Code NS3D stratifié

Ce qui est vraiment calculé...

Equations de départ (approximation de Boussinesq) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\,\vec{\nabla})\,\vec{u} = -\dfrac{1}{\rho_0}\vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} - \dfrac{\rho'}{\rho_0} g\, \vec{e_z} \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{u}\,\vec{\nabla}\rho' + \dfrac{\partial \rho_0}{\partial z} w = \kappa \Delta \rho' \end{cases}$$

avec $\rho = \rho_0(z) + \rho'$, $|\rho'| << |\rho_0|$

Pour passer à ce que calcule le code, il faut poser :

$$P = \frac{p}{\rho_0} \quad , \quad b = rho = -\frac{\rho'}{\frac{\partial \rho_0}{\partial z}} \quad , \quad N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}$$

$$\text{schmidt} = \frac{\nu}{\kappa}$$

Les équations résolues par le code sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\,\vec{\nabla})\,\vec{u} = -\vec{\nabla} P + \nu \Delta \vec{u} - N^2 b\, \vec{e_z} \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} + \vec{u}\,\vec{\nabla} b - w = \dfrac{\nu}{\text{schmidt}} \Delta b \end{cases}$$

De façon plus précise, le code résout les équations de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{u} \wedge \vec{rot}\, \vec{u} - \vec{\nabla}\left(P + \dfrac{1}{2}\vec{u}^2\right) + \nu \Delta \vec{u} - N^2 b\, \vec{e_z} \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} + \vec{u}\,\vec{\nabla} b - w = \dfrac{\nu}{\text{schmidt}} \Delta b \end{cases}$$

Dans l'espace spectral cela donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{\vec{u}}}{\partial t} = \widehat{\vec{u} \wedge \vec{rot}\, \vec{u}} - i\vec{k}\, \widehat{\left(P + \frac{1}{2}\vec{u}^2\right)} - \nu k^2 \hat{u} - N^2 \hat{b}\, \vec{e_z} \\ \vec{k} \cdot \hat{\vec{u}} = 0 \implies \hat{\vec{u}} \text{ est } \perp \vec{k} \\ \dfrac{\partial \hat{b}}{\partial t} + \widehat{\vec{u}\, \vec{\nabla} b} - \hat{w} = - \dfrac{\nu}{\text{schmidt}} k^2 \hat{b} \end{cases}$$

On projette sur le plan $\perp \vec{k}$ la 1ère équation. P est l'opérateur de projection
Pour la 2ème équation, on tient compte du fait que $div(b\vec{u}) = \vec{u}\vec{\nabla} b$
car $div\, \vec{u} = 0$

$$\frac{\partial \hat{\vec{u}}}{\partial t} = P\left(\widehat{\vec{u} \wedge \vec{rot}\, \vec{u}}\right) - \nu k^2 \hat{u} - N^2 \hat{b}\, P(\vec{e_z})$$

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial t} = -i\vec{k} \cdot \widehat{\mathbf{b}\vec{\mathbf{u}}} + \hat{w} - \frac{\nu}{\text{schmidt}} k^2 \hat{b}$$

On intègre exactement les termes de diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{\vec{u}}\, e^{\nu k^2 t}\right) = P\left(\widehat{\vec{u} \wedge \vec{rot}\, \vec{u} - N^2 b\, \vec{e_z}}\right) e^{\nu k^2 t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{b}\, e^{\frac{\nu}{\text{schmidt}} k^2 t}\right) = \left\{ -i\vec{k}\, \widehat{\mathbf{b}\vec{\mathbf{u}}} + \hat{w} \right\} e^{\frac{\nu}{\text{schmidt}} k^2 t}$$

Le schéma d'intégration en temps est un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2.
Par exemple en notant $\hat{\vec{F}} = P\left(\widehat{\vec{u} \wedge \vec{rot}\, \vec{u} - N^2 b\, \vec{e_z}}\right)$, on a :

$$\hat{\vec{u}}_{t+1} = \hat{\vec{u}}_t\, e^{-\nu k^2 dt} + \left[\frac{3}{2} \hat{\vec{F}}_t\, e^{-\nu k^2 dt} - \frac{1}{2} \hat{\vec{F}}_{t-1}\, e^{-2\nu k^2 dt}\right] dt$$

Dans le code on procède à cet avancement en temps en deux étapes :

On calcule d'abord $\hat{\vec{u}}_{t*} = \hat{\vec{u}}_t e^{-\nu k^2 dt} - \frac{1}{2} \hat{\vec{F}}_{t-1} e^{-2\nu k^2 dt} dt$

Puis on détermine $\hat{\vec{F}}_t$ et on calcule

$$\hat{\vec{u}}_{t+1} = \hat{\vec{u}}_{t*} + \frac{3}{2} \hat{\vec{F}}_t e^{-\nu k^2 dt} dt$$

Remarque : vorticité potentielle

$$q = \frac{1}{\rho_0} \left(\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{u} \,.\, \vec{\nabla}\rho \right) = \frac{1}{\rho_0} \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{u} \,.\left(\vec{\nabla}\rho_0 + \vec{\nabla}\rho' \right)$$

$$= \frac{1}{\rho_0} \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{u} \left(\frac{\partial\rho_0}{\partial z} \vec{e_z} + \vec{\nabla}\rho' \right) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\rho_0}{\partial z} \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{u} \,.\left(\vec{e_z} + \frac{\vec{\nabla}\rho'}{\frac{\partial\rho_0}{\partial z}} \right)$$

$$q = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\rho_0}{\partial z} \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{u} \,.\left(+ \vec{\nabla} b - \vec{e_z} \right)$$