



Évolution et organisation spatiale de la dynamique vibratoire des arbres au cours de leur développement

Mathieu Rodriguez

► **To cite this version:**

Mathieu Rodriguez. Évolution et organisation spatiale de la dynamique vibratoire des arbres au cours de leur développement. Engineering Sciences. Ecole Polytechnique X, 2009. English. <pastel-00005729>

HAL Id: pastel-00005729

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00005729>

Submitted on 22 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Polytechnique
Laboratoire d'Hydrodynamique

Thèse présentée pour obtenir le grade de

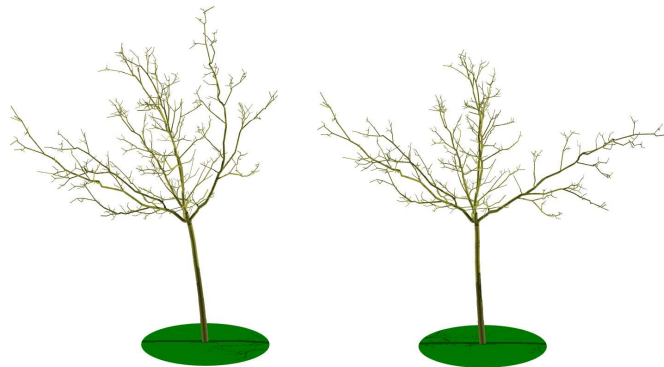
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mécanique

par

Mathieu RODRIGUEZ

Evolution et organisation spatiale de la dynamique vibratoire des arbres au cours de leur développement



Soutenue le 2 novembre 2009 devant le jury composé de :

Mme. Meriem FOURNIER	Rapporteur	LERFOB, AgroParisTech, Nancy
M. Sébastien NEUKIRCH	Rapporteur	IJLRA, CNRS, Paris
M. Thierry FOURCAUD	Président	AMAP, CIRAD, Montpellier
M. Hanns-Christof SPATZ	Examineur	Albert-Ludwigs Universität, Freiburg
M. Benoît ROMAN	Examineur	PMMH, CNRS, Paris
M. Bruno MOULIA	Co-Directeur de thèse	PIAF, INRA, Clermont-Ferrand
M. Emmanuel de LANGRE	Directeur de thèse	LADHYX, Ecole Polytechnique, Paris

Remerciement

Ce mémoire est le point final de ces trois dernières années. Au moment de clore cette étape, et avant de commencer la prochaine, j'aimerais profiter de ces quelques lignes pour remercier les personnes qui en ont fait partie. En effet, j'ai grand plaisir à me remémorer qu'au-delà d'être une aventure scientifique et intellectuelle, cette thèse a été avant tout une aventure humaine.

Je ne suis par arrivé au Ladhyx par hasard, un matin, en poussant la porte après avoir vu de la lumière... Je dois à Emmanuel de Langre d'avoir commencé cette thèse. Merci de m'avoir présenté avec enthousiasme les perspectives à explorer dans le domaine de l'interaction entre le vent et l'arbre, ce qui m'a conduit à accepter le pari de poursuivre une thèse sur ce sujet.

J'ai eu la chance d'avoir deux directeurs de thèse, Emmanuel de Langre et Bruno Moulia, soit un double encadrement, et non pas un encadrement partagé entre deux personnes, aux vues de leurs disponibilités et de leurs investissements pendant ces trois années. Merci de m'avoir suivi, encadré, conseillé et encouragé tout au long de ma thèse!! Plus particulièrement, je remercie Emmanuel pour m'avoir fait comprendre que la simplicité d'un modèle fait sa force par sa capacité à expliquer clairement les mécanismes et à convaincre le plus grand nombre. J'espère aussi emmener avec moi une part de cette volonté de synthèse et de clarté des résultats en vue de communiquer, à l'oral ou l'écrit, que tu as essayé de m'inculquer. De Bruno, j'aurai le souvenir de sa patience et sa détermination à me faire prendre conscience de l'intérêt et de l'importance à ne pas s'arrêter aux sciences techniques, mais de prendre part au débat sur les questions biologiques plus fondamentales... J'essayerai de persévérer dans ce sens. Je te remercie aussi pour ton accueil à Clermont-Ferrand, pour le plaisir que j'ai eu à travailler avec toi, et à séjourner pendant un an dans cette région (bien au delà de mes espérances).

Plusieurs expériences ont été réalisées pendant ma thèse, ceux qui en ont faites savent

qu'elles ne se réalisent jamais seul. Je remercie Pascal Hémon pour son aide au montage de la table vibrante, son expertise en mesure et traitement de signal, ainsi que pour nos discussions sur l'interaction fluide-structure. Je remercie Stéphane Ploquin pour la digitalisation et l'analyse vibratoire du noyer. Aussi ta résistance au froid a été mise à rude épreuve, et ton coup de massue jouit maintenant d'une grande renommée! Merci aussi à Boris Adam et Nicolas Donès pour leur aide dans les parties digitalisation et acquisition par capteurs de déplacement, et leur humour! Je remercie Stéphane, Norbert Frizot et Patrice Chaleil pour leurs aides au montage et au déroulement de l'expérience sur les peupliers (qui a été longue, pleine d'imprévus, et, à vrai dire, un peu pénible... mais au combien formatrice).

Ces trois années ont été partagées entre le Ladhyx et le Piaf. Au delà de leurs styles propres, je me rappellerai du bon accueil reçu, de l'ambiance amicale, et de la culture du café dans ces deux labos!

Un clin d'oeil particulier à mes co-bureaux et quelques autres thésards qui ont animé ces années de thèse aux labos et en dehors : Fred, Rémi V., Christof, Renaud, Guillaume, Rémi W., Fabiano et Julien. Merci à la salle d'escalade de l'Ecole Polytechnique pour tant d'heures d'amusements et de défoulements, ainsi qu'aux grimpeurs du Ladhyx!

Certains ne seront peut être pas d'accord, mais ce que je trouve de particulier avec la thèse, c'est sa propension à toujours vous occuper l'esprit une fois en dehors du labo. Pour finir, j'aimerais donc remercier mes amis et ma famille pour le plaisir que j'ai eu à les cotoyer, soirs, week-ends et vacances, et pour leur soutien. Une mention spéciale pour mon frère, Ben, qui plus que les autres, a du supporter mes râleries.

*Ils tiennent debout, ils bougent,
il ne manque plus qu'ils nous parlent !*

Résumé

Le vent est à l'origine d'une excitation mécanique chronique des arbres. Malgré tout, ceux-ci se développent continûment, par la croissance et la ramification de leurs axes. Il en résulte une grande variété de géométries, fonctions à la fois de l'espèce, et du milieu dans lequel l'arbre s'est développé. Tout au long de son existence, les caractéristiques dynamiques de l'arbre sont l'élément déterminant de son interaction avec le vent. Ainsi, cette thèse porte sur l'évolution et l'organisation spatiale de la dynamique des arbres au cours de leur développement, et particulièrement de l'influence de leurs géométries.

Une expérience de suivi des caractéristiques dynamiques de plantes, pendant leur développement, associée à un modèle mécanique de leurs oscillations en flexion, met en évidence le rôle de leurs croissances primaires et secondaires sur l'évolution temporelle de leurs fréquences naturelles.

Une description générique de la géométrie de l'arbre, basée sur l'architecture et la biométrie, suivie d'une analyse dimensionnelle de sa dynamique vibratoire, permet de dériver une loi d'échelle décrivant l'organisation spatiale de ses caractéristiques dynamiques. Cette loi d'échelle est appliquée aux cas d'arbres dont les caractéristiques dynamiques ont été déterminées soit par numérisation puis analyse modale en utilisant la méthode des éléments finis, soit par balayage en fréquence sur table vibrante, soit à partir de lâcher.

Une analyse dimensionnelle de l'interaction dynamique entre le vent et l'arbre permet de dériver des lois d'échelle décrivant la réponse multimodale de l'arbre au vent, et donc la répartition dans l'ensemble de l'arbre de sa réponse.

Le rôle de la géométrie de l'arbre, et donc de son développement continu par la croissance et la ramification de ces axes, sur son interaction dynamique avec le vent, est ainsi quantitativement mis en évidence.

Abstract

Trees are following a continuous development through growth and branching of axes, showing a large variety of geometries observed depending trees ages, species and growth conditions. Wind is responsible of a chronical mechanical excitation of trees. And throughout its life, tree dynamical characteristics are determining its interaction with wind. Thus, this thesis is about the time evolution and the spatial organization of trees dynamical characteristics during growth, and the influence of trees geometries.

An experiment on plants under controlled growth conditions, combined with a mechanical model of plants oscillations under flexure, showed strong evidence of the role of primary and secondary growths on the time evolution of plants natural frequencies.

A general description of trees geometries, based on architecture and biometry, and a dimensional analysis of trees dynamics, resulted in the derivation of a scaling law describing the spatial organization of trees dynamical characteristics. This scaling law is applied to a few trees, whose dynamical characteristics where determined from digitizing and modal analysis using finite element modelling, from shaking table analysis, and from rope release tests.

A dimensional analysis of wind and trees dynamical interactions resulted in the derivation of scaling laws describing trees multimodal response to wind, and thus the distribution of the response in its whole branching system.

The role of the tree geometry, and thus of its continuous development through growth and branching of axes, on its dynamical interaction with wind, is thus quantitatively discussed.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	L'arbre, un organisme en développement	2
1.1.1	Le développement architectural de l'arbre	2
1.1.2	Les modèles architecturaux	4
1.1.3	L'analyse biométrique	5
1.1.4	Une description géométrique générique	6
1.2	Un milieu mécaniquement contraignant : le vent	7
1.3	Etudier la dynamique sur base modale	10
1.3.1	La base modale	11
1.3.2	L'exemple de la poutre encastree-libre	11
1.3.3	Les caractéristiques modales de l'arbre	15
1.4	La dynamique de l'arbre au vent	16
1.4.1	La répartition dans l'arbre de la réponse au vent	16
1.4.2	La modélisation de la dynamique de l'arbre au vent	19
1.5	L'acclimatation mécanique	21
1.6	Problématique de la thèse	23
2	Evolution temporelle de la dynamique de l'arbre	27
2.1	Expérience de suivi des fréquences de peupliers	28
2.1.1	Le matériel végétal	28
2.1.2	Le protocole de l'expérience	29
2.1.3	Deux régimes d'évolution des fréquences	31
2.1.4	Le développement géométrique des peupliers	34
2.1.5	Les caractéristiques matérielles et la répartition des masses	38
2.1.6	Lien entre fréquence et géométrie	40

2.2	Modélisation de l'effet de la géométrie sur les fréquences	43
2.2.1	Modèle mécanique de la flexion	43
2.2.2	Définition d'une plante représentative de l'expérience	47
2.2.3	Simulation de l'évolution des fréquences	47
2.3	Comparaison entre le modèle mécano-biométrique et les mesures	48
2.4	Discussion	50
3	Organisation spatiale de la dynamique de l'arbre	51
3.1	Le matériel végétal	52
3.1.1	Méthode de numérisation	53
3.1.2	Un jeune noyer	53
3.1.3	Un noyer adulte	54
3.1.4	Une branche de charme	54
3.1.5	Un jeune pin maritime	56
3.2	Les méthodes de détermination des modes	56
3.2.1	Excitation par lâcher	57
3.2.2	Balayage en fréquence sur table vibrante	57
3.2.3	Calcul par éléments finis	59
3.3	Les caractéristiques modales	60
3.3.1	Le jeune noyer	61
3.3.2	Le noyer adulte	66
3.3.3	La branche de charme	68
3.3.4	Le jeune pin maritime	70
3.3.5	Synthèse sur l'analyse modale	72
3.4	Lois d'échelle	73
3.4.1	Paramètres biométriques	73
3.4.2	Analyse dimensionnelle	74
3.4.3	Modes de vibrations	75
3.5	Evaluation des prédictions par loi d'échelle	79
3.5.1	Paramètres biométriques	79
3.5.2	Comparaison	84
3.6	Discussion	89

4	Organisation spatiale de la réponse de l'arbre au vent	91
4.1	Le couplage aérodynamique entre le vent et l'arbre	92
4.2	L'effort aérodynamique statique	94
4.3	L'amortissement aérodynamique linéaire	97
4.4	L'excitation aléatoire par le vent turbulent	99
4.5	Discussion	104
5	Conclusion et perspectives	107
5.1	Conclusions	108
5.2	Perspectives	110
A	Compléments au Chapitre 2	121
A.1	Evolutions des fréquences des peupliers	122
A.2	Caractéristiques matérielles	123
A.2.1	Module d'Young et raideur d'encastrement	123
A.2.2	Masse volumique et feuillage	127
A.3	Modèle biométrique du développement des plantes	130
A.3.1	La longueur	130
A.3.2	Le diamètre à la base	130
A.3.3	Le défilement du diamètre	131
B	Articles	133

Chapitre 1

Introduction

Les arbres sont des éléments remarquables, presque toujours présents dans notre environnement. Tellement présents qu'en 1805, lorsque l'amiral Francis Beaufort développa une échelle de mesure du vent à partir de l'observation de ses effets sur la surface de la mer, il inscrit aussi des observations terrestres, parmi lesquelles l'excitation de l'arbre par le vent. Ces observations de la réponse de l'arbre au vent soulignent la participation graduelle de l'ensemble de l'arbre au fur et à mesure que la force du vent augmente : pour un vent de force 2, les feuilles bougent, à force 4, les petites branches oscillent, à force 6, les grandes branches se mettent en mouvement, et finalement, pour un vent de force 7, l'ensemble de l'arbre est excité.

Deux remarques ressortent de ces observations visuelles de sens commun. La première est que les différents constituants de l'arbre participent à des degrés divers à la réponse de l'arbre au vent. En effet, des éléments de l'arbre de plus en plus grands sont sollicités au fur et à mesure que le vent augmente. La seconde remarque est que la taille des parties de l'arbre en mouvement est un indicateur de la force du vent, plus l'arbre est grand et plus un vent fort va être nécessaire pour induire un mouvement global mobilisant tout le houppier.

Cette participation plus ou moins importante des différents constituants de l'arbre à l'excitation par le vent, du feuillage jusqu'au tronc, résulte en une dynamique complexe dont la modélisation numérique pour l'animation de scènes virtuelles est d'un grand intérêt pour la communauté « graphique ». La sollicitation de plus en plus importante de l'arbre, au fur et à mesure qu'augmente la force du vent, est, quant à elle,

une préoccupation majeure pour l'exploitation forestière puisqu'elle peut être à l'origine de ruptures ou de verses d'arbres. D'un point de vue de biologie fondamentale, l'excitation par le vent est d'un grand intérêt en temps que source de sollicitations mécaniques chroniques de l'arbre.

Les préoccupations de ces communautés se rejoignent dans un objectif large de comprendre la dynamique de l'interaction entre le vent et l'arbre, son organisation à un instant donné, et l'évolution de cette dynamique au cours du développement de l'arbre. Ce sont les points dont nous allons traiter ici.

1.1 L'arbre, un organisme en développement

Une étape indispensable de l'étude des interactions entre le vent et l'arbre est la description de sa géométrie. Elle nous renseigne sur la répartition de sa masse, de sa rigidité, et donc sur ses caractéristiques dynamiques. Mais comment définir une géométrie de l'arbre lorsque celui-ci peut être un palmier, un pin ou noyer ? Et encore, comment définir une géométrie de noyer quand celle-ci, suivant le stade de développement de l'arbre, peut varier d'une simple tige à une organisation en huit ordres de ramification ?

En effet, chaque arbre suit un développement unique. L'existence d'un arbre peut durer jusqu'à plusieurs siècles et, à l'état adulte, certains arbres peuvent atteindre jusqu'à une centaine de mètres de hauteur. Cependant, ce déploiement spatial de l'arbre en une géométrie complexe suit un processus organisé dont une conséquence est la mise en place d'un système tridimensionnel ramifié (Edelin *et al.*, 1995). Malgré la grande variabilité inter et intra-espèces, un certain nombre de critères morphologiques de l'arbre sont identifiables et permettent de décrire et décomposer son développement. Les différentes déclinaisons possibles de ces quelques critères morphologiques forment les modèles d'architecture des arbres définis par Hallé & Oldeman (1970).

1.1.1 Le développement architectural de l'arbre

L'arbre se développe dans le temps et se déploie dans l'espace par la mise en place d'une structure hiérarchisée (Edelin *et al.*, 1995). Ce développement de l'arbre s'effectue

par la croissance d'axes existants, et par l'apparition de nouveaux axes lors de ramifications (Moulia *et al.*, 2006), Figure 1.1. La construction d'un axe s'organise selon sa croissance en longueur, appelée croissance primaire, ayant lieu au niveau du bourgeon terminal. De plus, un cambium se forme sur le périmètre de la tige. Ce cambium est à l'origine de la croissance en diamètre de l'axe, appelée croissance secondaire. Elle est répartie sur tout l'axe et non uniforme. Le cambium est actif tout au long de la vie de l'arbre, à la différence du bourgeon terminal dont la croissance peut, dans certaines formes de développement, définitivement s'arrêter.

En plus de la croissance en longueur, le bourgeon terminal est à l'origine de la production de feuilles sur l'axe, et de bourgeons latéraux positionnés à la base des feuilles, Figure 1.1. L'activation d'un bourgeon latéral entraîne la création d'un nouvel axe édifié à partir de ce bourgeon, c'est le processus de ramification. L'ordre d'un axe dans l'arbre est N , s'il a $N-1$ axes qui le séparent du sol. Les axes, suivant leur ordre, peuvent avoir des morphologies très différenciées, par exemple par leur diamètre basal, leur longueur, ou encore leur angle de ramification. Une fois tous les types d'axes mis en place, le système ramifié développé, appelé "Unité Architecturale", peut atteindre jusqu'à 11 ordres de ramifications d'axes (voir l'exemple du noyer, Figure 1.5a, avec 8 ordres de ramifications).

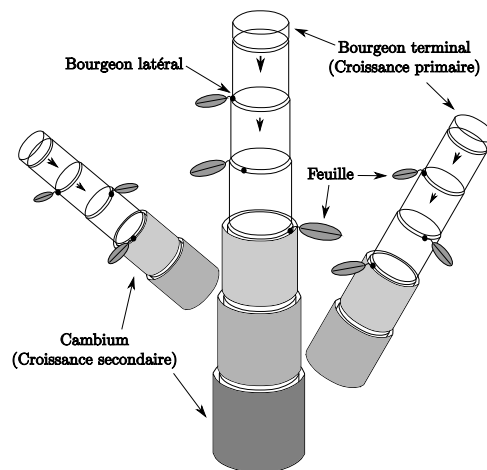


FIGURE 1.1 – Schéma du développement des plantes par croissances primaires et secondaires des tiges et par ramification, d'après Moulia (2006).

Le mode de ramification de l'arbre peut être monopodial ou sympodial, Figure 1.2. Une ramification est sympodiale quand le fonctionnement du bourgeon terminal s'interrompt pour des causes développementales internes, et qu'il n'y a qu'une ramification

latérale des branches. Une ramification est monopodiale quand il y a ramification latérale des branches, et la poursuite concomittante du fonctionnement du bourgeon terminal.

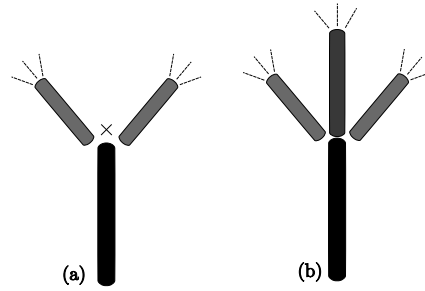


FIGURE 1.2 – Mode de ramifications : (a) sympodial, (b) monopodial.

Les relations d'ordre au sein du système ramifié peuvent être décrites à partir de la relation topologique entre les segments d'axes. Si l'on décompose les axes de l'arbre en segments qui relient, sur un axe, un point de ramification au point de ramification précédent, tous les segments peuvent être indexés en fonction du nombre de segments amonts qu'ils possèdent. Ainsi, un segment est indexé (N,P) quand ce segment a, respectivement, $N-1$ et $P-1$ segments latéraux et axiaux parents, Figure 1.3 (pour plus de détail sur l'indexation des ordres des segments de branches voir McMahon & Kronauer, 1976).

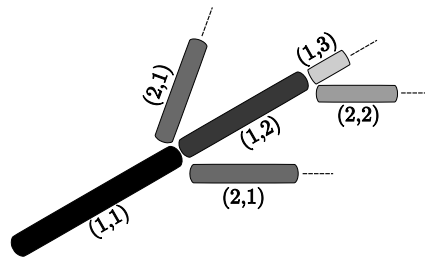


FIGURE 1.3 – Construction de l'unité architecturale de l'arbre par ramification.

1.1.2 Les modèles architecturaux

La diversité des développements observés dans la nature se regroupe en 23 modèles architecturaux (Hallé & Oldeman, 1970). Ces modèles sont illustrés à la Figure 1.4. Ils représentent les différentes déclinaisons de critères morphologiques identifiés. Parmi ces critères morphologiques, on retrouve le type de ramification, ou encore la variation de la

section des segments d'axes avant et après la ramification (Edelin *et al.*, 1995; Barthelemy & Caraglio, 2007). Le pin maritime (*Pinus pinaster*) et le noyer (*Julian regia*), présentés à la Figure 1.5, appartiennent respectivement aux modèles de Rauh et Leeuwenberg. Ils sont respectivement à ramifications monopodiale et sympodiale, Figure 1.4.

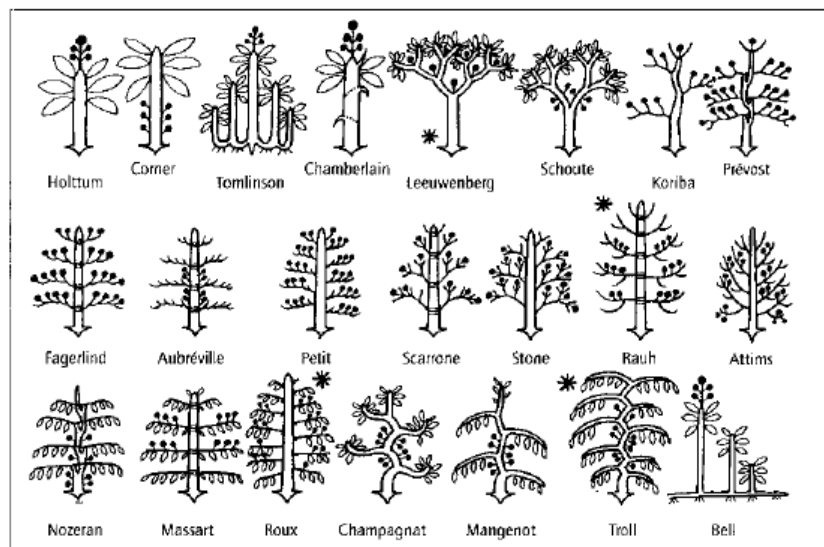


FIGURE 1.4 – Modèles architecturaux d'arbres selon Hallé & Oldeman (1970).

Cependant les modèles architecturaux ne permettent pas de définir la géométrie de l'arbre avec l'information nécessaire à des analyses mécaniques. D'une part, les dimensions des axes (longueurs, diamètres) résultant de leurs croissances primaires et secondaires ne sont pas définies. D'autre part, les axes peuvent faire l'objet de croissance secondaire englobant les segments successifs (Hallé, 2005), ainsi que de réorientation secondaire active lors de leur croissance (Mouliat & Fournier, 2009), rendant la géométrie finale de l'arbre parfois très différente du schéma représentant son modèle architectural, Figure 1.4.

1.1.3 L'analyse biométrique

La description quantitative de la géométrie de l'arbre a été menée par une autre branche de la biologie, l'analyse biométrique, via la caractérisation en particulier de l'élanement et du défilement des axes. Ces deux paramètres morphologiques sont décrits par des « lois » allométriques statistiques, dont les valeurs des coefficients sont déterminées

pour un individu, un peuplement d'arbres, ou une espèce donnés (McMahon & Kronauer, 1976; Niklas & Spatz, 2004). En plus des traits architecturaux relatifs au développement de l'arbre, l'analyse biométrique statistique rend aussi compte de l'effet des facteurs environnementaux qui régulent ou perturbent son développement.

La loi d'élanement des axes relie leur diamètre à leur longueur, et donne une mesure de l'« équilibre » entre la croissance primaire et la croissance secondaire de l'axe. La loi d'élanement est communément définie sous la forme d'une relation allométrique (loi puissance) entre la longueur, L , et le diamètre, D , de l'axe, équation 1.1.

$$D \sim L^\beta \quad (1.1)$$

La loi d'élanement est discutée dans deux cas distincts. Elle permet de décrire l'élanement typique des troncs de populations d'arbres (McMahon & Kronauer, 1976; Moulia & Fournier-Djimbi, 1997; Niklas & Spatz, 2004), par exemple dans un peuplement donné, ou pour une certaine espèce d'arbres. Elle permet aussi de donner une description de la géométrie d'un arbre particulier, à partir de l'élanement typique des branches le constituant (McMahon & Kronauer, 1976).

Le défilement du diamètre le long de l'axe donne une mesure de la répartition de la croissance secondaire, en plus d'une mesure de l'« équilibre global » entre la croissance primaire et secondaire. Le défilement d'un axe est souvent décrit sous la forme d'une loi allométrique de défilement (McMahon & Kronauer, 1976; Moulia & Fournier-Djimbi, 1997), où l'on décrit la variation du diamètre, $D(x)$, en fonction de sa distance relative, x/L , à l'apex, c'est à dire le bourgeon terminal, équation 1.2.

$$\frac{D(x)}{D(0)} \sim \left(\frac{x}{L}\right)^\alpha \quad (1.2)$$

1.1.4 Une description géométrique générique

Vue la grande variabilité intra-spécifique et inter-spécifique des géométries d'arbres, Figure 1.4, il semblait impossible de traiter le problème de l'interaction entre le vent et l'arbre de manière globale. Cependant les domaines de l'analyse architecturale et de l'analyse biométrique de l'arbre fournissent la possibilité de caractériser la géométrie ramifiée d'un arbre à partir d'un faible nombre de critères morphologiques et de quelques paramètres biométriques. On peut donc décrire, de manière générique, un maximum de

géométries en utilisant un minimum de paramètres, mais tout en couvrant un maximum de possibilités (Edelin *et al.*, 1995).

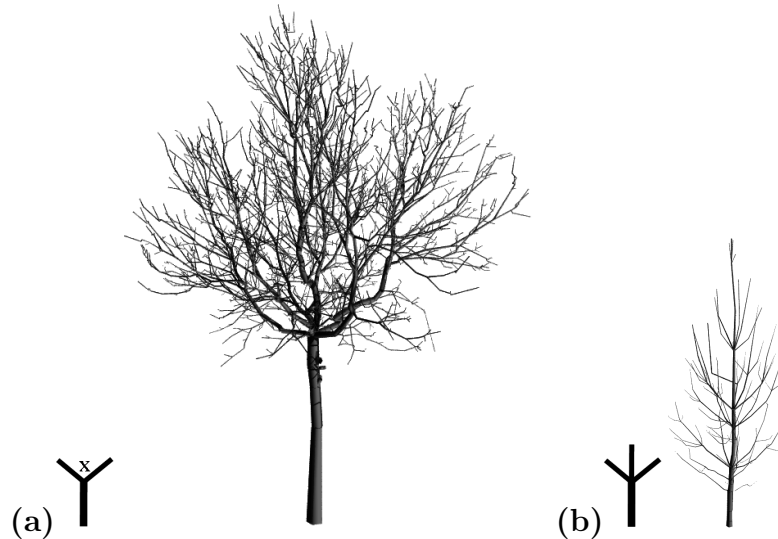


FIGURE 1.5 – Deux exemples d’arbres qui suivent des modèles architecturaux distincts : (a) un noyer, suivant le modèle de Leeuwenberg, et (b) un pin, suivant le modèle de Rauh. Ils ont été digitalisés respectivement par Sinoquet & Rivet (1997) et Sellier & Fourcaud (2005). Le noyer est à ramification sympodiale, alors que le pin est à ramification monopodiale.

1.2 Un milieu mécaniquement contraignant : le vent

Le développement de l’arbre s’effectue en interaction avec le milieu ambiant (la lumière, la température, les nutriments...) (Peltola *et al.*, 2000). Tous ces facteurs influencent, régulent et limitent son développement. Parmi ces facteurs externes, le vent implique le développement de l’arbre dans un milieu mécaniquement contraignant. En effet, le vent chronique est à l’origine de sollicitations mécaniques continues de l’arbre (Mouliat *et al.*, 2006), et les tempêtes hivernales annuelles sont des événements majeurs pouvant porter atteinte à son intégrité, par casse ou verse de celui-ci (Gardiner & Quine, 2000).

Si l’on prend l’exemple des climats océaniques tempérés de la côte Est des Etats Unis, le temps de retour typique des perturbations météorologiques, à l’origine du vent chronique, est de l’ordre de 100 heures, comme le montre le graphique à la Figure 1.6,

tiré de Stull (1988). Il faut ajouter, à ce temps typique de retour des perturbations météorologiques, une variation journalière entre un vent diurne plus fort que le vent nocturne. Cette variation journalière correspond au pic secondaire, d'une période de l'ordre de 20 heures, sur la même figure. A ces variations de grandes échelles se rajoutent des variations à petites échelles correspondant aux échelles de la turbulence de la couche limite météorologique du vent au niveau du sol.

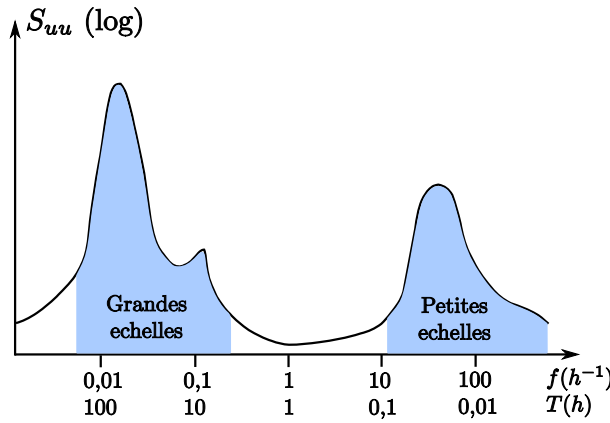


FIGURE 1.6 – Densité spectrale de puissance typique du vent proche du sol, d'après Stull (1988).

Durant une perturbation météorologique, deux configurations typiques d'excitation de l'arbre par le vent sont observées (de Langre, 2008), l'arbre isolé ou en couvert :

(a) Dans le cas de l'arbre isolé, le profil de vent moyen, \bar{U} , est un profil logarithmique, typique d'une couche limite (Cremonat & Foucriat, 2002), Figure 1.7a. Les fluctuations du vent sont décrites par la répartition spectrale de l'énergie turbulente. Une formulation de cette répartition de l'énergie est celle de von Karman (Cremonat & Foucriat, 2002) :

$$\frac{S_{uu}(f)}{\sigma_u^2} = \frac{4 l_u^x}{\bar{U}(z)} \frac{1}{\left[1 + 70,7 (f l_u^x / \bar{U}(z))^2\right]^{5/6}} \quad (1.3)$$

$$\frac{S_{vv}(f)}{\sigma_v^2} = \frac{4 l_v^x}{\bar{U}(z)} \frac{1 + 188,4 (2 f l_v^x / \bar{U}(z))^2}{\left[1 + 70,7 (2 f l_v^x / \bar{U}(z))^2\right]^{11/6}} \quad (1.4)$$

Il s'agit de la densité spectrale de puissance, $S(f)$, dans chacune des directions horizontales du vent, u et v , et adimensionnée par rapport à la variance de la vitesse fluctuante,

σ , dans la direction considérée. La densité spectrale de puissance, à une hauteur donnée, dépend de la vitesse moyenne longitudinale à cette hauteur, $\overline{U}(z)$, et d'une échelle caractéristique de la turbulence de l'écoulement dans chacune des directions, respectivement l_u^x et l_v^x .

Plus particulièrement, dans le cas de l'arbre isolé en rase campagne, les échelles caractéristiques de la turbulence valent $l_u^x = 100 \text{ m}$ et $l_v^x = 50 \text{ m}$ (Cremonat & Foucriat, 2002). On déduit des équations 1.3 et 1.4 que dans la plage de fréquence $0, 1 \leq f(\text{Hz}) \leq 10$, typique des arbres répertoriés dans la littérature (McMahon & Kronauer, 1976; Moore & Maguire, 2004; Bruchert & Gardiner, 2006; James *et al.*, 2006; Spatz *et al.*, 2007; de Langre, 2008), et pour un vent inférieur à 20 m/s à la hauteur considérée, le profil spectral du vent fluctuant vérifie :

$$S(f) \sim f^{-5/3} \quad (1.5)$$

Le vent subit par un arbre isolé, sur un terrain plat et plutôt dégagé, suit donc une décroissance en puissance $-5/3$ caractéristique de la cascade d'énergie turbulente de Kolmogorov, Figure 1.7c.

(b) Dans le cas de l'arbre en couvert, la porosité du couvert modifie le profil de vitesse en induisant un point d'inflexion au niveau de la canopée, Figure 1.7b, et le spectre en fréquence du vent est modifié par son interaction dynamique avec celle-ci (Raupach *et al.*, 1996; Py *et al.*, 2006), Figure 1.7d. Le point d'inflexion du profil de vitesse est à l'origine d'une instabilité de type Kelvin-Helmholtz dont résulte l'existence de structures d'échelles moyennes dans le couvert (A), prédominantes d'un point de vue énergétique. Les organes des arbres du couvert sont, de part leur traînée, à l'origine d'une dissipation accrue dans le couvert (B), et d'une émission de petites échelles fluctuantes (C) (de Langre, 2008).

L'analyse des caractéristiques temporelles et spatiales du vent met en évidence toutes les conditions d'une excitation dynamique chronique de l'arbre par le vent. La partie suivante présente l'intérêt de l'étude des caractéristiques dynamiques d'une structure, sur base modale, en préambule de l'étude de sa réponse à une excitation.

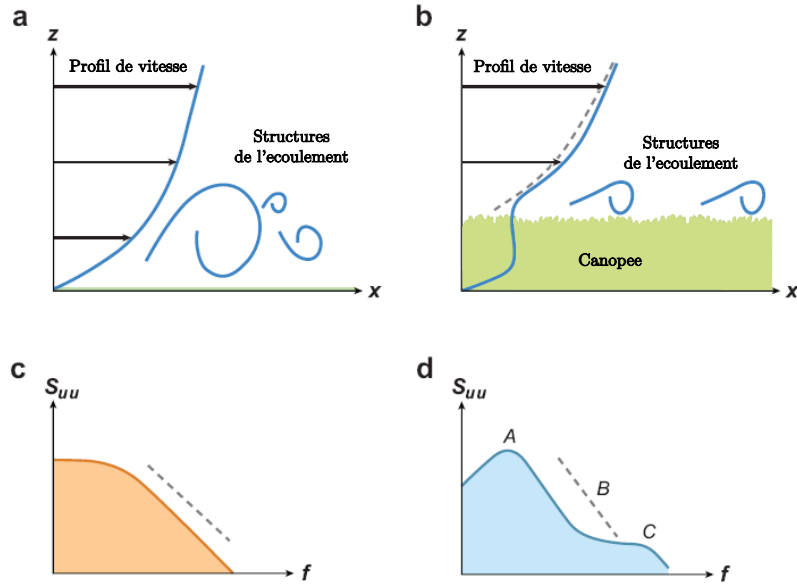


FIGURE 1.7 – Caractéristiques (a,c) spatiales et (b,d) spectrales typiques d'un vent rencontré, respectivement, dans le cas d'un arbre isolé ou en couvert, d'après de Langre (2008).

1.3 Etudier la dynamique sur base modale

La dynamique d'une structure en réponse à une excitation, par exemple la réponse d'un arbre excité par le vent, résulte de l'interaction de trois composantes : (1) la force d'excitation, (2) les caractéristiques dynamiques du système excité, (3) les processus de dissipation de l'énergie (Geradin & Rixen, 1994). Les caractéristiques dynamiques de la structure décrivent l'échange d'énergie entre deux formes d'énergies mécaniques internes, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de déformation élastique. Déterminer les caractéristiques dynamiques d'une structure permet de comprendre son excitabilité intrinsèque. Ceci permet d'appréhender le comportement dynamique général de la structure, en amont de l'étude de sa réponse à une excitation particulière.

1.3.1 La base modale

Déterminer la base modale de vibration de la structure est une façon pratique de caractériser la dynamique linéaire d'un système continu (Geradin & Rixen, 1994). En effet, le comportement élastique dynamique d'une structure peut se représenter sous la forme d'une superposition de modes de vibration qui forment la base modale.

Chaque mode de vibration est un mode propre d'échange entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Il se définit par un champ de déplacement, appelé aussi déformée modale, définissant la forme de déformation associée au mode, une fréquence modale, définissant le temps caractéristique de l'échange entre les deux types d'énergies, et une masse modale, caractérisant l'énergie cinétique associée à ce mode. La caractérisation de la base modale permet ensuite d'effectuer une troncature de celle-ci, c'est à dire de sélectionner un sous-ensemble de modes de vibration, en rapport avec les temps caractéristiques et les zones de déplacements, et de déformations, qui seront pertinents au regard des cas d'excitation considérés, et permettront de rendre compte de la réponse de la structure avec une précision acceptable (Axisa, 2001*a*).

1.3.2 L'exemple de la poutre encastree-libre

Le cas de la poutre encastree-libre, en tant que système dynamique typique de l'ingénierie, permet d'illustrer simplement la caractérisation d'un système sur sa base modale. Supposons cette poutre encastree-libre à diamètre constant et matériau homogène et se déformant en flexion selon le modèle d'Euler, par des petits déplacements transverses, et déterminons sa base modale de vibration (Geradin & Rixen, 1994). Les premiers modes de vibration de la poutre sont présentés à la figure 1.8.

L'évolution des fréquences modales, relativement à la première, Figure 1.8a, met en évidence l'espacement des modes en ce qui concerne leurs temps caractéristiques d'oscillations (noter l'échelle logarithmique de l'axe des fréquences propres dans la figure 1.8). Le deuxième mode a déjà une fréquence naturelle proche de six fois celle du premier, et le sixième a une fréquence naturelle cent fois supérieure. Typiquement, les fréquences d'une poutre encastree-libre augmentent au même rythme que le numéro du mode au carré (Geradin & Rixen, 1994). On remarque, Figure 1.8b, que l'ensemble de la poutre se déforme lors de l'excitation des trois premiers modes, même si les champs de déplacement sont très différents. Toute la structure est donc concernée par une excitation des modes de la

poutre.

On a ici affaire à un système dynamique, où les modes sont très espacés en fréquence, mais où tous induisent des déformations sur l'ensemble de la structure.

La fréquence d'une poutre, d'après Geradin & Rixen (1994), s'écrit analytiquement sous la forme :

$$f_n = \frac{\kappa_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{Ed^4}{\rho d^2}} = \frac{\kappa_n^2}{2\pi} \frac{d}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.6)$$

Où l est la longueur de la poutre, et d , son diamètre. Ed^4 est la rigidité linéique en flexion de la poutre et ρd^2 , sa masse linéique. Les coefficients κ_n sont uniquement dépendant des conditions limites de la poutre. Dans ce cas précis de poutre encastree-libre à section constante et à matériau homogène, une résolution analytique est possible. Pour le premier mode, κ_1 vaut 1.8751 (Geradin & Rixen, 1994).

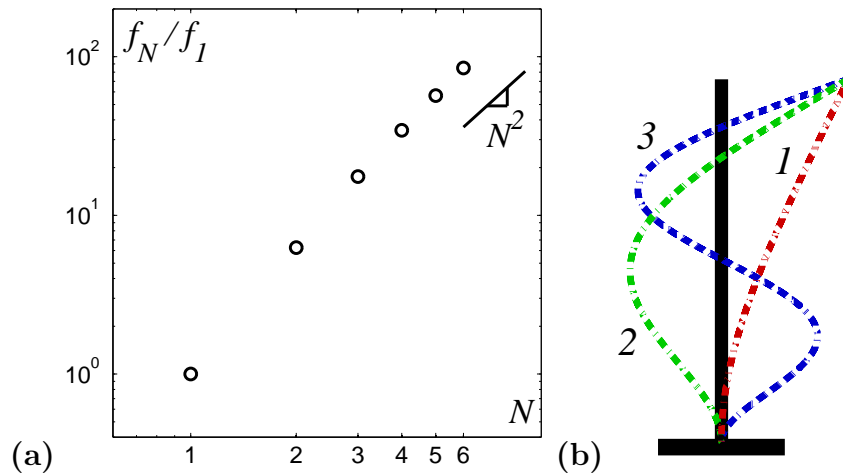


FIGURE 1.8 – (a) Répartition des fréquences modales et (b) déformées modales des premiers modes dans le cas d'une poutre encastree-libre en flexion.

Cas plus complexes

Dans des cas plus complexes, tels qu'une poutre à section variable le long de son axe, ou avec une raideur d'encastrement en condition limite, il n'est plus possible d'obtenir une solution analytique de la fréquence. Cependant, des tables rassemblent les va-

leurs des fréquences des premiers modes, par exemple pour différentes configurations de défilements ou de raideurs d'encastrement (Blevins, 1979), constituant ainsi un modèle semi-analytique.

Une résolution numérique, par exemple en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz, permet aussi de déterminer les modes de vibration (Geradin & Rixen, 1994). En utilisant cette méthode, les déformées modales sont déterminées sous la forme de combinaisons linéaires de fonctions choisies pour former une base libre satisfaisant les conditions limites du problème. On obtient ainsi une forme approchée des déformées modales et une approximation des fréquences modales. Cette méthode permet principalement une bonne approximation des fréquences, dont la précision obtenue est dépendante du nombre de fonctions formant la base d'approximation. Par contre, elle nécessite une description complète de la structure mécanique.

Analyse dimensionnelle

A défaut de déterminer les fréquences, effectuer une analyse dimensionnelle du problème permet de déduire l'influence sur les fréquences des différentes grandeurs caractérisant le système. En effet, l'analyse dimensionnelle a pour but d'interpréter le problème à partir des grandeurs physiques en jeu (Niklas, 1994; de Langre, 2002). Elle utilise le fait que les lois physiques sont indépendantes des unités dans lesquelles elles sont exprimées.

Dans le cas de la poutre, trois quantités définissent la mécanique en flexion de la poutre : sa dimension caractéristique, sa rigidité en flexion, et sa masse linéique. La longueur de la poutre, l , fournit une dimension caractéristique pour l'abscisse curviligne. Un diamètre de la poutre, fournit un ordre de grandeur de la dimension transverse, dont dépendent la rigidité en flexion et la masse linéique. Par exemple, dans le cas où le diamètre de la poutre est à section variable, on peut choisir de définir la rigidité et la masse linéique par rapport au diamètre à la base, d , et on obtient respectivement Ed^4 et ρd^2 .

On en déduit que la fréquence doit s'exprimer à partir de ces trois grandeurs :

$$f = F(l, \rho d^2, Ed^4) \quad (1.7)$$

Or ces quantités ont les dimensions suivantes :

$$f \sim \text{Temps}^{-1} \quad (1.8)$$

$$l \sim \text{Longueur} \quad (1.9)$$

$$\rho d^2 \sim \text{Masse Longueur}^{-1} \quad (1.10)$$

$$Ed^4 \sim \text{Masse Longueur}^3 \text{ Temps}^{-2} \quad (1.11)$$

On remarque que ces quatre grandeurs s'expriment selon trois dimensions. Le théorème de π -Buckingham (de Langre, 2002) implique qu'il existe un unique nombre sans dimension (4 grandeurs - 3 dimensions = 1 combinaison possible) reliant ces quatre quantités. Donc :

$$T^{-1} = L^a (M \cdot L^{-1})^b (M \cdot L^3 \cdot T^{-2})^c \quad (1.12)$$

D'où on déduit $a = -2$, $b = -1/2$ et $c = 1/2$.

Les quatres variables du problème se recombinent donc sous la forme du paramètre sans dimension suivant :

$$fl^2 (\rho d^2)^{1/2} (Ed^4)^{-1/2} \quad (1.13)$$

Ce qui implique :

$$fl^2 (\rho d^2)^{1/2} (Ed^4)^{-1/2} = \text{constante} \quad (1.14)$$

Ou encore :

$$f \sim dl^{-2} \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \quad (1.15)$$

Cette formule obtenue par analyse dimensionnelle, sans explicitation ni résolution des équations aux dérivées partielles régissant la dynamique vibratoire, peut être comparée avec la formule semi-analytique de l'équation 1.6. Elles ont les mêmes dépendances dimensionnelles et matérielles. L'analyse dimensionnelle permet ainsi de discuter comment les fréquences modales vont être influencées par le diamètre et la longueur caractéristique du système. On en déduit que les fréquences naturelles de la poutre varient linéairement en fonction du diamètre, et selon l'inverse du carré de la longueur caractéristique :

$$f \sim d, \quad (1.16)$$

$$f \sim l^{-2}, \quad (1.17)$$

d'où découlent les deux observations suivantes :

(a) Une poutre identique, mais avec un diamètre multiplié par 10, aura des fréquences naturelles multipliées par 10.

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{d_2}{d_1} = 10 \quad (1.18)$$

(b) Une poutre identique, mais avec une longueur multipliée par 10, aura des fréquences naturelles 100 fois plus petites.

$$\frac{f_3}{f_1} = \frac{l_1^2}{l_3^2} = 10^{-2} \quad (1.19)$$

L'influence du matériau homogène est aussi décrite par l'équation 1.15. On remarque que le matériau de la poutre intervient dans la valeur des fréquences modales au travers du rapport E/ρ . Celui-ci agit sur les fréquences du système en puissance 1/2, et donc dans une moindre mesure que les caractéristiques géométriques du système.

1.3.3 Les caractéristiques modales de l'arbre

La détermination de la base modale de deux arbres, par calcul par éléments finis, pour un pin maritime et un hévée, dans des versions simplifiées de leurs géométries (mais nécessitant quand même la position dans l'espace du tronc et de toutes les branches de second ordre, leurs connectivités, leurs diamètres et leurs caractéristiques mécaniques), a été effectuée par Fournier *et al.* (1993). L'implication des branches dans la dynamique de l'arbre a été mise en évidence par cette étude. En effet, un grand nombre de modes avec des déformations localisées principalement sur les branches ont été déterminés. Les fréquences de ces modes étaient à peine supérieures à celle du premier mode, dont les déformations sont localisées sur le tronc. Cette étude souligne la nécessité de prendre en compte la dynamique des branches, et d'étudier la dynamique de l'arbre au vent en considérant un grand nombre de modes à la fois.

D'un point de vue expérimental, l'étude de Sellier & Fourcaud (2005) soutient cette affirmation. Lors d'excitations à l'aide d'une corde attachée au tronc de jeunes pins maritimes, Sellier & Fourcaud (2005) ont mis en évidence des fréquences mesurées sur les branches, mais pas sur le tronc, et supérieures à la fréquence fondamentale des oscillations en flexion du tronc des pins. La réponse de plusieurs modes a donc été observée ici aussi.

L'utilité de prendre en compte l'ensemble de la géométrie de l'arbre lors de l'étude de ces caractéristiques dynamiques, et l'intérêt d'une étude sur base modale, contenant un grand nombre de modes, sont ici clairement soulignés.

1.4 La dynamique de l'arbre au vent

L'importance des effets dynamiques, dans l'interaction entre le vent et l'arbre, a été montrée par Mayer (1987) et Gardiner & Quine (2000). En effet, la seule traînée statique ne suffit pas à expliquer les déformations des arbres sous le vent, ni leurs vitesses critiques de ruptures et de verses. La prise en compte de l'inertie de l'arbre et de l'échange d'énergie entre l'énergie cinétique et l'énergie élastique est donc cruciale dans la modélisation de son excitabilité dynamique par le vent. Toutefois, ces études se concentraient sur le cas de conifères, à forte réduction de sections à la ramification, où la déformation du tronc était la préoccupation principale, et où le reste de l'arbre n'était considéré que sous la forme d'une masse supplémentaire répartie sur le tronc (Gardiner, 1992; Spatz & Zebrowski, 2001). Comme le fait judicieusement remarquer l'échelle de Beaufort, la participation dynamique des branches de différentes dimensions à la réponse de l'arbre au vent, s'observe visuellement dans le cas d'un arbre à la ramification plus complexe.

1.4.1 La répartition dans l'arbre de la réponse au vent

Baker (1997) a mesuré, à l'aide d'un interféromètre laser, le déplacement sous faible vent du tronc de plusieurs tilleuls (*Tilia europea*, modèle de Troll, Millet *et al.*, 1998). Les géométries des tilleuls variaient en fonction de leurs proximités plus ou moins prononcées avec des arbres voisins (et probablement de l'élagage artificiel, étant donné qu'il s'agit d'arbres urbains). Trois types de tilleuls ont été définis, Figure 1.9. Les arbres de type I, dit normals, avaient des branches ayant un angle de 20-30 degrés par rapport à la verticale. Les voisins de ces arbres étaient à une distance de l'ordre d'une demi hauteur de l'arbre. Les arbres de type II, étaient des arbres isolés, de moindre hauteur, et dont le branchage était très développé. Les arbres de type III étaient des arbres dont les branches avaient une inclinaison de l'ordre de 10 degrés. Les voisins de ces arbres étaient très proches, de l'ordre d'un cinquième de la hauteur des arbres. Les spectres en fréquence des déplacements des troncs des arbres se distinguent selon les types d'arbres. On observe

un pic de forte amplitude pour les types I et III, et un spectre plat pour le type II, dont le branchage a pu être pleinement développé en l'absence de voisins. Ces résultats mettent en évidence une forte influence de la géométrie de l'arbre sur les mouvements du tronc de l'arbre lors d'une excitation par le vent.



FIGURE 1.9 – Tilleuls de différentes géométries instrumentés par Baker (1997). Type (a) I, (b) II et (c) III.

Plus récemment, James *et al.* (2006) ont instrumenté les troncs d'arbres d'architectures très différentes : un cyprès, un eucalyptus, un araucaria et un palmier, Figure 1.10. L'analyse spectrale de signaux enregistrés sur les jauges de déformation, lors d'une excitation par le vent, a mis en évidence des spectres très distincts suivant l'importance du système ramifié des arbres considérés. En effet, le pic de la fréquence principale était très prononcé dans le cas du palmier et du cyprès, alors qu'il était plus large dans les cas de l'araucaria et de l'eucalyptus, Figure 1.10.

Afin d'expliquer les différents spectres observés, James *et al.* (2006) ont proposé un modèle où l'ensemble du système ramifié de l'arbre serait un assemblage d'oscillateurs amortis, Figure 1.11. Les branches auraient ainsi le rôle d'amortisseurs dynamiques envers le tronc. En effet, selon ce principe, la réponse à l'excitation serait répartie sur l'ensemble de la structure, et non concentrée sur le tronc. Ce mécanisme aurait l'avantage de réduire l'amplitude des oscillations du tronc, dont la rupture nuirait à l'intégrité de la structure. Cette description souligne le rôle de chacun des constituants de l'arbre dans la dynamique

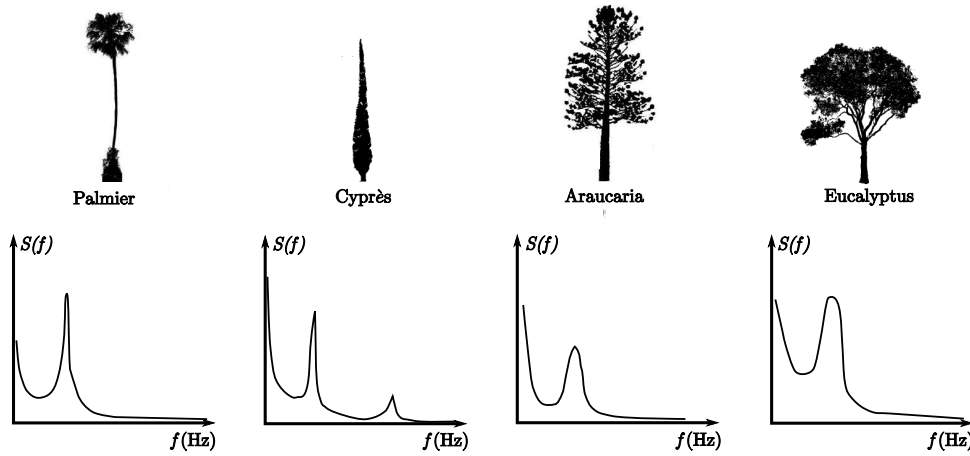


FIGURE 1.10 – Arbres d'architectures contrastées étudiés par James *et al.* (2006), et formes des spectres en fréquence de leur réponse au vent.

au vent et fournit une première explication du rôle du système ramifié. Cette explication du rôle du système ramifié n'est malheureusement que qualitative. La vérification de la participation des branches à la dynamique des arbres analysés n'a pu être confirmée dans leur étude, étant donné que seuls les mouvements des troncs ont été enregistrés par des capteurs posés sur ceux-ci.

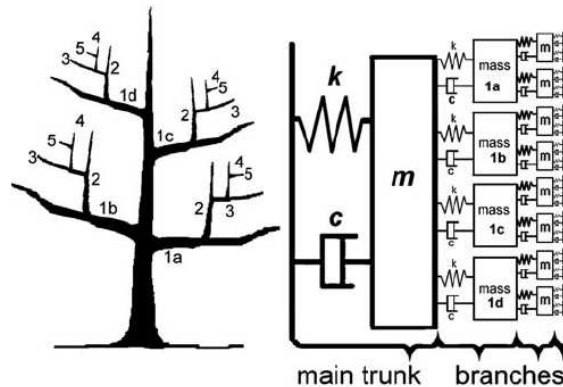


FIGURE 1.11 – Rôle du branchage dans la répartition de l'excitation selon James *et al.* (2006).

Spatz *et al.* (2007) ont proposé un concept analogue pour discuter le rôle et l'intérêt de la ramification de l'arbre dans son interaction dynamique avec le vent. Un arbre dont toutes les fréquences de branches seraient très proches, constituerait un système d'oscilla-

teurs amortis couplés permettant une dissipation optimale de l'énergie. Cette dissipation optimale serait à la fois due à une répartition de l'excitation dans l'ensemble de la structure, et au transfert de l'énergie entre les branches de fréquences proches. La concentration en fréquence des branches de l'arbre et la diminution progressive des fréquences des branches (isolées expérimentalement de la structure) avec l'augmentation de la longueur de celles-ci ont été montrées sur un spécimen de pin de Douglas. Il est cependant important de rappeler que les modes de vibrations d'une structure composée de sous-structures assemblées ne sont pas les modes de vibrations de chaque structure séparée (Geradin & Rixen, 1994).

Les études de Baker (1997), James *et al.* (2006) et Spatz *et al.* (2007) montrent donc une influence de l'ensemble du système branché de l'arbre sur la réponse de son tronc à une excitation par le vent. Les modèles conceptuels proposés par James *et al.* (2006) et Spatz *et al.* (2007) expliquent cette influence par le rôle dynamique des branches des arbres dans la réponse au vent. Malheureusement, la participation des branches à la réponse de l'arbre n'a pour l'instant pas été montrée expérimentalement. De plus, ces concepts, même s'ils proposent un rôle des branches dans la dynamique, ne permettent pas de quantifier ce rôle. Et ils ne permettent pas non plus de comparer une géométrie d'arbre ramifié à une autre.

1.4.2 La modélisation de la dynamique de l'arbre au vent

La modélisation mécanique de la dynamique de l'arbre au vent permet de rendre compte des efforts appliqués à l'arbre et d'étudier la réponse de celui-ci aux épisodes venteux. Gardiner (1992) a proposé un modèle unidimensionnel, applicable aux conifères, où les troncs de ceux-ci sont considérés comme des poutres d'Euler en flexion, à diamètres variables. La masse du reste de l'arbre est prise en compte comme une masse ponctuelle située au centre de masse du branchage. L'effort aérodynamique est lui aussi considéré comme une force ponctuelle fonction de la surface foliaire de l'arbre. Ce type de modèle monomodal, proposé aussi par Mayer (1987) dans le cas d'un diamètre de tronc non variable (défilement nul), ne tient compte que de la masse des branches dans leur globalité, et non, par exemple, de leur répartition sur le tronc.

Pour essayer de mieux rendre compte de la dynamique de l'arbre au vent, Kerzenmacher & Gardiner (1998) ont modélisé la répartition massique sur le tronc de l'ensemble des branches, de même que la répartition sur le tronc de l'effort aérodynamique. Cette augmentation de la complexité du modèle n'a pas permis de rendre compte de la réponse des pins au vent avec suffisamment de précision. Kerzenmacher & Gardiner (1998) ont ainsi suggéré la nécessité de modéliser la dynamique des branches de l'arbre en plus de celle du tronc.

Plus récemment, Moore & Maguire (2008), Sellier *et al.* (2008) et Sellier & Fourcaud (2009) ont développé des modèles numériques de la dynamique de l'arbre au vent, résolus par la méthode des éléments finis, et incluant la dynamique des branches d'ordres deux et trois. L'effort aérodynamique considéré est lui aussi réparti sur les branches en fonction de la surface foliaire qu'elles portent. La meilleure description géométrique des arbres, permise par ces modèles plus complexes, reproduit mieux la dynamique de l'arbre au vent puisqu'elle prend en considération la répartition de l'excitation sur plusieurs ordres de branches.

Cependant, comme l'ont fait remarquer respectivement Moore & Maguire (2008) et Sellier & Fourcaud (2009), ces modèles demandent une description intensive de la géométrie de l'arbre, alors que les résultats obtenus montrent une grande sensibilité aux paramètres géométriques. En dépit de la meilleure compréhension du rôle des branches dans la dynamique de l'arbre fournie par ces modèles, la portée de leurs résultats s'en trouve limitée. Ils sont coûteux, et l'analyse d'un cas n'est pas généralisable du fait de la variabilité géométrique observée entre espèces, Figure 1.10, mais aussi entre individus d'une même espèce suivant leurs conditions de croissance, Figure 1.9.

On voit donc tout d'abord le besoin de développer un modèle quantitatif et générique permettant de prédire l'organisation des caractéristiques dynamiques de l'arbre en fonction de la géométrie de son système ramifié, et de discuter l'effet de la variabilité architecturale et biométrique des arbres.

Etant donné le coût des simulations de cas d'interaction vent-arbres, il a aussi été souligné le grand intérêt à développer, à partir du modèle de prédiction de l'organisation des caractéristiques dynamiques, un modèle quantitatif et générique prédisant la répartition dans l'arbre de sa réponse à une excitation par le vent en fonction de la géométrie de son système ramifié.

1.5 L'acclimatation mécanique

L'arbre est un organisme en développement continu et ces sollicitations mécaniques chroniques par le vent, discutées dans la partie précédente, induisent une réponse physiologique de celui-ci (Telewski, 2006). Cette modulation du développement sous contraintes mécaniques, appelée thigmomorphogénèse, agit principalement sur la croissance des axes (Mouliat *et al.*, 2006), mais aussi sur les propriétés matérielles du bois nouvellement créé (Telewski, 1989).

La modulation du développement agit à la fois sur la croissance primaire et secondaire (Mouliat *et al.*, 2006), et a été quantifiée dans le cas d'une plante soumise à des flexions contrôlées par Coutand & Mouliat (2000) et Coutand *et al.* (2009). Une baisse de la croissance en longueur, induite par le stimulus en flexion, a été reliée à l'intégrale des déformations longitudinales sur la tige qui modélise la mécanoperception cumulée des déformations subies par l'ensemble des cellules de la tige (Coutand & Mouliat, 2000). Une augmentation de la croissance en diamètre en un endroit est reliée à l'intégrale des déformations induites au voisinage du point d'intérêt (Coutand *et al.*, 2009). On déduit donc que l'acclimatation mécanique tend à augmenter le diamètre à la base et le défilement du diamètre le long de l'axe, mais aussi à réduire sa longueur et son élancement.

Telewski (1989) a aussi mis en évidence que les flexions imposées à des plantes tendent à produire un bois ayant un plus faible module d'Young.

L'étude des parties aériennes d'un peuplement de pins par Bruchert & Gardiner (2006) a mis en évidence l'acclimatation de l'arbre dans son ensemble. En caractérisant le degré d'exposition au vent des arbres en fonction de leur distance à la clairière, Bruchert & Gardiner (2006) ont mis en évidence un « diamètre à hauteur de poitrine » (appellation forestière correspondant à une hauteur de 1,3 mètres au dessus du sol) et un défilement du tronc plus important pour les arbres les plus exposés, de même qu'une hauteur plus faible et, en conséquence, un élancement du tronc réduit. Plus largement, il est connu que le port des arbres isolés est très différent de ceux de la même espèce en couvert (voir Figure 1.9). La réponse thigmomorphogénétique au vent est très probablement impliquée dans cette différence (Telewski, 2006; Mouliat *et al.*, 2006), tout en étant combinée dans des proportions inconnues aux réponses morphogéniques induites par d'autres facteurs (lumière, température, etc.).

Additionnellement aux effets de l'acclimatation sur les parties aériennes de l'arbre, il

ne faut pas non plus négliger l'excitation par le vent des parties souterraines responsables, entre autres, de l'ancrage au sol : Il en résulte une modification de l'allocation de masse entre les parties aériennes et souterraines (Coutand *et al.*, 2008), ce qui à terme renforce l'ancrage au sol de l'arbre.

De manière étonnante, aucune étude ne semble avoir porté sur les effets thigmomorphogénétiques du vent sur le positionnement et le dimensionnement de la ramification (même si les arbres en situations ventées ont visiblement des morphologies modifiées traduisant une forte modulation de leur développement par le vent), Figure 1.12.



FIGURE 1.12 – Arbre dont le développement et la ramification ont été modulés par le vent (MR, Puy Pariou, mars 2008).

L'excitation chronique de l'arbre par le vent est donc responsable d'une modulation de son développement. Cette modulation est d'autant plus importante pour la croissance et la survie de l'arbre qu'il va être soumis au cours de son développement architectural à des vents impliquant des efforts mécaniques croissants (Moullia *et al.*, 2006) : d'autant plus forts que l'arbre grandit, tout en ayant une prise au vent croissante avec le développement de son système ramifié et de son feuillage. On comprend ainsi l'importance d'une acclimatation thigmomorphogénétique au vent. Cependant, ce sont les déformations de l'arbre, et non l'excitation elle-même, qui sont à l'origine de la thigmomorphogénèse (Moullia *et al.*, 2006). Or, ce sont les caractéristiques dynamiques de l'arbre qui déterminent les déformations résultant d'une excitation. Ceci fait des caractéristiques dynamiques de l'arbre un maillon central de sa chaîne d'acclimatation mécanique, Figure 1.13. De plus,

ces caractéristiques dynamiques sont fonction de la géométrie, des propriétés matérielles de l'arbre, et de son encastrement. Autant de paramètres qui sont modifiés par le processus d'acclimatation.

Malheureusement, il n'y a pas eu pour l'instant d'étude s'étant intéressée à l'évolution temporelle des caractéristiques dynamiques d'arbres au cours de leurs développements, et notamment au lien entre l'évolution de leurs caractéristiques dynamiques et leurs croissances géométriques. Ce qui est pourtant un point central pour la compréhension du mécanisme d'acclimation mécanique de l'arbre.

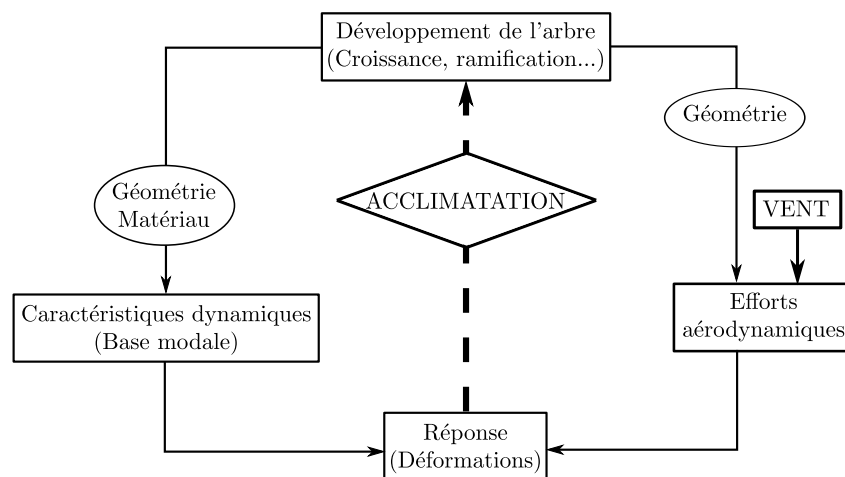


FIGURE 1.13 – Schéma de la chaîne d'acclimatation mécanique de l'arbre au vent.

1.6 Problématique de la thèse

Les caractéristiques dynamiques de l'arbre sont un point central de son interaction dynamique avec le vent. D'elles dépendent les déformations induites, autant dans le contexte du vent chronique, responsable d'une acclimatation mécanique de l'arbre, que dans le cas d'un épisode venteux exceptionnel où sa résistance mécanique est en jeu. Or l'arbre est un organisme en développement continu par la croissance de ces axes et leurs ramifications.

Le deuxième chapitre de thèse développe donc la question suivante :

Existe-il une évolution temporelle des caractéristiques dynamiques de l'arbre ?

Pour apporter une réponse à cette question, la première fréquence modale de peupliers est suivie au cours de leurs développements. L'évolution des fréquences des plantes est ensuite analysée en rapport avec leurs croissances géométriques. Il est ensuite développé un modèle mécanique de la flexion de la tige d'une plante, permettant de prédire sa première fréquence modale en fonction de sa géométrie, et ainsi de discuter dans quelle mesure la croissance géométrique des plantes suivies explique l'évolution dans le temps de leurs fréquences.

Ce développement des arbres par la croissance de leurs axes et leurs ramifications résulte en une grande variété de géométries, dues à la fois aux différents modèles architecturaux suivis, et à l'interaction des arbres avec leurs environnements qui modulent leurs développements. Pourtant aucun modèle mécanique ne permet d'expliquer quantitativement l'influence de la géométrie de l'arbre sur l'organisation spatiale de ses caractéristiques dynamiques, c'est à dire où sont localisés les déplacements modaux et à quelles fréquences modales sont-ils associés, ce qui permettrait ensuite d'étudier le rôle de la géométrie de l'arbre dans la répartition de sa réponse à l'excitation par le vent.

Le troisième chapitre de thèse développe ainsi la question suivante :

Existe-il une organisation spatiale des caractéristiques dynamiques de l'arbre ?

Pour répondre à cette question, les modes de vibration de quatre arbres de dimensions et d'architectures distinctes sont d'abord déterminés et comparés. Il est ensuite développé un modèle prédisant l'organisation spatiale des caractéristiques dynamiques de l'arbre selon sa géométrie. Celui-ci est obtenu par une analyse dimensionnelle du problème, afin de déterminer des lois d'échelle prédisant les caractéristiques des modes de vibration de l'arbre. La géométrie de l'arbre est caractérisée par un nombre réduit de paramètres biométriques qui permettent de décrire un maximum de géométries en utilisant un minimum de paramètres, mais tout en couvrant un maximum de possibilités. Enfin, les prédictions par les lois d'échelle sont comparées aux caractéristiques dynamiques des arbres analysés précédemment. Les lois d'échelles permettent de discuter l'influence de la géométrie de l'arbre sur l'organisation spatiale de ses caractéristiques dynamiques.

Dans la mesure où un modèle prédictif de la répartition spatiale des caractéristiques dynamiques de l'arbre est développé, il ouvre la voie à la possibilité de prédire de manière

générique la répartition dans l'arbre de sa réponse à une excitation par la vent.

Le quatrième chapitre de thèse développe finalement la question suivante :

Comment est répartie dans l'arbre la réponse à une excitation par le vent ?

Dans une premier temps, la force d'interaction aérodynamique, entre le vent et l'arbre, est décomposée selon trois contributions : la traînée aérodynamique statique, l'amortissement aérodynamique linéaire et l'excitation aléatoire par la turbulence. La répartition de la réponse à chaque source est modélisée. Ensuite, l'analyse dimensionnelle de chaque composante projetée sur les modes, et sa combinaison avec les lois d'échelle prédisant l'évolution des caractéristiques modales, permet de développer de nouvelles lois d'échelle. Celles-ci comparent les contributions des différents modes de l'arbre à la réponse à l'excitation, toujours en fonction de paramètres biométriques décrivant la géométrie de celui-ci. Elles permettent de discuter l'effet de l'architecture de l'arbre sur la répartition de la réponse au vent.

Une dernière partie permet ensuite de revenir sur les réponses apportées à toutes ces questions et d'élaborer les perspectives ouvertes par ces nouvelles conclusions.

Chapitre 2

Evolution temporelle de la dynamique de l'arbre

L'évolution temporelle des caractéristiques dynamiques de l'arbre au cours de son développement n'a pas encore été explorée. C'est pourtant un aspect central de l'interaction dynamique, à long terme, de l'arbre avec le vent. Une approche expérimentale de ce problème est maintenant présentée. Elle consiste à suivre la fréquence du premier mode de vibration de plantes au cours de leur développement. Un modèle mécanique de la plante en flexion prédisant sa première fréquence modale en fonction de sa géométrie est aussi développé. Il permet de discuter dans quelle mesure la croissance géométrique explique l'évolution dans le temps de la fréquence.

2.1 Expérience de suivi des fréquences de peupliers

2.1.1 Le matériel végétal

Quatorze jeunes peupliers (*Populus alba*) issus de microboutures par rejets sur plantes mères ont été utilisés. Il s'agit de clones au même stade de développement et dans le même état physiologique. Ces plantes, une fois dans des pots contenant de la perlite, ont été mises en place sur une table de culture avec subirrigation fertilisante (10 minutes, trois fois par jour : 6h, 16h, 23h, mélange N-P-K : 20%-20%-20% à 0,5g/L). L'ensemble du système était installé sous serre, dans des conditions thermiques semi-contrôlées ($\leq 25^\circ$) par refroidissement automatique. Les plantes telles qu'elles étaient installées en serre sur la table de culture sont présentées à la figure 2.1.

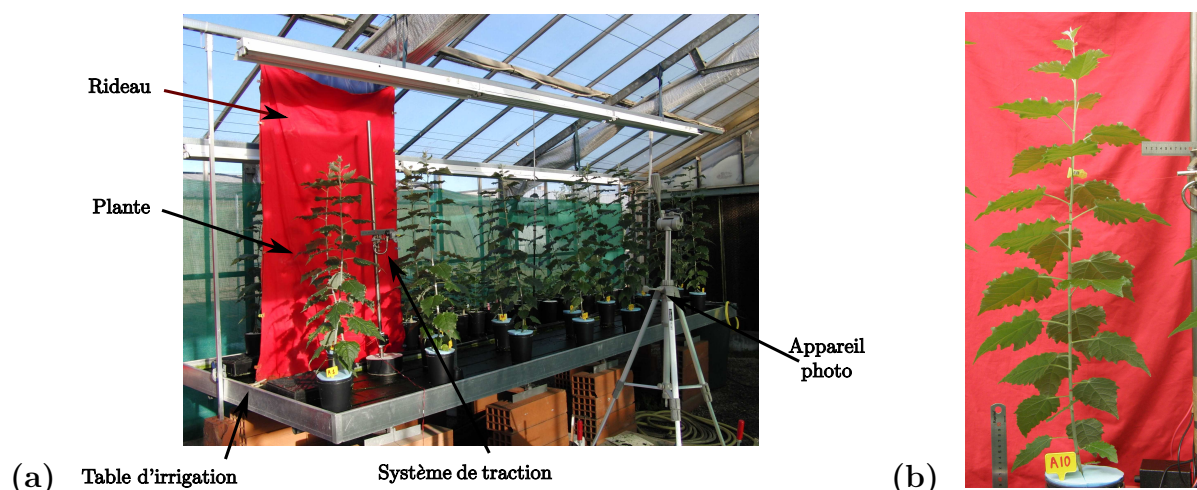


FIGURE 2.1 – (a) Montage expérimental avec les peupliers sur la table de croissance, et (b) photo d'une plante avant son excitation mécanique journalière.

L'expérience a eu lieu du 21 août au 25 septembre 2008. Au début de l'expérience, les plantes avaient une hauteur moyenne de 77,5 cm (écart-type : 10,6 cm), et un diamètre moyen de 5,6 mm (écart-type : 0,6 mm). A la fin de l'expérience, elles avaient une hauteur moyenne de 92,5 cm (écart-type : 11,42 cm), et un diamètre moyen à la base de 8,6 mm (écart-type : 0,6 mm). Elles ont donc grandi en moyenne de 19,4%, et leurs diamètres à la base ont augmenté en moyenne de 53,6%.

2.1.2 Le protocole de l'expérience

Une excitation mécanique journalière était appliquée aux plantes. Il s'agit d'un déplacement latéral imposé, égal à un dixième de la hauteur de la plante, et appliqué au deux tiers de sa hauteur, Figure 2.2. La mise en traction, jusqu'à la position souhaitée, était effectuée à l'aide d'un moteur appliquant un déplacement de 0,9 mm/s. Une fois la condition de déplacement imposé obtenue, celle-ci était conservée durant une minute. Deux conditions de retour distinctes étaient imposées, chacune à une moitié de plantes : traitement « retour lent », et traitement « lâcher »). Traitement « retour lent » : Les plantes paires étaient ramenées par le moteur jusqu'à sa position initiale, à une vitesse identique à celle de la mise en flexion. Traitement « lâcher » : Les plantes impaires étaient lâchées par une rupture du fil de traction à l'aide d'une flamme. Avant le début de l'expérience, les plantes ont été appariées deux à deux sur des critères de taille (hauteur de la tige, diamètre à la base, nombre de feuilles). Puis chaque paire a été répartie entre les deux types de traitements, afin de contrôler encore mieux la variabilité inter-plantes.

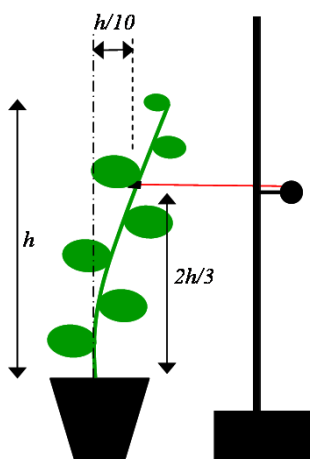


FIGURE 2.2 – Schéma des conditions du lâcher appliqué journalièrement aux peupliers.

Détermination de la fréquence

Le retour des plantes impaires, qui s'effectuait par des oscillations amorties, était filmé tous les trois jours afin de déterminer ultérieurement la fréquence du premier mode de

vibration par traitement de vidéos. La première fréquence modale des plantes impaires était donc régulièrement mesurée.

Afin de déterminer les fréquences d'oscillations, l'analyse se concentrait sur une ligne horizontale de la vidéo. La figure 2.3a montre l'évolution d'une ligne analysée. Le déplacement de la plante entre deux images successives est obtenu par la recherche du maximum de corrélation entre cette même ligne, mais prise à deux pas de temps successifs. Obtenir le déplacement entre deux images successives permet de reconstruire la vitesse d'oscillation de la plante entre chaque image, Figure 2.3b. La fréquence des oscillations est ensuite déterminée par ajustement de la vitesse des oscillations amorties d'un système dynamique à un degré de liberté sur l'évolution temporelle, déduite par corrélation entre pas de temps successifs, Figure 2.3b.

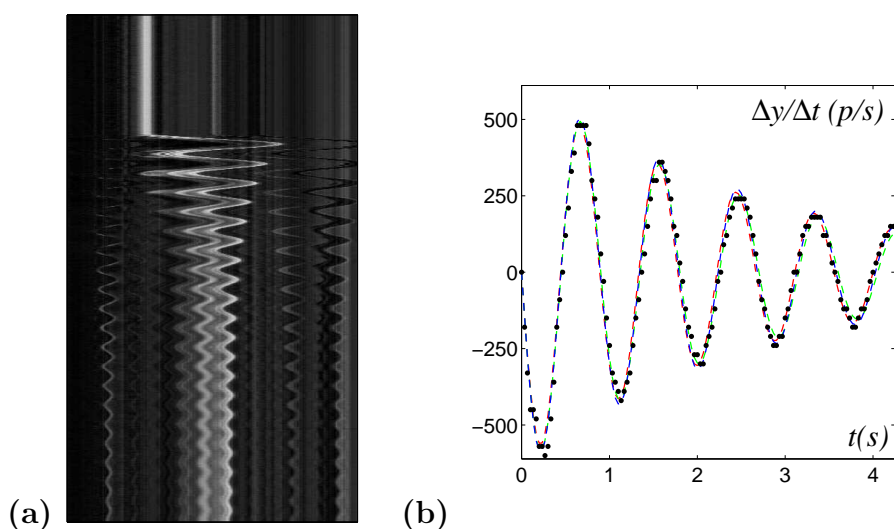


FIGURE 2.3 – Détermination de la fréquence du premier mode de vibration des plantes par enregistrement et analyse des vidéos de lâchers. (a) Exemple d'évolution de la composante verte de la vidéo sur une ligne. (b) (·) Vitesse d'oscillation déduite de (a) par corrélation entre les pas de temps successifs, et courbe interpolée des oscillations amorties d'un système à un degré de liberté.

Détermination de la géométrie

De plus, des mesures géométriques de l'ensemble des plantes étaient effectuées avec la même régularité que les mesures des fréquences. La longueur des plantes était mesurée par

l'analyse de photos prises après avoir placé une échelle à coté de la plante. Le défilement des tiges des plantes était obtenu par une mesure du diamètre prise tous les dix centimètres depuis la base, et jusqu'à environ trente centimètres du bourgeon terminal, afin d'éviter d'appliquer un stress mécanique dans la zone de la plante où a lieu la croissance primaire.

Outils statistiques

Des modèles statistiques (suivant les cas linéaires par morceaux, linéaires et non linéaires globaux mixtes) sont ajustés aux mesures de la première fréquence modale des plantes et de la géométrie de leurs tiges (diamètre à la base, longueur, défilement du diamètre) afin de déterminer un modèle d'évolution moyenne pour chaque quantité. Des tests de conformité sont aussi effectués dans le but de vérifier si les résultats observés sont statistiquement significatifs.

2.1.3 Deux régimes d'évolution des fréquences

L'évolution de la fréquence du premier mode de la plante 1, mesurée tout au long de l'expérience, est présentée à la figure 2.4 (les évolutions des autres plantes sont montrées en Annexe A.1). La fréquence de la plante 1 varie entre 1,21 et 1,42 Hertz. Cela correspond à une variation globale de 17,4% sur les 35 jours de l'expérience. L'évolution se décrit selon deux régimes très distincts l'un de l'autre :

- Un premier régime (I) dure environ 20 jours. La fréquence du premier mode reste quasiment constante pendant ce régime. En effet, on observe une variation de 3,3%, probablement de l'ordre de l'incertitude de notre mesure.
- Le deuxième régime (II) dure les 15 derniers jours de l'expérience. La fréquence du premier mode de la plante augmente linéairement, ce qui représente une variation de 16,4% sur le deuxième régime d'évolution de la fréquence.

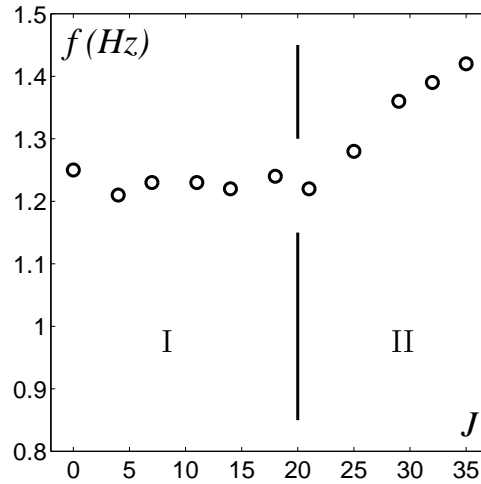


FIGURE 2.4 – Evolution temporelle de la première fréquence modale mesurée pour la plante 1. Les évolutions pour les autres plantes sont présentées en Annexe A.1.

Afin d’obtenir une description globale des fréquences de l’ensemble des plantes, un modèle linéaire par morceaux, équation 2.1, a été ajusté à l’ensemble des évolutions des premières fréquences modales des plantes suivies par un lâcher. Ce modèle d’évolution de la fréquence, f_i , s’écrit sous la forme :

$$f_i(j) = \begin{cases} a_i j + b_i + \epsilon_{i,j}, & \text{si } j \leq j_t \\ c_i (j - j_t) + (a_i j_t + b_i) + \epsilon_{i,j}, & \text{si } j \geq j_t \end{cases} \quad (2.1)$$

Où i est le numéro de la plante, et j est le jour de mesure. L’erreur de régression pour la plante i au jour j est $\epsilon_{i,j}$. Le jour de transition entre les deux régimes linéaires est j_t .

Les moyennes et les écart-types de chaque coefficient de la régression linéaire par morceaux, ainsi que du jour de transition, sont rassemblés au tableau 2.1. Le maximum des écart-types d’erreurs de régression obtenus pour chaque plante est 0,027, alors que le coefficient de détermination minimum est de 94%. L’ajustement de régressions linéaires par morceaux aux évolutions dans le temps des premières fréquences modales des plantes, est donc tout à fait satisfaisant. La régression par morceaux obtenue pour la première plante est présentée à la figure 2.5a.

Une évolution moyenne est obtenue à partir des régression linéaires ajustées pour chaque plante, 2.5b. Cette évolution moyenne suit, elle-aussi, une régression linéaire par morceaux, dont les coefficients sont les moyennes données au tableau 2.1.

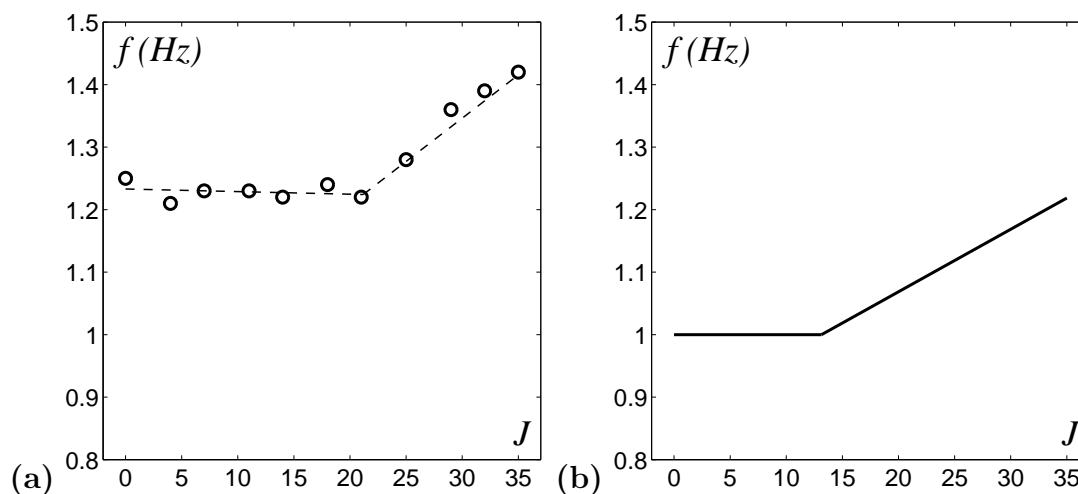


FIGURE 2.5 – (a) Evolution temporelle de la fréquence du premier mode de vibration de la plante 1 : (o) mesures, (---) régression linéaire par morceaux ajustée sur les mesures. (b) Evolution moyenne de la fréquence des premiers modes de vibration des plante déduite des régressions linéaires par morceaux. Les évolutions temporelles des fréquences de premiers modes de vibration des autres plantes sont présentées en Annexe A.1.

Coefficient	moyenne	écart-type
a_i	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
b_i	1	0,12
c_i	$9,4 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$
j_t	13,1	5,1

TABLE 2.1 – Valeurs moyennes et écarts types des coefficients définissant les régression linéaires par morceaux ajustées aux évolutions des premières fréquences modales des plantes suivies par lâcher.

Vu la très faible pente moyenne obtenue pour le premier régime d'évolution de la fréquence, et la pente moyenne proche de 0,01 Hz/j obtenue pour le deuxième régime, des test de conformités de moyennes sont maintenant appliqués afin de tester les deux hypothèses suivantes : (a) le première régime est un régime à fréquence constante, (b) le deuxième régime suit une augmentation linéaire de la fréquence de 0,01 Hz/j.

(a) On obtient une probabilité supérieure à 81% que l'échantillon des pentes des premiers segments obtenus, a_i , soit le résultat d'un simple échantillonnage au hasard d'une population de fréquences constantes au cours du temps (pente nulle), et de distribution normale autour de cette valeur (reflétant la variabilité biologique des caractéristiques des plantes). Les pentes observées dans notre échantillon de plantes ne sont donc pas statistiquement significativement différentes de zéro, et on accepte donc l'hypothèse d'une constance des fréquences des plantes sur la première partie de l'expérience avec une valeur moyenne égale à 1 Hz.

(b) La probabilité que l'échantillon des pentes des second segments obtenus, c_i , puisse être tiré d'une distribution normale centrée en 0,01 est supérieure à 64%. On accepte donc l'hypothèse d'une augmentation moyenne de la fréquence à un rythme de 0,01 Hz/j dans la deuxième partie de l'expérience.

L'évolution de la fréquence moyenne, Figure 2.5b, se décrit décrit donc sous la forme de deux régimes d'évolution très distincts. Le premier régime (I) dure 13 jours. La moyenne des fréquences des premiers modes reste constante pendant ce régime, et est égale en moyenne à 1 Hz. Le deuxième régime (II) dure les 22 derniers jours de l'expérience. Pendant ce régime, la moyenne des fréquences des premiers modes des plantes varie linéairement à un rythme de 0,01 Hz/j, et augmente donc de 20%.

2.1.4 Le développement géométrique des peupliers

L'architecture des plantes suivies expérimentalement est mono-axiale, c'est à dire composée d'une tige sans ramification. La description de la géométrie des peupliers, au cours de l'expérience, est donc restreinte à la description de leurs tiges. Elles se décrivent selon trois paramètres : le diamètre à la base de la tige, sa longueur et le coefficient allométrique décrivant son défilement (Niklas & Spatz, 2004; Moulia & Fournier-Djimbi, 1997).

L'évolution de la géométrie de la plante 1 est montrée à la figure 2.6. Le développement régulier des tiges des plantes est décrit à l'aide d'un modèle biométrique déterminé statistiquement. Les coefficients moyens obtenus et leurs écart-types décrivant les évolutions des tiges sont présentés au tableau 2.2, et les évolutions temporelles des paramètres géométriques décrivant les autres tiges de peupliers sont montrées à l'Annexe A.3. Notons qu'aucun de ces paramètres n'a présenté une variation significative si l'on compare statis-

tiquement les lots de plantes soumises au traitement « lâcher » ou « retour lent » (données non montrées). Nos observations des fréquences n'ont donc pas perturbé le développement biométrique des plantes, qui reste représentatif de l'ensemble des plantes étudiées.

Le diamètre à la base des peupliers

Le diamètre à la base de la tige des plantes suit une évolution linéaire, Figure 2.6a. Un modèle global linéaire mixte est ajusté aux mesures expérimentales, équation 2.2. Les coefficients moyens obtenus et leurs écart-types décrivant les évolutions des tiges sont présentés au tableau 2.2. Le modèle d'évolution du diamètre à la base des plantes, $D_{base,i}$, est :

$$D_{base,i}(j) = D_{0,i} + k_{D,i} j + \epsilon_{i,j} \quad (2.2)$$

Où $D_{0,i}$ est le diamètre à la base de la plante i au début de l'expérience, et $k_{D,i}$ est le taux d'accroissement du diamètre de la plante i . Un effet d'appariement initial des plantes sur le diamètre initial est pris en compte dans le modèle mixte afin d'améliorer l'ajustement.

L'écart-type de l'erreur de régression obtenu est de 0,12, alors que le coefficient de détermination de la régression est de 0,99. L'analyse statistique confirme sans aucun doute l'évolution linéaire des diamètres à la base des plantes.

La longueur des peupliers

La longueur des tiges augmente de plus en plus faiblement jusqu'à atteindre une longueur constante, Figure 2.6b. Ce comportement de la croissance en longueur est induit par une baisse de la durée de la photopériode durant l'expérience (en effet un test de rallongement artificiel de la photopériode en fin d'expérience a relancé la croissance en hauteur -données non montrées-). Cette évolution de la longueur est décrite par une exponentielle décroissante, équation 2.3, qui est ajustée en utilisant un modèle global non linéaire mixte. Les coefficients moyens obtenus et leurs écart-types décrivant les évolutions des tiges sont présentés au tableau 2.2. Le modèle d'évolution de la longueur est :

$$L_i(j) = A_{L,i} e^{-j/\tau_i} + B_{L,i} + \epsilon_{i,j} \quad (2.3)$$

Où $A_{L,i}$, τ_i et $B_{L,i}$ sont respectivement l'amplitude et le temps caractéristique du ralentissement de la croissance en longueur, et la longueur finale de la plante i . Un effet

d'appariement initial des plantes sur les coefficients a été pris en compte dans le modèle mixte afin d'améliorer l'ajustement.

L'écart-type de l'erreur de régression est de 0,95, alors que le coefficient de détermination de la régression est supérieur à 0,99. L'analyse statistique met ainsi en évidence un ralentissement en exponentielle décroissante de la vitesse de croissance en longueur des tiges, vers une longueur constante finale de celles-ci.

Le défilement du diamètre des peupliers

Le défilement du diamètre de la tige d'une plante, à un jour donné, est décrit par une loi allométrique, équation 2.4. Un modèle non linéaire global du défilement est ajusté aux mesures de diamètres. On obtient ainsi un coefficient allométrique $\alpha_{i,j}$, pour chaque plante, i , à chaque jour de mesure, j . Le défilement allométrique de la tige s'écrit sous la forme :

$$\frac{D_{i,j}(x)}{D_{base,i}(j)} = \left(\frac{x}{x_{base,i}(j)} \right)^{\alpha_{i,j}} + \epsilon_{i,j} \quad (2.4)$$

Où pour une plante i au jour j , x est la distance à l'apex terminal de la plante, $D_{i,j}(x)$ est le défilement de la tige, $D_{base,i}(j)$ est le diamètre à la base de la tige et mesuré à la hauteur $x_{base,i}(j)$, et $\alpha_{i,j}$ est le coefficient allométrique du défilement.

L'écart-type de l'erreur de régression est de 0,13, alors que le coefficient de détermination de la régression est de 0,99. L'analyse statistique confirme le défilement allométrique des tiges des peupliers.

L'évolution du défilement du diamètre de la tige, au long de l'expérience, est décrit au travers de l'évolution du coefficient allométrique, α . Un modèle global linéaire est ajusté aux évolutions des coefficients allométriques des plantes, équation 2.5, Figure 2.6c. Les coefficients moyens obtenus et leurs écart-types décrivant les évolutions des tiges sont présentés au tableau 2.2. L'évolution du coefficient allométrique des plantes s'écrit :

$$\alpha_{i,j} = \alpha_{i,0} + k_{\alpha_i} j + \epsilon_{i,j} \quad (2.5)$$

Où pour la plante i , $\alpha_{i,0}$ est le coefficient allométrique de défilement au début de l'expérience, et k_{α_i} est le taux d'accroissement du coefficient allométrique.

L'écart-type de l'erreur de régression est de $5,9.10^{-3}$, alors que le coefficient de

détermination de la régression est de 0,95. Le défilement des tiges des peupliers évolue selon une augmentation linéaire du coefficient allométrique du défilement.

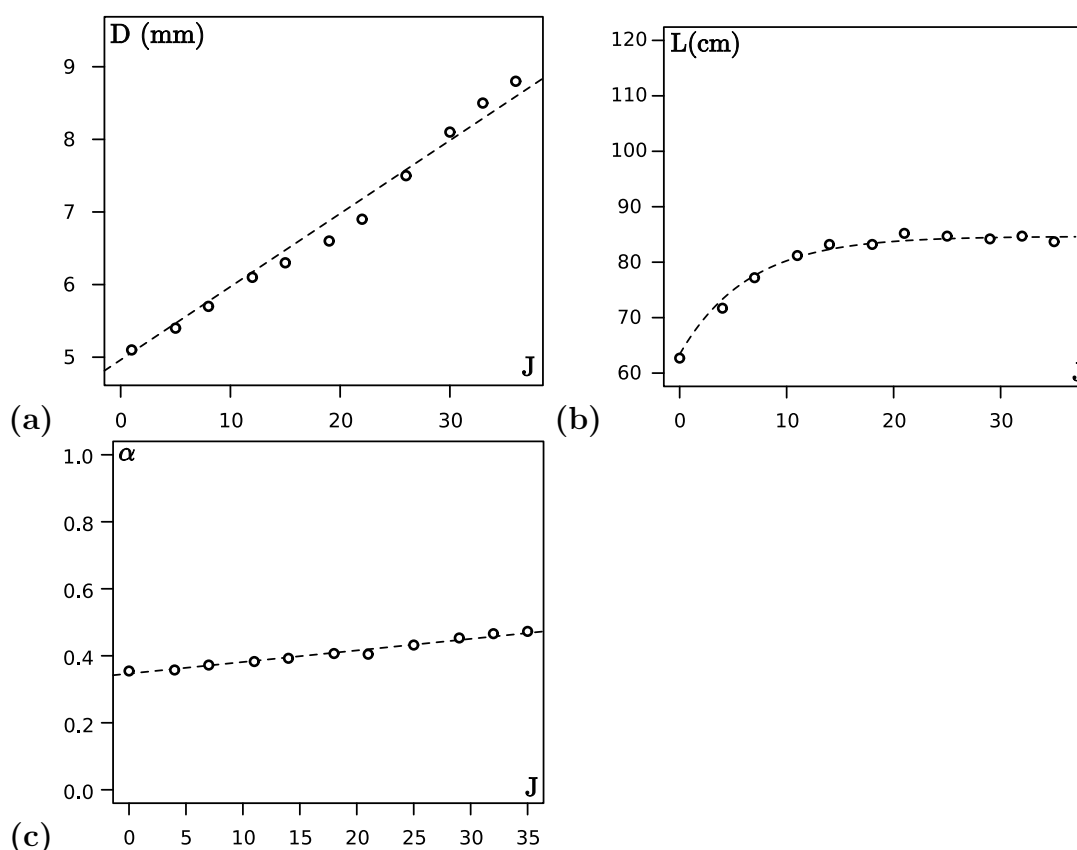


FIGURE 2.6 – Evolutions temporelles (a) du diamètre à la base, (b) de la longueur de la plante 1, et (c) du coefficient allométrique de défilement. (o) Mesures. (—) Modèle biométrique. Les résultats obtenus pour les autres plantes sont montrés à l'Annexe A.3.

L'évolution régulière de la géométrie des tiges des plantes est maintenant décrite par un modèle biométrique. Cette évolution se distingue par l'évolution particulière de la longueur de la tige des plantes pendant l'expérience. En effet la croissance en longueur des tiges diminue jusqu'à s'interrompre alors que le diamètre à leur base et le coefficient de la loi de défilement du diamètre évoluent linéairement pendant toute l'expérience. On observe donc un arrêt progressif de la croissance primaire alors que la croissance secondaire reste active tout au long de l'expérience.

Paramètre	coefficients	moyenne	écart-type
Longueur	A_L (cm)	-15,73	5,62
	B_L (cm)	96,47	10,81
	τ (j)	5,07	1,29
Diamètre à la base	D_0 (mm)	5,495	0,6
	k_D (mm/j)	$8,46 \cdot 10^{-2}$	$1,45 \cdot 10^{-2}$
Défilement	α_0	0,371	$3 \cdot 10^{-3}$
	k_α	$2 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-5}$

TABLE 2.2 – Valeurs moyennes et écarts types associés aux différents paramètres définissant l'évolution géométrique des tiges des plantes.

2.1.5 Les caractéristiques matérielles et la répartition des masses

Dans le but d'obtenir une description mécanique complète de la plante, plusieurs données tels que les caractéristiques matérielles et la répartition des masses sont nécessaires en plus des données géométriques précédentes. Il s'agit de la masse volumique de la tige, de son module d'Young en flexion, ainsi que la répartition de la masse foliaire. La description de l'encastrement au sol des plantes est aussi une donnée indispensable. Malheureusement l'accès à ces données implique des mesures destructives. Ces mesures n'ont donc pu être effectuées qu'à la fin de l'expérience. Toutefois, la tige se construisant au cours du temps, les parties proche de l'apex sont plus jeunes que celles de la base. Ainsi la distribution longitudinale des caractéristiques matérielles à la fin de l'expérience peut constituer une première approximation de leur évolution au cours du temps (celle-ci n'est complètement justifiée que dans des conditions de croissance et de développement stationnaires, non réalisées dans cette expérience).

La masse volumique des tiges des peupliers

La masse volumique des tiges est déterminée à partir de la pesée en fin d'expérience des tiges coupées en tronçons, étant donné le caractère destructif de cette mesure. Pour chaque tronçon, une masse volumique est déduite en supposant un volume conique du tronçon. A partir des masses volumiques des tronçons de l'ensemble des plantes, un modèle global linéaire est ajusté (voir Annexe A.2). La valeur moyenne obtenue et l'écart-type

de la distribution parmi les plantes sont montrées au tableau 2.3.

La répartition de la masse foliaire des peupliers

Le profil de masse foliaire linéique, m_f , est défini sous la forme d'un profil linéaire par morceau. Les premiers trente centimètres, en partant de la base de la tige, présentent une masse foliaire linéique croissant linéairement jusqu'à une valeur qui reste ensuite constante jusqu'au sommet de la plante, Figure 2.7. L'ajustement de ce profil est obtenu à partir de la pesée du feuillage effectuée en fin d'expérience (voir Annexe A.2). La masse foliaire linéique, correspondant à la partie supérieure du feuillage, est donnée au tableau 2.3 sous la forme de sa valeur moyenne obtenue et de l'écart-type de sa distribution parmi les plantes.

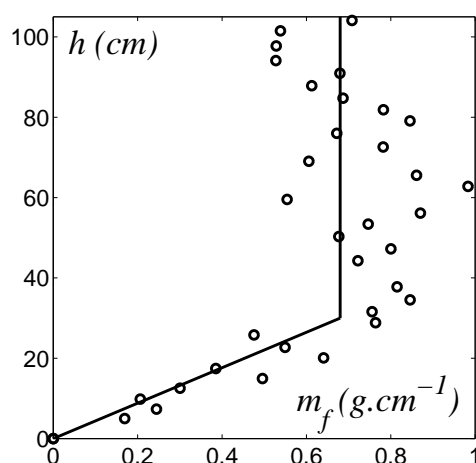


FIGURE 2.7 – Profil de masse foliaire le long de la tige de la plante 10. (o) chaque masse de feuille est divisée par la somme des demi-distances à sa feuille supérieure et sa feuille inférieure. (—) Profil linéaire par morceaux interpolé.

Le module d'Young et la raideur d'encastrement des tiges des peupliers

Le module d'Young des tiges et la raideur d'encastrement de la tige dans le pot sont déduits à partir du traitement d'images prises pendant des essais en flexion effectués en fin d'expérience (voir Annexe A.2). Ces données sont fournies au tableau 2.3 sous la forme de leur moyenne et de l'écart-type de leur distribution parmi les plantes. Des

expériences complémentaires plus récentes ont montré, à partir d'essais en flexion 4 points sur des tronçons de tiges de clones au même stade de développement et dans le même état physiologique, que la variabilité intra-arbre du module d'Young est de l'ordre de la variabilité inter-arbre (voir Annexe A.2). L'écart-type mesuré le long d'une tige est donc lui aussi de l'ordre de 10%, sans qu'il ait été possible de mettre en évidence un gradient du module d'Young le long de l'abscisse curviligne de la tige. Les mesures de fin d'expérience n'ont pas mis en évidence de gradients spatiaux pour le module d'Young et la masse volumique, si l'on excepte la zone en croissance primaire et secondaire.

Paramètre	coefficient	moyenne	écart-type
Masse volumique	ρ (kg.m ⁻³)	748.75	8.23
Masse foliaire	m_f (g.m ⁻¹)	55.6	5.8
Module d'Young	E (GPa)	2.28	0.32
Raideur d'encastrement	C (N.m)	10.52	4.11

TABLE 2.3 – Valeurs moyennes et écarts types associés aux caractéristiques matérielles et conditions limites définissant la plante moyenne.

Les données massiques et matérielles ainsi obtenues se distinguent par un faible écart-type de variation. Ceci est dû au fait que les plantes sont des clones, au même stade de développement, et dans le même état physiologique au début de l'expérience. La masse volumique et le module d'Young déduits pour le peuplier sont ceux d'un bois juvénile, ce qui explique, entre autres, le faible module d'Young. La plus grande variabilité de la raideur d'encastrement est due à la perlite qui forme le substrat où est encastrée la plante, et dont la compaction peut être assez variable. En ce qui concerne le feuillage, le développement du peuplier et l'apparition des feuilles sont tels que l'on peut déduire le feuillage à un jour donné de l'expérience, à partir du feuillage mesuré à la fin. On définit donc la répartition de la masse foliaire des peupliers au cours de l'expérience par le même profil moyen linéaire par morceaux obtenu lors des mesures à la fin de celle-ci.

2.1.6 Lien entre fréquence et géométrie

L'analyse de l'évolution des fréquences des premiers modes des plantes et l'analyse du développement géométrique de leurs tiges ont mis en évidence, à chaque fois, l'observation

de deux régimes distincts d'évolutions. L'évolution de la fréquence du premier mode de vibration des plantes est marquée par un premier régime à fréquence constante, suivi d'un second régime à croissance linéaire. L'évolution de la géométrie de la tige des plantes se caractérise par un premier régime à croissances primaires et secondaires combinées, et un deuxième régime à croissance de la tige uniquement secondaire.

Le premier régime à croissances primaires et secondaires de la tige résulte en une augmentation des longueurs et des diamètres de 19,4% et 23% en moyenne, alors que les fréquences des premiers modes des tiges restent constantes. Il est suivi par le second régime à croissance uniquement secondaire, où les diamètres ont augmenté de 30,6%, alors que les fréquences ont augmenté de 16,8% en moyenne.

Si l'on compare maintenant les évolutions temporelles de la fréquence du premier mode et de la longueur de la tige de la première plante, Figure 2.8, il semble graphiquement que les transitions entre ces deux régimes sont liées.

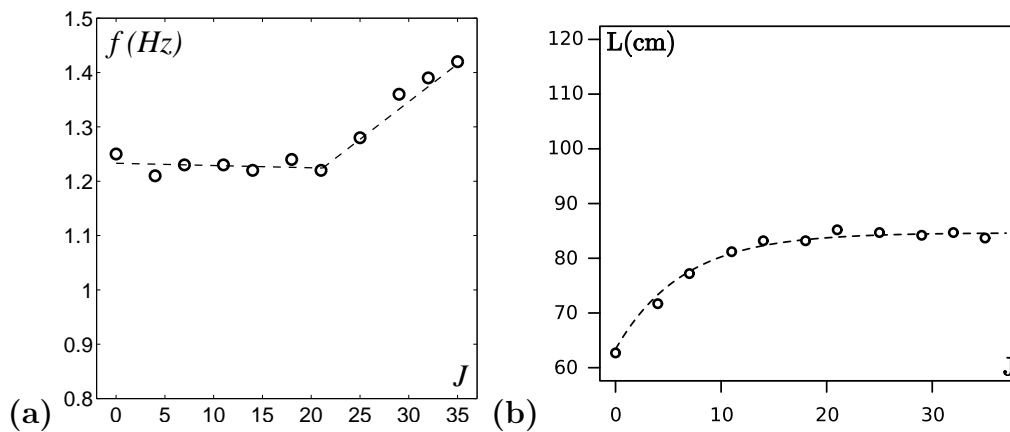


FIGURE 2.8 – (a) Evolution temporelle de la fréquence du premier mode de vibration, et (b) évolution temporelle de la longueur de la tige de la plante 1. (o) Mesures, (—) modèles interpolés.

Afin d'étudier la relation entre ces deux transitions, les jours où chaque plante a atteint 99% de sa hauteur finale, $J_L(99\%)$, sont déduits des modèles biométriques d'évolution des longueurs des tiges. Ces jours sont ensuite comparés aux jours de transition entre les deux régimes d'évolution des premières fréquences modales des peupliers, J_f , qui ont été obtenus lors de l'ajustement des régressions linéaires par morceaux, Figure 2.9. Une régression linéaire orthogonale est ensuite ajustée aux couples $(J_L(99\%), J_f)$. Cette régression a un coefficient de détermination de 0,38 et un écart-type d'erreur de régression de 6,1. De plus

il y a 13% de probabilité pour que la répartition des couples $(J_L(99\%), J_f)$ obtenus ne puisse être attribuée qu'à un tirage aléatoire d'échantillon dans la loi normale décrivant la répartition observée. Même si lors de l'observation de la figure 2.9, il semble que les jours de transition soient reliés, il n'est pas possible de conclure, par l'analyse statistique, à la seule influence de la longueur sur les premières fréquences modales des plantes.

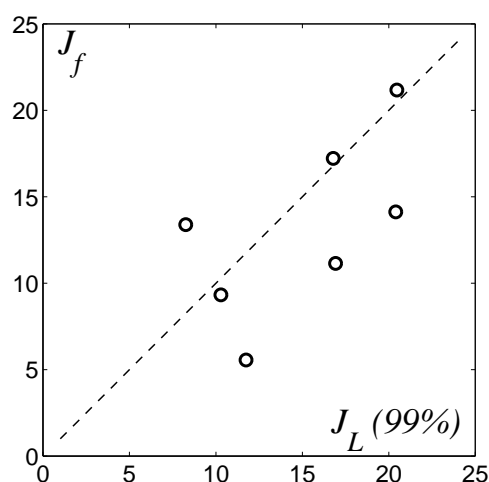


FIGURE 2.9 – (o) Jour de transition, entre les deux régimes d'évolution de la fréquence des premiers modes de vibration des peupliers, tracé en fonction du jour où ces plantes ont atteint 99% de la hauteur finale. (--) Droite d'équation $y=x$.

Cela s'explique par le fait que d'autres paramètres que la longueur influent aussi sur la dynamique de la plante et de sa première fréquence modale. On note, parmi eux, les autres paramètres géométriques (diamètres à la base, défilement du diamètre), les caractéristiques matérielles de la tige, les masses supplémentaires réparties, ou encore l'encastrement dans le substrat. Afin de prendre en compte l'effet de ces autres paramètres, un modèle mécanique de la flexion est maintenant développé. Il permettra de discuter l'influence de la géométrie de la tige sur l'évolution des fréquences modales.

2.2 Modélisation de l'effet de la géométrie sur les fréquences

2.2.1 Modèle mécanique de la flexion

Les oscillations en flexion du peuplier sont modélisées par un modèle de poutre d'Euler, c'est à dire en petits déplacements transverses, à cisaillement négligeable. Un schéma descriptif du modèle est présenté à la figure 2.10. La tige est à diamètre variable le long de l'abscisse vertical. La masse de la tige et la masse foliaire répartie sont prises en compte pour leurs effets inertiels, ainsi que pour les précontraintes gravitationnelles qu'elles induisent qui ont un effet déstabilisant. La masse volumique et le module d'Young, sont supposés homogènes dans la tige. On ne considère pas un encastrement parfait de la tige et on définit donc une raideur d'encastrement. Ce modèle de la flexion de la tige est une variante du modèle développé par Brüchert *et al.* (2003).

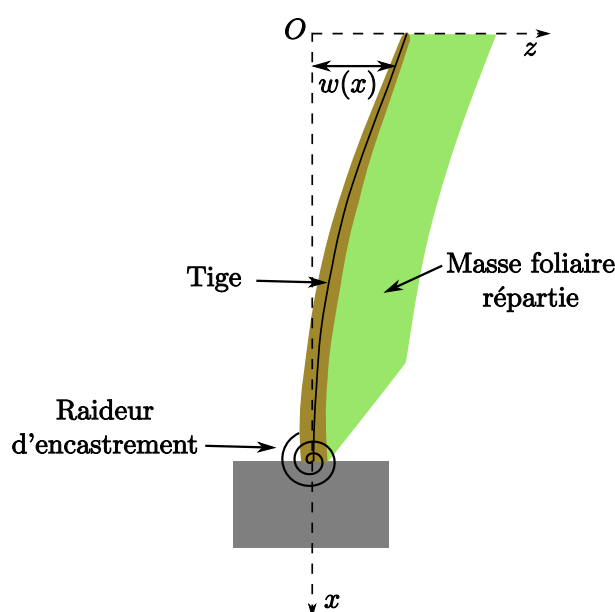


FIGURE 2.10 – Représentation du modèle mécanique des peupliers.

Mise en équation

L'équation obtenue régissant la dynamique des oscillations en flexion des peupliers s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\int_0^x (\rho(\zeta)A(\zeta) + m_f(\zeta))g d\zeta \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + (\rho A(x) + m_f(x)) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6)$$

Où x est l'abscisse verticale, $x = 0$ à l'apex, et $x = L$ à la base de la tige. Le déplacement transverse est $w(x)$. La section et le moment d'inertie sont $A(x)$ et $I(x)$. Le module d'Young, la masse volumique de la tige et le profil de masse foliaire sont respectivement E et ρ et $m_f(x)$.

La section et le moment d'inertie s'expriment en fonction du diamètre le long de la tige : $A(x) = \pi D(x)^2/4$ et $I(x) = \pi D(x)^4/64$.

Le premier terme de l'équation correspond à la rigidité élastique en flexion de la tige à l'abscisse considérée. Le deuxième terme correspond aux précontraintes gravitationnelles induites par le poids des parties supérieures de la plante qui ont un effet déstabilisant sur la dynamique en flexion de la tige. Le troisième terme est le terme inertiel lié aux accélérations des masses constituant la tige feuillée.

À sa base, la tige n'a pas de déplacement, et la rigidité en flexion de la tige s'équilibre avec la raideur d'encastrement. À l'extrémité supérieure, il n'y a ni effort tranchant, ni moment fléchissant appliqués à la tige. Les conditions limites du modèle sont donc :

$$w(L) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L) = C \frac{\partial w}{\partial x}(L), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)(0) = 0. \quad (2.7)$$

Où C est la raideur d'encastrement de la tige.

Adimensionnalisation des équations

Comme les lois physiques ne dépendent pas des unités dans lesquelles elles sont exprimées, il est intéressant d'exprimer l'équation de la dynamique des oscillations des peupliers sous forme adimensionnelle. Pour cela, chaque grandeur du problème est divisée

par une grandeur caractéristique. L'adimensionalisation fait apparaître des nombres adimensionnels qui permettent de comparer les différents mécanismes intervenant dans les oscillations en flexion des peupliers.

Le peuplier est de longueur L . A partir de son diamètre à la base, D_B , on définit une section à la base, A_B , et un moment d'inertie à la base, I_B . La masse foliaire linéique à mi-hauteur du peuplier, $m_f(L/2)$, est choisie comme masse foliaire de référence. L'abscisse verticale et le déplacement latéral sont adimensionnés par la longueur du peuplier, $s = x/L$ et $u = w/L$.

L'équation adimensionnée de la dynamique du peuplier s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(I'(s) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\int_0^s (A'(l) + \chi m'_f(l)) dl \right) \frac{\partial u}{\partial s} \right) + (A'(s) + \chi m'_f(s)) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0 \quad (2.8)$$

Où $A'(s)$ et $m'(s)$ sont respectivement les profils de section de la tige et de masse foliaire adimensionnés, τ est le temps adimensionnel. L'adimensionalisation fait apparaître deux nombres adimensionnels, γ et χ , et une fréquence caractéristique, Ω :

$$\gamma = \frac{\rho A_B g L^3}{EI_B}, \quad \chi = \frac{m_{f(L/2)}}{\rho A_B} \quad (2.9)$$

$$\Omega = \frac{1}{L^2} \left(\frac{EI_B}{\rho_B A_B} \right)^{1/2} \quad (2.10)$$

Cette fréquence caractéristique intervient dans la définition d'un temps adimensionné :

$$\tau = \Omega t \quad (2.11)$$

Les conditions limites, sous formes adimensionnées, sont :

$$u(1) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(1) = C' \frac{\partial u}{\partial s}(1), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(0) = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(I'(s) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) (0) = 0. \quad (2.12)$$

Où intervient C' , la raideur d'encastrement adimensionnée.

$$C' = \frac{CL}{EI_B} \quad (2.13)$$

Les nombres adimensionnels et la grandeur caractéristique obtenus sont maintenant présentés, et une estimation de leur ordre de grandeur est déterminée à partir des mesures géométriques et matérielles de l'expérience, tableau 2.4.

Le nombre adimensionnel γ représente le rapport entre le moment fléchissant induit par le poids des parties supérieures, et le moment induit par la rigidité en flexion de la tige. Son ordre de grandeur permet de vérifier si un de ces deux termes est négligeable. On déduit des données sur les plantes que $\gamma \sim 10$. Cela signifie que le terme dû au poids des masses supérieures a tendance à être un ordre de grandeur plus grand que le terme dû à la rigidité en flexion. L'influence des efforts gravitationnels ne peut donc pas être ignorée lors de la modélisation mécanique des oscillations de ces peupliers. Si l'on compare cette ordre de grandeur de γ obtenu à sa valeur critique dans le cas d'une poutre homogène, de diamètre constant, l'importance des efforts gravitationnels dans ce cas est confirmée. En effet, le nombre gravitationnel critique, synonyme d'une instabilité statique, c'est à dire de flambage, dans le cas de la poutre encastree-libre, homogène, à diamètre constant, est $\gamma_{critique} = 7,84$ (Blevins, 1979). La comparaison avec ce $\gamma_{critique}$, ne signifie pas pour autant que toutes nos plantes vont flamber, étant donné que dans le cas présent la tige n'est pas à section constante mais possède un défilement.

Le nombre adimensionnel χ est un nombre de masse comparant la masse linéique de la tige à la masse linéique foliaire. Il permet de quantifier l'influence de la masse linéique foliaire. Dans le cas des peupliers où $\chi \sim 1$, l'influence de celle-ci sur la dynamique en flexion des peupliers est confirmée.

Le nombre adimensionnel C' compare le moment du à la raideur d'encastrement et le moment du à la rigidité élastique en flexion à la base de la tige. On estime $C' \sim 0,1$. D'après Blevins (1979), on en déduit que la raideur de l'encastrement influe de manière non négligeable sur les fréquences des peupliers. On ne peut se contenter d'un modèle avec une condition limite d'encastrement parfait.

L'ordre de grandeur de la pulsation caractéristique, $\Omega \sim 1 - 10 \text{ rad.s}^{-1}$, est déduit de l'équation 2.10. Il indique l'ordre de grandeur dans lequel devrait se trouver la fréquence du premier mode des peupliers en flexion.

Ces ordres de grandeurs des nombres adimensionnels et caractéristiques confirment que les mécanismes considérés dans la modélisation mécanique des oscillations des peupliers sont effectivement tous à prendre en compte.

Paramètre	Ordre de grandeur
A_B	$10^{-4} m^2$
I_B	$10^{-8} m^4$
L	$1 m$
ρ	$10^3 kg.m^{-3}$
E	$10^9 Pa$
$m_f(L/2)$	$0,1 kg.m^{-1}$
C	$10 N.m$
g	$10 m.s^{-2}$

TABLE 2.4 – Ordre de grandeur des paramètres du problème déduits des résultats de l'expérience.

2.2.2 Définition d'une plante représentative de l'expérience

Dans le but de simuler l'évolution des fréquences à l'aide du modèle mécanique développé, on définit les paramètres caractérisant un développement représentatif de ceux observés pour les plantes de l'expérience. On choisit les coefficients moyens du modèle biométrique d'évolution de la géométrie, définis au tableau 2.2, comme paramètres décrivant l'évolution géométrique des tiges. En ce qui concerne les caractéristiques matérielles, l'encastrement et la répartition de la masse foliaire, on choisit les données déduites des mesures destructives de fin d'expérience présentées au tableau 2.3. On considère maintenant que l'ensemble des paramètres choisis décrivent le développement d'une « plante moyenne de l'expérience ».

2.2.3 Simulation de l'évolution des fréquences

L'évolution des fréquences des premiers modes de la plante moyenne, représentative de l'expérience, est simulée à partir du modèle mécanique de la plante en flexion, et des paramètres décrivant son développement définis dans la partie précédente. Les seuls paramètres variant en fonction du temps, dans ce modèle mécano-biométrique, sont donc les paramètres décrivant la géométrie de la tige de la plante. La détermination de la fréquence à chaque jour est obtenue par application de la méthode de Rayleigh-Ritz

(Geradin & Rixen, 1994).

La courbe d'évolution de la fréquence est présentée à la figure 2.11. Les fréquences prédites sont de l'ordre du Hertz, avec une amplitude de variation de la fréquence de l'ordre de 100% sur la durée de l'expérience simulée. On observe une faible baisse de la fréquence au début de l'expérience, suivie d'une ré-augmentation de la fréquence jusqu'à l'obtention d'un régime d'évolution linéaire de celle-ci.

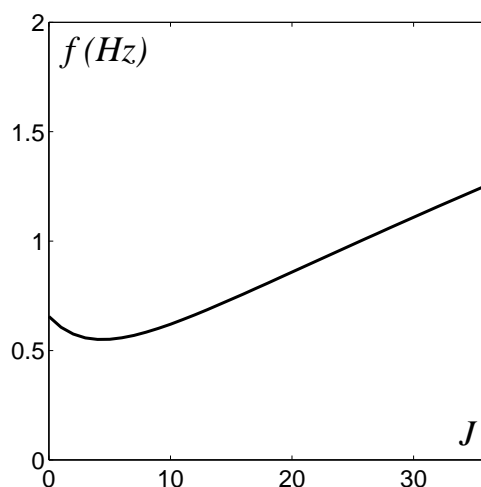


FIGURE 2.11 – Evolution de la fréquence prédite par le modèle mécanique pour la plante moyenne issue du modèle biométrique.

2.3 Comparaison entre le modèle mécano-biométrique et les mesures

On compare maintenant l'évolution de la première fréquence modale de la plante moyenne prédite par le modèle mécano-biométrique, Figure 2.12, à l'évolution moyenne des premières fréquences modales des plantes, déduite statistiquement à partir des mesures expérimentales, Figure 2.5b.

La détermination des fréquences par le modèle mécanique, et à partir des données biométriques et matérielles, fournit les bons ordres de grandeur pour la première fréquence modale. Si l'on compare les deux fréquences modales, déduite expérimentalement et déterminée à l'aide du modèle, au jour 35, on voit que le modèle prédit quantitativement la fréquence en fin d'expérience. Cette bonne prédiction de la fréquence au moment

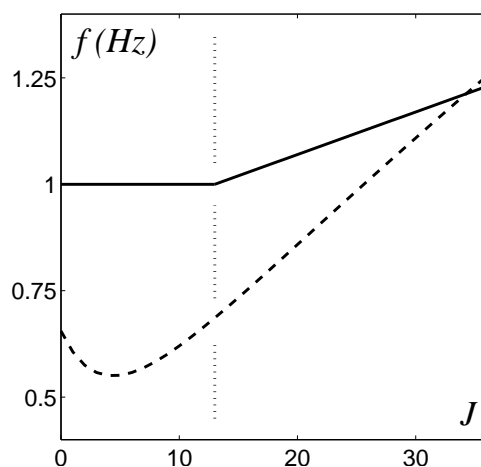


FIGURE 2.12 – (—) Evolution de la fréquence, prédite par les modèles biométriques et mécaniques, comparée à (—) l'évolution moyenne des fréquences mesurées déduite statistiquement. (···) Jour de transition entre les deux régimes d'évolution de la fréquence.

où les caractéristiques matérielles, la répartition de la masse foliaire, et la raideur d'encastrement ont été mesurées, permet de valider le modèle mécanique de la flexion des peupliers.

La prédiction de l'évolution de la fréquence par le modèle, dont les seuls paramètres évoluant sont ceux décrivant la géométrie de la tige, reproduit les régimes d'évolutions de la première fréquence modale observés expérimentalement. En effet, une évolution temporelle de la première fréquence modale selon deux régimes distincts est aussi observée dans les résultats obtenus avec le modèle. L'évolution temporelle de la première fréquence modale, telle que simulée par le modèle, présente d'abord une diminution de la fréquence suivie d'une augmentation de celle-ci jusqu'à atteindre à nouveau une fréquence identique à la fréquence initiale, et ceci le même jour que celui où est observé expérimentalement la transition entre les deux régimes. La simulation de la seconde partie de l'expérience, après le jour de transition, est linéaire comme pour l'évolution temporelle des mesures expérimentales, mais avec un taux d'augmentation de la fréquence de l'ordre du double de celui observé expérimentalement.

Le modèle mécano-biométrique confirme donc le rôle du développement géométrique des tiges des peupliers dans les régimes d'évolution de la première fréquence modale observés expérimentalement, même si seulement prendre en compte le développement géométrique des tiges des peupliers ne permet pas d'expliquer complètement la faible

évolution dans le temps des fréquences des premiers modes des plantes.

2.4 Discussion

Les premières fréquences modales de peupliers ont été suivies régulièrement tout au long de leur développement. Il s'agissait de peupliers à un stade de développement mono-axial, c'est à dire non ramifié. L'expérience a mis en évidence une évolution organisée, régulière et faible de la première fréquence modale des plantes. Cette évolution s'organise en deux régimes distincts. Le premier régime est caractérisé par une constance de la première fréquence modale, alors que dans le même temps les plantes ont grandi en moyenne d'environ 20% à la fois en longueur et en diamètre à leur base. Le deuxième régime est un régime d'évolution linéaire de la fréquence, où celle-ci a augmenté de 15%, alors que le diamètre à la base des plantes augmentait de 30% sur la même période.

On a donc une évolution constante de la fréquence modale en présence d'une croissance primaire et secondaire, puis une augmentation linéaire lorsque la croissance primaire a été désactivée.

Il a ainsi été montré que la croissance géométrique de la tige des plantes, et même plus particulièrement l'équilibre entre les croissances primaires et secondaires, est le principal mécanisme régulateur de la première fréquence modale. Il en est d'autant plus remarquable que le principal mécanisme de l'acclimatation mécanique des plantes est la régulation des croissances primaires et secondaires (Moullia *et al.*, 2006).

Dans une étude statistique sur un peuplement de pins, Bruchert & Gardiner (2006) ont observé que la variabilité des fréquences mesurées dans le peuplement était principalement due à la variabilité des géométries des troncs mesurés. Ces observations en peuplement soutiennent l'idée présentée ici, montrée expérimentalement et confirmée par le développement d'un modèle mécano-biométrique, du rôle prépondérant du développement géométrique des plantes sur l'évolution dans le temps des fréquences de leur premier mode de vibration.

On conclut ainsi à une évolution régulée dans le temps de la fréquence du premier mode des plantes en développement, gouvernée principalement par leur croissance géométrique.

Chapitre 3

Organisation spatiale de la dynamique de l'arbre

Les modes de vibration de quatre arbres, d'architectures et de dimensions distinctes, sont tout d'abord déterminés et comparés. Il est ensuite développé, par analyse dimensionnelle, des lois d'échelle prédisant les caractéristiques modales de l'arbre en fonction d'un nombre réduit de paramètres biométriques caractérisant sa géométrie. Enfin, les prédictions par les lois d'échelle sont comparées aux caractéristiques dynamiques des arbres analysés précédemment. Les lois d'échelle permettent également de discuter l'influence de la géométrie de l'arbre sur l'organisation spatiale de ses caractéristiques dynamiques.

La détermination des caractéristiques dynamiques du noyer adulte et du pin maritime, la dérivation des lois d'échelle par l'analyse dimensionnelle, puis la comparaison entre les lois d'échelle et les résultats numériques, ont fait l'objet d'une publication dans la revue *American Journal of Botany* (Rodriguez *et al.*, 2008).

La détermination expérimentale des caractéristiques dynamiques du jeune noyer par lâcher, par impact et lors d'une excitation par le vent, puis la comparaison entre la loi d'échelle et les résultats expérimentaux, ont fait l'objet d'un acte de conférence (Rodriguez *et al.*, 2009).

3.1 Le matériel végétal

Afin de mettre en évidence, sur quelques exemples, un effet de la géométrie de l'arbre sur ses modes de vibration, quatre spécimens sont étudiés : un jeune noyer, un noyer adulte, une branche de charme et un jeune pin maritime, Figure 3.1. Ils se distinguent géométriquement par leurs dimensions, leurs modes de ramification, et le nombre d'ordres de branches qu'ils possèdent. Ils sont à ramifications sympodiales ou monopodiales, ont une hauteur de 55 centimètres à 8 mètres, un diamètre de l'axe principal compris entre 7 millimètres et 18 centimètres, et de deux à huit ordres de ramification. La description des géométries et des caractéristiques mécaniques des arbres considérés sont rassemblées au tableau 3.1.



FIGURE 3.1 – Arbres dont les caractéristiques dynamiques sont déterminées : (a) un jeune noyer, (b) un noyer adulte, (c) une branche de charme et (d) un jeune pin maritime.

Arbres	Age (années)	Hauteur (m)	Diamètre (cm)	ρ ($kg.m^{-3}$)	E (GPa)	ν
Noyer adulte	20	7,9	18 (dbh)	805	11,3	0,38
Jeune noyer	10	4,2	7,7 (dbh)	805	11,3	0,38
Branche de charme	–	0,55	0,7 (à la base)	–	–	–
Pin	4	2,6	5,6 (à 13 cm)	1300	1,12	0,38

TABLE 3.1 – Géométries et caractéristiques mécaniques des arbres et sous-ensembles d'arbres analysés.

3.1.1 Méthode de numérisation

Une méthode de numérisation de la géométrie d'arbres a été développée par Sinoquet & Rivet (1997). Elle permet d'obtenir une représentation tridimensionnelle fine des arbres numérisés. Cette méthode a été utilisée, respectivement par Sinoquet *et al.* (1997) et Sellier & Fourcaud (2005), dans les cas du noyer adulte et du jeune pin. Le jeune noyer a lui été numérisé en novembre 2008. La technique utilisée est celle de la digitalisation tridimensionnelle numérique. Elle consiste en l'enregistrement point après point de la géométrie de l'arbre à l'aide d'un digitalisateur magnétique mesurant les coordonnées 3D des points de début et fin de chaque segment. A chaque extrémité amont de segment est associée une mesure du diamètre de mi-segment au pied à coulisse (en négligeant le défilement de chaque segment, et la possible courbure des sections droites). Les données résultantes sont codées dans le langage Multiscale Tree Graph (Godin & Caraglio, 1998), qui permet de stocker les données sous la forme d'une hiérarchie multi-échelle, relatant la topologie de l'arbre. Un digitaliseur numérique 3D Polhemus Fastrak Long range (Colchester, Vt., USA), ayant une précision nominale de 0,05% de la distance à la source du champ magnétique (Polhemus, 1993), et le logiciel PiafDigit (Donès *et al.*, 2008) ont été utilisés lors de la numérisation. En tenant compte aussi des différents aspects relatifs au travail en extérieur (mouvement du bras de l'expérimentateur, vent) la précision globale de la numérisation est de l'ordre du centimètre.

3.1.2 Un jeune noyer

Un jeune noyer (*Juglans regia*) en extérieur, Figure 3.2, est analysé. Il a poussé dans un pot ($\emptyset = 1,3\text{ m}$, $H = 0,9\text{ m}$, $V = 0,75\text{ m}^3$) et a 10 ans. Il fait 4,2 mètres de haut et à un diamètre à hauteur de poitrine de 7,7 centimètres. Son mode de ramification est sympodial, et il possède jusqu'à six ordres de ramification. Le noyer suit le développement architectural du modèle de Leeuwenberg (Hallé & Oldeman, 1970), Figure 1.4. Le choix d'un arbre en pot se justifiait par la possibilité que cela offrait de le positionner de manière isolée dans un site exposé au vent (utile dans le cadre de Rodriguez *et al.*, 2009). Par ailleurs, il est connu que le confinement mécanique du volume racinaire a des effets thigmomorphogénétiques sur la croissance des parties aériennes (Passioura, 2002), et nous voulions justement maximiser les différences morphologiques. Cette situation de confinement racinaire est aussi très fréquente dans le cas des arbres urbains ou des arbres

sur sol mince. Ce noyer a été numérisé en deux jours de travail pendant cette thèse (novembre 2008). L'ensemble de l'architecture aérienne de l'arbre a ainsi été décrite par 2271 points.

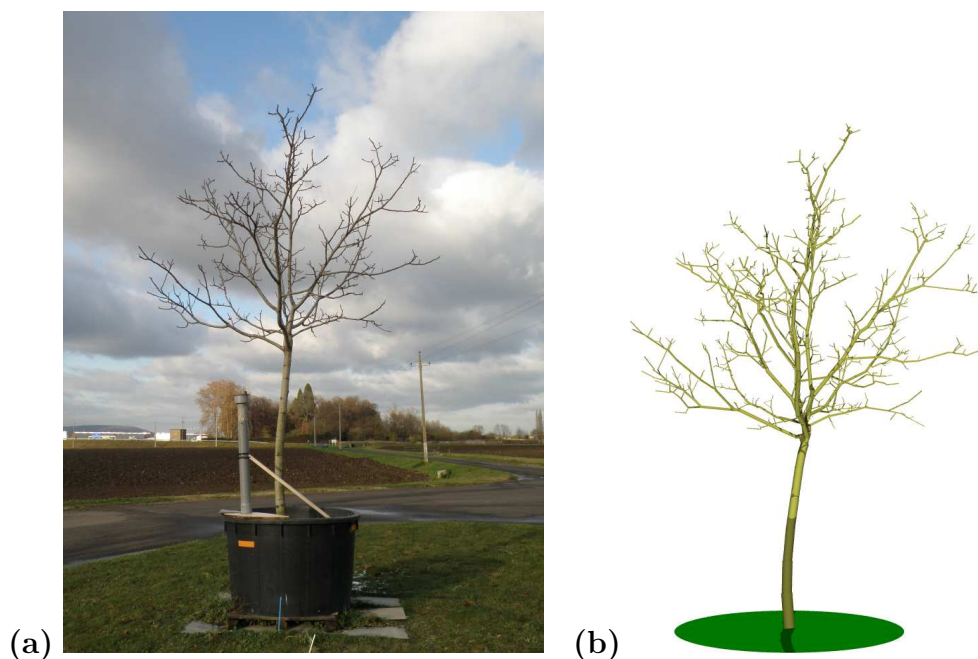


FIGURE 3.2 – (a) Photographie et (b) géométrie numérisée du jeune noyer en extérieur.

3.1.3 Un noyer adulte

Le noyer adulte (*Juglans regia*), Figure 3.3, a 20 ans, fait 8 mètres de haut, et à un diamètre à hauteur de poitrine de 18 centimètres. Il a jusqu'à huit ordres de ramification. Ce noyer a été numérisé par Sinoquet *et al.* (1997) selon la méthode de Sinoquet & Rivet (1997), puis stocké sous format MTG. La numérisation de cet arbre, réalisée au PIAF demanda un mois de travail à 2 personnes. L'arbre est décrit par 6168 points.

3.1.4 Une branche de charme

Une branche a été prélevée sur un charme (*Carpinus orientalis*). Cette branche, Figure 3.4, fait 55 centimètres de hauteur et a un diamètre à sa base de 7 millimètres. Sa ramification est sympodiale, et elle a jusqu'à trois ordres de ramification. Comme sa

structure se déploie dans un plan, sa digitalisation 3D n'a pas été nécessaire et son architecture a été décrite par photographie numérique, Figure 3.4.

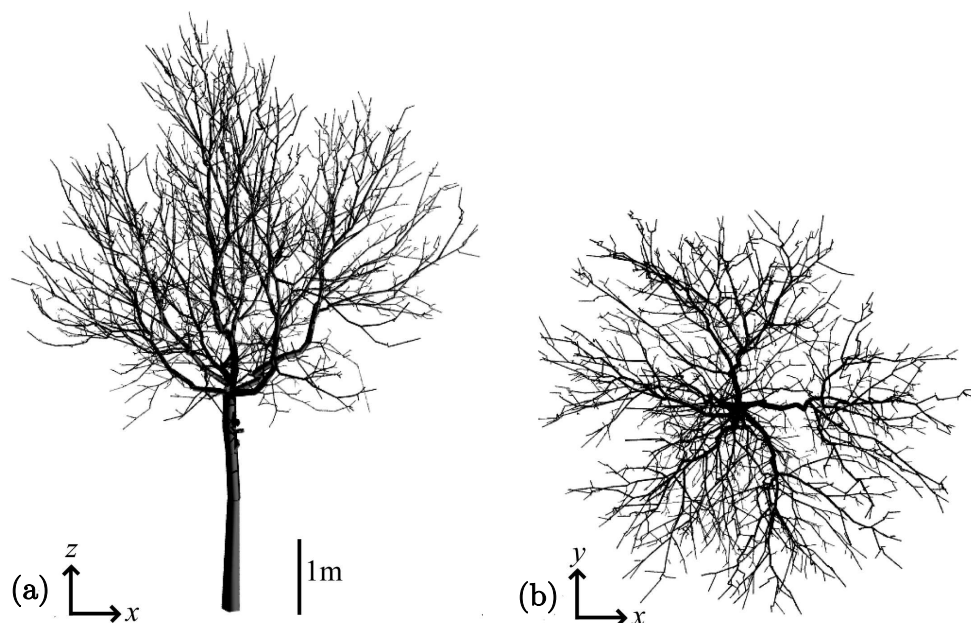


FIGURE 3.3 – Géométrie du noyer numérisée par Sinoquet *et al.* (1997).

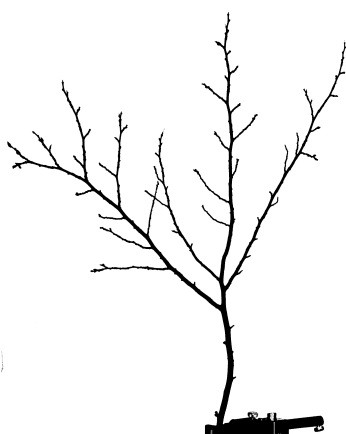


FIGURE 3.4 – Photographie de la branche de charme.

3.1.5 Un jeune pin maritime

Le pin maritime (*Pinus pinaster*), Figure 3.5, a 4 ans, fait 2,6 mètres de hauteur, et à un diamètre de 5,6 centimètres à une hauteur de 13 centimètres. Sa ramification est monopodiale avec trois ordres de ramification. Le pin suit le développement architectural du modèle de Rauh (Hallé & Oldeman, 1970). Ce pin a été numérisé par Sellier & Fourcaud (2005), selon la méthode de Sinoquet & Rivet (1997), et stocké lui aussi sous format MTG. Le pin est décrit en 337 points.

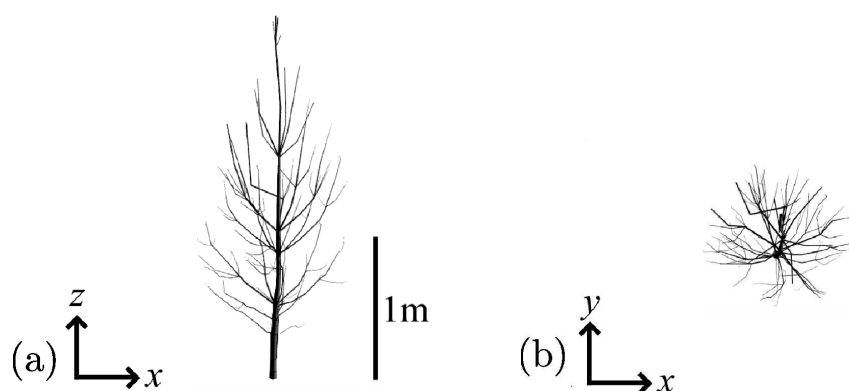


FIGURE 3.5 – Géométrie d'un pin numérisée par Sellier & Fourcaud (2005).

3.2 Les méthodes de détermination des modes

Trois méthodes, expérimentales ou numériques, sont utilisées pour déterminer les modes de vibrations des arbres considérés. L'excitation par lâcher du jeune noyer en extérieur, et la mesure de ses déplacements induits en plusieurs positions, permet de déterminer expérimentalement ses caractéristiques dynamiques. La branche de charme est installée sur une table vibrante afin de subir un balayage en fréquence. Celui-ci permet de déterminer par résonance les modes de vibration de la branche dont la fréquence modale se trouve sur la plage de fréquences balayée. Une analyse numérique, appliquée avec succès par Sellier *et al.* (2006), et dans le cas d'une description plus restreinte de la géométrie par Fournier *et al.* (1993), est aussi utilisée. Il s'agit d'utiliser la géométrie numérisée des noyers et du pin, pour déterminer leurs modes de vibration par calculs par éléments finis. Les résultats obtenus dans le cas du jeune noyer, à la fois selon l'approche

expérimentale par lâcher de corde et selon l'approche numérique, servent à comparer ces deux méthodes et à valider la méthode numérique de détermination des modes de vibration.

3.2.1 Excitation par lâcher

Une méthode de détermination expérimentale des caractéristiques dynamiques du jeune noyer en extérieur a été mise en place. Le noyer a été équipé de quatre capteurs de déplacements reliés à un digitaliseur 3D Polhemus Fastrack Long Range, similaire à celui utilisé pour la digitalisation, mais opérant non plus en mode point par point, mais en mode tracking continu (Rudnicki & Burns, 2006). L'acquisition a été faite à l'aide d'un logiciel développé par B. Adam et N. Donès, au PIAF, pour le projet ANR Blanc Chêne-Roseau. Les quatre capteurs de déplacements sont placés sur quatre segments successifs de l'arbre, en partant du tronc jusqu'à un segment d'ordre quatre. La position des capteurs est montrée à la figure 3.6. Les capteurs permettent une acquisition dynamique de la position avec une résolution spatiale de l'ordre du millimètre et une résolution temporelle de 30 Hertz.

Le noyer équipé des capteurs est ensuite excité par des lâchers. La traction d'une corde, accrochée en un point donné de l'arbre, permet d'appliquer à celui-ci une force de point d'application et de direction contrôlés. Il en résulte un déplacement initial de l'arbre. Le retour à l'équilibre de celui-ci, après avoir subitement lâché la corde, consiste en la réponse de l'arbre à l'excitation contrôlée. L'analyse temporelle et fréquentielle de la réponse du noyer mesurée sur les capteurs permet de mettre en évidence la répartition dans l'arbre de ses caractéristiques dynamiques. En effet, les modes de vibration de l'arbre sont excités par la traction de la corde, en fonction de leur déplacement modal à cette position, et dans cette direction de traction. Les modes de vibration de l'arbre sont aussi observés sur un capteur selon l'évolution temporelle de leur amplitude modale, en réponse à l'excitation, multipliée par leur déplacement modal à la position du capteur.

3.2.2 Balayage en fréquence sur table vibrante

Un montage consistant en une table vibrante, Figure 3.7a, a été conçu (avec l'aide de P. Hémon, LadHyX). Un moteur électrique entraîne un courroie qui, par un système de pièce cylindrique excentrée, applique un déplacement horizontal sinusoidal (d'amplitude

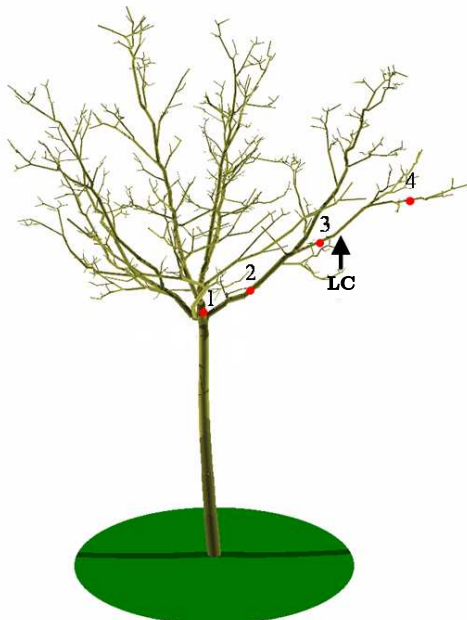


FIGURE 3.6 – Position des capteurs (1 à 4) et du point de lâcher de corde (LC) sur le noyer.

A et de pulsation ω) à un plateau, Figure 3.7b :

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (3.1)$$

L'oscillation du support de la branche entraîne une excitation dynamique de celle-ci. Si l'on analyse ce cas de figure dans le référentiel non galiléen associé au point d'encastrement de la branche, cela équivaut à appliquer à la branche une force d'inertie volumique qui s'écrit :

$$f(t) = \rho A \omega^2 \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

Où ρ est la masse volumique de la branche.

L'ensemble de la branche subit ainsi une force d'excitation volumique oscillant à la fréquence du plateau. Analyser la réponse de la branche pour tout un ensemble de fréquences, réparties sur une plage de fréquences d'intérêt, permet de déterminer les fréquences modales de la branche situées dans cette plage de fréquences.

Simultanément, la réponse de la branche à une fréquence donnée est filmée. Le champ de déplacement de la branche est déduit des vidéos par calcul de la luminance à chaque

instant, puis de la variance de la luminance de chaque pixel au cours de l'enregistrement.

Les modes identifiés par leurs résonances sont ainsi déterminés en terme de fréquence et de champs de déplacement modaux.

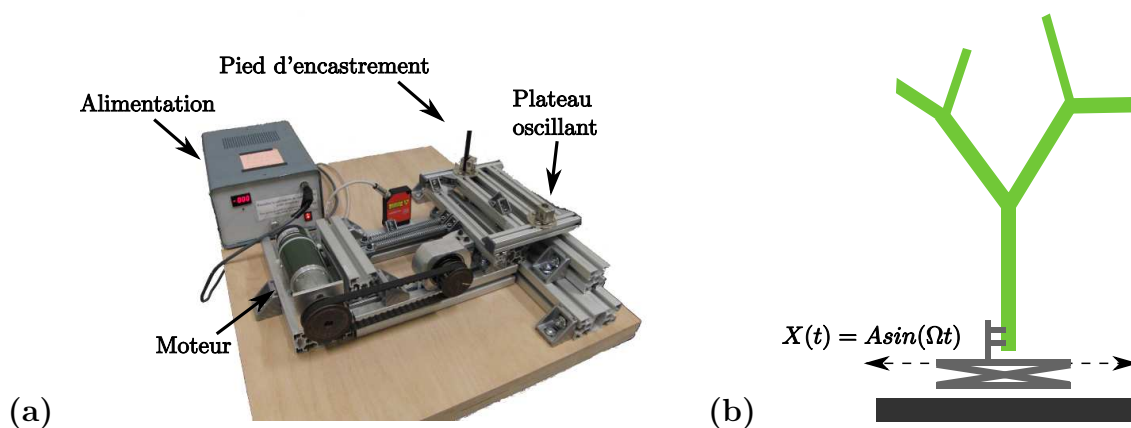


FIGURE 3.7 – (a) Photographie et (b) schéma du dispositif de table vibrante utilisé.

3.2.3 Calcul par éléments finis

Les géométries tridimensionnelles numérisées des deux noyers et du pin sont utilisées afin de déterminer leurs modes de vibration. Les branches sont assez élancées et les déformations des branches des arbres sont principalement des déformations en flexion et en torsion. De ce fait, on peut utiliser la théorie des poutres d'Euler pour modéliser les déformations en petits déplacements transverses des arbres (Geradin & Rixen, 1994). Les segments de branches sont donc modélisés comme des poutres de section circulaire, à diamètre variable quand cette information est disponible. En ce qui concerne la connexion entre les segments, elle est choisie rigide, et l'encastrement au sol du tronc de l'arbre est un encastrement parfait. On suppose aussi que les branches sont constituées d'un matériau homogène, uniforme dans l'ensemble de l'arbre. Les caractéristiques matérielles sont définies par une masse volumique, ρ , un module d'Young, E , et un coefficient de Poisson, ν . Ces données pour les trois arbres sont fournies au tableau 3.1.

Le calcul numérique est effectué sous Cast3M v.2006 (Verpeaux *et al.*, 1988), logiciel qui utilise la méthode des éléments finis. Un script Matlab de conversion entre le langage MTG, décrivant la géométrie numérisée des arbres, et le logiciel de calcul par la méthode des éléments finis, Cast3M, a été réalisé. Le problème aux valeurs propres de

détermination des modes de vibration est résolu par le méthode de Lanczos (Geradin & Rixen, 1994). Les modes sont déterminés en terme de fréquences modales, de champs de déplacement modaux et de masses modales.

3.3 Les caractéristiques modales

Les caractéristiques modales obtenues à partir des expériences et des calculs numériques sont maintenant présentées. Les méthodes de détermination des modes de vibration utilisées pour chaque arbre sont répertoriées au tableau 3.2. Le jeune noyer est tout d'abord analysé afin d'obtenir un exemple d'organisation des modes de vibration dans le cas d'un arbre à ramification sympodiale. Les modes du jeune noyer sont déterminés à la fois par lâcher et par calcul éléments finis, ce qui permet aussi de valider la méthode numérique de détermination des modes utilisée par la suite pour les cas du noyer adulte et du jeune pin. Les modes de vibration du noyer adulte, toujours à ramification sympodiale, mais de plus grande dimension et avec un plus grand nombre d'ordres de branches, sont ensuite présentés. La branche de charme, dont les modes sont déduits par balayage en fréquence sur la table vibrante, est un autre exemple à ramification sympodiale, mais cette fois de faible dimension, et avec seulement deux ordres de branches. On termine ensuite par le cas du jeune pin maritime qui fournit un exemple d'organisation des modes de vibration d'arbre à ramification monopodiale. Lors de la description des modes de vibration, on insiste sur l'évolution des fréquences modales et la localisation des déplacements modaux obtenus.

Arbre	Expérience	Calcul Numérique
Jeune noyer	Lâcher	EF
Noyer adulte	–	EF
Branche de charme	Table vibrante	–
Pin	–	EF

TABLE 3.2 – Méthodes de détermination des modes de vibration utilisées pour chaque arbre.

3.3.1 Le jeune noyer

Le jeune noyer en extérieur est analysé à la fois expérimentalement par lâcher, et numériquement par éléments finis.

Résultats expérimentaux

Le lâcher présenté ici est appliqué à l'arbre à partir d'une position initiale en traction dans la direction verticale (Oz). Le point d'application du lâcher est le point LC, situé sur le même segment que celui où est positionné le capteur 3, Figure 3.6. Etant donné les orientations des différents segments sur lesquels sont positionnés les capteurs de déplacement, l'excitation en LC selon l'axe Oz , a induit des déplacements principalement dans les directions Ox , pour le capteur 1, et dans la direction Oz pour les capteurs 2, 3 et 4. L'amplitude de la réponse temporelle mesurée sur chaque capteur augmente avec l'ordre du segment sur lequel il est positionné. Les spectres (densité spectrale de puissance) des réponses temporelles associées à chaque capteur, Figure 3.8, sont déterminés afin d'identifier les fréquences présentes dans chaque réponse.

L'analyse des spectres des réponses mesurées par ordre croissant des segments où sont positionnés les capteurs permet de déduire trois groupes de fréquences associées aux pics observés : A (1,3 Hz), B (1,9–2 Hz) et C (2,8–4,4 Hz). Le tableau 3.3 résume les groupes de fréquences identifiés sur les capteurs :

- (i) Sur le premier capteur, un pic principal est observé. On observe aussi ce pic sur les trois autres capteurs. On identifie cette fréquence par A.
- (ii) Sur le second capteur, en plus d'un pic à une fréquence A, un second pic est identifié. On identifie ce second pic par B. Ce pic est aussi observé sur les capteurs 3 et 4.
- (iii) Sur le capteur 3, deux pics d'amplitudes proches, aux fréquences A et B, sont observés. Des pics de faibles amplitudes émergent, on les identifie par un nouveau groupe de fréquences C. Ce groupe de fréquences est aussi observé sur le capteur 4.
- (iv) En effet, pour le capteur 4, trois pics d'amplitudes très proches sont situés à des fréquences appartenant respectivement aux groupes A, B et C. Des pics de plus faibles amplitudes à des fréquences du groupe C sont aussi repérés.

On observe donc l'apparition de pics, situés sur des groupes des fréquences supérieures, au fur et à mesure qu'augmente l'ordre du segment sur lequel est positionné le capteur.

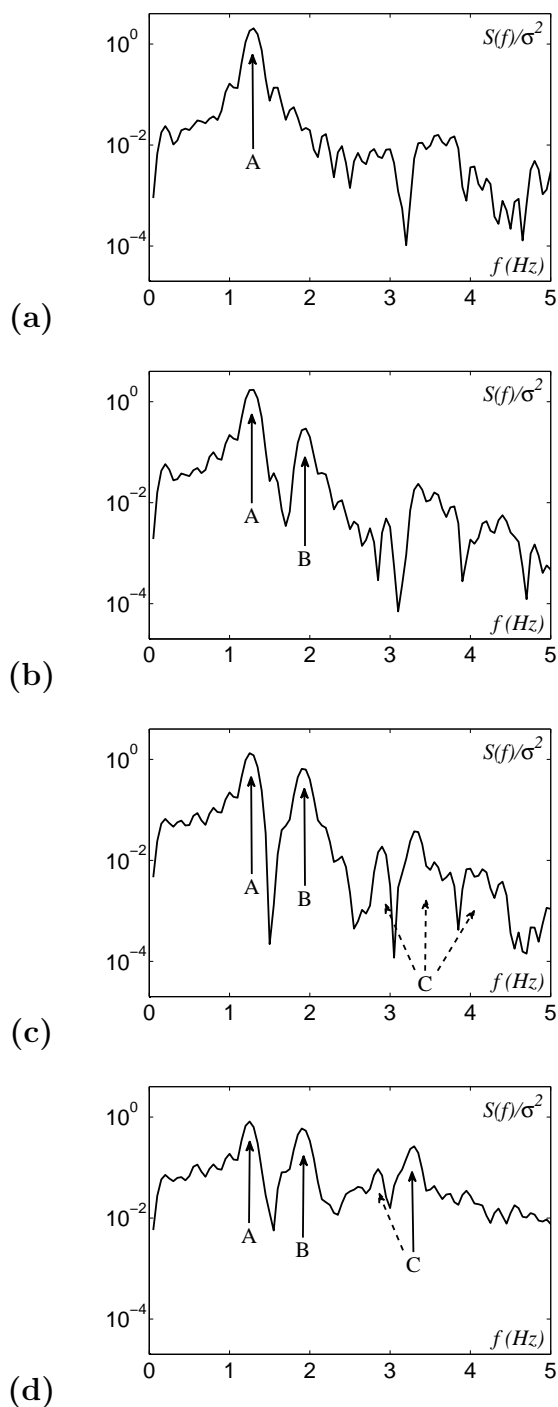


FIGURE 3.8 – Spectres fréquentiels déduits de la réponse mesurée selon Ox, sur le capteur (a) 1, et Oz sur (b) 2, (c) 3 et (d) 4, pour un lâcher en LC selon Oz. Les pics sont identifiés par une flèche (pleine pour les pics principaux et pointillée pour les pics secondaires) et leur indice de groupe.

Capteur	Plages de fréquences (Hz)		
	A	B	C
1	1,3		
2	1,3	1,9-2	
3	1,3	1,9	(2,8-4,4)
4	1,3	1,9	3,3 (2,8-3,3)

TABLE 3.3 – Regroupement des pics observés lors de l'analyse fréquentielle de la réponse des capteurs au lâcher. Les pics ayant une plus faible amplitude sont notés entre parenthèses.

Calculs par éléments finis

Les 40 premiers modes du noyer sont déterminés par calculs éléments finis à partir de sa géométrie numérisée en 4653 éléments. Les fréquences modales, divisées par la fréquence du premier mode, sont tracées en fonction du numéro du mode, Figure 3.9a. Elles sont comprises entre 1 et 5 fois la fréquence du premier mode de vibration. On observe une augmentation faible et progressive des fréquences modales avec le numéro du mode. Sur les quarante premiers modes, cette augmentation est à peu près linéaire avec une augmentation de l'ordre 0,1 Hz/mode. On est très loin de l'évolution en N^2 des fréquences modales de la poutre, présentée en partie 1.3.2.

Les fréquences sont ensuite regroupées en fonction de l'ordre des branches sur lesquelles sont principalement localisées les déformations, Figure 3.9b. En effet, l'analyse des champs de déplacement modaux permet de regrouper les modes en trois groupes de modes de vibration du noyer. Ces modes ont leurs déformations principalement localisées sur les mêmes ordres de ramification que le numéro du groupe auquel ils appartiennent. Ces trois groupes de modes regroupés par rapport à la localisation de leurs déformations se regroupent aussi en termes de fréquences modales. La fréquence modale est une fonction croissante du groupe de mode. Deux modes appartiennent au groupe I et ont leurs déformations localisées principalement sur le tronc. Les modes 3 à 16 ont leurs déformations principalement localisées sur les branches de second ordre, ils appartiennent au groupe II. Leurs fréquences sont comprises entre 1,31 et 2,34 fois la fréquence des modes du groupe I. Le groupe III contient les modes 17 à 40. Ils ont leurs déformations

localisées principalement sur les segments de troisième ordre. Leurs fréquences sont entre 2,38 et 4,91 fois la fréquence du premier mode.

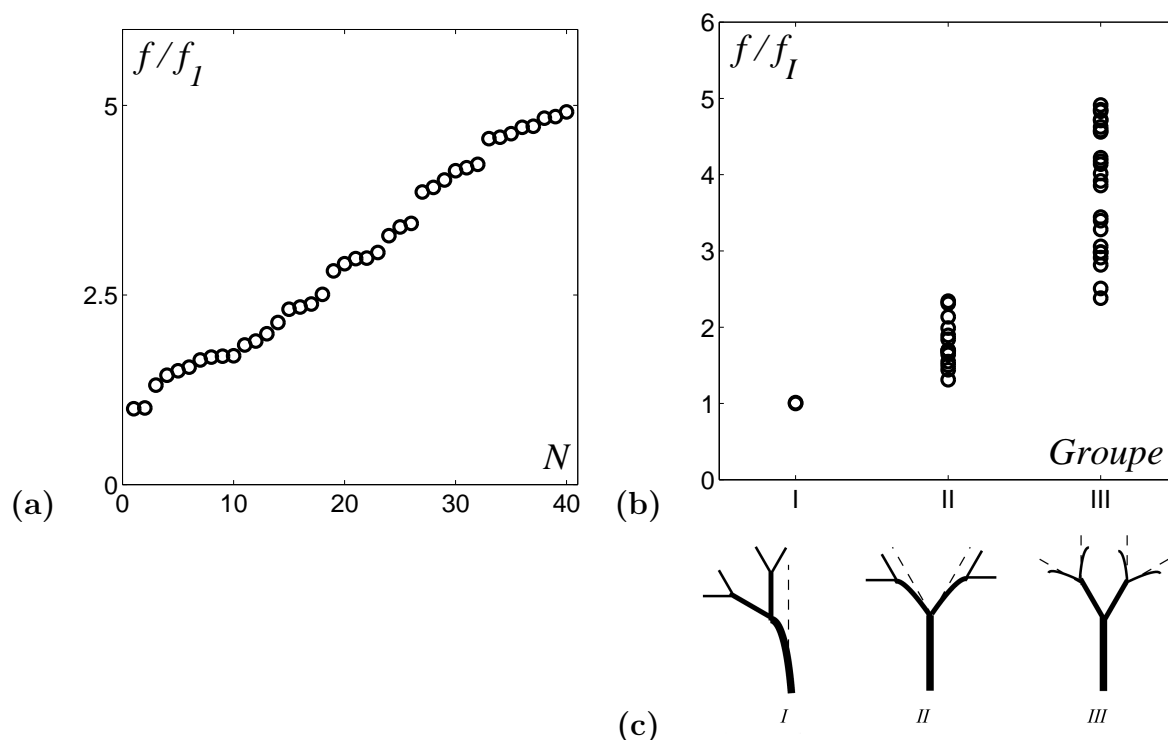


FIGURE 3.9 – (a) Fréquences relatives des quarante premiers modes de vibration déduites par calcul éléments finis, à partir de la géométrie du noyer numérisé. (b) Fréquences modales en fonction de l'indice du mode. (c) Fréquences modales regroupées selon la localisation principale des déformations modales. (d) Croquis des modes de déformation.

Comparaison

Les caractéristiques modales du noyer ont été déterminées par lâcher et par calcul éléments finis. L'analyse de la réponse à des lâchers permet une détermination expérimentale des fréquences à partir de la structure réelle. Le calcul éléments finis appliqué à la géométrie numérisée implique l'utilisation d'une géométrie approchée et simplifiée de l'arbre, ainsi que des hypothèses sur ses déformations (en supposant un modèle d'Euler des déformations), sur les encastremements entre segments, et sur ses caractéristiques matérielles (matériau homogène, module d'Young et masse volumique uniformes). Il est dès lors intéressant de comparer les résultats obtenus selon chaque méthode.

Avant de comparer les fréquences, on note que, pour la suite du chapitre, un groupe de modes est un ensemble de modes dont les déformations sont principalement localisées sur le même ordre de branches. Il a pour indice l'ordre des branches sur lesquelles sont principalement localisées ses déformations. Les modes de vibration déterminés par le calcul éléments finis ont déjà été regroupés de cette façon. En ce qui concerne les résultats expérimentaux, les plages des fréquences A, B et C correspondent respectivement aux groupes de modes I, II et III. En effet, un capteur peut enregistrer la réponse d'un mode du groupe II, seulement s'il est situé à une position dans l'arbre où le champ de déplacement du mode est non nul. Etant donné que la plage de fréquences B n'a été observée que sur les capteurs 2, 3 et 4, on en déduit qu'elle correspond au groupe de modes II. Le même raisonnement appliqué à la plage de fréquences C permet de la relier au groupe de modes III. La plage de fréquences A, observée dans la réponse du capteur 1, est reliée au groupe de modes I.

Les fréquences tracées en fonction du groupe de modes sont maintenant comparées, Figure 3.10. En les divisant par la première fréquence modale, on s'affranchit des valeurs des caractéristiques matérielles qui influent sur les fréquences modales, mais pas sur leurs rapports dans le cas d'un modèle d'Euler pour les déformations. On observe une bonne concordance entre les plages de fréquences déduites par l'expérience et le calcul numérique. Les fréquences modales prédites par le calcul éléments finis couvrent de plus grandes plages de fréquences. En effet, le calcul par éléments finis permet de déterminer tous les modes présents entre 1 et 5 fois la fréquence du premier mode. Par contre, lors de l'expérience, seuls les modes ayant des déplacements modaux au point d'application de la corde sont excités par celle-ci. De plus, seuls les modes ayant des déplacements modaux au niveau d'un capteur sont observés dans la réponse enregistrée par celui-ci. Un nombre réduit de modes est donc observable selon cette configuration de capteurs et de point d'excitation, ce qui implique que les modes identifiés expérimentalement ne sont qu'un sous-ensemble des modes de vibration de l'arbre situés dans cette plage de fréquences.

La géométrie numérisée, donnant une représentation approchée de la géométrie réelle du noyer, le modèle de déformation d'Euler, les caractéristiques matérielles homogènes, et les encastresments de segments supposés rigides, permettent ainsi une bonne prédiction numérique des fréquences modales, proche des fréquences observées expérimentalement.

Les deux méthodes utilisées révèlent une organisation des modes par groupes relative

aux ordres des segments sur lesquels sont principalement situés les déformations et les déplacements des modes. Les modes d'un même groupe sont aussi rassemblés en terme de fréquences modales.

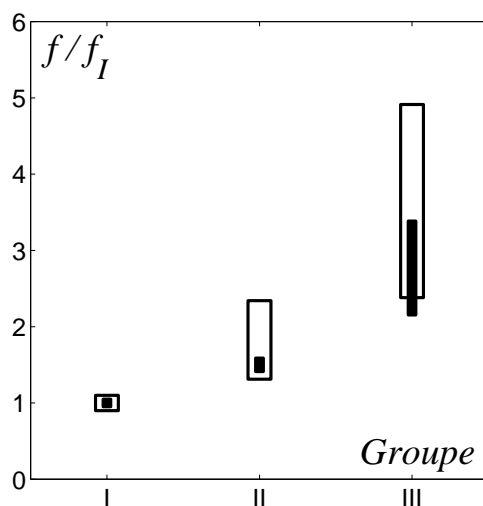


FIGURE 3.10 – (■) Plages de fréquences identifiées expérimentalement, comparées aux (□) fréquences des quarante premiers modes de vibration déduits par calcul éléments finis, à partir de la géométrie du noyer numérisé.

3.3.2 Le noyer adulte

Les 25 premiers modes du noyer adulte ont été déterminés par calculs éléments finis à partir de sa géométrie numérisée en 18546 éléments, Figure 3.11. Leurs fréquences modales sont situées entre 1,4 Hz et 2,6 Hz. Elles sont de l'ordre du Hertz avec une concentration en fréquence de l'ordre de 10 modes par Hertz. On observe aussi que les fréquences augmentent faiblement avec le numéro du mode. On est très loin de l'évolution en N^2 des fréquences modales de la poutre, présentée en partie 1.3.2.

On observe un regroupement des modes en trois groupes, séparés par un saut de fréquence (plus ou moins marqué) et caractérisés par leurs types de déformées modales. Les deux premiers modes ont une fréquence très proche de 1,4 Hz, et ils sont séparés des modes suivants par un saut en fréquence de l'ordre de 0,4 Hertz. Un plus faible saut, de 0,15 Hz, sépare les modes 2 à 14 des modes 15 à 25. Les modes sont séparés en trois groupes, tels que montrés à la figure 3.11. Le premier groupe de modes, nommé I,

possède deux modes. Les déformations de ces deux modes sont principalement des flexions localisées sur le tronc. Les deux modes correspondent chacun à un mode de flexion dans la direction x et y . La flexion du tronc dans une de ces directions entraîne la partie supérieure de l'arbre en un mouvement principalement de corps solide. Le deuxième groupe de modes, II, contient 12 modes. Leurs fréquences sont comprises entre 1,29 et 1,51 fois la fréquence des modes du groupe I. Ces modes ont leurs déformations principalement localisées sur les branches de second ordre. Les douze modes correspondent aux douze branches de second ordre et aux deux directions principales de flexion par branche. Chaque mode représente une combinaison différente des flexions de ces branches. Les troisième groupe de modes, III, correspond aux modes 15 à 25. Leurs fréquences sont entre 1,62 et 1,83 fois la fréquence du premier mode. Les déformations de ces modes sont localisées principalement sur des branches de troisième ordre. L'évolution des fréquences modales en fonction du groupe de mode est présentée à la figure 3.11b.

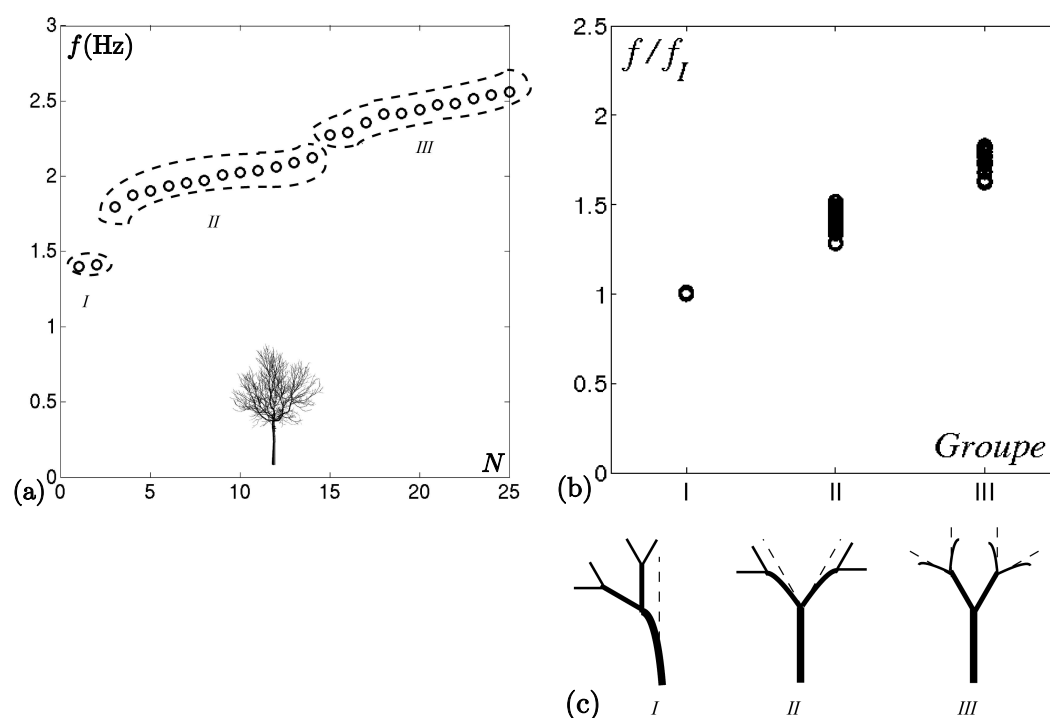


FIGURE 3.11 – (a) Fréquences modales du noyer classées en terme de localisations principales des déformations : I, dans le tronc, II, dans les branches de second ordre, III, dans les branches de troisième ordre. (b) Fréquences modales relatives en fonction du groupe de modes. (c) Croquis des modes de déformation. D'après Rodriguez *et al.* (2008).

Alors que le noyer adulte a plus d'ordres de ramification, on retrouve, comme dans le cas du jeune noyer, une organisation des caractéristiques modales où les 25 premiers modes de vibration se rassemblent en trois groupes de modes, en fonction de l'ordre des branches sur lesquels sont principalement localisées les déformations, tout en se regroupant en termes de fréquences modales. On note cependant que par rapport au cas du jeune noyer, les fréquences modales augmentent moins vite, et les plages de fréquences modales associées aux groupes de modes II et III sont moins larges.

3.3.3 La branche de charme

Cinq fréquences de résonances ont été identifiées entre 5 et 10 Hertz lors d'un balayage en fréquence de la branche, et pour une excitation dans son plan de ramification. Elles sont tracées à la figure 3.12. La première fréquence est à 5 Hertz. On observe ensuite un saut de fréquence d'environ 1,75 Hz vers un groupe de quatre fréquences entre 6,75 et 8,25 Hertz. Cinq modes sont identifiés entre 1 et 1,7 fois la fréquence du premier mode de la branche. On est toujours très loin de l'évolution en N^2 des fréquences modales de la poutre, présentée en partie 1.3.2.

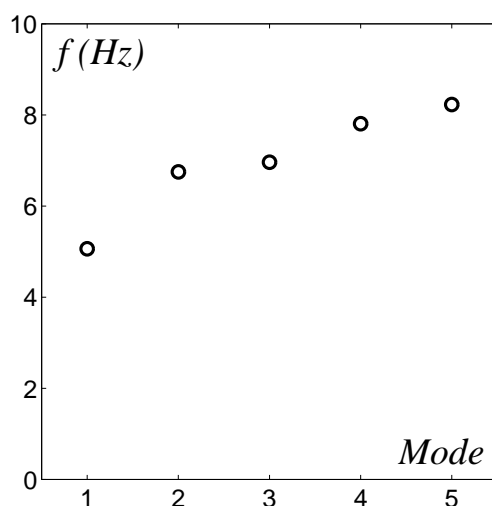


FIGURE 3.12 – Fréquences de résonances de la branche déduites expérimentalement.

L'analyse de la vidéo associée à chaque fréquence permet de déterminer un champ de déplacement relié à chaque fréquence identifiée. Les champs de déplacement associés aux fréquences de résonance sont présentés à la figure 3.13. On met en évidence, à la figure

3.13a, le déplacement de l'ensemble de la structure par la flexion du segment basal. Il s'agit donc de la résonance du mode fondamental de la branche et on identifie ce mode comme un mode de groupe I. Les champs de déplacement associés au groupe de fréquences identifiées entre 6,75 et 8,25 Hertz, figures 3.12, ont des déplacements localisés sur les segments de second ordre de la branche selon différentes combinaisons, 3.13b-e. On identifie donc, à ces fréquences de résonance, des modes appartenant au second groupe de modes de vibration de la branche, II, dont les déformations sont principalement localisées sur les segments d'ordre deux. Leurs fréquences sont comprises entre 1,35 et 1,65 fois la fréquence du mode du groupe I. Les fréquences sont maintenant tracées une fois regroupées selon l'analyse des champs de déplacement discutés, Figure 3.14.

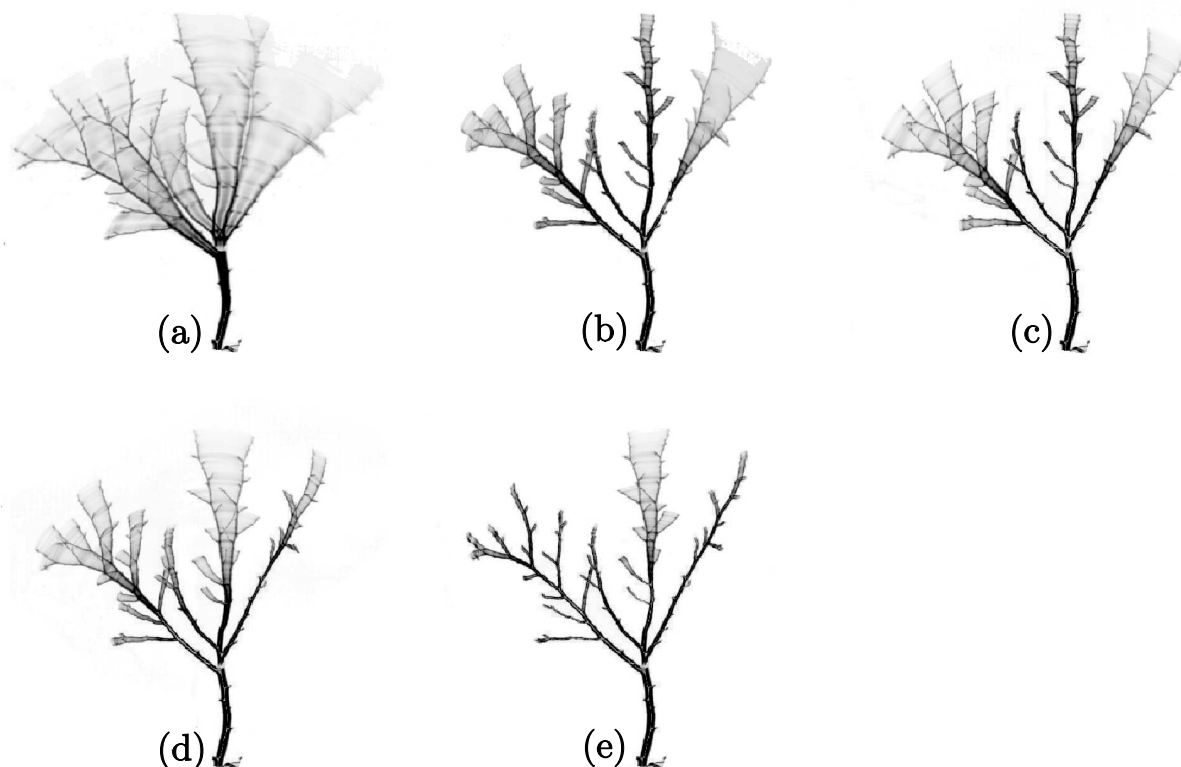


FIGURE 3.13 – Champs de déplacements relatifs aux fréquences de résonances observées par ordre croissant.

On observe une organisation en deux groupes de ces modes de vibration de la branche de charme, comme observé dans les cas précédents, alors qu'il s'agit cette fois d'une structure très faiblement ramifiée (2 ordres, le minimum pour pouvoir parler de ramification !) à comparer des deux noyers. Ces groupes de modes ont eux aussi les caractéristiques observées pour les noyers : des déformations principalement localisées sur des segments de mêmes ordres que le numéro du groupe auquel ils appartiennent, et un regroupement en fréquence. La plage de fréquences modales associée au groupe de modes II est moins large dans le cas du charme que dans le cas du jeune noyer.

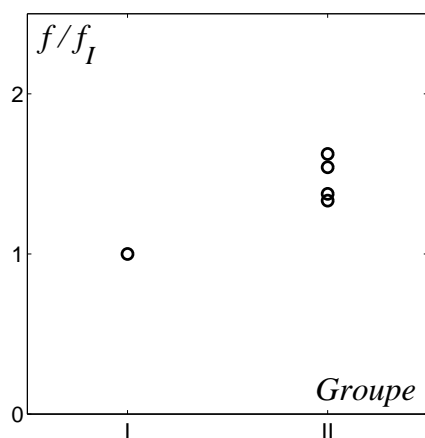


FIGURE 3.14 – Fréquences relatives à la première fréquence modale et regroupées selon la localisation des déplacements associés.

3.3.4 Le jeune pin maritime

Les 25 premiers modes sont déterminés par calculs éléments finis à partir de sa géométrie numérisée en 1349 éléments. Les fréquences sont réparties entre 1 et 2,8 Hz, Figure 3.15, et augmentent faiblement avec le numéro du mode. Elles sont donc de l'ordre du Hertz avec une concentration en fréquence de l'ordre de 10 modes par Hertz. On est très loin de l'évolution en N^2 des fréquences modales de la poutre, présentée en partie 1.3.2.

Les deux premiers modes ont des fréquences très proches et égales à 1,08 Hertz. Ces deux modes sont séparés des modes suivants par un saut en fréquence d'environ 0,3 Hertz. Les modes sont séparés en trois groupes, tels que montrés à la figure 3.15. Le premier groupe de modes, I, contient les deux premiers modes. Les déformations de ces modes sont

localisées principalement sur le tronc. Les deux modes correspondent chacun à un mode de flexion dans la direction x et y . La flexion du tronc entraîne les branches d'ordres supérieurs de l'arbre en un mouvement principalement de corps solide. Le deuxième groupe de modes, I', implique lui aussi des déformations principalement sur le tronc, mais à une fréquence de l'ordre de 2,41 Hz (modes 17 et 18). Ce groupe correspond aux seconds modes de flexion du tronc, figure 3.15c. Des déformations des branches d'ordres supérieurs sont aussi observées dans ces modes. Le troisième groupe, II, correspond aux modes 3 à 16 et 19 à 25. Les déformations de ces modes sont principalement localisées sur les branches de second ordre du pin. Leurs fréquences sont comprises entre 1,31 et 2,52 fois la fréquence du mode du groupe I. L'évolution des fréquences modales en fonction du groupe de modes est présentée à la figure 3.15b.

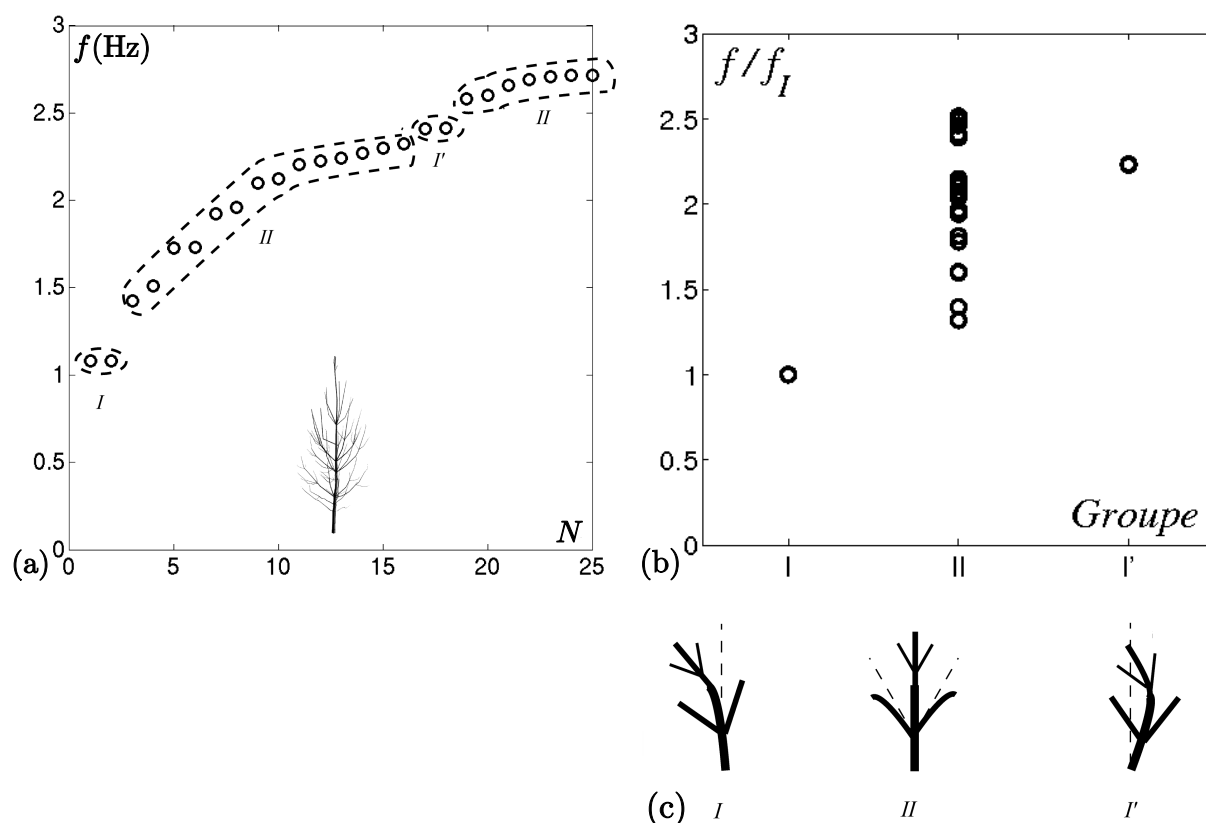


FIGURE 3.15 – (a) Fréquences modales du noyer classées en terme de localisations principales des déformations : I, dans le tronc, II, dans les branches de second ordre, I', pour les seconds modes de déformation du tronc. (b) Fréquences modales relatives en fonction du groupe de modes. (c) Croquis des déformées modales. (Rodriguez *et al.*, 2008).

Une organisation en trois groupes de ces modes de vibration du pin est observée. Les groupes de modes I et II ont les mêmes caractéristiques que les groupes identifiés dans les cas des noyers et de la branche de charme, c'est à dire un regroupement en fréquence et des déformations localisées principalement sur les branches d'ordre égal à l'indice du groupe de modes. La plage de fréquences modales associée au groupe de modes II est aussi large dans le cas du pin que dans le cas du jeune noyer. Cependant, pour le pin, des modes du groupe I' sont situés entre les modes du groupe II. Il s'agit des seconds modes de flexion du tronc. La détermination des modes de vibration de ce pin, ayant un mode de ramification monopodial, et donc différent de celui des noyers présentés précédemment, met encore en évidence une organisation spatiale des modes de vibration en terme de localisation des déformations et des déplacements, ainsi qu'un rassemblement en fréquence des groupes de modes.

3.3.5 Synthèse sur l'analyse modale

L'analyse de ces quatre arbres a permis de mettre en évidence plusieurs traits communs entre leurs caractéristiques dynamiques. Tout d'abord, les premières fréquences modales des noyers et du pin, sont dans les trois cas proches du Hertz, et ce malgré leurs différences en termes d'âges, de dimensions et d'architectures. On note aussi une concentration en fréquence des modes.

D'un point de vue général, un mode observé a ses déformations localisées principalement sur des segments d'un même ordre qui induisent des déplacements importants sur les segments d'ordres supérieurs. Les modes sont donc localisés en termes de déformations et de déplacements. Les modes ayant leurs déformations localisées principalement sur des segments d'un même ordre sont aussi regroupés en fréquence. Cette notion de groupes de modes de l'arbre a été vérifiée dans les quatre cas étudiés.

On observe ainsi une organisation spatiale particulière des modes de vibration de ces arbres, qui semble liée à leurs organisations en systèmes ramifiés. Mais on note cependant que les fréquences modales n'augmentent pas au même rythme et les plages de fréquence associées à chaque groupe de modes n'ont pas la même largeur pour chaque arbre, tableau 3.4. Cette remarque nous amène à la prochaine partie où vont être développées des lois d'échelle, afin de prédire l'organisation des fréquences modales des arbres à partir de

quelques paramètres biométriques décrivant leurs géométries.

Arbre	Plages de fréquences (f/f_I)		
	Groupe I	Groupe II	Groupe III
Jeune noyer	1	1,31–2,34	2,38–4,91
Noyer adulte	1	1,29–1,51	1,62–1,83
Branche de charme	1	1,35–1,65	–
Pin	1	1,31–2,52	–

TABLE 3.4 – Plages de fréquences associées aux groupe de modes I, II et III, pour les quatre arbres analysés.

3.4 Lois d'échelle

3.4.1 Paramètres biométriques

Il a été présenté au Chapitre 1, la possibilité de caractériser la géométrie ramifiée d'un arbre à partir d'un faible nombre de critères morphologiques et de quelques paramètres biométriques. Les paramètres biométriques retenus ici sont le coefficient d'une loi allométrique qui décrit l'élancement des branches d'un arbre, et les coefficients des deux rapports de réduction des sections qui décrivent les réductions des sections des branches lors d'une ramification axiale et latérale. Ces coefficients sont présentés à la figure 3.16.

La géométrie des branches dans un arbre peut être décrite à partir d'une loi allométrique qui décrit l'élancement des segments de ses branches entre deux points de ramification, Figure 3.16a, en reliant statistiquement leur diamètre à leur longueur. Cette loi allométrique est caractérisée par son coefficient allométrique, β (McMahon & Kronauer, 1976) :

$$D \sim L^\beta \quad (3.3)$$

La ramification de l'arbre est décrite par ses variations de sections lors d'une ramification latérale et lors d'une ramification axiale, figure 3.16b. Ces variations des sections sont définies par deux coefficients, λ et μ , qui décrivent respectivement les rapports des

sections entre le segment latéral et son segment amont, et le segment axial et son segment amont. Ces deux paramètres permettent de décrire les ramifications dans l'arbre, et par la même de distinguer entre une architecture à ramification sympodiale et une architecture à ramification monopodiale, au travers de la valeur du coefficient μ qui est nulle dans le cas sympodial. Le cas particulier où $2\lambda + \mu = 1$, c'est à dire où la somme des sections est conservée lors de la ramification, correspond à la loi de conservation des surfaces de de Vinci (Lindenmayer *et al.*, 1996).

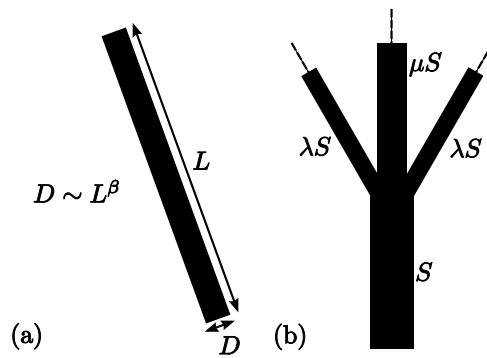


FIGURE 3.16 – (a) Coefficient d'élanement des branches, β . (b) Rapport de réduction des sections à la ramification, λ et μ .

En reprenant l'indexation des segments (N,P) de l'arbre, telle qu'elle a été définie dans la partie 1.1.1, et à la figure 1.3, l'évolution des sections des segments dans l'arbre s'exprime, en fonction des deux coefficients de réduction des sections à la ramification, sous la forme :

$$D_{(N,P+1)} = \sqrt{\mu} D_{(N,P)} \quad (3.4)$$

$$D_{(N+1,P)} = \sqrt{\lambda} D_{(N,P)} \quad (3.5)$$

Ces trois coefficients (β, α, μ) consistent en une description géométrique réduite et concise de l'architecture aérienne ramifiée d'un arbre (résultant de l'intégration au cours de son développement des processus de croissance primaire et secondaire, et de ramification).

3.4.2 Analyse dimensionnelle

Comme discuté dans la partie 1.3.2, l'analyse dimensionnelle est une manière pratique d'analyser la dynamique d'un système sans avoir à résoudre explicitement l'équation

régissant sa dynamique. Une loi d'échelle explicitant la dépendance des fréquences modales d'une poutre envers ses deux échelles de longueurs a été dérivée de l'équation 1.7 à l'équation 1.15.

Si l'on considère cette fois, non plus une poutre mais un arbre, et donc d'un point de vue mécanique un système de poutres ramifiées, les trois mêmes grandeurs que dans le cas d'une poutre unique définissent sa mécanique en flexion : sa dimension caractéristique, sa rigidité en flexion, et sa masse linéique. On peut cette fois choisir la longueur de la branche d'ordre 1, l , comme dimension caractéristique de l'abscisse curviligne. De même, on peut choisir le diamètre de cette branche, d , comme ordre de grandeur de la dimension transverse, dont dépendent la rigidité en flexion et la masse linéique. Et on obtient, cette fois, la loi d'échelle suivante pour les fréquences modales :

$$f \sim dl^{-2} \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

On obtient dans le cas de l'arbre, une loi d'échelle, reliant les fréquences modales à la longueur et au diamètre de la branche d'ordre 1.

Or dans le cas d'un arbre, il existe une relation allométrique supplémentaire qui relie la longueur au diamètre des branches sous la forme : $d \sim l^\beta$. On en déduit, à coefficient allométrique donné, que les fréquences modales dépendent du diamètre et de la longueur selon la relation :

$$f \sim l^{\beta-2} \sim d^{(\beta-2)/\beta} \quad (3.7)$$

L'analyse dimensionnelle des mouvements en flexion de l'arbre, fournit une loi d'évolution de ses fréquences modales en fonction de sa taille. Nous allons voir maintenant dans quelle mesure il est possible d'étendre cette loi pour obtenir une relation entre les différents groupes de fréquences modales d'un arbre donné.

3.4.3 Modes de vibrations

Les analyses des cas des noyers, du pin et de la branche, ont mis en évidence une organisation des modes en groupes, ainsi que leurs localisations spatiales dans des sous-ensembles de l'arbre.

Dans les cas des noyer, les modes du groupe I induisent des déplacements dans l'en-

semble de la structure. Les modes du groupe 2 induisent des déplacements dans les sous-ensembles de l'arbre que l'on qualifie de sous-ensembles II. Un sous-ensemble II correspond ici à un segment d'ordre deux et à l'ensemble des segments qui lui sont reliés en aval, comme montré à la figure 3.17a. De même, les modes du groupe III induisent des déplacements dans les sous-ensembles III de l'arbre. D'une manière générale, on définira un mode de vibration du noyer comme appartenant au groupe N, si ce mode a ses déformations principalement localisées sur les branches d'ordre N, et ses déplacements principalement sur les branches en aval.

Dans le cas du pin, des modes de groupe I induisant des déplacements de l'ensemble de la structure ont aussi été trouvés. Des modes de groupe II dont les déformations et les déplacements sont localisés sur les segments d'ordres supérieurs à 1 ont aussi été identifiés. Si l'on définit maintenant des sous-ensembles du pin en fonction de l'indexation de sa double ramification, on obtient la description suivante : un sous-ensemble $[N,P]$ correspond à un segment indexé (N,P) et à l'ensemble des segments en aval de celui-ci. On en déduit ainsi que les modes de vibration du groupe II, identifiés précédemment, sont associés aux sous-ensembles $[2,P]$ du pin, comme montré à la figure 3.17b.

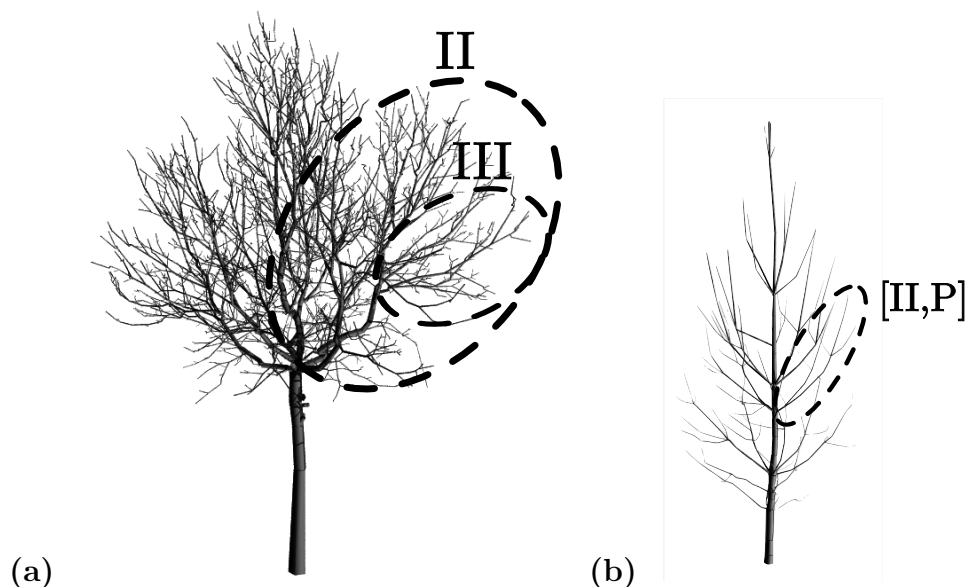


FIGURE 3.17 – Exemple d'identification des sous-ensembles dans le cas (a) du noyer adulte et (b) du jeune pin. Les sous-ensembles sont encerclés de noir.

La localisation spatiale des modes de vibration de l'arbre a permis de les relier à des sous-ensembles de celui-ci. Les paramètres biométriques qui décrivent la géométrie de l'arbre relient les dimensions caractéristiques de ses sous-ensembles à celles de l'arbre, à partir des équations 3.4 et 3.5.

Dans le cas d'un arbre sympodial, les dimensions caractéristiques L_N et D_N , du sous-ensemble N, sont reliées à celle de l'arbre selon les relations :

$$\frac{L_N}{L_I} = \lambda^{(N-1)/2\beta} \quad (3.8)$$

$$\frac{D_N}{D_I} = \lambda^{(N-1)/2} \quad (3.9)$$

Dans le cas d'un arbre monopodial, les dimensions caractéristiques $L_{N,P}$ et $D_{N,P}$, du sous ensemble [N,P], sont reliées à celles de l'arbre selon les relations :

$$\frac{L_{N,P}}{L_{I,I}} = \lambda^{(N-1)/2\beta} \mu^{(P-1)/2\beta} \quad (3.10)$$

$$\frac{D_{N,P}}{D_{I,I}} = \lambda^{(N-1)/2} \mu^{(P-1)/2} \quad (3.11)$$

Prenons par exemple une fréquence modale f_N associée à un groupe de modes N, dans le cas d'un arbre sympodial, et supposons que les modes du groupe N ne diffèrent des modes de groupe I que par un facteur d'échelle dépendant des dimensions caractéristiques des sous-ensembles auxquels ils sont associés. La relation entre cette fréquence f_N et la fréquence modale f_I se déduit ainsi des relations entre les dimensions des sous-ensembles, équations 3.8 et 3.9, et de la relation définie précédemment entre les fréquences et les dimensions caractéristiques, équation 3.7. On en déduit :

$$\frac{f_N}{f_I} = \left(\frac{D_N}{D_I} \right)^{(\beta-2)/\beta} \quad (3.12)$$

Soit :

$$\frac{f_N}{f_I} = \lambda^{(N-1)(\beta-2)/2\beta} \quad (3.13)$$

On obtient ainsi une relation qui prédit toutes les fréquences modales de l'arbre à partir de la première fréquence modale, d'un coefficient de réduction de la section à la ramifi-

cation, et d'un coefficient décrivant l'élanement des branches.

Prenons une fréquence modale $f_{N,P}$ associée au groupe de modes $[N,P]$, dans le cas d'un arbre monopodial et appliquons encore l'hypothèse que les modes du groupe $[N,P]$ ne diffèrent des modes du groupe $[I,I]$ que par un facteur d'échelle dépendant des dimensions caractéristiques des sous-ensembles auxquels ils sont associés. La relation entre cette fréquence $f_{N,P}$ et la fréquence modale $f_{I,I}$ se déduit ainsi des relations entre les dimensions des sous-ensembles, équations 3.10 à 3.11, et de la relation entre les fréquences et les dimensions caractéristiques, équation 3.7. On en déduit cette fois :

$$\frac{f_{N,P}}{f_{I,I}} = \left(\frac{D_{N,P}}{D_{I,I}} \right)^{(\beta-2)/\beta} \quad (3.14)$$

Soit :

$$\frac{f_{N,P}}{f_{I,I}} = [\lambda^{N-1} \mu^{P-1}]^{(\beta-2)/2\beta} \quad (3.15)$$

Dans ce cas des arbres monopodiaux où la ramification de l'arbre est plus complexe, on obtient une relation qui prédit les fréquences modales de l'arbre à partir de la première fréquence modale, de deux coefficients décrivant la ramification, et d'un coefficient décrivant l'élanement des branches.

Comme discuté précédemment, une plage typique de variation des coefficients allométriques décrivant l'élanement des branches est $1 \leq \beta \leq 2$ (McMahon & Kronauer, 1976). De même, à partir de la loi de conservation des surfaces de de Vinci, on peut supposer que $\lambda \leq 1$ et $\mu \leq 1$. Si l'on analyse les lois d'échelle développées ci-dessus, équations 3.13 et 3.15, dans le cas des plages de coefficients β , λ et μ que l'on vient de définir, on obtient tout d'abord que les fréquences modales augmentent avec la localisation des modes sur des ordres de branches supérieurs de l'arbre. En effet, pour ces plages de coefficients, les fonctions 3.13 et 3.15 sont des fonctions croissantes de N et P. A élanement β donné, plus les coefficients de réduction des sections λ et μ sont faibles, plus les fréquences modales regroupées augmentent vite selon N et P. Aussi, à coefficients de réduction des sections λ et μ donnés, plus le coefficient d'élanement β est proche de 2, plus les fréquences modales regroupées augmentent lentement avec N et P.

On a ainsi développé des lois d'échelle qui prédisent l'évolution des fréquences modales de l'arbre seulement à partir de l'estimation de trois, voire deux coefficients biométriques, selon l'architecture de l'arbre considéré. Au travers de ces coefficients biométriques, ces lois d'échelle permettent une première discussion quantitative de l'effet de la géométrie de l'arbre sur l'évolution de ces fréquences modales.

3.5 Evaluation des prédictions par loi d'échelle

Les lois d'échelle, développées à partir d'une analyse dimensionnelle de l'arbre en flexion, sont maintenant comparées aux fréquences modales des arbres présentées dans la partie 3.3. En préalable, les paramètres biométriques de chaque arbre sont déterminés.

3.5.1 Paramètres biométriques

Les coefficients biométriques de chaque arbre sont déterminés à partir de régressions linéaires orthogonales, et les résultats des ajustements statistiques sont rassemblés au tableau 3.5.

Le jeune noyer

A partir de la géométrie numérisée du noyer, l'élanement allométrique des branches, β , et la réduction des sections à la ramification, λ , sont déterminés. Seules sont considérées les branches des trois premiers ordres. Ce choix est justifié par le fait que l'on s'intéresse ici aux trois premiers groupes de modes.

La répartition de l'élanement et de la réduction des sections à la ramification, les régressions linéaires obtenues, ainsi que les intervalles de confiance à 90%, sont présentés à la figure 3.18. Un élanement $\beta = 0,82$ et un coefficient de réduction des sections à la ramification $\lambda = 0,31$ ont été déterminés lors de l'analyse statistique. La relation allométrique décrivant l'élanement des branches est très convaincante, elle explique 89% de la variance observée. La description de la réduction des sections par un unique coefficient explique 82% de la variance observée. C'est moins bien que le résultat obtenu pour l'élanement, et l'erreur de régression est plus importante, mais la description de la réduction des sections par un seul coefficient reste elle aussi convaincante.

Le coefficient d'élanement $\beta = 0,92$ est assez faible comparativement aux valeurs

communément discutées dans la littérature, $1 \leq \beta \leq 2$ (McMahon & Kronauer, 1976). Cette valeur peut être due à la fois au jeune âge de l'arbre et au confinement en pot de son système racinaire qui influe sur son développement architectural (Passioura, 2002).

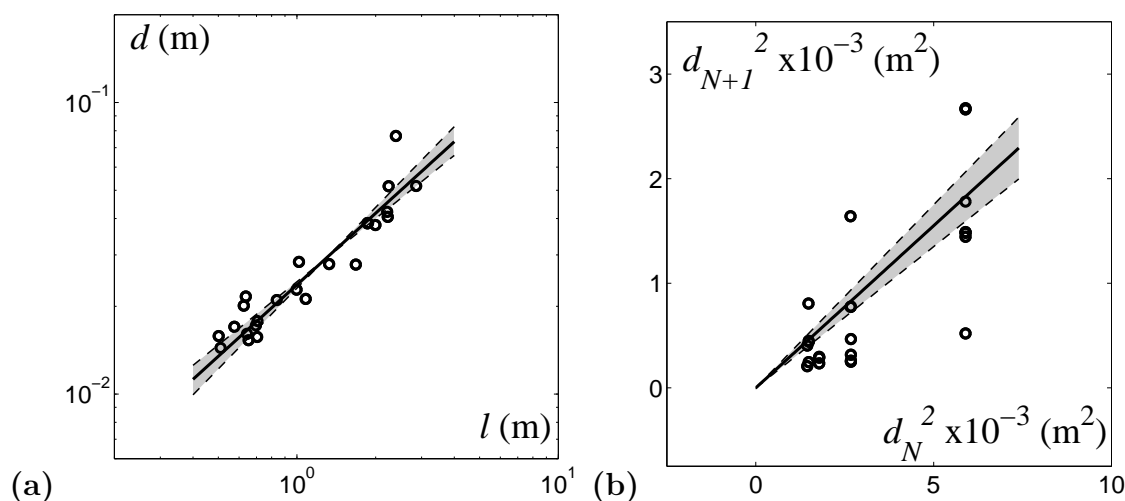


FIGURE 3.18 – Paramètres biométriques du jeune noyer. (a) Coefficient allométrique, β . (b) Coefficient de réduction de la section par ramification, λ . La zone teinte correspond à l'intervalle de confiance à 90% des coefficients déduits par régression.

Le noyer adulte

A partir de la géométrie numérisée du noyer, l'élanement allométrique des branches, β , et la réduction des sections à la ramification, λ , sont déterminés. Seules sont considérées les branches des trois premiers ordres dont les diamètres et les longueurs sont respectivement plus grands que 1 cm et 1 m. Ce choix est justifié par le fait que l'on s'intéresse ici aux trois premiers groupes de modes, donc reliés aux trois premiers ordres de branches de l'arbre.

La répartition de l'élanement et de la réduction des sections à la ramification, les régressions linéaires obtenues, ainsi que les intervalles de confiance à 90%, sont présentés figure 3.19. Un élanement $\beta = 1,37$ et un coefficient de réduction des sections à la ramification $\lambda = 0,25$ ont été déterminés lors de l'analyse statistique. La relation allométrique décrivant l'élanement des branches est très convaincante, elle explique 87% de la variance observée, avec seulement deux points particuliers correspondant au tronc et à la branche coupée. La description de la réduction des sections par un unique coefficient explique

74% de la variance observée. C'est moins que le résultat obtenu pour l'élancement mais la description de la réduction par un seul coefficient reste elle aussi convaincante.

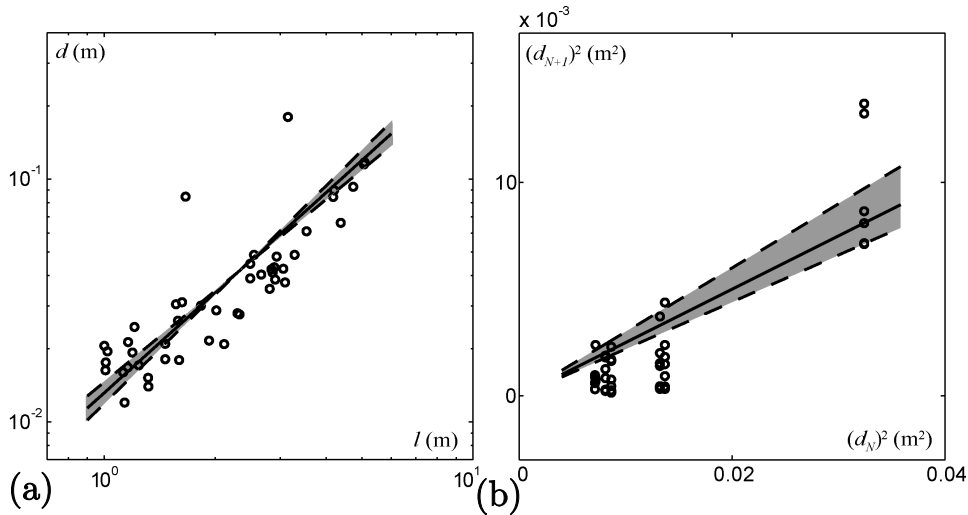


FIGURE 3.19 – Paramètres biométriques du noyer numérisé. (a) Coefficient allométrique, β . (b) Coefficient de réduction de la section par ramification, λ . La zone teinte correspond à l'intervalle de confiance à 90% des coefficients déduits par régression.

Comparativement au cas du jeune noyer en pot, le coefficient d'élancement β obtenu pour le noyer adulte est de 1,37 par rapport à 0,82, ce qui est une différence importante. En ce qui concerne le coefficient de réduction de la section à la ramification, celui obtenu pour le jeune noyer est sensiblement supérieur à celui du noyer adulte, mais les deux intervalles de confiance à 90% se chevauchent.

La branche de charme

A partir de la géométrie mesurée de la branche, l'élancement allométrique des segments, β , et la réduction des sections à la ramification, λ , sont déterminés.

La répartition de l'élancement et de la réduction des sections à la ramification, les régressions linéaires obtenues, ainsi que les intervalles de confiance à 90%, sont présentés figure 3.20. Un élancement $\beta = 1,14$ et un coefficient de réduction des sections à la ramification $\lambda = 0,42$ ont été déterminés lors de l'analyse statistique. La relation allométrique décrivant l'élancement des branches est très convaincante, elle explique 91% de la variance observée. La description de la réduction des sections par un unique coefficient explique

97% de la variance observée. Les intervalles de confiance obtenus dans le cas de la branche sont assez importants et s'expliquent par le faible nombre de degrés de liberté disponibles pour l'analyse statistique.

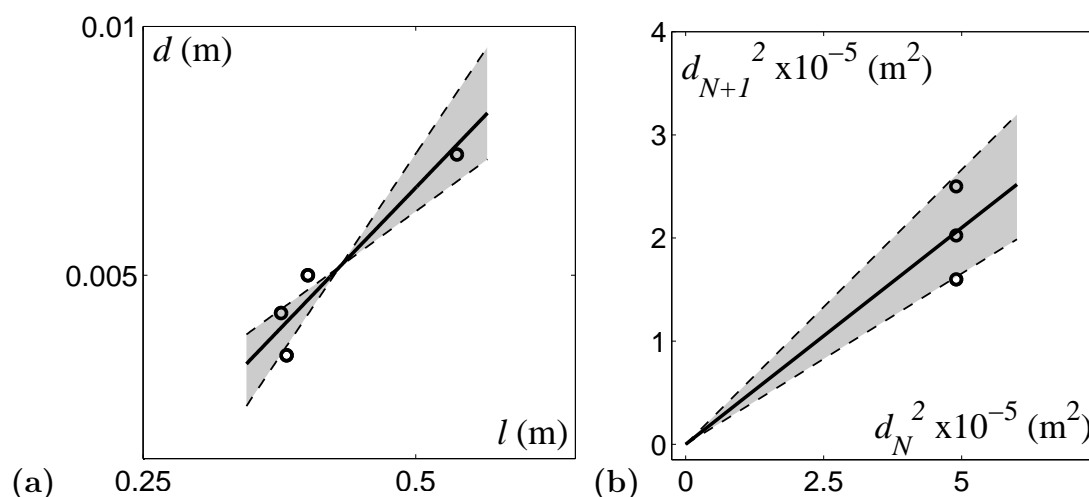


FIGURE 3.20 – Paramètres biométriques de la branche. (a) Coefficient allométrique, β . (b) Coefficient de réduction de la section par ramification, λ . La zone teinte correspond à l'intervalle de confiance à 90% des coefficients déduits par régression.

Le coefficient allométrique décrivant l'élanement de la branche se situe entre ceux des deux noyers, alors que son coefficient de réduction de la section à la ramification est plus de 30% supérieur aux valeurs déterminées pour les deux noyers.

Le jeune pin maritime

A partir de la géométrie numérisée du pin, l'élanement allométrique des branches, β , et les réductions de sections latérales et axiales à la ramification, λ et μ , sont déterminés.

La répartition de l'élanement et des réductions des sections à la ramification, les régressions linéaires obtenues, ainsi que les intervalles de confiance à 90%, sont présentés à la figure 3.21. Un élanement $\beta = 1,38$, un coefficient de réduction des sections lors la ramification latérale $\lambda = 0,038$, et un coefficient de réduction de la section des segments axiaux $\mu = 0,74$ ont été ainsi estimés. La relation allométrique décrivant l'élanement des branches explique 85% de la variance observée. La répartition des diamètres et des longueurs des segments se caractérise par les grands diamètre et longueur du tronc, opposés aux faibles dimensions des branches d'ordres supérieures. La description de la

réduction des sections lors de la ramification latérale par un unique coefficient explique 59% de la variance observée. Cette régression est beaucoup moins satisfaisante que celle de l'élancement, du fait de la grande variabilité des diamètres. Par contre, le coefficient de réduction de la section du tronc lors d'une ramification latérale explique 97% de la variance observée. Ce qui fait de la description du défilement du tronc par un coefficient de réduction de la section lors des ramifications latérales une description très convaincante de la géométrie du tronc dans ce cas-ci.

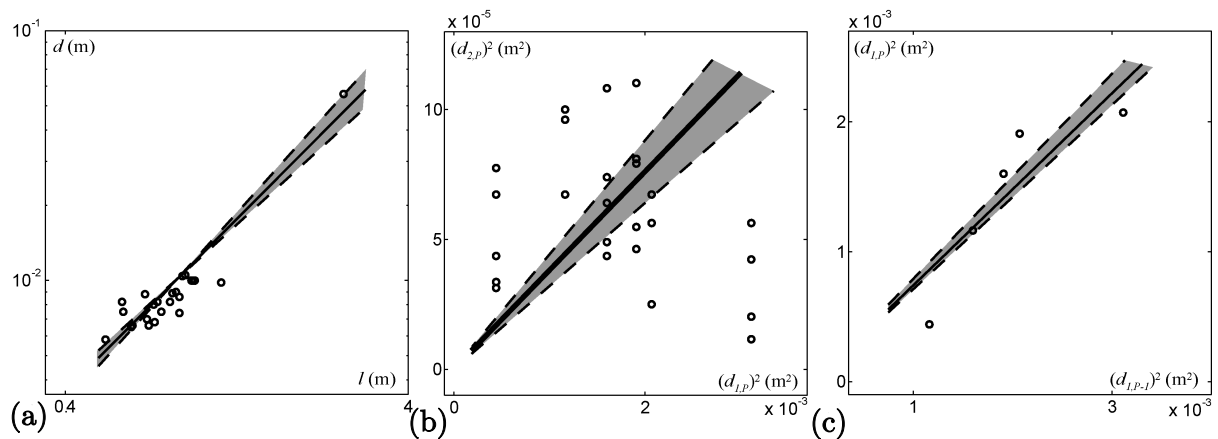


FIGURE 3.21 – Paramètres biométriques du pin numérisé. (a) Coefficient allométrique, β . (b,c) Coefficients de réduction de la section par ramification, respectivement λ et μ . La zone teinte correspond à l'intervalle de confiance à 90% des coefficients déduits par régression.

Le coefficient allométrique d'élancement β du jeune pin est égal (au bruit statistique près) à celui observé chez le noyer adulte. Par contre le coefficient de réduction des sections lors de ramifications latérales λ est d'un ordre de grandeur plus petit que chez les noyers analysés (traduisant les fines branches latérales sur les verticilles des jeunes pins avant formation de la couronne). Notons enfin que le coefficient de réduction des sections pour les successions de segments sur l'axe monopodial μ est presque 20 fois plus grand que le coefficient lié à la ramification latérale λ , traduisant le plus lent défilement de l'axe monopodial.

Arbres	β	λ	μ
Jeune noyer	0,82	0,31	0
CI	$0,72 < \beta < 0,92$	$0,27 < \lambda < 0,35$	
R^2	0,89	0,82	
σ_{res}	0,105	0,29	
Noyer adulte	1,37	0,25	0
CI	$1,25 < \beta < 1,49$	$0,22 < \lambda < 0,29$	
R^2	0,87	0,74	
σ_{res}	0,2	0,008	
Jeune pin	1,38	0,038	0,74
CI	$1,25 < \beta < 1,52$	$0,032 < \lambda < 0,044$	$0,71 < \mu < 0,79$
R^2	0,85	0,59	0,97
σ_{res}	0,086	11,92	5,33
Branche de charme	1,14	0,42	0
CI	$0,77 < \beta < 1,70$	$0,36 < \lambda < 0,48$	
R^2	0,91	0,97	
σ_{res}	0,05	$1,15 \cdot 10^{-5}$	

TABLE 3.5 – Coefficients d'élanement, β , et de ramifications latérales et axiales, λ et μ , des arbres et sous-ensembles d'arbres analysés. Les intervalles de confiance à 90% (CI), les coefficients de détermination (R^2), et les écart-types d'erreurs de régression sont donnés.

3.5.2 Comparaison

Les paramètres biométriques déterminés, tableau 3.5, sont maintenant appliqués aux lois d'échelle, et celles-ci sont comparées aux fréquences modales obtenues à la partie 3.3.

Le jeune noyer

La comparaison de la prédiction par loi d'échelle avec les fréquences modales déterminées par lâcher et par calcul numérique, Figure 3.22, est tout à fait satisfaisante. La prédiction par loi d'échelle recouvre 50% des fréquences modales issues du calcul numérique, autant celles appartenant au groupe II qu'au groupe III. Comme les fréquences modales déterminées expérimentalement sont dans la fourchette basse des fréquences modales issues du calcul numérique, elles se retrouvent légèrement surestimées par la prédiction par loi d'échelle. Une courbe, correspondant à l'évolution prédite par la loi

d'échelle pour les valeurs des coefficients biométriques obtenus, est aussi tracée, Figure 3.22. Elle souligne la bonne prédiction des fréquences modales par la loi d'échelle appliquée avec les paramètres biométriques déterminés.

La loi d'échelle prédit la tendance d'évolution des fréquences modales d'un noyer, de 4 mètres de haut, à ramification sympodiale et ayant jusqu'à six ordres de ramification, en fonction de leurs groupes, et donne une bonne estimation de celles-ci seulement à partir de deux paramètres biométriques.

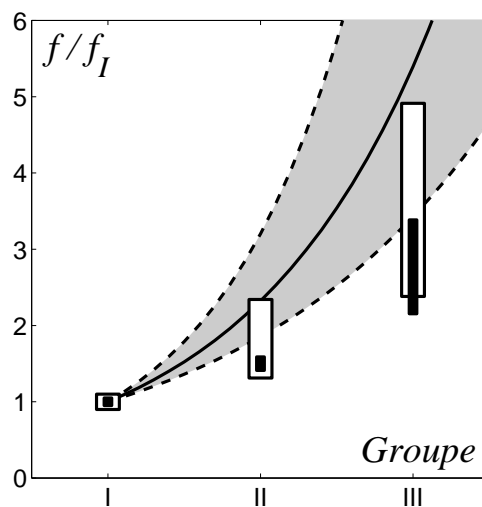


FIGURE 3.22 – Prédiction des fréquences par la loi d'échelle, en utilisant (—) les paramètres biométriques et (zone teintée) l'intervalle de confiance à 90%, comparées avec (■) les plages de fréquences relatives aux pics observés expérimentalement, et avec (□) les plages de fréquences déduites par le calcul éléments finis.

Le noyer adulte

Les fréquences modales sont rassemblées selon les trois groupes identifiés précédemment. Les deux paramètres biométriques déterminés et leurs intervalles de confiance à 90%, tableau 3.5, sont utilisés afin de tracer une plage de prédiction de l'évolution des fréquences modales du noyer adulte en fonction de leurs groupes de modes, à l'aide de l'équation 3.13. La figure 3.23 compare les fréquences modales déterminées numériquement et la prédiction par loi d'échelle. L'intervalle de fréquence prédit par la loi d'échelle encadre l'ensemble des fréquences modales déterminées par calcul éléments finis à partir de la géométrie numérisée de l'arbre. Une courbe, correspondant à l'évolution prédite par

la loi d'échelle pour les valeurs des coefficients biométriques obtenus, est aussi tracée, Figure 3.23. Elle souligne la bonne estimation des fréquences modales par la loi d'échelle appliquée avec les paramètres biométriques déterminés.

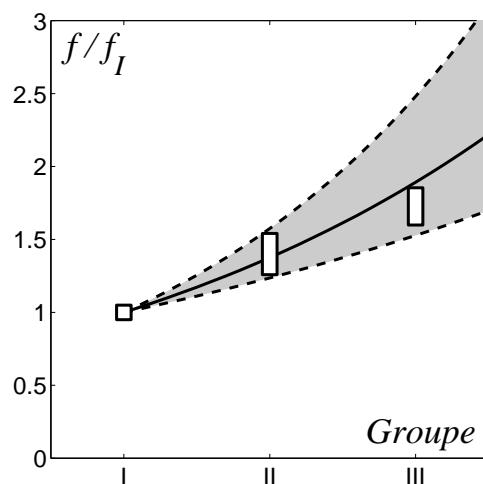


FIGURE 3.23 – Prédications des fréquences à partir de la loi d'échelle, en utilisant (—) les paramètres biométriques et (zone teintée) l'intervalle de confiance à 90%, comparées avec (□) les plages de fréquences déduites par le calcul éléments finis.

La loi d'échelle prédit l'évolution des fréquences d'un noyer, de grande dimension, à ramification sympodiale et ayant jusqu'à huit ordres de ramification.

La loi d'échelle prédit l'augmentation plus lente des fréquences modales observées pour le noyer adulte par rapport au jeune noyer. Ceci s'explique par un coefficient d'élanement allométrique des branches du noyer adulte qui est beaucoup plus important, et ce malgré le coefficient de réduction des sections un petit peu plus petit mais qui ne suffit pas à compenser la différence en élanement.

La branche de charme

Les fréquences de résonance identifiées expérimentalement sont rassemblées selon les deux groupes identifiés précédemment. Les deux paramètres biométriques, ainsi que leurs intervalles de confiance à 90%, sont utilisés afin de tracer un plage d'évolution des fréquences à partir de la prédiction par loi d'échelle, équation 3.13, Figure 3.24. La zone couverte par les intervalles de confiance est assez importante à cause des grands inter-

valles de confiance obtenus lors de l'analyse statistique, qui sont une conséquence directe du faible nombre de segments de la branche. Les fréquences de résonance sont englobées par la zone de prédiction des fréquences. Une courbe, correspondant à l'évolution prédite par la loi d'échelle pour les valeurs des coefficients biométriques obtenus, est aussi tracée, Figure 3.24. Elle met mieux en évidence la bonne estimation des fréquences modales par la loi d'échelle appliquée avec les paramètres biométriques déterminés.

La loi d'échelle prédit l'évolution des fréquences d'une branche, de faible dimension, et avec seulement deux ordres de ramification. Elle prédit une augmentation au même rythme que dans le cas du noyer adulte et beaucoup moins rapidement que dans le cas du jeune noyer. Ceci s'explique par le fort coefficient de réduction de la section lors de la ramification latérale, λ , qui compense le plus faible coefficient d'élanement allométrique de la branche de charme par rapport à celui du noyer adulte. De ce fait, malgré des coefficients biométriques assez différent, on obtient des plages de fréquences pour les modes du second groupe assez proches pour la branche de charme et pour le noyer adulte.

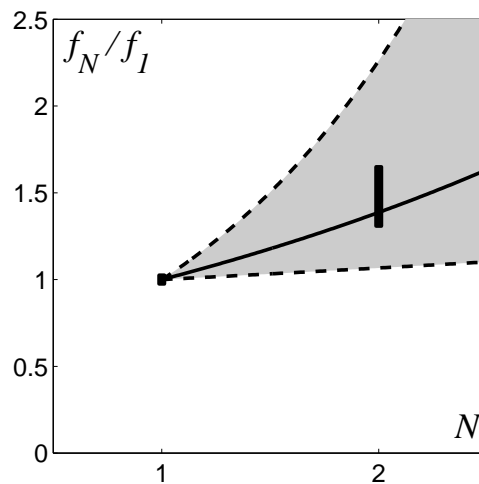


FIGURE 3.24 – Prédiction des fréquences à partir de la loi d'échelle, en utilisant (—) les paramètres biométriques et (zone teintée) l'intervalle de confiance à 90%, comparées avec (■) les plages de fréquences de résonance déduites du balayage en fréquence sur la table vibrante.

Le jeune pin maritime

La ramification monopodiale et la double indexation de la ramification du pin rendent plus difficile la comparaison entre les fréquences modales issues du calcul numérique et les prédictions par la loi d'échelle de l'évolution des fréquences. On se concentre ainsi sur les modes du groupe II de la figure 3.15 correspondant aux déformations de branches latérales réparties sur le tronc. Ces sous-ensembles sont indexés $[2,P]$ selon la terminologie précédente. Les trois paramètres biométriques déterminés et leurs intervalles de confiance à 90%, tableau 3.5, sont utilisés afin de tracer une plage de prédiction de l'évolution des fréquences modales du pin en fonction du groupe de mode relatif à l'aide de l'équation 3.15, Figure 3.25. La plage de fréquences prédite par la loi d'échelle couvre une surface assez importante étant donné que la combinaison des trois intervalles de confiance est prise en compte. La zone déterminée par la loi d'échelle et les intervalles de confiance à 90% englobe entre 60% et 75% des fréquences modales déterminées par le calcul éléments finis.

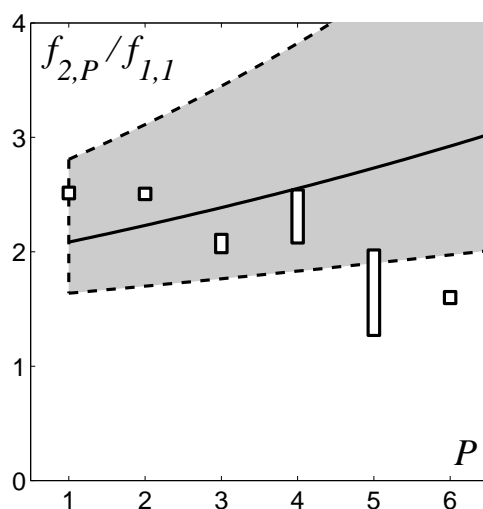


FIGURE 3.25 – Prédiction des fréquences à partir de la loi d'échelle, en utilisant (—) les paramètres biométriques et (zone teintée) l'intervalle de confiance à 90%, comparées avec (□) les plages de fréquences déduites par le calcul éléments finis.

La loi d'échelle donne une bonne estimation de l'évolution des fréquences d'un jeune pin, à ramification monopodiale, et ayant trois ordres de ramification, à partir de seulement trois paramètres biométriques décrivant sa géométrie.

3.6 Discussion

Les déterminations expérimentales et numériques des caractéristiques dynamiques de quatre arbres, se distinguant par leurs âges, leurs dimensions, et leurs architectures, ont mis en évidence une organisation particulière des modes de vibration des arbres analysés. Les fréquences du premier mode du pin et des deux noyers, sont toutes proches du Hertz, et la densité modale en fréquence de ces arbres est très importante. Les modes se rassemblent en groupe de modes, où les modes d'un même groupe sont associés à un groupe de sous-ensembles de l'arbre donné. Leurs déformations modales sont principalement localisées sur les segments basaux de ces sous-ensembles, et leurs déplacements modaux sont localisés principalement sur les segments d'ordres supérieurs. Leurs fréquences modales des modes d'un même groupe sont aussi regroupées.

Des lois d'échelle ont été développées, elles prédisent l'évolution des fréquences modales des arbres à partir de deux à trois paramètres biométriques caractérisant leur géométrie : le coefficient de la loi d'élanement des branches, et les coefficients de réduction des sections à la ramification. Ces lois d'échelle ont été validées par comparaison avec les fréquences modales déterminées expérimentalement et numériquement. Elles expliquent les différentes évolutions des fréquences observées, et démontrent le rôle de la géométrie de chaque arbre dans l'évolution de ces fréquences modales.

Ces lois d'échelle sont aussi très intéressantes d'un point de vue pratique puisqu'elles fournissent une estimation des modes de vibration d'un arbre à partir de : (1) la mesure, ou l'estimation, de la fréquence du premier mode, qui est le plus facile à déterminer (White *et al.*, 1976; Mayer, 1987; Gardiner, 1992; Bruchert & Gardiner, 2006; Moore & Maguire, 2005; Sellier & Fourcaud, 2005), (2) une description du mode de ramification (sympodial ou monopodial), et (3) deux paramètres biométriques simples qui ont été mesurés pour de nombreux arbres (par exemple McMahon & Kronauer, 1976).

L'effet de la ramification et des paramètres biométriques, que sont l'élanement et la réduction de section, fournissent à la fois un moyen de contrôle et de compartimentation des modes. Les lois d'échelle permettent d'apprécier l'influence de l'élanement et de la réduction des sections sur les fréquences. Les effets de ces deux paramètres sont non linéaires et croisés. Ils influencent tous les deux la fréquence moyenne d'un groupe de modes par rapport à celles des modes fondamentaux. Une réduction des sections plus importante induit une plus grande augmentation des fréquences, de même qu'une réduction

de l'élanement des branches.

Il est important de noter que les deux paramètres biométriques, intervenant dans les lois d'échelle, sont sous contrôle mécano-perceptif au travers de la régulation de la croissance primaire et secondaire induite par la thigmomorphogénèse (Coutand *et al.*, 2000; Watt *et al.*, 2005; Telewski, 2006; Coutand *et al.*, 2009). Cela implique que la régulation de la croissance par l'acclimatation pourrait contrôler la répartition relative des fréquences de l'arbre, en sus de son modèle de développement architectural spécifique.

La branchaison et la croissance secondaire, au travers de la réduction des sections à la branchaison, induisent aussi une très claire compartimentation spatiale des modes de vibration des arbres, et une similarité, par les lois d'échelle, des modes de groupes successifs. Peu importe l'architecture, les modes de vibration tendent à être de plus en plus locaux, au fur et à mesure que la fréquence modale augmente. Cette compartimentation des modes et leur similarité par lois d'échelle rendent plus aisé un contrôle biologique des caractéristiques dynamiques de l'arbre, peu importe ses dimensions. Il a ainsi été identifié un rôle clé de la ramification des axes de l'arbre dans l'organisation de ses caractéristiques dynamiques.

On conclut à une organisation spatiale des caractéristique dynamique de l'arbre, sous la forme d'une compartimentation de ces modes qui est une conséquence directe de son développement au travers de sa croissance et de sa ramification.

Chapitre 4

Organisation spatiale de la réponse de l'arbre au vent

La répartition dans l'arbre de sa réponse à l'excitation par le vent est une question fondamentale. Le développement, dans le chapitre 3, d'un modèle prédictif de la répartition spatiale des caractéristiques modales de l'arbre, par des lois d'échelle, offre l'opportunité d'aborder le problème de cette répartition toujours selon une approche générique.

Tout d'abord, la force d'interaction entre le vent et l'arbre est décomposée sous la forme d'une traînée aérodynamique statique, d'un amortissement aérodynamique linéaire et d'une excitation aléatoire par le vent turbulent. L'analyse dimensionnelle permet ensuite de développer des lois d'échelle prédisant la répartition modale de la réponse selon ces trois composantes.

L'effet de l'architecture de l'arbre sur la répartition de la réponse au vent peut ainsi être discuté quantitativement en utilisant les lois d'échelle obtenues.

Le développement des lois d'échelle est une tentative visant à proposer une alternative à des calculs numériques plus complexes couplant la dynamique du vent à celle de l'arbre, tels que développés par Moore & Maguire (2008), Sellier *et al.* (2008) et Sellier & Fourcaud (2009). En effet, ces modèles demandent une description intensive de la géométrie de l'arbre, et fournissent des résultats difficilement généralisables.

Bien entendu, les lois d'échelle dérivées ici demandent encore à être validées expérimentalement ou par simulation numérique.

Par ailleurs ce travail a fait l'objet d'une communication au congrès *Eurographics*, conjointe à une publication dans la revue *Computers and Graphics Forum* (Diener *et al.*, 2009), dans le domaine des modèles physiques pour l'animation infographique en temps réel, où le réalisme et la vitesse de simulation en temps réel sont des critères indispensables, ce qui rendait les résultats obtenus ici immédiatement valorisables.

4.1 Le couplage aérodynamique entre le vent et l'arbre

La force de traînée aérodynamique linéique modélisant l'interaction entre le vent et l'arbre isolé, Figure 4.1, peut s'écrire sous la forme suivante (Taylor, 1952; Blevins, 1977; Cremonat & Foucriat, 2002) :

$$\underline{f}(t) = \frac{1}{2} \rho C_d A |\underline{U}_{app}(t)| \underline{U}_{app}(t) \quad (4.1)$$

Où A est la surface linéique le long de la branche, elle est égale à son diamètre, D dans le cas de l'arbre sans feuille. Le coefficient de traînée, C_d , dépend typiquement de la forme de l'obstacle et de la vitesse du vent (Blevins, 1977), et ρ est la masse volumique de l'air. La vitesse apparente $\underline{U}_{app}(M, t)$ est égale à la composante de la vitesse du vent dans le plan normal au vecteur tangent à la branche au point considéré, \underline{U}_n , moins la vitesse de déplacement de la branche.

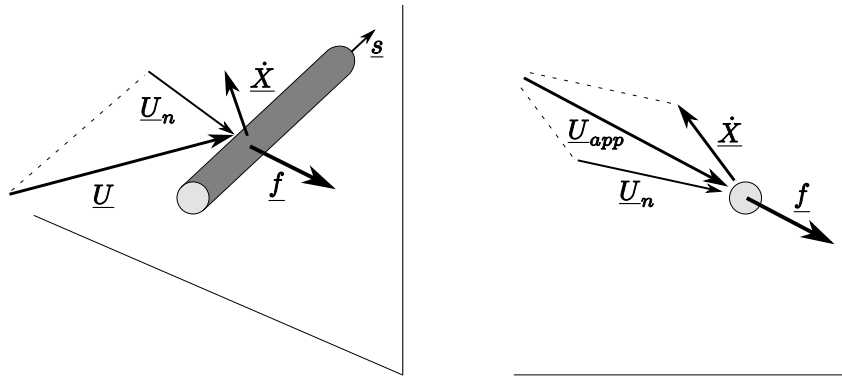


FIGURE 4.1 – Schéma représentant la force aérodynamique d'interaction entre le vent et une branche d'arbre, telle qu'elle a été définie à l'équation 4.1.

Cette force de traînée linéique, fonction du temps, est à intégrer sur l'ensemble de la structure en interaction avec le vent. Malheureusement, l'analyse de la dynamique d'un

système, résultant de l'interaction aérodynamique modélisée par l'équation 4.1, est trop complexe pour permettre une compréhension fine des phénomènes physiques en jeu (Cremont & Foucriat, 2002). Faute de pouvoir résoudre le problème complet, on se place sous l'hypothèse d'une vitesse de déplacement de la structure faible devant la vitesse du vent, c'est à dire que $|\dot{\underline{X}}| \ll |U|$, et on exprime la force aérodynamique selon trois contributions (Blevins, 1977) :

(a) La traînée aérodynamique statique, induit par la vitesse moyenne du vent :

$$\underline{F}_s \approx \frac{1}{2} \rho C_d D |\underline{U} \wedge \underline{s}|^2 \underline{e}_{(s,U)} \quad (4.2)$$

Où $\underline{e}_{s,u}$ est le vecteur directeur de la composante de la vitesse du vent dans le plan normal à la branche.

(b) L'amortissement aérodynamique linéaire, résultant des déplacements de la structure dans l'écoulement (de Langre, 2008) :

$$\underline{F}_a(t) \approx -\rho C_d D |\underline{U} \wedge \underline{s}| \dot{\underline{X}}(t) \quad (4.3)$$

(c) L'excitation aérodynamique par le vent fluctuant :

$$\underline{F}_f(t) \approx \rho C_d D |\underline{U} \wedge \underline{s}| |\underline{u}(t) \wedge \underline{s}| \underline{e}_{(s,u)} \quad (4.4)$$

Où $\underline{e}_{(s,u)}$ est l'équivalent de $\underline{e}_{(s,U)}$ pour la vitesse fluctuante, et où l'on considère la vitesse de fluctuation du vent, \underline{u} , faible devant la vitesse moyenne, \underline{U} , c'est à dire $|\underline{u}| \ll |U|$, avec $\underline{U}(t) = \underline{U} + \underline{u}(t)$.

L'interaction entre le vent et l'arbre se décompose donc sous la forme d'une traînée aérodynamique statique due au vent moyen, à laquelle s'ajoute une force aléatoire due au vent turbulent, et un amortissement des mouvements de l'arbre induits par son déplacement dans l'écoulement moyen (de Langre, 2008). Cette approche découplant les effets aérodynamiques est privilégiée par la suite afin d'étudier la dynamique de la réponse de l'arbre en interaction avec le vent, et la répartition dans l'arbre de cette réponse.

4.2 L'effort aérodynamique statique

La force aérodynamique statique appliquée à l'arbre a été présentée à l'équation 4.2. Afin d'étudier la répartition dans l'arbre de la réponse à la traînée statique, la force est projetée sur les modes de vibrations de l'arbre (Geradin & Rixen, 1994), ce qui permet d'analyser la réponse par comparaison des contributions modales. En effet, dans le cas d'un problème statique, la réponse à l'excitation peut s'analyser en utilisant la décomposition sur base modale et en effectuant la somme des contributions modales, comme dans le cas d'une excitation dynamique. La force projetée sur un mode de vibration s'écrit :

$$F_N = \frac{1}{2} \rho C_d U^2 \int_{\Omega} D |\underline{e}_U \wedge \underline{s}|^2 \underline{e}_{(s,U)} \cdot \underline{\varphi}_N(s) ds \quad (4.5)$$

où le champ de déplacement modal du mode N s'écrit $\underline{\varphi}_N$, s est l'abscisse curviligne le long de l'arbre, et \underline{e}_U est le vecteur directeur du vent moyen.

Etant donné que les déplacements modaux sont transverses aux branches, ils sont dans le plan normal à l'abscisse curviligne, ce qui implique $\underline{e}_{(s,U)} \cdot \underline{\varphi}_N(s) = \underline{e}_U \cdot \underline{\varphi}_N(s)$, soit :

$$F_N = \frac{1}{2} \rho C_d U^2 \int_{\Omega} D |\underline{e}_U \wedge \underline{s}|^2 \underline{e}_U \cdot \underline{\varphi}_N(s) ds \quad (4.6)$$

L'équation de l'équilibre statique projetée sur un mode est :

$$k_N q_N = F_N \quad (4.7)$$

où q_N est l'amplitude modale qui mesure la contribution du mode à la réponse de l'arbre, et k_N est la raideur modale. La raideur modale peut s'écrire en fonction de la masse modale, m_N et de la pulsation modale, ω_N : $k_N = m_N \omega_N^2$. On obtient ainsi la contribution de chaque mode à la réponse de l'arbre, induite par la traînée statique, en fonction de la projetée modale de la force et des caractéristiques modales :

$$q_N = \frac{1}{k_N} F_N = \frac{1}{m_N \omega_N^2} F_N \quad (4.8)$$

L'expression sous forme développée de la contribution modale s'écrit :

$$q_N = \frac{\rho C_d U^2}{2 m_N \omega_N^2} \int_{\Omega} D |\underline{e}_U \wedge \underline{s}|^2 \underline{e}_U \cdot \underline{\varphi}_N(s) ds \quad (4.9)$$

Etant donné que l'on s'intéresse à la forme générale de la répartition de la réponse à la traînée aérodynamique, on peut écrire cette contribution modale en fonction de la vitesse longitudinale du vent, U , supposée uniforme, en définissant un facteur de contribution géométrique modale à l'excitation aérodynamique statique, dépendant uniquement de la direction du vent :

$$B_{N,U} = \int_{\Omega} D |\underline{e}_U \wedge \underline{s}|^2 \underline{e}_U \cdot \underline{\varphi}_N ds \quad (4.10)$$

La contribution modale se réécrit ainsi sous la forme :

$$q_N = \frac{\rho C_d B_{N,U}}{2m_N \omega_N^2} U^2, \quad (4.11)$$

où sont séparés l'effet de la direction du vent et l'effet de son intensité sur l'amplitude modale résultante.

Ainsi l'étude d'un cas d'arbre en particulier se résume à la détermination des facteurs de contributions modales, $B_{N,U}$, qui fournissent une évaluation précise de la répartition de la réponse à la traînée statique induite par le vent. Ce calcul nécessite uniquement de connaître la géométrie tridimensionnelle de l'arbre, par exemple à partir de sa numérisation préalable selon la méthode de Sinoquet & Rivet (1997).

Malheureusement, cette approche au cas par cas ne laisse, une fois de plus, que peu de place à la généralisation. Par contre, une analyse dimensionnelle de la contribution modale permet de développer une loi d'échelle de la répartition de la réponse à l'effort aérodynamique statique dû au vent. Des lois d'échelle pour la pulsation modale et pour la masse modale ont été développées respectivement dans le chapitre 3 et dans Rodriguez *et al.* (2008) :

$$\omega \sim dl^{-2} \quad (4.12)$$

$$m \sim d^2 l \quad (4.13)$$

La masse volumique de l'air est indépendante de la géométrie, et, au premier ordre, on peut effectuer la même approximation pour le coefficient de traînée. Il suffit donc d'analyser dimensionnellement l'intégrale contenue dans la définition du coefficient $B_{N,U}$, équation 4.10. Le déplacement modal et le vecteur directionnel du vent sont sans dimen-

sion. Le domaine sur lequel est définie l'intégrale dépend de l'échelle de longueur l , et la fonction intégrée dépend de l'échelle de longueur transverse d . On obtient :

$$B \sim dl \quad (4.14)$$

Et en utilisant la relation allométrique décrivant l'élanement dans l'arbre qui relie ces deux échelles de longueur, on a :

$$B \sim d^{(1+\beta)/\beta} \sim l^{1+\beta} \quad (4.15)$$

On en déduit ensuite la loi d'échelle pour la répartition de la réponse à l'effort aérodynamique statique dû au vent :

$$q \sim d^{-3} l^4 \sim d^{4/\beta-3} \sim l^{4-3\beta} \quad (4.16)$$

Ainsi dans le cas d'un arbre à ramification sympodiale, le rapport entre les contributions modales s'écrit :

$$\frac{q_N}{q_I} = \left(\frac{d_N}{d_I} \right)^{(4-3\beta)/\beta} = \left(\frac{l_N}{l_I} \right)^{4-3\beta}, \quad (4.17)$$

et en tenant compte du paramètre biométrique décrivant la réduction des sections à la ramification, on obtient :

$$\frac{q_N}{q_I} = \lambda^{(N-1)(4-3\beta)/2\beta} \quad (4.18)$$

Cette loi d'échelle prédit ainsi la répartition de l'excitation aérodynamique statique, dans le cas de l'arbre sans feuille, uniquement en fonction de deux paramètres descriptifs de la géométrie de l'arbre.

Illustrons la répartition de la réponse prédite par cette loi d'échelle dans le cas d'un arbre sympodial, ayant un élanement $\beta = 3/2$, et un coefficient de réduction des sections à la ramification $\lambda = 1/2$, Figure 4.2. L'amplitude modale relative à celle de premier groupe de modes, tracée en fonction du groupe de modes, est une fonction faiblement croissante. On prédit, par cette modélisation de la traînée, une réponse fortement multimodale de cet arbre à l'excitation aérodynamique statique.

Dans la plage typique de variation des coefficients allométriques décrivant l'élanement des branches ($1 \leq \beta \leq 2$), la contribution modale est une fonction croissante du groupe de mode, ce qui signifie que plus les modes sont localisés dans des branches d'ordres supérieurs, plus ils contribuent à la réponse. De même, une réduction des sections plus forte augmente la contribution relative des groupes de modes d'ordre supérieurs. Il y a, dans tous les cas, une réponse multimodale de l'arbre à la traînée statique.

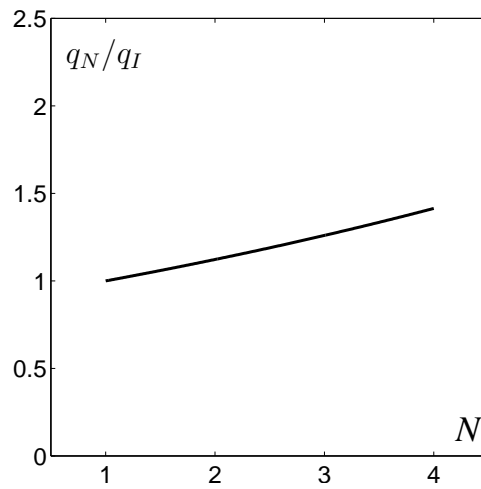


FIGURE 4.2 – Répartition modale de la réponse à un effort aérodynamique statique du au vent, dans le cas d'un arbre sympodial avec un coefficient d'élanement, $\beta = 3/2$, et un coefficient de réduction de la section à la ramification, $\lambda = 1/2$.

4.3 L'amortissement aérodynamique linéaire

L'amortissement aérodynamique linéaire du mouvement de l'arbre dans le vent moyen a été présenté à l'équation 4.3. Dans le cas d'un arbre isolé, sans impact entre ses branches, cette source d'amortissement des mouvements de l'arbre sous le vent est la plus importante (Moore & Maguire, 2005; Sellier & Fourcaud, 2005; de Langre, 2008). La force d'amortissement aérodynamique est projetée sur la base modale (Geradin & Rixen, 1994) :

$$F_N = -\rho C_d U \int_{\Omega} D |\underline{e}_U \wedge \underline{s}| \dot{\underline{X}}(t) \cdot \underline{\varphi}_N dM \quad (4.19)$$

En décomposant la vitesse en un point sur la base modale :

$$\underline{\dot{X}}(t) = \sum_i \dot{q}_i(t) \underline{\varphi}_i \quad (4.20)$$

on exprime l'amortissement aérodynamique sous la forme d'un couplage entre modes :

$$F_N = -\rho C_d U \sum_i \left(\int_{\Omega} D |\underline{e}_U \wedge \underline{s}| \underline{\varphi}_i \cdot \underline{\varphi}_N dM \right) \dot{q}_i \quad (4.21)$$

L'amortissement aérodynamique linéaire est donc responsable d'un couplage entre les modes de vibration de l'arbre. Ce couplage entraîne un échange d'énergie entre les modes de la structure.

On peut comparer les contributions à la dissipation de l'excitation par les modes en déterminant l'amortissement induit par un mode sur lui-même :

$$F_{NN} = -\rho C_d U \left(\int_{\Omega} D |\underline{e}_U \wedge \underline{s}| \underline{\varphi}_N \cdot \underline{\varphi}_N dM \right) \dot{q}_N = -c_N \dot{q}_N \quad (4.22)$$

où c_N est le coefficient d'amortissement modal.

Comme dans le cas de la traînée statique, on voit que le coefficient d'amortissement aérodynamique se décompose selon une contribution dépendant uniquement de la géométrie (l'intégrale dans l'équation précédente) multipliée par la vitesse moyenne. L'analyse dimensionnelle du coefficient d'amortissement c donne :

$$c \sim dl \quad (4.23)$$

Pour rappel, la pulsation modale et la masse modale dépendent des deux échelles de longueur selon les relations : $m \sim d^2 l$ et $f \sim dl^{-2}$. Ceci permet de déduire l'analyse dimensionnelle du facteur d'amortissement aérodynamique linéaire :

$$\zeta \sim d^{-2} l^2 \quad (4.24)$$

où $\zeta = c/(2m\omega)$.

La relation allométrique définissant l'élancement dans l'arbre permet aussi d'écrire :

$$\zeta \sim d^{(2-2\beta)/\beta} \sim l^{2-2\beta} \quad (4.25)$$

En poursuivant le même raisonnement qu'effectué dans le cas de la loi d'échelle pour les fréquences modales, on peut étendre l'application de cette loi d'échelle à la comparaison des facteurs d'amortissement modaux dus à l'amortissement aérodynamique linéaire. Par exemple dans le cas d'un arbre à ramification sympodiale, le rapport entre les facteurs d'amortissement modaux s'écrit :

$$\frac{\zeta_N}{\zeta_I} = \lambda^{(N-1)(1-\beta)/\beta} \quad (4.26)$$

On obtient une répartition de l'amortissement aérodynamique linéaire, uniquement en fonction de deux paramètres descriptifs de la géométrie de l'arbre.

Illustrons l'évolution de l'amortissement aérodynamique linéaire par cette loi d'échelle dans le cas d'un arbre sympodial, ayant un élancement $\beta = 3/2$, et un coefficient de réduction de section à la ramification $\lambda = 1/2$, Figure 4.3.

Le facteur d'amortissement relatif à celui de premier groupe de mode, tracé en fonction du groupe de mode, est une fonction faiblement croissante. Par exemple, le facteur d'amortissement des modes du groupe 4 est 2 fois plus grand que celui des modes du groupe 1.

La géométrie de l'arbre est donc responsable d'une contribution de l'ensemble des modes à l'amortissement aérodynamique linéaire. Cette loi d'échelle évaluant le facteur d'amortissement va aussi être utilisée lors de la modélisation de la distribution de la réponse à la turbulence.

4.4 L'excitation aléatoire par le vent turbulent

La force d'excitation aléatoire due au vent turbulent a été présentée à l'équation 4.4. L'analyse de la répartition de la réponse d'un arbre à cette excitation est maintenant

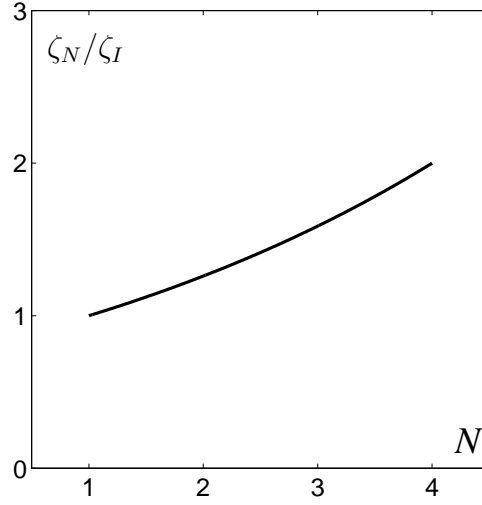


FIGURE 4.3 – Evolution du facteur d'amortissement pour un amortissement aérodynamique linéaire. On considère le cas d'un arbre sympodial avec un coefficient d'élanement $\beta = 3/2$, et un coefficient de réduction de la section à la ramification $\lambda = 1/2$.

analysée au travers d'une projection des efforts sur la base modale (Geradin & Rixen, 1994). Dans le cas d'une force d'excitation linéique par le vent fluctuant $F_f(M, t)$, variable en temps et en espace, la projection de cette force sur le $N^{i\text{ème}}$ mode s'exprime :

$$\ddot{q}_N + 2\zeta_N\omega_N\dot{q}_N + (\omega_N)^2q_N = \frac{1}{m_N} \int_{\Omega} F_f(M, t) \cdot \underline{\varphi}_N(M) dM = \frac{1}{m_N} F_N(t) \quad (4.27)$$

Où :

$$F_N = \rho C_d U \int_{\Omega} D |\underline{e}_U \wedge \underline{s}| |\underline{u}(t) \wedge \underline{s}| \underline{e}_{(s,u)} \cdot \underline{\varphi}_N dM \quad (4.28)$$

La dynamique modale peut aussi s'exprimer dans le domaine fréquentiel, équation 4.29, en utilisant la fonction de transfert associée au $N^{i\text{ème}}$ mode, $H_N(f)$, équation 4.30 (Axisa, 2001b).

$$q_N(f) = H_N(f) F_N(f) \quad (4.29)$$

$$H_N(f) = \frac{1}{4\pi^2 m_N ((f_N^2 - f^2) + 2i\zeta_N f_N f)} \quad (4.30)$$

Ainsi, la densité spectrale de puissance de l'amplitude modale est déterminée en fonction de la fonction de transfert et de la densité spectrale de la projection modale de la force

d'excitation :

$$S_{q_N q_N}(f) = \|H_N(f)^2\| S_{F_N F_N}(f) \quad (4.31)$$

Ceci permet d'obtenir la variance de l'amplitude modale :

$$\sigma_{q_N}^2 = \int_0^\infty S_{q_N q_N}(f) df \quad (4.32)$$

qui permet d'obtenir une mesure de l'amplitude de la réponse à l'excitation aléatoire par le vent turbulent.

L'énergie turbulente dans la direction du vent est la plus importante (Cremonat & Foucriat, 2002). A partir d'ici, on restreint le problème en ne considérant que la force d'excitation aléatoire induite par la vitesse fluctuante dans la direction du vent. Dans le domaine fréquentiel, on obtient :

$$F_N(f) = \rho C_d U u'(f) \left(\int_{\Omega} D |\underline{e}_U \wedge \underline{s}| |\underline{e}_U \wedge \underline{s}| \underline{e}_U \cdot \underline{\varphi}_N dM \right) \quad (4.33)$$

Où $u'(f)$ est le spectre en fréquence de l'amplitude de la composante de la vitesse fluctuante dans la direction du vent moyen. En définissant un facteur de contribution modale, comme proposé par Axisa (2001b) :

$$A_N = \left(\rho C_d \int_{\Omega} D |\underline{e}_U \wedge \underline{s}| |\underline{e}_U \wedge \underline{s}| \underline{e}_U \cdot \underline{\varphi}_N dM \right)^2 \quad (4.34)$$

On obtient ainsi la densité spectrale de puissance de l'amplitude modale :

$$S_{q_N q_N}(f) = \|H_N(f)^2\| U^2 A_N S_{u' u'}(f) \quad (4.35)$$

et la variance de l'amplitude modale :

$$\sigma_{q_N}^2 = A_N U^2 \int_0^\infty \|H_N(f)^2\| S_{u' u'}(f) df \quad (4.36)$$

où $S_{u' u'}(f)$ est la densité spectrale de puissance de u' .

Dans le cas d'un amortissement modal suffisamment petit, la densité spectrale de puis-

sance de l'amplitude modale est confinée autour de la fréquence modale (Axisa, 2001b) :

$$\sigma_{q_N}^2 = \frac{A_N U^2 S_{u'u'}(f_N)}{16\pi^4 m_N^2} \int_0^\infty \frac{df}{(f_N^2 - f^2)^2 + 4\zeta_N^2 f_N^2 f^2} = \frac{A_N U^2 S_{u'u'}(f_N)}{64\pi^3 m_N^2 \zeta_N f_N^3} \quad (4.37)$$

L'évolution des variances des contributions modales peut être déterminée à partir de la géométrie tridimensionnelle de l'arbre, par exemple si celle-ci a été préalablement numérisée. Ceci permet une évaluation précise au cas par cas de la répartition modale de la réponse à une excitation par le vent turbulent. Cependant, comme précédemment, l'utilisation des lois d'échelle décrivant les caractéristiques dynamiques de l'arbre, et l'analyse dimensionnelle des termes supplémentaires aboutissent à une nouvelle loi d'échelle décrivant la répartition de la réponse au vent turbulent dans l'arbre.

La densité spectrale de puissance du vent fluctuant, dans la plage de fréquence d'intérêt concernant la dynamique des arbres, suit la relation $S_{u'u'}(f) \sim f^{-5/3}$. On en déduit que l'intensité du spectre à la fréquence modale concernée s'écrit :

$$S_{u'u'}(f) \sim f^{-5/3} \sim d^{-5/3} l^{-10/3} \quad (4.38)$$

On obtient aussi par analyse dimensionnelle du facteur de contribution modale : $A_n(f) \sim d^2 l^2$. De plus, l'analyse dimensionnelle des caractéristiques vibratoires des modes des arbres a donné les relations suivantes pour la masse et la fréquence modale, $m \sim d^2 l$ et $f \sim dl^{-2}$. Etant donné qu'en absence d'impact entre branches, l'amortissement aérodynamique est l'amortissement principal de l'arbre (de Langre, 2008), on obtient pour l'analyse dimensionnelle de l'amortissement modal : $\zeta \sim d^{-2} l^2$. On déduit ainsi la relation suivante pour la variance de l'amplitude modale :

$$\sigma_q^2 \sim d^{-1/3} l^{2/3} \quad (4.39)$$

Si l'on considère que les dimensions des branches de l'arbre suivent une loi allométrique, $d \sim l^\beta$, on obtient finalement la relation suivante pour la variance de l'amplitude modale :

$$\sigma_q^2 \sim d^{(2-\beta)/3\beta} \sim l^{(2-\beta)/3} \quad (4.40)$$

Pour un arbre sympodial, on déduit le rapport entre deux variances d'amplitudes

modales à partir du coefficient de réduction de section, λ , selon la relation :

$$\frac{\sigma_{q_N}^2}{\sigma_{q_I}^2} = \left(\frac{d_N}{d_I} \right)^{(2-\beta)/3\beta} = \lambda^{(N-1)(2-\beta)/6\beta} \quad (4.41)$$

On obtient ainsi une estimation par loi d'échelle de la répartition dans l'arbre de la réponse à une excitation par un vent turbulent, seulement à partir de paramètres biométriques décrivant sa géométrie.

Illustrons la répartition de la réponse à l'excitation aléatoire par cette loi d'échelle dans le cas d'un arbre sympodial, ayant un élancement $\beta = 3/2$, et un coefficient de réduction des sections à la ramification $\lambda = 1/2$, Figure 4.3. La variance de la contribution modale relative à celle du premier groupe de mode, tracée en fonction du groupe de mode, est une fonction très faiblement décroissante selon le groupe de mode. Par exemple, la variance de la contribution modale des modes du groupe 4 est environ 0,9 fois celle des modes du groupe 1. L'ensemble des modes participent à la réponse de l'arbre à l'excitation par la turbulence.

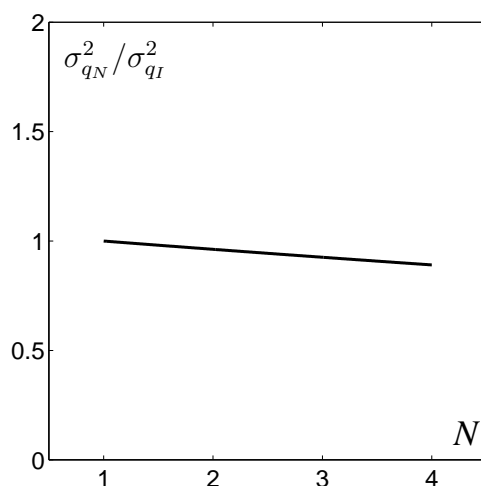


FIGURE 4.4 – Répartition modale de la réponse à une excitation dynamique par le vent. On considère le cas d'un arbre sympodial avec un coefficient d'élancement, $\beta = 3/2$, et un coefficient de réduction de la section à la ramification, $\lambda = 1/2$.

Dans la plage typique de variation des coefficients allométriques décrivant l'élancement

des branches ($1 \leq \beta \leq 2$) (McMahon & Kronauer, 1976), la variance de la contribution modale diminue avec le groupe de mode, et ceci d'autant plus que la diminution de section à la ramification sera forte.

La géométrie de l'arbre est donc responsable d'une participation de l'ensemble des modes à la réponse à l'excitation aléatoire par le vent turbulent.

4.5 Discussion

La décomposition de l'interaction aérodynamique entre le vent et l'arbre selon ces trois contributions (la traînée statique, l'amortissement aérodynamique linéaire, l'excitation aléatoire par la turbulence) et l'analyse de la dynamique de l'arbre sur base modale, ont permis de modéliser sa réponse à l'excitation par le vent. Une quantification de la répartition dans l'arbre de la réponse au différents types d'interactions avec le vent, décrite par des lois d'échelle, a aussi été obtenue par analyse dimensionnelle.

Au delà de la mise en évidence de la participation de tous les ordres de branches de l'arbre à la réponse au vent, il a été souligné le rôle de sa géométrie, à travers sa ramification et ses paramètres biométriques, dans la répartition de la réponse entre les différents groupes de modes, que ce soit dans le cas de la traînée statique, de l'amortissement aérodynamique linéaire, ou encore dans le cas de l'excitation par la turbulence.

Il est important de noter que les deux paramètres biométriques intervenant dans les lois d'échelle sont sous contrôle mécano-perceptif au travers de la régulation de la croissance primaire et secondaire induite par la thigmomorphogénèse (Coutand *et al.*, 2000; Watt *et al.*, 2005; Telewski, 2006; Coutand *et al.*, 2009). Cela implique que, comme proposé dans le Chapitre 3 en ce qui concerne l'organisation spatiale des caractéristiques dynamiques, la régulation de la croissance par l'acclimatation pourrait contrôler la répartition dans l'arbre de sa réponse à l'excitation par le vent, en sus de son modèle de développement architectural spécifique.

Ces résultats consistent donc en une première modélisation et une première quantification du rôle de la géométrie de l'arbre dans son interaction dynamique avec le vent. Les idées de James *et al.* (2006) et Spatz *et al.* (2007) suggérant un rôle de la ramification de l'arbre, à la fois dans la répartition de l'excitation dans l'ensemble de l'arbre, et dans sa

dissipation, ont été confirmées et quantifiées au travers de lois d'échelles.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

5.1 Conclusions

Les caractéristiques dynamiques de l'arbre sont un point central de son interaction dynamique avec le vent, autant dans le contexte du vent chronique que dans le cas d'épisodes venteux exceptionnels. Or l'arbre n'est pas une structure à géométrie figée, mais un organisme en développement continu par la croissance de ses axes, ce qui suscitait la question suivante :

Existe-il une évolution temporelle des caractéristiques dynamiques de l'arbre ?

Une expérience de suivi dans le temps de peupliers en développement, à un stade mono-axial, a mis en évidence une évolution organisée et régulière de leurs premières fréquences modales. Il a été montré, par l'analyse statistique de l'évolution géométrique des tiges et de l'évolution des fréquences, et par le développement d'un modèle mécanique de la flexion des peupliers, que la première fréquence modale, à ce stade de développement, est principalement régulée par la croissance géométrique, qui induit une faible évolution temporelle de la fréquence.

De plus, les fréquences des peupliers suivis sont de l'ordre du Hertz, il en est de même pour les fréquences des arbres analysés dans le troisième chapitre au système ramifié plus développé, et pour la plupart des fréquences d'arbres répertoriées dans la littérature (McMahon & Kronauer, 1976; Moore & Maguire, 2004; Bruchert & Gardiner, 2006; James *et al.*, 2006; Spatz *et al.*, 2007; de Langre, 2008).

On observe donc que le développement de l'arbre, par la croissance d'axes, régulée par la thigmomorphogénèse, et par la ramification, résulte en une régulation de sa première fréquence modale, autour du Hertz, tout au long de son existence.

Le développement de l'arbre par la croissance, et par la ramification, résulte en une grande variété de géométries, dues à la fois aux différents modèles de développement architecturaux suivis par les arbres, mais aussi à l'interaction avec l'environnement qui module leurs développements. La question de l'influence de la géométrie de l'arbre sur ces caractéristiques dynamiques a été reformulée sous la forme :

Existe-il une organisation spatiale des caractéristiques dynamiques de l'arbre ?

Les déterminations expérimentales, par lâcher et par balayage en fréquence, et numérique, par calculs éléments finis, des caractéristiques dynamiques de quatre arbres, distincts

par leurs dimensions et leurs architectures, ont permis de mettre en évidence l'organisation particulière de leurs modes de vibration. Des lois d'échelle ont été développées par analyse dimensionnelle de la mécanique en flexion de l'arbre afin de prédire l'évolution des fréquences modales en fonction de trois paramètres biométriques caractérisant leurs géométries : le coefficient de la loi d'élanement des branches, et les coefficients de réduction des sections à la ramification.

Ces approches expérimentales, numériques et théoriques ont permis de clarifier l'influence de la géométrie de l'arbre sur l'organisation de ses caractéristiques dynamiques. Les modes de vibration se rassemblent en groupes de modes. Un groupe de modes est associé à un groupe de sous-ensembles de l'arbre donné, les déformations modales de ces modes sont principalement localisées sur les segments basaux de ces sous-ensembles et les déplacements modaux sont principalement localisés sur les segments d'ordres supérieurs. Les modes d'un même groupe sont rassemblés en fréquence. L'évolution des fréquences des groupes de modes est gouvernée par la loi d'élanement des branches de l'arbre, et la réduction des sections à la ramification. Or ces lois biométriques, décrivant la géométrie de l'arbre à un instant donné, sont le résultat de ses croissances primaires et secondaires, ainsi que de sa ramification.

On conclut à l'organisation spatiale des caractéristiques dynamiques de l'arbre, selon une compartimentation des modes et un étagement des fréquences modales, conséquence de son développement par la croissance de ces axes, sous contrôle thigmomorphogénique, et leurs ramifications.

La prédiction de l'organisation spatiale des caractéristiques dynamiques de l'arbre en fonction de sa géométrie a finalement permis d'aborder la dynamique de l'interaction entre le vent et l'arbre au travers de la question suivante :

Comment est répartie dans l'arbre la réponse à une excitation par le vent ?

La dynamique de l'interaction entre le vent et l'arbre a été modélisée selon trois contributions : la traînée aérodynamique statique, l'amortissement aérodynamique linéaire et l'excitation par la turbulence. Des lois d'échelles ont ensuite été développées par analyse dimensionnelle, elles prédisent la répartition dans l'arbre de la réponse à chacune de ces contributions. La ramification, la loi d'élanement des branches, et la réduction des sections à la ramification induisent une participation de l'ensemble des modes de l'arbre, à la

déflexion dûe à la traînée statique, à la dissipation par l'amortissement aérodynamique, et à la réponse à la turbulence.

Le développement de l'arbre par les croissances primaire et secondaire de ces axes, leurs régulations par la thigmomorphogénèse, et leurs ramifications, induit une répartition dans l'ensemble de l'arbre de la réponse à l'excitation par le vent, et une participation de l'ensemble de ces modes à la dissipation.

En conclusion, l'arbre est un organisme en développement continu par les croissances primaire et secondaire de ces axes, régulées par la thigmomorphogénèse, et leurs ramifications, qui résulte en une première fréquence modale proche du Hertz, en une compartimentation des modes et un étagement des fréquences modales, cette organisation induisant une participation de l'ensemble du système ramifié à la réponse à l'excitation par le vent.

5.2 Perspectives

L'analyse de l'organisation des caractéristiques dynamiques de l'arbre a été pour l'instant restreinte à la période située entre la chute des feuilles et la nouvelle feuillaison, c'est à dire la fin de l'automne, l'hiver et le début du printemps. Considérer les feuilles lors de l'analyse de l'organisation spatiale des modes de vibration, et lors de l'étude de la répartition de la réponse au vent, permettrait d'étendre la portée des résultats présents à l'ensemble du cycle foliaire annuel.

Un point de départ pour cette étude pourrait être les travaux de Shinozaki *et al.* (1964), qui ont dérivé la « Pipe model theory », où des considérations hydrauliques permettent de relier la masse foliaire en aval d'un segment au diamètre de celui-ci. On pourrait commencer par étudier, à partir de cette loi, l'effet de masses supplémentaires aux extrémités de l'arbre (ou sur les derniers segments dans le cas de conifères), dimensionnées selon Shinozaki *et al.* (1964), sur l'évolution des fréquences des groupes de modes, par exemple à partir du cas d'un arbre à géométrie idéalisée, comme décrit dans Rodriguez *et al.* (2008).

De la même façon, la dynamique de l'interaction entre le vent et l'arbre pourrait être modifiée pour prendre en compte la participation d'une surface foliaire à la force d'interaction. La nouvelle répartition de la réponse à l'excitation par le vent, induite par la

traînée foliaire prépondérante par rapport à la traînée des branches, pourrait certainement être quantifiée par analyse dimensionnelle en utilisant les lois d'échelle de Shinozaki *et al.* (1964).

Cette extension des lois d'échelles permettrait de vérifier si la participation de l'ensemble du système ramifié de l'arbre, à la réponse à l'excitation par le vent, est un trait caractéristique de son interaction dynamique, peu importe la période de l'année, qu'il porte ou non des feuilles, ou si le cycle foliaire annuel induit des comportements dynamiques distincts selon les saisons.

La dynamique de l'interaction entre le vent et l'arbre a été considérée selon trois contributions : la traînée statique, l'amortissement aérodynamique linéaire et l'excitation par la turbulence, et des lois d'échelles de la répartition modale de chaque contribution ont été développées. La validation de ces lois d'échelles, comme cela a pu être fait dans le cas de la loi d'échelle sur l'évolution des fréquences modales, est souhaitable. D'un point de vue expérimental, on peut dans un premier temps envisager d'étudier en soufflerie la répartition de la réponse à la traînée statique d'un arbre à géométrie idéalisée, comme décrit dans Rodriguez *et al.* (2008). Le cas de géométries plus complexes peut être abordé numériquement par calculs éléments finis, par exemple à partir de géométries d'arbres numérisés.

La prise en compte de l'impact entre branches et l'étude de l'échange d'énergie entre modes qu'il induit, permettrait de progresser dans la compréhension des mécanismes intervenant dans la dissipation de l'excitation par le vent. On peut par exemple envisager la simulation de transitoires à partir d'une position initiale résultant d'une traînée aérodynamique statique, ce qui s'apparente à un retour à l'équilibre après une forte rafale (England *et al.*, 2000). Une approche à partir de géométries idéalisées, ou d'arbres numérisés, et par calculs éléments finis pourrait être une fois de plus privilégiée.

Il serait aussi intéressant d'étudier le cas de vitesses de vent importantes, en se plaçant dans le cadre de la dynamique non-linéaire en grands déplacements, et d'étudier dans quelle mesure la répartition de la réponse mise en évidence pour une vitesse de déplacement très faible devant la vitesse du vent se trouve modifiée. Des calculs par éléments finis de la réponse d'un pin maritime, en grands déplacements, à de forts vents ont été réalisés récemment par Sellier & Fourcaud (2009), ils confirment la possibilité de développer une telle approche.

Ces quelques pistes permettraient tout d'abord de valider, expérimentalement et numériquement, la description de la dynamique de l'interaction entre le vent et l'arbre obtenue dans cette thèse, et ensuite de progresser dans la compréhension de la répartition de la réponse à l'excitation dans l'ensemble du système ramifié, ainsi que dans la compréhension des mécanismes permettant sa dissipation.

Pour finir, on peut aussi se demander quelle est la signification biologique de cette évolution dans le temps et de cette organisation spatiale des caractéristiques dynamiques de l'arbre. En effet, une première fréquence régulée et conservée proche du Hertz pourrait être interprétée comme un mécanisme de contrôle face au flambement, alors que la compartimentation des modes dans l'arbre, pourrait en cas de grand vent, entraîner des ruptures localisées des branches qui permettrait ainsi de préserver l'intégrité de l'arbre en protégeant le tronc. Ce pourrait être un avantage supplémentaire procuré par la ramification, en plus d'assurer une répartition de la réponse à l'excitation et une meilleure dissipation, tel que cela avait été précédemment proposé par James *et al.* (2006) et Spatz *et al.* (2007), et maintenant confirmé et quantifié dans cette thèse.

Bibliographie

- AXISA, F. 2001a *Modélisation des systèmes mécaniques, tome 1 : Systèmes continus*. Hermes Science.
- AXISA, F. 2001b *Modélisation des systèmes mécaniques, tome 4 : Vibrations sous écoulements*. Hermes Science.
- BAKER, C.J. 1997 Measurements of the natural frequencies of trees. *Journal of Experimental Botany* **48**, 1125–1132.
- BARTHELEMY, D. & CARAGLIO, Y. 2007 Plant architecture : A dynamic, multilevel and comprehensive approach to plant form, structure and ontogeny. *Annals of Botany* **99**, 375–407.
- BLEVINS, R.D. 1977 *Flow-induced vibration*. Van Nostrand Reinhold.
- BLEVINS, R.D. 1979 *Formulas for natural frequency and mode shape*. Van Nostrand Reinhold New York.
- BRUCHERT, F. & GARDINER, B. 2006 The effect of wind exposure on the tree aerial architecture and biomechanics of sitka spruce (*picea sitchensis*, pinaceae). *American Journal of Botany* **93**, 1512–1521.
- BRÜCHERT, F., SPECK, O. & SPATZ, H.C. 2003 Oscillations of plants' stems and their damping : theory and experimentation. *Philosophical Transactions of the Royal Society B : Biological Sciences* **358**, 1437–1487.
- COUTAND, C., DUPRAZ, C., JAOUEN, G., PLOQUIN, S. & ADAM, B. 2008 Mechanical stimuli regulate the allocation of biomass in trees : demonstration with young *Prunus avium* trees. *Annals of Botany* **101** (9), 1421–1432.

- COUTAND, C., JULIEN, J.L., MOULIA, B., MAUGET, J.C. & GUITARD, D. 2000 Biomechanical study of the effect of a controlled bending on tomato stem elongation : global mechanical analysis. *Journal of Experimental Botany* **51**, 1813–1824.
- COUTAND, C., MARTIN, L., LEBLANC-FOURNIER, N., DECOURTEIX, M., JULIEN, J-L. & MOULIA, B. 2009 Strain mechanosensing quantitatively controls diameter growth and ptzfp2 gene expression in poplar. *Plant Physiology* In press.
- COUTAND, C. & MOULIA, B. 2000 Biomechanical study of the effect of a controlled bending on tomato stem elongation : local strain sensing and spatial integration of the signal. *Journal of Experimental Botany* **51**, 1825–1842.
- CREMONAT, C. & FOUCRIAT, J.C. 2002 *Comportement au vent des ponts*. Paris : Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- DIENER, J., RODRIGUEZ, M., BABOUD, L. & REVERET, L. 2009 Wind projection basis for real-time animation of trees. *Computer Graphics Forum (Proceedings of Eurographics 2009)* **28** (2), 533–540.
- DONÈS, N., ADAM, B. & SINOQUET, H. 2008 *PiafDigit - Software to drive a Polhemus Fastrack 3 SPACE 3D digitiser and for the acquisition of plant architecture. Version 1.1*. 10/07/2008. UMR PIAF INRA-UBP Clermont-Ferrand.
- EDELIN, C., MOULIA, B. & TABOUREL, F. 1995 *Notions d'analyse architecturale des plantes*, , vol. Tome 1 : De la plante au couvert végétal, pp. 83–106. INRA eds.
- ENGLAND, A.H., BAKER, C.J. & SAUNDERSON, S.E.T. 2000 A dynamic analysis of windthrow of trees. *Forestry* **73**, 225–238.
- FOURNIER, M., ROGIER, P., COSTES, E. & JAEGER, M. 1993 A mechanical model of wind-induced natural sways of trees related to branching patterns. *Annales Des Sciences Forestieres* **50**, 401–412.
- GARDINER, B.A. 1992 *Mathematical modelling of the static and dynamic characteristics of plantation trees*, pp. 40–61. Sauerländer, Frankfurt/Main, Germany.

- GARDINER, B.A. & QUINE, C.P. 2000 Management of forests to reduce the risk of abiotic damage – a review with particular reference to the effects of strong winds. *Forest Ecology and Management* **135**, 261–277.
- GERADIN, M. & RIXEN, D. 1994 *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*. Wiley.
- GODIN, C. & CARAGLIO, Y. 1998 A multiscale model of plant topological structures. *Journal of Theoretical Biology* **191** (1), 1–46.
- HALLÉ, F. 2005 *Plaidoyer pour l'arbre*. Actes Sud.
- HALLÉ, F. & OLDEMAN, R.A.A. 1970 *Essai sur l'architecture et la dynamique de croissance des arbres tropicaux*. Masson.
- JAMES, K.R., HARITOS, N. & ADES, P.K. 2006 Mechanical stability of trees under dynamic loads. *American Journal of Botany* **93**, 1522–1530.
- KERZENMACHER, T. & GARDINER, B. 1998 A mathematical model to describe the dynamic response of a spruce tree to the wind. *Trees-Structure and Function* **12** (6), 385–394.
- DE LANGRE, E. 2002 *Fluides et solides*. Ecole Polytechnique.
- DE LANGRE, E. 2008 Effects of wind on plants. *Annual Review of Fluid Mechanics* **40**, 141–168.
- LINDENMAYER, A., PRUSINKIEWICZ, P. *et al.* 1996 *The algorithmic beauty of plants*. Springer-Verlag.
- MAYER, H. 1987 Wind-induced tree sways. *Trees-Structure and Function* **1** (4), 195–206.
- MCMAHON, T.A. & KRONAUER, R.E. 1976 Tree structures : Deducing the principle of mechanical design. *Journal of Theoretical Biology* **59**, 443–466.
- MILLET, J., BOUCHARD, A. & EDELIN, C. 1998 Plagiotropic architectural development of four tree species of the temperate forest. *Botany* **76** (12), 2100–2118.

- MOORE, J.R. & MAGUIRE, D.A. 2004 Natural sway frequencies and damping ratios of trees : concepts, review and synthesis of previous studies. *Trees-Structure and Function* **18**, 195–203.
- MOORE, J.R. & MAGUIRE, D.A. 2005 Natural sway frequencies and damping ratios of trees : influence of crown structure. *Trees-Structure and Function* **19**, 363–373.
- MOORE, J.R. & MAGUIRE, D.A. 2008 Simulating the dynamic behavior of Douglas-fir trees under applied loads by the finite element method. *Tree Physiology* **28** (1), 75–83.
- MOULIA, B. 2006 Présentation (ppt) du cours « biomécanique de la croissance et des mouvements des plantes ». In *Ecole-Chercheurs Thématique CNRS « Mécanique Physique »*. Porquerolles, France.
- MOULIA, B., COUTAND, C. & LENNE, C. 2006 Posture control and skeletal mechanical acclimation in terrestrial plants : Implications for mechanical modeling of plant architecture. *American Journal of Botany* **93**, 1477–1489.
- MOULIA, B. & FOURNIER, M. 2009 The power and control of gravitropic movements in plants : a biomechanical and systems biology view. *Journal of Experimental Botany* **60** (2), 461–486.
- MOULIA, B. & FOURNIER-DJIMBI, M. 1997 Optimal mechanical design of plant stems : the models behind the allometric power laws. In *Plant Biomechanics Conference, Centre for Biomimetics*, pp. 43–55. Univ. of Reading, Reading (UK).
- NIKLAS, K.J. 1994 *Plant allometry : the scaling of form and process*. University of Chicago Press, Chicago, Illinois, USA.
- NIKLAS, K.J. & SPATZ, H-C. 2004 Growth and hydraulic (not mechanical) constraints govern the scaling of tree height and mass. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **101**, 15661–15663.
- PASSIOURA, J.B. 2002 Soil conditions and plant growth. *Plant, Cell and Environment* **25** (2), 311–318.

- PELTOLA, H., GARDINER, B., KELLOMAKI, S., KOLSTROM, T., LASSIG, R., MOORE, J., QUINE, C. & RUEL, J.C. 2000 Wind and other abiotic risks to forests. *Forest Ecology and Management* **135** (1-3), 1–2.
- POLHEMUS 1993 *3SPACE FASTRACK User's Manual, Revision F*. Polhemus, Colchester, Vt., USA.
- PY, C., DE LANGRE, E. & MOULIA, B. 2006 A frequency lock-in mechanism in the interaction between wind and crop canopies. *Journal of Fluid Mechanics* **568**, 425–449.
- RAUPACH, M.R., FINNIGAN, J.J. & BRUNET, Y. 1996 Coherent eddies and turbulence in vegetation canopies : The mixing-layer analogy. *Boundary-Layer Meteorology* **78**, 351–382.
- RODRIGUEZ, M., DE LANGRE, E. & MOULIA, B. 2008 A scaling law for the effects of architecture and allometry on tree vibration modes suggests a biological tuning to modal compartmentalization. *American Journal of Botany* **95** (12), 1523–1537.
- RODRIGUEZ, M., MOULIA, B. & DE LANGRE, E. 2009 Experimental investigations of a walnut tree multimodal dynamics. In *Proceedings of the 2nd International Conference Wind Effects on Trees*.
- RUDNICKI, M. & BURNS, D. 2006 Branch sway period of four tree species using 3d motion tracking. In *Proceedings of the 5th Plant Biomechanics conference*, pp. 25–31.
- SELLIER, D., BRUNET, Y. & FOURCAUD, T. 2008 A numerical model of tree aerodynamic response to a turbulent airflow. *Forestry* **81** (3), 279–297.
- SELLIER, D. & FOURCAUD, T. 2005 A mechanical analysis of the relationship between free oscillations of pinus pinaster ait. saplings and their aerial architecture. *Journal of Experimental Botany* **56**, 1563–1573.
- SELLIER, D. & FOURCAUD, T. 2009 Crown structure and wood properties : Influence on tree sway and response to high winds. *American Journal of Botany* **96** (5), 885–896.
- SELLIER, D., FOURCAUD, T. & LAC, P. 2006 A finite element model for investigating effects of aerial architecture on tree oscillations. *Tree Physiology* **26**, 799–806.

- SHINOZAKI, K., YODA, K., HOZUMI, K. & KIRA, T. 1964 A quantitative analysis of plant form - the pipe model theory. I. Basic analyses. *Japanese Journal of Ecology* **14** (3), 97–105.
- SINOQUET, H. & RIVET, P. 1997 Measurement and visualization of the architecture of an adult tree based on a three-dimensional digitising device. *Trees - Structure and Function* **11**, 265–270.
- SINOQUET, H., RIVET, P. & GODIN, C. 1997 Assessment of the three-dimensional architecture of walnut trees using digitising. *Silva Fennica* **31** (3), 265–273.
- SPATZ, H.C., BRUCHERT, F. & PFISTERER, J. 2007 Multiple resonance damping or how do trees escape dangerously large oscillations? *American Journal of Botany* **94**, 1603–1611.
- SPATZ, H.C. & ZEBROWSKI, J. 2001 Oscillation frequencies of plant stems with apical loads. *Planta* **214** (2), 215–219.
- STULL, R.B. 1988 *An introduction to boundary layer meteorology*. Kluwer, Dordrecht, Netherlands.
- TAYLOR, G. 1952 Analysis of the swimming of long and narrow animals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* pp. 158–183.
- TELEWSKI, F.W. 1989 Structure and function of flexure wood in *Abies fraseri*. *Tree Physiology* **5** (1), 113–121.
- TELEWSKI, F.W. 2006 A unified hypothesis of mechanoperception in plants. *American Journal of Botany* **93** (10), 1466–1476.
- VERPEAUX, P., CHARRAS, T. & MILLARD, A. 1988 *Castem 2000 : Une approche moderne du calcul des structures*, pp. 261–271. Pluralis, Paris, France.
- WATT, M.S., MOORE, J.R. & MCKINLAY, B. 2005 The influence of wind on branch characteristics of *Pinus radiata*. *Trees-Structure and Function* **19** (1), 58–65.

WHITE, R.G., WHITE, M.F. & MAYHEAD, G.J. 1976 Measurement of the motion of trees in two dimensions. *Tech. Rep.* 86. Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, Southampton, UK.

Annexe A

Compléments au Chapitre 2

A.1 Evolutions des fréquences des peupliers

Les évolutions des fréquences des premiers modes de vibration des plantes suivies continuellement au long de l'expérience sont montrées Figure A.1. Des régressions linéaires par morceaux sont ajustées à ces évolutions, et une évolution moyenne des fréquences est obtenue, Figure A.1h. L'analyse statistique a été présentée au chapitre 2.

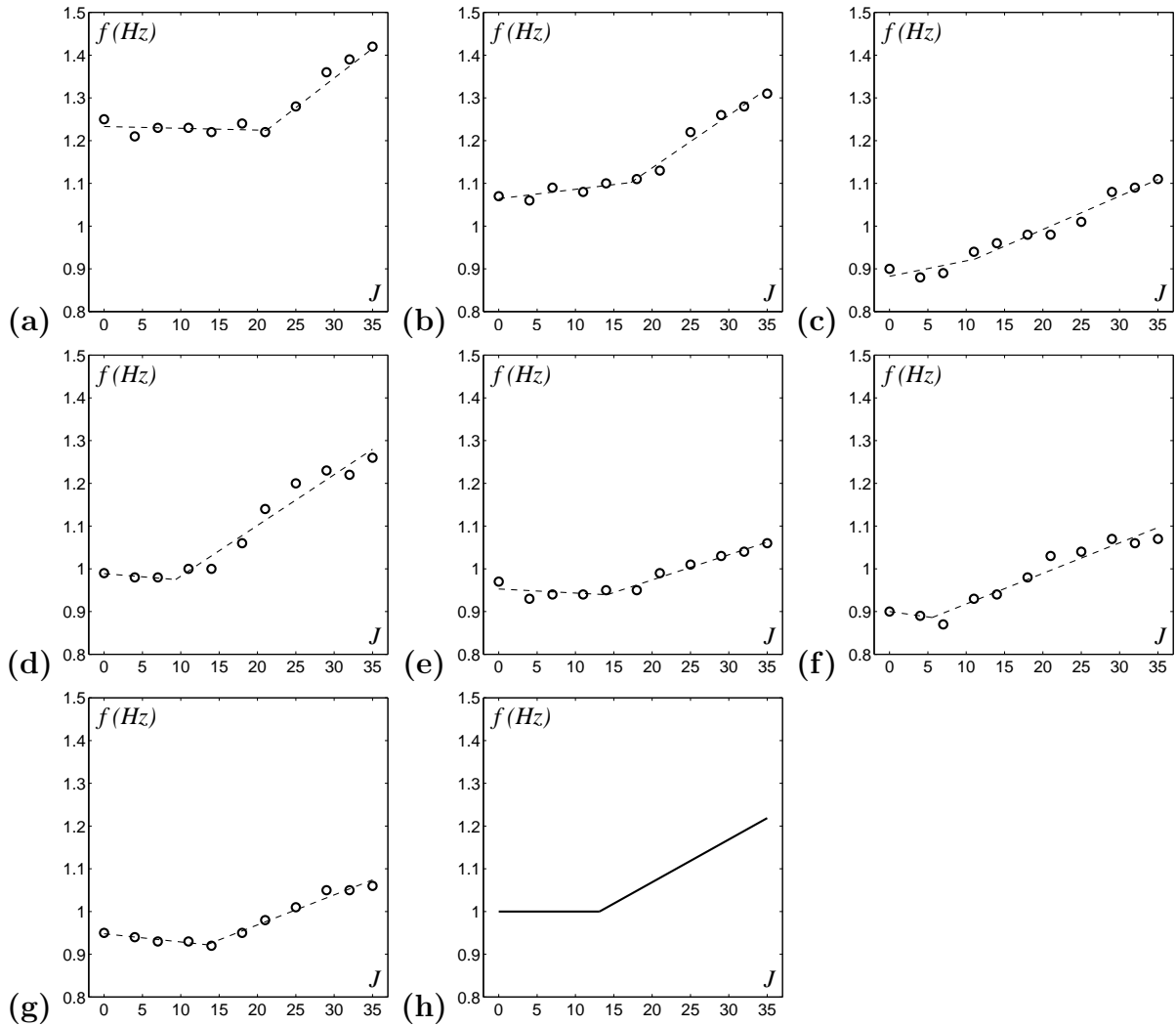


FIGURE A.1 – (o) Evolutions temporelles des fréquences des premiers modes de vibration mesurées pour les plantes (a-g) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. (· · ·) Régression linéaires par morceaux. (h) (—) Evolution temporelle moyenne des fréquences des premiers modes de vibrations déduite des régressions linéaires par morceaux.

A.2 Caractéristiques matérielles

Les caractéristiques matérielles des plantes sont déterminées en fin d'expérience. Un essai en flexion des plantes, en appliquant une force d'un demi Newton, permet de déduire une mesure du module d'Young et de la raideur d'encastrement de chaque plante. Toujours en fin d'expérience, les feuilles des plantes sont pesées et un modèle de l'évolution du feuillage au cours du développement de la plante est déduit. La tige de la plante est découpée en tronçons dans le but d'ajuster statistiquement une masse volumique des tiges.

A.2.1 Module d'Young et raideur d'encastrement

Le module d'Young et la raideur d'encastrement sont déterminés par traitement d'images des plantes en conditions de traction et de repos. Les feuilles sont tout d'abord otées des tiges, puis celles-ci sont mises en flexion par une force horizontale d'un demi Newton, appliquée au deux tiers de la hauteur de la tige, figure A.2a.

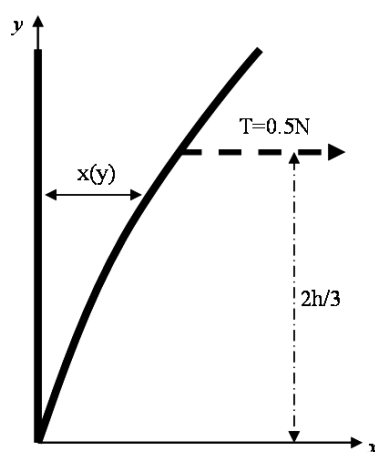


FIGURE A.2 – Croquis de la méthode utilisée pour déterminer le module d'Young et la raideur d'encastrement des plantes.

Le champ de déplacement de la tige en flexion est dérivé dans le cas d'un modèle de poutre d'Euler en flexion. Le défilement du diamètre utilisé dans le modèle est mesuré

avant la flexion. La raideur d'encastrement et le module d'Young sont ensuite ajustés grâce au champ de déplacement déduit expérimentalement, figure A.2b. On détermine ainsi un module d'Young et une raideur d'encastrement pour chaque plante, figure A.3, ainsi que des valeurs moyennes et des écarts types de distribution de ces deux quantités.

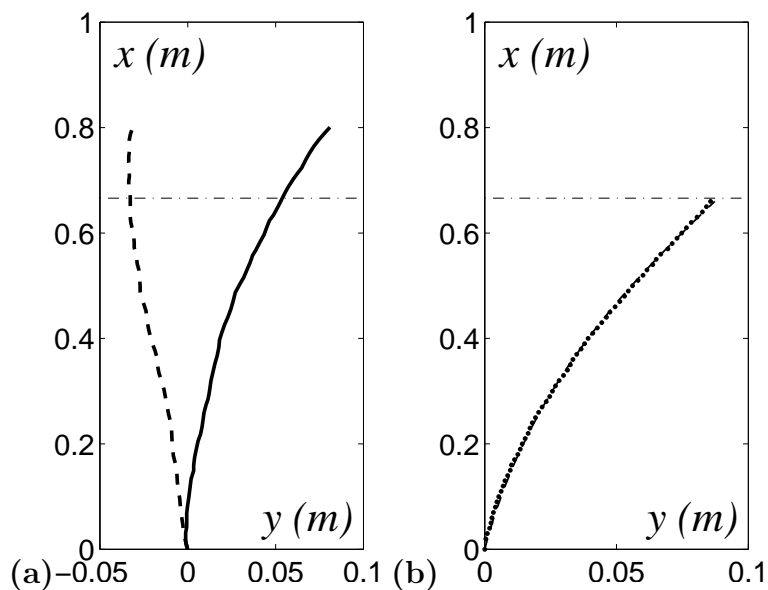


FIGURE A.3 – Détermination du module d'Young et de la raideur d'encastrement des plantes par interpolation du déplacement induit par une traction. Position de la tige (a)(\cdots) avant et ($—$) après la traction. (b) Fonction de déplacement déduite.

Paramètre	coefficient	moyenne	écart-type
Module d'Young	E (GPa)	2.28	0.32
Raideur d'encastrement	C (N.m)	10.52	4.11

TABLE A.1 – Modules d'Young et raideurs d'encastrement des plantes déduits par tractions imposées et analyse du champ de déplacement par traitement d'images.

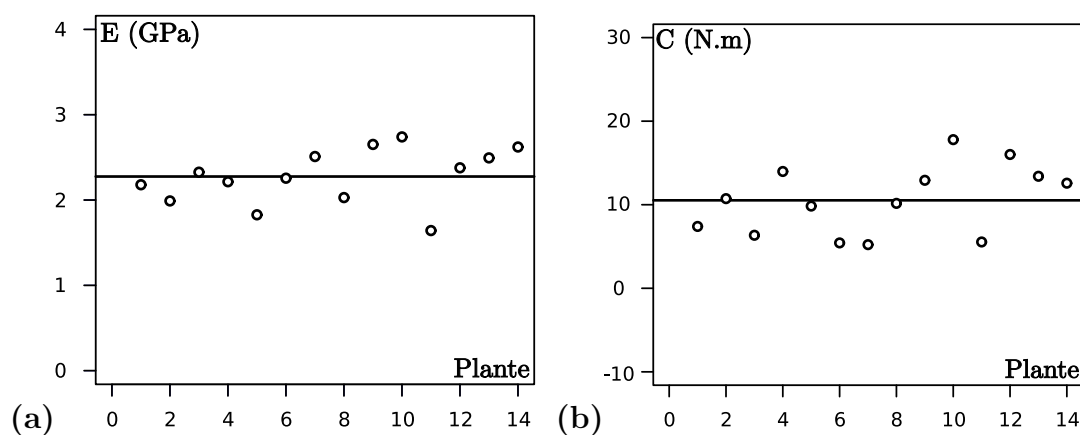


FIGURE A.4 – (a) Module d'Young et (b) raideur d'encastrement déterminés pour (o) chaque plante, et (—) valeur moyenne.

Mesures complémentaires sur la variabilité intra-arbre du module d'Young

Une expérience complémentaire a été menée du 18 juin et 7 août 2009. La reproduction du traitement par flexion imposée suivie d'un lâcher a permis, cette fois, de mesurer la variabilité intra-arbre du module d'Young. Les tiges des plantes ont été sectionnées en tronçons de 20 centimètres à partir de la base de la plante, et les quatre premiers tronçons de chaque tige ont été analysés par flexion 4 points. Il s'agit donc de tronçons n'ayant plus qu'une croissance secondaire, étant donné que les trente derniers centimètres les plus proche du bourgeon apical n'ont été analysés sur aucune plante.

La flexion 4 points a été réalisée à l'aide d'un Instron 5565. Le déplacement imposé était de 3 mm, la vitesse de mise en flexion était de 8 mm/min. La distance entre les deux points d'appuis supérieurs était de 14 cm, alors qu'elle était de 28 cm pour les points d'appuis inférieurs. La balance de force a une précision égale à 0,5% de la valeur mesurée, et le capteur de déplacement a une précision de $0,12 \mu\text{m}$.

Sept plantes traitées par traction puis lâcher, et sept plantes restées libres pendant l'expérience, ont été analysées. La variation intra-tige observée pour chaque plante, Figure A.5a, n'est pas linéaire. On observe une tendance à ce que les modules d'Young aux extrémités supérieures et inférieures soient moins important que les modules d'Young mesurés au milieu de la tige.

Etant donné le faible nombre de mesures par plante, Figure A.5a, il n'est pas possible de déduire et vérifier statistiquement un modèle d'évolution du module d'Young à l'intérieur

de la tige. Une valeur de module d'Young par plante est donc recherchée à l'aide d'un modèle global, qui prend aussi en compte l'effet du traitement appliqué, Figure A.5b.

Tout d'abord, un effet du traitement mécanique appliqué aux plantes sur le module d'Young est aussi rejeté par une probabilité de validité de l'hypothèse nulle de 65%.

Un module d'Young moyen de 3,33 GPa est obtenu. L'écart-type inter-plantes est de 112 MPa, alors que l'écart-type moyen intra-plantes est de 169 MPa. On a donc un écart-type inter-plantes de 3,3% de la valeur moyenne, et un écart-type intra-plantes de 3,4% de la valeur moyenne.

Ces mesures de la variation inter-arbres du module d'Young montrent qu'il est raisonnable de caractériser les matériaux de la tige des plantes par un module d'Young moyen. Ceci au regard de l'absence de relation entre la variation du module d'Young intra-plante et l'abscisse curviligne le long de la tige, et aussi étant donné la variabilité intra-plantes qui est de l'ordre de la variabilité inter-arbres, et qui sont toutes deux de l'ordre de 3% de la valeur moyenne obtenue.

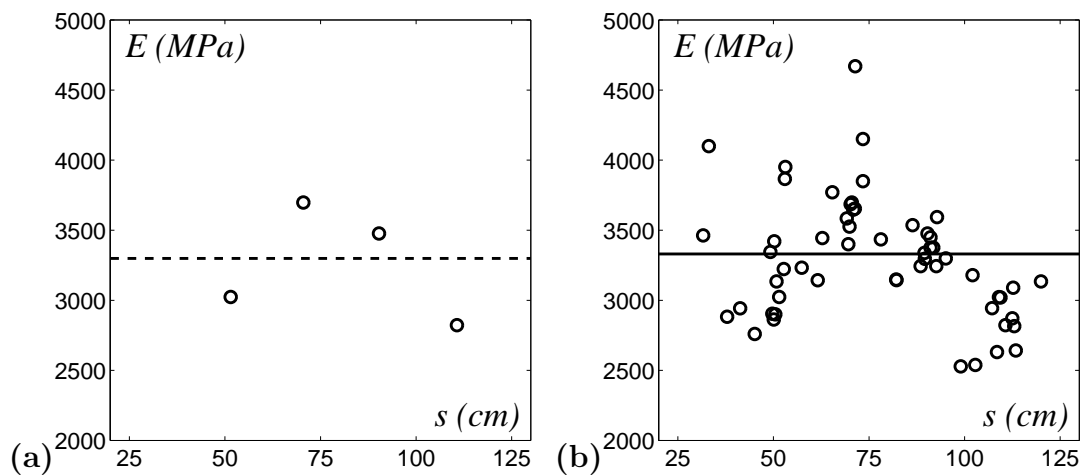


FIGURE A.5 – (o) Module d'Young obtenu par flexion 4 points à partir de tronçons de 20 centimètres (a) pour une plante et (b) pour toutes les plantes analysées. Un modèle globale permet d'obtenir (—) la valeur moyenne pour l'ensemble des plantes et (···) pour une plante donnée.

A.2.2 Masse volumique et feuillage

La masse volumique des plantes est déterminée par la découpe et la pesée de tiges des plantes découpées en tronçons à la fin de l'expérience. l'hypothèse de tronçons ayant la forme de cône tronqués permet de déterminer une mesure de la masse volumique pour chaque tronçon. La figure A.6a montre les masses volumiques des tronçons de la plante 1 en fonction de leurs distances à l'apex. Une modèle global linéaire est ajusté à l'ensemble des pesées de tronçon, figure A.6. On en déduit une masse volumique par plante et une masse volumique moyenne pour l'ensemble des plantes de l'expérience. L'ajustement statistique est effectué par un modèle global. La moyenne et l'écart type obtenu sont montrés au tableau A.2.

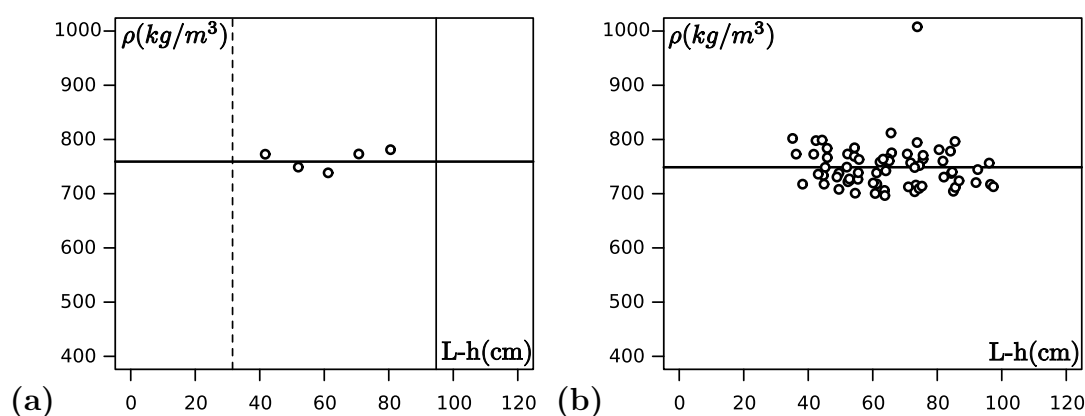


FIGURE A.6 – (a) (—) Masse volumique moyenne déterminée pour la plante 1 à partir de (o) tronçons de la tige. (b) (o) Répartition des masses volumiques pour chaque plante et (—) masse volumique moyenne déduite. Les traits verticaux dans la figure (a) correspondent à la base de la tige et aux 30 derniers centimètres non compris dans la régression.

Un profil linéaire par morceaux est choisi pour décrire le profil de masse foliaire des plantes. Il s'agit d'une partie à masse foliaire croissante sur les 30 cm à partir de la base de la plante, suivie d'une partie constante au dessus. En fin d'expérience, les positions des feuilles ont été notées et elles ont été pesées. La masse foliaire linéique de la partie supérieure est déduite à partir des masses de feuilles divisées par la somme des demi-distances aux feuilles adjacentes. Une masse foliaire linéique est déterminée pour chaque plante, de même qu'une masse foliaire linéique moyenne et un écart type de la distribution

des masses foliaires, figure A.2.

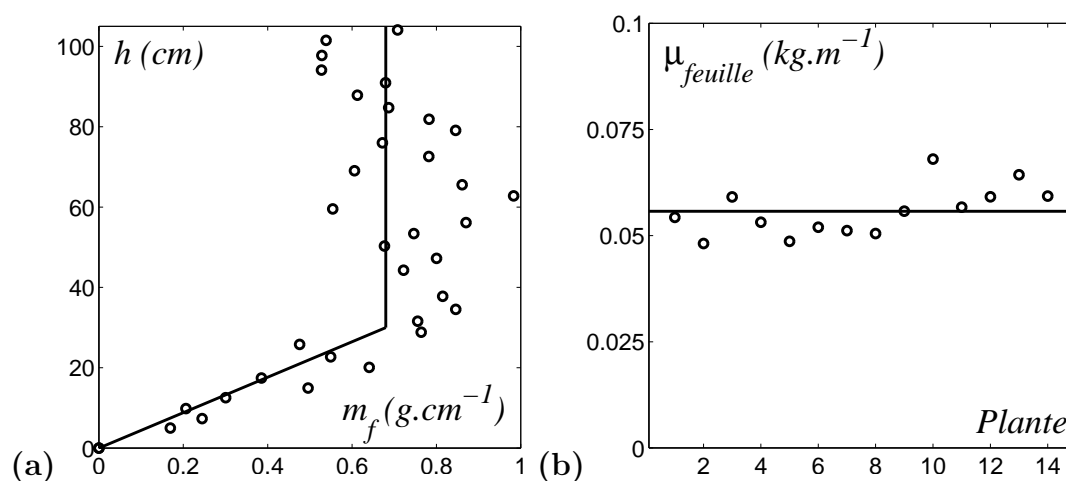


FIGURE A.7 – (a) (o) Masse d’une feuille divisée par la demi-distance la séparant des feuilles adjacentes et (—) profil linéique de masse foliaire déduit, pour la plante 10. (b) (o) Masse linéique foliaire déduite pour chaque plante et (—) masse linéique foliaire moyenne.

Paramètre	coefficient	moyenne	écart-type
Masse volumique	ρ (kg.m^{-3})	748.75	8.23
Masse foliaire	m_f (g.m^{-1})	55.6	5.8

TABLE A.2 – Valeurs moyennes et écarts types associés aux différents paramètres définissant les masses volumiques des tiges et les masses foliaires des plantes.

A.3 Modèle biométrique du développement des plantes

Un modèle biométrique du développement géométrique des tiges des plantes a été ajusté à la partie 2, à partir de leur diamètre à la base, leur longueur et le défilement de leur diamètre.

A.3.1 La longueur

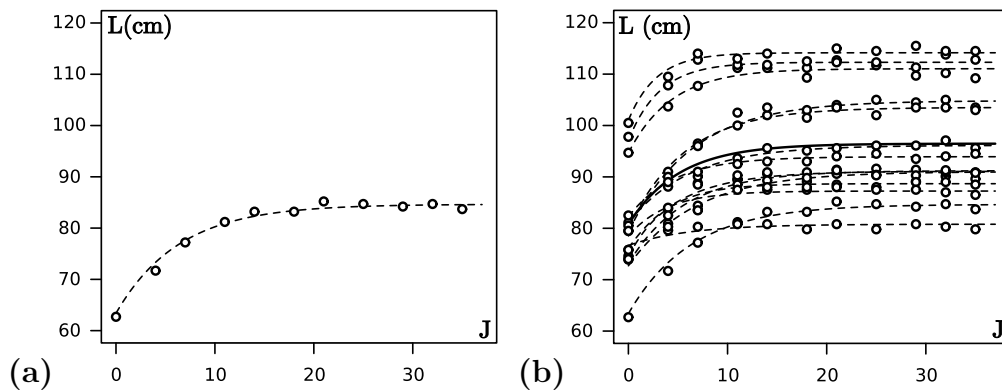


FIGURE A.8 – Evolutions temporelles de la longueur de (a) la plante au 1 et de (b) toutes les plantes. (o) Mesures. (---) Modèle ajusté sur une plante et (—) modèle moyen.

A.3.2 Le diamètre à la base

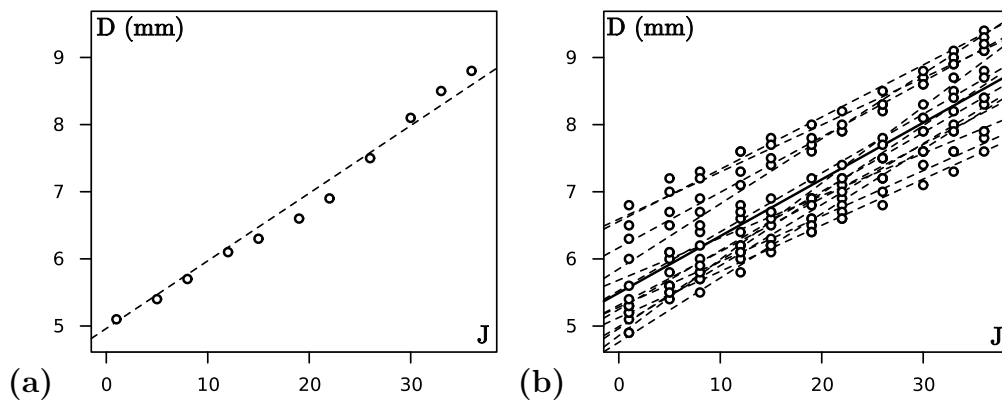


FIGURE A.9 – Evolutions temporelles du diamètre à la base de (a) la plante 1 et de (b) toutes les plantes. (o) Mesures. (---) Modèle ajusté sur une plante et (—) modèle moyen.

A.3.3 Le défilement du diamètre

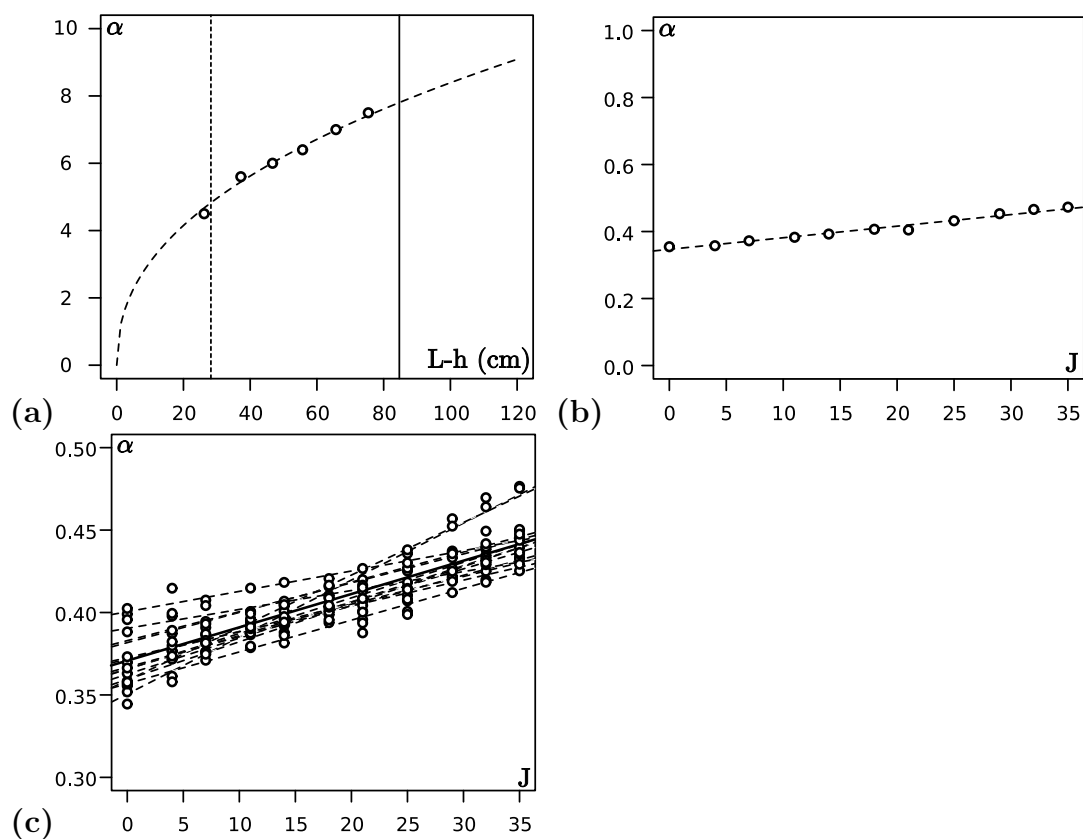


FIGURE A.10 – (a) Défilement de la tige de la plante 1 au 25^{ème} jour. Evolutions temporelles du coefficient allométrique décrivant le défilement de la tige de (b) la plante 1 et de (c) toutes les plantes. (o) Mesures. (---) Modèle ajusté sur une plante et (—) modèle moyen.

Annexe B

Articles

A scaling law for the effects of architecture and allometry on tree vibration modes suggests a biological tuning to modal compartmentalization

M. Rodriguez, E. de Langre and B. Moulia

American Journal of Botany, 2008, **95**, 1523-1537.

Experimental investigations of a walnut tree multimodal dynamics

M. Rodriguez, B. Moulia and E. de Langre

Proceedings of the 2nd International Conference Wind Effects on Trees, 2009, Freiburg, Germany.

Wind projection basis for real-time animation of trees

J. Diener, M. Rodriguez, L. Baboud and L. Reveret

Computer Graphics Forum (Proceedings of Eurographics 2009), 2009, **28**, 533-540.

A SCALING LAW FOR THE EFFECTS OF ARCHITECTURE AND ALLOMETRY ON TREE VIBRATION MODES SUGGESTS A BIOLOGICAL TUNING TO MODAL COMPARTMENTALIZATION¹

MATHIEU RODRIGUEZ,^{2,3} EMMANUEL DE LANGRE,² AND BRUNO MOULIA^{3,4}

²Department of Mechanics, LadHyX, Ecole Polytechnique-CNRS, 91128 Palaiseau, France; and ³UMR547 PIAF, INRA, Univ Blaise Pascal, F-63100 Clermont Ferrand

Wind is a major ecological factor for plants and a major economical factor for forestry. Mechanical analyses have revealed that the multimodal dynamic behavior of trees is central to wind–tree interactions. Moreover, the trunk and branches influence dynamic modes, both in frequency and location. Because of the complexity of tree architecture, finite element models (FEMs) have been used to analyze such dynamics. However, these models require detailed geometric and architectural data and are tree-specific—two major restraints for their use in most ecological or biological studies. In this work, closed-form scaling laws for modal characteristics were derived from the dimensional analysis of idealized fractal trees that sketched the major architectural and allometrical regularities of real trees. These scaling laws were compared to three-dimensional FEM modal analyses of two completely digitized trees with maximal architectural contrast. Despite their simplifying hypotheses, the models explained most of the spatiotemporal characteristics of modes that involved the trunk and branches, especially for sympodial trees. These scaling laws reduce the tree to (1) a fundamental frequency and (2) one architectural and three biometrical parameters. They also give quantitative insights into the possible biological control of wind excitability of trees through architecture and allometries.

Key words: allometry; biomechanics; dimensional analysis; dynamics; frequency; model; scaling; tree architecture; vibrational properties; wind.

Wind–tree interaction is a major concern for the management of forest and urban trees because windthrow and windbreak result in substantial economical costs and potential human risks (Gardiner and Quine, 2000; James et al., 2006). Moreover, mechanosensing by trees of wind-induced strains (Coutand and Moulia, 2000) and induced thigmomorphogenetic responses are fundamental issues in understanding how trees can control their susceptibility to wind hazard (Moulia et al., 2006) and acclimate to their wind climate (Brüchert and Gardiner, 2006). Pioneer work on wind–tree interactions only considered static deformations under wind load (see review in Moulia and Fournier-Djimbi, 1997). Over the last decades, time-dependent dynamic effects have been found to play a major part in wind deformations and windbreaks (e.g., Mayer, 1987; Gardiner et al., 2000). However, the dynamic interactions between wind and trees are complex issues (Niklas, 1992). Wind velocity has a large spectrum of eddy size and frequency, as well as mean vertical profiles (de Langre, 2008). Most trees also have a branched architecture with different modes of branching (monopodial vs. sympodial) depending on species, up to 11 orders of axes, and reiterated patterns of various sizes and positions

(Barthelemy and Caraglio, 2007). Therefore, the development of mechanical models for wind–tree interactions is necessary in addition to experiments, and the simplest relevant model is to be sought (see review in de Langre, 2008). A central question to be investigated is then obviously the influence of branched architecture and tree geometry on the dynamics of trees and the potential biological control of tree resistance to wind through the morphological development of the tree.

The mechanical response of a tree to turbulent wind results from the interaction of three components: (1) the fluctuating excitation load by wind drag, (2) the dynamic elastic behavior of the system, and (3) the damping processes (e.g., Moore and Maguire, 2008). The load is the input of mechanical energy in the system. The oscillatory elastic behavior of the structure is driven by the conservative exchange between two forms of the internal mechanical energy: (1) kinetic energy (the sum over all the material elements of the tree of the products of their masses times their square velocity) and (2) elastic-strain potential energy (Gerardin and Rixen, 1994). These internal energetic exchanges can be characterized by considering the natural free-motion dynamics of the isolated system (i.e., with suppressed energy input and negligible dissipative losses) and by studying the resonance frequencies, which characterize the exchange rate between these two forms of energy. Last, the damping processes dissipate a part of the mechanical energy out of the structure, thus resulting in the decay of the amplitude of the oscillation. This dissipation involves (1) the production of small-scale turbulence in the wake through aerodynamic drag at the level of the leaf–air and branch–air interfaces and (2) to a lesser extent in most cases, the production of heat through internal viscosity (i.e., internal friction) in the wood (Niklas, 1992).

All these components are complex spatiotemporal processes. However, a very efficient approach to tackle this complexity is to focus first on the oscillatory elastic behavior of the structure (for examples in trees, see Sellier et al., 2006; Moore and Maguire, 2008). Indeed, the oscillatory elastic

¹ Manuscript received 7 May 2008; revision accepted 9 September 2008.

The authors dedicate this article to the late Dr. H. Sinoquet, who pioneered the use of 3D digitizing and virtual plants for physical issues related to plant biology and who left us too early. They thank Drs. H. Sinoquet and D. Sellier for access to the digitized tree databases and N. Dones for teaching the basics of MTG handling and of tree architecture. Thanks also to Dr. B. Roman for pointing out the similarities in the frequency ranges of very distinct trees and the two anonymous reviewers and Dr. B. E. Hazen for providing helpful suggestions to revise the manuscript and improve the English. This work was supported by ANR grant ANR-06-BLAN-0210-02 “Chêne-Roseau”.

⁴ Author for correspondence (e-mail: moulia@clermont.inra.fr)

behavior of the tree represents its intrinsic mechanical excitability (Gerardin and Rixen, 1994). Moreover, this oscillatory elastic behavior can be analyzed as the superposition of distinct modes of deformation through modal analysis, a standard tool in mechanical engineering. Each mode, numbered j , is an eigen way of oscillatory exchange between kinetic energy and elastic-strain potential energy (Gerardin and Rixen, 1994) in the absence of any damping or external load. The mode j is defined by the modal deformation $\mathbf{\phi}_j$ (the displacement vector field defining the shape of the deformed tree), modal frequency f_j , and modal mass m_j (which characterizes the inertia of the mode). Such modal analysis has two advantages. Modes can be ranked according to their contribution to the overall movement, so that simplified models casting to a limited number of modes can be defined objectively. Additionally, both the excitation load and the dissipation processes can be projected onto the set of modes (the modal basis) and thereby analyzed. For example, some modes will be more excited than others by a given load if this load applies to places where the modal deformation induces large displacements, even more if this excitation occurs at frequencies close to the corresponding natural modal frequencies. Such increased excitation is due to the phenomenon of resonance that results in a rapid uptake of the energy by the oscillating system with attendant amplification of the amplitude of the corresponding mode. By the same token, if large and fast movements of the branch tips occur in these modes, they will be more damped than others through aerodynamic damping. Modal analysis is thus a useful prerequisite to a more complete dynamic modeling of wind-tree interactions.

A few authors have used modal analysis on trees (e.g., Fournier et al., 1993; Sellier et al., 2006; Moore and Maguire, 2008). All have concluded that modes involving significant branch deformation could rank in between modes deforming mainly the trunk (Fournier et al., 1993; Sellier et al., 2006). Experiments from Moore and Maguire (2005) and Sellier and Fourcaud (2005) confirmed the excitation of several modes in conifer trees under wind load, with again some of the modes having their deformation mainly located on branches. Although not using modal analysis, James et al. (2006) also showed that the measured frequency spectra of the responses under wind excitation of four trees with different architectures, including conifers, two eucalypts and a palm tree, were also significantly dependent on the branching system. Moreover, James et al. (2006) and Spatz et al. (2007) argued that such multimodal dynamics including branch deformation could be beneficial to the tree by enhancing aerodynamic dissipation through a mechanism called multiple resonance damping or multiple mass damping. All these works contrasted clearly with previous works in which the dynamic contribution of branches and foliage was reduced to that of lumped masses fixed on a flexible beamlike trunk (e.g., Gardiner, 1992; Spatz and Zebrowski, 2001) and where only the first and eventually second modes of deformations of the trunk (i.e., first-order axis) were considered, both theoretically and experimentally. Note, however, that only monopodial architectures (Gillison, 1994; Barthelemy and Caraglio, 2007) were considered in all these studies about branch dynamics and that the only nonconifer trees were eucalypts. A comparison with sympodial trees would be interesting before generalizations are made.

In view of such complex effects, it may seem that only detailed finite element models (FEM) of the three-dimensional (3D) architecture of trees can be used for wind-tree interaction

studies of complex branched architecture and that only simulation studies can be done (Sellier et al., 2006; Moore and Maguire, 2008). Such simulation studies require a specific model for each individual tree, with intensive 3D descriptions of tree architecture (Sinoquet and Rivet, 1997; Moore and Maguire, 2008), while providing a limited perspective for generality and for the analysis of possible biological control. The geometry of trees, however, has in most cases some architectural symmetry related to the branching pattern (monopodial vs. sympodial growth) and spatial biometrical regularities—such as the allometry law for slenderness, which relates length and diameter of segments (McMahon and Kronauer, 1976; Niklas, 1994; Moulia and Fournier-Djimbi, 1997). The geometry of a tree can thus be approximately summarized using a few parameters. Moreover, the setting of some of these parameters is controlled through thigmomorphogenetic processes (Moulia et al., 2006). But the issue of whether such regularities can be reflected in general scaling laws for modal characteristics of sympodial and monopodial angiosperm and/or conifer trees has not been addressed yet. The hypothesis here is that simple scaling laws should occur. If they were to exist, these laws would make the studies of tree dynamics easier (methodological aspect) and give insights into the possible biological control of the overall tree dynamics excitability through genetic or thigmomorphogenetic changes in their parameters.

The aims of the present paper are thus (1) to explore the respective role of the architecture and allometry parameters on modal characteristics by combining FEM modeling and dimensional analysis of an angiosperm tree and a conifer tree with highly contrasting sizes and architectures and (2) to assess whether more generic scaling laws relating tree multimodal dynamics and architectural and geometrical parameters can be defined and to discuss their biological significance.

In the first section, the modal characteristics of two 3D models of extensively digitized trees with very distinct architectures—one sympodial angiosperm (walnut) and one monopodial conifer (pine)—are analyzed. Then in the second section, idealized fractal tree models are defined to explore the influence of biometrical regularities and branching patterns on the modal characteristics of a tree. Scaling laws between the successive modes of a tree based on the global parameters characterizing architecture and slenderness are then derived in these idealized trees. Finally, in the third section, we show that walnut and pine modal characteristics can be approximated using these scaling laws, so that the general multimodal behavior of trees can be reduced as a first approximation to (1) the first mode and to (2) general scaling laws for higher modes.

MODAL ANALYSIS OF A WALNUT AND A PINE TREE

MATERIALS AND METHODS

3D descriptive data—Two real trees with highly contrasting sizes and architectures were considered (Fig. 1). The first tree, Fig. 1A, is a 20-yr-old walnut tree (*Juglans regia* L.) described in Sinoquet et al. (1997). It was 7.9 m high, 18 cm in diameter at breast height (dbh), and had a sympodial branching pattern and eight orders of branching. The second tree, Fig. 1B, is a 4-yr-old pine tree (*Pinus pinaster* Ait.) described in Sellier and Fourcaud (2005). It was 2.6 m high, 5.6 cm in diameter at 13 cm height, and had a monopodial branching pattern and three orders of branching.

The geometries of these two trees (positions, orientations, diameters of the stem segments, and the topology of branching points) are known in great detail through 3D magnetic digitizing (Sinoquet and Rivet, 1997) and are organized

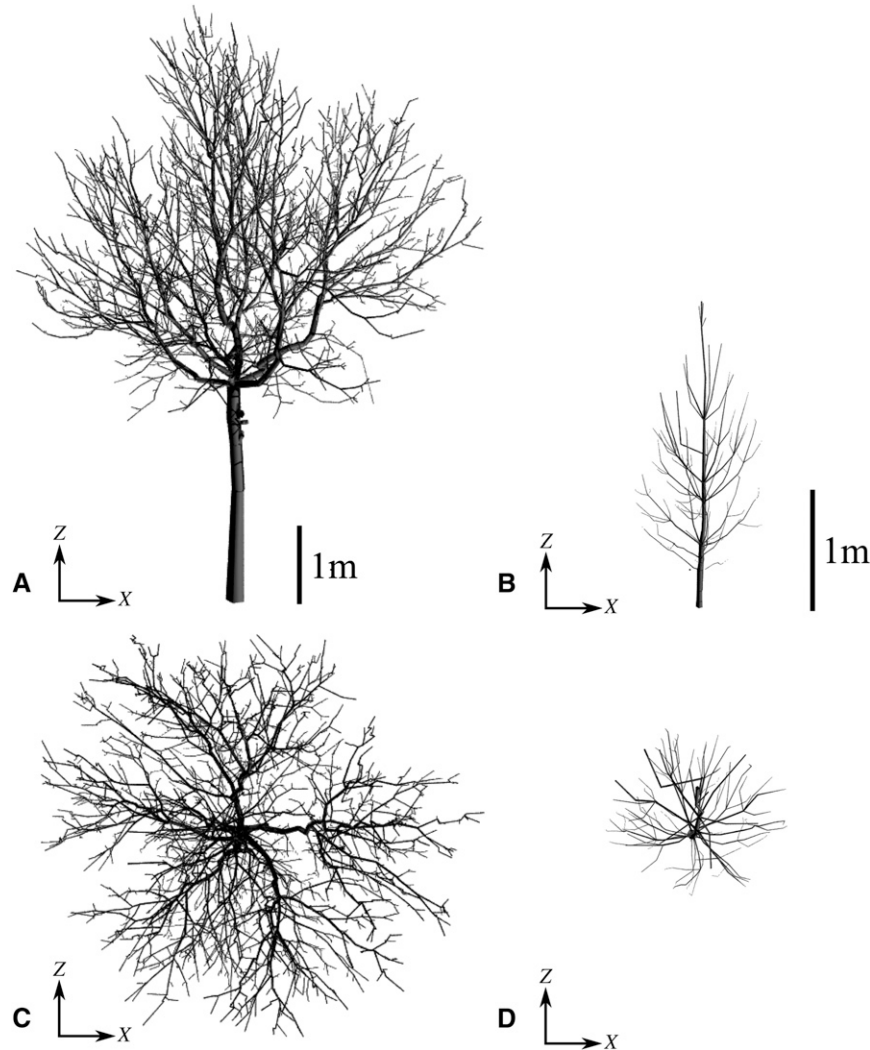


Fig. 1. Geometries of (A, C) a walnut tree (from Sinoquet et al., 1997) and (B, D) a pine tree (from Sellier and Fourcaud, 2005).

in databases using the Multiscale Tree Graph MTG structure (Godin et al., 1999). Because our central concern was on the effects of branch architecture and allometry, these two trees were analyzed in this study without considering leaves or needles.

FEM modeling and computation of modal characteristics—In slender structures such as trees, the beam theory applies (Niklas, 1992), and modal deformations involve mainly bending and torsion. The mechanical model used for both trees were thus based on representing each branch segment as a beam, described by its flexural stiffness and inertia, using the Euler theory of linear elastic beams (Gerardin and Rixen, 1994). Beam sections were assumed to be circular, with a variable diameter along the beam (taper) when available. Connections between branch segments were set as rigid. The root anchorage was modeled as a perfect clamping condition at the tree basis. The green-wood material properties (density ρ , Young modulus E , and Poisson ratio ν) were assumed to be uniform over all branches of each tree. Their values (Table 1) were taken from the measurements in Sellier et al. (2006) for the pine tree, while for the walnut tree, their values were estimated using Eq. 1 in Fournier et al. (2005). For each tree, a finite element representation was built using the CASTEM v. 3M software (Verpeaux et al., 1988). The stiffness and the mass matrices of the finite element formulation were then computed. By solving the equations for free motions using these matrices, we can fully define the modes (frequency, shapes, and mass) (see also Fournier et al., 1993; Moore and Maguire, 2005; Sellier et al., 2006). Because modes of free motion only involve exchange between kinetic energy and elastic strain en-

ergy, they can thus be studied without considering gravity effects and are defined under the assumption of linear transformation (small displacements, small strains).

RESULTS

In the walnut tree model (Fig. 2A), the first 25 modes were found in the range between 1.4 and 2.6 Hz. A small but clear frequency gap ($\sim +0.4$ Hz) occurred between the first two modes and the following ones. Then modal frequencies continued to increase with mode number but at a smaller rate.

TABLE 1. Geometrical and mechanical characteristics of the two analyzed trees (walnut, *Juglans regia*; pine, *Pinus pinaster*).

Species	Age (yr)	Height (m)	Diameter (m)	ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$]	E [GPa]	ν
<i>J. regia</i>	20	7.9	18.0 (dbh)	$0.805 \cdot 10^3$	11.3	0.38
<i>P. pinaster</i>	4	2.6	5.6 (at 13 cm)	$1.3 \cdot 10^3$	1.12	0.38

Notes: ρ , wood density; E , Young modulus; ν , Poisson ratio

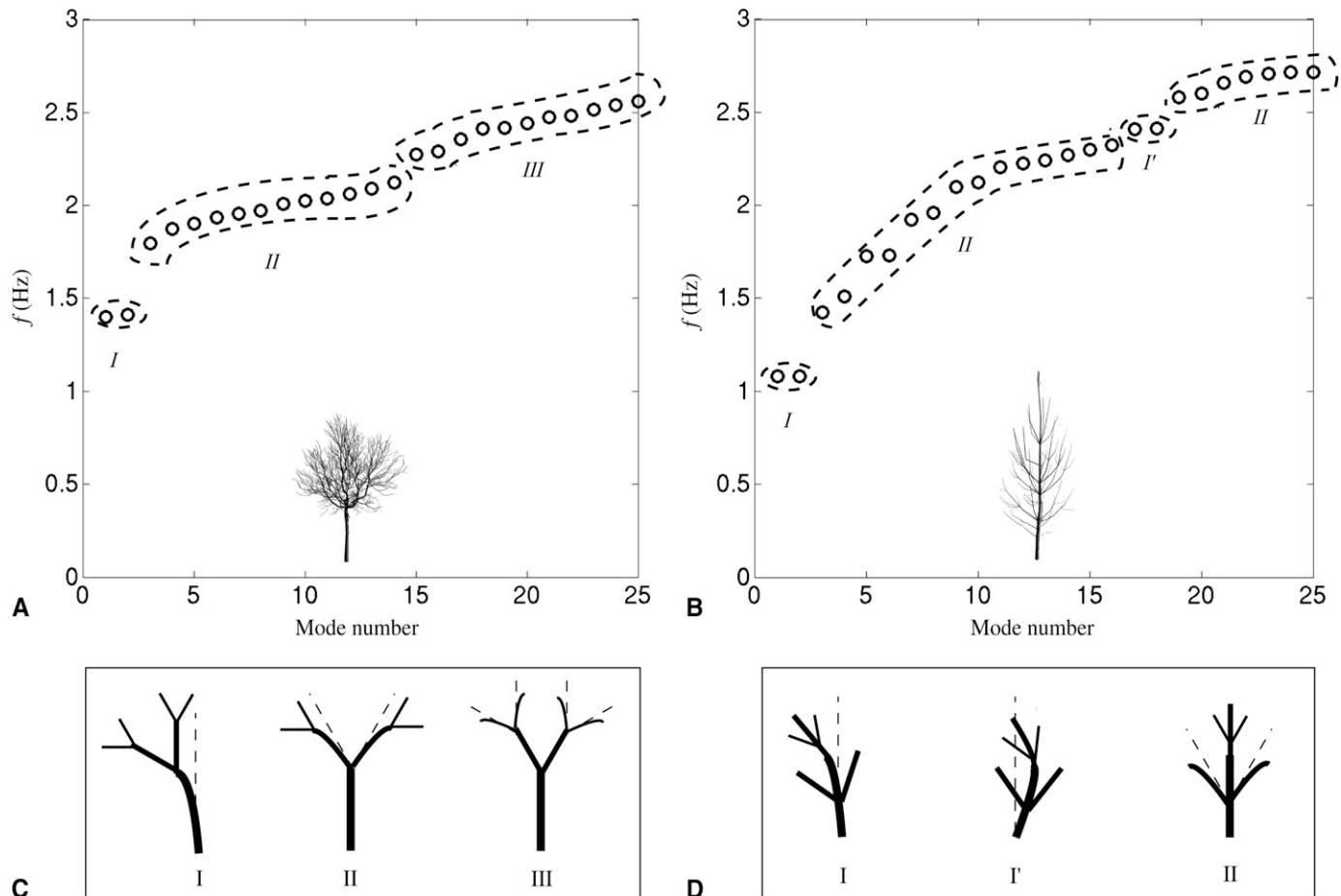


Fig. 2. (A) Mode frequencies of the walnut tree classified in terms of main localization of bending deformations: I, in the trunk; II, in second-order branches; III, in third-order branches. (B) Mode frequencies of the pine tree classified in terms of main localization of deformations: I, first bending mode of the trunk; I', second bending modes of the trunk; II, bending modes in second order branches. (C) Sketches of the mode deformations in the case of the walnut tree. (D) Sketches of the mode shapes in the case of the pine tree.

These modes can be classified according to their modal deformation Φ_j (Fig. 2C). The first group of modes, labeled I, displayed a bending deformation mainly in the trunk basis. This resulted in a lateral displacement of the upper part of the bole mostly through rigid-body rotational effect, as sketched in Fig. 2C. In other words, deformations occurred mostly in the trunk up to the crotch, and the branches swayed like rigid bodies. Group I included two modes, corresponded to the bending in the x and y direction, respectively, with identical frequencies of ~ 1.4 Hz. The second group, labeled II, corresponded to deformations mainly located on first-order branches, with mostly rigid-body displacements of the branches of higher orders. Because there were six main branches bending in the x and y directions, respectively, this second group included 12 distinct modes, each one with different contributions of the deformation of these branches (modes 3–14). The third group, labeled III, corresponded to modes 15–25 with deformations mainly localized on third-order branches.

In the case of the pine tree (Fig. 2B), the first 25 modes were found in the range between 1 and 2.8 Hz with, here again, a clear small gap between the first two modes and the following

ones. The group of the first two modes, labeled I, had frequencies at 1.08 Hz, identical to computational results from Sellier et al. (2006) on the same tree (Table 2). Bending deformations of these modes are mainly located in the trunk with displacements in the whole branching system. A second group of modes, labeled I', involved significant deformation in the trunk, but displayed higher modal frequencies around 2.41 Hz (modes 17 and 18, Fig. 2B). This group corresponded to the second bending modes of the trunk with bending deformations spread over the whole tree (Fig. 2D). As in the walnut tree, the two other groups of modes, labeled II and III, were associated with deformations located mainly on second- and third-order branches, respectively.

For both trees, modal frequencies were concentrated in a small frequency range. With frequencies of 1 Hz order of magnitude and ~ 10 modes per Hz, the frequency spacing of the modes was typically 0.1 Hz. Such a high density of modal frequencies is consistent with the conclusions of James et al. (2006) and Spatz et al. (2007).

Note, however, that the organization of modes groups differs between the two trees: the sequence is I / II / III for the walnut and I / II / I' / II for the pine tree.

THEORETICAL CONSIDERATIONS:
SCALING LAWS IN IDEALIZED TREES

Idealized fractal trees—To explore the respective effects of tree architecture and allometry on modal characteristics, we defined idealized fractal trees. Although not completely realistic (e.g., very short internodes are neglected so that several branches can be inserted at the same branching point, and no axis differentiation is considered), fractal tree construction is the simplest way of generating a reiterated architecture, with self-similar reiterations differing only by scaling coefficients (Prusinkiewicz and Lindenmayer, 1996). Two different fractal models were built, representing two extreme botanical branching patterns in the existing architectural models of plants (Barthelemy and Caraglio, 2007). The first model tree is inspired from the Leeuwenberg architectural model (e.g., cassava) and will be referred to as “the sympodial tree” in the following. At each branching point, the sympodial tree has symmetric lateral segments and no axial segment (Fig. 3). The second model tree is a highly hierarchical tree inspired from the Rauh architectural model (e.g., pine) and will be referred to as monopodial. It has an axial segment and lateral segments at each branching point (Fig. 3B). In both idealized models, lateral segments have equally spaced azimuthal directions.

Tree branches were indexed using the numbers of lateral and axial branching upstream in the direction of the tree base (Fig. 3). A branch segment in a monopodial tree is indexed $[N,P]$ if this segment has $N - 1$ lateral and $P - 1$ axial upstream (i.e., more basal) branch segments. In the sympodial idealized tree, the same system holds, but P is constant and equal to 1. Thus a single index can be used and a branch segment of a sympodial tree is indexed N when it has $N - 1$ lateral upstream branch segments.

Segments sizes were defined using three parameters (Fig. 3): (1) the slenderness coefficient β , corresponding to an allometric law for branch segments (Fig. 3C); (2) the lateral and axial branching ratios λ and μ , which define, respectively, the ratio between cross-sectional areas of segments after and before branching (Fig. 3D); and (3) the angle α of divergence of lateral branches from the axial direction of the parent segment (Fig. 3E).

The mean slenderness of the population of branch segments of both trees was thus described using an allometric law that relates the length L and the diameter D of each segment (McMahon and Kronauer, 1976), in the form

$$D \sim L^\beta, \tag{1}$$

whereas the successive diameters at branching points were

$$D_{(N,P+1)} = \sqrt{\mu} D_{(N,P)} \tag{2A}$$

and $D_{(N+1,P)} = \sqrt{\lambda} D_{(N,P)} . \tag{2B}$

Note also that the particular case where $2\lambda + \mu = 1$ (i.e., the total section before and after branching are identical) corresponds to Da Vinci’s surface conservation law (Prusinkiewicz and Lindenmayer, 1996), but this was not specially assumed hereafter.

The algorithm for generating a fractal tree as in Fig. 3 was the following: (1) the most basal diameter and the initial growth direction is given; (2) using the segment slenderness allometry (Eq. 1), the length of the first segment is computed; (3) a first “branching” occurs, and the diameter of each lateral branch is

computed using Eq. 2B for a sympodial tree or Eqs. 2A and 2B for a monopodial tree; and (4) their spatial inclination is controlled by the angle α of divergence from the actual inclination angle of the parent axis and equal azimuthal spacing. For each branch, the process is iterated from step (1). In a theoretical fractal, this recursive iteration is infinite. Note however that this algorithm for tree construction is not a proper description of the real architectural development and axis growth of real trees (Barthelemy and Caraglio, 2007). For example, in real botanical trees, axes (e.g., branches) can usually be defined as a succession of segments (starting at a given branching point $[N,P]$) that are integrated by cambial growth (Barthelemy and Caraglio, 2007). These idealized trees are just designed as a tool to sketch some of the major symmetries and possible scalings of trees and to test them against real trees.

In the recursive process of construction of the idealized trees, the size of the successive segments depends on the segment slenderness allometric coefficient, the mode of branching (sympodial vs. monopodial), and the coefficients of area reduction at a branching point.

For the sympodial, idealized tree model (Fig. 4A), the relation between successive segments is

$$L_{N+1}/L_N = \lambda^{1/2\beta} \text{ and } D_{N+1}/D_N = \lambda^{1/2}, \text{ so that}$$

$$L_N/L_1 = \lambda^{(N-1)/2\beta} \text{ and } D_N/D_1 = \lambda^{(N-1)/2} . \tag{3}$$

An axis length, l_N , is defined as the sum of the lengths of the segment L_N and all successive segments following a path of lateral branching, giving

$$l_N = \sum_{N'=N}^{\infty} L_{N'} = L_N \frac{1}{1 - \lambda^{1/2\beta}} \tag{4}$$

According to Eq. 4, the slenderness coefficient, β , linking a segment length to its diameter, also links an axis length to its diameter: $D_N = k_1 L_N^\beta = k_2 l_N^\beta$.

In the case of the model tree of monopodial type (Fig. 4B), the scale of a segment depends on the position of the parent segment in the central monopodial axis. If $N - 1$ is the number of lateral branching and $P - 1$ is the number of axial branching, the relation between diameters is given by

$$L_{N,P}/L_{1,1} = \lambda^{(N-1)/2\beta} \mu^{(P-1)/2\beta} \text{ and}$$

$$D_{N,P}/D_{1,1} = \lambda^{N-1/2} \mu^{P-1/2} . \tag{5}$$

Due to the slenderness allometry, the reduction in segment length and segment diameter are thus linked by $r_L = r_D^{1/\beta}$.

Axis length, $l_{N,P}$, is defined as the sum of the lengths of the segment $L_{N,P}$ and all its “son segments” through axial branching, giving

$$l_{N,P} = \sum_{P'=P}^{\infty} L_{N,P'} = L_{N,P} \frac{1}{1 - \mu^{1/2\beta}} . \tag{6}$$

According to Eq. 6, the slenderness coefficient, β , linking a segment length to its diameter, also links the axis length to its basal diameter: $D_{N,P} = k_1 L_{N,P}^\beta = k_2 l_{N,P}^\beta$.

TABLE 2. Frequencies of walnut as described in Sinoquet et al. (1997) and of pine tree as described in Sellier et al. (2006), found via a finite element analysis.

Walnut (<i>Juglans regia</i> L.)			Pine tree (<i>Pinus pinaster</i> Ait.)				
Mode number	Group	Mode frequency (Hz)	Mode number	Group	Mode frequency (Hz)		
					Present results	Sellier et al. (2006)	
					Exp.	Comp.	
1	I	1.40	1	I	1.08	1.13	1.08
2	I	1.41	2	I	1.08	1.13	1.08
3	II	1.80	3	II	1.42		
4	II	1.88	4	II	1.50		
5	II	1.90	5	II	1.73		
6	II	1.94	6	II	1.73		
7	II	1.95	7	II	1.92		
8	II	1.97	8	II	1.96		
9	II	2.01	9	II	2.10		
10	II	2.02	10	II	2.12		
11	II	2.04	11	II	2.21		
12	II	2.06	12	II	2.23		
13	II	2.09	13	II	2.24		
14	II	2.12	14	II	2.27		
15	III	2.27	15	II	2.30		
16	III	2.29	16	II	2.32		
17	III	2.35	17	I'	2.41		
18	III	2.41	18	I'	2.41		
19	III	2.42	19	II	2.58		
20	III	2.44	20	II	2.60		
21	III	2.47	21	II	2.66		
22	III	2.48	22	II	2.69		
23	III	2.51	23	II	2.70		
24	III	2.54	24	II	2.72		
25	III	2.56	25	II	2.72		

Finally, in the idealized fractal trees, self-similar subsets of the tree starting from any branch bifurcation may be identified, as illustrated in Fig. 4. These subsets can thus follow the same index as their basal segment (i.e., N or N,P). Because of the assumption of the reiterated self-similar branching law, a given subset is identical to the whole tree, except for its main axis length scale, l_N or $l_{N,P}$, and its diameter scale d_N or $d_{N,P}$.

General scaling laws for modal characteristics—In a mechanical model of a system in which segments are represented as beams of circular sections, two length scales exist. The first one, l , fixes the scale of coordinates of these segments. A second one, d , which scales the diameters of these segments, is needed. In general, these two scales are not related because a given geometry of segments may correspond to several characteristic diameters d . Moreover, we can assume that material properties of the wood (density ρ , Young modulus E , and Poisson ratio ν) are constant within the tree and that their possible dependence on l and d can be neglected.

The relation between modal frequencies and these two scales may then be assessed by standard dimensional analysis. A modal frequency f depends on lengths, scaled by l , on masses per unit length, scaled by ρd^2 , and on the bending stiffness k , scaled by Ed^4 , and is written as

$$f = F(l, \rho d^2, Ed^4). \tag{7}$$

But, because a physical law is by nature independent of units, this relation must be expressed in terms of dimensionless parameters (Niklas, 1994; Chakrabarti, 2002). Considering the

respective dimensions of these four variables ($f \sim \text{Time}^{-1}$, $\rho d^2 \sim \text{Mass Length}^{-1}$, $Ed^4 \sim \text{Mass Length}^3 \text{Time}^{-2}$), the dimensional equation corresponding to Eq. 7 reads

$$T^{-1} = L^a (M \cdot L^{-1})^b (M \cdot L^3 \cdot T^{-2})^c = L^{a-b+3c} \cdot M^{b+c} \cdot T^{-2c}, \tag{8}$$

yielding $c = 1/2$, $b = -1/2$, $a = -2$.

All four variables may thus be combined in a dimensionless parameter:

$$fl^2 (\rho d^2)^{1/2} (Ed^4)^{-1/2}, \tag{9}$$

implying that the relation expressed in Eq. 7 is of the form

$$fl^2 (\rho d^2)^{1/2} (Ed^4)^{-1/2} = \text{constant}. \tag{10}$$

Or equivalently,

$$f \sim l^{-2} (\rho d^2)^{-1/2} (Ed^4)^{1/2} \sim l^{-2} \cdot d \cdot \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Assuming that the modal mass m depends on the mass per unit length, scaled by ρd^2 , and the length, scaled by l , the dimensional analysis yields $m \sim ld^2$.

Similarly, the modal stiffness, k , defined from $2\pi f = \sqrt{k/m}$, scales as $k \sim l^{-3}d^4$.

In a given tree, where an allometric law relates length and diameter of each segment, $d/l^\beta = \text{constant}$, i.e., $d \sim l^\beta$. Then,

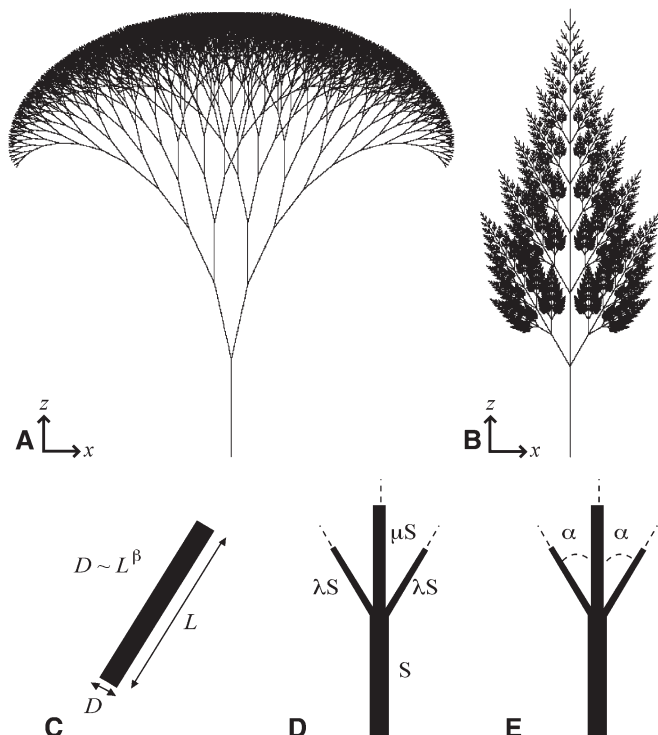


Fig. 3. Examples of model fractal trees and parameters defining model trees. (A) Sympodial case, $\alpha = 12.5^\circ$, and (B) monopodial case, $\alpha = 30^\circ$; (C) Branch slenderness coefficient, β ; (D) branching ratios, λ and μ ; and (E) angle of branching connections, α , illustrated here in the case of two lateral branches.

from Eq. 11, the frequencies of modes are expected to depend on the scale of length and of diameter as follows:

$$f \sim l^{\beta-2} \sim d^{\frac{\beta-2}{\beta}} \tag{12}$$

and similarly for the modal mass and stiffness:

$$m \sim l^{1+2\beta} \sim d^{\frac{1+2\beta}{\beta}}, k \sim l^{4\beta-3} \sim d^{\frac{4\beta-3}{\beta}} \tag{13}$$

Relation between frequencies for a fractal tree—Due to the symmetries of the fractal structure, groups of modes can be deduced and classified according to their modal deformation (Fig. 5). Some modes involve trunk deformation (group I in sympodial tree [Fig. 5A], group I,I in the monopodial tree [Fig. 5B]). Other modes involve mainly the bending deformation of the basal branch of all subsets of the same order (e.g., modes II for $N = 2$ subsets, modes III for $N = 3$ subsets in the sympodial tree [Fig. 5A], mode II,I for [2,1] subsets and II,II for [2,2] subsets in the monopodial tree [Fig. 5B]) with negligible deformation of upstream segments. The deformation of upstream segments is strictly zero when the mode involves the symmetric deformation of two symmetric subsets as in Fig. 5. In the modes where symmetric subsets are deformed antisymmetrically, the lower part of the tree is slightly bent. But the elastic strain energy stored in this slight bending of the lower part of the tree is negligible compared to the energy stored in this same part due to modes with lower index. Consequently, scaling laws will be derived thereafter con-

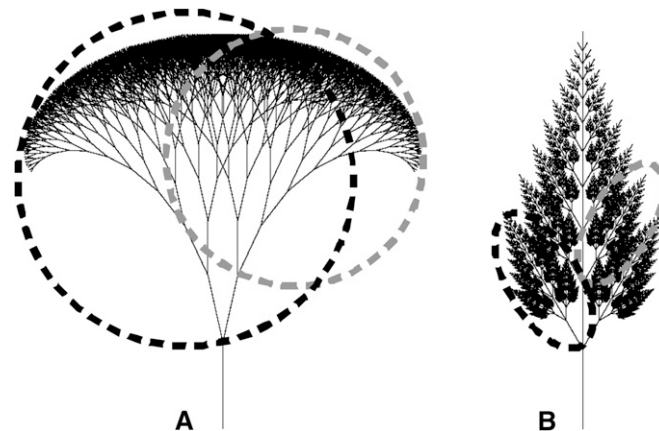


Fig. 4. Identification of subsets in (A) the sympodial and (B) the monopodial model trees. Subsets are circled in black or gray.

sidering only modes of symmetric deformations of subsets. As the general biometrical laws apply to subsets, the hypothesis to be tested is that the scaling laws derived from symmetric modes will capture the dimensional behavior of the whole group of modes involving the deformation of all the subsets of a given scale.

For a sympodial, idealized tree (Fig. 5A), the modal deformations of three groups of symmetric modes (I, II, and III) can easily be deduced from one to the other. Because of the symmetry of the branching pattern, a mode of group II is associated with the deformation of a subset with a fixed part at its base. Therefore, the modal frequency of the group II of the whole tree can be considered as the frequency of a mode of group I of the subset if it is isolated. The dependence of f_{II} on l_{II} and d_{II} should therefore be identical to the dependence of f_I on l_I and d_I , hence yielding:

$$\frac{f_{II}}{f_I} = \frac{d_{II} l_{II}^{-2}}{d_I l_I^{-2}} = \left(\frac{d_{II}}{d_I} \right)^{\frac{\beta-2}{\beta}} \tag{14}$$

Using the relation between successive diameters in a fractal sympodial tree, Eq. 3 yields

$$\frac{f_{II}}{f_I} = \lambda^{\frac{\beta-2}{2\beta}} \tag{15}$$

Similarly, the frequency of modes in the group of order N is given by

$$\frac{f_N}{f_I} = \lambda^{\frac{(N-1)(\beta-2)}{2\beta}} \tag{16}$$

Therefore, all frequencies can be deduced from the first one, given the allometric parameter β , and the area reduction parameter at branching λ .

In the case of the model tree of monopodial type (Fig. 5B), the scale of a subset [N,P] depends on its central axis length and diameter, $l_{N,P}$ and $d_{N,P}$. Introducing the relation between diameters and between lengths from Eq. 5 in Eq. 12, the corresponding frequency ratio can be defined as

$$\frac{f_{N,P}}{f_{I,I}} = \left[\lambda^{N-1} \mu^{P-1} \right]^{\frac{\beta-2}{2\beta}} \tag{17}$$

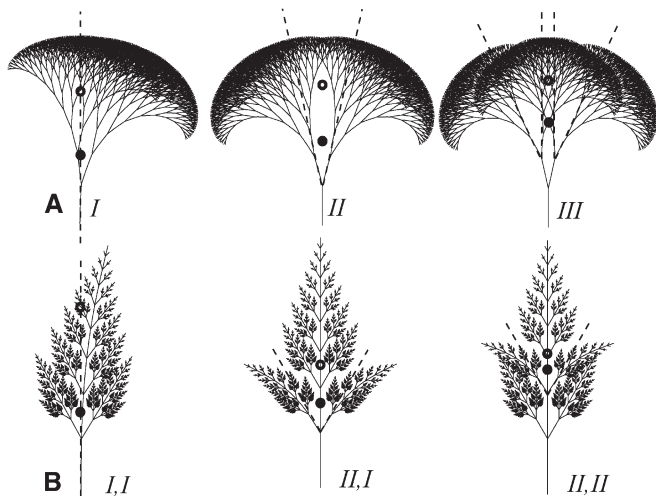


Fig. 5. (A) Modes of groups I, II, and III of the sympodial model tree. (B) Modes [I,I], [II,I] and [II,II] of the monopodial model tree. (●) and (○) represent the centers of bending energy and kinetic energy respectively.

Through similar arguments, the modal mass of the groups of order N and $[N,P]$ for a sympodial tree and a monopodial tree read, respectively, as

$$\frac{m_N}{m_1} = \lambda^{\frac{(N-1)(1+2\beta)}{2\beta}}, \quad \frac{m_{N,P}}{m_{1,I}} = \left[\lambda^{N-1} \mu^{P-1} \right]^{\frac{1+2\beta}{2\beta}}. \quad (18)$$

Center of bending energy and center of kinetic energy—Comparing the spatial distributions of modal displacements Φ_j along the tree is not straightforward. To summarize the localization of displacement associated with a given mode, one may define two geometrical points: the center of kinetic energy of the mode and the center of elastic bending strain energy of the mode.

The modal center of kinetic energy is located at an elevation z_K such that

$$z_K \cdot \int_{\Omega} \rho S \Phi \cdot \Phi d\Omega = \int_{\Omega} \rho S \Phi \cdot \Phi \cdot z d\Omega. \quad (19)$$

Similarly, the modal center of bending strain energy, z_B , is defined by a vertical position

$$z_B \cdot \int_{\Omega} EI \underline{\gamma} \cdot \underline{\gamma} d\Omega = \int_{\Omega} EI \underline{\gamma} \cdot \underline{\gamma} \cdot z d\Omega, \quad (20)$$

where $\underline{\gamma}$ is the curvature associated with the modal displacement Φ and where integration is performed over the whole tree (Ω).

These two parameters scale, respectively, as $z_K \sim l \sim d^{1/\beta}$ and $z_B \sim l \sim d^{1/\beta}$. Exploiting again the assumption of reiterated trees, the position of the centers for a mode $[N,P]$ reads

$$z_{N,P}^K = z_{N-1,P} + \mu^{(P-1)/2\beta} \left(\lambda^{1/2\beta} \cos \alpha \right)^{N-1} z_{1,I}^K, \quad (21)$$

$$z_{N,P}^B = z_{N-1,P} + \mu^{(P-1)/2\beta} \left(\lambda^{1/2\beta} \cos \alpha \right)^{N-1} z_{1,I}^B, \quad (22)$$

where $z_{N,P}$ is the elevation of the branching bifurcation (see Appendix 1 for the geometrical derivation).

TABLE 3. Slenderness coefficients β , lateral and axial branching ratios μ and λ , respectively, and branching angles α used to illustrate the two idealized trees. A slenderness coefficient equal to $3/2$ has frequently been used in the literature (see McMahon and Kronauer, 1976; Moulia and Fournier-Djimbi, 1997), and branching ratios were chosen to follow Da Vinci's surface conservation law (Prusinkiewicz and Lindenmayer, 1996).

Idealized tree	β	λ	μ	α
Sympodial	$3/2$	$1/2$	0	20°
Monopodial	$3/2$	$1/6$	$2/3$	30°

Numerical illustration of scaling laws on idealized fractal trees—The scaling laws derived in the preceding section were applied to two particular occurrences of the idealized trees, one sympodial and one monopodial. The allometric and geometrical parameters defining their geometry are given in Table 3.

Modal frequencies—Instantiating the values of the allometric and geometrical parameters in Eqs. 16 and 17 using Table 3, the series of frequencies for the sympodial $[N]$ and monopodial $[N,P]$ idealized trees read, respectively, as

$$\frac{f_N}{f_1} = 2^{\frac{N-1}{6}}, \quad \frac{f_{N,P}}{f_{1,I}} = 6^{\frac{N-1}{6}} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{P-1}{6}}. \quad (23)$$

These series of frequencies are illustrated in Fig. 6A and 6B. In the case of the sympodial $[N]$ idealized tree in Fig. 6A, frequencies of group of modes are seen to increase progressively. Conversely, for the monopodial $[N,P]$ idealized tree in Fig. 6B, sets of frequencies corresponding to the double-indexed branching pattern can be observed. For a given value of N (i.e., for sequential subtrees along a given monopodial axis, e.g., $N = 2$), frequencies increased progressively with P . For a given P (i.e., for series of lateral subtrees, e.g., $P = 1$), frequencies also increased with N . From Eq. 23, it appears that $f_{N,P}$ values from different groups intercalate, e.g., $f_{2,5} < f_{3,1} < f_{2,6}$. In the two cases, however, the organization of frequencies is clearly dependent on the architecture, through the parameters λ and μ of area reduction at branching, and on the slenderness allometry, through the parameter β .

By the same token, the modal mass reads

$$\frac{m_N}{m_1} = 2^{-\frac{4}{3}(N-1)}, \quad \frac{m_{N,P}}{m_{1,I}} = 6^{-\frac{4}{3}(N-1)} \frac{3^{-\frac{4}{3}(P-1)}}{2}. \quad (24)$$

Localization of modal mass and modal stiffness—The localization in height of the centers of bending energy and the centers of kinetic energy for the modes in each idealized tree were determined from Eqs. 21 and 22 using the values for parameters from Table 3, then plotted as a function of the corresponding modal frequency (Fig. 6C, D). In both trees, the distance between the center of bending energy and the center of kinetic energy is a decreasing function of the modal frequency. Modes thus tended to be more local as their modal frequency increased.

In the sympodial tree in Fig. 6C, modes localized higher in the tree as the modal frequency increased. In the monopodial tree in Fig. 6D, the mixed axial and lateral branching pattern

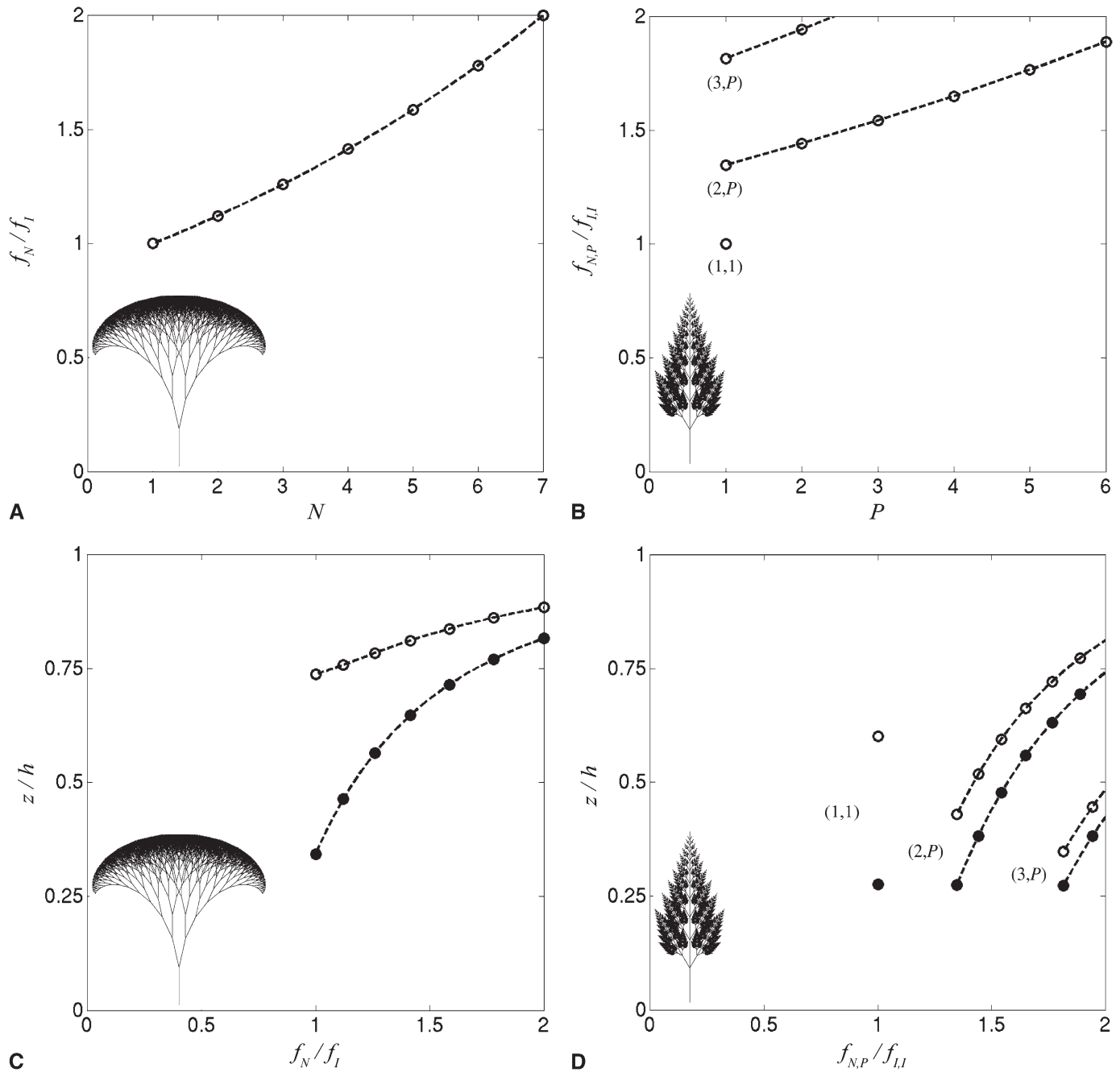


Fig. 6. Vibration modes of the symodial and monopodial idealized trees. Modal frequencies, relative to the first one, as a function of the index of the corresponding subsets in the case of the (A) symodial and (C) monopodial trees, respectively. Vertical position of the centers of bending energy (●●) and of the centers of kinetic energy (○○) as a function of the frequency, respectively in the (C) symodial and (D) monopodial trees.

resulted in the centers of bending energy and the centers of kinetic energy being scattered all along the trunk. Modes related to group of subtrees localized at a constant number of lateral branching (fixed N , changing P) were found to be localized higher in the tree as the modal frequency increased. But the intercalation of modes both in terms of spatial localization and frequency is obvious. The modal analysis of idealized trees thus suggests that the localization of modes in the structure depends of the tree architecture via its branching pattern (symodial vs. monopodial).

TEST OF THE SCALING LAWS ON MODELS OF REAL TREES

The scaling laws for modal frequencies (Eqs. 16 and 17) and localization of the centers of kinetic and bending energy (Eqs. 21 and 22) were then applied to the two “real” tree models (i.e., the symodial walnut and the monopodial pine, Fig. 1). The results were then compared with the modal characteristics computed using 3D finite element models (see section *Modal analysis of a walnut and a pine tree*; Fig. 2).

Determination of biometrical parameters for the scaling law—Orthogonal regressions (SAS version 9.1, procedure Insight Fit) were applied to estimate slenderness allometric coefficients, β , and branching ratios, λ and μ , from the MTG tree databases of the walnut and pine geometries. Slenderness coefficients, β , were estimated from the linear orthogonal regression $\log(d) = \beta \log(l) + k$ (Niklas, 1994). Lateral branching ratios, λ , were estimated from linear orthogonal regression $(d_N)^2 = \lambda(d_{N-1})^2$ and axial branching ratio, μ (in monopodial tree), from $(d_{1,p})^2 = \mu(d_{1,p-1})^2$. Regression coefficients, root mean square errors, coefficients of determination, and 90% confidence intervals (Dagnelie, 2006) are reported in Table 4.

Case of the walnut tree—Parameters were estimated using data from the first three order branches with diameters and lengths larger than 1 cm and 1 m, respectively (Fig. 7A, B). A highly significant, tight allometric relation was found between l and d (Fig. 7A), capturing 87% of the total variance, with only two outlying points corresponding to the trunk and to a cut branch. The relation between d_{N+1} and d_N was a little bit more biased, but still a highly significant λ could be defined. The sympodial branching pattern of the walnut implies an axial branching ratio μ equal to 0. The angle of branching has been found to vary between 0° and 40° , a mean angle of branching, $\alpha = 20^\circ$, was retained.

Case of the pine tree—Parameters were estimated using data from the first two order branches (Fig. 7C–E). The slenderness β (Fig. 7C) and the longitudinal area reduction μ (Fig. 7E) were statistically significant. The axial branching ratio λ (Fig. 7D) was also significantly different from zero, but the relation between the cross-sectional area of the parent segment and of lateral branches was very poor [the slope of the regression model with the intercept is not significantly different from zero with probability $p(>F) = 0.13$]. The mean angle of branching was $\alpha = 30^\circ$.

Application of scaling laws—Using the parameters corresponding to the two real trees (Table 4), we applied the scaling laws derived in the *Theoretical considerations* section to the case of each real tree, then compared the results to the modal characteristics computed using the 3D finite element models

defined in the section *Modal analysis of a walnut and a pine tree* (Fig. 8).

Case of the walnut—Figure 8A displays the frequencies of the three groups of modes (I, II, and III, see Fig. 2A, C and section *Modal analysis of a walnut and a pine tree*) estimated using the 3D FEM vs. the group number N . On the same graph, the dotted lines show the frequencies predicted using Eq. 16 with the 90% confidence range of parameters as in Table 4. The same comparison is held for the values for the height of the bending and kinetic energy centers (using Eqs. 21 and 22), in Fig. 8B and C. Though the geometry of the real walnut is much more complex than that of the idealized fractal sympodial tree, the prediction using the scaling laws quite closely brackets the range of modal characteristics of the FEM model. The positions of the centers of bending and kinetic energy are particularly well estimated, with the exception of two points.

Case of the pine—As emphasized previously, the case of the monopodial tree is much more complex, due to the double index dependence related to the two kinds of branching, axial and lateral. We will focus on the characteristics of the modes labeled II in the section *Modal analysis of a walnut and a pine tree* (see Fig. 2B, D), corresponding to the motion of lateral subsets. In terms of the double index reference, these are modes involving $[2, P]$ subsets. The scatter of modal characteristics is higher in the pine tree than in the walnut tree (Fig. 8D–F). The scaling law derived from idealized fractal monopodial tree still brackets from 60 to 75% of the outputs of the FEM model. But half of the confidence intervals from the scaling laws does not contain any output of the FEM model.

Moreover, modes of group I' cannot be predicted, using the scaling laws applied to subsets of the tree because the corresponding deformation cannot be defined as the deformation of a subset. For instance, the frequencies of I' are in the order of 2.4 Hz for the pine tree, while those corresponding to subset $[1, 2]$ are about 1.16 Hz.

DISCUSSION

An approach of the complex oscillatory behavior of trees through modal and scaling analyses—Despite its standard use in mechanical engineering (Gerardin and Rixen, 1994), modal analysis has only been used in a few studies to analyze the dynamic characteristics of trees in relation to their 3D architecture (Fournier et al., 1993; Moore and Maguire, 2005; Sellier et al., 2006). Compared to the analysis of the vibrational behavior of separated elements of the tree such as trunk, branches (e.g., McMahon and Kronauer, 1976; Spatz et al., 2007), modal analysis takes into account the additional fact that as a whole, the tree is a mechanical structure. As a consequence, elastic strain energy is almost instantaneously distributed over the whole tree structure, and vibrations involving the whole tree can occur. Such vibrations can involve several parts of the tree together and can thus be more complex than that of isolated parts. Indeed, models connecting a large number of small damped oscillators connected together—each oscillator modeling a branch subsystem—have been proposed recently (James et al., 2006). However, such models are not parsimonious, and their behavior may be difficult to analyze quantitatively. Under the classical assumption

TABLE 4. Slenderness coefficients β , lateral and axial branching ratios μ and λ , respectively, and branching angles α estimated from walnut and pine tree geometries (orthogonal regression coefficients, confidence intervals at 90% level [CI], coefficients of determination [R^2], and root mean square of the residual errors [σ_{res}]). Tree geometries are from Sinoquet et al. (1997) and Sellier and Fourcaud (2005), respectively. Note that for λ and μ , the regressions were obtained with no intercept so that the R^2 value cannot be compared directly with that related to a standard linear regression, and significance levels are to be related to a null hypothesis where the dependant variable is equal to zero (for a more detailed discussion, see Freund and Littel, 1991).

Tree	β	λ	μ	α
Walnut	1.37	0.25	0	20°
CI	$1.25 < \beta < 1.49$	$0.22 < \lambda < 0.29$		
R^2	0.87	0.74		
σ_{res}	0.2	0.008		
Pine	1.38	0.038	0.74	30°
CI	$1.25 < \beta < 1.52$	$0.032 < \lambda < 0.044$	$0.71 < \mu < 0.79$	
R^2	0.85	0.59	0.97	
σ_{res}	0.086	11.92	5.33	

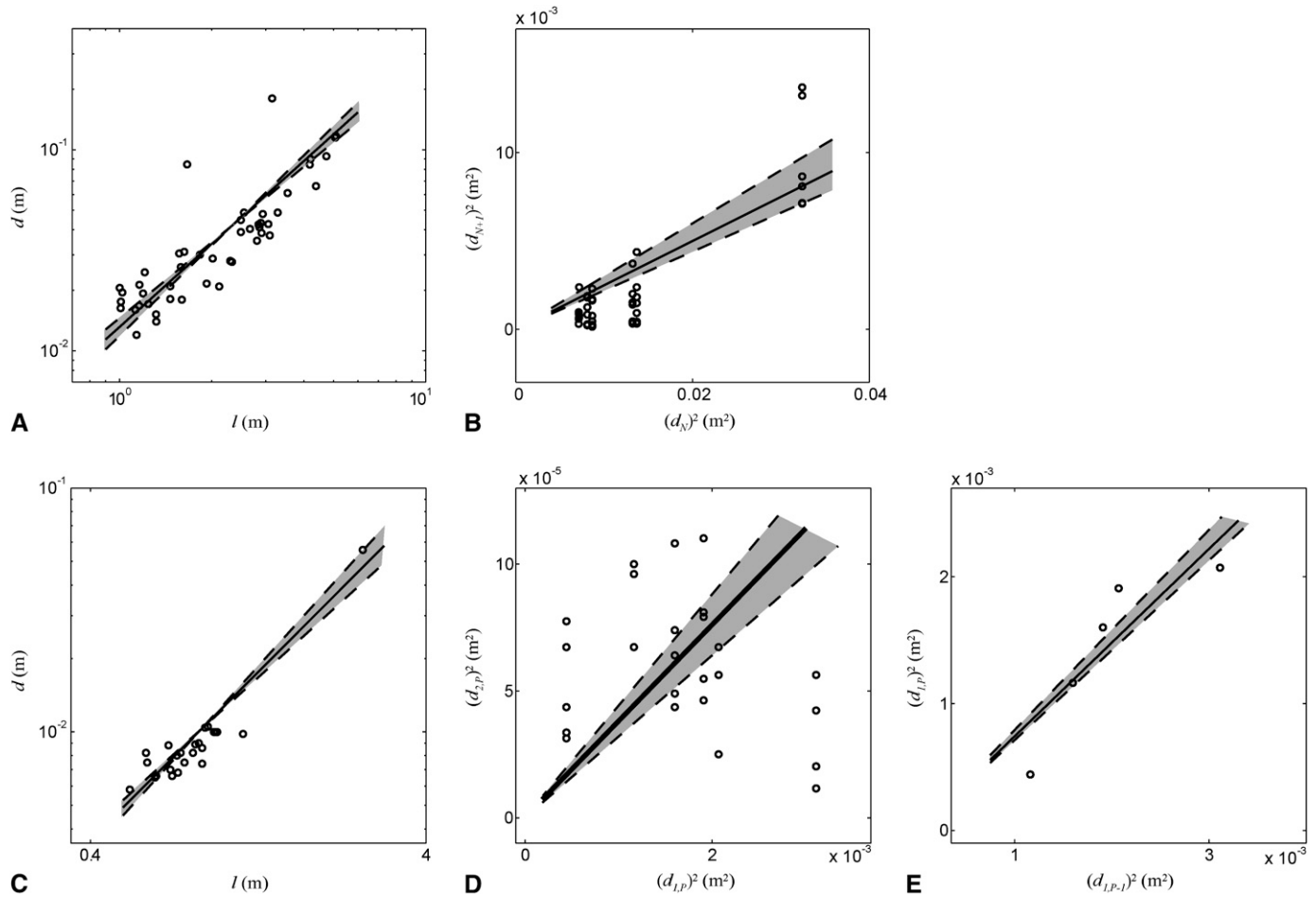


Fig. 7. Biometrical relations in the walnut and the pine trees. (A, C) Allometric relations between length and diameter of branches in (A) the walnut and (C) the pine tree. (—) Orthogonal regression $D \sim L^\beta$, with $\beta = 1.37$ (A) and $\beta = 1.38$ (C). (B, D) Branches cross-sectional areas before and after a lateral branching in (B) the walnut and (D) the pine tree. (—) Orthogonal regression $(d_N)^2 = \lambda(d_{N-1})^2$, with (B) $\lambda = 0.25$ and (D) $\lambda = 0.038$. (E) Cross-sectional areas of the trunk before and after a branching in the case of the monopodial pine tree. (—) Orthogonal regression $(d_{i,p})^2 = \mu(d_{i,p-1})^2$, $\mu = 0.74$. Gray areas in the graphs correspond to the 90% confidence level (see Table 4). (O) measured data from Sinoquet et al. (1997) and Sellier and Fourcaud (2005).

of relatively small displacements, this complex behavior can be analyzed as the superposition of a (large) set of much simpler free-vibration modes with characteristic modal frequency and modal deformation and modal inertial mass. These modes are mechanical attributes of the whole tree structure, its intrinsic dynamical characteristics independent of any particular load. They characterize the vibrational excitability of a given tree. A given load, say, a turbulent wind with specific frequencies and spatial distributions, will excite only the modes with compatible frequencies and modal shapes. Because universal wind spectra have been obtained showing that mechanically active wind loads in trees typically occur in the 0–10 Hz band (Stull, 1988), and the drag mainly applies to the leaf-bearing terminal segments, it is possible to focus on the subset of modes in this frequency band and with modal deformations involving significant displacements of the branch tips, as done in this study.

Because they are based on very detailed and extensive architectural and mechanical data, modal analyses can also provide guidelines for defining simpler models, as illustrated through scaling analysis (and discussed later).

Before discussing the major insights on tree mechanics obtained through this method, we should discuss its limitations. In

its strict definition, modal analysis only deals with small displacements, as is the case for trees submitted to moderate winds. But with large winds, large displacements occur, and geometric nonlinearities such as strong streamlining or branch collisions have to be taken into account (de Langre, 2008). Such nonlinear behaviors are still a very active area of research in the mechanics of fluid–structure interactions (de Langre and Axisa, 2004). However, some numerical methods for predicting flow-induced vibrations in nonlinear cases still involve modal analysis (Axisa et al., 1988), meaning that modal analysis is still a robust starting point for the analysis of the dynamic excitability under strong winds.

Branches are important to the tree dynamics—The detailed FEM modal analysis of entirely digitized trees with a very large contrast in their mechanical architecture and modal behavior confirmed and extended previous reports: modes involving significant branch deformation could have frequencies very close to—and even rank in between—modes deforming mainly the trunk (Fournier et al., 1993; Moore and Maguire, 2005; Sellier and Fourcaud, 2005; James et al., 2006; Sellier et al., 2006). As many as 25 modes could be found with frequencies between one and two times the most basal mode involving the trunk and

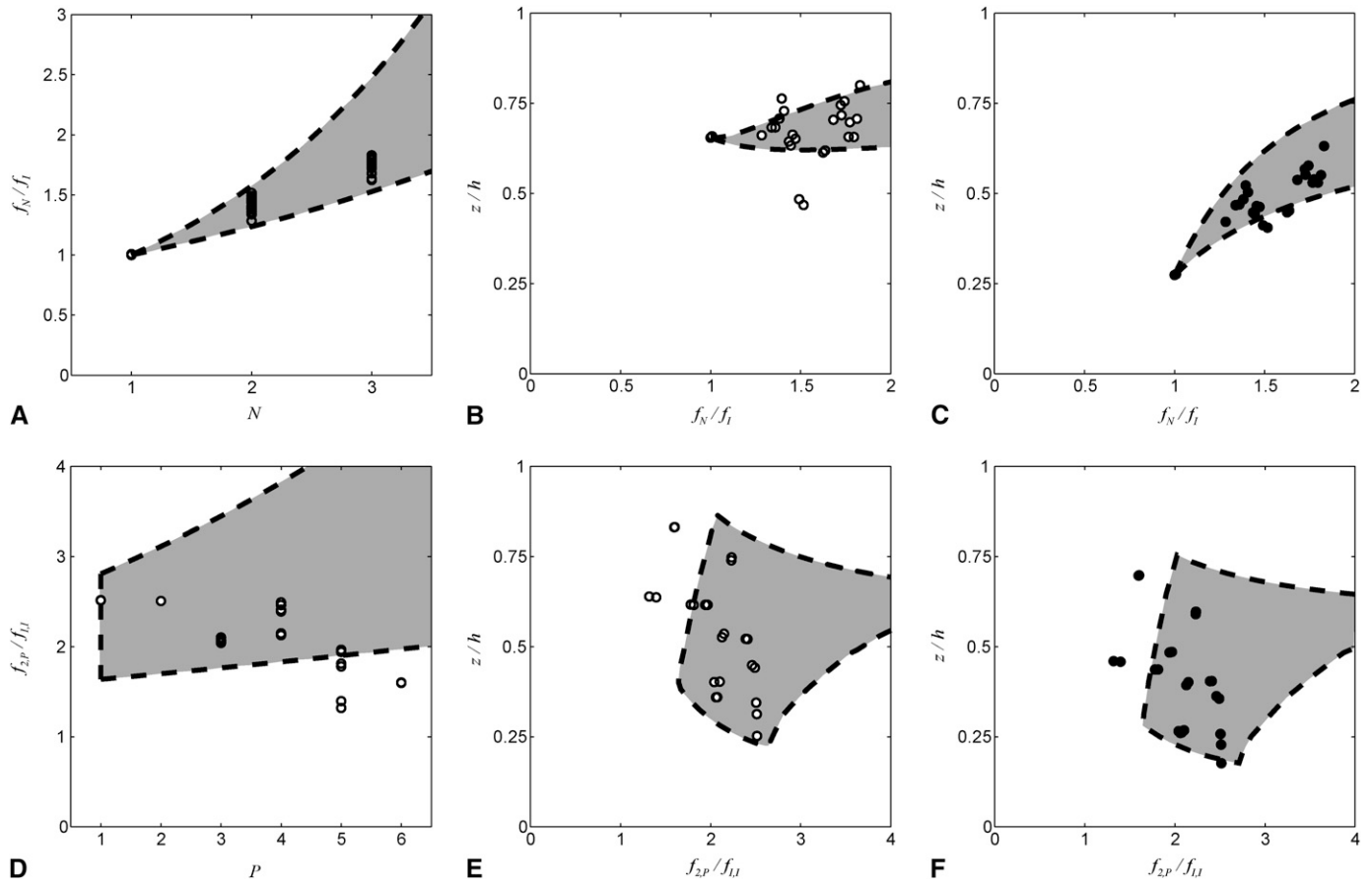


Fig. 8. Comparison of the prediction from the scaling laws with the finite element results on the true tree geometry: (A) frequencies, (B) centers of kinetic energy (\circ), (C) centers of bending energy (\bullet) of modes of the walnut tree, and (D) frequencies, (E) centers of kinetic energy (\circ), (F) centers of bending energy (\bullet) of modes $[2,P]$ of the pine tree. (\circ and \bullet) are results from the FEM on true tree geometries; gray areas are predictions from the scaling laws, Eqs. 12, 13, 18, and 19, using idealized tree models.

with a typical modal spacing as low as 0.1 Hz, consistent with the results of James et al. (2006) and Spatz et al. (2007).

Although these modes are complex, they can be classified using their frequencies and modal deformation. In this study, no modes involving an inflection in their modal deformation, I' (i.e., second modes of the trunk, I' in our labeling), could be observed within the 25 first modes in the walnut tree, whereas for the pine tree, I' only rank 17th and 18th (i.e., 14 modes II involving first order branches ranked in between the fundamental mode of the trunk I and its I' mode). This is quite in contrast with claims from the literature, mostly about adult conifer trees, on which only first I and second I' bending modes of the trunk have been reported (e.g., White et al., 1976; Mayer, 1987; Hasinen et al., 1998; Kerzenmacher and Gardiner, 1998). However, in these studies only the strains in the trunk were measured or modeled; therefore, only modes involving significant deformation of the trunk could be recorded. Indeed, when analyzing the vibration modes of an adult maritime pine (*Pinus pinaster*) using finite element analysis, Fournier et al. (1993) also found that modes concentrated in frequency and that modes of the second group ranked between the first and the second bending modes of the trunk. Branch deformation is thus an important aspect of trees dynamics whatever the architectures and size (see also Fournier et al., 1993; Sellier and Fourcaud, 2005; Moore and Maguire, 2005; Spatz et al., 2007).

Scaling laws can be defined—As hypothesized, and despite the aforementioned complexity of the 3D architecture and modal structure of real trees, scaling laws based on the assumptions of (1) idealized allometric fractal trees and (2) symmetric modes of branches, are able to explain a large part of the spatial and temporal characteristics of the modes involving the successive orders of branches relative to the first mode deforming the trunk (Fig. 8). The distribution of modal characteristics was particularly well predicted in the case of the tree with highest modal density and where the branch modes are the most salient, i.e., the sympodial walnut tree. Moreover, in both trees, scaling laws were able to predict correctly the relative ranking of the different types of modes (Fig. 8A), validating the hypothesis that the dimensional analysis of the symmetric modes of idealized fractal trees can capture a large part of the scaling of modal settings in real trees (frequencies and localization of bending and kinetic energy), although more advanced analysis may be conducted for monopodial trees.

Such scaling law has two major uses. From a methodological and practical point of view, the overall dynamics of a complex tree can be reduced to (1) the measurement or estimation of the most basal mode, which is the easiest to characterize and has been studied or modeled in numerous studies (e.g., Gardiner, 1992; Spatz and Zebrowski, 2001); (2) a standard description of the branching mode, i.e., sympodial vs monopodial mode

(Barthelemy and Caraglio, 2007); and (3) three simple biometrical parameters that have been measured in many biomechanical and ecological studies (e.g., McMahon and Kronauer, 1976). This compact description of the overall dynamics of a complex tree is to be compared with the extensive work on detailed 3D digitizing (Sinoquet and Rivet, 1997) followed by complete modal analysis. It would be interesting though to test these scaling laws in trees of other species and other sizes, so that the accuracy in the prevision through these simplified laws could be assessed more completely.

From a more fundamental perspective, these scaling laws give direct insights into the significance of tree architecture and geometry for its modal behavior and thus to its excitability to wind and its possible mechanoperceptive control, as discussed next.

Effects of architecture and biometrical characteristics on modal content: Tuning and compartmentalization—Both area reduction ratios and the slenderness coefficient affect the relative frequency and the location of modes (see Eqs. 16 and 21), whereas the branching angle only affects the spatial localization of the modes. In all the cases, the effects of the parameters are nonlinear and mixed.

For example, in the case of the sympodial tree, variations in λ and β both influence the value of the frequency of a given group of modes. In the natural ranges estimated from our data (Table 4), a decreasing λ (i.e., a higher reduction in the cross-sectional area at branching) increases the relative frequency of a given group of mode. A decreasing β (i.e., a tree with higher slenderness) also increases the relative frequency of a given group of mode. It should be noted here that both λ and β have been reported to be under similar control of wind mechanoperception through thigmomorphogenetic secondary growth responses (Telewski, 2006; Watt et al., 2005). Thus, thigmomorphogenetic responses may be able to tune the multimodal frequencies range of the whole tree, whatever the genetic specific traits of its architecture. It is, moreover, striking that two trees as geometrically different as an old walnut tree and a young pine tree could present fundamental modes in the range of 1–1.5 Hz with a large number of their branch modes in the 2.5–3 Hz band, consistent with many reports in the literature (B. Roman, Ecole Supérieure de Physique et Chimie Industrielles de Paris (ESPCI), personal communication). This similarity in modal frequencies may point toward some modal tuning controlling the biometrical parameters of the trees (and thus of the scaling laws). The effectiveness of this acclimation process remains to be studied, but the current study provides useful tools to do so.

Last but not least, a very unexpected salient conclusion that is captured by the scaling laws is that branching and secondary growth are tuned so that the reduction of cross sectional area at branching points (λ and eventually μ in monopods), induce a clear structural compartmentalization of the modal spatial distribution and a scaling similarity between successive modes. Whatever the architecture, modes have been found to be more and more local as their modal frequency increases. And both their modal frequencies and modal mass are scaled recursively to that of the first mode of the whole tree. These compartmentalization and scaling similarity are not mechanical necessities. As previously stated, the elastic strain energy underlying modal behavior is distributed almost instantaneously over the whole structure; so that structural compartmentalization and scaling similarities result from a specific biomechanical design of the

trees during their architectural development. This specific biomechanical design of the trees requires a consistent tuning of both (1) branching symmetries within the architecture and (2) the secondary growth balance between parent and axillary branches (as reported by Watt et al., 2005). Moreover, this consistent tuning should be efficient in highly different architectural patterns (monopods vs. sympods) and is thus very likely to have resulted from adaptation.

These structural compartmentalization and scaling similarities are probably important in making the overall biological control over the multimodal dynamics of the tree more tractable, whatever its size. Assessing how this gain in control may be beneficial for species adaptation and individual acclimation to wind should be the matter of specific future investigations. Indeed, scaling laws give only approximations, and clear differences were found in the modal spatial patterning between monopodial and sympodial trees. Moreover, trees in a forest stand may have more significant shoot abrasion or crown asymmetry. At last, competition for resources and photomorphogenetic responses to shade may interact with the mechanoperceptive acclimation to wind (Fournier et al., 2005). But some elements affecting the biomechanical significance of multimodal scaling of trees to the response to wind load can already be directly discussed from our results.

Significance of multimodal dynamics and scaling laws to the responses of trees to wind—Wind excites trees through the drag force applied to the constitutive elements of the trees, branches, and possibly leaves or needles. From surface area considerations, most of the drag thus occurs at in the distal, possibly leafy, segments of the tree. All the modes in this study have a common characteristic: their larger displacements sits on the extremities of the tree. Therefore, they should reciprocally all be excited by a force applied at the extremities, such as the wind-drag force (Gerardin and Rixen, 1994). Moreover, because wind spectra usually have a large frequency band (Raupach et al., 1996) overlying most of the modal frequencies of the considered modes, several modes may be excited directly by highly fluctuating winds. As a consequence, the two types of tree architectures studied here should have a dense multimodal response to gusts involving a very significant contribution of branches of all the orders.

James et al. (2006) and Spatz et al. (2007) have argued that dynamics including branch deformation with close modal frequencies could be beneficial to the tree by enhancing aerodynamic dissipation through a mechanism called multiple resonance damping or multiple mass damping. A prerequisite for this mechanism to occur is a multimodal behavior of the tree, with high modal density in the frequency range and significant branch deformations, exactly what was found here for trees with contrasting architectures. This dense multimodal dynamics, a consequence of the branched structure, can then be interpreted as a strategy to prevent the trunk from bending excessively until the rupture. It should be noted, however, that the high modal density observed in our two trees did not reach the almost perfect tuning in the modal frequencies of branches larger than 0.5 m reported by Spatz et al. (2007) for a (monopodial) *Pseudotsuga menziesii* tree. A similar result in our study would have meant either λ and $\mu = 1$ or $\beta = 2$, which can be rejected statistically in our two trees (Table 4). However in our study, possible variations in the longitudinal Young's modulus along the branch (that have been reported by Spatz) were not considered. It would be interesting to further investigate if the distribution

of wood stiffness along branches could be controlled to further enhance the modal density.

Modes can also be characterized in terms of the localization of their bending centers, i.e., the zone of significant bending of the tree. The first bending modes result in deformation on the trunk, while higher frequency modes result in deformations localized in higher orders of branching in the tree, with a different spatial pattern in monopodial and sympodial trees. This compartmentalization may have consequences for windbreaks. Indeed, some studies have reported branch breaks occurring before trunk or roots breaks, with obvious benefit for wind resistance (Cullen, 2002; Watt et al., 2005). Such mechanical modal compartmentalization of the wind hazards would then present analogies with compartmentalization strategies in front of hydric stresses (Meinzer et al., 2001) and perhaps pathogens (Shigo, 1986). But this mechanical modal compartmentalization of the wind hazards remains to be confirmed experimentally over a larger range of situations and species.

LITERATURE CITED

- AXISA, F., J. ANTUNES, AND B. VILLARD. 1988. Overview of numerical methods for predicting flow-induced vibrations. *Journal of Pressure Vessel Technology* 110: 6–14.
- BARTHELEMY, D., AND Y. CARAGLIO. 2007. Plant architecture: A dynamic, multilevel and comprehensive approach to plant form, structure and ontogeny. *Annals of Botany* 99: 375–407.
- BRÜCHERT, F., AND B. A. GARDINER. 2006. The effect of wind exposure on the tree aerial architecture and biomechanics of Sitka spruce (*Picea sitchensis*, Pinaceae). *American Journal of Botany* 93: 1512–1521.
- CHAKRABARTI, S. 2002. The theory and practice of hydrodynamics and vibration. World Scientific, Singapore, Singapore.
- COUTAND, C., AND B. MOULIA. 2000. A biomechanical study of the effect of a controlled bending on tomato stem elongation. II. local mechanical analysis and spatial integration of the mechanosensing. *Journal of Experimental Botany* 51: 1825–1842.
- CULLEN, S. 2002. Tree and wind: Wind scales and speeds. *Journal of Arboriculture* 28: 237–242.
- DAGNELIE, P. 2006. Statistique théorique et appliquée. Tome 2. Inférence statistique à une et à deux dimensions. De Boeck et Larcier, Brussels, Belgium.
- DE LANGRE, E. 2008. Effects of wind on plants. *Annual Review of Fluid Mechanics* 40: 141–168.
- DE LANGRE, E., AND F. AXISA [eds.]. 2004. Proceedings of the 8th International Conference on Flow-Induced Vibration, Paris, France, 2004. Ecole Polytechnique, Paris, France.
- FOURNIER, M., P. ROGIER, E. COSTES, AND M. JAEGER. 1993. Modélisation mécanique des vibrations propres d'un arbre soumis aux vents, en fonction de sa morphologie. *Annales des Sciences Forestières* 50: 401–412.
- FOURNIER, M., A. STOKES, C. COUTAND, T. FOURCAUD, AND B. MOULIA. 2005. Tree biomechanics and growth strategies in the context of forest functional ecology. In A. Herrel, T. Speck, and N. Rowe [eds.], Ecology and biomechanics: A biomechanical approach of the ecology of animals and plants, 1–33. CRC Taylor & Francis, Boca Raton, Florida, USA.
- FREUND, R. J., AND R. C. LITTEL. 1991. SAS, System for regression, 2nd ed. SAS series in statistical applications. SAS Institute, Cary, North Carolina, USA.
- GARDINER, B., H. PELTOLA, AND S. KELLOMAKI. 2000. Comparison of two models for predicting the critical wind speeds required to damage coniferous trees. *Ecological Modelling* 129: 1–23.
- GARDINER, B. A. 1992. Mathematical modelling of the static and dynamic characteristics of plantation trees. In J. Franke and A. Roeder [eds.], Mathematical modelling of forest ecosystems, 40–61. Sauerländer, Frankfurt/Main, Germany.
- GARDINER, B. A., AND C. P. QUINE. 2000. Management of forests to reduce the risk of abiotic damage—A review with particular reference to the effects of strong winds. *Forest Ecology and Management* 135: 261–277.
- GERARDIN, M., AND D. RIXEN. 1994. Mechanical vibrations: Theory and application to structural dynamics. Wiley, Chichester, UK.
- GILLISON, A. N. 1994. Woodlands. In R. H. Groves [ed.], Australian vegetation, 2nd ed., 227–255. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- GODIN, C., E. COSTES, AND H. SINOQUET. 1999. A method for describing plant architecture which integrates topology and geometry. *Annals of Botany* 84: 343–357.
- HASSINEN, A., M. LEMETTINEN, H. PELTOLA, S. KELLOMAKI, AND B. GARDINER. 1998. A prism-based system for monitoring the swaying of trees under wind loading. *Agricultural and Forest Meteorology* 90: 187–194.
- JAMES, K. R., N. HARITOS, AND P. K. ADES. 2006. Mechanical stability of trees under dynamic loads. *American Journal of Botany* 93: 1522–1530.
- KERZENMACHER, T., AND B. A. GARDINER. 1998. A mathematical model to describe the dynamic response of a spruce tree to the wind. *Trees—Structure and Function* 12: 385–394.
- MAYER, H. 1987. Wind-induced tree sways. *Trees—Structure and Function* 1: 195–206.
- MCMAHON, T. A., AND R. E. KRONAUER. 1976. Tree structures: Deducing the principle of mechanical design. *Journal of Theoretical Biology* 59: 443–466.
- MEINZER, F. C., M. J. CLEARWATER, AND G. GOLDSTEIN. 2001. Water transport in trees: Current perspectives, new insights and some controversies. *Environmental and Experimental Botany* 45: 239–262.
- MOORE, J. R., AND D. A. MAGUIRE. 2005. Natural sway frequencies and damping ratios of trees: Influence of crown structure. *Trees—Structure and Function* 19: 363–373.
- MOORE, J. R., AND D. A. MAGUIRE. 2008. Simulating the dynamic behavior of Douglas-fir trees under applied loads by the finite element method. *Tree Physiology* 28: 75–83.
- MOULIA, B., C. COUTAND, AND C. LENNE. 2006. Posture control and skeletal mechanical acclimation in terrestrial plants: implications for mechanical modeling of plant architecture. *American Journal of Botany* 93: 1477–1489.
- MOULIA, B., AND M. FOURNIER-DJIMBI. 1997. Optimal mechanical design of plant stems: The models behind the allometric power laws. In G. Jeronimidis and J. F. V. Vincent [eds.], Plant biomechanics, 43–55. Centre for Biomimetics, University of Reading, Reading, UK.
- NIKLAS, K. J. 1992. Plant biomechanics: An engineering approach to plant form and function. University of Chicago Press, Chicago, Illinois, USA.
- NIKLAS, K. J. 1994. Plant allometry: The scaling of form and process. University of Chicago Press, Chicago, Illinois, USA.
- PRUSINKIEWICZ, P., AND A. LINDENMAYER. 1996. The algorithmic beauty of plants, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, New York, USA.
- RAUPACH, M. R., J. J. FINNIGAN, AND Y. BRUNET. 1996. Coherent eddies and turbulence in vegetation canopies: The mixing-layer analogy. *Boundary-Layer Meteorology* 78: 351–382.
- SELLIER, D., AND T. FOURCAUD. 2005. A mechanical analysis of the relationship between free oscillations of *Pinus pinaster* Ait. saplings and their aerial architecture. *Journal of Experimental Botany* 56: 1563–1573.
- SELLIER, D., T. FOURCAUD, AND P. LAC. 2006. A finite element model for investigating effects of aerial architecture on tree oscillations. *Tree Physiology* 26: 799–806.
- SHIGO, A. 1986. A new tree biology. Shigo and Trees, Associates, Durham, New Hampshire, USA.
- SINOQUET, H., AND P. RIVET. 1997. Measurement and visualization of the architecture of an adult tree based on a three-dimensional digitising device. *Trees—Structure and Function* 10: 265–270.
- SINOQUET, H., P. RIVET, AND C. GODIN. 1997. Assessment of the three-dimensional architecture of walnut trees using digitising. *Silva Fennica* 31: 265–273.
- SPATZ, H.-C., F. BRÜCHERT, AND J. PFISTERER. 2007. Multiple resonance damping or how do trees escape dangerously large oscillations? *American Journal of Botany* 94: 1603–1611.

SPATZ, H.-C., AND J. ZEBROWSKI. 2001. Oscillation frequencies of plant stems with apical loads. *Planta* 214: 215–219.
 STULL, R. B. 1988. An introduction to boundary layer meteorology. Kluwer, Dordrecht, Netherlands.
 TELEWSKI, F. W. 2006. An unified hypothesis of mechanoperception in plants. *American Journal of Botany* 93: 1466–1476.
 VERPEAUX, P., T. CHARRAS, AND A. MILLARD. 1988. CASTEM 2000, une approche moderne du calcul des structures. In J. M. Fouet, P.

Ladevèze, and R. Ohayon [eds.], *Calcul des structures et intelligence artificielle*, 261–271, Pluralis, Paris, France.
 WATT, M. S., J. R. MOORE, AND B. MCKINLAY. 2005. The influence of wind on branch characteristics of *Pinus radiata*. *Trees (Berlin)* 19: 58–65.
 WHITE, R. G., M. F. WHITE, AND G. J. MAYHEAD. 1976. Measurement of the motion of trees in two dimensions. Technical Report 86. Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, Southampton, UK.

APPENDIX 1.

Because the derivation of scaling laws for the bending and kinetic energy centers are similar, only the case of the bending energy center is detailed here.

First is considered the case of the sympodial tree. The mode associated with the subgroups of the group N is related to 2^{N-1} subsets of the tree, deforming like the first mode, and the rest of the tree is supposed to be at rest. The bending energy center of a mode of group N is assessed from all the centers related to each subset. Subsets of the group N are grouped by two and related to a subset of the group $N - 1$. The relation between these centers is derived using the angle of branching, α , the branching ratio, λ , and the elevation of the branching bifurcations, z_N , see sketch on Fig. 9A. It reads

$$z_N^B - z_{N-1} = \lambda^{1/2\beta} \cos \alpha (z_{N-1}^B - z_{N-2}^B), \quad (25)$$

so that
$$z_N^B = z_{N-1} + (\lambda^{1/2\beta} \cos \alpha)^{N-1} z_1^B. \quad (26)$$

Using the same process, in the case of the monopodial tree, see the sketch in Fig. 9B, it is found that

$$z_{N,P}^B - z_{N-1,P} = \mu^{(P-1)/2\beta} (z_{N,1}^B - z_{N-1,1}^B), \quad (27)$$

this gives, as Eq. 21 is still valid in the case of the monopodial tree

$$z_{N,P}^B = z_{N-1,P} + \mu^{(P-1)/2\beta} (\lambda^{1/2\beta} \cos \alpha)^{N-1} z_{1,1}^B. \quad (28)$$

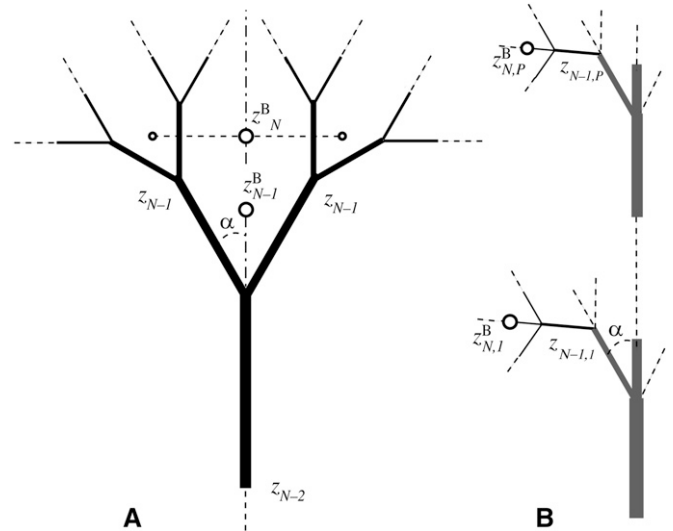


Fig. 9. Sketches illustrating the positions of bending centers of several modes in (A) the sympodial tree and (B) the monopodial tree.

Experimental investigations of a walnut tree multimodal dynamics

Mathieu Rodriguez^{1,2}, Bruno Moulia¹, Emmanuel de Langre²

¹INRA & Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France

²Ecole Polytechnique, Palaiseau, France

Abstract

Experimental data on the frequencies of a walnut tree are presented. These are derived from several kinds of tests using protocols that are commonly used in vibration analysis: pull and release test, hammer impact tests and wind excitation test. The results from these experiments are then used to validate an analytical approach based on the allometry of the tree. This is made possible by a detailed digitization of the tree geometry.

1. Introduction

Over the last decades, time-dependent dynamic effects have been found to play a major part in wind deformations of trees and windbreaks. However, the dynamic interactions between wind and trees are complex issues (Niklas, 1992). Wind velocity has a large spectrum of eddy size and frequency, as well as mean vertical profiles (de Langre, 2008). Most trees also have a branched architecture with different modes of branching (monopodial vs. sympodial) depending on species, up to 11 orders of axes, and reiterated patterns of various sizes and positions (Barthelemy and Caraglio, 2007). A first approach to tackle this complexity is to focus first on the oscillatory elastic behaviour of the structure (for examples in trees, see Sellier et al., 2006; Moore and Maguire, 2008). A few authors have used modal analysis on trees (e.g., Fournier et al., 1993; Sellier et al., 2006; Moore and Maguire, 2008). All have concluded that modes involving significant branch deformation could rank in-between modes deforming mainly the trunk (Fournier et al., 1993; Sellier et al., 2006). Experiments from Moore and Maguire (2005) and Sellier and Fourcaud (2005) confirmed the excitation of several modes in a conifer trees under wind load, with again some of the modes having their deformation mainly located on branches. Although not using modal analysis, James et al. (2006) also showed that the measured frequency spectra of the responses under wind excitation of four trees with different architectures, including conifers, two eucalyptus and a palm tree, were also significantly dependent on the branching system. Moreover, James et al. (2006) and Spatz et al. (2007) argued that such multimodal dynamics including branch deformation could be beneficial to the tree by enhancing aerodynamic dissipation through a mechanism called multiple resonance damping or multiple mass damping.

In a recent paper, Rodriguez et al. (2008) showed that there exist a relation between the architecture of a tree and its modal organization. More specifically, the ratio between frequencies of flexural modes was directly related to the length/diameter allometry and to the ratio between diameters below and above branching. In their paper, this was

validated on frequencies computed from the digitized geometry. Here, we aim at comparing with measured frequencies.

2. Experiments

An experimental investigation of a walnut tree (*Juglans regia* L.) dynamics has been conducted. The investigated walnut tree is an isolated tree. It is 4.2m high and has a 7.7cm diameter at 1.3m high. It also has up to eight orders of branching. Preliminarily to the experiment on the tree dynamics, the geometry of the tree (positions, orientations, diameters of the stem segments, and the topology of branching points) was recorded in great details through 3D magnetic digitizing. During the experiment, an electromagnetic system (3Space Fastrak; Polhemus Inc., Colchester, VT, USA) has been used to record the tree dynamics. It consists in creating a magnetic field, around the tree, in which the 3D positions of magnetic sensors can be tracked. Four sensors were positioned on four successive segments of branches of the tree, starting from the trunk. During experiments, sensors were tracked at 30Hz with 1mm spatial resolution. A sonic anemometer was also installed a few meters from the tree to record the wind velocity. For wind excitation, the spectra from both wind velocity and sensors' signals were computed.



Fig. 1: Walnut tree. Left : general features. Right : digitized geometry. The dots show the position of displacement sensors.

Two types of excitation protocols were applied to experimentally investigate the dynamical characteristics of the walnut tree: i) localized controlled excitations and ii) distributed and wide spectrum excitation through natural wind. Localized excitations were obtained through impacts with pull-release tests with a rope and hammer impact. They were applied to four positions corresponding to each segment bearing a sensor, in two orthogonal directions. Spectral analysis was applied to analyze the response of the walnut to these excitations. Fig 2, 3 and 4 shows typical responses that were measured. The spectra show that frequencies of modes could be well defined.

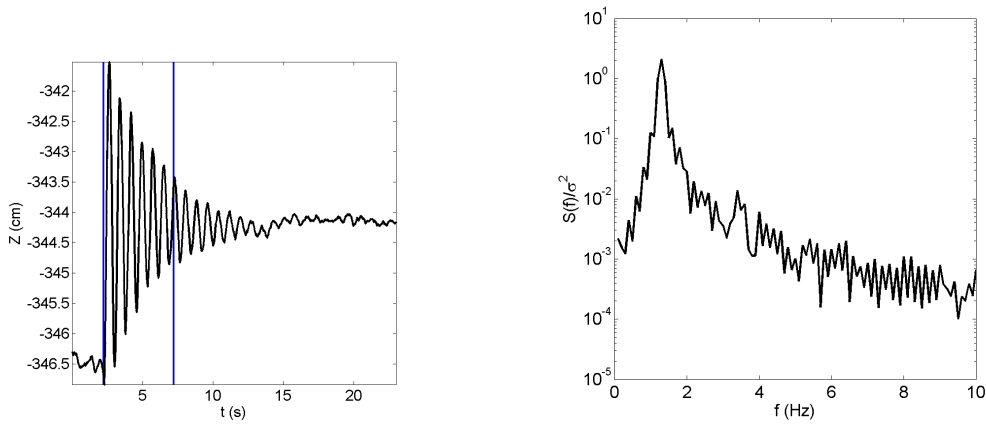


Fig. 2: Pull and release test. Typical results. Left : displacement as a function of time. Right : corresponding spectrum.

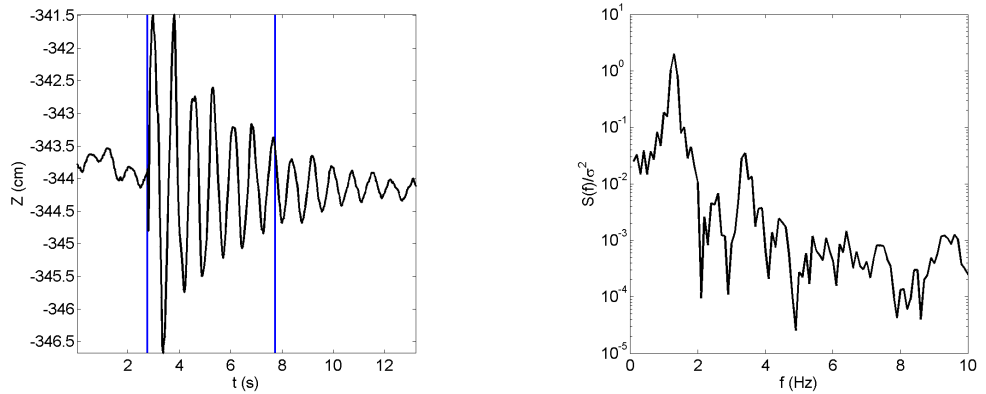


Fig. 3: Hammer impact test. Typical results. Left : displacement as a function of time. Right : corresponding spectrum.

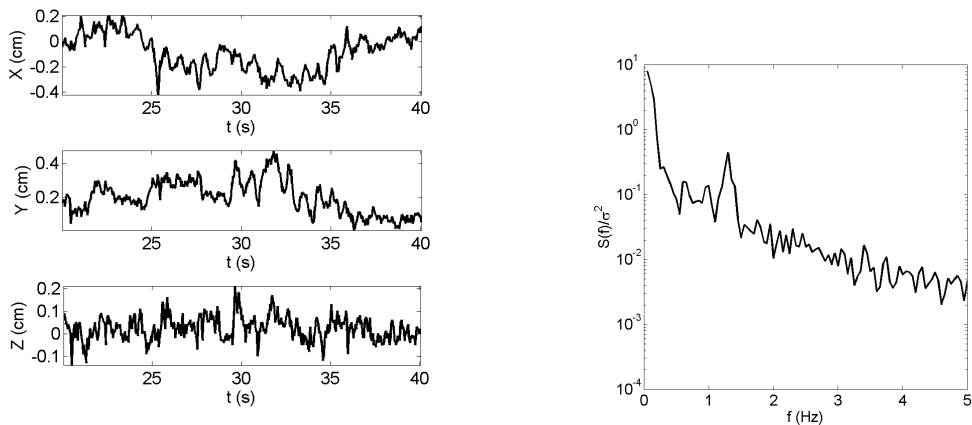


Fig. 4: Response under wind excitation. Left: displacements as a function of time. Right: corresponding spectrum.

3. Comparison with scaling laws

Using data from digitization the relation between length and diameters of segments could be analyzed. Fig 5 shows that a relation $D \approx L^\beta$ with $\beta \approx 0.8$ could be inferred.

Similarly the parameter that relates diameters before and after branching is deduced from digitized data, giving $\lambda \approx 0.3$. These two parameters allow deriving the ratio between frequencies, following the results given in Rodriguez et al. (2008). This is also shown in Fig. 5, in comparison with measured frequencies.

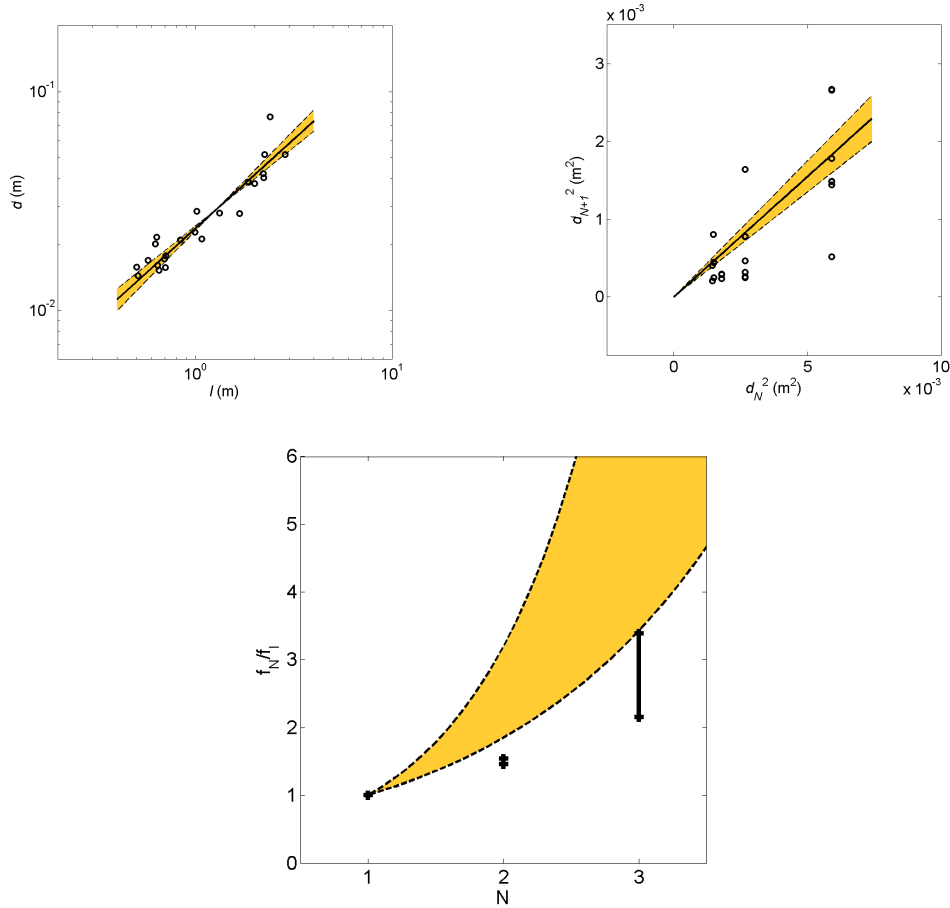


Fig. 5: Comparison between measured frequencies and prediction derived from the allometry of the tree. Top left: Length/diameter allometry. Top right: relation between diameters of successive segments. Bottom: measured frequencies and the range predicted from the data above. The shaded zone shows the 90% confidence intervals .

5. Conclusions

All these results show that it is possible to infer the organization of modes in a given tree from data derived statistically from its geometry. Other results (not presented here for the sake of brevity) show that frequencies computed by finite elements, lead to very similar values. Moreover, detailed results show that the simultaneous use of pull and release tests, hammer impact tests and wind motion test give consistent results.

Acknowledgement

The authors acknowledge the financial support of the French ANR program “Chene-Roseau” number Blanc062-134798, and the joint CNRS-INRA PhD scholarship for the first author. The help of Boris Adam, Nicolas Donès, Pascal Hémon, Stéphane Ploquin in the experiments is acknowledged.

References

- Barthelemy, D., and Y. Caraglio. 2007. Plant architecture: A dynamic, multilevel and comprehensive approach to plant form, structure and ontogeny. *Annals of Botany* 99: 375 – 407.
- Coutand , C., and B. Moulia. 2000. A biomechanical study of the effect of a controlled bending on tomato stem elongation. II. local mechanical analysis and spatial integration of the mechanosensing. *Journal of Experimental Botany* 51: 1825 – 1842.
- De Langre, E. 2008. Effects of wind on plants. *Annual Review of Fluid Mechanics* 40: 141 – 168.
- Fournier, M., P. Rogier, E. Costes, and M. Jaeger. 1993. Modélisation mécanique des vibrations propres d’un arbre soumis aux vents, en fonction de sa morphologie. *Annales des Sciences Forestieres* 50: 401 – 412.
- Fournier, M., A. Stokes, C. Coutand, T. Fourcaud, and B. Moulia. 2005. Tree biomechanics and growth strategies in the context of forest functional ecology. In A. Herrel, T. Speck, and N. Rowe [eds.], *Ecology and biomechanics: A biomechanical approach of the ecology of animals and plants*, 1 – 33. CRC Taylor & Francis, Boca Raton, Florida, USA.
- Gardiner, B. A., and C. P. Quine. 2000. Management of forests to reduce the risk of abiotic damage – A review with particular reference to the effects of strong winds. *Forest Ecology and Management* 135: 261 – 277.
- Gardiner, B. A. 1992. Mathematical modelling of the static and dynamic characteristics of plantation trees. In J. Franke and A. Roeder [eds.], *Mathematical modelling of forest ecosystems*, 40 – 61. Sauerländer, Frankfurt/Main, Germany.
- Gerardin, M., and D. Rixen. 1994. *Mechanical vibrations: Theory and application to structural dynamics*. Wiley, Chichester, UK.
- James, K. R., N. Haritos, and P. K. Ades. 2006. Mechanical stability of trees under dynamic loads. *American Journal of Botany* 93: 1522 – 1530.
- Mayer , H. 1987 . Wind-induced tree sways. *Trees — Structure and Function* 1: 195 – 206.
- McMahon, T. A., and R. E. Kronauer. 1976. Tree structures: Deducing the principle of mechanical design. *Journal of Theoretical Biology* 59: 443 – 466.
- Moore, J. R., and D. A. Maguire. 2005. Natural sway frequencies and damping ratios of trees: influence of crown structure. *Trees-Structure and Function* 19: 363–373
- Moore, J. R., and D. A. Maguire. 2008. Simulating the dynamic behaviour of Douglas-fir trees under applied loads by the finite element method. *Tree Physiology* 28: 75 – 83. .
- Moulia, B., C. Coutand, and C. Lenne. 2006. Posture control and skeletal mechanical acclimation in terrestrial plants: implications for mechanical modeling of plant architecture. *American Journal of Botany* 93: 1477 – 1489.
- Niklas, K. J. 1992. *Plant biomechanics: An engineering approach to plant form and function*. University of Chicago Press, Chicago, Illinois, USA.

- Niklas, K. J. 1994. Plant allometry: The scaling of form and process. University of Chicago Press, Chicago, Illinois, USA.
- Rodriguez, M., E. de Langre, and B. Moulia. 2008. A scaling law for the effects of architecture and allometry on tree vibration modes suggests a biological tuning to modal compartmentalization. *American Journal of Botany* 95: 1523–1537.
- Sellier, D., and T. Fourcaud. 2005. A mechanical analysis of the relationship between free oscillations of *Pinus pinaster* Ait. saplings and their aerial architecture. *Journal of Experimental Botany* 56: 1563–1573.
- Sellier, D., T. Fourcaud, and P. Lac. 2006. A finite element model for investigating effects of aerial architecture on tree oscillations. *Tree Physiology* 26: 799 – 806.
- Sinoquet, H., P. Rivet, and C. Godin. 1997. Assessment of the three dimensional architecture of walnut trees using digitising. *Silva Fennica* 31: 265 – 273.
- Spatz, H.-C., F. Brüchert, and J. Pfisterer. 2007. Multiple resonance damping or how do trees escape dangerously large oscillations? *American Journal of Botany* 94: 1603 – 1611.
- Telewski, F. W. 2006. An unified hypothesis of mechanoperception in plants. *American Journal of Botany* 93: 1466 – 1476

Authors' address:

M Rodriguez (Mathieu.rodriguez@ladhyx.polytechnique.fr)
E. de Langre (delangre@ladhyx.polytechnique.fr)
Department of Mechanics, LadHyX, Ecole Polytechnique-CNRS, 91128 Palaiseau,

B. Moulia (Moulia@clermont.inra.fr)
UMR547 PIAF, INRA, Univ Blaise Pascal,
234, avenue du Brézat 63100 Clermont-Ferrand - France F-63100 Clermont Ferrand

Wind projection basis for real-time animation of trees

Julien Diener¹, Mathieu Rodriguez^{2,3}, Lionel Baboud¹, Lionel Reveret¹

¹ Laboratoire Jean Kuntzmann, INRIA Rhône-Alpes

² Département de mécanique, LadHyX, Ecole Polytechnique-CNRS

³ UMR547 PIAF, INRA, Université Blaise Pascal

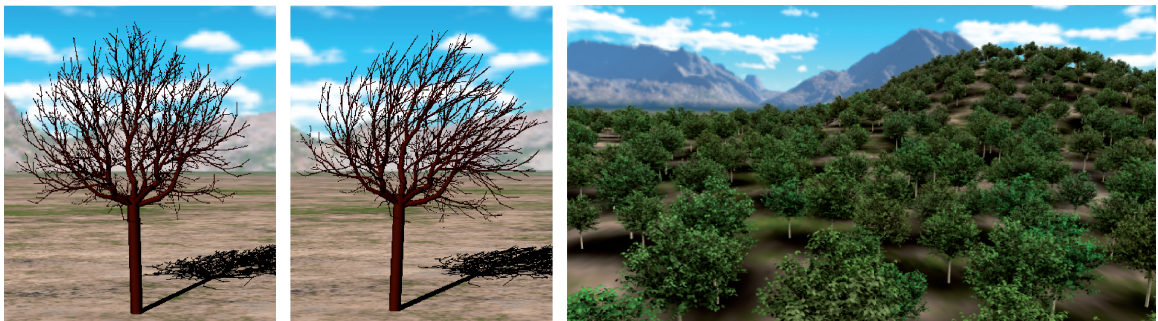


Figure 1: A single tree and a forest animated with our method.

Abstract

This paper presents a real-time method to animate complex scenes of thousands of trees under a user-controllable wind load. Firstly, modal analysis is applied to extract the main modes of deformation from the mechanical model of a 3D tree. The novelty of our contribution is to precompute a new basis of the modal stress of the tree under wind load. At runtime, this basis allows to replace the modal projection of the external forces by a direct mapping for any directional wind. We show that this approach can be efficiently implemented on graphics hardware. This modal animation can be simulated at low computation cost even for large scenes containing thousands of trees.

1. Introduction

Vegetation is an important part of the realistic depiction of natural scenes in a virtual environment. While research in plant modeling has produced impressive results, animation techniques remain of visually poor quality, especially for real-time applications.

The current development of computer hardware allows real-time applications to render natural scenes with high quality geometric details. However, the increase in model complexity also generates the need for suitable animation techniques. As the existing accurate simulation methods are still too computationally expensive, developers usually resort to ad-hoc techniques. Such methods can be satisfying

for simple models such as grass or palm trees, but fails to provide realistic animation of complex branching structures such as standard trees.

Similarly to [Sta97], we rely on a modal analysis to animate 3D models of trees. This technique simulates the deformation of the plant using a precomputed deformation basis. While it provides visually convincing results, it cannot be used in an interactive application as it requires full integration of the dynamic wind forces over the entire plant at runtime. Real-time framerates can be obtained only for very simple models but not for realistically complex trees.

Our contribution is a method that makes the computation of the wind forces integration almost costless and indepen-

dent of the tree complexity. The only remaining computations at runtime consist in the update of the positions of animation control points, defining the skeleton used to animate the rendered geometry. To this end we define a modal projection basis where the influence of directional wind loads can be precomputed off-line.

After introducing modal animation of trees in section 3, we show in section 4 how the wind projection basis is computed and how it is used to avoid the integration of wind forces at runtime. Finally some implementation issues are discussed in section 5. We show that an entire forest containing thousands of trees can be animated in real time using graphics hardware, producing realistic results for both close and distant trees.

2. State of the art

Many models defined for real-time animation of trees use mechanical simplification specifically designed for that purpose. For example, in [OTF*04] and [AK06] the tree dynamics is modeled using the *static response* of each branch segment (*i.e.* which does not consider time integration of the dynamics). However both methods focus instead on the wind formulation. Ota et al. propose a realistic stochastic description. Akagi et al. incorporate the influence of the plant in the computation of the wind flow modeled with the Navier-Stokes equation.

To animate forests in real-time, Di Giacomo et al. [GCF01] also use static response to animate the tree's terminal branches. For the rest of the structure they simulate the dynamics of the rotation angles between branches using an explicit Euler method, in a similar way as Sakaguchi and Ohya in [SO99].

These previous works model the tree's mechanical response expressed in generalized coordinates. However they solve the dynamics locally (*i.e.* segment by segment) and do not fully model the inertia of the subsequent branches that are displaced by a joint's rotation. Simulation techniques of global mechanical structures such as [Bar96] provide correct dynamics without this limitation. Weber [Web08] developed such a simulation method adapted to trees.

For real-time application only little computation time is committed to the animation of vegetation. The use of parallelizable algorithms has become essential. However animation described by generalized coordinates makes the computation of nodes position hierarchically dependent on each other. Weber proposes a scheme to use multithreading, but it is not yet appropriate for highly parallel computing provided by graphics processing unit (GPU).

Data driven methods are interesting alternatives to direct simulation. Diener et al. [DRF06] use video to extract motion data from real plants and reproduce it on virtual models. James et al. in [JF03] and [JTCW07] use precomputed simulation as input to generate realistic response to external im-

pulse and to fluctuating wind respectively. However the main disadvantage of these approaches is the restricted controls at run time.

First introduced to the computer graphic community by Pentland and Williams [PW89], modal analysis has proven to be a powerful basis for the simulation of oscillatory behaviors. It has then been used for many applications such as precomputed response in an animation using graphics hardware [JP02], real-time collision and manipulation [HSO03] and even sound generation [JBPO6].

Modal analysis provides a basis of deformations where all elements of the basis are independent harmonic oscillators. For trees, Shinya and Fournier [SF92] applied this approach to model each of the branches. Stam [Sta97] was the first to use modal decomposition of the entire structure to animate plants. The main idea is to generate a stochastic wind and compute the modal dynamics directly in the frequency domain using the specific response of harmonic oscillators. The goal of this method is to precompute a plant's motion. To use this technique with an interactive wind its modal projection needs to be computed at runtime (see section 4). It would be conceivable on today's graphic hardware but only for coarse tree structures.

Our contribution consists in a method that drastically reduces the computations needed to simulate modal dynamics under controllable wind load. This is done by precomputing a basis of the wind modal projections. Moreover the dynamics is simulated with a computational cost independent of the tree structure complexity and directly proportional to the required quality of the animation. This makes the implementation of level of detail straightforward: the number of animation modes and the subset of tree nodes necessary for rendering can be adjusted freely at runtime.

3. Modal animation framework

In this section, we briefly describe the mechanical model. We introduce modal analysis and explain how it can be used in a real-time animation framework.

Mechanical modeling and modal analysis have been thoroughly studied. We advise interested readers to refer to specialized literature such as [GR94].

3.1. Mechanical model

To solve dynamics over time we resort to numerical simulation applied on a discretized model of a tree obtained using the Finite Element Method (FEM). The principle is to decompose the mechanical system into a set of *elements* separated by *nodes*. The continuous system's deformation is defined as a specific interpolation between nodes displacements.

In our case, as in [Sta97], the system domain Ω is the *lineic* representation of the tree, *i.e.* the set of central axes

of the branches. Then the FEM discretizes Ω as a set of segments Ω^e (see figure 2).

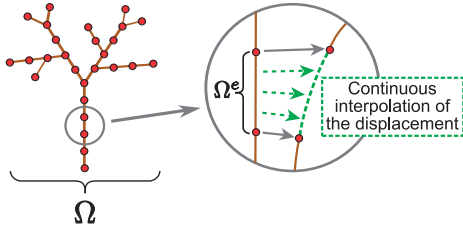


Figure 2: Finite element discretization.

Let $\mathbf{u}(t)$ be the vector containing the displacements of all the nodes at time t . The dynamics of a dissipative system is commonly expressed by the equation of motion:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

where $\mathbf{f}(t)$ is the external force (see section 4), M and K are the mass and stiffness matrices. The commonly accepted model for the damping matrix C is a linear combination of M and K :

$$C = \alpha M + \beta K \quad (2)$$

More details on the finite element representation and the matrices used in equation (1) are given in appendix.

3.2. Modal analysis

Modal analysis is the decomposition of the deformations of a mechanical system into a set of special deformations called *vibration modes*. These modes are the solutions $\mathbf{u}(t)$ of the free vibration equations:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{u}(t) = \lambda_i(t) \cdot \varphi_i \quad (4)$$

where the φ_i are constant vectors called the *modal deformations*, and the $\lambda_i(t)$ are scalar functions of time. Substituting (4) in (3) gives:

$$M^{-1}K\varphi_i = \mu_i\varphi_i \quad \text{with} \quad \mu_i = -\frac{\ddot{\lambda}_i(t)}{\lambda_i(t)} \quad (5)$$

As K , M and φ_i are constants, μ_i are constant scalars.

Finally, the eigenvectors and eigenvalues of $M^{-1}K$ are the solutions of equation (5). Let Φ be the matrix containing all the modal deformations φ_i , and $\mathbf{q}(t)$ the expression of vector $\mathbf{u}(t)$ in eigenspace:

$$\Phi\mathbf{q}(t) = \mathbf{u}(t) \quad (6)$$

Substituting (6) in equation (1) and multiplying on the left by Φ^T , we get:

$$M\ddot{\mathbf{q}}(t) + C\dot{\mathbf{q}}(t) + K\mathbf{q}(t) = \Phi^T\mathbf{f}(t) \quad (7)$$

where $\underline{M} = \Phi^T M \Phi$, $\underline{C} = \Phi^T C \Phi$ and $\underline{K} = \Phi^T K \Phi$. A classical

result of modal analysis is that these matrices are diagonal [GR94]. We can then rewrite equation (7) as $6n$ independent equations such that, for each element q_i of vector \mathbf{q} :

$$\ddot{q}_i(t) + \gamma_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{1}{m_i} f_i(t) \quad (8)$$

$$\text{with} \quad \begin{cases} \omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i} \\ \gamma_i = \alpha + \beta * \omega_i^2 \end{cases} \quad (9)$$

where $f_i(t)$ is the *modal force* induced by the wind (see section 4), ω_i the natural frequency, γ_i the damping coefficient of mode i , m_i and k_i the modal mass and damping respectively (i.e the diagonal elements of \underline{M} and \underline{K}).

3.3. Animation using the modes of deformation

Modal analysis is well suited to our purpose because it extracts the most representative components of the structure deformations. For the case of plants, the vibration modes associated with low frequencies (ω_i) have the most significant (and largely distributed) influence on the final motion (and largely distributed) influence on the final motion [RdLM08]. Typically the first modes (of lower frequencies) are large deformations of the whole tree. Then as the modal frequencies increase, the deformation becomes more and more confined on the last tiny branches (see figure 4). Hence only a small subset of the mode matrix Φ needs to be kept in order to model most of the motion complexity.

Equation (8) means that each mode behaves as a one-dimensional harmonic oscillator (see figure 3). Each vibration mode can be seen as a deformation of the whole structure oscillating independently from the others.

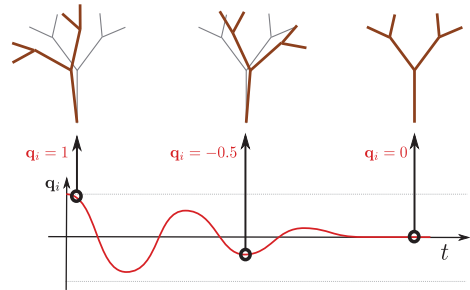


Figure 3: A vibration mode is a deformation of the whole tree behaving as a harmonic oscillator.

At each time step, the simulation of modal animation consists in the following procedure:

1. Compute $f_i(t)$, the modal projection of the wind.
2. Update the dynamics of the modes using the explicit Euler method:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i^{t+\delta t} &\leftarrow f_i(t)/m_i - \gamma_i \dot{q}_i^t - \omega_i^2 q_i^t \\ \dot{q}_i^{t+\delta t} &\leftarrow \dot{q}_i^t + \delta t \ddot{q}_i^{t+\delta t} \\ q_i^{t+\delta t} &\leftarrow q_i^t + \delta t \dot{q}_i^{t+\delta t} \end{aligned}$$

3. Compute the updated displacement:

$$\mathbf{u}^{t+\delta t} = \sum_{\forall i} \hat{q}_i^{t+\delta t} \varphi_i \quad (10)$$

Finally, only the evaluation of the modal forces $f_i(t)$ requires costly computations. This is the main difficulty that our technique proposes to resolve. To this end we now describe a basis that can be computed off-line and avoids costly computations at runtime.

4. Wind projection basis

Integrating a general wind load over the whole tree requires a sum over all the elements (branches) at each time step of the animation (as done by [Sta97]). Doing so prevents real-time animation of sufficiently complex trees. By making the assumption that the wind load is uniform over the whole tree, a projection basis can be precomputed that allows to animate the tree in real-time under the load of any directional wind.

Note that the wind is considered uniform only over each tree but can vary between distinct instances. The speed and direction of the wind are left unconstrained and can be freely controlled at runtime.

We start by modeling the drag load induced by the contact of wind on a rigid structure. As in [SFL06, dL08], we model the wind load on any point $p \in \Omega$ at time t by:

$$\mathbf{f}(p, t) = \frac{1}{2} \rho C_D D(p) \|\mathbf{v}(p, t) - \dot{p}\| (\mathbf{v}(p, t) - \dot{p}) \quad (11)$$

where $\mathbf{v}(p, t)$ is the wind speed vector and $D(p)$ is the diameter of the branch at point p . The air density ρ and the drag coefficient C_D , depending on the shape of the branches, are constant. We merge them as one scalar factor C .

From this local definition, one can derive the modal wind load for each mode i by modal projection [GR94]:

$$f_i = \int_{\Omega} \mathbf{f}(p) \cdot \varphi_i(p) dp \quad (12)$$

where the time parameter is omitted for clarity and $\varphi_i(p)$ is the vector containing the i^{th} modal deformation at p .

We do not take into account the influence of leaves and the direction of branches in equation (11). The drag of a single leaf is a complex phenomenon still not well understood. We observed that taking it into account using an isotropic drag model (that can be seen as a statistical mean) does not have a significant influence on the modal decomposition. Thus we decided to omit it in our computations. For branches, wind forces should be projected taking into account branches directions. Because the modes with low frequency are mostly perpendicular to the branches, the modal projection (the dot product of \mathbf{f} and φ in equation (12)) has a similar effect.

In the case of a freely defined finite element discretization, equation (12) is computed as the sum of the elements

contribution:

$$f_i = \sum_e \int_{\Omega_e} \mathbf{f}(p) \cdot R^e N^e(p) \varphi_i^e dp \quad (13)$$

where R^e is the rotation matrix mapping the local frame of the element e to the global frame. φ_i^e is the vector containing the i^{th} modal deformation of both element's border nodes (in the local frame) and $N^e(p)$ is the *shape function matrix* defining the interpolation between these nodes (see appendix).

To compute the modal forces, equation (12) can be discretized over the nodes of the FEM (in the frequency domain) as in [Sta97]:

$$\hat{f}_i = \sum_{n \in \Omega} \hat{f}(n) \cdot \varphi_i(n)$$

For simple structure it is a suitable approach but for complex trees such a modal projection it would be prohibitive. Using a simplified structure is not a solution as it would result in a poor approximation of the effective modal stress.

In our method, to reduce the cost of the modal projection of the wind forces at runtime, we focus on extracting the time dependent parameters out of the integral. The remaining part is then precomputed.

The first simplification is to consider R^e as a constant: the wind load is computed on the tree in its rest position. The orientation changes of the branches is not significant as they remain small for natural trees motion. Compensatory models were tested but did not bring noticeable improvement. With this approximation, the modal deformation term is constant and only the wind force depends on time. To extract runtime parameters, we assume a wind model such that:

1. From the wind force, we only keep the *mean aerodynamic stress*:

$$\mathbf{f}(p) = C D(p) \|\mathbf{v}(p, t)\| \mathbf{v}(p, t)$$

The remaining part of the external force, called the *aerodynamic damping*, can be compensated by an increase of the damping coefficients α and β from equation (2).

2. The wind has a spatially uniform speed $\mathbf{v}(t)$ over a single tree.

Using these simplifications, equation (12) becomes:

$$f_i = \int_{\Omega} C D(p) \|\mathbf{v}(t)\| \mathbf{v}(t) \cdot \varphi_i(p) dp \quad (14)$$

$$= C \|\mathbf{v}(t)\| \mathbf{v}(t) \cdot \int_{\Omega} D(p) \varphi_i(p) dp \quad (15)$$

It results that if we precompute the wind projection vectors p_i defined as:

$$p_i = C \int_{\Omega} D(p) \varphi_i(p) dp$$

then the modal wind load can be easily computed at runtime using:

$$f_i = \|\mathbf{v}(t)\| \mathbf{v}(t) \cdot p_i \quad (16)$$

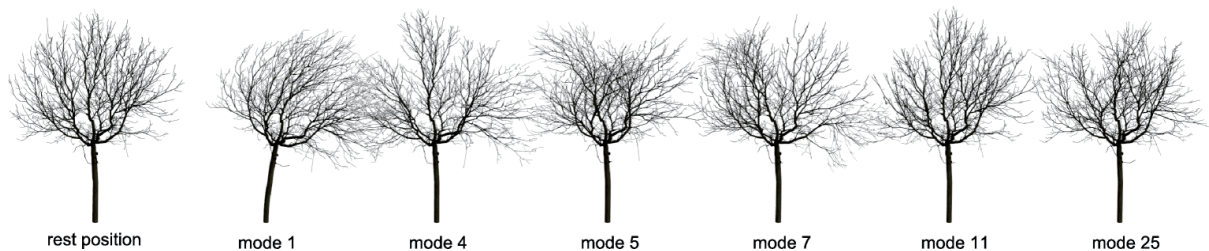


Figure 4: The modes of deformation for the walnut model. During animation the final displacement of a tree is a combination of its modal deformations. The modes are sorted in ascending order of their natural frequencies.

5. Implementation issues

Mechanical modeling, modal analysis and precomputation of the projection basis require the use of complex algorithms that must be performed using specialized tools. We used the software Cast3m 2000 [CAS] specialized in the study of mechanical structures using the finite element method.

5.1. GPU implementation

A powerful aspect of the modal representation is that most computations are completely independent. It thus allows to take full advantage of the massive parallel computing power offered by present graphics hardware (GPU). This enables us to animate large forest scenes in real time (see section 6).

The two main parameters of our tree model are the number of nodes of the skeleton and the number of modes kept for animation.

1. As can be seen in equation (10) the updated position of each node can be computed independently from the others using only the dynamic modal state (q_i). Thus the nodes positions can be stored in a texture in GPU memory (matrix \mathcal{U} of figure 5) and updated using a fragment program and an offscreen buffer. Animating the tree mesh can then be done by reading this texture in a dedicated vertex program. Any level-of-detail rendering model using a (possibly time-varying) subset of the animation nodes can be used, without the need to update the remaining unused nodes.
2. Adjusting the number of modes used for the computation of updated nodes positions gives a handful tradeoff between animation quality and framerate. For distant views of forests only the first few modes needs to be kept, while adding more modes at close range adds detail to the animation. As for the nodes, each modal state (q_i, \dot{q}_i) can be updated independently from the others, they are stored in a texture in GPU memory (matrix \mathcal{Q} of figure 5), and updated by a dedicated fragment shader.

The overall animation process can be summarized in three main steps (see figure 5).

1. Update of the modal state for each mode of each tree

(item 1 and 2 of section 3.3). It requires to compute the local wind speed for each tree instance.

2. Deformation of the skeletons from the rest position (item 3 of section 3.3)
3. Rendering each tree with deformed geometry using skinning on the animated skeleton.

5.2. Error correction

Modal deformation being a linear approximation of the displacement of the branches nodes, it is mostly adapted for low amplitude motion. Notably, branches lengths are not kept constant when submitted to strong wind. We cannot rely on using rotating branches (like in [Zio07]) as it would break parallelism between nodes computations and does not extend to complex structures. This classical issue of modal analysis could be addressed by modal warping [CK05]. In our specific case of tree animation we observed that when a single mode i is selected, the corrected displacement of each node n lies on a smooth trajectory (see figure 6) which can be faithfully approximated by a quadratic curve \mathbf{u} after a non linear reparameterization s :

$$\mathbf{u}(q) = s \cdot \mathbf{v} + s^2 \cdot \mathbf{w} \quad \text{with} \quad s = a \arctan(b \cdot q) \quad (17)$$

Our error correction consists in replacing equation (10) by:

$$\mathbf{u}_n = \sum_i s_{i,n} \cdot \mathbf{v}_{i,n} + (s_{i,n})^2 \cdot \mathbf{w}_{i,n} \quad (18)$$

$$\text{with} \quad s_{i,n} = a_{i,n} \arctan(b_{i,n} \cdot q_i) \quad (19)$$

Vectors $\mathbf{v}_{i,n}$, $\mathbf{w}_{i,n}$ and scalars $a_{i,n}$, $b_{i,n}$ are stored in matrix Φ (figure 5) instead of the displacement vectors (roughly doubling its size). They are optimized using uniformly sampled deformations, corrected by pulling each node towards its parent to match initial branches lengths, in a depth-first fashion. The results show that this approach yields a sufficiently good correction for branches lengths to allow the application of a strong wind load.

6. Results

We tested our technique on various models on an Intel Xeon 3.2 GHz with a GeForce 8800 GTS. The following results

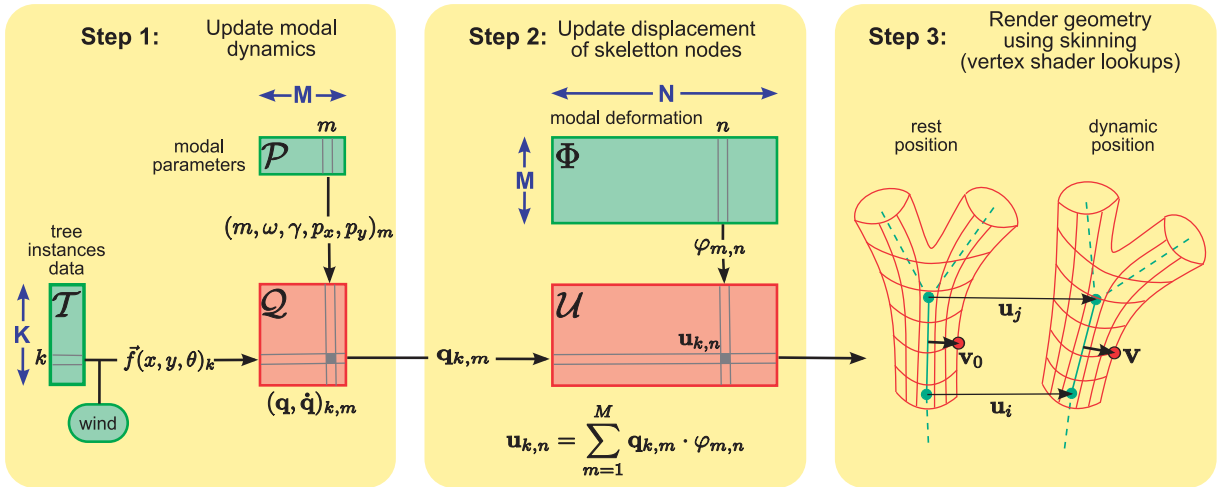


Figure 5: Computation steps of the animation framework. K is the number of tree instances, M the number of modes used for the animation and N the number of control points of the skeleton. The colored rectangles represent textures stored in GPU memory. The input matrices \mathcal{T} , \mathcal{P} , Φ are constant while the matrices \mathcal{Q} , \mathcal{U} store the dynamic variables. \mathcal{T} contains the tree instance data (position, orientation); \mathcal{P} contains the modal parameters used to compute the dynamics; Φ contains the modal deformations of the skeleton control points; \mathcal{Q} contains the modal states (q_i, \dot{q}_i); \mathcal{U} contains the skeleton's node displacements. Several representations can be used for the wind such as a procedural equation or an animated flow field.



Figure 6: Correct trajectories obtained by selecting each mode successively (one color per mode). These trajectories can be faithfully approximated by second degree polynomial curves.

were obtained on a walnut tree digitized from precise measurements on a real tree (from [SRG97], see figure 8), with 25 modes. The accompanying video involves this model and an oak model with 50 modes generated using [RLP07] (see figure 7). It demonstrates the resulting realism and some of the possibilities offered by the presented technique.



Figure 7: The oak tree model.

Our implementation can animate and render over 4000 trees while maintaining real-time framerates (30 Hz minimum). For the walnut tree with 3437 nodes, the undecimated version of the mesh is made of approximately 120000 vertices while the most decimated level of details only uses 300 vertices. Note that our LOD implementation is unsophisticated and could be much more optimized. The only significant data stored in GPU memory is the nodes displacements texture (array \mathcal{U} in figure 5) whose size is $K \times N$ (e.g. 10 Mb for 1000 trees with 3000 control points each).

Tables 1 and 2 show that it is always possible to reach high framerates by making a tradeoff between the number of trees and the animation level of detail (*i.e.* the number of nodes and the number of modes).

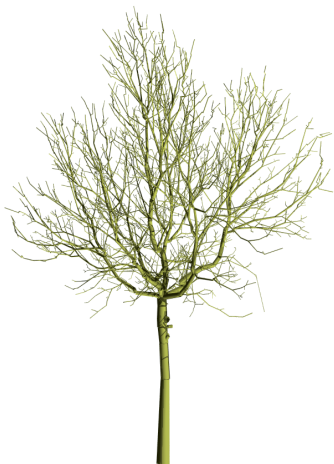


Figure 8: Digitalized walnut tree.

K \ N	20	100	500	1000	2000	8000
100				712	385	103
1000		690	169	87	43	11
8000	426	102	21	11		

Table 1: Influence of the number of trees (K) and the number of nodes (N) on animation framerates (in Hz), with 25 modes and rendering deactivated.

M \ K	500	1000	2000	4000
5	73	39	19	10
15	57	29	14	7
25	43	22	11	6

Table 2: Influence of the number of modes (M) and the number of trees (K) on the framerate (in Hz). The model has 3437 nodes and approximately twice as much vertices, and the LOD system is deactivated to ease interpretation (i.e. every node is always updated).

7. Limitations and future work

As explained in section 3.3, the omission of the vibration modes with highest frequencies strongly reduces the computational cost of simulation but also removes the high frequency motion of tiny branches and leaves. However this can be replaced by using techniques such as [OTF*04] for close view and animated textures for distant views. In our implementation, the leaves rigidly follow the nodes they are attached to. But the complexity of branches animation already provides a very convincing motion.

Mathematically, the main limitation of our method is the assumption that the wind is spatially uniform over each tree.

In particular the attenuation of the wind by the tree is not taken into account (i.e. the branches in the 'back' of the tree should receive less wind). It does not lower visual realism as the modal dynamics keeps natural oscillatory behaviours. However precomputing a more expressive basis would allow to increase animation precision.

Finally the parallelism of the method coupled with efficient GPU programming enables the animation of thousands of trees. A more aggressive level-of-detail scheme would allow real-time rendering of even larger forest scenes.

8. Conclusion and acknowledgement

We showed a new approach to compute the modal projection of the wind load allowing a drastic reduction of computations at runtime. To this end, we introduce a precomputed basis for the projections of interactive directional wind in a modal animation framework.

Our implementation shows that it is possible to efficiently animate and render thousands of trees. We think the presented technique is perfectly adapted to real-time applications such as computer games or simulators.

This work has been supported by the ANR grant Chêne-Roseau. We would like to thank Adam Runions for providing us many high quality tree models.

Appendix

In the lineic representation of the tree, each element is defined in its local frame where the x-axis is in the direction of the segment at rest. The deformation of an element is the interpolation of its border nodes displacement: linear for the main axis and Hermitian for the y and z axis.

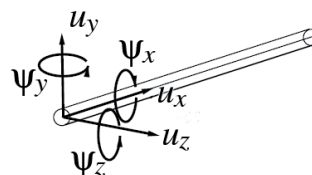


Figure 9: The six degrees of freedom of a node (figure taken from [Sta97]).

A node has thus six degrees of freedom (see fig. 9): the three spatial displacements (u_x , u_y , u_z), the torsion around the main axis (ψ_x) and the derivatives ψ_y and ψ_z defined by [GR94]:

$$\psi_y = -\frac{du_z}{dx} \quad \text{and} \quad \psi_z = \frac{du_y}{dx}$$

This interpolation is defined such that, at time t , the displacement $\delta_p(t)$ of any point $p \in \Omega^e$ is:

$$\delta_p(t) = N^e(p)\mathbf{u}^e(t) \quad (20)$$

where $\mathbf{u}^e(t)$ is the 12-dimensional vector containing the displacements of the two element's border nodes, and $N(p)$ the shape function matrix is:

$$N^e(p) = \begin{pmatrix} l_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & l_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & h_1 & \cdot & \cdot & \cdot & h_2 & \cdot & h_3 & \cdot & \cdot & \cdot & h_4 \\ \cdot & \cdot & h_1 & \cdot & h_2 & \cdot & \cdot & h_3 & \cdot & h_4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & l_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & l_2 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

where the dots represent zeros, l_1 and l_2 are the coefficients of a linear interpolation and the h_i are the cubic Hermite basis functions.

In accordance with most models of trees, branches are modeled as cylindrical beams [SFL06]. The local stiffness K^e and mass M^e matrix are defined as the discretization of the potential energy v and kinetic energy τ of an element of length l [GR94]:

$$v = \frac{1}{2} \int_0^l EA(\delta u_x)^2 + EI((\delta^2 u_y)^2 + (\delta^2 u_z)^2) + GJ(\delta \psi_x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{u}^e T K^e \mathbf{u}^e$$

$$\tau = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2) + \rho J \dot{\psi}_x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^e T M^e \dot{\mathbf{u}}^e$$

Here the dot notation refers to time derivatives and $\delta = \frac{d}{dx}$.

In our implementation, we typically use the following values: $E = 10^{10} Pa$, $G = 2.6E$, $\rho = 10^3 kg.m^{-3}$. From the beam model used, we have $I = \pi r^4/16$, $J = \sqrt{2}I$, $A = \pi r^2$ where r is the average radius of the element.

These local matrices are then transformed to express the energies in function of the nodes displacements defined in the global frame of the tree. Finally, they are assembled together in the global matrices M and K of equation (1). A description of this procedure has been given by [Sta97] or can be found in specialized literature such as [GR94].

References

[AK06] AKAGI Y., KITAJIMA K.: Computer animation of swaying trees based on physical simulation. *Computers & Graphics* 30, 4 (2006), 529–539.

[Bar96] BARAFF D.: Linear-time dynamics using lagrange multipliers. In *SIGGRAPH '96: Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (1996), pp. 137–146.

[CAS] Cast3m 2000. <http://www-cast3m.cea.fr/>.

[CK05] CHOI M. G., KO H.-S.: Modal warping: Real-time simulation of large rotational deformation and manipulation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 11, 1 (2005), 91–101.

[dL08] DE LANGRE E.: Effects of wind on plants. *Annual Review of Fluid Mechanics* 40 (2008), 141–168.

[DRF06] DIENER J., REVÉRET L., FIUME E.: Hierarchical retargetting of 2D motion fields to the animation of 3D plant models. In *Symposium on Computer Animation, SCA 06, September, 2006* (Sept. 2006), ACM-Siggraph/Eurographics, pp. 187–195.

[GCF01] GIACOMO T. D., CAPO S., FAURE F.: An interactive forest. In *Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation (EGCAS)* (2001), Springer, pp. 65–74.

[GR94] GÉRADIN M., RIXEN D.: *Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics*. 1994.

[HSO03] HAUSER K. K., SHEN C., O'BRIEN J. F.: Interactive deformation using modal analysis with constraints. In *Graphics Interface* (2003), pp. 247–256.

[JBP06] JAMES D. L., BARBIČ J., PAI D. K.: Precomputed acoustic transfer: Output-sensitive, accurate sound generation for geometrically complex vibration sources. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH 2006)* 25, 3 (Aug. 2006).

[JF03] JAMES D. L., FATAHALIAN K.: Precomputing interactive dynamic deformable scenes. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH 2003)* 22, 3 (July 2003), 879–887.

[JP02] JAMES D. L., PAI D. K.: Dyr: dynamic response textures for real time deformation simulation with graphics hardware. In *SIGGRAPH '02: Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (2002), pp. 582–585.

[JTCW07] JAMES D. L., TWIGG C. D., COVE A., WANG R. Y.: Mesh ensemble motion graphs: Data-driven mesh animation with constraints. *ACM Transansaction Graphics* 26, 4 (2007).

[OTF*04] OTA S., TAMURA M., FUJIMOTO T., MURAOKA K., CHIBA N.: A hybrid method for real-time animation of trees swaying in wind fields. *The Visual Computer* 20 (2004), 613–623(11).

[PW89] PENTLAND A., WILLIAMS J.: Good vibrations: modal dynamics for graphics and animation. *ACM Transactions on Graphics, Proceedings of the SIGGRAPH conference 23*, 3 (1989), 207–214.

[RdLM08] RODRIGUEZ M., DE LANGRE E., MOULIA B.: A scaling law for the effects of architecture and allometry on tree vibration modes. *Accepted in American Journal of Botany* (2008).

[RLP07] RUNIONS A., LANE B., PRUSINKIEWICZ P.: Modeling Trees with a Space Colonization Algorithm. Ebert D., Merillou S., (Eds.), Eurographics Association, pp. 63–70.

[SF92] SHINYA M., FOURNIER A.: Stochastic motion-motion under the influence of wind. *Comput. Graph. Forum* 11, 3 (1992), 119–128.

[SFL06] SELLIER D., FOURCAUD T., LAC P.: A finite element model for investigating effects of aerial architecture on tree oscillations. *Tree Physiology* 26 (2006), 799–806.

[SO99] SAKAGUCHI T., OHYA J.: Modeling and animation of botanical trees for interactive virtual environments. In *Proceedings of the ACM symposium on Virtual reality software and technology (VRST '99)* (1999), pp. 139–146.

[SRG97] SINOQUET H., RIVET P., GODIN C.: Assessment of the three-dimensional architecture of walnut trees using digitising. *Silva Fennica* 31 (1997), 265–273.

[Sta97] STAM J.: Stochastic dynamics: Simulating the effects of turbulence on flexible structures. *Comput. Graph. Forum* 16, 3 (1997), 159–164.

[Web08] WEBER J. P.: Fast simulation of realistic trees. *IEEE Computer Graphics and Applications* 28, 3 (2008), 67–75.

[Zio07] ZIOMA R.: *Gpu gems 3*. Addison-Wesley Professional, 2007, ch. Gpu-generated procedural wind animations for trees (chapter 6).