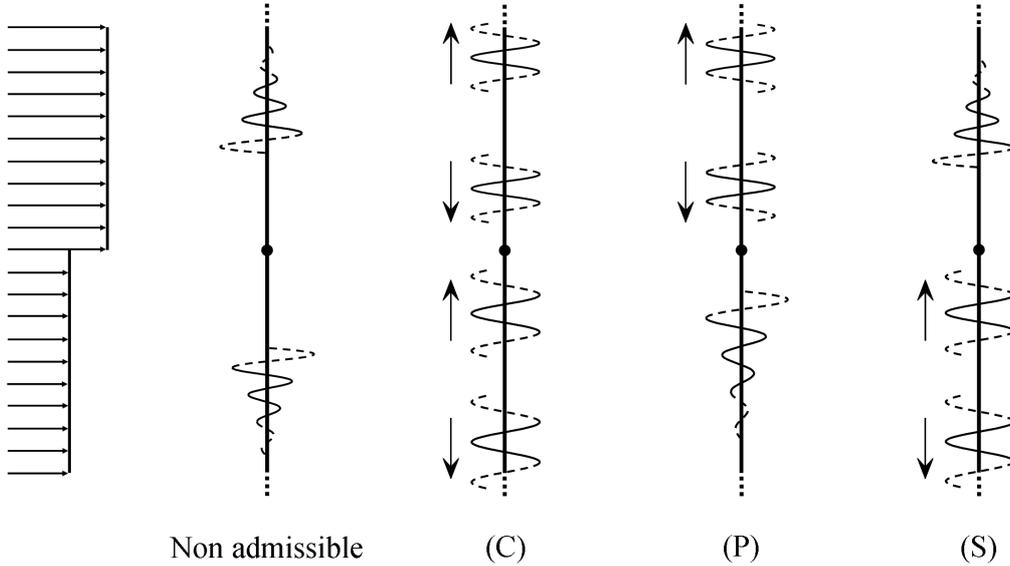


FIGURE 4.3: Systèmes d'ondes considérés : deux ondes complexes (non admissible), (C) système d'ondes conditionnel, (P) système d'ondes primaire, (S) système d'ondes secondaire.

On nomme cette forme de réponse *système d'ondes conditionnel* (C) à cause du prérequis nécessaire à son existence (relation 4.11).

Système d'ondes primaire (P) et secondaire (S)

Le dernier type de réponses potentiellement admissibles est composé de deux ondes neutres à l'intérieur d'un milieu et dans l'autre d'une onde dont l'amplitude décroît lorsque $z \rightarrow \pm\infty$. Cette configuration satisfait toutes les conditions vues plus tôt. Nous identifions donc deux nouveaux systèmes d'ondes : le premier où k est réel et p est complexe et un deuxième où k est complexe et p est réel. Nous nommons le premier *système d'ondes primaire* (P) et le deuxième *système d'ondes secondaire* (S). La figure 4.3 illustre ces deux systèmes d'ondes.

Variables normalisées

Puisque le but ici consiste à comparer les réponses entre les différents systèmes d'ondes, il est important d'établir une échelle de longueur commune qui sera conservée tout au long de l'analyse. On pose cette échelle arbitraire égale à la longueur d'onde la plus instable à l'intérieur du milieu 1. En se rappelant la section 3.1.1, le nombre

d'onde correspondant est $k_{max} = u_1$. Les quantités normalisées sont \bar{z} , \bar{k} , \bar{p} . On normalise également t et ω par u_1 pour obtenir \bar{t} et $\bar{\omega}$. On introduit aussi une nouvelle variable, R qui représente le ratio des vitesses réduites. Les variables normalisées se formulent donc

$$R = \frac{u_2}{u_1}, \quad (4.12)$$

$$\bar{z} = z \left(\frac{u_1}{2\pi} \right), \quad (4.13)$$

$$\bar{t} = t \left(\frac{u_1}{2\pi} \right), \quad (4.14)$$

$$\text{Re} [\bar{\omega}] = \frac{1}{2} \sqrt{\bar{k}^2 + 2\bar{k} + (1 - AM)} = \frac{1}{2} \sqrt{\bar{p}^2 + 2R\bar{p} + (1 - AM)R^2}, \quad (4.15)$$

$$\text{Im} [\bar{\omega}] = -\frac{1}{2} \sqrt{-\bar{k}^2 + 2\bar{k} + (AM - 1)} = -\frac{1}{2} \sqrt{-\bar{p}^2 + 2R\bar{p} + (AM - 1)R^2}, \quad (4.16)$$

$$\bar{k} = \pm \bar{\omega} \sqrt{1 + \frac{AM}{\bar{\omega}^2 - 1}}, \quad (4.17)$$

$$\bar{p} = \pm \bar{\omega} \sqrt{1 + \frac{(AM)R^2}{\bar{\omega}^2 - R^2}}. \quad (4.18)$$

4.1.3 Fréquence des systèmes d'ondes

Maintenant que nous avons identifié les trois systèmes d'ondes admis par la configuration à l'étude, nous nous intéressons aux fréquences complexes de ces systèmes.

Système d'ondes (P) et (S)

A une vitesse réduite donnée, on sait qu'il existe une plage finie de nombres d'onde instables (équation 3.15). Nous voulons connaître quels sont les taux de croissance maximaux associés aux systèmes (P) et (S). De la section 3.1.1, on trouve que le nombre d'onde normalisé le plus instable pour (P) est $\bar{k} = 1$. Pour (S), nous trouvons $\bar{p} = R$. Les fréquences normalisées associées aux systèmes (P) et (S) sont respectivement (équation 3.19)

$$\bar{\omega}_P = \sqrt{1 - \frac{AM}{4}} - i \frac{\sqrt{AM}}{2}, \quad (4.19)$$

$$\bar{\omega}_S = R \sqrt{1 - \frac{AM}{4}} - i R \frac{\sqrt{AM}}{2} = R \bar{\omega}_P. \quad (4.20)$$

Le premier point important à noter ici est que l'amplitude du système (S) croît moins rapidement en temps que celle de (P) puisque son taux de croissance est plus petit. Ce point est cohérent avec ce qui a été noté à la section 3.1.1 à propos de la dépendance linéaire du taux de croissance à la vitesse réduite pour un câble tendu infini en écoulements uniformes. Le deuxième point important à noter est que la fréquence de (P) est toujours plus importante que celle de (S).

Système d'ondes (C)

Le système (C) comporte une particularité qui le distingue des deux autres : à R donné, une seule fréquence est possible. Pour obtenir cette dernière, on commence par trouver les nombres d'onde en égalisant les fréquences complexes des deux milieux (équations 3.16 et 3.17)

$$\bar{k} = \pm\sqrt{1 - AM}, \quad (4.21)$$

$$\bar{p} = \pm R\sqrt{1 - AM}, \quad (4.22)$$

Les parties réelles et imaginaires de la fréquence unique correspondante s'énoncent

$$\text{Re}[\bar{\omega}_C] = \frac{1}{2}\sqrt{2R\sqrt{1 - AM} + (1 - AM)(1 + R^2)}, \quad (4.23)$$

$$\text{Im}[\bar{\omega}_C] = -\frac{1}{2}\sqrt{2R\sqrt{1 - AM} - (1 - AM)(1 + R^2)}. \quad (4.24)$$

Comparaison des taux de croissance

Nous comparons ici les différents taux de croissance des trois systèmes d'ondes. La figure 4.4 montre la différences des taux de croissance. Puisque celui du système (P) est le plus important des trois, on utilise ce dernier comme référence. On voit sur cette figure que le système (C) possède le plus petit taux de croissance des trois systèmes d'ondes. Nous jugeons donc ce dernier comme moins important que les deux autres. Ce système d'ondes ne sera pas décrit d'avantage.

4.1.4 Forme des systèmes (P) et (S)

Les formes des systèmes d'ondes (P) et (S) sont évaluées à l'intérieur de cette section pour $R = 0.5$ et $AM = 0.25$. L'effet de R sur ces formes sera abordé à la section suivante où nous verrons qu'elles sont générales. L'effet du paramètre AM a été vérifié : le seul impact important d'une variation de AM sur les formes de (P) et de (S) est discuté à la section 4.1.6.

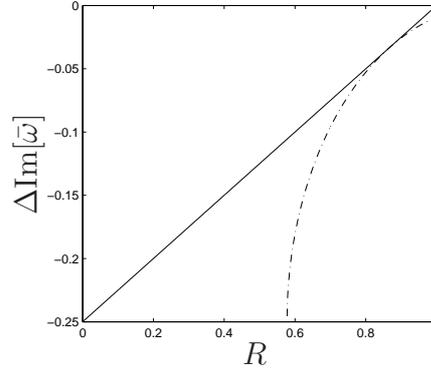


FIGURE 4.4: Différences dans les taux de croissance $\Delta\bar{\omega}$ entre (P) et (S), $\bar{\omega}_P - \bar{\omega}_S$ (trait continu) et entre (P) et (C), $\bar{\omega}_P - \bar{\omega}_C$ (trait brisé) en fonction du ratio des vitesses réduites R pour $AM = 0.25$

Système (P)

Puisque l'on connaît la fréquence $\bar{\omega}_P$ (équation 4.19), on peut obtenir à l'aide de l'équation 4.18 le nombre d'onde \bar{p} du milieu 2 (tableau 4.1). En considérant la condition d'amplitude finie, $P_2 = 0$. On détermine les quantités N_1 , N_2 et P_2 à partir des conditions de connexion (équations 4.7 et 4.8). Puisqu'il n'existe que deux équations pour trois inconnues on utilise comme référence $N_1 = 1$. Les amplitudes complexes P_1 et N_2 s'expriment donc

$$P_1 = \frac{1 - \bar{p}}{1 + \bar{p}}, \quad (4.25)$$

$$N_2 = \frac{2}{1 + \bar{p}}. \quad (4.26)$$

Le tableau 4.1 présente les valeurs de P_1 , N_2 , G_1 et G_2 pour la valeur de R et de AM considérée.

En omettant la croissance en temps, la réponse de (P) est montrée à la figure 4.5. Cette figure illustre l'évolution en temps et espace de y et q . L'enveloppe spatiale de ces deux variables y est également tracée. La réponse globale se résume en une onde se propageant vers les \bar{z} négatifs. Son amplitude décroît exponentiellement pour $\bar{z} < 0$ et est légèrement modulée pour $\bar{z} > 0$. La modulation d'amplitude s'explique par le faible module de P_1 relativement à N_1 , le rôle de cette onde étant de satisfaire les conditions de raccord 4.7 et 4.8. On observe sur la figure 4.5 qu'il existe un saut d'amplitude pour la partie sillage des ondes à $\bar{z} = 0$. Ceci est attendu puisque le ratio d'amplitude G ne sera pas le même pour les deux milieux (équation 3.18).

Systeme (S)

L'évaluation de la forme de (S) se fait de la même façon que pour (P). A l'aide de la fréquence obtenue avec la relation 4.20, on trouve \bar{k} à l'aide de l'équation 4.17 (tableau 4.1). Par la condition d'amplitude finie, on trouve $N_1 = 0$, laissant trois inconnues : P_1 , P_2 et N_2 . La méthode utilisée pour évaluer ces quantités est la même que pour le système (P) sauf qu'ici la référence utilisée est $P_2 = 1$. Ces quantités s'écrivent

$$P_1 = \frac{2R}{R + \bar{k}}, \quad (4.27)$$

$$N_2 = \frac{R - \bar{k}}{R + \bar{k}}. \quad (4.28)$$

La figure 4.5 trace l'évolution en temps et espace de y et q pour le système (S) ainsi que leur enveloppe spatiale. La valeur des amplitudes et des ratio G_1 et G_2 est montrée au tableau 4.1. Cette figure montre que la forme que prend (S), mis à part le sens de propagation de l'onde, est la même que celle de (P). En effet, elle consiste en une onde se propageant vers les \bar{z} positifs. L'amplitude de cette onde est modulée pour $\bar{z} < 0$ et décroît exponentiellement pour $\bar{z} > 0$.

Points importants concernant la forme des systèmes d'ondes

Deux points sont à retenir de cette section. Premièrement, la décroissance exponentielle en amplitude des ondes observée pour les deux systèmes introduit une échelle de longueur dans la réponse qui est reliée à la partie imaginaire des nombres d'onde. Cette dernière est intrinsèque à la configuration d'écoulements non uniformes étudiée ici. Elle découle du simple fait que les relations de dispersion des deux milieux sont différentes. La théorie linéaire prédit également cette décroissance spatiale pour des structures finies (voir figure 3.11). Nous rappelons ici qu'aucun amortissement n'est présent dans le système. Nous avons donc montré qu'il est possible d'obtenir une décroissance d'amplitude des ondes en écoulements non uniformes sans la présence de perte d'énergie par amortissement. Cette échelle de décroissance fera l'objet d'une discussion plus approfondie à la section 4.1.7.

4.1.5 Effet du ratio des vitesses réduites R

Plus haut, nous avons obtenu la forme des systèmes (P) et (S). Maintenant, nous analysons l'influence du ratio des vitesses réduites R sur la forme de (P). Nous choisissons

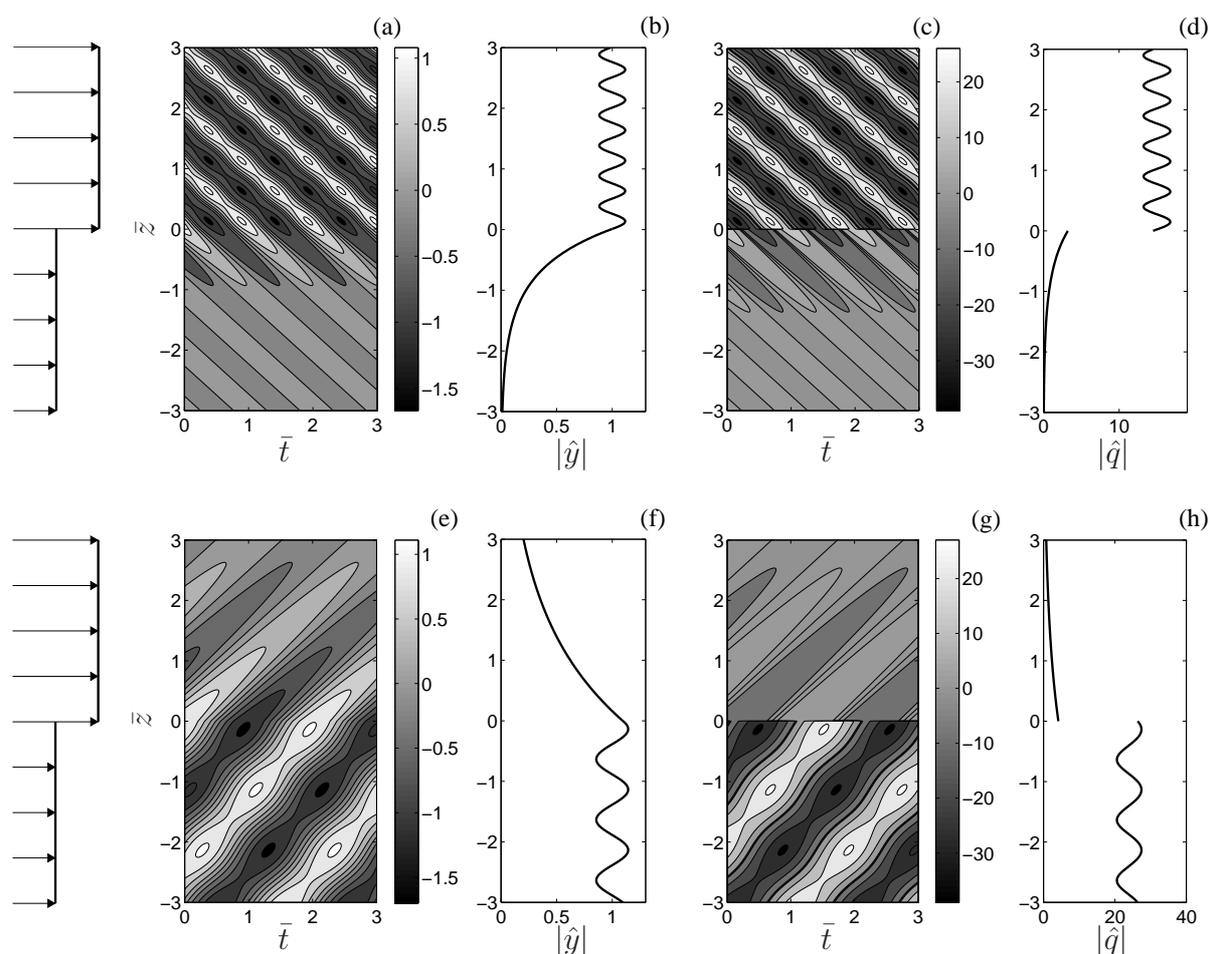


FIGURE 4.5: Evolution avec le temps et l'espace de (P) : (a) déplacement du câble avec le temps et l'espace, (b) enveloppe du mouvement du câble, (c) évolution du sillage avec le temps et l'espace, (d) enveloppe de la variable sillage. Evolution avec le temps et l'espace de (S) : (e) déplacement du câble avec le temps et l'espace, (f) enveloppe du mouvement du câble, (g) évolution du sillage avec le temps et l'espace, (h) enveloppe de la variable sillage. La croissance exponentielle en temps a été enlevée ici pour des fins de démonstration. $R = 0,5$ et $AM = 0,25$

(P)		(S)	
$\bar{\omega}_P$	0.978 - i 0.25	$\bar{\omega}_S$	0.489 - i 0.125
\bar{k}	1	\bar{k}	$\mp 0.405 \pm i 0.0895$
\bar{p}	$\pm 1.00 \mp i 0.235$	\bar{p}	0.5
$ P_1 $	0.117	$ P_1 $	1.10
φ_{P_1}	0.543 π	φ_{P_1}	0.0315 π
$ N_1 $	1	$ N_1 $	0
φ_{N_1}	0	φ_{N_1}	-
$ P_2 $	0	$ P_2 $	1
φ_{P_2}	-	φ_{P_2}	0
$ N_2 $	0.991	$ N_2 $	0.143
φ_{N_2}	0.0372 π	φ_{N_2}	0.273 π
$ G_1 $	25	$ G_1 $	3.79
φ_{G_1}	0.42 π	φ_{G_1}	0.79 π
$ G_2 $	15.2	$ G_2 $	24
φ_{G_2}	0.0489 π	φ_{G_2}	0.42 π

TABLE 4.1: Caractéristiques des systèmes (P) et (S) pour $R = 0.5$ et $AM = 0.25$.

de discuter de cette influence sur les nombres d'onde \bar{k} et \bar{p} et les amplitudes P_1 et N_2 . Puisque l'évolution de la forme de (S) avec R est très similaire à celle de (P), elle n'est pas discutée ici.

L'équation 4.18 indique qu'une variation de R modifie le nombre d'onde du milieu 2, \bar{p} . La dépendance de cette quantité par rapport à R apparaît à la figure 4.6. De cette figure, on note trois points importants. Premièrement, le signe de la partie imaginaire de \bar{p} ne change pas. Cela signifie que la forme générale de (P) est indépendante de R et que les équations 4.25 et 4.26 restent valides pour tout R . Deuxièmement, la partie réelle de \bar{p} varie très peu autour de $\text{Re}[\bar{p}]=1$. Cela implique que la longueur d'onde pour $\bar{z} < 0$ reste toujours très proche de celle pour $\bar{z} > 0$. Troisièmement, $\text{Im}[\bar{p}]$ reste constant pour les R faibles et évolue vers $\text{Im}[\bar{p}]=0$ pour les R près de 1. Donc, la décroissance spatiale des

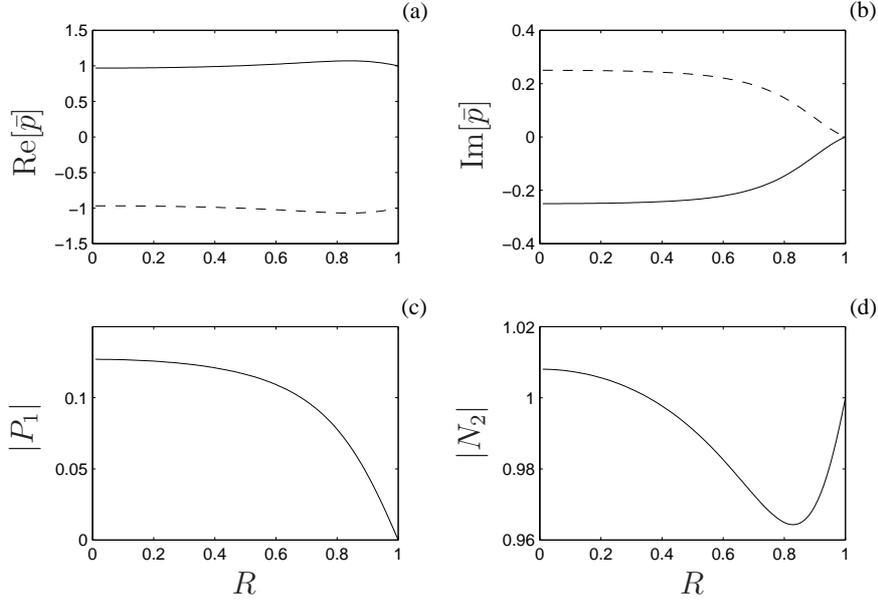


FIGURE 4.6: (a)-(b) nombre d'onde normalisé \bar{p} et (c)-(d) module des amplitude $|P_1|$ et $|N_2|$ en fonction de R pour le système (P) à $AM = 0.25$. En (a) et (b) le trait brisé montre le nombre d'onde qui ne respecte par la condition d'amplitude finie.

ondes pour $\bar{z} < 0$ est constante pour R faible et disparaît lorsque R tend vers 1.

Puisque les amplitudes complexes P_1 et N_2 dépendent du nombre d'onde \bar{p} , un changement dans la valeur de R va influencer indirectement ces paramètres. La figure 4.6 montre l'évolution de leur module en fonction du ratio des vitesses réduites. On note deux caractéristiques importantes. Premièrement, $|N_2|$ varie très peu avec R . Deuxièmement, $|P_1|$ diminue avec R ce qui signifie que la modulation spatiale de l'amplitude des ondes pour $\bar{z} > 0$ diminuent avec R .

De cette étude de l'influence de R sur le nombre d'onde \bar{p} et les amplitudes P_1 et N_2 nous concluons que la forme générale du système (P) est indépendante du ratio des vitesses réduites. Cependant, nous notons qu'avec R croissant, la décroissance spatiale de l'amplitude pour $\bar{z} < 0$ et la modulation en amplitude pour $\bar{z} > 0$ diminuent.

4.1.6 Apparition d'ondes stationnaires

Nous avons vu à la section 4.1.4 que des modulations en espace de l'amplitude des systèmes (P) et (S) existent. Nous étudions ce phénomène plus en détail ici en évaluant

l'effet du paramètre AM sur cette modulation d'amplitude.

Système (S)

Pour le système (S), la figure 4.7 (c et d) montre l'évolution du module et de la phase de N_2 en fonction de AM . On remarque que N_2 augmente avec AM tandis que φ_{N_2} diminue vers 0. Ceci nous indique que la réponse du système (S) s'approche de celle d'une onde stationnaire pour $\bar{z} < 0$ lorsque AM augmente. La figure 4.8 compare la réponse du système (S) pour deux valeurs de AM différentes. Pour AM faible, la réponse pour $\bar{z} < 0$ est proche d'une onde purement propagatrice, tandis que pour AM élevé, elle se rapproche de celle d'une onde stationnaire.

Système (P)

Pour le système (P), la figure 4.7 (a et b) trace le module et la phase de P_1 en fonction de AM . Le module croît avec AM mais moins que dans le cas du système (S) pour N_2 . Egalement, la phase reste autour d'une valeur de $\pi/2$. Ces résultats indiquent que l'évolution vers une onde stationnaire pour $\bar{z} > 0$ pour (P) sera moins importante que dans le cas (S). On fait encore une fois une comparaison entre la réponse pour un AM faible et élevé, figure 4.9. On remarque une augmentation de la modulation en espace de l'amplitude pour $\hat{z} < 0$, mais cette dernière est moins marquée que pour le système (S).

Nous concluons donc qu'une onde stationnaire apparaît pour des valeurs de AM élevées pour le système (S). Dans une moindre mesure, ce résultat est applicable aussi pour le système (P).

4.1.7 Compétition des échelles de temps et d'espace

A la section 4.1.3, nous avons montré que l'amplitude du système (P) croît plus rapidement que celle de (S) pour tout ratio de vitesses réduites R . Cependant, comme on a montré à la section 4.1.4, l'amplitude de (P) décroît de façon exponentielle pour $\bar{z} < 0$. A l'intérieur de cette section, on met en évidence comment cette décroissance spatiale vient en compétition avec la différence de croissance en temps des systèmes d'ondes.

On se concentre ici sur l'évolution en temps et en espace de l'amplitude maximale des deux systèmes d'ondes que l'on note $\hat{\chi}_P(\bar{z}, \bar{t})$ pour (P) et $\hat{\chi}_S(\bar{z}, \bar{t})$ pour le (S). Pour une amplitude initiale égale donnée, l'évolution de $\hat{\chi}_P$ et de $\hat{\chi}_S$ apparaît à la figure 4.10 pour deux temps : $\bar{t} = 0$ et $\bar{t} > 0$. Un point montre l'intersection entre ces deux quantités.

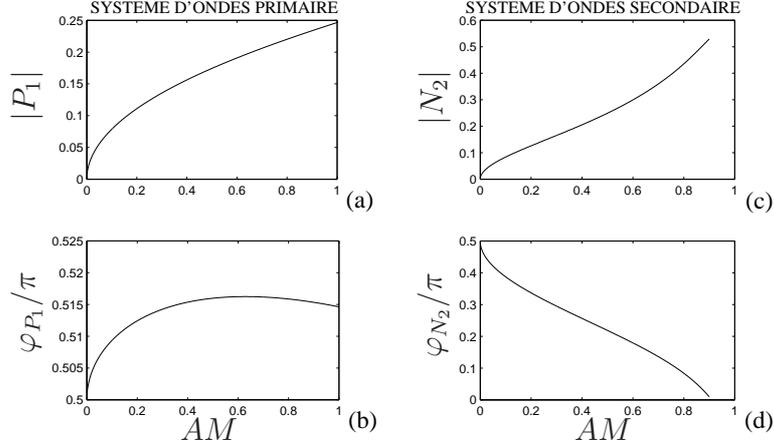


FIGURE 4.7: Système (P) : $|P_1|$ en fonction de AM (a) et φ_{P_1} en fonction de AM (b). Système (S) : $|N_2|$ en fonction de AM (c) et φ_{N_2} en fonction de AM (d). Pour toutes les figures, $R = 0.3$

Au-dessus de cette délimitation, le système (P) possède une amplitude plus importante que (S). Ce point d'intersection est donc la démarcation entre deux parties dominées respectivement par (P) et le (S). La figure 4.10 montre que ce point se déplace vers le bas. La vitesse à laquelle cette démarcation se déplace dépend de deux facteurs en opposition : la différence dans la croissance en temps des deux systèmes d'ondes et l'intensité de la décroissance spatiale de (P) pour $\bar{z} < 0$.

En négligeant la modulation en amplitude pour (S) pour $\bar{z} < 0$, l'évolution de l'enveloppe de chaque système d'ondes dans le milieu 2, pour une amplitude initiale unitaire, s'écrit

$$\hat{\chi}_P(\bar{z}, \bar{t}) = e^{2\pi(-\bar{z}\text{Im}[\bar{p}_P] - \bar{t}\text{Im}[\bar{\omega}_P])}, \quad (4.29)$$

$$\hat{\chi}_S(\bar{z}, \bar{t}) = e^{-2\pi\text{Im}[\bar{\omega}_S]\bar{t}}. \quad (4.30)$$

A l'intérieur des équations 4.29 et 4.30, les indices P et S réfèrent respectivement à des quantités reliées aux systèmes (P) et (S). En égalant ces deux équations, on retrouve l'influence quantitative des différences de taux de croissance et de la décroissance en espace.

$$C_{P,S} \bar{t} = \left(\frac{\text{Im}[\bar{\omega}_P] - \text{Im}[\bar{\omega}_S]}{-\text{Im}[\bar{p}_P]} \right) \bar{z}, \quad (4.31)$$

où $C_{P,S}$ est la vitesse à laquelle le milieu 2 est envahi par (P). L'équation 4.31 montre bien la compétition entre l'échelle de temps, liée à la différence des taux de croissance, et

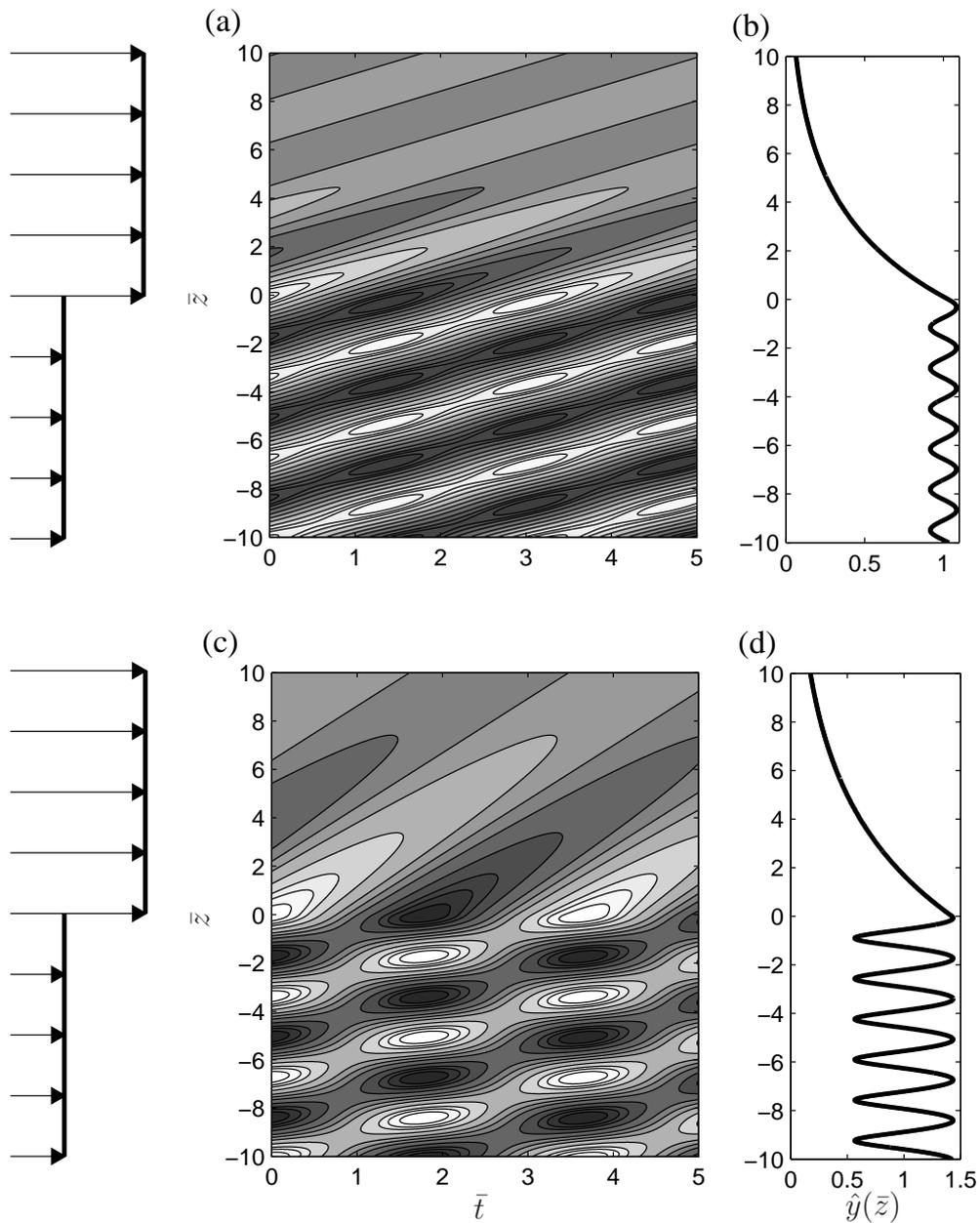


FIGURE 4.8: Système (S) : Evolution spatiale et temporelle du déplacement du câble (a) et évolution spatiale de l'amplitude (b), pour $AM = 0.1$. Evolution spatiale et temporelle du déplacement du câble (c) et évolution spatiale de l'amplitude (d), pour $AM = 0.8$. Pour toutes les figures, $R = 0.3$.

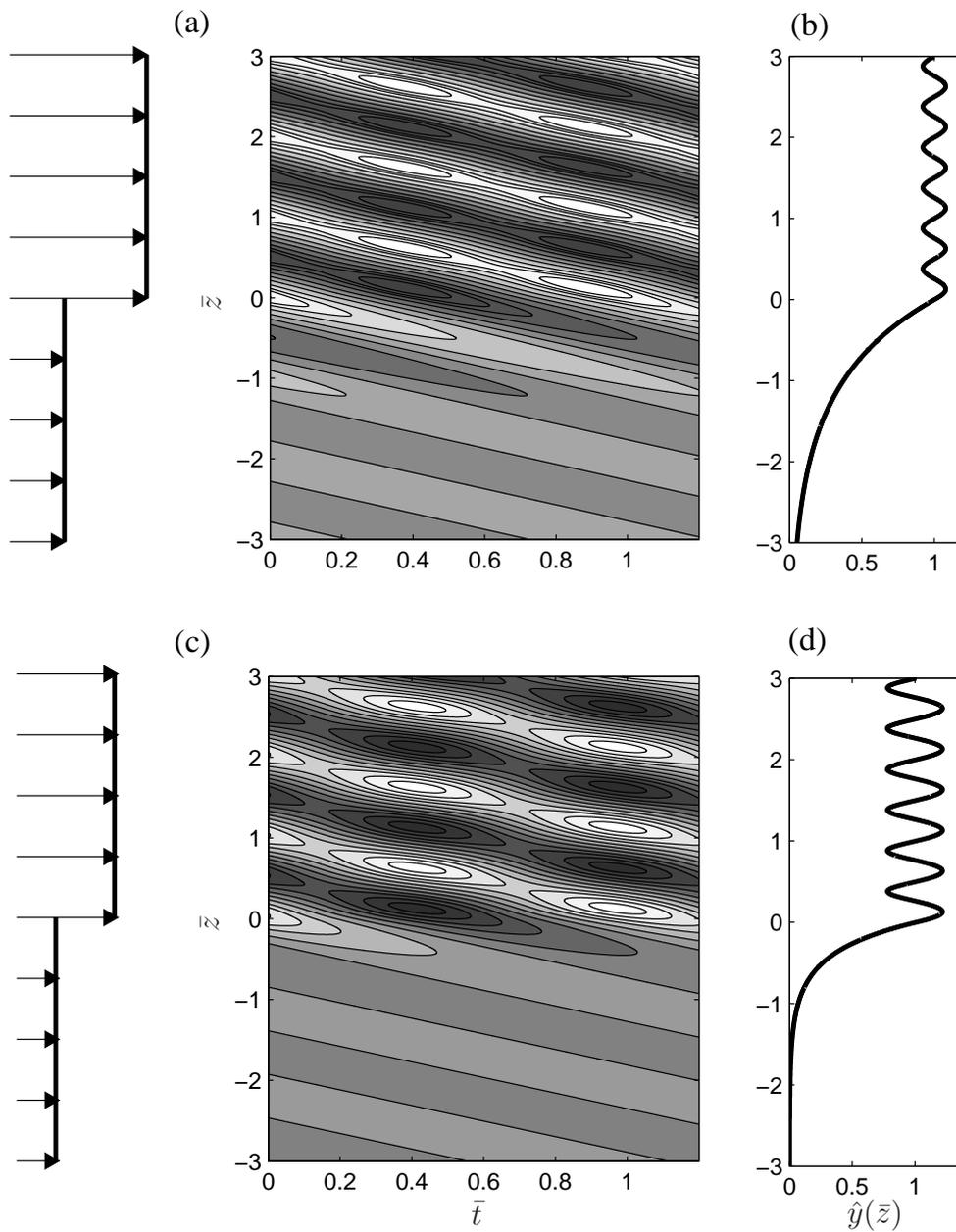


FIGURE 4.9: Système (P) : Evolution spatiale et temporelle du déplacement du câble (a) et évolution spatiale de l'amplitude (b), pour $AM = 0.1$. Evolution spatiale et temporelle du déplacement du câble (c) et évolution spatiale de l'amplitude (d), pour $AM = 0.8$. Pour toutes les figures, $R = 0.3$.

l'échelle spatiale définie par la décroissance de (P) pour $\bar{z} < 0$. Plus la différence entre les taux de croissance est importante, plus l'envahissement sera rapide. A l'inverse, plus la décroissance spatiale de (P) est importante, plus cet envahissement sera lent. La figure 4.11 montre $C_{P,S}$ en fonction de R pour deux valeurs différentes de AM . De cette figure, on remarque que $C_{P,S}$ varie de façon significative avec R , mais peu avec AM .

Nous savons maintenant que, pour un système infini composé de deux vitesses réduites différentes, il existe une frontière délimitant une zone où le système d'ondes primaire (P) domine et une autre où le système d'ondes secondaire (S) est plus important. Puisque la fréquence de (P) et de (S) est différente, ceci signifie que la fréquence dominante sera différente de chaque côté de cette délimitation. Cette frontière se déplace dans le temps : le système (P) envahit le domaine de (S). La vitesse de cette frontière, donc le rythme auquel (P) envahit la zone de (S), dépend de la différence des taux de croissance et de la décroissance en espace de (P). A la prochaine section, nous utilisons cette théorie afin d'expliquer la séparation de fréquences observée par des calculs DNS.

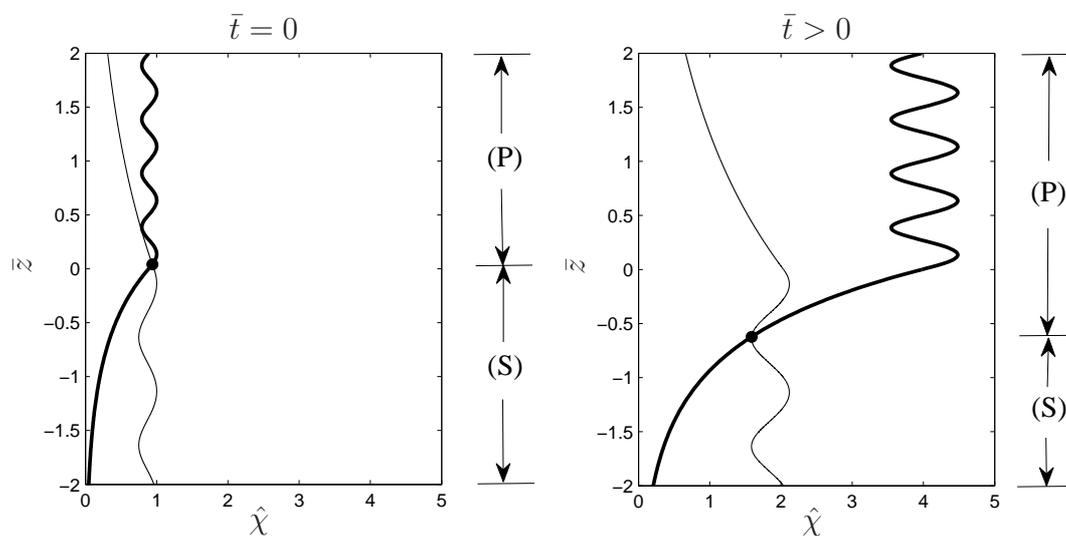


FIGURE 4.10: Evolution de l'enveloppe des systèmes d'ondes $\hat{\chi}$ avec le temps : le trait gras représente (P) tandis que le trait fin montre (S). L'intersection des deux quantités est montrée par un point noir.

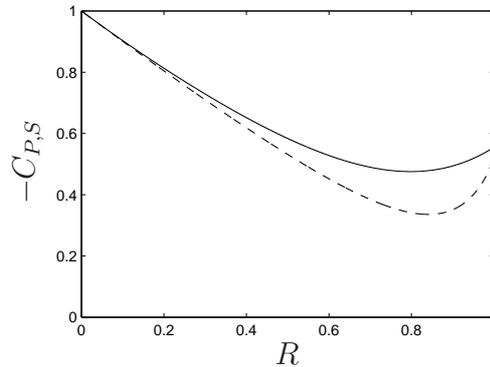


FIGURE 4.11: $C_{P,S}$ pour $AM = 0,25$ (trait brisé) et $AM = 0,8$ (trait continu).

4.2 Comparaisons avec des calculs DNS

A l'intérieur de cette section, on explique à l'aide de cette théorie les résultats sur les séparations des fréquences en espace observées par calculs DNS tridimensionnels pour des structures souples en écoulements non uniformes. Nous commençons par rappeler les caractéristiques du cas test. Par la suite, nous présentons la forme des modes primaires et secondaires pour chacune des configurations. Ces formes sont comparées avec les résultats de la DNS. Pour terminer, nous comparons le temps d'envahissement de la zone (S) des différents profils d'écoulements.

4.2.1 Caractéristiques du cas test

Dans une publication récente, Lucor *et al.* (2006) rapportent des résultats d'une étude numérique sur les vibrations induites par vortex d'une poutre soumise à deux profils d'écoulements non uniformes : un profil d'écoulements linéaire et un exponentiel. Ces profils d'écoulements sont montrés à la figure 4.12. Les auteurs ont résolu numériquement les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles afin d'obtenir le comportement du sillage. La poutre dans leur étude est libre de vibrer dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. Le nombre de Reynolds, basé sur la vitesse d'écoulements maximale, est 1000 dans les deux cas. Nous avons discuté des résultats de calculs de Lucor *et al.* (2006) à la section 1.2.5. Nous avons porté notre attention sur un phénomène : la séparation des fréquences de vibration en espace. Pour le cas du profil d'écoulements exponentiel, les auteurs observent cette séparation spatiale des fréquences. Ils rapportent en effet que les fréquences les plus basses sont plus importantes dans le bas de la structure tandis que les fréquences les plus élevées sont plus importantes dans le haut de cette

dernière. Par contre, cette caractéristique n'est pas observée pour le profil d'écoulements linéaire : la structure vibre partout à des fréquences très proches d'une valeur commune. Nous avons montré à la section 2.1 que le modèle oscillateur fluide *non linéaire* arrivait à reproduire ce résultat. Nous voulons maintenant expliquer cette distinction entre les deux profils d'écoulement à l'aide de la théorie linéaire.

Pour une poutre tendue en écoulements non uniformes, les équations sans dimension du modèle linéaire s'écrivent

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\frac{\gamma}{\mu}\eta\right) \frac{\partial y}{\partial t} - \left(\frac{1}{1+\Gamma}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{1+1/\Gamma}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = M\psi^2\eta^2 q, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \varepsilon\psi\eta \frac{\partial q}{\partial t} + (\psi\eta)^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (4.33)$$

avec

$$\Gamma = \left(\frac{EI}{\Theta}\right) \left(\frac{1}{D^2}\right), \quad \psi = \frac{2\pi S_T U_{max}}{\sqrt{\frac{\Theta}{m_T} + \frac{EI}{m_T D^2}}}, \quad \eta = \frac{U(z)}{U_{max}}. \quad (4.34)$$

Les variables sans dimension s'écrivent

$$t = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{\Theta}{m_T} + \frac{EI}{m_T D^2}} T, \quad z = \frac{Z}{D}, \quad y = \frac{Y}{D}. \quad (4.35)$$

A l'intérieur des équations 4.34 et 4.35, le terme m_T fait référence à la somme de la masse du cylindre et de la masse ajoutée potentielle ($m_T = m_S + (\pi/4)\rho D^2 C_{M_0}$). Les valeurs de paramètres phénoménologiques que nous utilisons ainsi que les caractéristiques de la configuration étudiée apparaissent au tableau 4.2. Afin, de trouver les vecteurs propres V_y , V_q et la fréquence ω de chaque mode, nous appliquons la même méthode de calcul modal numérique qui nous a servi à la section 3.2.2. Les conditions aux limites utilisées sont les mêmes.

Paramètres phénoménologiques		Paramètres de la configuration	
C_{L_0}	0.8	L/D	2028
C_D	2	μ	2.785
C_{M_0}	1	Γ	165
S_T	0.17	ψ	0.00279

TABLE 4.2: Paramètres phénoménologiques et caractéristiques de la configuration.

4.2.2 Forme spatiale des modes

Profil d'écoulements linéaire

Les modes obtenus peuvent se classer en (P) et (S), par simple analogie avec les systèmes d'ondes. Nous trouvons pour cette configuration un mode primaire (P) et un mode secondaire (S). Comme à la section 4.1, (P) possède une fréquence et un taux de croissance plus important que pour (S). La figure 4.12 (b et c) trace le vecteur propre des modes (P) et (S) respectivement. On remarque que l'amplitude des ondes est maximale au centre de la poutre pour (P) et au bas pour (S). On voit très bien la décroissance exponentielle de l'amplitude avec l'espace pour (P) et (S).

Nous comparons maintenant la forme des modes (P) et (S) à la réponse de la poutre calculée à l'aide de la DNS, figure 4.13. On remarque en figure 4.13a que la DNS prédit des ondes qui se propagent de haut en bas (indiquées à l'aide d'une flèche sur la figure). Ces ondes se propagent à une vitesse semblable à celle du mode linéaire (P), figure 4.13b. Cette figure trace l'évolution temporelle des modes (P) et (S) superposés. La croissance en temps de l'amplitude a été omise. La longueur d'onde prédite par le modèle linéaire pour (P) est également proche de celle que l'on voit dans la DNS.

Profil d'écoulement exponentiel

Comme pour le cas du profil d'écoulements linéaire, nous identifions un mode (P) et un mode (S) dans le cas du profil d'écoulements exponentiel. La forme de ces modes est montrée en figure 4.12 (d et e). On remarque de cette figure que le mode (P) a son maximum d'amplitude à une position beaucoup plus haute que dans le cas du profil d'écoulements linéaire. Egalement, le mode (S) occupe une plus grande plage de z .

La figure 4.13 montre l'évolution temporelle et spatiale de la réponse pour la DNS et des modes linéaires superposés. Pour le haut de la poutre, le modèle linéaire prédit bien le comportement observé avec la DNS. La longueur des ondes ainsi que leur vitesse de propagation sont bien reproduites par le calcul linéaire. Pour le bas de la poutre, on observe pour la DNS l'apparition d'une onde de basse fréquence qui se propage vers le haut. La demi-période ainsi que la longueur de cette onde correspond bien à celle du mode (S) du calcul linéaire.

Points communs entre la théorie linéaire et les résultats du modèle

D'après la comparaison faite entre la DNS et le calcul linéaire, nous concluons que le modèle linéaire arrive à reproduire de façon qualitative les résultats de la DNS en ce qui a trait à la longueur d'onde et à la vitesse de propagation. À partir des résultats du calcul linéaire numérique sur les deux profils d'écoulements étudiés dans cette section, nous mettons en évidence quatre points communs avec la théorie présentée à la section 4.1. Premièrement, nous avons trouvé dans les deux cas un mode de fréquence haute et dominant du point de vue des taux de croissance : le mode (P). Deuxièmement, la longueur d'onde observée pour (P) est inférieure à celle de (S). Troisièmement, on trouve que la forme du mode (S) tend vers celle d'une onde stationnaire, tandis que celle de (P) se rapproche plus d'une onde propagatrice. Quatrièmement, (P) et (S) ont tous les deux une amplitude qui décroît exponentiellement en dehors de la zone d'écoulements favorable à la croissance en temps de leur réponse. Nous anticipons donc qu'il y aura opposition de l'échelle d'espace et de temps comme nous avons vu à la section 4.1.7. Nous abordons au prochain paragraphe ce dernier point. Ces résultats nous permettent d'affirmer que la théorie présentée à la section 4.1 pour un écoulement non uniforme très simple contient des généralités applicables dans des configurations complexes.

4.2.3 Temps d'envahissement

Sur la figure 4.12, un trait pointillé marque la position où l'enveloppe du mouvement du mode (P) intersecte celle du mode (S). À amplitudes initiales égales pour (P) et (S), le trait pointillé en figure 4.12 va bouger vers le bas. Le temps que cette démarcation met pour atteindre une coordonnée z est fonction de l'enveloppe et du taux de croissance de chaque système d'ondes

$$t_{env}(z) = \frac{\ln[\hat{\chi}_S(z)] - \ln[\hat{\chi}_P(z)]}{\text{Im}[\omega_S] - \text{Im}[\omega_P]}. \quad (4.36)$$

Le temps nécessaire pour que le mode (P) envahisse toute la longueur de la poutre, t_{env} , est indiqué au tableau 4.3 pour les deux profils d'écoulements. Ce temps est plus grand dans le cas du profil exponentiel que pour le profil linéaire. Nous montrons donc que la séparation en espace des fréquences a comme origine la compétition d'échelle de temps et d'échelle d'espace qui se traduit par un temps d'envahissement du mode avec le taux de croissance le plus élevé. Plus ce temps est long, plus la fréquence basse risque de persister dans la réponse.

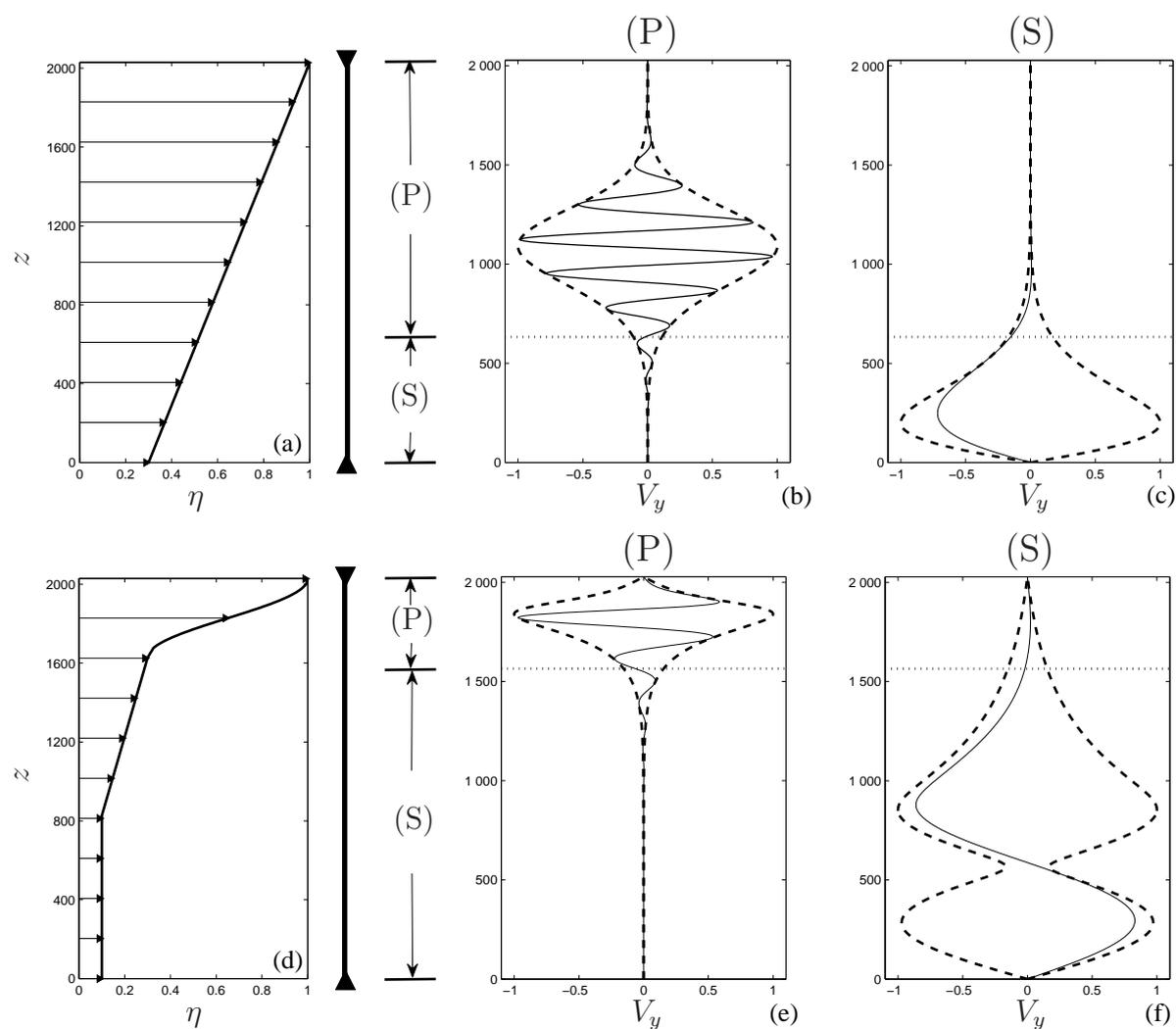


FIGURE 4.12: Résultats du calcul modal numérique linéaire. Profil d'écoulement linéaire : (a) profil de vitesse, (b) vecteur propre pour la structure pour le mode (P), (c) vecteur propre pour la structure pour le mode (S). Profil d'écoulement exponentiel : (d) profil de vitesse, (e) vecteur propre pour la structure pour le mode (P), (f) vecteur propre pour la structure pour le mode (S). Pour les vecteurs propres, on montre $|V_y|$ (trait brisé) et $\text{Re}[V_y]$ (trait continue).

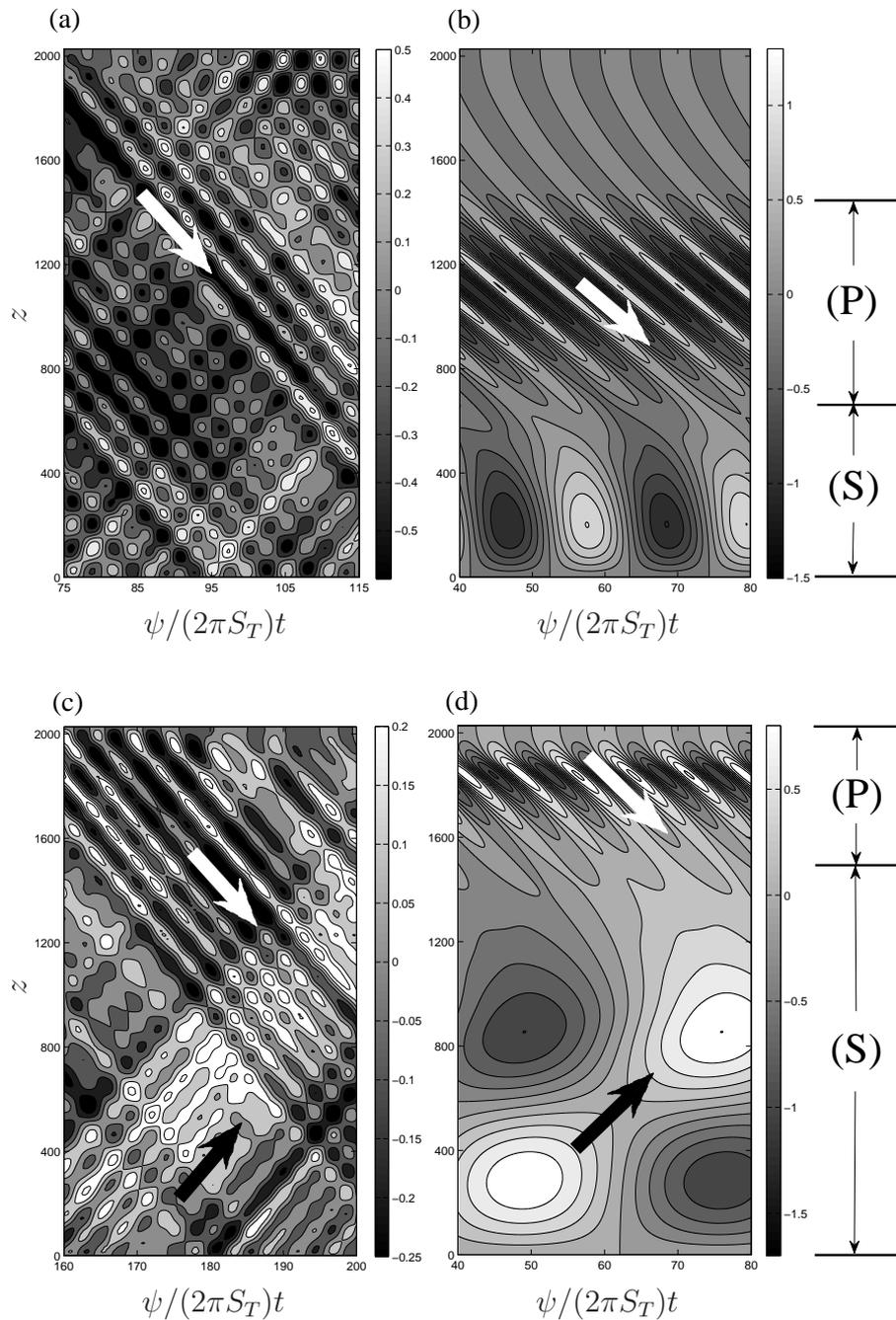


FIGURE 4.13: Comparaison entre les modes linéaires et le calcul DNS. Profil d'écoulement linéaire : (a) Calcul DNS, (b) mode (P) et (S) du calcul linéaire. Profil d'écoulement exponentiel : (a) Calcul DNS, (b) mode (P) et (S) du calcul linéaire. Calcul DNS par Lucor *et al.* (2006).

	Profil d'écoulements linéaire	Profil d'écoulements exponentiel
$\text{Re}[\omega_S]/\text{Re}[\omega_P]$	0.374	0.144
$\text{Im}[\omega_S]/\text{Im}[\omega_P]$	0.498	0.175
$(\psi/2\pi S_T) t_{env}$	44.4	62.6

TABLE 4.3: Résultats du calcul linéaire pour les deux profils d'écoulements.

4.3 Conclusion.

A la première section de ce chapitre, nous avons étudié un système infini comprenant deux milieux, caractérisés chacun par sa vitesse réduite, connectés ensemble. Les systèmes d'ondes principaux, (P) et (S) ont été caractérisés. Le premier, le système d'ondes primaire, possède une fréquence et un taux de croissance en temps supérieurs à son homologue, le système d'ondes secondaire. Le résultat important de cette analyse théorique est que ces deux systèmes décroissent en amplitude de façon exponentielle à l'intérieur du milieu où la vitesse réduite n'est pas favorable à l'établissement de leur fréquence complexe. Cette décroissance de l'amplitude n'est pas due à l'amortissement. Elle provient de la différence dans les relations de dispersion des deux milieux. Nous avons démontré que la vitesse à laquelle le système (P) envahit le domaine de (S) dépend de l'opposition entre la croissance en temps des deux systèmes d'ondes et le rythme de décroissance spatiale de l'amplitude de (P). Nous avons montré également qu'à cause de cette non uniformité brusque dans l'écoulement, la réponse des systèmes d'ondes se rapproche de celle d'une onde stationnaire dans un des deux milieux pour AM grand.

Nous avons confronté cette théorie à un cas de calculs DNS tridimensionnels sur une poutre tendue finie où, selon le type d'écoulements, une séparation en espace des fréquences se produit ou non. Un bon accord a été trouvé entre le calcul numérique et la théorie. Il est important de noter que la méthode proposée ici nécessite des ressources et un temps de calcul très faibles. De plus, elle nous permet de connaître les caractéristiques des modes importants du système structure-sillage : les modes (P) et (S). Ces deux facteurs combinés accélèrent la convergence vers une configuration optimale à l'étape de design des liaisons fond-surface. En effet, on connaît rapidement la dynamique de la configuration initiale, ce qui nous permet d'y appliquer une modification judicieuse. L'impact de cette modification est tout aussi rapidement vérifié, permettant donc un processus itératif optimal. Cette méthodologie doit constituer la première étape de conception qui serait par la suite validée par un modèle plus complet, mais plus coûteux en temps de calculs.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

5.1 Conclusions importantes de la thèse

L'idée que nous avons proposée à l'intérieur de cette thèse s'énonçait ainsi :

En utilisant le concept d'oscillateur fluide et d'instabilité linéaire par confusion de fréquences, on peut comprendre et reproduire de façon qualitative les caractéristiques principales des VIV sur les structures élancées en écoulements uniformes et non uniformes.

Le deuxième chapitre nous a servi à justifier l'utilisation du modèle oscillateur fluide linéaire pour étudier les VIV de structures souples. Dans un premier temps, nous avons montré que le modèle non linéaire de Facchinetti *et al.* (2004a) reproduisait bien les résultats de calculs DNS pour une poutre tendue en écoulements non uniformes. Nous avons donc conclu que le modèle oscillateur fluide non linéaire possède les ingrédients nécessaires pour prédire les VIV de structures souples en écoulements non uniformes. Dans un deuxième temps, nous avons étudié une version linéarisée de cette approche pour un cylindre rigide supporté élastiquement. Suivant de Langre (2006), nous avons montré comment l'accrochage entre le cylindre et son sillage pouvait être interprété comme une instabilité par confusion de fréquences entre deux oscillateurs couplés : l'oscillateur sillage et l'oscillateur structure. On a vérifié comment ce dernier permettait de reproduire qualitativement la physique des vibrations induites par vortex de ce type de structure, notamment l'évolution de la plage d'accrochage avec le nombre de Scruton et la variation du coefficient de masse ajoutée C_{MA} avec la vitesse réduite. A partir des résultats présentés dans le chapitre 2 nous avons conclu qu'il était justifié d'utiliser le modèle oscillateur fluide linéaire pour étudier les VIV de structures souples. C'est ce que nous avons fait aux chapitres 3 et 4. Les conclusions importantes de ce travail sont présentées dans les

prochaines lignes.

Structures élancées en écoulements uniformes

Nous avons développé une théorie sur les VIV d'un câble infini en écoulements uniformes au chapitre 3. On y a montré que pour une vitesse réduite donnée le système câble-sillage était instable dans une plage de nombres d'onde. Cette instabilité est causée par la confusion des fréquences de deux ondes : l'une caractérisée par un mouvement plus important du solide et l'autre ayant une composante sillage plus forte. Nous avons ensuite appliqué ce concept aux câbles de longueur finie. Dans ce cas, on a pu déduire analytiquement les plages de vitesses réduites pour lesquelles chaque mode est instable et l'évolution de leur fréquence complexe correspondante. Nous avons également trouvé l'expression de la vitesse de transition où les taux de croissance de deux modes adjacents se croisent. A l'aide d'une comparaison entre des résultats expérimentaux sur une poutre tendue en écoulements uniformes et ceux de notre modèle, on a montré que le taux de croissance linéaire des modes du système structure-sillage était relié au comportement modal obtenu expérimentalement : le mode ayant le taux de croissance linéaire maximal sera celui qui dominera la solution saturée. Nous avons également démontré que la théorie linéaire explique le partage en temps des fréquences. En effet, ce phénomène se produit lorsque le ratio des taux de croissance linéaires entre deux modes est très proche de 1. Nous pouvons donc répondre aux questions posées au chapitre 1 (section 1.2.1).

La première question était : *Quelle est l'étendue de la plage d'accrochage des différentes fréquences naturelles de la structure lorsque l'écoulement est uniforme ?* Réponse : La plage d'accrochage d'un mode correspond à l'étendue des vitesses où ce dernier possède le taux de croissance linéaire le plus important. La vitesse marquant le changement de mode le plus instable n'est influencée que par la densité modale de la structure en eau stagnante, son diamètre et le nombre de Strouhal.

La deuxième question était : *Trouve-t-on toujours un accrochage entre le sillage et une fréquence naturelle de la structure en écoulements uniformes et non uniformes ?* Réponse : Pour certaines vitesses, différentes fréquences linéairement instables du système structure-sillage se partagent le temps. Ceci se reflète par une réponse vibratoire qui varie dans le temps. La proximité des taux de croissance linéaires de ces fréquences explique ce phénomène. De l'étude théorique, nous trouvons que la plage de vitesse où le ratio des taux de croissance est proche de 1 dépend du numéro des modes adjacents et de la

force de l'interaction entre la structure et le sillage, le paramètre AM . En se rappelant la définition de M , équation 1.19, cela signifie qu'une structure ayant un nombre de masse faible est plus sujette au partage en temps des fréquences.

Structures élancées en écoulements non uniformes

Les VIV de structures élancées en écoulements non uniformes ont été étudiées au chapitre 4. Grâce à une étude théorique sur une configuration simple, nous avons démontré l'existence d'un système d'ondes primaire (P) et un secondaire (S). Nous avons par la suite caractérisé la forme de (P) et de (S). Cette étude nous a permis de trouver une échelle spatiale liée à l'amplitude des deux systèmes d'ondes. En effet, leur amplitude décroît de manière exponentielle lorsque la vitesse réduite n'est pas favorable à l'établissement de leur fréquence complexe. Egalement, nous avons montré que la fréquence, le nombre d'onde et le taux de croissance sont supérieurs pour (P). Grâce à son taux de croissance supérieur, le système (P) envahit le domaine de (S). La vitesse d'envahissement dépend de la compétition entre la décroissance spatiale de (P) et de la différence entre les deux taux de croissance. Ce concept nous a permis d'expliquer des résultats de calculs DNS où l'on observe une séparation en espace des fréquences de vibration dominantes d'une poutre tendue. A l'aide de la théorie linéaire, nous pouvons répondre aux deux questions soulevées à l'introduction à propos des VIV en écoulements non uniformes.

La première question était : *Quelles sont les conditions favorables à l'établissement d'ondes stationnaires ?* Réponse : L'étude théorique de la forme des systèmes d'ondes montre que plus AM est élevé, plus l'amplitude de (S) et (P) présentera des modulations en espace ce qui nous rapproche de la forme d'ondes stationnaires. Nous avons montré que ce comportement est nettement plus marqué dans le cas de (S).

La dernière question était : *En écoulements non uniformes, existe-t-il une seule fréquence de vibration ou plusieurs ? Si plusieurs fréquences sont présentes, le sont-elles toutes pour l'ensemble du système ?* Réponse : Il est possible qu'une seule fréquence domine toute la réponse : la fréquence du système primaire. Cependant, si ce dernier met un temps long pour envahir le domaine spatial du système secondaire, la fréquence de ce dernier persistera et on trouvera une séparation en espace des fréquences de vibration.

5.2 Perspectives de travaux futurs

A l'aide du modèle linéaire, nous avons apporté des réponses en ce qui a trait aux vibrations induites par vortex de structures élancées en écoulements uniformes et non uniformes. Nous présentons maintenant des perspectives de recherches futures engendrées par ce travail.

Premièrement, nous avons montré au chapitre 3 que le partage en temps de fréquences est provoqué par le fait que deux modes ou plus possèdent des taux de croissance très proches. Puisque, comme décrit à l'intérieur de Chaplin *et al.* (2005*b*), des perturbations peuvent faire passer la réponse du système d'un mode à l'autre, on peut se demander quelle est la perturbation nécessaire afin que ce saut se produise. En fait, il s'agirait ici d'établir une relation entre l'intensité de la perturbation nécessaire pour de faire basculer le système d'un mode à l'autre et la proximité des taux de croissance de chaque mode. De cette façon, on pourrait savoir si, pour une vitesse d'écoulement donnée, une réponse régulière peut s'établir. Une étude expérimentale sur un système simple possédant deux fréquences propres dont on ferait varier la proximité serait envisageable. Nous pourrions ainsi quantifier l'importance des perturbations mécaniques nécessaires pour que le partage en temps de ces deux fréquences se produise.

Deuxièmement, on a vu au chapitre 4 que l'approche linéaire arrive à expliquer de façon qualitative la séparation spatiale des fréquences observée par calculs DNS pour une poutre tendue en écoulements non uniformes. Cependant, l'approche linéaire ne tient évidemment pas compte du fait que l'amplitude de la réponse cesse de croître à un certain point, donc aucune information sur la réponse saturée n'est fournie. Par exemple, les auteurs de la simulation DNS rapportent que l'amplitude de vibration de la structure est environ deux fois inférieure dans le cas où une séparation en fréquences survient que dans le cas où elle n'existe pas. Cette information n'est évidemment pas fournie par la théorie linéaire. Une option intéressante serait de résoudre les équations non linéaires du modèle oscillateur fluide pour les modes (P) et (S) seulement en utilisant la méthode de Galerkin (Paidoussis, 2004).

Enfin, à l'intérieur de cette thèse, l'intérêt a été placé uniquement sur le mouvement de la structure lorsque cette dernière ne bouge que dans la direction transverse à l'écoulement. Cependant, l'effet du mouvement de la structure dans la direction de l'écoulement est important lorsque le nombre de masse est petit (Jauvtis & Williamson,

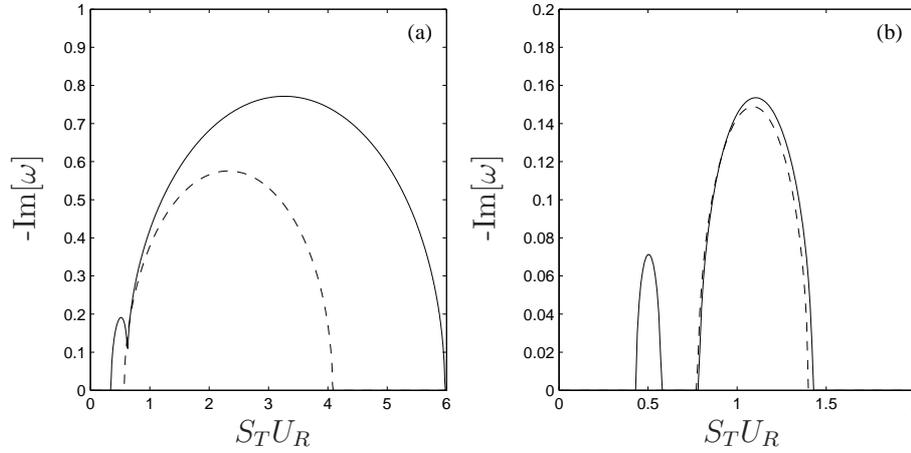


FIGURE 5.1: Comparaison entre l'évolution du taux de croissance en fonction de la vitesse réduite d'un cylindre rigide libre en xy (trait continu) et libre seulement en y (trait brisé) pour $\mu = 1$ (a) et $\mu = 7$ (b)

2004, Dahl *et al.*, 2007). En notant par $p(t)$ l'amplification de la force de traînée fluctuante et $x(t)$ le déplacement sans dimension du cylindre rigide dans la direction de l'écoulement, les équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y &= M\Omega^2 q, \\
 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \Omega^2 q &= A \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right), \\
 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + x &= M\Omega^2 p, \\
 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 4\Omega^2 p &= A \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right).
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

La figure 5.1 montre la comparaison entre le taux de croissance entre le cas où le cylindre peut vibrer dans les deux directions et le cas où ce dernier vibre seulement dans la direction de l'écoulement. Les résultats sont obtenus par analyse modale. On voit que pour le nombre de masse faible, le taux de croissance est amplifié de façon significative, tandis que la variation est faible pour le nombre de masse élevé. Ceci semble en accord avec les résultats de Jauvtis & Williamson (2004) qui mentionnent que le degré de liberté supplémentaire provoque une augmentation de l'amplitude de vibration du cylindre pour des nombres de masse petits.

Le modèle linéaire peut être utilisé comme un outil efficace de conception. En effet, nous pouvons connaître très facilement les modes du système dynamique structure-sillage

par un calcul modal numérique. C'est d'ailleurs ce que nous avons fait avec succès à la section 4.2. L'effet d'une modification sur le système est calculé tout aussi vite. De plus, la connaissance des modes (P) et (S) permet un choix de modifications judicieux ce qui accélère la convergence vers une solution optimale. Le calcul modal linéaire doit donc servir de première étape de conception qui serait validée par la suite par un modèle plus complet, mais plus coûteux en temps de calculs.

Bibliographie

- AHN, H.T. & KALLINDERIS, Y. 2006 Strongly coupled flow/structure interactions with a geometrically conservative ale scheme on general hybrid meshes. *Journal of Computational Physics* **219** (2), 671–696.
- ALEXANDER, C.M. 1981 The complex vibrations and implied drag of a long oceanographic wire in cross-flow. *Ocean Engineering* **8** (4), 379–406.
- BISHOP, R.E.D. & HASSAN, A.Y. 1964 Lift and drag forces on circular cylinder in flowing fluid. *Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical* **277** (136), 51–75.
- BLACKBURN, H. M., GOVARDHAN, R. N. & WILLIAMSON, C. H. K. 2001 A complementary numerical and physical investigation of vortex-induced vibration. *Journal of Fluids and Structures* **15** (3-4), 481–488.
- BLEVINS, R.D. 1990 *Flow-Induced Vibration*. New York : Van Nostran Reinhold.
- BRIKA, D. & LANEVILLE, A. 1995 An experimental study of the aeolian vibrations of a flexible circular cylinder at different incidences. *Journal of Fluids and Structures* **9** (4), 371–391.
- CHAPLIN, J.R., BEARMAN, P.W., CHENG, Y., FONTAINE, E., GRAHAM, J.M.R., HERFJORD, K., HUARTE, F.J. HUERA, ISHERWOOD, M., LAMBRAKOS, K., LARSEN, C.M., MENEGHINI, J.R., MOE, G., PATTENDEN, R.J., TRIANTAFYLLOU, M.S. & WILLDEN, R.H.J. 2005a Blind predictions of laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a tension riser. *Journal of Fluids and Structures* **21** (1), 25–40.
- CHAPLIN, J.R., BEARMAN, P.W., HUARTE, F.J. HUERA & PATTENDEN, R.J. 2005b Laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a vertical tension riser in a stepped current. *Journal of Fluids and Structures* **21** (1), 3–24.
- DAHL, J.M., HOVER, F.S., TRIANTAFYLLOU, M.S., DONG, S. & KARNIADAKIS, G.E. 2007 Resonant vibrations of bluff bodies cause multivortex shedding and high frequency forces. *Physical Review Letters* **99** (14).

- EVANGELINOS, C. & KARNIADAKIS, G.E.M. 1999 Dynamics and flow structures in the turbulent wake of rigid and flexible cylinders subject to vortex-induced vibrations. *Journal of Fluid Mechanics* **400**, 91–124.
- FACCHINETTI, M.L., DE LANGRE, E. & BIOLLEY, F. 2004a Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids And Structures* **19** (2), 123–140.
- FACCHINETTI, M.L., DE LANGRE, E. & BIOLLEY, F. 2004b Vortex-induced travelling waves along a cable. *European Journal of Mechanics B-Fluids* **23** (1), 199–208.
- GABBAI, R.D. & BENAROYA, H. 2005 An overview of modeling and experiments of vortex-induced vibration of circular cylinders. *Journal of Sound and Vibration* **282** (3-5), 575–616.
- GABBAI, R.D. & BENAROYA, H. 2008 A first-principles derivation procedure for wake-body models in vortex-induced vibration : Proof-of-concept. *Journal of Sound and Vibration* **312** (1-2), 19–38.
- GOPALKRISHNAN, R. 1993 Vortex-induced forces on oscillating bluff cylinders. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- GOVARDHAN, R. & WILLIAMSON, C.H.K. 2000 Modes of vortex formation and frequency response of a freely vibrating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **420**, 85–130.
- GOVARDHAN, R. & WILLIAMSON, C.H.K. 2004 Critical mass in vortex-induced vibration of a cylinder. *European Journal of Mechanics B-Fluids* **23** (1), 17–27.
- GRIFFIN, O.M. & RAMBERG, S.E. 1982 Some recent studies of vortex shedding with application to marine tubulars and risers. *Journal of Energy Resources Technology-Transactions of The ASME* **104** (1), 2–13.
- HARTLEN, K. & CURRIE, I. 1970 Lift-oscillator model of vortex-induced vibrations. *Journal of the Engineering Mechanics Division (96(EM5))* pp. 577–591.
- HUERRE, P. & MONKEWITZ, P.A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* **22**, 473–537.
- IWAN, W.D. & BLEVINS, R.D. 1974 Model for vortex induced oscillation of structures. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME* **41** (3), 581–586.
- JAUVTIS, N. & WILLIAMSON, C.H.K. 2004 The effect of two degrees of freedom on vortex-induced vibration at low mass and damping. *Journal of Fluid Mechanics* **509**, 23–62.
- KHALAK, A. & WILLIAMSON, C. H. K. 1997 Investigation of relative effects of mass and damping in vortex-induced vibration of a circular cylinder. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **69-71**, 341–350.

- KHALAK, A. & WILLIAMSON, C. H. K. 1999 Motions, forces and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping. *Journal of Fluids and Structures* **13** (7-8), 813–851.
- KIM, Y.H., VANDIVER, J. K. & HOLLER, R. 1985 Vortex-induced vibration and drag coefficients of long cables subjected to sheared flow. In *Proceedings of the 4th OMAE Symposium, ASME*.
- KING, R. 1995 An investigation of vortex induced vibrations of sub-sea communications cables. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Flow Induced Vibration*, pp. 443–454. London, UK : Bearman P.W.
- KING, R, PROSSER, MJ & JOHNS, DJ 1973 Vortex excitation of model piles in water. *Journal of Sound and Vibration* **29** (2), 169–188.
- DE LANGRE, E. 2006 Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter. *Journal of Fluids and Structures* **22** (6-7), 783–791.
- LIE, H. & KAASEN, K.E. 2006 Modal analysis of measurements from a large-scale viv model test of a riser in linearly sheared flow. *Journal of Fluids and Structures* **22** (4), 557–575.
- LIGHTHILL, J. 1986 Fundamentals concerning wave loading on offshore structures. *Journal of Fluid Mechanics* **173**, 667–681.
- LUCOR, D., FOO, J. & KARNIADAKIS, G.E. 2005 Vortex mode selection of a rigid cylinder subject to viv at low mass-damping. *Journal of Fluids and Structures* **20** (4), 483–503.
- LUCOR, D., MUKUNDAN, H. & TRIANTAFYLLOU, M.S. 2006 Riser modal identification in cfd and full-scale experiments. *Journal of Fluids and Structures* **22** (6-7), 905–917.
- MARCOLLO, H., CHAURASIA, H. & VANDIVER, J. K. 2007 Phenomena observed in viv of bare risers field tests. In *Proceeding of the 26th International Conference on Offshore Mechanics and Artic Engineering*. San Diego, California, USA.
- MATHELIN, L. & DE LANGRE, E. 2005 Vortex-induced vibrations and waves under shear flow with a wake oscillator model. *European Journal of Mechanics B-Fluids* **24** (4), 478–490.
- NAKAMURA, Y. 1969 Vortex excitation of a circular cylinder treated as a binary flutter. *Tech. Rep.*. Kyushu University, Fukuoka, Japon.
- NEWMAN, D.J. & KARNIADAKIS, G.E. 1997 A direct numerical simulation study of flow past a freely vibrating cable. *Journal of Fluid Mechanics* **344**, 95–136.
- NORBERG, C. 2003 Fluctuating lift on a circular cylinder : review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures* **17** (1), 57–96.

- OERTEL, H. 1990 Wakes behind blunt bodies. *Annual Review of Fluid Mechanics* **22**, 539–564.
- PAIDOUSSIS, M. P. 2004 *Fluid-Structure Interactions, First Edition : Slender Structures and Axial Flow*. Academic Press.
- PESKIN, C. S. 2003 The immersed boundary method. *Acta Numerica* **11** (-1), 479–517.
- PRASANTH, T.K. & MITTAL, S. 2008 Vortex-induced vibrations of a circular cylinder at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics* **594**, 463–491.
- RAO, S.S. 2003 *Mechanical Vibrations*, 4th edn. Prentice Hall.
- SARPKAYA, T. 1978 Fluid forces on oscillating cylinders. *Journal of the Waterway Port Coastal and Ocean Division-ASCE* **104** (3), 275–290.
- SARPKAYA, T. 2004 A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures* **19** (4), 389–447.
- SHIELS, D., LEONARD, A. & ROSHKO, A. 2001 Flow-induced vibration of a circular cylinder at limiting structural parameters. *Journal of Fluids and Structures* **15** (1), 3–21.
- SKOP, R.A. & BALASUBRAMANIAN, S. 1997 A new twist on an old model for vortex-excited vibrations. *Journal of Fluids and Structures* **11** (4), 395–412.
- SKOP, R.A. & GRIFFIN, O.M. 1973 Model for vortex-excited resonant response of bluff cylinders. *Journal of Sound and Vibration* **27** (2), 225–233.
- STANSBY, P.K. 1976 Locking-on of vortex shedding due to cross-stream vibration of circular-cylinders in uniform and shear flows. *Journal of Fluid Mechanics* **74** (APR22), 641–665.
- STROUHAL, V. 1878 Über eine besondere art der tonerregung. *Ann. Phys. Chem.* **5** (10), 216–251.
- STRYKOWSKI, P. J. & SREENIVASAN, K. R. 1990 On the formation and suppression of vortex at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics* **218**, 71–107.
- SWITENBANK, S.B. 2007 Dynamics of long flexible cylinders at high-mode number in uniform and sheared flows. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- TANIDA, Y., OKAJIMA, A. & WATANABE, Y. 1973 Stability of a circular cylinder oscillating in uniform flow or in a wake. *Journal of fluid Mechanics* **61**, 769–784.
- TRIANAFYLLOU, G.S., TRIANAFYLLOU, M.S. & CHRYSOSTOMIDIS, C. 1986 On the formation of vortex streets behind stationary cylinders. *Journal of Fluid Mechanics* **170**, 461–477.

- TRIM, A.D., BRAATEN, H., LIE, H. & TOGNARELLI, M.A. 2005 Experimental investigation of vortex-induced vibration of long marine risers. *Journal of Fluids and Structures* **21** (3), 335–361.
- VANDIVER, J.K. 1983 Drag coefficients of long flexible cylinders. In *Offshore Technology Conference*. Houston, TX, USA.
- VANDIVER, J.K. 1993 Dimensionless parameters important to the prediction of vortex-induced vibration of long, flexible cylinders in ocean currents. *Journal of Fluids and Structures* **7** (5), 423–455.
- VANDIVER, J.K. 1994 *SHEAR 7 program theoretical manual*. Massachusetts Institute of Technology.
- VANDIVER, J. K., ALLEN, D. & LI, L. 1996 The occurrence of lock-in under highly sheared conditions. *Journal of Fluids and Structures* **10** (5), 555–561.
- VIKESTAD, K., VANDIVER, J. K. & LARSEN, C. M. 2000 Added mass and oscillation frequency for a circular cylinder subjected to vortex-induced vibrations and external disturbance. *Journal of Fluids and Structures* **14** (7), 1071–1088.
- WILLDEN, R.H.J. 2006 Numerical simulation of the multiple branch transverse response of a low mass ratio elastically supported circular cylinder. Vancouver, BC, Canada.
- WILLDEN, R.H.J. & GRAHAM, J.M.R. 2004 Multi-modal vortex-induced vibrations of a vertical riser pipe subject to a uniform current profile. *Journal of Mechanics B-Fluids* **23** (1), 209–218.
- WILLDEN, R. H. J. & GRAHAM, J. M. R. 2001 Numerical prediction of viv on long flexible circular cylinders. *Journal of Fluids and Structures* **15** (3-4), 659–669.
- WILLIAMSON, C.H.K. & GOVARDHAN, R. 2004 Vortex-induced vibrations. *Annual Review of Fluid Mechanics* **36**, 413–455.
- YAMAMOTO, C. T., MENEGHINI, J. R., SALTARA, F., FREGONESI, R. A. & FERRARI, J. A. 2004 Numerical simulations of vortex-induced vibration on flexible cylinders. *Journal of Fluids and Structures* **19** (4), 467–489.

Annexe A

Publications

A linear stability approach to vortex-induced vibrations and waves

R. Violette, E. de Langre, J. Szydlowski

soumis à *Journal of Fluid Mechanics*, 2009.

Computation of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscillator model : Comparison with DNS and experiments

R. Violette, E. de Langre, J. Szydlowski

Computers and Structures, 2007, 85, 1134-1141.

Linear stability approach to explain lock-in transition and time sharing in vortex-induced vibrations of slender structures

R. Violette, J. Szydlowski, E. de Langre

A apparaître dans *Proceedings of the 28th international conference on ocean, offshore and arctic engineering, OMAE 2009, Honolulu, USA*.

Linear stability approach to predict lock-in and time sharing in vortex-induced vibrations

R. Violette, E. de Langre, J. Szydlowski

Proceedings of the 9th international conference on flow-induced vibrations - FIV2008, Prague, Czech Republic.

Mode switching of a tensioned cable in vortex-induced vibrations using a linear stability approach

R. Violette, E. de Langre, J. Szydlowski *Proceedings of the 5th Conference on Bluff Body Wake and Vortex-Induced Vibrations (BBVIV 5, 2007), Costa do Sauipe, Bahia, Brazil*.

A linear stability approach to vortex-induced vibrations and waves

RÉMI VIOLETTE^{1,2}, EMMANUEL de LANGRE¹,
JULIEN SZYDLOWSKI²

¹Department of Mechanics, LadHyX, CNRS - Ecole Polytechnique, Palaiseau 91128, France

²Institut Français du Pétrole, 1-4 av. de Bois Préau, 92852 Rueil-Malmaison, France

(Received 26 March 2009)

The motion induced by vortex shedding on slender flexible structures subjected to cross-flow is considered here. This phenomenon of vortex-induced vibration (VIV) is analysed by considering the linear stability of a coupled system that includes the structure dynamics and the wake dynamics. The latter is modelled by a continuum of wake oscillators, distributed along the span of the structure. In the case of uniform flows over a straight tensioned cable, VIV are found to arise as an instability related to the merging of two waves. In the case of a cable of finite length, the selection of modes that experience lock-in with the wake is found using the same stability argument. In non-uniform flows, several unstable wave systems are identified, and competition between them is discussed. Comparison is then made with existing experimental and computational data of VIV of slender structures under uniform and non-uniform flows. Phenomena previously identified in these systems, such as mode switching when the flow velocity is varied, time sharing of the response between two frequencies, or the coexistence of several regions of VIV with different dynamics in the same structure, are discussed with the help of the proposed model.

1. Introduction

Vortex induced vibrations (VIV) of cylindrical structures has been the subject of extensive theoretical, experimental and numerical studies, see for instance Williamson & Govardhan (2004), Sarpkaya (2004) and Gabbai & Benaroya (2005) for recent reviews. A bluff body undergoing VIV can attain an amplitude of motion in the direction transverse to the flow of the order of one diameter. This occurs when the period of vortex shedding is comparable to the free oscillation period of the structure. A strong interaction then takes place between the cylinder and its wake, and both elements oscillate at the same frequency, owing for the term lock-in. The underlying impacts of this phenomenon on engineering applications, such as undesirable vibrations of offshore structures, chimneys and heat exchanger tubes, explain the high interest in the subject. In fact, sustained vibrations of those structures can lead to failures by fatigue or unacceptable increases of the drag on the system.

In this paper, the focus is on slender structures undergoing VIV, the engineering application being related to offshore systems such as mooring cables or underwater piping elements called risers. Those practical cases are characterized by a flexible bluff body having an aspect ratio, length over diameter, of order 10^3 and a ratio of structural mass over fluid displaced mass of the order of one. As reported from field studies (Alexander,

1981, Kim *et al.*, 1985, Vandiver, 1993 and Marcollo *et al.*, 2007), the vortex-induced motion of those structures is sometimes characterized by travelling waves. Since the ocean or sea currents usually vary with depth, those structural waves may develop in non-uniform flow conditions.

Considerable knowledge has been gained on the physics of the interaction between a rigid cylinder and its wake when the former is undergoing a prescribed motion (for example Sarpkaya, 1978, Gopalkrishnan, 1993, Carberry *et al.*, 2005) or is free to move transverse to the flow direction when supported elastically (for example Khalak & Williamson, 1999, Vikestad *et al.*, 2000).

The behaviour of high aspect ratio flexible structures under non-uniform or even uniform flows is however much less understood. Even though there are similarities between the phenomenology of VIV of rigid and flexible bodies as reported by Brika & Laneville (1993) and Fajarra *et al.* (2001), there is indeed a gap between the two situations. Several aspects must be taken into account: (a) in very slender structures the number of vibration modes that may interact with the wake is large, (b) the local wake depends on the local cross-flow that may vary in intensity and direction along the structure, (c) in practical applications boundary conditions at the extremities of the structure may be quite dissipative, and a wave description may be more appropriate than a mode description. This leads to questions that are definitely more complex than in the case of an elastically supported rigid cylinder under uniform flows, as often used in analytical studies. For example, the issue of the range of flow velocities that may lead to lock-in differs: for an elastically supported rigid cylinder this is well defined, see for example King *et al.*, 1973 and Griffin & Ramberg, 1982, and may easily related to the ratio of the frequency of shedding and that of the cylinder, with some effect of mass ratio and structural damping. When the number of modes that may lock-in is large, several time scales are present in the problem, and the existence of one or several simultaneous lock-in must be evaluated. Moreover, as the oncoming flow may vary in space, several time scales of vortex shedding may also exist, further complicating the problem. Finally, the possibility of travelling waves exists.

In fact, there are a number of publications reporting laboratory experiments on VIV of high aspect ratio structures that bring some answers to the questions above, for example King (1995), Chaplin *et al.* (2005*b*), Trim *et al.* (2005), Lie & Kaasen (2006). In King (1995), results are reported from a tensioned cable under uniform water flow. A stair-like shape is observed for the evolution with flow velocity of the motion frequency of the structure. Each step corresponds to the lock-in range of a distinct structural mode. This type of experimental result was also reported more recently by Chaplin *et al.* (2005*b*). Conversely, Trim *et al.* (2005), when testing a high aspect ratio tensioned beam in uniform flows, observed that the evolution of motion frequency is rather continuous with velocity.

In Chaplin *et al.* (2005*b*), it is also reported that VIV in uniform flows can be either highly periodic or, in some cases, strongly modulated with time in terms of modal content of the response. In the latter case, the response would “switch” from one dominant spatial mode to another, justifying the name “mode switching” used by Chaplin *et al.* (2005*b*) for this phenomenon. The same behaviour was also observed from field experiments with a very high aspect ratio riser in non-uniform currents, where distinct frequencies of movement were “sharing” time (Swithenbank 2007) leading to the term of “time sharing” which we shall use here.

Numerical computations of VIV of slender structures are also available in the literature, where the Navier-Stokes equations and the structural equations are solved jointly (Newman & Karniadakis, 1997, Lucor *et al.*, 2006). Due to the extensive computational cost, there are few three dimensional computations for high aspect ratio systems. Newman &

Karniadakis (1997) found a cable response in form of a travelling wave in uniform flows, but they obtained a mixture of standing and travelling waves for a non-uniform flow. Lucor *et al.* (2006) studied a very high aspect ratio tensioned beam with non-uniform flow loading. They reported that the structure vibration frequencies varied with space, the low frequencies being located at low flow velocity region and the high frequencies at the high flow velocity region. This spatial variation of dominant vibration frequencies in non-uniform flows is also observed experimentally, (Kim *et al.* 1985).

Apart from numerical solutions of the Navier-Stokes equations, one can rely on semi-empirical models for predictions. By semi-empirical, it is meant that results from rigid cylinder experiments are used as inputs to predict VIV of slender flexible structures. These models can be divided in two subgroups. For the first subgroup, the hydrodynamic loading on the structure is function of its own movement. For example, Sarpkaya (1978) decomposes this loading into two components: one in phase with the acceleration and the other with velocity. The dependency of those quantities on the movement of the structure is then obtained experimentally (see for example Gopalkrishnan, 1993). This approach is widely used in industry, see Vandiver (1994). On the other hand, from experimental observations of the time evolution of the lift force due to vortex shedding, Birkoff & Zarantanello (1957) and Bishop & Hassan (1964) suggested that this quantity could be regarded as resulting from the dynamics of an oscillator. This is the basic idea of the second subgroup of the semi-empirical models, where the wake dynamics is modelled by a nonlinear oscillator, leading to the term “wake oscillator models”. Since the development of the first wake oscillator model by Hartlen & Currie (1970), several models have been introduced with different nonlinearities for the wake equation and different coupling functions between the wake and the structure. In a recent paper, Gabbai & Benaroya (2008) have shown that a number of wake oscillator models in the literature can be recovered from using Hamilton’s principle, proving, to some degree, that this family of models has some relevance in terms of fluid dynamics. More generally, representing the dynamics of the wake by a single self-sustained nonlinear oscillator is consistent with the idea of a nonlinear global mode which is characterized by its frequency, growth rate, and amplitude (Chomaz 2005). Using a van der Pol oscillator to model the fluctuating lift, Facchinetti *et al.* (2004a) showed that the most appropriate forcing on the wake variable for reproducing the physics of lock-in was proportional to the acceleration of the structure. Using distributed wake oscillators along the span of the structure, the model was then extended to flexible structures subjected to uniform and non-uniform flows (Facchinetti *et al.*, 2004b, Mathelin & de Langre, 2005) and validated against results from numerical simulations and experiments on high aspect ratio flexible structures under non-uniform flows (Violette *et al.* 2007). This model has also been used by other authors since then to study certain aspects of VIV of slender structures in non-uniform flows (Modarres-Sadeghi *et al.*, 2008 and Xu *et al.*, 2008).

In Chaplin *et al.* (2005a), comparisons for a tensioned beam in uniform flows between experimental results and most existing prediction methods are presented. Those methods succeed at different levels at predicting quantitatively the experimental results. However, there is certainly need for a systematic and comprehensive approach to address the issues raised above, that are specific to slender structures: simultaneous lock-in of several modes, travelling waves, time sharing and separation in space of dominant frequencies. The focus needs to be more on the mechanisms that lead to such behaviours than on the quantitative prediction.

In a recent paper, de Langre (2006) modelled vortex-induced vibrations of an elastically supported rigid cylinder under uniform flow using a linearized version of Facchinetti’s wake oscillator model. He showed that the lock-in mechanism between the wake and the

structure can be modelled as a linear instability arising from the merging of the frequencies of the two modes of the system: namely a structure-dominated mode and a wake mode. This type of instability is commonly called coupled-mode flutter (Blevins 1990). Using this simple approach, de Langre retrieved analytically the influence of the different parameters on the characteristics of lock-in. Clearly, such a linear stability approach could not lead to quantities such as the amplitude of steady-state motion of the cylinder. Still, it was found that some characteristics of the steady-state regime, such as the frequency or the dependence on mass ratio, did not differ much from those of the most unstable mode found in the linear stability approach. More generally, this allows one to describe the lock-in between a flow instability and a vibration mode of a structure in a linear framework: see for instance the case of flow over a canopy, Py *et al.* (2006) and Gosselin & de Langre (2009), where a mixing layer instability interacts with a flexible system.

Following the approach of de Langre (2006), the purpose of this paper is therefore to present a simple theory for vortex-induced vibrations of slender flexible structures based on a linear stability analysis, and thereby to furnish simple explanations to the questions raised in this introduction. In section 2, we present the linear wake oscillator stability theory used for comparisons with experiments and numerical results reported in the literature.

2. A linear wake oscillator model for Vortex-Induced Vibrations under uniform flow

2.1. Model description

For the vibrating structure, a tensioned cable model is considered here for its simplicity. Considering only the cross-flow movement of the cable, its equation of motion in dimensional form is

$$m_s \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + \zeta_s \frac{\partial Y}{\partial T} - \Theta \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} = F_Y, \quad (2.1)$$

$Y(Z, T)$ being the structure displacement at the spanwise position Z and time T , Θ being the tension, m_s the linear density of the cable and ζ_s the structural damping coefficient. Following Facchinetti *et al.* (2004b), the fluid force F_Y is written

$$F_Y = \frac{1}{4} \rho U^2 D C_{L_0} q(Z, T) - \frac{\pi}{4} \rho D^2 C_{M_0} \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} - \frac{1}{2} \rho D C_D U \frac{\partial Y}{\partial T}, \quad (2.2)$$

where ρ is the fluid density, D the cross sectional diameter, U the flow velocity, C_{M_0} the inviscid added mass coefficient, C_D the mean sectional drag coefficient and C_{L_0} the fluctuating lift coefficient amplitude for a rigid cylinder under uniform flow. The dynamic of the local fluctuating lift coefficient $q(Z, T) = 2C_L(Z, T)/C_{L_0}$ appearing in the forcing term F_Y is here modelled using a linear oscillator, following de Langre (2006)

$$\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} - \varepsilon \left(2\pi S_T \frac{U}{D} \right) \frac{\partial q}{\partial T} + \left(2\pi S_T \frac{U}{D} \right)^2 q = A \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2}. \quad (2.3)$$

where S_T is the Strouhal number. The forcing of the structure over the wake is proportional to its local cross-flow acceleration through an empirical constant A , see Facchinetti *et al.* (2004b). In this simple model, the phenomenology must be introduced through the coefficients C_{L_0} , C_D , S_T , A and ε . Of these, the first three quantities are well documented, for instance in terms of their dependency on the Reynolds number (see Norberg, 2003). The empirical parameters $\varepsilon = 0.3$ and $A = 12$ are deduced from wake measurements obtained from forced vibration experiments on rigid cylinders (see Facchinetti *et al.*, 2004a).

Note that no spanwise interaction of the wake variable q is considered: an interaction by diffusing and stiffening terms was studied by Mathelin & de Langre (2005) for flexible structures and it was shown then that its effect was negligible, the spanwise interaction in the wake resulting essentially from the structure movement. From equations 2.1 and 2.3, the wake and the structure will now be considered as a single one-dimensional medium, the dynamics of which is defined by $Y(Z, T)$ and $q(Z, T)$. This medium will be analysed with propagating wave solutions. These propagating waves have two components, namely the structure displacement $Y(Z, T)$ and the lift fluctuation $q(Z, T)$, figure 1.

2.2. Dimensionless form

Equations 2.1 and 2.3 are now put in dimensionless form. The cable undamped phase velocity in stagnant fluid \mathcal{C} is used to define the dimensionless time,

$$\mathcal{C} = \sqrt{\frac{\Theta}{m_T}}, \quad (2.4)$$

where $m_T = m_s + (\pi/4)\rho D^2 C_{M_0}$ is the sum of the structure mass and the inviscid fluid added mass. Using the diameter D as the reference length scale, the dimensionless time t , displacement y and spanwise position z are expressed respectively as $t = CT/D$, $y = Y/D$ and $z = Z/D$. The dimensionless equations are then

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\xi + \frac{\gamma}{\mu} u \right) \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = M u^2 q, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \varepsilon u \frac{\partial q}{\partial t} + u^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

where

$$\xi = \left(\frac{D}{m_T \mathcal{C}} \right) \zeta_s, \quad \gamma = \frac{C_D}{4\pi S_T}, \quad M = \frac{C_{L_0}}{16\pi^2 S_T^2 \mu}, \quad \mu = \frac{m_T}{\rho D^2}. \quad (2.7)$$

As outlined by Facchinetti *et al.* (2004a), M is a mass number that scales the effect of the wake on the structure. The parameter u is referred to as the reduced velocity and is defined by

$$u = 2\pi S_T \frac{U}{\mathcal{C}}. \quad (2.8)$$

In de Langre (2006), it was shown that damping terms did not significantly affect the instability mechanism causing lock-in. We therefore disregard them now for the sake of simplicity. The set of equations used in the theoretical development in the next two sections therefore simply read

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = M u^2 q, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + u^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (2.10)$$

Only three dimensionless parameters, u , A and M are left in this model of vortex-induced motion of a tensioned cable. The control parameter is u , the reduced velocity, which scales the flow velocity with the velocity of waves in the cable, equation 2.8. The parameter A scales the sensitivity of the wake dynamics to the motion of the cylinder, equation 2.3, while M is essentially a mass ratio, equation 2.7. Their respective values are of the order of 10 for A ($A = 12$ was found by Facchinetti *et al.*), and 10^{-2} for M in the case of neutrally buoyant structures, such as found in offshore engineering. These two parameters only affect the result through their product AM , as can be seen by a

change of variable $Q = q/A$. The typical order of magnitude of the combined parameter AM is therefore 10^{-1} . We will refer to the AM term as the *mass parameter*, in reference to its dependency on the mass ratio μ .

3. Linear stability analysis in the case of uniform flow

3.1. Infinite tensioned cable

The stability analysis of the system 2.9 and 2.10 is presented first for the case of an infinite cable-wake medium. Searching for solutions in the form of propagating waves

$$\begin{bmatrix} y(z, t) \\ q(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{q} \end{bmatrix} e^{i(\omega t + kz)}, \quad (3.1)$$

where ω is the frequency, k the wavenumber, \hat{y} and \hat{q} the complex amplitude of the structural and wake part of the waves respectively, the dispersion relation reads

$$\mathcal{D}(\omega, k; u) = \omega^4 + [(AM - 1)u^2 - k^2]\omega^2 + k^2u^2 = 0. \quad (3.2)$$

Note that this relation can be put in the reduced form $\bar{\mathcal{D}}(\omega/u, k/u) = 0$, however, the form 3.2 is kept in order to facilitate the physical interpretation of the results. The stability analysis of the cable-wake is now done for the temporal problem, i.e. with k real. The pulsation ω as a function of k and u is derived from 3.2,

$$\omega(k, u) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[k^2 + (1 - AM)u^2 \pm \sqrt{(k^2 + (1 - AM)u^2)^2 - 4k^2u^2} \right]^{1/2}. \quad (3.3)$$

Frequencies come in pairs of opposite signs corresponding to propagation in opposite directions. Assuming $AM < 1$, which is consistent with practical cases, ω is complex when

$$-2ku < k^2 + (1 - AM)u^2 < 2ku. \quad (3.4)$$

The range of wavenumbers k that give complex ω at a given reduced velocity u is therefore

$$u(1 - \sqrt{AM}) < k < u(1 + \sqrt{AM}). \quad (3.5)$$

For wavenumbers that satisfy 3.5, the complex frequency is

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + 2uk + (1 - AM)u^2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{-k^2 + 2uk + (AM - 1)u^2}. \quad (3.6)$$

From equation 3.6, two unstable and two damped waves are found for each wavenumber inside the range defined by 3.5. This defines a temporal instability for the coupled cable-wake system.

Before going any further, the physical characteristics of this instability are analysed. Figure 2 illustrates the real and imaginary part of ω as a function of k for typical values of AM . Here, the velocity u is taken equal to one, recalling that the dispersion relation may be put in a reduced form on ω/u and k/u . The figure also shows the the ratio G between the wake amplitude and the cable amplitude

$$G = \frac{\hat{q}}{\hat{y}} = \frac{k^2 - \omega^2}{Mu^2} = \frac{A\omega^2}{\omega^2 - u^2}. \quad (3.7)$$

These results may be interpreted as follows. For wavenumbers outside the lock-in range defined by relation 3.5, two waves are found: one with a strong wake amplitude (denoted W) and one with a strong structure amplitude (denoted S). The frequency of the S waves increases linearly with k , which is expected for a tensioned cable. The frequency is nearly

constant for the W waves, which is expected for a wake with no spanwise interaction. The two wave frequencies merge in the lock-in range leading to complex conjugates frequencies ω . This is identified on the figure as coupled-wave flutter (CWF). In this range of wavenumbers the phase angle between the cable and the wake varies from π to 2π .

From figure 2, it is found that the cable-wake medium displays a temporal instability, similar to that of the elastically supported rigid cylinder reported by de Langre (2006). It results from the merging of the frequencies of two neutral waves, a structural wave S and a wake wave W. For a given reduced velocity u , the most unstable wavenumber is $k_{max} = u$. The corresponding complex pulsation reads

$$\omega_{max} = u\sqrt{1 - \frac{AM}{4}} - iu\frac{\sqrt{AM}}{2}. \quad (3.8)$$

Conversely, at a given wavenumber k , one can retrieve from equation 3.5, the range of reduced velocities u for which ω is complex

$$\frac{k}{1 + \sqrt{AM}} < u < \frac{k}{1 - \sqrt{AM}}. \quad (3.9)$$

The frequency ω is then given by equations 3.6. Outside this range, equation 3.3 gives the neutral frequency. Figure 3 shows the evolution of ω and G as a function of u for a given wavenumber. The same instability related to merging of the frequencies of two waves is observed. The evolutions of the pulsations and of the phase angle with the flow velocity are identical to that given in de Langre (2006) for an elastically supported rigid cylinder. This is expected, as fixing the wavenumber k is equivalent to replacing the spanwise second derivative of the displacement in 2.9 by a constant times the displacement: the equation for the structure is then identical to that of an elastically supported rigid cylinder.

3.2. Tensioned cable of finite length

We seek now to analyse the stability of the cable-wake medium when boundary conditions are imposed. This is done by imposing a restriction on the admissible wavenumbers. For a tensioned cable of dimensionless length $\Lambda = L/D$ with fixed ends, figure 4, the boundary conditions read

$$y(0, t) = 0, \quad y(\Lambda, t) = 0. \quad (3.10)$$

As no spanwise interaction is considered for the wake, no boundary condition is required on q . Admissible real wavenumbers for such a configuration are thus

$$k_n = \frac{\pi}{\Lambda}n, \quad (3.11)$$

where $n = 1, 2, 3, \dots$. In this case, the terminology ‘‘mode number’’ applies to the variable n . Rewriting 3.9 using 3.11, one finds the range of reduced velocity in which Mode n is unstable

$$\left(\frac{\pi}{\Lambda}\right) \frac{n}{1 + \sqrt{AM}} < u < \left(\frac{\pi}{\Lambda}\right) \frac{n}{1 - \sqrt{AM}}. \quad (3.12)$$

Inside this range of reduced velocities, the frequency of Mode n is

$$\omega_n = \left(\frac{\pi}{2\Lambda}\right) \left[\sqrt{n^2 + 2n\beta + (1 - AM)\beta^2} - i\sqrt{-n^2 + 2n\beta - (1 - AM)\beta^2} \right], \quad (3.13)$$

with $\beta = (\Lambda/\pi)u$. Figure 5 shows the evolution of ω with u for $n = 1, 2$ for two values of AM . For the sake of clarity, neutral frequencies are not shown. From figure 5, it is

seen that $\text{Re}[\omega]$ varies almost linearly with u and that the transition from one mode to another involves a jump in this quantity (stair-like shape).

It can also be noticed that the range of instability for two adjacent modes can overlap. This is the case for $AM = 0.3$ but not for $AM = 0.05$. This shows that it is possible for more than one mode to be unstable for a given flow velocity. As seen on figure 5, the unstable modes have distinct frequencies. Using relation 3.12 and defining Δu_n as the range of reduced velocities where mode n and $n + 1$ are both unstable, one finds

$$\Delta u_n = \frac{\pi}{\Lambda} \left[\left(\frac{2\sqrt{AM}}{1-AM} \right) n - 1 \right]. \quad (3.14)$$

4. Linear stability analysis for non-uniform flow

Here, a generic case of non-uniform flow is studied. It consists in an infinite tensioned cable submitted to two uniform flow profiles, u_1 for $z > 0$ and u_2 for $z < 0$, with $u_1 > u_2$ (figure 6).

4.1. Configuration characteristics

Denoting ω_1 , ω_2 and k , p the frequencies and wavenumber for Medium 1 and 2 respectively, the dispersion relations read

$$\mathcal{D}_1(\omega_1, k; u_1) = \omega_1^4 + [(AM - 1)u_1^2 - k^2]\omega_1^2 + k^2u_1^2 = 0, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{D}_2(\omega_2, p; u_2) = \omega_2^4 + [(AM - 1)u_2^2 - p^2]\omega_2^2 + p^2u_2^2 = 0. \quad (4.2)$$

Solving equations 4.1 et 4.2 for k and p one finds

$$k = \pm\omega_1 \sqrt{1 + \frac{AMu_1^2}{\omega_1^2 - u_1^2}}, \quad p = \pm\omega_2 \sqrt{1 + \frac{AMu_2^2}{\omega_2^2 - u_2^2}}. \quad (4.3)$$

The configuration shown on figure 6 implies a connection between the two media at $z = 0$. As no spanwise interaction is considered for the wake variable, this connection imposes conditions only on the structural part of the waves,

$$y_1(0, t) = y_2(0, t), \quad \frac{\partial y_1}{\partial z}(0, t) = \frac{\partial y_2}{\partial z}(0, t). \quad (4.4)$$

This implies that $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. We restrict our analysis to temporally unstable wave systems, corresponding to a complex ω with a negative imaginary part. Also, only waves with finite amplitude at infinity are considered.

The cable displacement y and the fluctuating lift amplification q are included now in one variable for each medium, namely $\chi_1(z, t)$ and $\chi_2(z, t)$

$$\begin{bmatrix} y_1(z, t) \\ q_1(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{q}_1/\hat{y}_1 \end{bmatrix} \chi_1(z, t), \quad \begin{bmatrix} y_2(z, t) \\ q_2(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{q}_2/\hat{y}_2 \end{bmatrix} \chi_2(z, t). \quad (4.5)$$

From equation 4.3 two waves are found in each medium. The response for the entire system is thus in the general form

$$\chi_1(z, t) = P_1 e^{i(\omega t + k^+ z)} + N_1 e^{i(\omega t + k^- z)}, \quad (4.6)$$

$$\chi_2(z, t) = P_2 e^{i(\omega t + p^+ z)} + N_2 e^{i(\omega t + p^- z)}, \quad (4.7)$$

where P and N are the amplitudes of the waves that are propagating toward positive and negative z respectively. For the sake of clarity, k and p are noted for now on without the $+$ and $-$ signs. Figure 7 illustrates the type of response implied by equations 4.6 and 4.7.

4.2. Admissible wave systems

Admissible wave systems should satisfy (a) the dispersion relations (equations 4.3), (b) the connection condition (equation 4.4) and (c) the condition of finite amplitude at infinity. The most general case implies complex values of k and p . From equations 4.3, there is one wave in each medium that respects the finite amplitude condition at infinity, figure 8. However, condition 4.4 cannot be satisfied in this case if both wavenumbers are not equal. This form of response is thus not admissible.

The second type of response corresponds to both wavenumbers k and p being real. This configuration satisfies condition 4.4 for all wavenumbers. Since the complex frequency must be the same in both media, the ranges of unstable k and p must overlap. From equation 3.5 this condition reads

$$\frac{u_2}{u_1} \geq \frac{1 - \sqrt{AM}}{\sqrt{1 - AM}}. \quad (4.8)$$

This form of response is now referred to as the *Conditional Wave System* (C) because of this requirement, and is illustrated on figure 8.

The last possible type of response is composed of two neutral waves inside one medium and one wave with spatially decaying amplitude in the other medium. This form of response satisfies condition 4.4. Two new wave systems are thus identified: the first for which k is real and p is complex and the second with p real and k complex. The first wave system is from now on called the *Primary Wave System*, (P), and the second *Secondary Wave System*, (S), figure 8.

In order to compare wave systems, a common length scale is used to normalise the variables. This length scale is set equal to the most unstable wave length in Medium 1. From the discussion in section 3.1, the corresponding wavenumber is $k_{max} = u_1$. The normalised quantities are therefore $\bar{z} = zu_1/2\pi$, $\bar{k} = k/u_1$ and $\bar{p} = p/u_1$. Variables t and ω are also normalised by u_1 in order to obtain $\bar{t} = tu_1/2\pi$ and $\bar{\omega} = \omega/u_1$. The velocity ratio $R = u_2/u_1$ is also introduced. The relations between the normalised variables $\bar{\omega}$, \bar{k} and \bar{p} read

$$\text{Re}[\bar{\omega}] = \frac{1}{2}\sqrt{\bar{k}^2 + 2\bar{k} + (1 - AM)} = \frac{1}{2}\sqrt{\bar{p}^2 + 2R\bar{p} + (1 - AM)R^2}, \quad (4.9)$$

$$\text{Im}[\bar{\omega}] = -\frac{1}{2}\sqrt{-\bar{k}^2 + 2\bar{k} + (AM - 1)} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\bar{p}^2 + 2R\bar{p} + (AM - 1)R^2}, \quad (4.10)$$

$$\bar{k} = \pm\bar{\omega}\sqrt{1 + \frac{AM}{\bar{\omega}^2 - 1}}, \quad \bar{p} = \pm\bar{\omega}\sqrt{1 + \frac{AMR^2}{\bar{\omega}^2 - R^2}}. \quad (4.11)$$

At a given reduced velocity u , there is a real wavenumber for which the growth rate in time is maximum, see section 3.1. The most unstable (P) wave system is for $\bar{k} = 1$. In the same way, the (S) system with the highest growth rate is for $\bar{p} = R$. The most unstable normalised frequency for each system thus reads, from equation 3.8,

$$\bar{\omega}_P = \sqrt{1 - \frac{AM}{4}} - i\frac{\sqrt{AM}}{2}, \quad \bar{\omega}_S = R\bar{\omega}_P. \quad (4.12)$$

Note that as $R < 1$, both the real and imaginary part of the complex frequency are smaller for (S) than (P).

While in (P) and (S) all frequencies are admissible, there is only one possible frequency $\bar{\omega}$ at a given velocity ratio R for the wave system (C). The corresponding wavenumbers are derived using 4.9 and 4.10

$$\bar{k} = \pm R\sqrt{1 - AM}, \quad \bar{p} = \pm\sqrt{1 - AM}, \quad (4.13)$$

and the frequency reads

$$2\bar{\omega}_C = [2R\sqrt{\alpha} + \alpha(1 + R^2)]^{1/2} - i[2R\sqrt{\alpha} - \alpha(1 + R^2)]^{1/2}, \quad (4.14)$$

with $\alpha = 1 - AM$. It appears that the growth rate of the conditional wave system (C) is always smaller than that of both the (P) and (S) systems. We shall therefore assume that its role in the response can be neglected and will not discuss it any further.

4.3. Spatial forms of (P) and (S)

The spatial form of the wave systems (P) and (S) is examined here for fixed values of the velocity ratio R and of the mass parameter AM . A parametric analysis of their effect presented in Violette (2009), not shown here for the sake of brevity, shows that : (a) the form of the wave system is fairly independent on R and (b) high values of AM lead to stationary waves instead of propagating waves.

The evolution in space of wave systems (P) and (S) is fully determined by the wavenumbers \bar{k} and \bar{p} and the amplitude coefficients N_1 , N_2 , P_1 and P_2 . For (P), we have $\bar{k} = 1$ and \bar{p} is obtained from equation 4.11. The finite amplitude condition at infinity requires that $P_2 = 0$. The amplitudes N_1 , N_2 and P_1 are determined from the connection conditions, equation 4.4. As there are only two equations for three unknowns, $N_1 = 1$ is used as a reference. Solving equation 4.4 for N_2 and P_2 , one finds

$$[N_1, P_1, N_2, P_2] = [1, (1 - \bar{p}) / (1 + \bar{p}), 2 / (1 + \bar{p}), 0]. \quad (4.15)$$

Leaving out the growth in time of the amplitude, the response of (P) is shown on figure 9. The global response can be summarized as a wave propagating towards negative \bar{z} . Its amplitude decreases exponentially for $\bar{z} < 0$ and is spatially modulated for $\bar{z} > 0$. This modulation is caused by the relatively low modulus of P_1 with respect to the reference value N_1 . Figure 9 shows that there is a jump in amplitude for the wake variable at $\bar{z} = 0$, which is expected since the amplitude ratios \hat{q}_1/\hat{y}_1 and \hat{q}_2/\hat{y}_2 are not equal (equation 3.7).

The spatial shape of (S) is found following the same steps. We have $\bar{p} = R$ and the wavenumber \bar{k} is found with equation 4.11 for the pulsation obtained from equation 4.12. The amplitude coefficients read

$$[N_1, P_1, N_2, P_2] = [0, 2R / (R + \bar{k}), (R - \bar{k}) / (R + \bar{k}), 1]. \quad (4.16)$$

Figure 9 shows the form of the response (S). Except for the wavelength and the direction of propagation, the spatial form of (S) is similar to that of (P).

4.4. Coexistence of primary and secondary wave systems: Space sharing

Considering that the growth rate of the wavesystem (P) is always larger than that of (S) one may expect that the former will dominate the long term steady-state response of the system. This is evidently true in Medium 1, the region of higher velocity, but not in Medium 2 where the amplitude of (P) exponentially decays with distance from the interface. Hence the question of how far into Medium 2 the wavesystem (P) penetrates must be analysed carefully, by taking into account both spatial and temporal forms. Still using the linear framework we consider the locus where both wave systems have the same amplitude, when an arbitrary unit initial condition is taken for both, figure 10(a). This locus moves into Medium 2 as time grows, as illustrated on figure 10(b). The phase velocity of this motion is given by

$$C_{PS} = \frac{\text{Im}[\bar{\omega}_P] - \text{Im}[\bar{\omega}_S]}{\text{Im}[\bar{p}_P]}. \quad (4.17)$$

This quantity is found to be of the order of unity, in dimensionless variables, and to depend on the velocity ratio R but weakly on the mass parameter AM , figure 10. This velocity scales the rate at which the wave system (P), associated with the higher velocity, penetrates into the region of lower velocity. It may therefore be used, in a system of finite length, to estimate the possibility that the secondary wave system persists in the region of lower velocity. A persisting (S) system in the response results in a separation in space of the dominant frequency, a phenomena which we shall refer to here as “space sharing”. In section 5.4, we look into the question of space sharing in a practical case.

5. Comparisons with experimental and numerical results

The linear theory presented in Sections 3 and 4 is now used to analyse some reference cases of vortex-induced vibrations of slender structures published in the literature.

5.1. Range of unstable wavenumbers

In Section 3.1, we have shown that, for a given reduced velocity u , there is a range of real wavenumbers k for which the cable-wake system is unstable in time. Outside of this range of wavenumbers, the waves are neutral so that their amplitude should rapidly be negligible in comparison to their unstable counterparts. We therefore expect wavenumbers of motions observed in practice to fall inside this range.

To verify this assumption, we use the experimental results by King (1995), who measured the response vibration frequency and mode number of a tensioned cable undergoing VIV in uniform flows. The vibration frequency as a function of the flow velocity is shown on figure 11(a), and experimental conditions are summarized in table 1. The stair-like shape of the frequency evolution with flow velocity mentioned in Section 3.2 for a tensioned cable (figure 5) is clearly seen in the experiments.

The experimental results from King (1995) are used here to verify the validity of relations 3.5 and 3.6, which give the expected range of unstable wavenumbers and the corresponding frequency of motion. In order to do so, the parameter M from equation 2.7 needs to be quantified. As the mass ratio is known, the only inputs needed are C_{L_0} and S_T . For the range of Reynolds numbers considered here, a value of $C_{L_0} = 0.2$ is reported by Norberg (2003). As for the Strouhal number, a value of $S_T = 0.17$ is used, consistent with experimental results from Chaplin *et al.* (2005b) for similar Reynolds numbers on a tensioned beam under uniform flows. In order to collapse the data on to one graph, the dimensionless frequency $\text{Re}[\omega]$ is normalised by the reduced velocity u . The frequencies and wavenumbers reported by King (1995) are put in dimensionless form using

$$\frac{k}{u} = \left(\frac{n}{2\Lambda S_T} \right) \left(\frac{\Theta}{\frac{\pi}{4}\rho D^2 U (4\mu/\pi - 1)} \right), \quad \frac{\text{Re}[\omega]}{u} = \frac{fD}{S_T U}. \quad (5.1)$$

The term n refers to the dominant spatial mode observed in the experiment and f to the observed vibration frequency, figure 11(a). The comparison between the experimental results and the theoretical prediction, equations 3.5-3.6, is shown on figure 11(b). Most of the experimental points are located inside the range of unstable wavenumbers. Moreover, the normalised frequencies of motion fall very close to the curve predicted by the linear theory.

5.2. Transition between modes

From the analysis presented at Section 3.2 for a finite system, there are possible overlaps of reduced velocities ranges of instability of two (or more) adjacent modes. In the case of such overlaps, we assume that only the most unstable mode is observed in practice. To

test this assumption, results from the experimental study of Chaplin *et al.* (2005b) are used.

A sketch of the experiment is shown on figure 12. It consists of a tensioned beam of low flexural rigidity subjected to a uniform water flow on part of its length, the other part being in stagnant water. Chaplin *et al.* (2005b) represent the transverse displacement of the structure by

$$Y(Z, T) = \sum_n Y_n(T) \sin\left(\frac{n\pi Z}{L}\right) \quad (5.2)$$

where n is the mode number and $Y_n(T)$ is the corresponding modal weight derived from measurements. Note that these modes are not the free vibration modes of the structures. They are now referred to as Fourier modes, to clearly distinguish them from the eigenmodes of the dynamical system.

Figure 13(a) shows the value of the dominant Fourier mode number for five consecutive flow velocities, as observed in the experiments. In that case Fourier mode 2 dominates for the low velocities and Fourier mode 3 for the highest. This transition from mode 2 to mode 3 is now analysed using the results of Section 3.2.

In order to properly model this configuration several aspects must be taken into account, which makes it differ from the idealized system described by the set of equations 2.9 and 2.10: (a) the beam has a small, but non-negligible bending rigidity, (b) the tension in the beam varies linearly with the vertical position, due to gravity, (c) there is no flow on the upper part of the beam, (d) the damping terms are not neglected. The corresponding set of dimensionless linear equations read

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{1+\Gamma}\right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\theta \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \left(\frac{1}{1+1/\Gamma}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = Mv^2 q - \left(\frac{\gamma}{\mu} v\right) \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \varepsilon v \frac{\partial q}{\partial t} + v^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (5.4)$$

We have used here the dimensionless time variable $t = \mathcal{B}T/D$ defined with the bending wave velocity

$$\mathcal{B} = \sqrt{\frac{\Theta}{m_T} + \frac{EI}{m_T D^2}}, \quad (5.5)$$

recalling here that $m_T = m_S + (\pi/4)\rho D^2 C_{M_0}$. The other dimensionless quantities are

$$\Gamma = \frac{EI}{\Theta D^2}, \quad v = 2\pi S_T \left(\frac{U_{ref}}{\mathcal{B}}\right), \quad (5.6)$$

where Θ is the tension at the top of the structure, EI is the bending rigidity. The values of the structural parameters are given in table 1. Note that in the region where no cross-flow exists the fluid force acting on the right-hand side of equation 5.3 is set to zero. In that region the wake variable q is undefined. The flow-induced damping term, scaled by γ , and the wake negative damping term, scaled by ε are those defined in section 2.1. The structural damping term, proportional to ξ , is neglected, being here of much lesser magnitude.

To model the attachments at the structure extremities, conditions of no bending moment and displacement are imposed

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(0, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}(L/D, t) = 0, \quad y(0, t) = y(L/D, t) = 0. \quad (5.7)$$

As the Reynolds numbers are similar to those of the previous section, the same values

of C_{L_0} and S_T are used (King 1995). A value of $C_D = 2$ is taken for the mean drag coefficient, consistently with measurements of this quantity by Chaplin *et al.* (2005b).

Eigenmodes of the system defined by equations 5.3 and 5.4 with the conditions 5.7 are now computed using a second order centered finite difference scheme in space. The structure displacement is discretised by j points in the spanwise direction and the wake variable by r points only, as no wake model is needed in the upper part of the beam where no flow exists. The discretized form reads

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_S & \mathcal{M}_{FS} \\ \mathcal{M}_{SF} & \mathcal{M}_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathcal{Y}} \\ \ddot{\mathcal{Q}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{R}_S & \mathcal{R}_{FS} \\ \mathcal{R}_{SF} & \mathcal{R}_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{Y}} \\ \dot{\mathcal{Q}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{K}_S & \mathcal{K}_{FS} \\ \mathcal{K}_{SF} & \mathcal{K}_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{Q} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.8)$$

where $\mathcal{Y} = [y_1(T) \cdots y_j(T)]^T$ and $\mathcal{Q} = [q_1(T) \cdots q_r(T)]^T$. The dynamic system 5.8 is solved for solutions of the form

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_y \\ V_q \end{pmatrix} e^{i\omega t}, \quad (5.9)$$

where ω is the eigenfrequency, and V_y et V_q are the eigenvectors of the structure and the wake respectively. Results are now given in terms of dimensional variables, for easier comparison with the experimental results.

The computed growth rates of the two most unstable modes are shown on figure 13(b), as a function of the flow velocity parameter. Mode 2 has a growth rate higher than Mode 3 for the lowest velocities. At $U = 0.46$ m/s, the growth rates of both modes are equal and, for higher velocities, Mode 3 becomes the most unstable. This transition in terms of growth rates from Mode 2 to Mode 3 compares well with the experiments where a switch is observed in terms of the dominant mode seen in the response. The corresponding eigenvectors V_y and V_q are complex quantities. Figure 13(b) shows the structure modal shape V_y for the most unstable mode, respectively Mode 2 and Mode 3 for low and high velocities. These are close to the Fourier mode shapes 2 and 3 assumed in equation 5.2.

It may be concluded that a simple linear stability analysis can predict here some important characteristics of the steady-state response of the system: the most unstable mode corresponds to the observed beam motion.

5.3. Time sharing

In the previous experiments, the response at a flow velocity $U = 0.46$ m/s is a particular case where the time evolution of the modal factors $Y_n(T)$, otherwise strongly periodic, are modulated in time. This type of multimode response is discussed now.

In their paper, Chaplin *et al.* (2005b) report several cases of what they refer to as “mode switching”. The term “time sharing” used by Swithenbank (2007) is also appropriate, and shall be used hereafter to make a clearer distinction from the switch of modes caused by changing the flow velocity, as discussed in the previous section. In the experiments this time sharing was triggered by disturbances such as vibrations in the carriage system due to irregularities in the rails on which it is mounted.

Figure 14 shows one such case of time sharing in terms of the time evolution of the Fourier modal variables $Y_6(T)$, $Y_7(T)$ and $Y_8(T)$. The flow velocity in this case is $U = 0.90$ m/s. Those time traces are the ones presented in figure 7 in Chaplin *et al.* (2005b). Two regimes of response are observed. The first regime, named here Regime A, is dominated by Fourier mode 8 and the second, Regime B, by a combination of Fourier modes 6 and 7. Figure 14 also shows the evolution of the pseudo-frequency of the Fourier modal variables $Y_6(T)$, $Y_7(T)$ and $Y_8(T)$ using a wavelet analysis: at each vibration cycle, the frequency corresponding to the maximum wavelet coefficient is noted for each signal, and averaged

over ten cycles of vibrations. For Fourier modes 6 and 7 a constant and common frequency is found during Regime B, when they dominate the response. During Regime A their frequency of motion is ill-defined, as may be expected from the time evolution shown in the upper part of the figure. Conversely, for Fourier mode 8 a constant frequency exists only in Regime A. In figure 15 the corresponding experimental space-time evolutions reconstructed using equation 5.2 are shown.

For this configuration, the eigenmode calculation using the coupled linear system 5.8 predicts that the two most unstable modes have almost identical growth rates, $\text{Im}[\omega_A]/\text{Im}[\omega_B] = 1.007$. This confirms the possibility of coexistence of these two modes in the response. They can be associated to each regime A or B unambiguously, by considering the dominant wavelength in their spatial evolutions, figure 15: one of them is close to a Fourier mode 8 and the other to a Fourier modes 6. The eigenfrequencies of these two most unstable modes are shown on figure 14, in comparison with the experimental data, showing good agreement.

We may therefore conclude that time sharing is symptomatic of the fact that two (or more) modes of the linearized system possess similar growth rates and are therefore likely to both exist in the saturated response.

5.4. Non-uniform flow : Space sharing

Lucor *et al.* (2006) reported results of a numerical study on a high aspect ratio tensioned beam free to vibrate only in the cross-flow direction and subjected to non-uniform flows. They solved by direct numerical simulation (DNS) the three-dimensional flow around the structure coupled with the beam dynamics. Two flow profiles were analysed: one linearly sheared called here Case L, and another exponentially sheared called Case E. These are illustrated in figure 16. Results for these two cases were found to differ significantly in terms of the dynamics of the beam: in Case L a unique frequency of motion sets on the whole beam, as can be seen on the spatially averaged amplitude spectrum in figure 16. Conversely in Case E the beam moves with a local frequency that varies along the span. The spatially averaged amplitude spectrum shows therefore a large set of frequencies. Lucor *et al.* (2006) found that the higher frequencies dominate in the upper part of the structure and the lower frequencies in the bottom part. The frequency at the bottom are close to five times lower than the frequencies of the upper part. There is therefore in Case E a clear separation in space of the dominant vibration frequencies that is absent in Case L. These features also appear in the space-time evolution of the displacement of the beam figure 16: for case L a single frequency and a single wavelength combine in a downward propagating wave, but several frequencies and wavelengths coexist in Case E, with a low frequency wave propagating from bottom to top. We seek now to explain these results on the spatial organisation of frequencies using the linear theory developed for the case of non-uniform flows in Section 4.

The model used for the beam and the wake dynamics is identical to that of the Sections 5.2 and 5.3 except for two aspects: (a) there is no spanwise variation of tension, so that $\theta(z) = 1$, and (b) there is a spanwise variation of velocity so that the dimensionless velocity parameter v must be replaced by $\psi(z)v$ where $\psi(z) = U(Z)/U_{ref}$ is the flow profile. Here the maximum velocity is used as the reference velocity, $U_{ref} = U(L)$. For the drag coefficient C_D and Strouhal number S_T the values of Section 5.2 and 5.3 are used. We use here a fluctuating lift coefficient of $C_{L_0} = 0.8$ to be consistent with results from Norberg (2003) for the range of Reynolds numbers of Lucor *et al.* (2006) DNS. The structural parameters can be found in table 1. The boundary conditions are identical to that of the previous section. Using the same discretisation technique as above, the unstable linear modes are derived, in each case of flow profile, L and E. By a simple

analogy with the wave systems of section 4 the modes can be classified as (P) or (S), the former corresponding to the most unstable mode, and the latter being the second most unstable mode localized in the low flow region. The ratios of frequencies and growth rates are given in table 2. Figure 16 shows the corresponding eigenvectors. Note that for Mode (P) the eigenvectors are complex, meaning a travelling wave response, while they are essentially real for Mode (S), meaning a stationary response.

In Case L, the maximum amplitude is located in the middle of the domain for (P) and in the lower part for (S). The exponential decay of amplitude with space is clearly seen for both modes. Figure 16 shows the comparison between the response of the beam in time and space computed by the DNS, and that of the linear model where Mode (P) and Mode (S) are superimposed and the exponential growth in time has been removed. The DNS predicts waves that are propagating downward (indicated by an arrow on the figure), with a velocity that compares well with that of Mode (P). Also, the wavelength of Mode (P) is close to the one obtained by DNS. However, there is no trace of a structural response close to Mode (S) in the DNS prediction.

For Case E, the shape of Mode (P) and Mode (S) are shown on figure 16 for the beam displacement. The maximum amplitude region of Mode (P) is much higher in this case than in Case L. Also, Mode (S) has a high amplitude for a much wider zone. Figure 16 shows the comparison between the DNS calculation and the linear modal analysis results. The superposition of the forms of Mode (P) and Mode (S) is shown. In the upper part of the beam, the linear model predicts well the response computed by Lucor *et al.* (2006): the wave length and the propagation velocity are well reproduced. As mentioned earlier, one observes in the DNS calculation a low frequency wave in the lower part that propagates upward. Its half period and wavelength are similar to that found for Mode (S), figure 16.

We may conclude that the computed linear Mode (P) provides a good approximation for the wavelength and propagation velocity of the main vibration waves. Three common points with the theory of Section 4 are highlighted. First, a high frequency and dominating mode, with respect to temporal growth rate, Mode (P), has been found for both flow velocity profiles. Second, the wave-length observed for (P) is lower than that of (S). Third, the amplitude of Modes (P) and (S) decreases exponentially outside the range of velocities that is favourable to the establishment of their temporal growth rate. Those common points indicate that the theoretical results in Section 4 for an idealized geometry and flow profile seem applicable to more complex configurations.

Finally, we analyse the issue of the coexistence of several frequencies, or space sharing : as noted above a significant difference between the responses obtained by Lucor *et al.* (2006) for a linearly sheared flow and an exponentially sheared flow, is the coexistence of two zones with distinct frequencies of motion in the latter case. This may be analysed in terms of Modes (P) and (S), using the results of Section 4.4 for an idealized non-uniform flow. The phase velocity of the invasion of the primary wavesystem (P) into the region of lower velocity was given by equation 4.17. Here a similar velocity, C_{PS} , may be computed by fitting a spatial decay coefficient on the computed eigenshape of Mode (P), and using the growth rates of the two modes. The time needed for Mode (P) to invade the domain of lower velocities is given by $t_{PS} = -L_S/C_{PS}$ where L_S is the size of the domain of Mode (S), as defined in figure 16. Table 2 shows that this time is longer for the exponentially sheared flow, so that Mode (S) can be expected to persist longer in the response for the latter case than in Case L. This is consistent with the results of Lucor *et al.* (2006).

6. Discussion and conclusions

We have presented here a simple approach to vortex-induced vibrations and waves for slender structures. This simplicity is based on several strong assumptions, which are now recalled. First we have assumed that the local dynamics of lift on the cylindrical section of the structure follows that of a wake oscillator. The concept of wake oscillators has had renewed interest recently, with systematic comparison with experiments and computations that have been made available, and discussion on its physical basis, in particular in relation to global modes. Moreover, it is now more systematically used, as in this paper, without ad-hoc additional terms that have sometimes been introduced to fit a particular experiment, at the risk of losing generality. Recent applications of this concept of wake oscillators have shown its ability to capture some essential features of VIV, even in complex geometries. Second, we have only considered here the linear stability of a model coupling the structure and the wake dynamics. In doing so we have assumed that the fully saturated state of the system, in its steady-state motion, has characteristics very similar to that of the most unstable linear modes. Third, we have only considered straight cables and beams, assuming that the response for these geometries were somewhat generic. Finally, we have disregarded vortex-induced motion in the direction of flow, which is known to have some effect on the overall response (see for example Jauvtis & Williamson, 2004 and Dahl *et al.*, 2007 for the case of a rigid cylinder free to vibrate in both in-flow and cross-flow directions and Vandiver *et al.*, 2006 for flexible structures).

Because of these assumptions, closed form solutions could be derived for uniform and non-uniform flows. A discretized version of the equations allowed us to use a straight-forward eigenmode computation to derive the most unstable modes in more complex cases. Such computation is orders of magnitude faster than a DNS with a flexible cable or beam. Still, the most important result is that several phenomena that have been observed in experiments or computations of VIV of slender structures could be interpreted in this simplified framework: range of unstable wavenumbers, mode transition or mode switching with flow velocity, time sharing and space sharing

Therefore, the approach presented in the paper may be used for different goals : (a) in a design perspective, as a first step to identify the risk of lock-in and the corresponding frequencies and wavelengths, (b) as a more general tool for the understanding of the complex phenomena observed in VIV of slender structures.

Of course, the linear stability analysis based on wake oscillators bear some limits, many of which can be overcome. First, no estimate of the amplitude of VIV can be obtained. This is not a critical issue, even in practice, as amplitudes in VIV are always close to one diameter or so. Moreover, in terms of fatigue assessment, frequency of motion and wavelength, which affects curvature and therefore stress, are of the utmost importance. These can be derived by the present approach. Second, specific behaviour in time and space that may be caused by nonlinearities of the problem cannot be predicted, for instance hysteretic behaviour of nonlinear coupling between waves. Currently these effects do not seem to play a major role in practical cases of vortex-induced vibrations. Third, the wake oscillator used to model the lift dynamics may be easily improved by considering the dependence of its coefficients with the Reynolds number, or by adding another oscillator for the drag fluctuation. Finally, the adaptation of the present approach to other geometries such as a curved cable would only require a proper linearization of the cable dynamics and a model to take into account the angle between flow and cable axis in the wake oscillator. Similarly, considering a flow that varies in direction along the span requires a proper three-dimensional model of the cable. As of today, a linear stability approach

with a wake oscillator is probably the simplest way to explore these cases and understand the complex coupling that arises between the wake and the structure dynamics.

We gratefully acknowledge the help of John Chaplin and Didier Lucor in providing detailed data of the results from their experiments and computations.

REFERENCES

- ALEXANDER, C.M. 1981 The complex vibrations and implied drag of a long oceanographic wire in cross-flow. *Ocean Engineering* **8** (4), 379–406.
- BIRKOFF, G. & ZARANTANELLO, E.H. 1957 *Jets, Wakes and Cavities*. New York: Academic Press.
- BISHOP, R.E.D. & HASSAN, A.Y. 1964 Lift and drag forces on circular cylinder in flowing fluid. *Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical* **277** (136), 51–75.
- BLEVINS, R.D. 1990 *Flow-Induced Vibration*. New York: Van Nostran Reinhold.
- BRIKA, D. & LANEVILLE, A. 1993 Vortex-induced vibrations of a long flexible circular-cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **250**, 481–508.
- CARBERRY, J., SHERIDAN, J. & ROCKWELL, D. 2005 Controlled oscillations of a cylinder: Forces and wake modes. *Journal of Fluid Mechanics* **538** (-1), 31–69.
- CHAPLIN, J.R., BEARMAN, P.W., CHENG, Y., FONTAINE, E., GRAHAM, J.M.R., HERFJORD, K., HUARTE, F.J. HUERA, ISHERWOOD, M., LAMBRAKOS, K., LARSEN, C.M., MENEGHINI, J.R., MOE, G., PATTENDEN, R.J., TRIANTAFYLLOU, M.S. & WILLDEN, R.H.J. 2005a Blind predictions of laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a tension riser. *Journal of Fluids and Structures* **21** (1), 25–40.
- CHAPLIN, J.R., BEARMAN, P.W., HUARTE, F.J. HUERA & PATTENDEN, R.J. 2005b Laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a vertical tension riser in a stepped current. *Journal of Fluids and Structures* **21** (1), 3–24.
- CHOMAZ, J.M. 2005 Global instabilities in spatially developing flows: Non-normality and non-linearity. *Annual Review of Fluid Mechanics* **37**, 357–392.
- DAHL, J.M., HOVER, F.S., TRIANTAFYLLOU, M.S., DONG, S. & KARNIADAKIS, G.E. 2007 Resonant vibrations of bluff bodies cause multivortex shedding and high frequency forces. *Physical Review Letters* **99** (14).
- FACCHINETTI, M.L., DE LANGRE, E. & BIOLLEY, F. 2004a Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids And Structures* **19** (2), 123–140.
- FACCHINETTI, M.L., DE LANGRE, E. & BIOLLEY, F. 2004b Vortex-induced travelling waves along a cable. *European Journal of Mechanics B-Fluids* **23** (1), 199–208.
- FUJARRA, A.L.C., PESCE, C.P., FLEMMING, F. & WILLIAMSON, C.H.K. 2001 Vortex-induced vibration of a flexible cantilever. *Journal of Fluids and Structures* **15** (3-4), 651–658.
- GABBAI, R.D. & BENAROYA, H. 2005 An overview of modeling and experiments of vortex-induced vibration of circular cylinders. *Journal of Sound and Vibration* **282** (3-5), 575–616.
- GABBAI, R.D. & BENAROYA, H. 2008 A first-principles derivation procedure for wake-body models in vortex-induced vibration: Proof-of-concept. *Journal of Sound and Vibration* **312** (1-2), 19–38.
- GOPALKRISHNAN, R. 1993 Vortex-induced forces on oscillating bluff cylinders. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- GOSSELIN, F. & DE LANGRE, E. 2009 Destabilising effects of plant flexibility in air and aquatic vegetation canopy flows. *European Journal of Mechanics - B/Fluids* **28** (2), 271–282.
- GRIFFIN, O.M. & RAMBERG, S.E. 1982 Some recent studies of vortex shedding with application to marine tubulars and risers. *Journal of Energy Resources Technology-Transactions of The ASME* **104** (1), 2–13.
- HARTLEN, K. & CURRIE, I. 1970 Lift-oscillator model of vortex-induced vibrations. *Journal of the Engineering Mechanics Division (96(EM5))* pp. 577–591.
- JAUVTIS, N. & WILLIAMSON, C.H.K. 2004 The effect of two degrees of freedom on vortex-induced vibration at low mass and damping. *Journal of Fluid Mechanics* **509**, 23–62.
- KHALAK, A. & WILLIAMSON, C.H.K. 1999 Motions, forces and mode transitions in vortex-

- induced vibrations at low mass-damping. *Journal of Fluids and Structures* **13** (7-8), 813–851.
- KIM, Y.H., VANDIVER, J. K. & HOLLER, R. 1985 Vortex-induced vibration and drag coefficients of long cables subjected to sheared flow. In *Proceedings of the 4th OMAE Symposium, ASME*.
- KING, R. 1995 An investigation of vortex induced vibrations of sub-sea communications cables. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Flow Induced Vibration*, pp. 443–454. London, UK: Bearman P.W.
- KING, R., PROSSER, M.J. & JOHNS, D.J. 1973 Vortex excitation of model piles in water. *Journal of Sound and Vibration* **29** (2), 169–188.
- DE LANGRE, E. 2006 Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter. *Journal of Fluids and Structures* **22** (6-7), 783–791.
- LIE, H. & KAASEN, K.E. 2006 Modal analysis of measurements from a large-scale VIV model test of a riser in linearly sheared flow. *Journal of Fluids and Structures* **22** (4), 557–575.
- LUCOR, D., MUKUNDAN, H. & TRIANTAFYLLOU, M.S. 2006 Riser modal identification in CFD and full-scale experiments. *Journal of Fluids and Structures* **22** (6-7), 905–917.
- MARCOLLO, H., CHAURASIA, H. & VANDIVER, J. K. 2007 Phenomena observed in VIV of bare risers field tests. In *Proceeding of the 26th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. San Diego, California, USA.
- MATHELIN, L. & DE LANGRE, E. 2005 Vortex-induced vibrations and waves under shear flow with a wake oscillator model. *European Journal of Mechanics B-Fluids* **24** (4), 478–490.
- MODARRES-SADEGHI, Y., HOVER, F.S. & TRIANTAFYLLOU, M.S. 2008 Fatigue calculation of risers using a van der pol wake oscillator model with random parameters. In *Proceedings of the 27th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. Estoril, Portugal.
- NEWMAN, D.J. & KARNIADAKIS, G.E. 1997 A direct numerical simulation study of flow past a freely vibrating cable. *Journal of Fluid Mechanics* **344**, 95–136.
- NORBERG, C. 2003 Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures* **17** (1), 57–96.
- PY, C., DE LANGRE, E. & MOULIA, B. 2006 A frequency lock-in mechanism in the interaction between wind and crop canopies. *Journal of Fluid Mechanics* **568**, 425–449.
- SARPKAYA, T. 1978 Fluid forces on oscillating cylinders. *Journal of the Waterway Port Coastal and Ocean Division-ASCE* **104** (3), 275–290.
- SARPKAYA, T. 2004 A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures* **19** (4), 389–447.
- SWITENBANK, S.B. 2007 Dynamics of long flexible cylinders at high-mode number in uniform and sheared flows. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA.
- TRIM, A.D., BRAATEN, H., LIE, H. & TOGNARELLI, M.A. 2005 Experimental investigation of vortex-induced vibration of long marine risers. *Journal of Fluids and Structures* **21** (3), 335–361.
- VANDIVER, J.K. 1993 Dimensionless parameters important to the prediction of vortex-induced vibration of long, flexible cylinders in ocean currents. *Journal of Fluids and Structures* **7** (5), 423–455.
- VANDIVER, J.K. 1994 *SHEAR 7 program theoretical manual*. Massachusetts Institute of Technology.
- VANDIVER, J.K., SWITENBANK, S.B., JAISWAL, V. & JHINGRAN, V. 2006 Fatigue damage from high mode number vortex-induced vibration. In *Proceedings of the 25th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, ASME*. Hamburg, Germany.
- VIKSTAD, K., VANDIVER, J. K. & LARSEN, C. M. 2000 Added mass and oscillation frequency for a circular cylinder subjected to vortex-induced vibrations and external disturbance. *Journal of Fluids and Structures* **14** (7), 1071–1088.
- VIOLETTE, R. 2009 Modèle linéaire des vibrations induites par vortex de structures élancées. PhD thesis, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.
- VIOLETTE, R., DE LANGRE, E. & SZYDLOWSKI, J. 2007 Computation of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscillator model: Comparison with DNS and experiments. *Computers & Structures* **85** (11-14), 1134–1141.

WILLIAMSON, C.H.K. & GOVARDHAN, R. 2004 Vortex-induced vibrations. *Annual Review of Fluid Mechanics* **36**, 413–455.

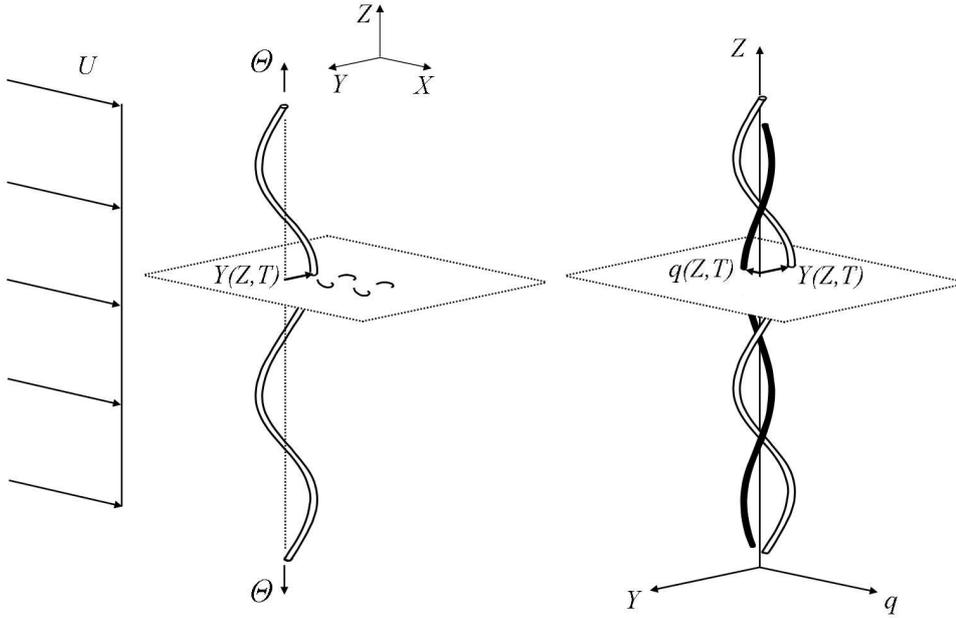
XU, WAN-HAI, ZENG, XIAO-HUI & WU, YING-XIANG 2008 High aspect ratio (L/D) riser VIV prediction using wake oscillator model. *Ocean Engineering* **35** (17-18), 1769–1774.

Parameters	Section 5.1	Section 5.2	Section 5.3	Section 5.4
μ	4.16	π	π	2.785
Γ	-	19.3	34.6	165
L/D	280	469	469	2 028
$\partial\theta/\partial z$	-	$1.76 \cdot 10^{-4}$	$3.16 \cdot 10^{-4}$	-
v	-	-	$7.72 \cdot 10^{-3}$	$2.79 \cdot 10^{-3}$
Re	9 000 - 40 000	2 500 - 25 000	22 500	1 000

Table 1: Parameters of experiments and numerical computations.

	$2\pi S_T \omega_F / v$	$2\pi S_T \omega_S / v$	$\text{Im}[p_P]$	C_{PS}	L_S	$vt_{PS}/2\pi S_T$
Case L	$0.766 - 0.297i$	$0.287 - 0.148i$	0.0080	-18.6	660	35.5
Case E	$0.827 - 0.247i$	$0.117 - 0.0432i$	0.0079	-25.8	1 565	60.7

Table 2: Linear computation results for Case L and E.

Figure 1: Model of a tensioned structure undergoing vortex-induced vibrations VIV. Left: Transverse displacement Y and tension Θ . Right: Schematic view of the model using a distributed wake oscillator variable q .

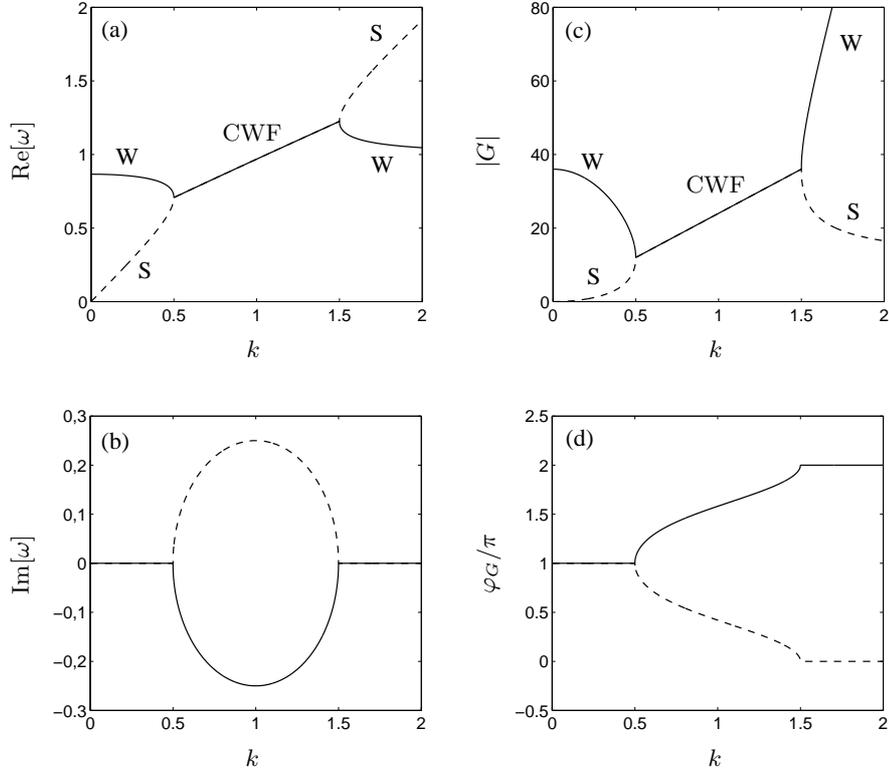


Figure 2: Linear stability analysis of vortex-induced waves in the coupled wake-cable system. Temporal analysis, k real. The complex pulsation ω and the amplitude ratio G are shown as a function of the wavenumber k for a mass parameter $AM = 0.25$. The flow velocity is arbitrarily set to $u = 1$. (a) Real part of ω , (b) imaginary part of ω , (c) module of amplitude ratio $|G|$, (d) phase angle between the wake and the structure, φ_G . In the figure, W stands for a wake dominated wave, S for a structure dominated wave and CWF for the unstable wave resulting from coupled-wave flutter.

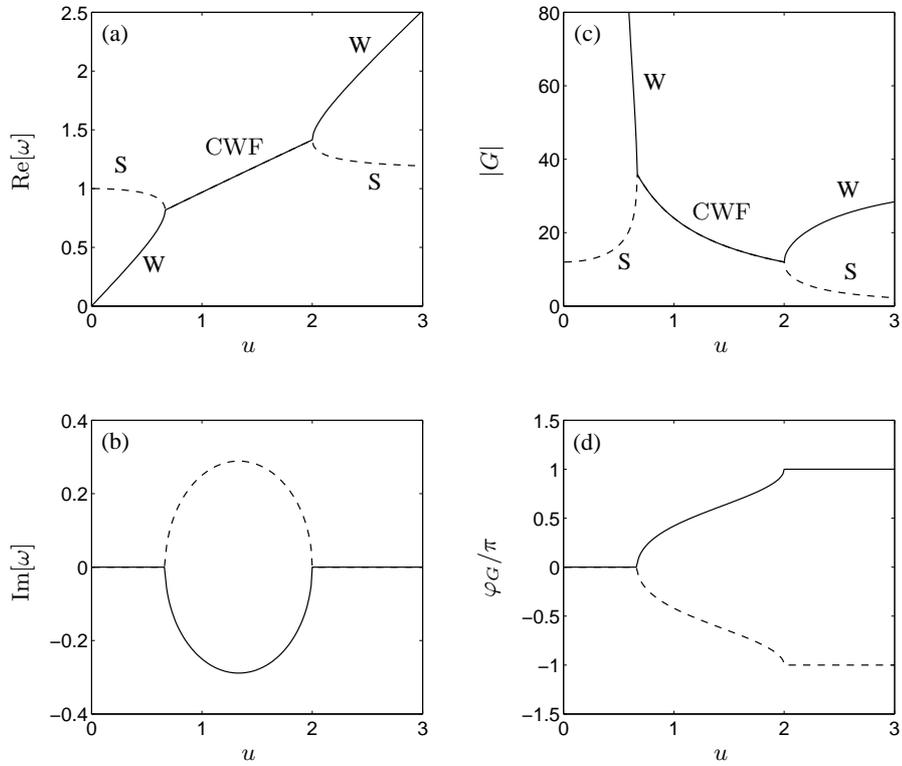


Figure 3: Same results as figure 2, but as a function of the flow velocity u , for an arbitrary wave number $k = 1$. (a) Real part of ω , (b) imaginary part of ω , (c) module of $|G|$, (d) phase angle between the cable and the wake φ_G . Symbols S, W and CWF have same meaning as in figure 2.

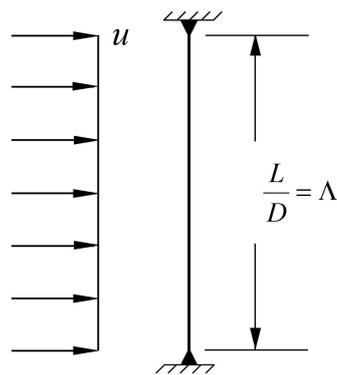


Figure 4: Tensioned cable under a uniform flow. Extremities are fixed.

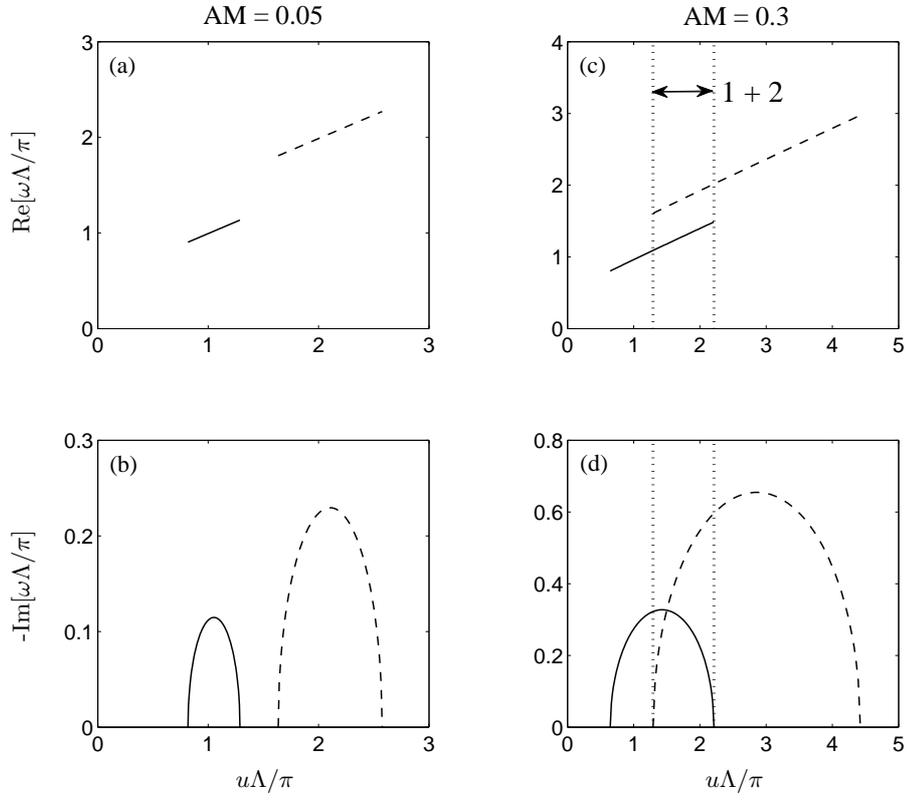


Figure 5: Complex frequencies of the first two modes of the coupled wake-cable system for a cable of finite length, as a function of the flow velocity. Only unstable frequencies are shown. In the case $AM = 0.3$, right, a range exists where the two modes are simultaneously unstable. (a), (c) Evolution of $\text{Re}[\omega]$ and (b), (d) of $\text{Im}[\omega]$. Mode $n = 1$ (solid line), $n = 2$ (dashed line).

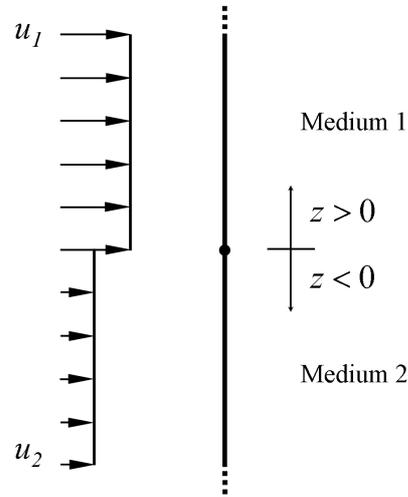


Figure 6: Non-uniform flow on a straight cable. Two semi-infinite media having different reduced velocities u_1 and u_2 are connected at $z = 0$.

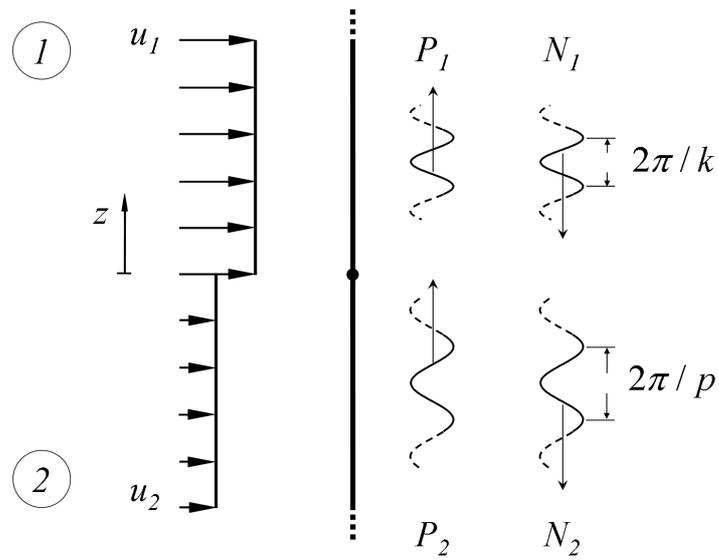


Figure 7: Wave configuration corresponding to equations 4.6 and 4.7.

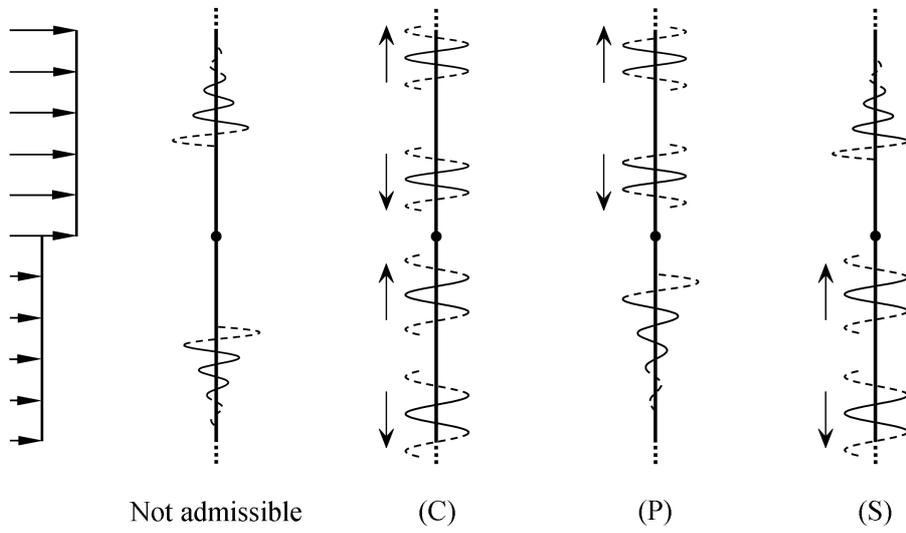


Figure 8: Definition of the unstable wave systems in non-uniform flows: Left, two complex waves (non admissible), (C) four spatially neutral waves *Conditional Wave System*, (P) two spatially neutral waves and one spatially decaying, *Primary Wave System*, (S) two spatially neutral waves and one spatially decaying, *Secondary Wave System*.

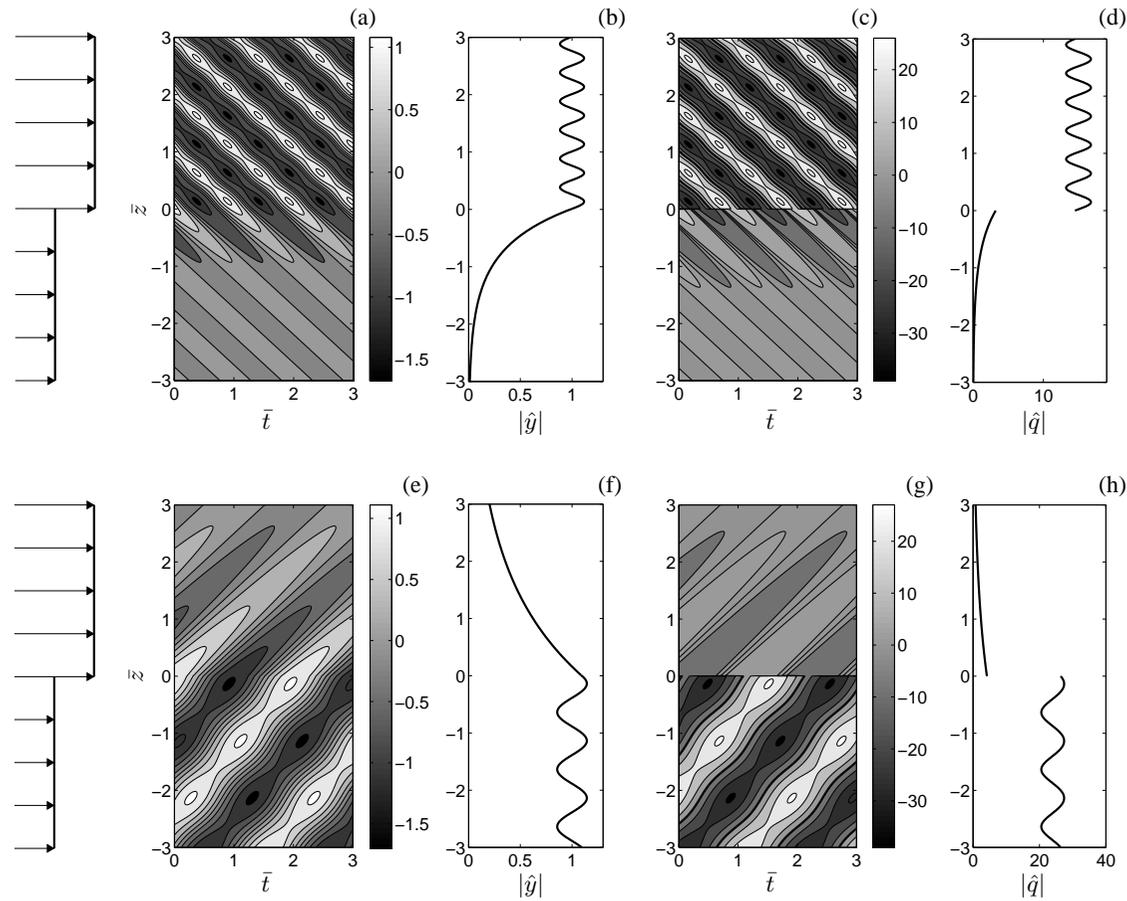


Figure 9: Unstable cable-wake wave systems for an infinite tensioned cable in non-uniform flows. Top : *Primary Wave System*, (P). (a) Evolution with time and space of the cable displacement, (b) envelope of the cable displacement, (c) evolution with time and space of the wake, (d) envelope of the wake variable. Bottom : *Secondary Wave System*, (S). (e) Evolution with time and space of the cable displacement, (f) envelope of cable displacement, (g) evolution with time and space of the wake, (h) envelope of the wake variable. The exponential growth in time of the amplitude omitted for clarity. For all figures, $R = 0.5$ and $AM = 0.25$.

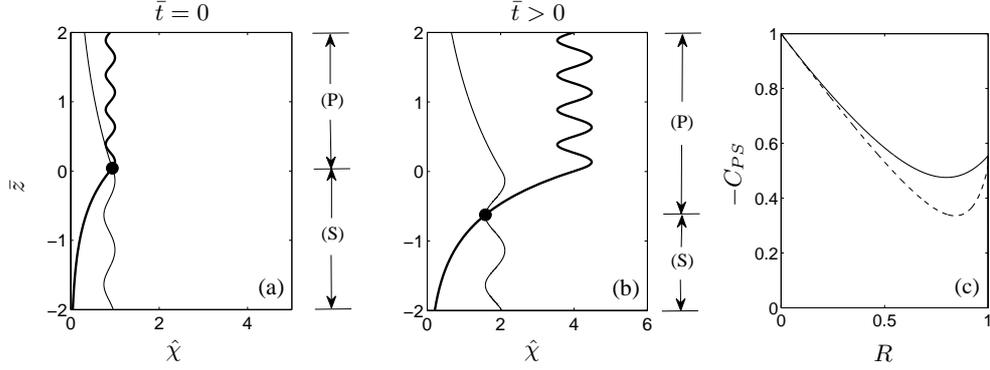


Figure 10: Schematic view of the competition between the Primary and Secondary wave system. (a)-(b) Evolution of the envelopes of each wave system with space and time. Bold line, (P), thin line, (S). The black dot marks the boundary between the two systems, moving with the phase velocity C_{PS} , equation 4.17. (c) Evolution of C_{PS} with the velocity ratio R . $AM = 0.25$ (dashed line) and $AM = 0.8$ (solid line).

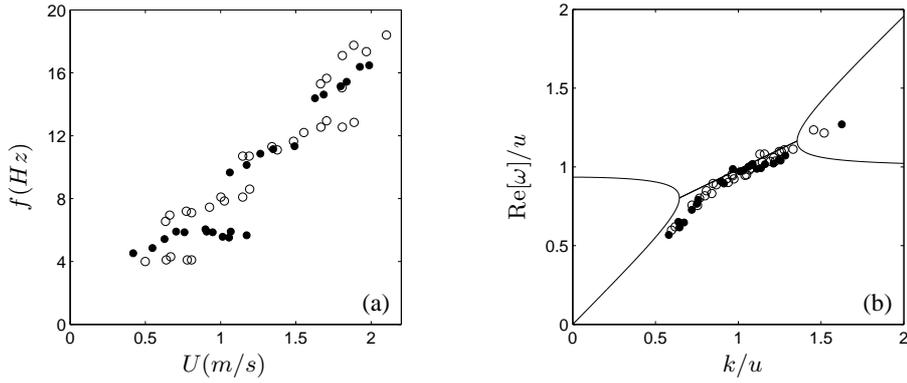
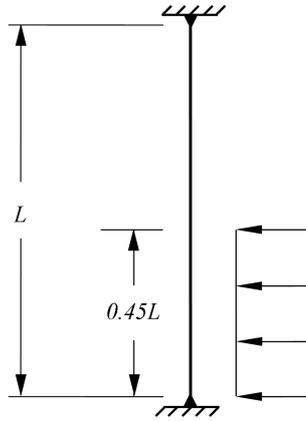
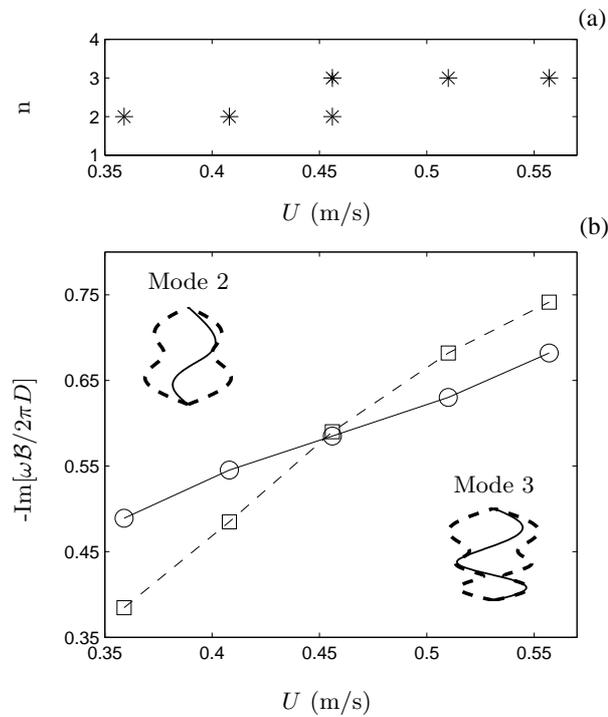


Figure 11: Comparison between the linear stability analysis and experimental data on the motion of a tensioned cable under uniform cross-flow. (a) Experimental data of the evolution of the vibration frequency f with the flow velocity U , redrawn from King, 1995. Results are shown for two different tensions: Θ_1 (black dots), $\Theta_2 = \Theta_1/2$ (open circles). (b) The same data in dimensionless form, compared with the prediction of the linear stability analysis, solid lines.

Figure 12: Schematic view of the experimental setup used by Chaplin *et al.* (2005b).Figure 13: Mode switching in VIV of a tensioned beam. Comparison between the experimental data and the linear stability theory prediction for the dominant mode: (a) dominant spatial Fourier mode number n in the experiment as reported by Chaplin *et al.* (2005b), (b) growth rate predicted for Mode 2 (circles) and Mode 3 (squares). Also shown are the computed unstable mode shapes, $|V_y|$ (dashed line) and $\text{Re}[V_y]$ (solid line).

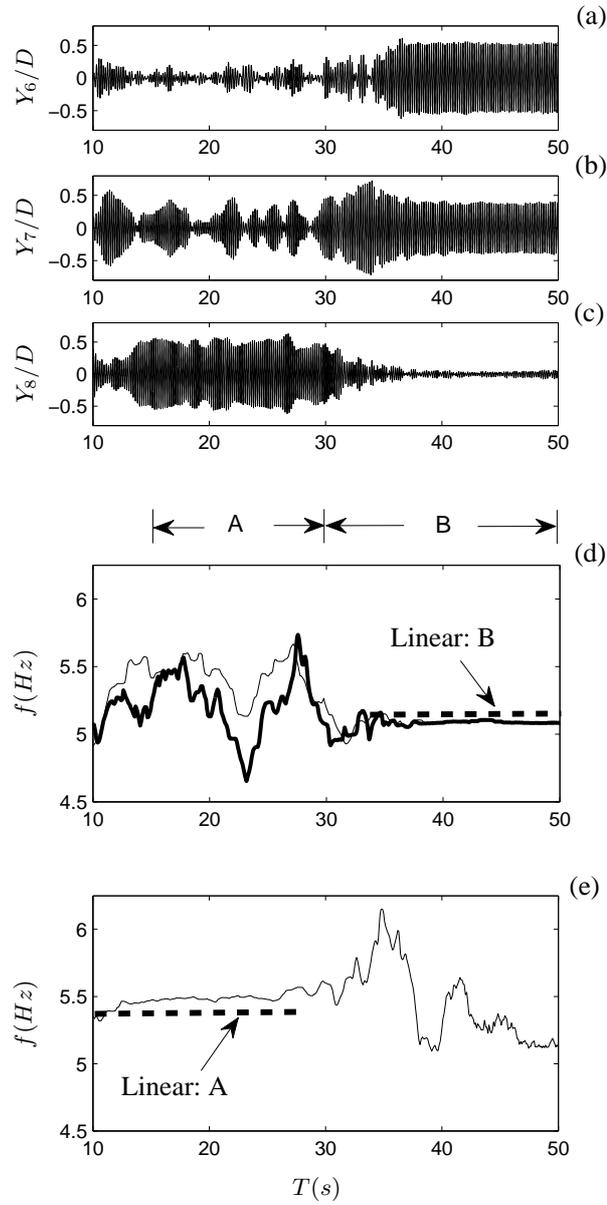


Figure 14: Time sharing between two regimes of motion in VIV of a tensioned beam, Chaplin *et al.* (2005b). (a)-(c) Time evolution of the modal weight of Fourier mode 6 to 8, showing the change of regime, from A to B. (d) pseudo frequency evolution with time of Mode 7 (thin line) and Mode 6 (thick line), (e) pseudo frequency evolution with time for modal weight of Mode 8. On (d) and (e), the linear theory prediction for frequencies is shown with dashed lines.

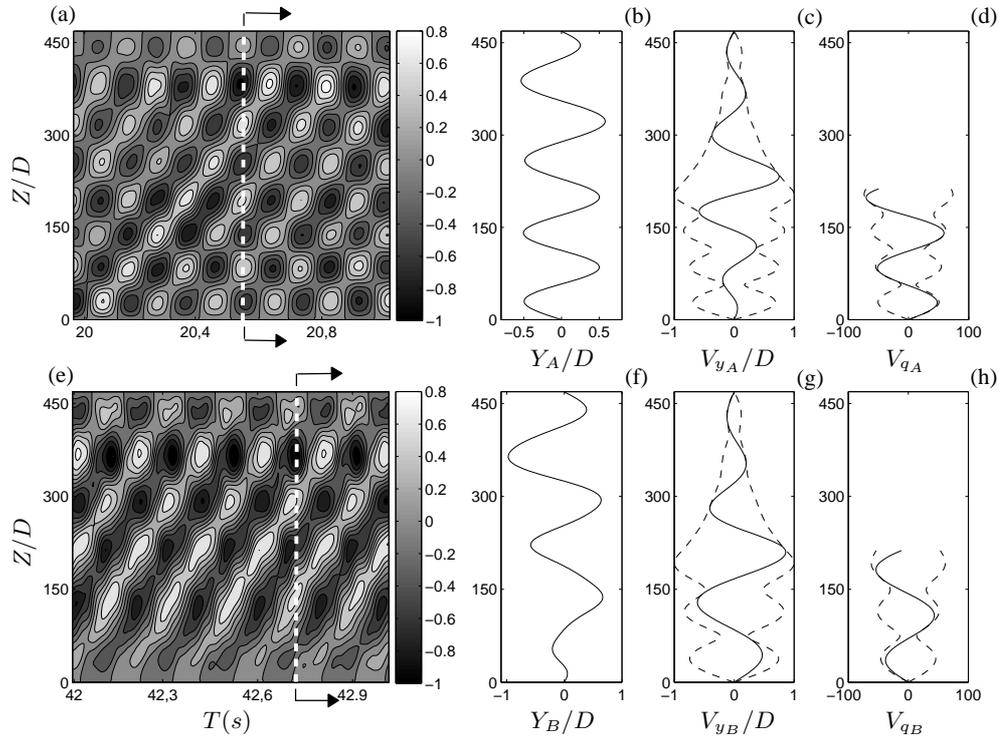


Figure 15: Characteristics of the two regimes for the case of time sharing, Section 5.3. Experiments by Chaplin *et al.* (2005b) and most unstable modes using the linear stability theory. Top, Regime A: (a) Experimental evolution with time and space of the structural displacement, (b) a corresponding instantaneous displacement of the structure, at the instant indicated by the arrows in (a), (c) and (d) structure and wake components of one of the two most-unstable modes. Bottom : (e) -(h) same information for Regime B and the other most unstable mode.

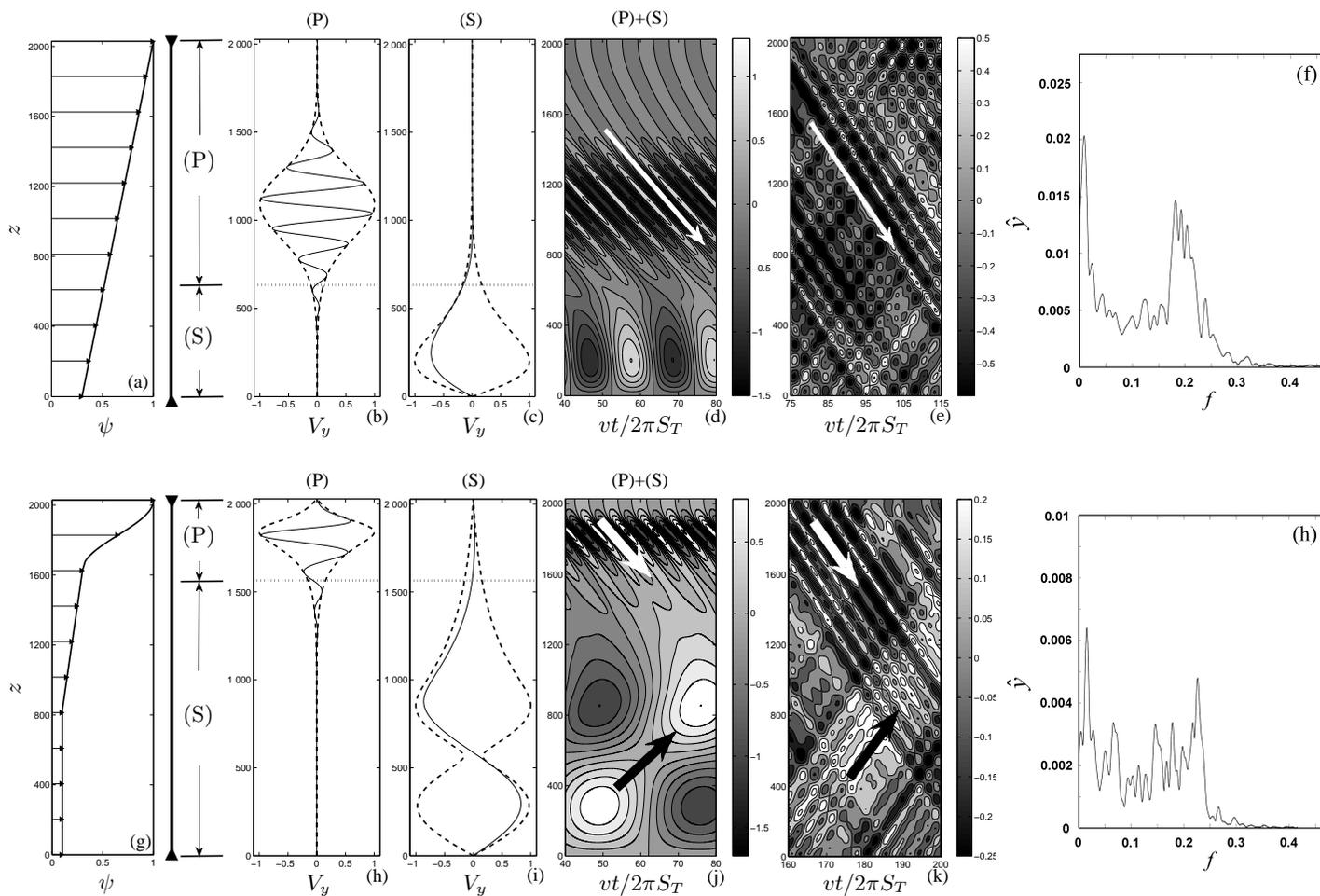


Figure 16: Tensioned beam undergoing VIV under non-uniform flows. Comparison between numerical predictions by Lucor *et al.* (2006), using DNS, and the linear stability of the coupled structure-wake system. Top, linearly sheared flow, Case L: (a) flow velocity profile, (b) beam eigenshape for the most unstable mode, Mode (P), (c) same quantity for most unstable mode in the low flow velocity region, Mode (S), (d) reconstructed time space evolution of the beam displacement by recombination of these two modes, (e) time-space evolution in the DNS computation of Lucor *et al.* (2006), (f) space averaged spectrum of the DNS beam motion. Bottom, exponentially sheared flow, Case E: (g-l) same quantities than above.

Computation of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscillator model: Comparison with DNS and experiments

R. Violette^{a,b}, E. de Langre^{a,*}, J. Szydlowski^b

^a *Département de Mécanique, LadHyX, CNRS – Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France*

^b *Institut Français du Pétrole, 1-4 av. de Bois Préau, 92852 Reuil-Malmaison, France*

Received 31 May 2006; accepted 22 August 2006

Available online 2 January 2007

Abstract

We consider here the dynamics of flexible slender systems undergoing vortex-induced vibration (VIV). This type of motion results from the coupling between the oscillating wake due to cross-flow and the structure motion. Practical applications are mainly found in the field of ocean engineering, where long flexible structures such as risers or mooring cables are excited by sea currents. The wake dynamics is here represented using a distributed wake oscillator coupled to the dynamics of the slender structure, a cable or a tensioned beam. This results in two coupled partial differential equations with one variable for the solid displacement and one for the wake fluctuating lift. This simplified model of the wake dynamics has been previously validated on simple experiments. Here, comparisons with direct numerical simulation results are done for both uniform and non-uniform flow. Comparison is also performed between the wake oscillator predictions and some experimental results on long cables. The results of those comparisons show that the proposed method can be used as simple computational tool in the prediction of some aspects of vortex induced vibrations of long flexible structures.

© 2006 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Vortex-induced vibration; Wake oscillator; Cable; Van der Pol; Waves; Fluid–structure interaction

1. Introduction

Flow past a circular bluff body creates an unstable wake in the form of alternating vortices. Those vortices are shed from the cylinder at a frequency defined by the Strouhal law. They create periodically varying lift forces on the cylinder. The later, if flexible enough, undergoes vortex-induced vibration (VIV), see recent reviews by Williamson and Govardhan [21], Sarpkaya [18] and Gabbai and Benaroya [9]. Vortex-induced vibration is a major concern regarding fatigue life of marine structures like risers used in offshore petroleum production. The prediction of those VIV is still an open research field especially for risers of very large aspect ratio ($L/D \sim 2000\text{--}3000$) subjected to depth varying flow. Since the vortex shedding frequency varies with flow velocity, a depth varying flow past a flex-

ible cylinder will result in multifrequency excitation. Depending on the range of velocity covered by the flow profile, many vibration modes of the structure can be excited. Understanding the vibration mechanisms of the structure in those cases is not a simple task. For instance, Vandiver [19] and Vandiver et al. [20] did experimental parametric studies of risers subjected to non-uniform flow in order to determine when the response is monomodal or multimodal. Marcollo and Hindwood [13] experimentally studied the mode competition of a flexible beam subjected to a step current. Recent experimental and numerical investigations such as in [5] and [1] showed the complexity of the issue of VIV of long flexible cylinders.

Numerous methods for predicting the dynamic behavior of structures experiencing vortex-induced vibration are available in the literature. One VIV prediction method consists of solving the Navier–Stokes equations by direct numerical simulation (DNS) for the fluid around the flexible cylinder and to compute the hydrodynamic loads

* Corresponding author.

E-mail address: delangre@ladhyx.polytechnique.fr (E. de Langre).

resulting on it. The deformation of the flexible cylinder and its resulting effect on the flow field is also computed, the two being coupled, see for instance [15]. An alternative approach is to model the principal features of vortex shedding in the cylinder wake using a dynamical system. The main difference between this phenomenological approach and DNS is that the dynamic behavior of the fluid in the cylinder wake is modeled instead of being computed. Bishop and Hassan [3] and Birkoff and Zarantanello [2] were the first to consider the use of the van der Pol oscillator equation to model the behavior of the cylinder wake. Hartlen and Curie [10] applied this concept and developed the first so called wake oscillator model that used the van der Pol oscillator equation for the cylinder wake modeling. Recently, the van der Pol oscillator was revisited for VIV prediction: Facchinetti et al. [7] verified the effect of the cylinder movement on the lift fluctuation via different type of coupling (displacement, velocity and acceleration). They came up with a formulation of the wake oscillator model that was qualitatively and, in some point, quantitatively reproducing some aspects of VIV observed experimentally for rigid cylinders elastically supported. Facchinetti et al. [8] extended the model to predict VIV and VIW (vortex-induced waves) for cables and successfully predicted the experimental response behavior of a towed cable. Mathelin and de Langre [14] pushed further Facchinetti's work to predict VIV of cables subjected to sheared flows.

The purpose of this paper is to verify, following [7,8,14], how this simple approach can predict some of the dynamics of cables or flexible beams observed in both DNS and experiments. Here, the focus is on cases of long flexible structures subjected to uniform and non-uniform flow. In

Section two of this paper, the VIV prediction model developed by Facchinetti et al. [8] and by Mathelin and de Langre [14] is summarized. In Section three, comparison of the wake oscillator model results is made with DNS results available in the literature for tensioned cables and beams subjected to uniform and non-uniform flow. The fourth section contains a comparison between the model and experimentally observed cable behavior.

2. Model description

The main features of the wake oscillator model by Facchinetti et al. [7], Facchinetti et al. [8] and by Mathelin and de Langre [14] are summarized in this section. A straight slender cylinder oscillating in the direction transverse to the flow is considered here (Fig. 1). The reference length scale used is the cylinder diameter D . The dimensional displacement Y and span position Z are $Y = yD$ and $Z = zD$, respectively. The cylinder diameter, the Strouhal number St and an arbitrary reference flow velocity U_{ref} define the Strouhal pulsation of vortex shedding $\Omega_{ref} = 2\pi St U_{ref}/D$. This pulsation is used to define the reference time scale. The dimensional time T is thus expressed as $T = t/\Omega_{ref}$.

Considering the reference length and time scale mentioned above, the dynamics of a straight cylinder can be described by the dimensionless equation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = S - \frac{\gamma \omega_f}{\mu} \frac{\partial y}{\partial t}, \tag{1}$$

where $y(z, t)$ is the lateral displacement (Fig. 1a). The dimensionless tension c is given by $c^2 = (K/(m_{cyl} + m_{fluid})) / (\Omega_{ref} D)^2$

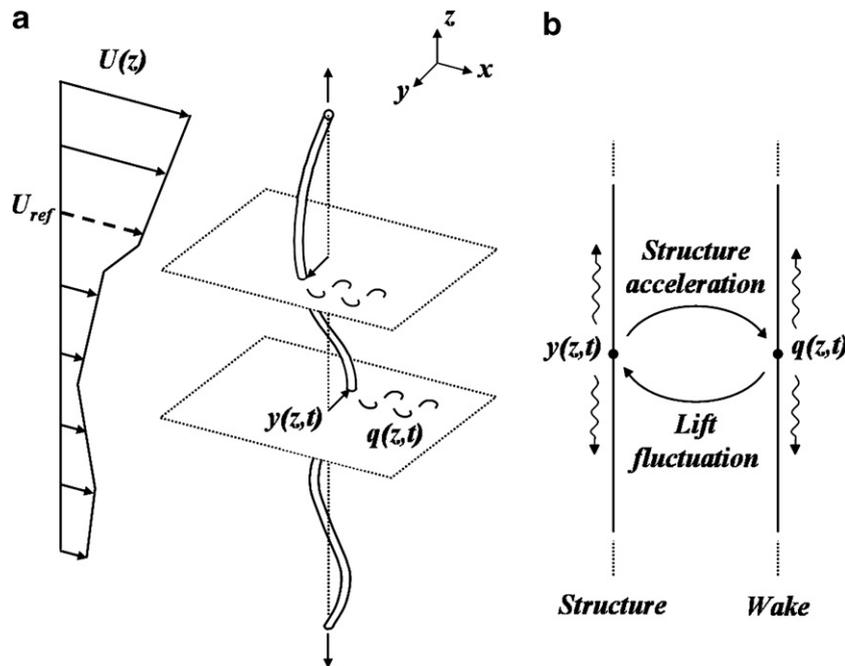


Fig. 1. Long flexible structure under a depth-varying flow: (a) definition of parameters and (b) present model using a distributed wake oscillator locally coupled with a tensioned beam, Eqs. (5) and (6).

and the dimensionless bending stiffness b by $b^2 = (EI/(m_{\text{cyl}} + m_{\text{fluid}}))/(\Omega_{\text{ref}}^2 D^4)$. The dimensional cylinder tension and bending stiffness are K and EI , respectively. The parameters m_{cyl} and m_{fluid} are the mass per unit length of the cylinder and the fluid added mass respectively. The second term on the right hand side of (1) is the fluid induced damping resulting from drag effects [4]. It depends on the mass ratio $\mu = (m_{\text{cyl}} + m_{\text{fluid}})/\rho D^2$ where ρ is the fluid density, the normalized shedding pulsation $\omega_f = \Omega(z)/\Omega_{\text{ref}} = U(z)/U_{\text{ref}}$ and the stall coefficient γ . The later is expressed as $\gamma = C_D/4\pi St$ where C_D is the mean sectional drag coefficient. The fluid forcing term generated by the cylinder's wake, S , will be discussed below. The cylinder structural damping is neglected in this paper.

A forced van der Pol oscillator equation is used to describe the dynamics of the cylinder's wake

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \varepsilon \omega_f (q^2 - 1) \frac{\partial q}{\partial t} + \omega_f^2 q = G. \quad (2)$$

As in [7], the variable q is here defined as the local fluctuating lift coefficient $q(z, t) = 2C_L(z, t)/C_{L0}$, the coefficient C_{L0} is the amplitude of the fluctuating lift for a fixed rigid cylinder subjected to vortex shedding. The term G expresses the effect of the structure motion on the wake and is discussed below. In Eq. (2), the linear negative damping term allows for an amplitude increase of q if perturbed from $q = 0$. The non-linear term ensures the saturation of q for the unforced case ($G = 0$). Note that all direct coupling of the wake variables in the z -direction is here neglected: a diffusion coupling was analysed in [6] but it was showed in [14] that it plays a negligible role when the cylinder motion is significant, as will be the case here.

The forcing term on the structure due to the wake dynamics in Eq. (1) is assumed to be

$$S = M \omega_f^2 q, \quad M = \frac{C_{L0}}{2} \frac{1}{8\pi^2 St^2 \mu}. \quad (3)$$

The forcing on the wake due to the cylinder motion in Eq. (2) has been evaluated by Facchinetti et al. [7], using experimental data of VIV of elementary systems (one degree of freedom) in uniform flow. They found that with the acceleration of the structure as the forcing term, the van der Pol model was qualitatively and, in some point, quantitatively describing some of the typical physics of vortex-induced vibrations observed experimentally. That way, the coupling term in Eq. (2) is expressed as

$$G = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (4)$$

The value of A in Eq. (4) as well as that of ε in Eq. (2) has been determined from experimental data of fluctuating lift on a rigid cylinder driven in forced vibration. The values found for those parameters are $A = 12$ and $\varepsilon = 0.3$ [7].

The set of partial differential equations in $y(z, t)$ and $q(z, t)$ to solve can be summarized as

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\gamma \omega_f}{\mu} \frac{\partial y}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = \omega_f^2 M q \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \varepsilon \omega_f (q^2 - 1) \frac{\partial q}{\partial t} + \omega_f^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (6)$$

In this system, all coefficients can be estimated using particular characteristics of the flexible cylinder, D , K , EI , m_{cyl} , of the flow, m_{fluid} , ρ , $U(z)$, and phenomenological parameters derived from elementary experiments on wake dynamics and vortex-induced vibrations. Those phenomenological parameters are St , C_D , C_{L0} , A and ε . The Strouhal number St , drag coefficient C_D and fluctuating lift coefficient C_{L0} may for instance be found in [16] as they are only related to wake dynamics of fixed cylinders. The values of those parameters used throughout this paper are $C_D = 1.2$, $C_{L0} = 0.3$ and $St = 0.2$ (except in Case I and II where $St = 0.16$ for consistency with the reference data). All dimensionless coefficients in (5,6) are constant in the z -direction, except $\omega_f(z)$ which depends on the local flow velocity $U(z)$. The dependence of phenomenological parameters with the Reynolds number, and therefore with z for non-uniform flows, is neglected here for the sake of clarity. This system is numerically integrated in time and space using a standard centered finite difference method of the second order in both domains. Description of this method can be found, for example, in [17]. The time step used in all calculation is chosen much smaller than the critical time step and its effect on the results was checked. Boundary conditions and initial conditions are described below for each case of computations.

3. Comparison with DNS results

The objective of this section is to verify if some aspect of the dynamics observed with DNS models predictions can be reproduced by the wake oscillator model described in the previous section. Fig. 2 shows a schematic representation of the three configurations analysed here.

The first case analysed is a simple tensioned cable subjected to uniform flow. Complexity is added in the following cases: in the second one, the flow is varying in a sinusoidal manner in space and in the third case, comparison is performed for a tensioned beam subjected to a linearly sheared flow.

3.1. Case I: Infinite tensioned cable under uniform flow

Newman and Karniadakis [15] performed spectral DNS simulation studies of flexible cables under VIV conditions. They considered in particular the preferred response behavior of infinite cables subjected to a uniform flow. In order to limit the spatial computation domain, they imposed periodic conditions on the limits in z -direction. The geometrical changes of the computational domain due to the cylinder motion were taken into account by using body-fitted coordinates. They modeled the cylinder as a tensioned cable without structural damping. For the

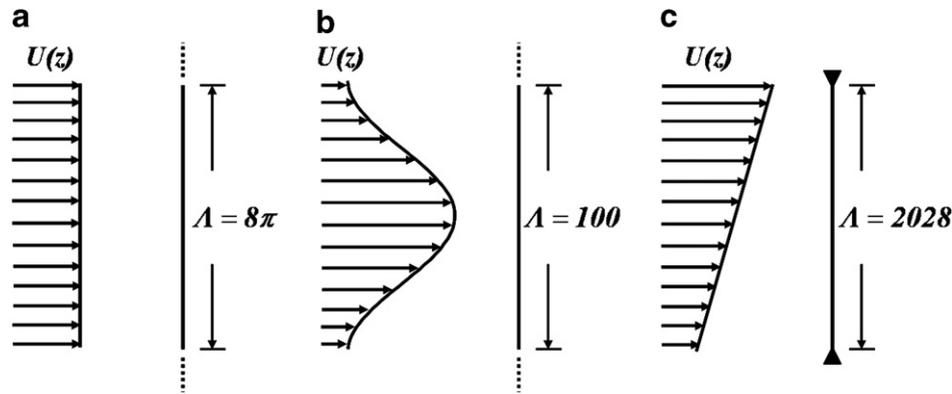


Fig. 2. Configurations used for comparison between predictions of DNS and wake oscillator model: (a) infinite tensioned cable under uniform flow, Case I; (b) infinite tensioned cable under non-uniform flow, Case II; (c) finite tensioned beam under linearly sheared flow, Case III; A is the aspect ratio L/D .

case considered in this section, Fig. 19(c) in Newman and Karniadakis [15], they used quasi-random initial conditions for the cable and the fluid variables.

The PDE system (5,6) is integrated for this particular cable configuration, extending the results of [8]. The parameters used in the simulation appear in Table 1 (Case I). Boundary conditions are posed as periodic on y : $y(0, t) = y(A, t)$. As initial conditions, a random noise with amplitude of order $O(10^{-3})$ is applied to the fluid variable q . Zero displacement and velocity initial conditions are applied to the structure. The first time derivative of the fluid variable is also set to zero as initial condition. For the spatial discretization, 252 points are used for the simulation and a dimensionless time step of 0.01 is used. The integration is carried for a dimensionless time t of 600. The results obtained for DNS at a Reynolds number ($U_{ref}D/\nu$) of 100 and wake oscillator model prediction appear in Fig. 3.

Fig. 3 shows the time evolution of the cable’s transverse displacement at every span position computed by the DNS (Fig. 3a) and wake oscillator model (Fig. 3b). One can observe that the frequency and wavelength are similar for

the two models. This is expected since in both cases the cable is tuned to resonate with the vortex shedding frequency at that particular mode. In the DNS results, a standing wave response for the cable emerges first. This standing wave progressively transforms into a travelling wave after several vibration cycles, typically 10. Fig. 3b clearly shows that this global behavior is well reproduced by the wake oscillator model. It also shows that the number of cycles for which the standing wave persists is quite comparable for both models. For the wake oscillator model, it is found that the travelling wave response constitutes the permanent vibration regime. The propagation direction of those travelling waves is arbitrary.

3.2. Case II: Infinite tensioned cable under non-uniform flow

In addition to the cases simulated for cables under uniform flow, Newman and Karniadakis [15] performed a computation for a tensioned cable under non uniform flow. The configuration they studied appears in Fig. 2b. (Fig. 26 in their paper). The flow profile is sinusoidal and the maximum flow velocity U_{max} is twice the minimum value U_{min} .

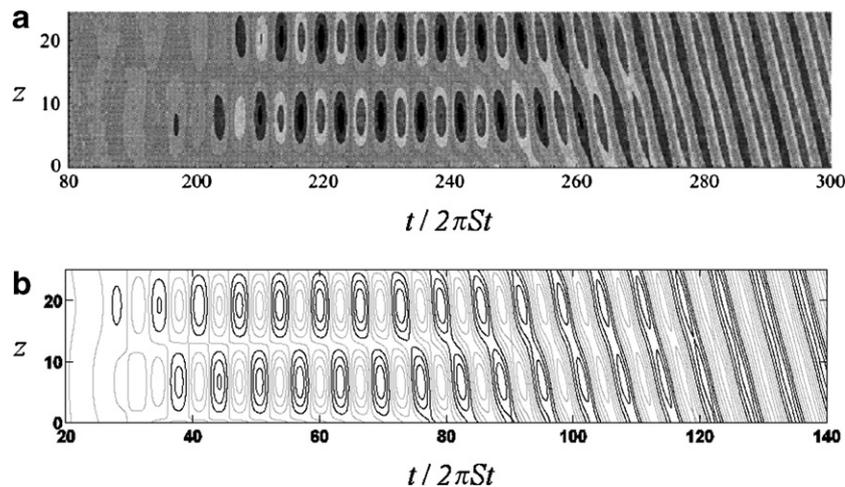


Fig. 3. Infinite tensioned cable under uniform flow, Case I. Evolution of cable displacement with time and space: (a) DNS [15] and (b) wake oscillator model. In both figures the displacement level is shown ranging from -0.6 to 0.6 with equally spaced intervals.

The spatial computational domain is extended so that the aspect ratio now is $A = 100$. The Reynolds number corresponding to the maximum velocity is 100. The boundary conditions used are the same as for Case I. This case is now computed using the wake oscillator model. The parameters used in the simulation appear in Table 1. As initial conditions, zero displacement and velocity are imposed for the cable. A sinusoidal shape identical to the flow profile is used as initial value for the fluid variable q , with a magnitude of order $O(10^{-3})$. This particular choice of the initial value is discussed below. The time derivative of the fluid variable is set to zero as initial condition. The number of points used for the spatial integration is 1001 and a dimensionless time step of 0.01 is used for the integration. The PDE system is numerically integrated for a dimensionless time t of 800. The lowest flow velocity is used as reference $U_{\text{ref}} = U_{\text{min}}$. The results for both the DNS and the wake oscillator appear in Fig. 4a and b, respectively.

Fig. 4a shows that DNS predicts a combination of standing and travelling waves for the cable response. Standing waves dominate the response near the center and at the limits of the spatial computational domain. In between those regions, travelling waves can be observed. The wake oscillator (Fig. 4b) predicts the same dynamical behavior. Moreover, the prediction of wavelength, pulsation and wave velocity is similar for both computational methods. Note that in both DNS and wake oscillator simulations, the amplitude is the lowest at the center cable where the flow velocity is maximum, which is rather counter-intuitive.

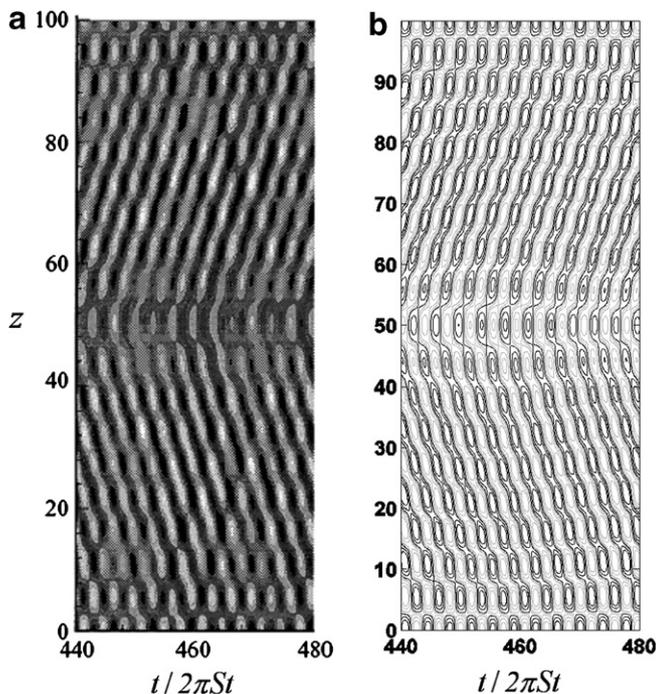


Fig. 4. Infinite tensioned cable under non-uniform flow, Case II. Evolution of cable displacement with time and space: (a) DNS [15] and (b) wake oscillator model. In both figures the displacement level is shown ranging from -0.4 to 0.4 with equally spaced intervals.

Numerical simulations with the wake oscillator model were also done with a random noise of order $O(10^{-3})$ amplitude as initial conditions for the fluid variable q . A different cable dynamical behavior was obtained: a combination of standing and travelling waves as the one shown in both Fig. 4a and b emerges first, but this regime is unstable and transforms into travelling waves response with a spatial modulation of the vibration amplitude. The cable response is thus found quite sensible to initial conditions. This instability of the regime shown in Fig. 4 is also found for sinusoidal initial conditions, but at a longer a time.

3.3. Case III: Finite tensioned beam under linearly shear flow

Lucor et al. [12] performed DNS simulations of a very high aspect ratio tensioned beam ($A = 2028$) with non-uniform flow loading (Fig. 2c). They simulated a linearly sheared flow with a velocity variation of 70% of the maximum value ($\Delta U/U_{\text{max}} = 0.7$). They used the tensioned beam equation with zero structural damping to model the structure. The Reynolds number for the simulation, based on the maximum flow velocity U_{max} , was 1000. The number of beam vibration modes included in the flow excitation frequency bandwidth is 14. The beam is pinned at both ends.

The same case is computed with the wake oscillator model. The parameters used for this calculation are shown in Table 1. For this case, 2000 points are used for the spatial discretization with a dimensionless time step of 0.001. The integration is carried for a dimensionless time t of 1600. A zero displacement and bending moment conditions are imposed on the boundaries for the beam. As for the case of a uniform flow shown earlier, a random noise of order $O(10^{-3})$ amplitude is applied on the fluid variable q as initial conditions. The first time derivative of the fluid variable is set to zero at $t = 0$. Zero displacement and velocity are posed for the cable at $t = 0$. As in Lucor et al. [12], the maximum flow velocity is used as reference. The r.m.s. value of the transverse displacement obtained as a function of z is shown in Fig. 5a and b for the DNS and the wake oscillator model, respectively.

It can be concluded by comparing Fig. 5a and b that the DNS and the wake oscillator predictions display good similitude. The wake oscillator is able to model the pseudo standing waves near the beam's end predicted by the DNS model. Away from the beam ends, the DNS predicts that the travelling waves dominate the beam response. This is also predicted by the wake oscillator model.

Table 1
Simulation parameters used in the wake oscillator model

	Case I	Case II	Case III	Case IV
St	0.16	0.16	0.2	0.2
A	8π	100	2028	781
μ	1.785	1.785	2.785	1.75
c	4	3	23.6	33.1–47.1
b	0	0	303	0

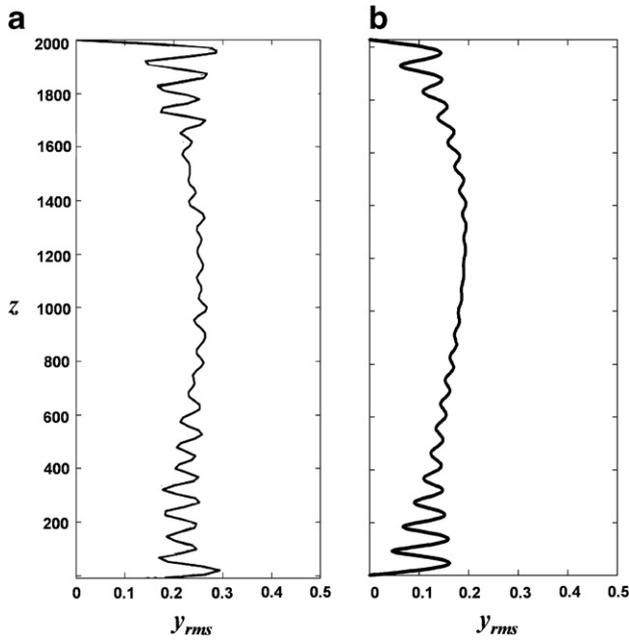


Fig. 5. Finite tensioned beam under linearly sheared flow, Case III. r.m.s. value of the displacement along the beam: (a) DNS [12] and (b) wake oscillator model.

4. Comparison with experimental results

The ability of the wake oscillator to reproduce some predictions from DNS models has been addressed in the previous section. Here, the focus is on evaluating the capa-

bility of the same model to predict some experimentally observed results on slender structures. Vandiver et al. [20] presented a summary of a large experimental campaign, where cables were tested in linearly sheared flow conditions. Fig. 6 shows a simplified illustration of their experimental setup.

As seen in Fig. 6, the cable experiences a linearly sheared flow on part of its span. The other part is in stagnant water. They studied the effect of two parameters on the cable vibration response. The first one is the shear of the flow, $\beta = \Delta U / U_{ref}$, and the second one is the number of the cable vibration modes that are in the range of vortex-induced excitation. These modes are such that their frequency f falls

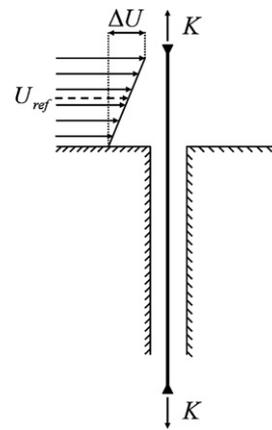


Fig. 6. Experimental configuration of tensioned cable under shear flow, Case IV [20].

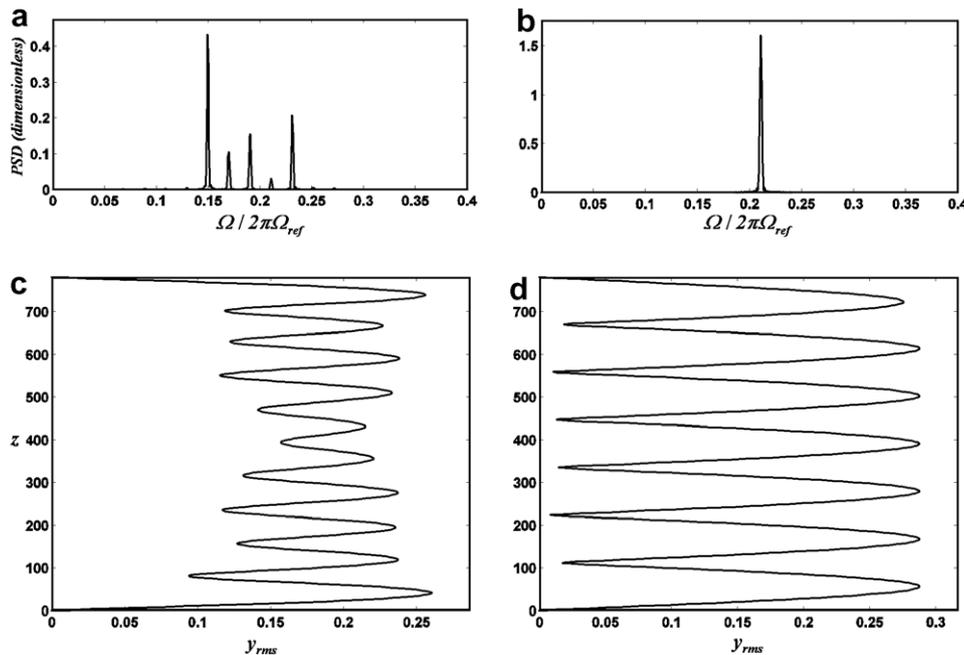


Fig. 7. Effect of the flow shear parameter β on the number of modes contributing to the response of the cable, Case IV. Low shear, $\beta = 1.2$, shows multimodal response. High shear, $\beta = 1.8$, shows single-mode response. (a), (b) PSD of cable displacement for $\beta = 1.2$ and $\beta = 1.8$ respectively; (c), (d) r.m.s. value for $\beta = 1.2$ and $\beta = 1.8$ respectively.

in the range of shedding frequencies corresponding to the range of flow velocity, i.e.

$$\frac{St}{D} \left(U_{\text{ref}} - \frac{\Delta U}{2} \right) < f < \frac{St}{D} \left(U_{\text{ref}} + \frac{\Delta U}{2} \right). \quad (7)$$

Vandiver et al. [20] observed multimodal cable response for low shear value, but when increasing the shear over a threshold value, while keeping the number of excited modes constant, the cable response became dominated by one mode (Fig. 3 in [20]).

The same configuration is computed with the wake oscillator model to reproduce the aforementioned experimental result. Two test cases reported here are referred to Case IV. The parameters used for both simulations appear in Table 1. The shear values β used for the first and second test case are 1.2 and 1.8, respectively. For both cases, the number of excited cable modes is 10, which requires to adapt the dimensionless tension c (see Table 1). As in the previous section, a random noise of order $O(10^{-3})$ of amplitude was applied as initial condition to the fluid variable q . Cable extremities are fixed. The numerical integrations are carried out for several hundreds vibration cycles in order to achieve acceptable frequency resolution for spectral analysis. Fig. 7a and b shows the dimensionless power spectrum density (PSD) of the cable response at an arbitrary point for both numerical integrations ($z = 680$). A single dominant peak appears for the integration done with the shear value of 1.8 (Fig. 7b). This means that the response is then dominated by a single frequency as the cable response is thus characterised by a single vibration mode. For the simulation done with a shear value of 1.2 (Fig. 7a), there are multiple peaks in the PSD meaning a multimode response. Fig. 7c and d shows the displacement profile along the cable span for the two cases. In Fig. 7c, several modes contribute to the response, while Fig. 7d shows a single mode response. The transition from multimode to single-mode response was found by Vandiver et al. [20] near $\beta = 1.6$ (see Fig. 3 in [20]). From the results shown in Fig. 7, it can be concluded that the wake oscillator model reproduces in a qualitative manner the transition of the cable dynamic behavior observed experimentally by Vandiver et al. [20].

5. Concluding remarks

In the comparison presented above, it was shown that some of the important features of the dynamics of long cylinders undergoing VIV can be modeled using a simple wake oscillator approach. These features are essentially the standing or propagative nature of waves (Case I–III), and the modal content of the response (Case IV). These three dimensional characteristics have been recovered using only a phenomenological model based on two dimensional modelisation of VIV. No additional term has been used in the model for the wake dynamics and the coupling with the structure. Because of the simplicity of the model, all the results presented in this paper required a small computa-

tional time: typically, a few minutes to an hour of CPU on a PC. As of today, this is one of the main advantages of the phenomenological approach over the DNS computations. This would allow undertaking large parametrical studies of VIV of long systems which are needed for practical applications.

In terms of applications to cases of higher Reynolds numbers, it is only needed in this phenomenological approach to incorporate the dependence of the coefficients on Reynolds number. Most of these are known from two dimensional experimental results. In fact, this is another advantage of this approach as state of the art knowledge on wake dynamics and VIV can be incorporated in the model. Computation costs are thus independent of Reynolds number here. However, by nature, this method cannot provide refined results on the wake structure such as those obtained by DNS in [15].

In all presented cases as well as in recently published results cited in this paper, it appears that the dynamics of long slender system undergoing VIV is quite complex. To illustrate this, it was found that different initial conditions sometimes lead to distinct steady state behaviors as could be expected in a strongly non-linear autonomous system. Thus, a statistical assessment of the effect of initial conditions and even of all parameters would be useful. This is in the range of feasibility with the wake oscillator model.

An important issue is also the range of applicability of this kind of model. By nature, all empirical (or phenomenological) models make use of experimental data from simple experiments to predict more complex cases. In VIV, this is the case of most approaches, as the direct computation of the flow (DNS) is still impossible in engineering practice. Systematic validation, as presented here, and the search for a physical understanding of the elementary mechanisms that take place in VIV and VIW is of the utmost importance to assess the range of applicability. Note that the discretization errors are certainly far smaller than all uncertainties pertaining to the physical mechanisms involved.

Finally, it is hoped that some of the essential features of three dimensional dynamics of these VIV and VIW can be understood using an energy balance or even linear stability analysis with our model. This is under current investigation; see for instance [11].

Acknowledgements

We would like to thank Matteo Facchinetti and Lionel Mathelin for fruitful discussions and Didier Lucor for making available to us results before publication.

References

- [1] Bearman PW, Chaplin JR, Fontaine E, Graham JMR, Herfjord K, Lima A, Meneghini JR, Schulz KW, Willden RHJ. Comparison of CFD predictions of multi-mode vortex-induced vibrations of a tension riser with laboratory measurements. In: Paidoussis MP, editor. Proceedings of the 6th international symposium on FSI, AE and FIV: ASME PVP Division Summer Meeting, Vancouver; 2006.

- [2] Birkoff G, Zarantanello EH. Jets, wakes and cavities. New York: Academic Press; 1957.
- [3] Bishop RED, Hassan AY. The lift and the drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid. Proc Roy Soc London – Series A 1964;277:51–75.
- [4] Blevins RD. Flow-induced vibration. New York: Van Nostrand Reinhold; 1990.
- [5] Chaplin JR, Bearman PW, Cheng Y, Fontaine E, Graham JMR, Herfjord K, et al. Blind predictions of laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a tension riser. J Fluids Struct 2005;21: 25–40.
- [6] Facchinetti ML, de Langre E, Biolley F. Vortex shedding modeling using diffusive van der Pol oscillators. C.R. Mécanique 2002;330: 451–6.
- [7] Facchinetti ML, de Langre E, Biolley F. Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. J Fluids Struct 2004;19: 123–40.
- [8] Facchinetti ML, de Langre E, Biolley F. Vortex-induced travelling waves along a cable. Eur J Mech B/Fluids 2004;23:199–208.
- [9] Gabbai RD, Benaroya H. An overview of modeling and experiments of vortex-induced vibration of circular cylinders. J Sound Vib 2005;282:575–616.
- [10] Hartlen RT, Currie IG. Lift-oscillator model for vortex-induced vibrations. J Eng Mech Div EM5 1970:577–91.
- [11] de Langre E. Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter. J Fluids Struct 2006;22:783–91.
- [12] Lucor D, Mukundan H, Triantafyllou MS. Riser modal identification in CFD and full-scale experiment. J Fluids Struct 2006;22:905–17.
- [13] Marcollo H, Hindwood JB. On shear flow single mode lock-in with both cross-flow and in-line mechanisms. J Fluids Struct 2006;22: 197–211.
- [14] Mathelin L, de Langre E. Vortex-induced vibrations and waves under shear flow with a wake oscillator model. Eur J Mech B/Fluids 2005;24:478–90.
- [15] Newman DJ, Karniadakis GE. A direct numerical simulation study of flow past a freely vibrating cable. J Fluid Mech 1997;344:95–136.
- [16] Norberg C. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. J Fluids Struct 2002;17:56–96.
- [17] Riley KF, Hobson MP, Bence SJ. Mathematical methods for physics and engineering. Cambridge: Cambridge university press; 1998.
- [18] Sarpkaya T. A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations. J Fluids Struct 2004;19:389–447.
- [19] Vandiver JK. Dimensionless parameters important to the prediction of vortex-induced vibration of long, flexible cylinders in ocean currents. J Fluids Struct 1993;7:423–55.
- [20] Vandiver JK, Allen D, Li L. The occurrence of lock-in under highly sheared conditions. J Fluids Struct 1996;10:555–61.
- [21] Williamson CHK, Govardhan R. Vortex-induced vibrations. Annu Rev Fluid Mech 2004;413–55.

LINEAR STABILITY APPROACH TO EXPLAIN LOCK-IN TRANSITION AND TIME SHARING IN VORTEX-INDUCED VIBRATIONS OF SLENDER STRUCTURES

Rémi Violette
IFP/LadHyX

Julien Szydlowski *

Emmanuel de Langre

Direction de mécanique appliquée
Institut Français du Pétrole
Rueil Malmaison, 92852, France
Julien.SZYDLOWSKI@ifp.fr

Département de mécanique
LadHyX, CNRS - Ecole Polytechnique
Palaiseau, 91128, France

ABSTRACT

In this paper, we use a linearized version of a wake oscillator model in order to understand VIV of flexible structures. By a simple analytical development on the stability of an infinite cable/wake system, we demonstrate the existence a temporal instability. The theoretical study is pushed further to finite structure, a tensioned cable, for which modes frequency, amplitude growth rate in time and velocity range of instability are easily derived. The developed concepts are used to explain experimentally observed behaviours of a low flexural rigidity tensioned beam undergoing VIV.

NOMENCLATURE

Dimensional

C, D, F_Y Phase velocity (m/s), diameter (m), fluid force (N/m)
 T, U Time (s), flow velocity (m/s)
 V_Y Structure displacement eigenvector (m)
 Y, Z Structure displacement (m), spanwise position (m)
 f, m_s, r_s Movement frequency (Hz), structure linear density (kg/m), structure damping (N s/m²)
 ρ, Θ Fluid density (kg/m³), tension (N)

Dimensionless

A, M Structure/wake coupling parameters
 V_Q Wake eigenvector

C_{L_0} Fluctuating lift coefficient for a fixed cylinder
 C_D Mean sectional drag coefficient
 C_{M_0} Potential added mass coefficient in still fluid
 S_T Strouhal number
 k, n Wave number, mode number
 t, u Time, reduced velocity
 y, z Structure displacement, spanwise position
 \hat{q}, \hat{y} Wake variable amplitude, structure movement amplitude,
 σ, γ, μ Structure damping coefficient, stall parameter, mass number
 $\Lambda, \omega, \varepsilon$ Structure aspect ratio, complex frequency, phenomenological parameter

INTRODUCTION

Vortex-induced vibration (VIV) of risers is a subject of high concern as drilling and production operations move into ever deeper waters. When lock-in occurs, i.e. when the frequency of the vortex shedding synchronizes with the structure vibration frequency, the amplitude of movement is of the order of the diameter of the bluff body, leading to fatigue damage. For flexible structures, fatigue damage goes with frequency and bending stress, the later being related to the vibration wave length or vibration mode. It is thus important to predict which mode of vibration will lock-in with the wake. Despite the fact that a large body of literature is available on the understanding and the prediction of lock-in range for single degree of freedom rigid structures, the behaviour of slender structures under uniform current

*Address all correspondence to this author.

is yet not fully understood.

In a recent paper, de Langre [1] showed that the lock-in mechanism can be interpreted as a linear instability caused by the merging of the two eigenfrequencies of a dynamic system that includes two coupled oscillators, namely the wake and the structure. This instability is also referred to as coupled mode flutter [2]. His study was performed using a linearised version of the wake oscillator model described in [3]. Following the work of de Langre, a simple theory based on a linear stability analysis is used here to explain some aspects of VIV of flexible structures subjected to uniform flows such as individual mode lock-in range definition and the occurrence of “mode switching” as defined by Chaplin *et al.* in [4]. The terminology “time sharing” is also used for this phenomenon, [5].

This paper is separated in three parts. First the linear wake oscillator model is explained for a tension cable. Second, the instability mechanism and its characteristics are studied. Third, comparisons are made between results of the linear model and experimental results by Chaplin *et al.* [4].

MODEL DESCRIPTION

A linear version of the wake oscillator model for a tension cable described in [6] is used here. Considering only the cross flow displacement of the cable, $Y(Z, T)$, the dynamic equation can be written as

$$m_s \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + r_s \frac{\partial Y}{\partial T} - \Theta \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} = F_Y, \quad (1)$$

with

$$F_Y = \frac{1}{4} \rho U^2 D C_{L_0} q - \frac{\pi}{4} \rho D^2 C_{M_0} \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} - \frac{1}{2} \rho D C_D U \frac{\partial Y}{\partial T}. \quad (2)$$

In the equation above, C_{L_0} is the fluctuating lift coefficient for a fixed rigid cylinder, C_D is the mean sectional drag coefficient, $C_{M_0} = 1$ is the potential added mass coefficient in still fluid, ρ is the fluid density, U is the flow velocity, D the structure diameter, Θ the tension, r_s the structural damping and m_s the linear density of the cable. Following [7], the dynamic of the local fluctuating lift coefficient, $q(Z, T)$, is modelled using the distributed wake oscillator

$$\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} - \varepsilon \left(2\pi S_T \frac{U}{D} \right) \frac{\partial q}{\partial T} + \left(2\pi S_T \frac{U}{D} \right)^2 q = A \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2}, \quad (3)$$

where S_T is the Strouhal number and $A = 12$ and $\varepsilon = 0.3$ are empirical constant (see [3]).

The system studied composed by the Eqs. (1) and (3) is studied here considering the wake and the structure as a unique

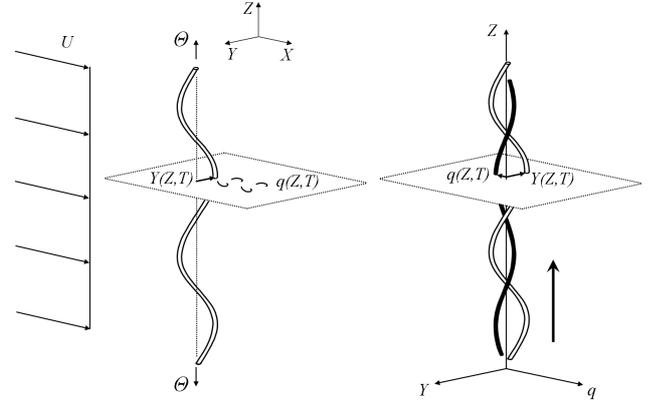


Figure 1 It is proposed here to consider the wake and the structure as one unique medium (right figure) representing two distinct elements interacting (left figure).

medium in which vibration waves travel. Those waves have two components, the cable displacement $Y(Z, T)$ and the fluctuating lift $Y(Z, T)$. Figure 1 illustrates this concept.

Using the cable diameter D and its undamped phase velocity C defined as

$$C = \sqrt{\frac{\Theta}{m_s + \frac{\pi}{4} \rho D^2}}, \quad (4)$$

for reference length and time, one can write the dimensionless equations of the model

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\sigma + \frac{\gamma u}{\mu} \right) \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = M u^2 q, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \varepsilon u \frac{\partial q}{\partial t} + u^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (6)$$

with $z = Z/D$, $y = Y/D$ and $t = (C/D)T$. The new parameters in the above equations read

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(\frac{D}{m_s C} \right) r_s, & u &= 2\pi S_T \frac{U}{C} \\ \gamma &= \frac{C_D}{4\pi S_T}, & M &= \frac{C_{L_0}}{16\pi^2 S_T^2 \mu}. \end{aligned} \quad (7)$$

As shown by Facchinetti *et al.* in [3], the coefficient M is a mass number that scales the effect of the wake on the structure, and γ is the stall parameter. The dimensionless velocity u is referred to here as the reduced velocity.

In order to derive simple analytical solutions for the cable/wake system, the damping terms in Eqs. (5) and (6) are disregarded. Note that de Langre in [1] has shown that the damping terms do not change the instability mechanism in the case of an elastically supported rigid cylinder. The simplified system therefore reads

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = Mu^2 q, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + u^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (9)$$

1 LINEAR STABILITY APPROACH

1.1 Instability mechanism

Solutions in the form of propagating waves are searched here

$$\begin{bmatrix} y(z, t) \\ q(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{q} \end{bmatrix} e^{i(\omega t + kz)}, \quad (10)$$

where ω is the frequency, k the wave number and \hat{y} and \hat{q} the complex amplitude of the structural and the wake part of waves respectively. Inserting this form of solution into Eqs. (8) and (9), one finds the dispersion relation of the cable/wake medium

$$\mathcal{D}(\omega, k; u) = \omega^4 + [(AM - 1)u^2 - k^2]\omega^2 + k^2 u^2 = 0. \quad (11)$$

It should be noted that the dispersion relation combines the coupling terms A and M into a single parameter, AM . Using Eq.(11), we can study the stability of the cable/wake system. Writing ω as a function of k and u , one obtains

$$\omega(k, u) = \pm \frac{1}{2} \left[\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4k^2 u^2} \right]^{1/2}, \quad (12)$$

with $\alpha = k^2 + (1 - AM)u^2$. Equation (12) shows that there are four frequencies for each reduced velocity. They come by pairs of opposite signs meaning that the waves with the same frequency propagate in opposite directions. Moreover, one can remark that ω is complex when

$$-2ku < \alpha < 2ku \quad (13)$$

Using this inequality we can define for a fixed wave number the range of reduced velocities for which we have a complex frequency

$$\frac{k}{1 + \sqrt{AM}} < u < \frac{k}{1 - \sqrt{AM}}. \quad (14)$$

In this range of u , the real and imaginary parts of the dimensionless frequency are

$$\text{Re}[\omega] = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + 2uk + (1 - AM)u^2}, \quad (15)$$

$$\text{Im}[\omega] = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-k^2 + 2uk + (AM - 1)u^2}. \quad (16)$$

Figure 2 shows the typical evolution of ω with u for a given wave number k . At low and high reduced velocity, two neutral waves exist. The two waves have their frequency merging for a certain range of u leading to complex conjugates ω . In this range, the system is characterised by an unstable wave (growing in amplitude with time) and a damped wave (decreasing in amplitude with time). A temporal instability has thus been identified for the cable/wake system. This instability is in time and is coming from the confusion of the frequency of two propagating waves. Equation (14) defines the reduced velocity range for which this instability occurs (for a given wave number) and Eqs. (15) and (16) give the complex frequency ($\text{Re}[\omega]$) and the growth rate ($-\text{Im}[\omega]$).

1.2 Mode instability range

A finite tensioned cable of aspect ratio $\Lambda = L/D$ and exposed to a uniform flow is now considered, Figure 3. The extremities of this cable are fixed, so that the boundary conditions for the structure are

$$y(0, t) = 0, \quad y(\Lambda, t) = 0. \quad (17)$$

No condition for the wake variable is necessary since there is no spanwise interaction for q . Solutions with real wave numbers are still searched for here. Considering the end conditions from Eq. (17), the allowable wave numbers are

$$k_n = \frac{\pi}{\Lambda} n, \quad (18)$$

with $n = 1, 2, 3, \dots$. The terminology of mode number is applicable here to the parameter n . The interest now is to characterise the stability of the system in the range of reduced velocities where Mode n is unstable. Rewriting Eq. (14), Mode n is unstable for reduced velocities u that satisfy

$$\left(\frac{\pi}{\Lambda} \right) \frac{n}{1 + \sqrt{AM}} < u < \left(\frac{\pi}{\Lambda} \right) \frac{n}{1 - \sqrt{AM}}. \quad (19)$$

In this range of reduced velocities, the real and imaginary parts of the dimensionless frequency (from Eqs. 15 and 16) are

$$\text{Re}[\omega] = \left(\frac{\pi}{2\Lambda} \right) \sqrt{n^2 + 2n\beta + (1 - AM)\beta^2}, \quad (20)$$

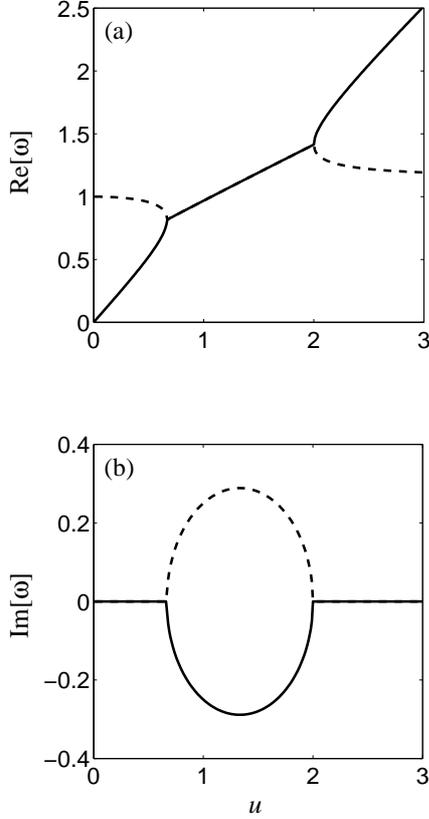


Figure 2 Complex frequency ω evolution with u for $k=1$ and $AM=0.25$: (a) $\text{Re}[\omega]$, (b) $\text{Im}[\omega]$.

$$\text{Im}[\omega] = -\left(\frac{\pi}{2\Lambda}\right) \sqrt{-n^2 + 2n\beta + (AM-1)\beta^2}, \quad (21)$$

with $\beta = (\Lambda/\pi)u$. Figure 4 shows the real and imaginary part of ω for Mode 2 and 3 and for two values of AM . One can see that the evolution of $\text{Re}[\omega]$ of each mode is close to linear. Also, the real part of the frequency is discontinuous from one mode to the other giving a stairs like form of evolution with the reduced frequency. This type of vibration frequency evolution with flow velocity is reported in [8] for a tensioned cable and in [4] for a low flexural rigidity tensioned beam. As seen in Fig. 4 (b and d), the modes growth rate curves ($-\text{Im}[\omega]$) go through a maximum value in the middle of the range of reduced velocities defined by Eq. (14)

$$u_{max} = \left(\frac{\pi}{\Lambda}\right) \left(\frac{n}{1-AM}\right), \quad (22)$$

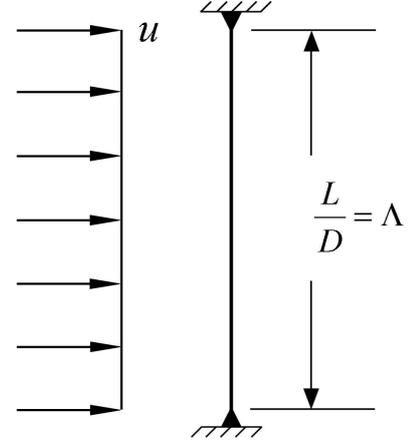


Figure 3 Tensioned cable under uniform flow. Extremities are fixed.

where the corresponding growth rate is

$$-\text{Im}[\omega_{max}] = \left(\frac{\pi}{2\Lambda}\right) n \sqrt{\frac{AM}{1-AM}}. \quad (23)$$

The maximum growth rate, and thus the fastest pace at which a given mode amplitude will grow in time, increases with n and AM . Finally, one can also note that the ranges of unstable reduced velocities of different modes can overlap. This important result means that for one reduced velocity, more than one mode can be unstable.

COMPARISONS WITH EXPERIMENTAL RESULTS

Lock-in mode transition

In the previous section, it has been shown that for a finite cable in uniform flow, there are possible overlaps of unstable reduced velocities ranges of two (or more) adjacent modes. One can make the assumption that the most unstable one would be seen in practice since its amplitude grows faster in time. This assumption is validated here by comparison between results from the linear theory and experiments by Chaplin *et al.* in [4].

A sketch of their experiment setup is shown on Figure 5. It consists of a tensioned beam of low flexural rigidity subjected to a uniform flow on nearly half of its length, the other part being in stagnant water. Table 1 shows the mechanical characteristics of the structure. The tension specified is the one measured at the top of the structure. The Reynolds number of the test ranged from 2500 to 25000. The flow is generated by carrying the assembly in the stagnant water of a flume. The structure is thus mounted on a cabin moving on rails.

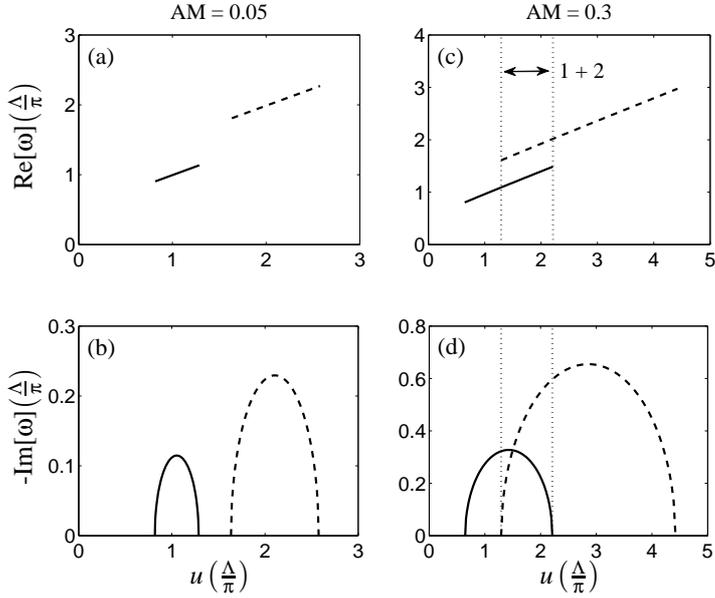


Figure 4 Dimensionless frequency for Mode 1 (solid line) and 2 (dashed line) for a tensioned cable with fixed extremities at $AM = 0.05$: real part (a) and imaginary part (b), and at $AM = 0.3$: real part (c) and imaginary part (d). Dotted lines indicate the limits of the region where the two modes are unstable.

Properties	Value	Properties	Values
L (m)	13.12	Θ (N)	1925
D (m)	0.028	EI (Nm ²)	29.1
m_s (kg/m)	1.8	$\partial\Theta/\partial Z$	12.1

Table 1 Mechanical properties of the structure in [4].

In [4], the authors describe the response of the structure by

$$Y(Z, T) = \sum_n Y_n(T) \sin\left(\frac{n\pi Z}{L}\right) \quad (24)$$

where n is the mode number and $Y_n(T)$ is the modal weight computed from the experiment. Figure 6 (a) shows the dominant mode at five different velocities. One can note that the low velocities are dominated by Mode 2 while the highest by Mode 3.

The structure is modeled here using the equation of an Euler

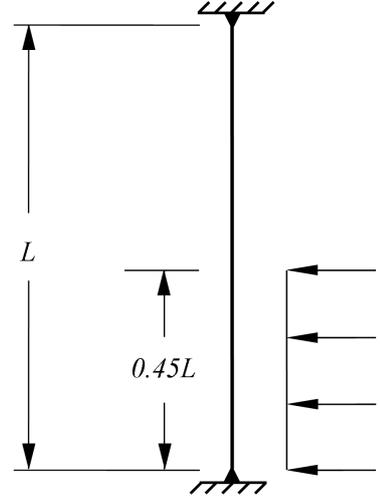


Figure 5 Schematic of the experimental setup used by Chaplin *et al.* in [4].

beam with variable tension

$$m_s \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} - \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Theta \frac{\partial Y}{\partial Z} \right) + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial Z^4} = F_Y. \quad (25)$$

The expression of the fluid force F_Y is recalled here

$$F_Y = \frac{1}{4} \rho U^2 D C_{L_0} q - \frac{\pi}{4} \rho D^2 C_{M_0} \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} - \frac{1}{2} \rho D C_D U \frac{\partial Y}{\partial T},$$

with the wake variable q dynamics still being defined by Eq. (3). A numerical modal analysis is used to study the linear system defined by Eqs. (2), (3) and (25). In order to do so, the derivatives with regards to the spanwise coordinate Z are approximated using the centered finite difference method of order 2. The structure/wake medium is thus discretised in a number of coupled oscillators. The dynamic system obtained is written

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_S & \mathcal{M}_{FS} \\ \mathcal{M}_{SF} & \mathcal{M}_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathcal{Y}} \\ \ddot{\mathcal{Q}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{R}_S & \mathcal{R}_{FS} \\ \mathcal{R}_{SF} & \mathcal{R}_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{Y}} \\ \dot{\mathcal{Q}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{K}_S & \mathcal{K}_{FS} \\ \mathcal{K}_{SF} & \mathcal{K}_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{Q} \end{pmatrix} = 0 \quad (26)$$

where $\mathcal{Y} = [Y_1(T) \dots Y_j(T)]^T$ and $\mathcal{Q} = [q_1(T) \dots q_r(T)]^T$, r being the number of discretisation points in the flow zone.

The form of solutions search for reads

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_Y \\ V_Q \end{pmatrix} e^{i\omega T}, \quad (27)$$

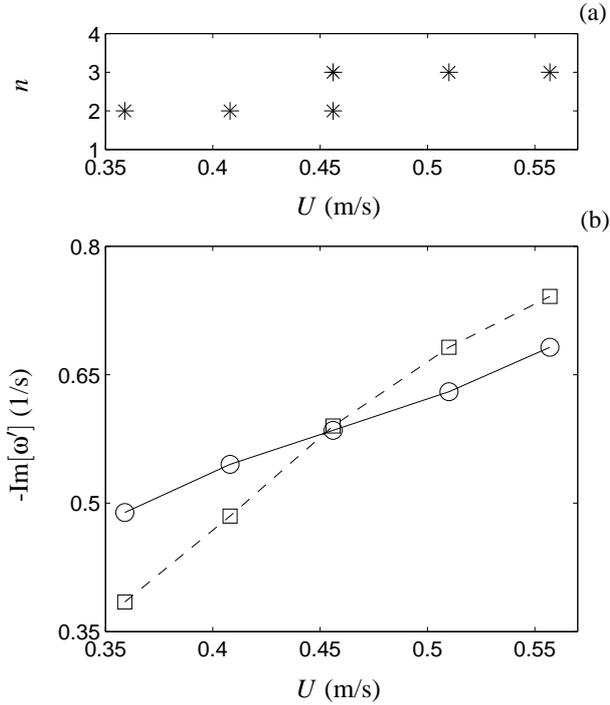


Figure 6 Comparison between experiments and linear theory for dominant mode: (a) experimental results reported by Chaplin *et al.* in [4], (b) growth rates of Mode 2 (circles) and Mode 3 (squares).

where ω' is the dimensional frequency and V_Y and V_Q are the eigenvectors of the structure displacement and the wake variable respectively. Boundary conditions imposed are

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2}(0, T) &= \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2}(L, T) = 0, \\ Y(0, T) &= Y(L, T) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Since no analytical development is done here, the damping terms are kept. For the range of Reynolds number considered, $C_{L0} = 0.2$, [9]. Also, a C_D of 2 and S_T of 0.17 are used following measurements of those quantities by Chaplin *et al.* in [4].

The numerical modal calculation gives complex eigenvectors V_Y and V_Q , meaning modes in form of a travelling wave. For the flow velocities discussed above, Figure 7 shows V_Y of the two most unstable modes. The shapes are similar to those defined by Eq. (24) for $n = 2$ and $n = 3$. The dimensional growth rates predicted by the linear model for Mode 2 and 3 are shown on Fig. 6 (b). One can observe that linear Mode 2 has the highest growth rate for the lowest velocities. For $U = 0.46\text{m/s}$, the growth rates of both modes are equal and Mode 3 has the highest growth rate for the last two velocities. As seen on Fig. 6, this mode transition

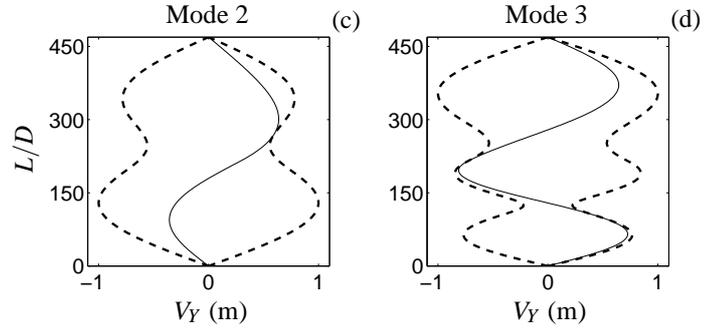


Figure 7 Linear model prediction for the spatial shape of Mode 2 and 3 for the structure, $|V_Y|$ (dashed line) and $\text{Re}[V_Y]$ (solid line)

compares well with the experimental measurements. The situation at $U = 0.46\text{m/s}$ represents, as reported in [4], a particular case where the modal weights exhibit considerable modulations in time. This phenomenon is studied in the next section.

Time sharing

Chaplin *et al.* in [4] detail cases of what they refer to as “mode switching”. They report that this mode switching was triggered by disturbances like vibrations in the carriage system due to irregularities in the rails. Figure 8 shows an example of this phenomenon. From this figure, it is clear that two regimes dominate the system response at different time. The first regime of the response (called here Regime A) is dominated by Mode 8. The second regime (called here Regime B) is a mixture of Modes 6 and 7. Note that Mode 4 and 5 participate also to the response. They are not shown here for the sake of clarity. The temporal response of the structure is shown for both regimes on Figure 9. This figure shows as well the displacement of the structure at a given time.

For this configuration, the linear modal calculation predicts two modes with equal growth rates that are associated here to Regime A and Regime B respectively. The shape of those linear modes is compared to the response of the structure on Fig. 9. One can see that the predicted wave length for both modes is close to the ones obtained experimentally. The evolution of the pseudo frequency with time (obtained by wavelets analysis of the modal weights) is shown on Fig. 8 (d) for Modes 6 and 7 and (e) for Mode 8. The pseudo frequency evolution is obtained by taking the frequency with maximum coefficient over one period of motion. This pseudo frequency is then averaged on ten periods of vibration. From this figure, it is clear that two frequencies dominate the structure response at different time. The two frequencies “share” the time of the response, owing the name “time sharing” here and in [5]. Note that this phenomenon occurs also in the case of non uniform flows as experimentally demonstrated

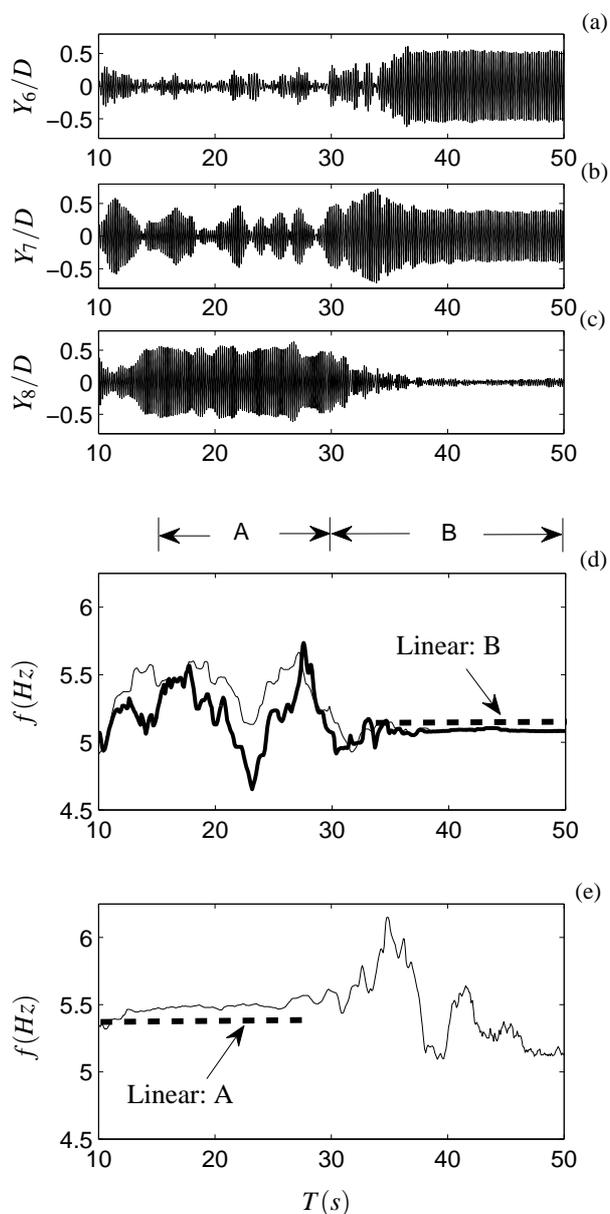


Figure 8 (a)-(c) Time evolution of the modal weight of Mode 6 to 8, (d) pseudo frequency evolution with time of Mode 7 (thin line) and Mode 6 (solid line), (e) pseudo frequency evolution with time for modal weight of Mode 8. On (d) and (e), the linear theory prediction for frequencies is shown with dashed lines. Experiments by Chaplin *et al.* [4]. Top tension is $\Theta = 1073$ N and flow velocity is $U = 0.9$ m/s.

in [5].

Results presented here indicate that time sharing is a consequence to the fact that two (or more) modes are equally unstable, and thus growing in time at the same pace making the system

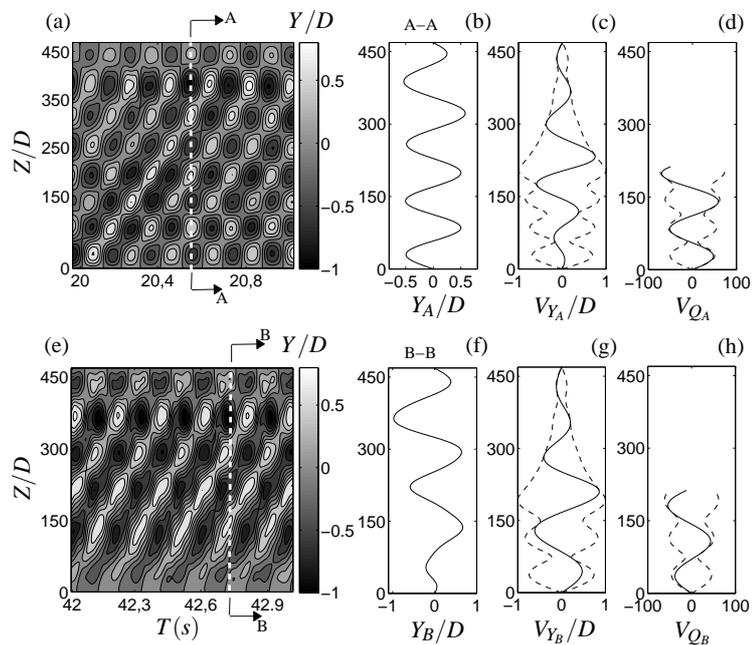


Figure 9 Regime A (first line): (a) Evolution with time and space of structure displacement in experiment, (b) instantaneous displacement of the structure, (c) linear theory prediction of the modal shape for the structure, (d) linear theory prediction of the modal shape for the wake. Second line: idem for Regime B. Experiments by Chaplin *et al.* [4].

sensible to perturbations, vibrations in the experimental apparatus in this case. The effect of vibration perturbations on lock-in is discussed in [10].

CONCLUSION

In this paper, a linearized version of the wake oscillator model developed by Facchinetti *et al.* in [6] was used to understand VIV of long flexible structures. After a description of this linear model, a simple analytical development on the stability of the cable/wake system has shown that a temporal instability occurs for a given wave number over a range of reduced velocities. This instability comes from the merging of the frequencies of two different waves propagating in the system. This concept was then applied to a finite cable/wake medium for which the instability range, the frequencies and the growth rates of the different modes was found. It was also noted that more than one mode could be unstable at a given reduced velocity. The assumption was thus made that the most unstable mode would be the one observed in the non linear steady state response of the system. This assumption was then validated against experimental results by Chaplin *et al.* in [4] on a tensioned beam of low flexural rigidity. Using a numerical modal calculation, it was found that the lin-

ear model predicted the transition from one mode lock-in range to another. Thus, the linear growth rates of the different mode can be related to the steady state response of the structure undergoing VIV. Also, it was found that “time sharing”, or “mode switching” is symptomatic to the fact that two or more modes have very similar growth rates.

ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to express their gratitude to Prof. J.R. Chaplin for providing the data from experiments.

REFERENCES

- [1] de Langre, E., 2006. “Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter”. *Journal of Fluids and Structures*, **22**(6-7), Oct., pp. 783–791.
- [2] Blevins, R., 1990. *Flow-Induced Vibration*. Van Nostrand Reinhold, New York.
- [3] Facchinetti, M., de Langre, E., and Biolley, F., 2004. “Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations”. *Journal of Fluids And Structures*, **19**(2), Feb., pp. 123–140.
- [4] Chaplin, J., Bearman, P., Huarte, F. H., and Pattenden, R., 2005. “Laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a vertical tension riser in a stepped current”. *Journal of Fluids and Structures*, **21**(1), Nov., pp. 3–24.
- [5] Swithenbank, S., 2007. “Dynamics of long flexible cylinders at high-mode number in uniform and sheared flows”. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [6] Facchinetti, M., de Langre, E., and Biolley, F., 2004. “Vortex-induced travelling waves along a cable”. *European Journal of Mechanics B-Fluids*, **23**(1), Feb., pp. 199–208.
- [7] Mathelin, L., and de Langre, E., 2005. “Vortex-induced vibrations and waves under shear flow with a wake oscillator model”. *European Journal of Mechanics B-Fluids*, **24**(4), Aug., pp. 478–490.
- [8] King, R., 1995. “An investigation of vortex induced vibrations of sub-sea communications cables”. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Flow Induced Vibration*, Bearman P.W., pp. 443–454.
- [9] Norberg, C., 2003. “Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements”. *Journal of Fluids and Structures*, **17**(1), pp. 57–96.
- [10] Vandiver, J., 1993. “Dimensionless parameters important to the prediction of vortex-induced vibration of long, flexible cylinders in ocean currents”. *Journal of Fluids and Structures*, **7**(5), July, pp. 423–455.

LINEAR STABILITY APPROACH TO PREDICT LOCK-IN AND TIME SHARING IN VORTEX-INDUCED VIBRATIONS

Rémi Violette

Département de Mécanique, LadHyX, CNRS – Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

Institut Français du Pétrole, 1-4 av de Bois Préau, 92852 Rueil-Malmaison, France

Emmanuel de Langre

Département de Mécanique, LadHyX, CNRS – Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

Julien Szydlowski

Institut Français du Pétrole, 1-4 av de Bois Préau, 92852 Rueil-Malmaison, France

ABSTRACT

In evaluating the service life of marine structures such as risers, one must assess their dynamic response to vortices excitation (vortex-induced vibrations or VIV). At lock-in, i.e. when the frequency of the shedding of vortices synchronizes with the natural frequency of the structure, the amplitude of vibration of the structure is of the order of its diameter. Sustained vibration of this amplitude causes material fatigue which leads with time to failures. Predicting the flow velocity range for which lock-in occurs is thus of importance. It is also important in cases of flexible structures to predict which mode of vibration will lock-in with the wake. The interest here is in predicting lock-in for rigid and flexible structures like tensioned beams using a linear wake oscillator model: here, lock-in is interpreted as a linear instability caused by the merging of the two natural frequencies of a dynamic system that includes two coupled oscillators, namely the wake and the structure. This instability is also referred as couple mode flutter. It is found that the linear wake oscillator model predicts lock-in range for both elastically supported rigid cylinder and for flexible structures subjected to uniform flows. In particular, the linear approach is able to predict transition from one lock-in mode to another for flexible structures (mode-switching). It is also capable of predicting when more than one mode can lock-in with the wake for a fixed velocity (time sharing).

1. INTRODUCTION

The wake behind a fixed cylinder in a uniform cross flow is unstable past a certain critical Reynolds number. This instability takes the form of

periodic shedding of vortices that are convected away from the bluff body. The frequency of vortex shedding f_f follows the Strouhal law which states that the shedding frequency is proportional to the ratio of the flow velocity over the diameter of the cylinder ($f_f = S_T U/D$ where S_T is the Strouhal number). This alternating vortex shedding produces periodic forces on the structure. The later, if flexible, undergoes what is commonly called vortex-induced vibration (VIV). The amplitude of vibration of the bluff body can attain important values (typically of the order of the diameter of its cross section) for flow velocity included in the lock-in range or region. This lock-in range is defined as the velocity range where the shedding frequency deviates from the Strouhal law and seems to “lock-in” with the structure natural frequency. The high amplitudes of vibrations reached by the structure in this region are a major concern in regards of fatigue life for offshore structures such as risers. This partly explains the large amount of literature on VIV (for comprehensive recent reviews see Williamson and Govardhan, 2004; Gabbai and Benaroya, 2005).

Here, the interested is in seeing if a stability analysis of a linearized wake-oscillator model can give insights on the physics related to lock-in for a rigid cylinders supported elastically and for flexible structures like tensioned beams. For this, a linearized version of Facchinetti’s wake oscillator model (Facchinetti et al., 2004a; Facchinetti et al., 2004b; Mathelin and de Langre, 2005) is used following de Langre (2006). This non-linear wake-oscillator model was recently validated for long structures in non-uniform flows against DNS computations and experimental results by Violette et al. (2007a). Comparisons showed good agreements with both the experimental results and

the DNS computations.

The first section of this paper explains the methodology used in the linear stability approach. In the second section, the reader can find details on the linear model predictions for lock-in range of a rigid cylinder subjected to a uniform flow. In the third section, the capability of the linear model to predict lock-in ranges of the different modes of a flexible structure is checked. Information on how this linear wake oscillator model can predict what will be called later “time sharing” is given in Section four.

2. METHODOLOGY FOR THE LINEAR STABILITY APPROACH

In a recent paper, de Langre (2006) proposed a linear version of the Facchinetti et al. (2004a) VIV prediction model for elastically supported rigid cylinders. The original non linear coupled cylinder/wake dynamic system is formulated in a dimensionless form as

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(2\xi + \frac{\gamma}{\mu} (S_r Ur) \right) \frac{\partial y}{\partial t} + y = M (S_r Ur)^2 q \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \varepsilon (S_r Ur) (q^2 - 1) \frac{\partial q}{\partial t} + (S_r Ur)^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

where y is the dimensionless cylinder displacement in the cross flow direction and the wake variable q is the fluctuating lift coefficient $q = 2C_L(t)/C_{L0}$ felt by the later. The term C_{L0} is the fluctuating lift coefficient for a fixed cylinder. The dimensional time and length are respectively $T = t/\Omega_s$ and $Y = yD$. The parameter Ω_s is the natural pulsation of the cylinder in stagnant water and D is its diameter. In (1) $Ur = 2\pi U/(\Omega_s D)$ is the reduced velocity, $\mu = (m_{cyl} + m_{fluid})/\rho D^2$ is the mass ratio (m_{cyl} being the linear mass of the cylinder, m_{fluid} the linear mass of the displaced fluid and ρ the fluid density) and $\gamma = C_D/(4\pi S_r)$ is the stall parameter (C_D being the mean sectional drag coefficient). The coupling parameter $M = C_{L0}/(16\pi^2 S_r^2 \mu)$ and the choice of $A=12$ and $\varepsilon=0.3$ are described in details in Facchinetti et al. (2004a). If the q^2 in Eq. (1) is neglected the equation becomes linear; a further simplification is to remove all linear damping terms in the system of equations (1). By modal analysis of this simplified coupled linear system, one can compute the natural frequency of the system and the growth rate as a function of the reduced velocity Ur . This is showed on Figure 1.

It can be seen that for low Ur , the system possess two natural frequencies, one for the solid mode and one for the wake mode. These two frequencies

coincide for a certain range of reduced velocities before diverging again at a high Ur . In the range of coinciding frequencies, there is a positive growth rate which means that the system is unstable. This instability is referred to as coupled-mode flutter instability. Also plotted on Figure 1 (left) is the frequency prediction of the non linear system (obtained by Fourier analysis of the cylinder displacement with time calculated by numerical time integration of Eq. 1). One can observe that the lock-in range and the linear instability range coincide very well. Lock-in can be interpreted as a coupled-mode flutter instability between two coupled linear oscillators (see also Tamura and Matsui, 1980).

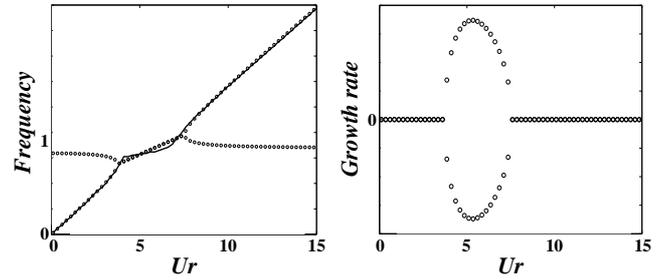


Figure 1: Linear prediction for oscillations frequency (left figure) and growth rate (right figure) as a function of the reduced velocity (dots). Also shown on the figure is the oscillations frequency computed with the non-linear model as a function of Ur (solid line).

3. LOCK-IN RANGE EVOLUTION WITH THE SCRUTON NUMBER.

Chen (1987) reports in his book experimental results on the lock-in range evolution with the structural parameters of an elastically supported rigid cylinder in uniform flow (namely its damping ξ linear mass m_{cyl}). This is shown in Figure 2a (lock-in range is referred as synchronization range in his book). It can be seen on this figure that beyond a certain Scruton number (around 32), there is no lock-in observed. The Scruton number is defined as

$$\delta = \frac{2\pi\xi m_{cyl}}{\rho D^2} \quad (2)$$

For the linear wake oscillator model, the growth rate evolution with the reduced velocity is plotted for the Scruton numbers of interest. The growth rate is calculated as in the previous section, i.e. without the damping terms. On the same figure, the

damping felt by the cylinder expressed as

$$\zeta(Ur) = 2\xi + \frac{\gamma}{\mu}(StUr), \quad (3)$$

is also plotted. The lock-in region is defined as the range of reduced velocities where the growth rate is above the damping value (shown on Figure 3). The limits of the lock-in region as a function of the Scruton number predicted by the linear wake oscillator model appear on Figure 2b for $St=0.18$, $C_{L0}=0.37$, $C_D=2$ and $\xi=0.002$ (Scruton number is varied by changing the linear mass of the cylinder m_{cyl}).

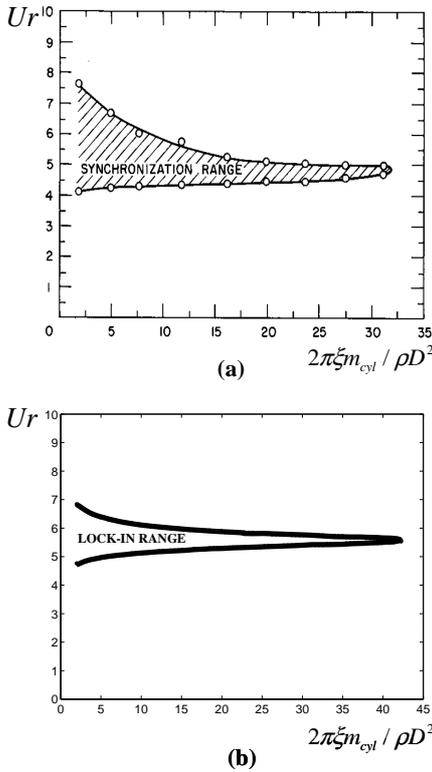


Figure 2: Evolution of the lock-in range for an elastically supported cylinder in uniform flow with the Scruton number: (a)Chen (1987), (b) linear wake oscillator model prediction.

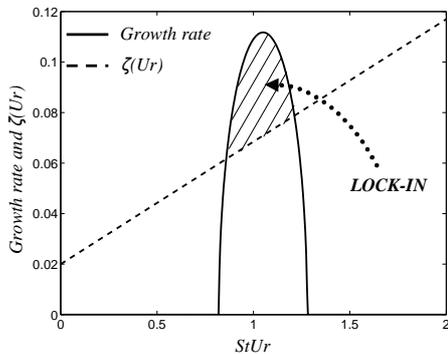


Figure 3: Definition of the lock-in region

By comparing Fig. 2a and Fig. 2b one can conclude that the influence of the structural parameters on the lock-in region reported by Chen (i.e. widening of the lock-in region when decreasing the Scruton number and disappearance of lock-in past a critical value) is qualitatively reproduced by the linear wake oscillator model.

4. LOCK-IN RANGES FOR FLEXIBLE STRUCTURES: “MODE SWITCHING”.

The interest here is to predict the lock-in regions for the different modes of a flexible structure subjected to a uniform flow. Predicting which mode of the structure will lock-in with the wake is of practical importance since the amplitude of the bending stress that it experiences is a function of curvature, and thus of the mode number. The frequency of vibration is also very important in fatigue analysis.

For a tensioned beam, system (1) is rewritten (less the non linearity)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\frac{\gamma}{\mu}(S_r Ur) \right) \frac{\partial y}{\partial t} - \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\chi^2}} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \\ + \left(\frac{\Lambda}{\pi} \right)^4 \left(\frac{1}{1 + \chi^2} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = M(S_r Ur)^2 q \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \varepsilon(S_r Ur) \frac{\partial q}{\partial t} + (S_r Ur)^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Where $\Lambda=L/D$ is the aspect ratio of the structure (L being its length) and parameter χ is a dimensionless quantity expressed as

$$\chi = \frac{T}{EI} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2, \quad (5)$$

where T is the tension in the structure and EI its bending stiffness. No structural damping is included in (4). It is neglected since it is considered small when compared to the fluid induced damping (this is quite standard, Violette et al., 2007a). The reduced velocity is defined with the fundamental structural frequency that is written

$$f_s = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m_T} + \frac{EI}{m_T} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2}, \quad (6)$$

where m_T is the sum of the linear mass of the cylinder and displaced fluid. In (4), the second and fourth derivatives with respect to the spanwise direction z are expended using finite differences method. Thus, for n computation points on the cable, we have $2n$ linear coupled oscillators (n structural and n wake oscillators). The modal analysis applied here on the system (including the linear damping term this time) is the same as in Section 2. Depending on the reduced velocity Ur studied, one finds a number of unstable modes, i.e. modes with a positive growth rate.

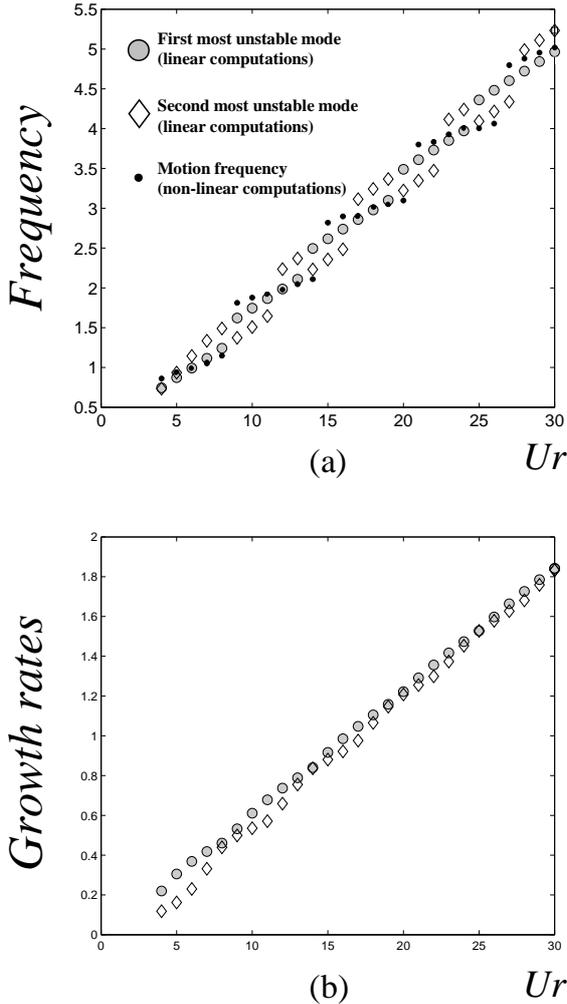


Figure 4: (a) Frequency evolution with reduced velocity for both linear (open signs) and non-linear model (dots), (b) vibrations modes growth rates obtained by the linear model.

For a tensioned cable (χ infinitely large) the frequencies of the two most unstable modes with respect to their growth rate as a function of Ur are plotted on Figure 4a for reduced velocity up to 30. Shown on Figure 4b are the growth rates of the two most unstable vibrations modes of the system as a function of Ur . The mass ratio used here is $\mu = 2$

and the aspect ratio L/D is set at 10π . The phenomenological parameters used are: $C_{L0}=0.37$, $C_D=2$ and $St=0.18$.

It can be seen in Fig. 4a that the system (structure/wake) goes through successive regimes characterized by one dominant unstable mode (mode with the most important growth rate) when increasing the reduced velocity. For example, Mode 2 dominates for Ur between 9 and 13 and Mode 3 for Ur from 14 to 19. Inside those reduced velocity ranges, the frequency seems to be varying linearly with Ur . However, the transition from one dominant mode to another, which will be called here “mode switching”, is characterized by a discontinuity in the frequency which forms the stairs-like shape of the frequency as a function of Ur . Each steps of the stairs being the lock-in range of a structural mode.

For the same range of Ur , non-linear computations were performed using the full non-linear wake oscillator model. For each non-linear computation random values of q on each point of order 10^{-3} are used as initial conditions. Oscillations frequency is derived from the evolution of displacement with time using Fourier analysis for each reduced velocity. Those oscillations frequency predictions are compared on Fig. 4a with the linear model results. The same stairs-like evolution of the cable vibration frequency with Ur is predicted, i.e. that the mode switching observed with the non linear model is also characterized by a frequency discontinuity. According to Fig 4a., there seems to be a reasonable agreement between the linear model and non linear model prediction for lock-in range of the different modes of the structure.

Thus, one can suggest that the vibration mode with the highest linear growth rate will be the one locked-in with the wake (and thus observed in the structure response). Following this logic, mode switching between two adjacent modes is observed when respective linear growth rate curves cross each other.

5. MULTIPLE RESPONSES: “TIME SHARING”.

When looking at Fig. 4a, one can observed some discrepancies between the modes predicted by the linear and the non-linear models. For example, at $Ur=25$, the linear model predicts that Mode 6 will be dominant when the dominant mode observed in the response computed numerically with the non linear model is Mode 5. However, when performing a second non linear computation using again random values on the distributed wake oscillators q , and thus different initial values than the previous calculation, Mode 6 is observed in the permanent

responses.

By looking at Fig. 4b, it can be noted that the growth rates of the two most unstable modes, namely Mode 5 and 6 in this case, have the same values. This means that both unstable modes are thus equally capable of appearing in the response. Violette et al. (2007b) verified the effect of the relative linear growth rates of two modes on their occurrences in the non linear computations. They found that similar linear growth rates led to almost even split of the occurrences in the non linear computations. This interesting result indicates that at a single flow velocity the wake can “select” to lock-in between more than one structural modes characterized by an individual frequency.

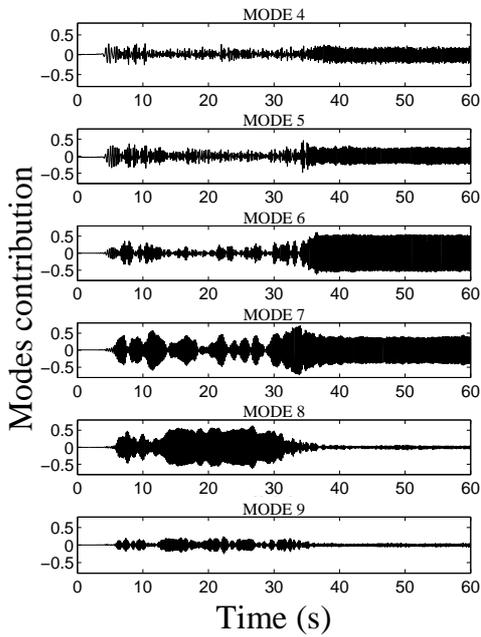


Figure 5: Modes contribution to the response of a tension beam subjected to a uniform flow on half of its length (Fig.7 in Chaplin et al. 2005).

Experimental evidences of this can be found in the literature. Chaplin et al. (2005) reported that for certain test conditions, they observed high modulations with time of the modes contribution of a tension beam, or riser, with low flexural rigidity subjected to a uniform flow on approximately half of its length (the other part being in stagnant water). In their paper (Chaplin et al., 2005) mentioned that those modulations were triggered by perturbations in the system like small vibrations of the assembly. Figure 5 shows one example of this. It shows the modal contribution of Mode 4 to Mode 9 (in the cross flow direction) in the response of the riser with time. It can be seen that Mode 8 dominates the response of the structures for time between say 15 and 30 seconds. For time higher than 30 seconds, a combination of Mode 4 to 7 is observed. When

looking at the frequency of the response of the riser in the two time segments of the test, one can observe a jump in the frequency. In other words, in each time segment, the cable vibrate at one single frequency, but this frequency changes around $t=30$ s. Similar experimental results are reported by Swithenbank (2007). In this text, this phenomenon will be referred as “time sharing” (following the terminology used by Swithenbank, 2007).

Computation is made with the linear wake-oscillator model for the configuration for which the results of Fig. 5 are obtained. The parameters used are summarized in Table 1. In this table, $(L/D)_{flow}$ is the ratio of the length of the cylinder expose to the flow over its cross section diameter. Inversely, $(L/D)_{stagnant}$, is the length of the part of the structure in stagnant water over the cylinder diameter. The linear stability analysis of system (4) gives 2 modes with identical growth rate (difference being of the order of the 0.1% between them). The dimensionless frequency predicted for both modes are 7.13 and 6.67. The frequencies in Hz are recovered by multiplying by the fundamental frequency f_s (Eq. 6). This frequency is calculated by replacing the bending stiffness EI , tension T and riser length L in Eq. 6 with the values for the test given by Chaplin et al. (2005) corresponding to the results shown on Fig. 5, which are $T=1073$ N, $EI=29.9$ Nm² and $L=13.12$ m. That way, one finds 5.31 Hz and 5.68 Hz respectively for both modes.

Structural Parameters

L/D	469
$(L/D)_{flow}$	211
$(L/D)_{stagnant}$	258
μ	π
χ	625.9

Phenomenological Parameters

C_{L0}	0.37
C_D	1.2
St	0.18

Table 1: Structural and phenomenological parameters used for the linear wake oscillator model.

The evolution of the riser frequency response with time can be found by wavelets analysis of the time trace of Fig. 5. For the first time segment ($t=15-30$ s), the frequency of the riser vibration is 5.5 Hz and is 5.1 Hz for the second segment ($t=33-60$ s). The agreement between the linear theory and the experiment is quite good for the frequency

difference (which is 0.37 Hz for the linear wake oscillator model and 0.4 Hz for the experiment).

6. CONCLUSIONS

The results presented in this paper show that:

1. the main features of the evolution with the Scruton number of the lock-in range for an elastically supported rigid cylinder in uniform flow are reproduced qualitatively by a linear wake oscillator model.
2. lock-in ranges of the different modes of a flexible structure subjected to a uniform flow obtained with a full non linear wake oscillator mode (validated against DNS and experiments) can be predicted by a simple linear wake oscillator model.
3. similar linear growth rates for different modes leads to multiple possible responses of the structure to the wake. This multiple response behavior, which is referred as “time sharing” in this text, has been experimentally observed (Chaplin et al., 2005; Swithenbank, 2007). One case where the linear wake oscillator model successfully predicts experimentally observed time sharing has been presented.

Those results on time sharing suggest that the structure and the wake can be regarded as one dynamic system that possesses a number of linearly unstable modes. Thus, insights on the probability of occurrences of those modes in the fully developed response can be obtained by a linear stability analysis.

7. ACKNOLEGMENTS

The authors would like to express their gratitude to Prof. J.R. Chaplin for providing the data from experiments and to Emmanuel Fontaine for fruitful discussions.

8. REFERENCES

Chaplin, J.R., Bearman, P.W., Huera Huarte, F.J., Pattenden, R.J., 2005, Laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a vertical tension riser in a stepped current. In *Journal of Fluids and Structures*, **21**:3-24.

Chen, S.S., 1987, Flow-Induced Vibration of Circular Cylindrical Structures. *Hemisphere publishing corporation*.

Facchinetti, M.L., de Langre, E., Biolley, F., 2004a, Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. In *Journal of Fluids and Structures*, **19**: 123-140.

Facchinetti, M.L., de Langre, E., Biolley, F., 2004b, Vortex-induced travelling waves along a cable. In *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **23**: 199-208.

Gabbai, R.D. and Benaroya, H., 2005, An overview of modeling and experiments of vortex-induced vibration of circular cylinders. In *Journal of Sound and Vibration*, **282**: 575-616.

de Langre, E., 2006, Frequency Lock-in is caused by a coupled-mode flutter. In *Journal of Fluids and Structures*, **22**:783-791.

Mathelin, L., de Langre, E., 2005, Vortex-induced vibrations and waves under shear flow with a wake oscillator model. In *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **24**: 478-490.

Swithenbank, S.B., 2007, Dynamics of long flexible cylinders at high-mode number in uniform and sheared flows. *PhD Thesis, MIT Departement of Mechanical Engineering*.

Tamura, Y., Matsui, G., 1980, Wake-oscillator model for vortex-induced oscillation of a circular cylinder. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Wind Engineering (Pergamon Press)*, 1085-1094, Fort Collins, USA.

Violette, R., de Langre, E., Szydlowski, J., 2007a, Computation of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscillator model: Comparison with DNS and experiments. In *Computers and Structures*, **85**: 1134-1141.

Violette, R., de Langre, E., Szydlowski, J., 2007b, Mode switching of a tensioned cable in vortex-induced vibrations using a linear stability approach. In *Fifth Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations* (eds T.Leweke, J.R. Meneghini & C.H.K.Williamson), 245-248. Costa do Sauipe, Brazil.

Williamson, C.H.K., Govardhan, R., 2004, Vortex-Induced Vibrations. In *Annual Review of Fluid Mechanics*, 413-455.

Mode switching of a tensioned cable in vortex-induced vibrations using a linear stability approach

R. Violette^{a,b}, E. de Langre^a, J. Szydlowski^b

^a *Département de Mécanique, LadHyX, CNRS – Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France*

^b *Institut Français du Pétrole, 1-4 av de Bois Préau, 92852 Rueil-Malmaison, France*

1. Introduction

Vortex-induced vibration (VIV) is a major concern in regards of fatigue life for offshore structures such as risers. There is a clear need for better understanding of such a phenomena especially in cases of very long slender structures with aspect ratio up to the order 10^3 subjected to depth varying currents. The vortex shedding frequency typically varies linearly with flow velocity assuming constant Strouhal number. In cases of non uniform current this results in different excitation frequencies along the riser which itself has a high modal density. Predicting the modal content of the structure, and thus the riser response with respect to time, in these conditions is quite complex since several vibrations modes can lock-in with the wake (Williamson and Govardhan 2004).

For a tensioned cable subjected to uniform flows, it was experimentally observed that in some cases where the flow velocity is different from the perfect lock-in velocity of a cable vibrations mode, the structure response in time included more than one mode of vibrations (Chaplin et al. 2005). This would suggest that the transition or switch from one locked-on mode to another adjacent is not abrupt, but that there is a velocity range where both modes can exist in the response. We are interested in seeing if this behavior can be reproduced by a linear wake-oscillator model. More precisely, we will use a linear version of the wake-oscillator model developed by Facchinetti et al. (2004b) and Mathelin and de Langre (2005). This non-linear wake-oscillator model was recently validated for long structures in non-uniform flows against DNS computations and experimental results by Violette et al. (2007). Comparisons showed good agreements with both the experimental results and the DNS computations. Figure 1 shows an example of comparison for an infinite tensioned cable subjected to a non-uniform flow. The evolution of displacement with time calculated using a full DNS computation (a) and the one obtained with the non-linear wake-oscillator model (b) are found similar.

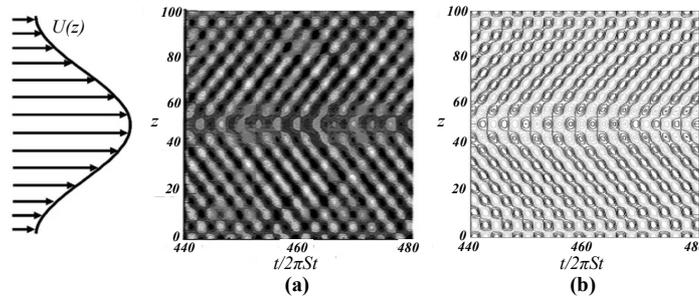


Figure 1 – Infinite tensioned cable under non-uniform flow. Evolution of cable displacement with time and space: (a) DNS prediction (Newman and Karniadakis 1997) and (b) non-linear wake-oscillator model prediction (Violette et al. 2007). In both figures, the displacement level is shown ranging from -0.4 to 0.4 with equally spaced intervals.

2. Linear approach to lock-in

In a recent paper, de Langre (2006) proposed a linear version of the Facchinetti et al. (2004a) VIV prediction model for elastically supported rigid cylinders. Thus, the coupled cylinder/wake dynamic system is formulated in a dimensionless form as

$$\begin{aligned} \ddot{y} + y &= M(StUr)^2 q \\ \ddot{q} + (StUr)^2 q &= A\dot{y} \end{aligned} \quad (1)$$

where y is the dimensionless cylinder displacement and the wake variable q is the fluctuating lift coefficient $q = 2C_L(t)/C_{L0}$. The term C_{L0} is the fluctuating lift coefficient for a fixed cylinder. The dimensional time and

length are respectively $T = t/\Omega_S$ and $Y = yD$. The parameter Ω_S is the free oscillations pulsation of the cylinder in stagnant water and D is its diameter. In (1) St is the Strouhal number and Ur is the reduced velocity. The coupling parameter M and A are described in details in Facchinetti et al. (2004a). By modal analysis of the coupled linear system (1), one can compute the natural frequency of the system and the growth rate as a function of the reduced velocity Ur . This is showed on Figure 2.

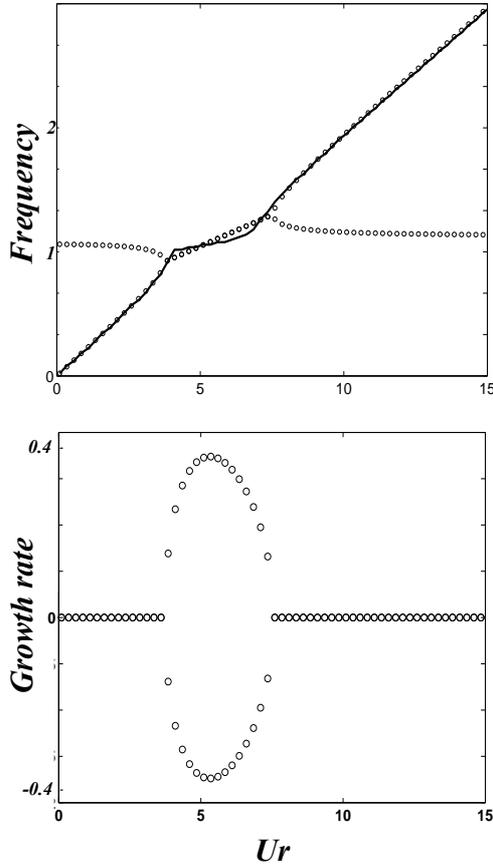


Figure 2 – Linear prediction for oscillations frequency (upper figure) and growth rate (lower figure) as a function of the reduced velocity (circle dots). Also shown on the figure is the oscillations frequency predicted by the non-linear model as a function of Ur (solid line).

(2) is expended using finite differences method. Thus, for n computation points on the cable, we have $2n$ linear coupled oscillators. The modal analysis is the same as in Section 2. Depending on the reduced velocity Ur studied, we find a number of unstable vibrations modes, i.e. modes with a positive growth rate. We plot the frequency of the two most unstable ones with respect to their growth rate as a function of Ur , Figure 3a. Shown on Figure 3b are the growth rates of the two most unstable vibrations modes of the system as a function of Ur . For the same range of Ur , we performed non-linear computations using the full non-linear wake oscillator model. For each non-linear computation random values of q on each point of order 10^{-3} are used as initial conditions. Oscillations frequency is derived from the evolution of displacement with time using Fourier analysis. Those oscillations frequency predictions are compared on Figure 3a with the linear model results.

It can be seen that for low Ur , the system possess two natural frequency, one for the solid mode and one for the wake mode. These two frequencies coincide for a certain range of reduced velocities before diverging again at a high Ur . In the range of coinciding frequency, there is a positive growth rate which means that the system is unstable. This instability is referred to as coupled-mode flutter instability. Also plotted on Figure 2 (top) is the frequency prediction of the non linear system. One can observe that the lock-in range and the linear instability range coincide very well. Lock-in can be interpreted as a coupled-mode flutter instability between two coupled linear oscillators (see also Nakamura 1969).

3. Mode switching prediction

We try here to compare the frequency response, or modal response, obtained by the full non-linear wake oscillator model and the linear model in the case of a tensioned cable. The mass ratio used here is taken small ($\mu = 1.785$) in order to get lock-in range overlap. The mass ratio is defined as $(m_{cyl} + m_{fluid})/\rho D^2$ where m_{cyl} and m_{fluid} are the mass per unit length of the cylinder and fluid added mass respectively and ρ is the fluid density. For a tensioned cable, the system (1) is rewritten

$$\begin{aligned} \ddot{y} - \lambda y'' &= M(StUr)^2 q \\ \ddot{q} + (StUr)^2 q &= A\ddot{y} \end{aligned} \quad (2)$$

where $\lambda = A/\pi$ and A is the aspect ratio of the cable. The reduced velocity is referred here with respect to the first mode frequency. In the linear model, the second derivative with respect to the spanwise direction z in eq.

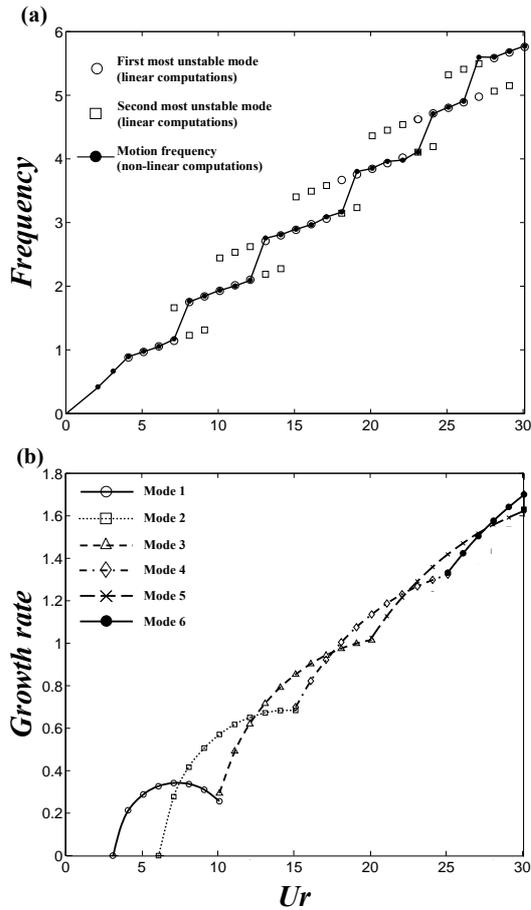


Figure 3 – (a) Frequency evolution with reduced velocity for both linear (open signs) and non-linear model solid signs. For the linear model, circles represent the natural frequency of the most unstable and squares are for the second most unstable mode, (b) vibrations modes growth rates obtained by the linear model.

one mode of vibrations to another predicted by both models are similar. The jumps from one vibrations mode to the other can also be analysed in terms of the growth rates obtained by the linear model, Figure 3b. We can observe that the reduced velocities for which a switch of the mode occurs corresponds to a crossing of growth rate curves. For example, the non-linear model predicts a switch from Mode 2 to Mode 3 at a reduced velocity between 12 and 13. The linear growth rate curves for Mode 2 (open squares) and Mode 3 (open triangles) cross each other around a reduced velocity of 12.5.

We now focus on three cases with slightly different reduced velocities, $Ur = 22$, 22.5 and 23 . On Figure 3b, we can see that the growth rate curves of Mode 4 and Mode 5 cross at about $Ur = 22.5$ meaning a mode switch for the cable. For all three studied reduced velocities, we performed 200 independent computations using the full non-linear wake-oscillator model and computed the frequency of the response in the permanent regime. The statistical results appear on Figure 4 (bottom). Also shown on Figure 4 (top) is a zoom on the growth rate curves of Mode 4 and Mode 5. We can observe on Figure 4 that for $Ur = 22.5$, where both growth rates are almost equal, the occurrence of both modes is split in the 200 responses. A slight difference in the growth rates favours significantly the most unstable mode as seen for the case of $Ur = 22$ and 23 .

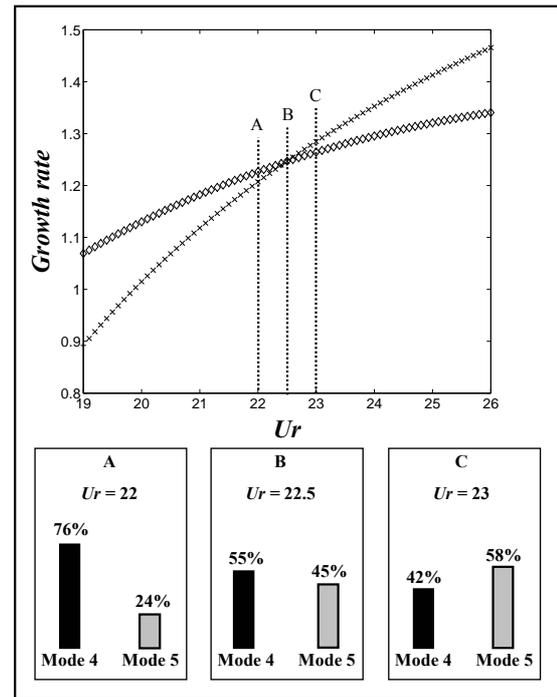


Figure 4 – Transition from Mode four response to Mode five response: (top) growth rate evolution of Mode four (diamond) and Mode five (cross) obtained with the linear model, (Bottom) percentage of occurrence for Mode four and five as dominating modes in the non-linear model statistical study.

Figure 3a shows that there is a good agreement between the predictions of the linear and the non-linear model: the oscillations frequencies predicted by the non-linear model almost always follow the ones of the most unstable mode obtained by the linear model. Thus, the switches or jumps from

4. Concluding remarks

The numerical results presented here show that for a tensioned cable subjected to uniform cross flow:

- (a) the frequency of VIV predicted by a full non-linear wake oscillator model (validated against DNS) can be predicted by a simple linear model computation;
- (b) mode switching can be interpreted as a result of crossing of linearly predicted growth rates between modes;
- (c) when performing a large number of computations, a small difference in linearly predicted growth rate results in large changes in occurrence of a given vibrations mode in the non-linear wake oscillator predictions.

4. Reference

Chaplin J.R., Bearman P.W, Huera Huarte F.J., Pettenden R.J. 2005. Laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a vertical tension riser in a stepped current. *Journal of Fluids and Structures*; 21: 3-24.

Facchinetti ML, de Langre E, Biolley F. 2004a. Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*; 19: 123-140.

Facchinetti ML, de Langre E, Biolley F. 2004b. Vortex-induced travelling waves along a cable. *European Journal of Mechanics B/Fluids*; 23: 199-208.

de Langre E. 2006. Frequency Lock-in is caused by a coupled-mode flutter. *Journal of Fluids and Structures*; 22: 783-791.

Mathelin L, de Langre E. 2005. Vortex-induced vibrations and waves under shear flow with a wake oscillator model. *European Journal of Mechanics B/Fluids*; 24: 478-490.

Nakamura Y., 1969. Vortex excitation of a circular cylinder treated as a binary flutter. *Reports of Research Institute for Applied Mechanics*; 17: 217-234. Kyushu University, Fukuoka, Japon

Williamson CHK, Govardhan R. 2004. Vortex-Induced Vibrations. *Annual Review of Fluid Mechanics*; 413-455.

Violette R, de Langre E, Szydłowski J. 2007. Computation of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscillator model: Comparison with DNS and experiments. *Computers and Structures*; 85: 1134-1141