

École polytechnique  
Laboratoire d'hydrodynamique

Thèse présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
spécialité : mécanique

par  
Stéphanie Julien

---

*Instabilités secondaires  
dans les sillages plans*

---

soutenue le 16 novembre 2000 devant le jury composé de :

C. Baudet	rapporteur
J.M. Chomaz	directeur de thèse
T. Dauxois	
J.C. Lasheras	
T. Leweke	
M. Provansal	
L. Tuckerman	rapporteur
E. Wesfreid	

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Caractéristiques de l'instabilité primaire liée à la forme du profil de sillage . . . .	4
1.2	Caractérisation de l'instabilité secondaire 3D . . . . .	8
1.2.1	Structure spatiale des modes tridimensionnels . . . . .	8
1.2.2	Sélection des modes . . . . .	11
1.2.3	Sélection de longueur d'ondes . . . . .	12
1.2.4	Mécanismes d'instabilité . . . . .	13
1.3	Objectif de l'étude . . . . .	13
1.4	Organisation du mémoire . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Étude expérimentale d'un sillage de plaque plane</b>	<b>19</b>
2.1	Dispositif expérimental . . . . .	19
2.2	Instrumentation . . . . .	20
2.2.1	Mesure du profil de vitesse . . . . .	20
2.2.2	Visualisations . . . . .	21
2.3	Qualité de l'écoulement . . . . .	22
2.4	Taux de croissance des instabilités primaire et secondaire du sillage . . . . .	28
2.5	Three-dimensional instabilities in plane wake . . . . .	31
2.5.1	Introduction . . . . .	31
2.5.2	Mechanism of the secondary instability . . . . .	32
2.5.3	Experimental set-up . . . . .	34
2.5.4	The close wake . . . . .	43
2.5.5	The far wake . . . . .	51
2.5.6	Nature of the secondary instability . . . . .	56
2.5.7	Discussion and conjecture on the wavelength and mode selection in plane wakes . . . . .	56
2.5.8	Conclusion . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Étude numérique de stabilité temporelle 3D d'un sillage modèle</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	64
3.2	Mallier & Maslowe model . . . . .	66
3.3	Perturbation equation and numerical procedure . . . . .	67
3.4	Results . . . . .	70
3.4.1	Evolution of the growth rate . . . . .	70
3.4.2	Modal structures . . . . .	73
3.5	Conclusion . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Étude de stabilité numérique temporelle 3D du sillage expérimental</b>	<b>89</b>
4.1	État de base . . . . .	94
4.1.1	Méthode numérique . . . . .	95
4.1.2	Résultats . . . . .	96
4.2	Stabilité de l'état de base . . . . .	97
4.2.1	Détermination de la vitesse moyenne de l'écoulement . . . . .	97
4.2.2	Symétries . . . . .	98
4.3	Méthode numérique . . . . .	102
4.3.1	Détermination de la vitesse d'advection du sillage . . . . .	102

4.3.2	Imposition des symétries . . . . .	102
4.3.3	Méthode de Krylov . . . . .	102
4.3.4	Mise en place de la méthode de Krylov . . . . .	102
4.3.5	validation de la méthode . . . . .	105
4.4	Résultats . . . . .	106
4.4.1	courbes de taux de croissance . . . . .	106
4.4.2	structure des modes propres . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>117</b>
<b>6</b>	<b>Bibliographie générale</b>	<b>123</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Dans les milieux naturels, les écoulements d'un fluide peu visqueux tel que l'air ou l'eau sont très souvent turbulents. Ils sont caractérisés par des mouvements de particules fluides très désordonnés dont les échelles s'étendent sur une très large gamme. Pour les comprendre et les décrire, diverses approches directes ou indirectes ont été mises en place.

L'approche la plus directe repose sur l'investigation de l'état turbulent pleinement développé en le traitant avec les outils statistiques, assez lourds à mettre en oeuvre. Une instrumentation sophistiquée est nécessaire pour des études expérimentales. Des hypothèses de fermeture doivent être posées pour la résolution numérique et théorique du système d'équations fondamentales de la dynamique des fluides (équations de Navier-Stokes) qui est complexe et coûteuse compte tenu du nombre d'échelles à résoudre.

Une autre approche, celle que nous avons retenue, consiste à étudier les déstabilisations successives d'un écoulement laminaire c'est à dire étudier le phénomène de transition *laminaire / turbulent*. Lorsqu'on considère un écoulement laminaire régi par les équations de Navier-Stokes et respectant certaines conditions limites, la transition *laminaire/turbulent* est vue comme une cascade de brisures de symétrie menant au mouvement des particules fluides très désordonné. Cette approche présente ainsi l'avantage de considérer des écoulements préservant une certaine cohérence spatiale et temporelle à chaque étape, plus facilement exploitables d'un point de vue expérimental, numérique et théorique.

Les phénomènes physiques à l'origine des déstabilisations successives sont divers. Citons, par exemple, les effets de stratification en densité ou en température particulièrement répandus dans les milieux naturels tels que l'atmosphère, l'océan. Considérons une couche de fluide au repos stratifiée en densité ou en température suivant la direction verticale parallèle à l'accélération de la pesanteur. On se place dans le cas où les gradients verticaux induits par la stratification sont opposés au sens de la pesanteur pris négatif. Une portion de fluide déplacée positivement par rapport à sa position d'équilibre subira dans ce contexte une force (la force d'Archimède) de même sens qui l'éloignera encore plus. Cette situation est instable et mène à l'apparition de mouvements de convection.

L'écoulement qui servira de point de départ à notre étude est le fruit d'un autre type d'instabilité, l'instabilité de Kelvin-Helmoltz qui est engendrée par un cisaillement de vitesse imposé au fluide. On entend ici par cisaillement une variation verticale du module de la vitesse. Le mécanisme physique de cette instabilité peut être décrit de la façon suivante. Considérons deux fluides en contact de même densité et de vitesses opposées (schéma 1.1). Plaçons nous dans le référentiel où le profil de vitesse est symétrique et cherchons sous quelle condition une perturbation symétrique peut déstabiliser l'écoulement. Perturbons sinusoidalement l'interface. Elle induit une contraction des lignes de courant au dessus des crêtes et une dilatation au dessous.

Le fluide supérieur est donc accéléré et subit d'après l'équation de Bernouilli une diminution de pression alors que le fluide inférieur est ralenti et en surpression. Cette différence de pression tend à accentuer la déformation (cf les signes de P sur le schéma 1.1). Cet écoulement est donc instable et mène à la formation de tourbillons bidimensionnels (2D) transverses à l'écoulement [selon (Oz)].

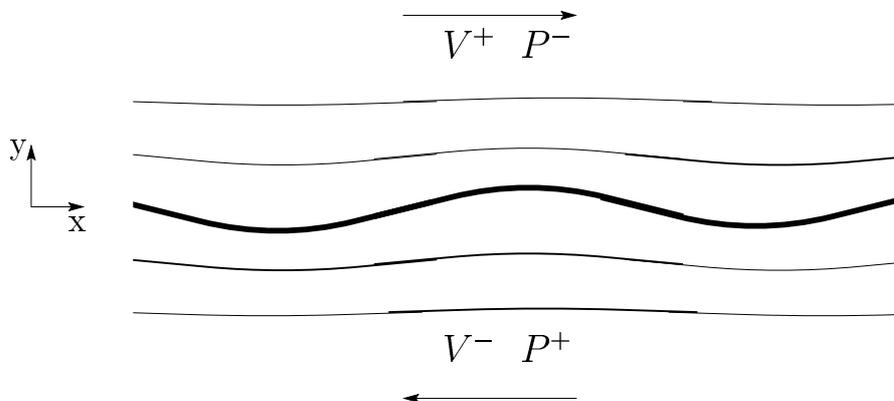


Figure 1.1: Principe de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz.

Dans le cadre de la théorie linéaire de l'instabilité d'écoulements parallèles en fluide parfait, il a été montré qu'un profil de cisaillement est instable vis à vis de perturbations bidimensionnelles (2D) lorsqu'il présente un point d'inflexion (théorème de Squire [1], critère de Rayleigh [2]).

Le sillage, sujet de notre étude, est un prototype des écoulements cisailés. Son profil de vitesse symétrique présente deux points d'inflexion (cf schéma 1.2). La dynamique de l'écoulement résultant de cette instabilité de Kelvin-Helmoltz se caractérise par l'émission et l'advection de structures tourbillonnaires 2D qui s'organisent en deux rangées de tourbillons de signe contraire décalés périodiquement d'une demi-longueur d'onde  $\lambda_{2D}/2$ , l'allée de von Kármán (voir figure 1.3, 1.4-c).

Dans la vision de la transition *laminaire/turbulent*, cette instabilité dite primaire correspond à la brisure de l'invariance spatiale. L'étude présentée dans ce mémoire porte sur la seconde transition de cet écoulement qui conduit généralement à la brisure de l'invariance spatiale selon (Oz), l'invariance par translation dans le temps est préservée pour les modes non propagatifs. Notre écoulement de base est l'allée de von Kármán et nous abordons les instabilités tridimensionnelles (3D), dites secondaires 3D, qu'elle peut développer.

Cependant, avant de présenter une revue des connaissances de ces instabilités secondaires 3D, nous allons préciser certaines propriétés de l'instabilité primaire qui nous seront utiles par la suite.

## 1.1 Caractéristiques de l'instabilité primaire liée à la forme du profil de sillage

Il est important de faire la distinction entre les deux types de profils de sillage présentés sur le schéma 1.2 : le premier schéma figure 1.2-a possède une seule échelle de longueur notée  $\delta_\omega$  alors que le second schéma 1.2-b est caractérisé par deux échelles D et  $\delta_\omega$ . Ces longueurs seront par la suite liées à des grandeurs physiques. L'instabilité primaire de ces profils distincts donne lieu à des allées de tourbillons alternés via le processus de Kelvin-Helmoltz mais leur comportement

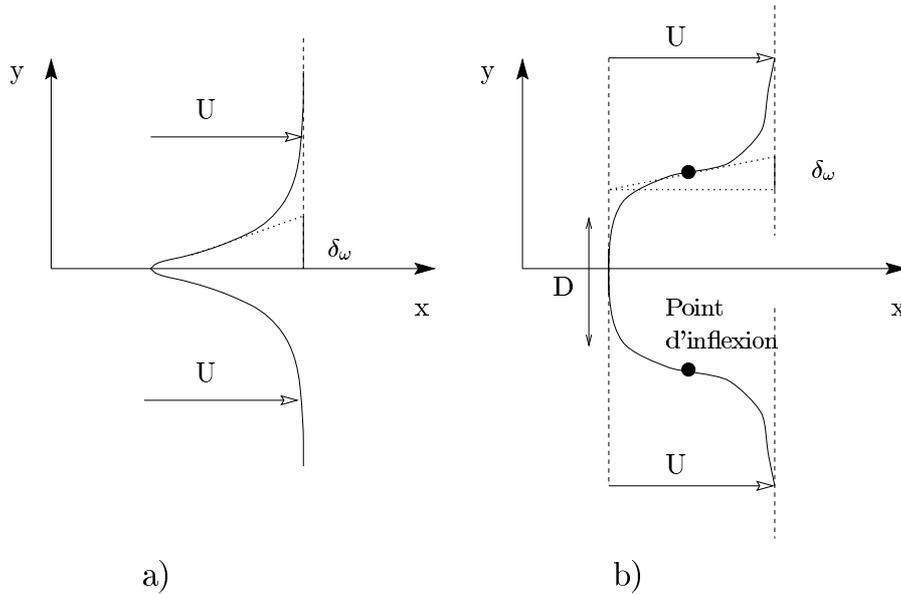


Figure 1.2: Profil de vitesse de sillage. a) configuration plaque plane. b) configuration cylindre.

dynamique et leurs propriétés spatiales diffèrent.

A cet effet, il est nécessaire dans un premier temps de préciser les concepts d'instabilité *locale/globale* et *convective/absolue*.

Considérons un écoulement non uniforme dans la direction de l'écoulement : il évolue lorsqu'on se déplace dans le sens de l'écoulement. On se restreint au cas où les variations du profil moyen de sillage sont faibles comparées à la longueur d'onde caractéristique de l'instabilité qui se développe. Dans ce cadre, les notions de *local* et *global* se réfèrent respectivement à une instabilité du profil local de vitesse et à une instabilité du champ de vitesses complet. La notion *local* correspond à un écoulement fictif où le profil de vitesse en  $x$  a été étendu à l'infini. Dans le cadre de la description locale, on peut caractériser la réponse de perturbations impulsives dans l'approximation d'écoulement parallèle dans chaque section longitudinale. Si une perturbation localisée se développe en amont et en aval de son point d'émission alors le profil de vitesse est dit localement *instable absolu*. Si par contre, la perturbation est advectée vers l'aval, le profil de vitesse est dit localement *instable convectif*.

Ces différentes notions permettent de classer différemment les instabilités primaires des deux profils de sillage présentés schéma 1.2-a-b.

#### SILLAGE DE PLAQUE PLANE DE TRÈS FAIBLE ÉPAISSEUR

Expérimentalement, le profil de sillage figure 1.2-a peut être obtenu en plaçant une plaque plane de très faible épaisseur sans incidence dans un écoulement de vitesse uniforme  $U$ , figure 1.3.

Le profil de vitesse de ce sillage à proximité de la plaque plane est vu comme une extension des couches limites qui se développent de part et d'autre du corps profilé sans s'en détacher [Goldstein [3] (1930)] : le profil de couche limite (solution de Blasius) valable sur la totalité de

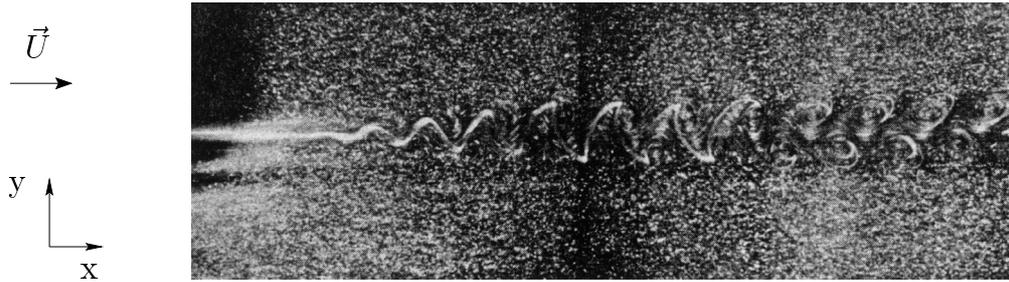


Figure 1.3: Sillage de plaque plane sans incidence.

l'obstacle s'ajuste à un profil de sillage de gradient de pression nul sur la ligne "centrale", ligne horizontale en continuité du bord de fuite de l'obstacle. Son échelle caractéristique est liée à l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  atteinte au bord de fuite de la plaque. Goldstein a montré que lorsque  $x \rightarrow 0$ ,  $x$  étant la distance à la plaque, il existe une sous-couche visqueuse d'épaisseur  $(x/\delta)^{1/3}$  qui assure le passage continu entre la solution de Blasius valable de part et d'autre de la plaque et le profil de sillage. L'échelle de longueur que l'on utilisera pour caractériser ce profil est l'épaisseur de vortacité  $\delta_\omega$ , échelle liée à  $\delta$ .

Ce premier type de profil de sillage, encore appelé sillage plan, se rapproche d'un profil de couche de mélange (cf schéma 1.2). Une revue détaillée de ce type d'écoulement a été effectuée en 1984 par Ho & Huerre [4]. Dans ce bilan, les auteurs définissent un paramètre  $R = \Delta U / 2\bar{U}$ ,  $\Delta U$  donnant une mesure du cisaillement et  $\bar{U}$  la vitesse moyenne d'advection des structures 2D. Lorsque  $R \ll 1$ , condition vérifiée dans le cas du sillage plan, les effets de l'advection moyenne  $\bar{U}$  dominent les effets de cisaillement  $\Delta U$ . Par conséquent, le développement des structures tourbillonnaires 2D dans ce type de sillage est très lent.

Dans le cadre de la théorie locale quasi-parallèle, ce profil est localement *instable convectif* (Ho & Huerre [4]). L'écoulement qu'il génère a une dynamique extrinsèque, c'est-à-dire que le développement des structures tourbillonnaires bidimensionnelles instationnaires dépend de toutes les perturbations extérieures, qu'elles soient naturelles, propres au dispositif expérimental, ou imposées par un forçage. Ce type de sillage agit comme un amplificateur de bruit. Lorsqu'il n'est pas volontairement forcé, la bande de fréquence amplifiée donnant lieu au développement de l'allée est large et présente un maximum  $f_n$  qui vérifie  $St_n = (f_n \delta_\omega) / \bar{U} = 0.03$ ,  $St_n$  désignant le nombre de Strouhal.

#### SILLAGE DE CYLINDRE

Ce second type de sillage peut être obtenu en plongeant un cylindre dans un écoulement uniforme horizontal de vitesse  $\mathbf{U}$ , une configuration d'écoulement particulièrement étudiée. Les deux épaisseurs caractéristiques sont ici définies par le diamètre  $D$  du cylindre et par l'épaisseur de cisaillement (mesurée par exemple par l'épaisseur de vortacité  $\delta_\omega$  définie sur le schéma 1.2-b).

La forme du profil, sa raideur  $\delta_\omega/D$  ainsi que le développement de l'allée de tourbillons à l'aval du cylindre dépend du nombre de Reynolds  $Re$  basé sur le diamètre et sur la vitesse du fluide incident,  $Re = UD/\nu$ . Pour des nombres de Reynolds très faibles, le fluide contourne le cylindre sans s'en détacher (figure 1.4-a). Au delà d'un Reynolds de l'ordre de 4, les "couches limite"

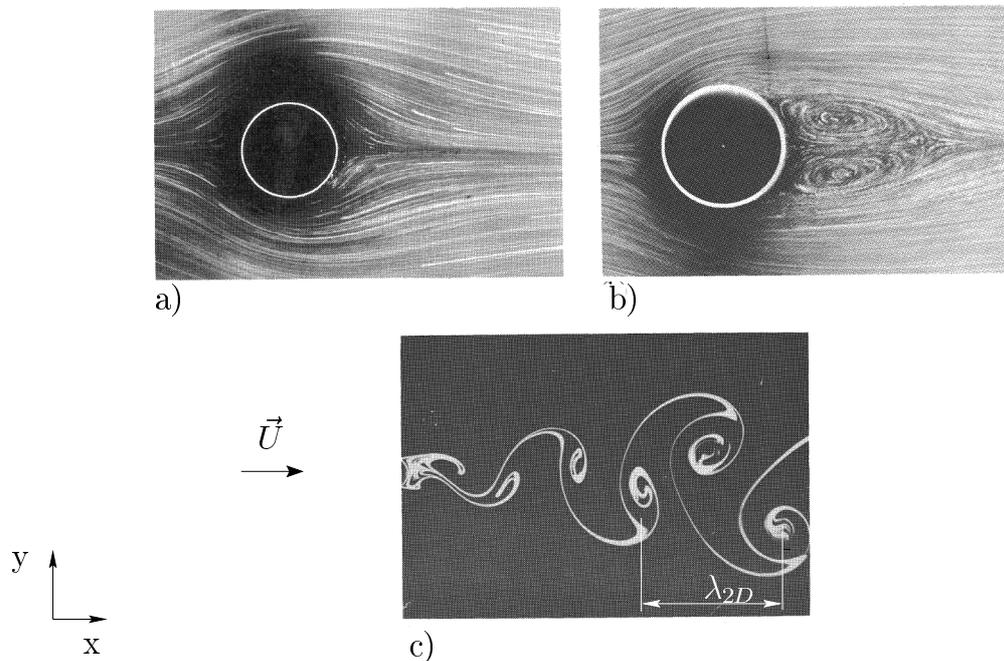


Figure 1.4: Écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds : a)  $Re = 0.16$  b)  $Re = 26$  c)  $Re = 200$ .

se formant de part et d'autre du cylindre se détachent du corps en deux points (figure 1.4-b). La forte dépression qui résulte de ce décollement engendre la formation d'une zone de recirculation composée de deux tourbillons contra-rotatifs attachés au cylindre. Parallèlement, cette redistribution de pression induit une forte augmentation du coefficient de traînée. Lorsque le nombre de Reynolds  $Re$  augmente, la taille de cette zone croît mais l'écoulement reste de même nature. La transition vers l'état brisant la symétrie haut/bas et l'invariance temporelle a lieu à la valeur critique  $Re_c = 48.5$ . Les tourbillons de signes contraires à l'aval du cylindre se détachent alternativement à une fréquence bien déterminée et sont emportés par l'écoulement, formant ainsi l'allée dite de von Kármán. La figure 1.7 sur le domaine  $49 \leq Re \leq 190$  présente l'évolution de la fréquence d'émission des tourbillons sous forme adimensionnée ( $St = fD/U$ ) en fonction de  $Re$ .

Cette allée est beaucoup plus inhomogène (non parallèle). Lorsqu'on se déplace dans le sens de l'écoulement selon (Ox), elle s'élargit spatialement dans la direction transverse (Oy) à l'écoulement. En effet, dans le sens des  $x$  croissants, le déficit de vitesse diminue et les deux échelles caractéristiques  $\delta_\omega$  et  $D$  augmentent.

L'analyse locale quasi-parallèle montre que ce type de profil est instable absolu. En 1988 Chomaz *et al.* [5] ont montré que si la zone d'instabilité absolue est suffisamment large, alors l'écoulement peut être globalement instable et avoir une dynamique intrinsèque. Provansal *et al* [6] (1987) ont montré expérimentalement en 1987 que le seuil de cette instabilité qui brise l'invariance temporelle est la manifestation d'une bifurcation de Hopf et que l'écoulement est un système dynamique décrit par l'équation de Stuart-Landau. La formation et l'évolution des tourbillons de von Kármán ne reposent pas sur l'amplification spatiale des perturbations imposées mais sur l'amplification temporelle de perturbations initiales. Contrairement au profil considéré précédemment pour lequel la bande de fréquence amplifiée menant à la formation

de l'allée est large, un pic d'énergie est observé à la fréquence fondamentale. Cette fréquence ne fluctue pas selon le niveau (suffisamment faible) et le bruit extérieur relatif au dispositif expérimental. Ce type d'écoulement se comporte comme un oscillateur.

## 1.2 Caractérisation de l'instabilité secondaire 3D

La manifestation d'une instabilité secondaire tridimensionnelle du sillage d'un cylindre a été révélée pour la première fois par Hama [7] en 1957 puis confirmée en 1978 par Gerrard [8]. Hama [7] a observé une ondulation des tourbillons primaires au delà d'un nombre de Reynolds critique modéré et a attribué ce phénomène à une transition de l'écoulement de sillage à la turbulence. Gerrard [8], plus tard, identifie la même ondulation des tourbillons primaires et approfondit l'observation en rapportant l'apparition de "fingers of dye". Ces "doigts de colorant" traduisent en fait la formation de tourbillons secondaires longitudinaux. Cette instabilité secondaire tridimensionnelle est similaire à celles observées dans d'autres types d'écoulements cisailés telle que la couche de mélange [Browand & Troutt [9] (1980), Breidenthal [10] (1981), Jimenez [11] (1980), Bernal & Roshko [12] (1986)] : des paires de tourbillons contra-rotatifs longitudinaux se forment et relient deux tourbillons de Kelvin-Helmoltz consécutifs.

Structurellement, l'écoulement de sillage est plus complexe que la couche de mélange. Il est en effet formé de deux allées de tourbillons contra-rotatifs décalés d'une demi-longueur d'onde. Un tourbillon quelconque d'une allée interagit non seulement avec ses voisins de même signe mais aussi avec les tourbillons de signe opposé de la seconde allée.

Les études expérimentales et numériques menées jusqu'à aujourd'hui sur les instabilités secondaires portent plus particulièrement sur le sillage de cylindre. La structure des modes tridimensionnels a été décrite pour les deux configurations mais la sélection des modes, des longueurs d'ondes et les mécanismes d'instabilités impliqués n'ont été abordés que dans le cas du cylindre.

### 1.2.1 Structure spatiale des modes tridimensionnels

Dans ce paragraphe, nous décrivons tout d'abord la structure spatiale des instabilités secondaires dans le cas plan puis nous les rapprocherons de celles observées dans la configuration du cylindre.

J. Lasheras et E. Meiburg [13] [14] (1988-1990) ont montré expérimentalement et numériquement (simulations de filaments de vorticités) l'existence de deux modes d'instabilité de symétries distinctes et de même périodicité que l'écoulement de base sur un sillage plan. Ils ont aussi identifié le développement de modes sous-harmoniques contribuant à la tridimensionalisation de l'écoulement. Cependant, nous nous sommes restreints dans toute notre étude aux deux modes de même périodicité que l'écoulement de base.

La figure 1.5 présente une vue expérimentale et un schéma descriptif de chacun des modes d'instabilité que l'on nommera symétrique (a-b) et antisymétrique (c-d).

Sur les schémas 1.5-b-d, les tourbillons primaires de l'allée supérieure correspondent aux traits pleins épais orientés selon (Oz) et ceux de l'allée inférieure aux traits pointillés.

Les paires de tourbillons contrarotatifs longitudinaux secondaires (repérés par des traits fins) du mode symétrique (figure 1.5-a-b) restent alignées avec la direction de l'écoulement et sont inégalement espacées le long de la direction transverse (Oz). Dans une même section longitudinale (xy), *leur signe alterne d'une demi-période de l'écoulement de base à l'autre* (indiqué sur les schémas 1.5-b-d par le sens des flèches). D'autre part, une forte déformation des tourbillons primaires a été identifiée [cf 2.8-b, 2.9-b (page 33)] : deux tourbillons consécutifs ondulent en phase dans le plan horizontal (xz) et en opposition de phase dans le plan vertical (zy).

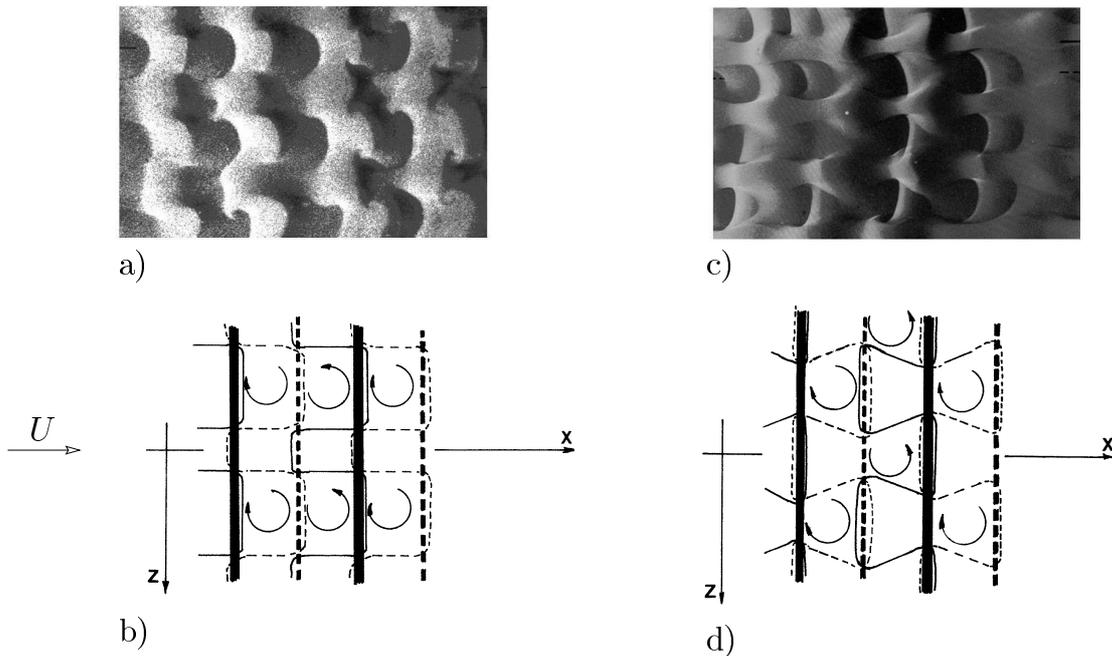


Figure 1.5: modes tridimensionnels du sillage de plaque plane. a)-b) Mode symétrique, c)-d) mode antisymétrique.

Les paires de tourbillons longitudinaux secondaires du mode antisymétrique (figure 1.5-c-d) sont inclinées par rapport à la direction de l'écoulement ( $Ox$ ) et prennent alors une forme de  $\Lambda$ . D'une demi-période de l'écoulement de base à l'autre, les tourbillons longitudinaux gardent le même signe dans une tranche de l'écoulement ( $xy$ ). Deux tourbillons primaires consécutifs ondulent cette fois en opposition de phase dans une coupe horizontale ( $xz$ ) et en phase dans les sections ( $zy$ ) [cf schéma 2.8-a, 2.9-a (page 33)].

L'instabilité secondaire du sillage d'un cylindre [Williamson [15] [16] (1994-1996), Wei & Smith [17] (1986), M. Thompson *et al.* [18] (1994)] conduit elle aussi à deux modes principaux, mode A et mode B (figure 1.6), qui présentent certaines similarités avec les motifs symétriques et antisymétriques. En effet, le signe des tourbillons longitudinaux du mode A, comme dans le cas du mode symétrique, alterne d'une demi période à l'autre de l'écoulement de base alors qu'il reste le même pour le mode B, comparable au mode antisymétrique. Cependant, les déformations sinusoïdales des tourbillons primaires ne sont observées que sur le mode A. Elles sont semblables à celles du mode symétrique.

L'ondulation des tourbillons primaires du mode A ou du mode symétrique est analogue à celle du mode translatif de la couche de mélange [Pierrehumbert & Widnall [40] (1982)]. Dans le cas du mode B et du mode antisymétrique, la relation est moins évidente. L'ondulation prononcée des tourbillons primaires n'a pas été observée pour le mode B. Le mode antisymétrique par contre présente effectivement de fortes déformations mais les tourbillons primaires ondulent en opposition de phase dans le plan horizontal ( $xz$ ) alors que le mode translatif est associé à une ondulation en phase.

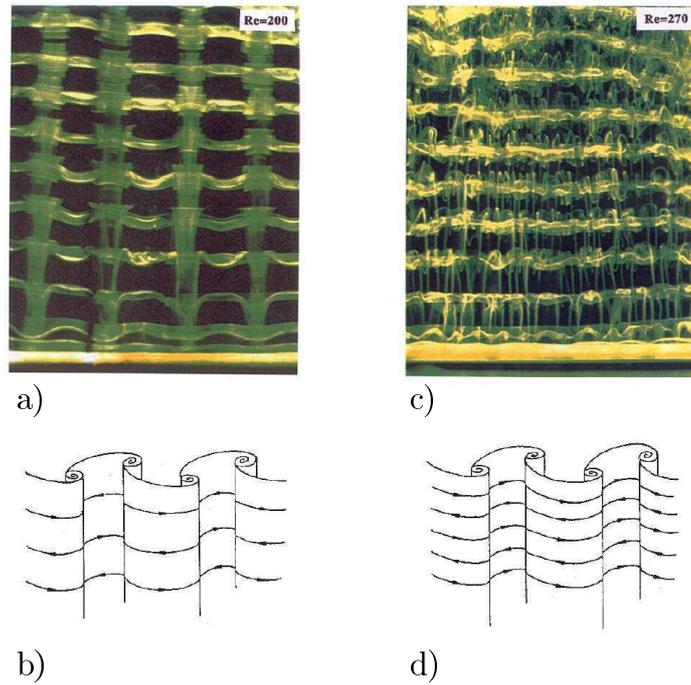


Figure 1.6: modes tridimensionnels du sillage de cylindre. a)-b) mode A, c)-d) mode B Williamson [19] (1996).

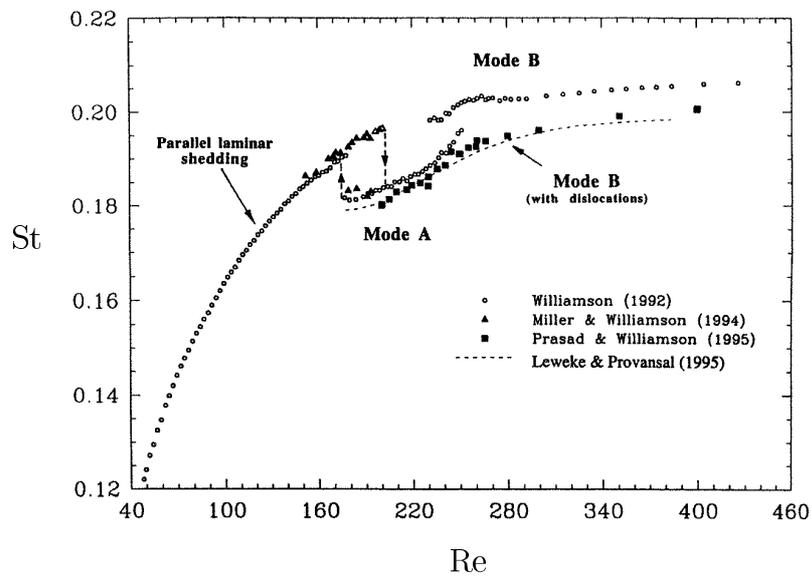


Figure 1.7: Evolution du nombre de Stouhal  $St$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$ .

## 1.2.2 Sélection des modes

Comme il a été précisé précédemment, les propriétés et les travaux que nous mentionnons dans ce paragraphe et dans les suivants ne portent que sur le sillage d'un cylindre. L'étude expérimentale que nous proposons dans le chapitre suivant caractérisera les modes symétrique et antisymétrique du sillage plan.

Les modes A et B apparaissent pour des nombres de Reynolds distincts. La sélection de ces deux modes d'instabilité est significative dans le plan  $(St, Re)$  présenté figure 1.7. Le régime laminaire du sillage est décrit dans ce plan par la portion de courbe telle que  $Re < 194$  et l'apparition des modes tridimensionnels correspond à des sauts du nombre de Strouhal.

Comme on peut l'observer sur la figure 1.7, la valeur du nombre de Reynolds de la première transition qui manifeste l'apparition du mode A varie en fonction des auteurs et présente un cycle d'hystérésis. Le nombre de Reynolds critique dépend de l'approche par valeurs supérieures ou inférieures de la vitesse critique d'écoulement. La forte disparité des seuils obtenus est expliquée par la sensibilité de l'écoulement aux conditions expérimentales.

Bloor [20] en 1964 a ciblé le seuil d'apparition du mode A entre 140 et 190 et a attribué ces variations au niveau de turbulence des expériences, de l'ordre de 0.03% à 1%. La plupart des valeurs de seuil mesurées par la suite en minimisant le niveau de turbulence tombe dans cet intervalle mais rien ne laisse présager d'une convergence vers une valeur unique de seuil critique. Quelques valeurs de seuil sont présentées dans le tableau 1.1.

études	$Re_c$
Williamson [21][22] (1988a-1989)	178
Eisenlohr & Eckelman [23] (1990)	165
Norberg [24] (1994)	165
Zhang <i>et al.</i> [25] (1995)	160
Williamson [19] (1996)	190

Table 1.1: quelques valeurs de seuils d'apparition du mode symétrique.

L'orientation des tourbillons primaires par rapport à l'axe du cylindre, contrôlée par les conditions de bord du cylindre, est aujourd'hui vue comme la cause de cette large gamme de nombres de Reynolds critiques [Hammache & Gharib [26] (1991), Miller & Williamson [27] (1994), Leweke *et al.* [28] (1993)]. Physiquement, les extrémités du cylindre génèrent des perturbations susceptibles de disloquer les tourbillons primaires le long de leur axe laissant apparaître des motifs de chevrons. Ce phénomène qui induit une forte augmentation de l'énergie des fluctuations turbulentes, est vu comme la manifestation d'une instabilité de type Eckhaus [[29], [30], [27]]. Ces défauts, ces dislocations ont été observés dans la couche de mélange et sont considérés comme fondamentaux dans le développement des instabilités secondaires 3D [Browand & Prost-Domasky [31](1990)].

Numériquement, le seuil critique  $Re_c$  du mode A a été déterminé par deux analyses de stabilité de Floquet menées par Noack & Eckelman [32] (1994) et Barkley & Henderson [33] (1996). L'analyse de Noack & Eckelman [32] (100 noeuds considérés) est moins précise que celle de Barkley & Henderson [33] (10 000 noeuds) mais les valeurs qu'ils ont obtenues  $Re_c = 170$  et  $Re_c = 188.5 \pm 1$  respectivement tombent dans l'intervalle de Reynolds critique défini expérimentalement. Les simulations numériques directes obtenues à partir d'un code 3D de Braza [34] (1994) et Persillon & Braza (1992) [35] ont confirmé le seuil d'instabilité prédit par

Barkley & Henderson [33]  $Re_c = 189$ . Il est à noter que les valeurs critiques  $188.5 \pm 1$  et 189 sont remarquablement proches des dernières mesures expérimentales effectuées par Williamson (1996) [19],  $Re_c \simeq 190$ .

L'apparition du mode B est liée à une seconde discontinuité qui est vue comme un transfert progressif d'énergie du mode A vers le mode B. Le seuil d'apparition du mode B a été évalué expérimentalement entre les valeurs du nombre de Reynolds, 230-260. La valeur de seuil obtenue par l'analyse de stabilité de Floquet de Barkley & Henderson [33] concorde avec les observations expérimentales. Cependant ces analyses de stabilité sont linéaires et ne sont pas suffisantes pour expliquer le développement du mode B. En effet, lors de la seconde transition, l'écoulement 2D est déjà instable vis à vis du mode A et les interactions non linéaires ne peuvent pas être négligées. Même si après cette seconde transition, le mode B est dominant, l'écoulement de sillage peut consister en un mélange des deux modes. Barkley & Henderson [33] suspectent que la transition du mode symétrique au mode antisymétrique peut être éclaircie par une analyse de stabilité linéaire du mode A et non pas par l'analyse de stabilité linéaire du sillage 2-D, l'allée de von Kármán.

### 1.2.3 Sélection de longueur d'ondes

Les longueurs d'ondes caractéristiques des 2 modes d'instabilités observés dans le sillage d'un cylindre sont très différentes.

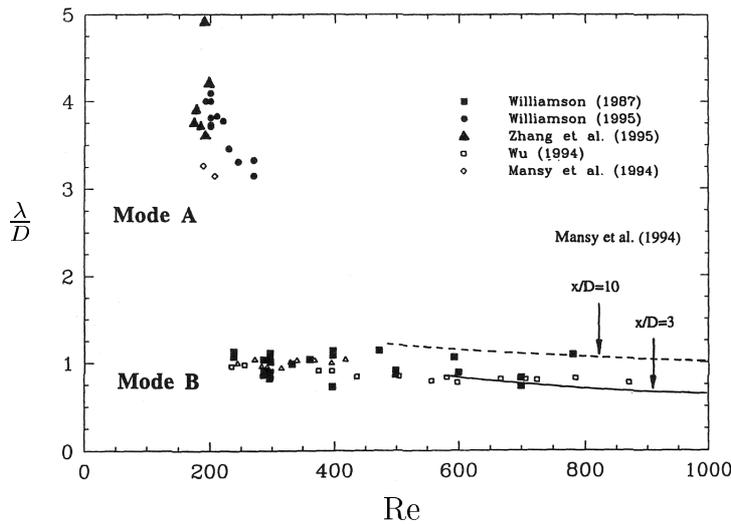


Figure 1.8: Evolution de la longueur d'onde  $\lambda_z$  adimensionnée par le diamètre du cylindre  $D$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$ .

Diverses mesures (Mansy *et al* [37] (1994), Williamson [38] (1987), Zhang *et al* [25] (1995), wu [39] (1994)) sont présentées sur le graphe 1.8 et montrent une forte réduction de la longueur d'onde lors de la transition mode A / mode B. La longueur d'onde du mode A varie entre 3 et 4 diamètres de cylindre, ce qui correspond à un rapport  $\lambda_{2D}/\lambda_{3D}$  appartenant à l'intervalle  $[3/5, 4/5]$ . La forte disparité des mesures du mode A est expliquée par le phénomène de dislocation des tourbillons primaires que nous avons évoqué dans le paragraphe précédent. La longueur d'onde du mode B indépendante du nombre de Reynolds converge vers la valeur 1 diamètre, le rapport  $\lambda_{2D}/\lambda_{3D}$  étant de l'ordre de  $1/5$ .

L'analyse de stabilité de Floquet de Barkley & Henderson [33] ainsi que les simulations

numériques directes 3D de Braza [34] (1994) et Persillon & Braza [35] (1996) confirment cette forte réduction de longueur d’onde entre le mode A et le mode B. La prédiction de l’étude de Barkley & Henderson [33]  $\lambda_z/D = 3.96$  à  $Re_c = 188.5$  est de plus en très bon accord avec les dernières mesures effectuées par Williamson [19] (1996),  $\lambda_z/D = 4.01$  à  $Re_c = 200$ .

#### 1.2.4 Mécanismes d’instabilité

Les mécanismes d’instabilité à l’origine de la formation des modes A et B restent à ce jour flous. Cependant, la manifestation de cette instabilité secondaire, c’est à dire l’apparition des tourbillons longitudinaux est générique de tous les types d’écoulements cisailés. Ainsi les recherches s’orientent plus particulièrement vers les processus appréhendés dans la configuration plus simple de la couche de mélange.

La comparaison de l’étude expérimentale menée sur la couche de mélange par Bernal & Roshko [12] (1986) avec les prédictions théoriques de l’instabilité translatrice d’une allée périodique de tourbillons de Stuart mise en évidence en 1982 par Pierrehumbert & Widnall [40] suggère que ces tourbillons longitudinaux sont le fruit d’une instabilité du coeur des tourbillons primaires menant à l’apparition des structures longitudinales. Cependant, les observations de Lasheras & Choi (1988) [43] sur une couche de mélange forcée par une ondulation du bord de fuite de la plaque plane génératrice du profil cisailé ainsi que les simulations numériques de Klaassen & Peltier [42] sur les tourbillons de Kelvin-Helmoltz montrent l’existence d’une instabilité propre à la tresse. La formation des tourbillons longitudinaux repose sur le processus concentration-réorientation-étirement de la vorticit   résiduelle proposé par Lin & Corcos [43] en 1984 et l’ondulation des tourbillons primaires est la manifestation d’effets non-linéaires de focalisation [Neu [44], (1984)].

Dans le cadre des sillages de cylindre, compte tenu de la différence de longueur d’onde observée, les modes A et B tendent à être associés à deux mécanismes d’instabilité distincts. Le mode A est en effet susceptible d’être le résultat d’une instabilité à grande longueur d’onde alors que le mode B est à rapprocher d’une instabilité à petite longueur d’onde.

Williamson a fait en 1996 un parallèle entre le mode A et le mode d’instabilité translatrice de Pierrehumbert & Widnall [40]. Il a ainsi attribué le développement du mode A à une instabilité du coeur des tourbillons primaires dont le diamètre est une des grandes échelles caractéristiques de l’écoulement.

Les visualisations précises de la région de la tresse qu’il a effectuées montrent que la tresse qui se forme près du cylindre est perturbée par la vorticit   résiduelle provenant de la tresse précédemment développée et advectée. Il suggère ainsi que ces perturbations sont amplifiées par le processus concentration-réorientation-étirement de Lin & Corcos [43] (1984) au niveau de la tresse dont l’épaisseur est une des plus petites longueurs caractéristiques de l’écoulement.

Bien que le processus d’étirement semble essentiel dans l’apparition de tourbillons longitudinaux, König *et al.* [45] (1994) ont émis une hypothèse complètement différente sur le développement des instabilit  s secondaires de sillages. Les tourbillons seraient la manifestation de tourbillons de Goertler. En effet, ils ont montré qu’il existe un voisinage de la tresse dans lequel l’écoulement est instable centrifuge.

### 1.3 Objectif de l’étude

Les nombreuses études expérimentales, théoriques et numériques ont permis de caract  riser pr  cisement les sym  tries des deux modes tridimensionnels de l’instabilité secondaire du sillage. Cependant l’origine physique de ces instabilit  s ainsi que la s  lection de longueur d’onde qui en

découle ont été observées dans la configuration d'un sillage de cylindre et sont encore mal comprises aujourd'hui. La complexité même de cet écoulement expliquent ces lacunes.

Dans cette configuration de cylindre, l'écoulement de base, l'allée de von Kármán, est fortement non parallèle. Les visualisations des modes [cf figure 1.6 et Williamson (1996) [15]] montrent de plus que ces instabilités se développent très près du cylindre. Dans cette zone, de nombreux phénomènes (comportement de la zone de recirculation, enroulement de la vorticité, décollement des couches limites ...) se produisent et il semble difficile d'isoler ceux qui sont réellement responsables dans le développement des instabilités secondaires.

Nous abordons dans notre étude les instabilités secondaires sous l'angle des sillages plans. Ce type de sillage présente plusieurs intérêts comparé à celui se développant à l'aval du cylindre. Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe 1.1, l'instabilité primaire de ce type de profil se développe très lentement en espace et la dynamique liée au point de décollement est inexistante. D'un point de vue expérimental, les effets dus à la présence de l'obstacle sont fortement atténués lorsque les instabilités primaires et secondaires du sillage apparaissent. Cela nous permet de découpler le développement de ces instabilités de tous les phénomènes liés à la présence de l'obstacle. De plus, l'instabilité primaire est de nature convective et peut donc facilement être contrôlée par un forçage imposé.

D'un point de vue numérique, on peut considérer l'instabilité primaire saturée comme écoulement de base et mener une analyse de stabilité. Le caractère faiblement non parallèle de cet écoulement nous permet de le considérer homogène en espace et d'adopter une vision locale. On peut limiter nos études en ne considérant qu'une tranche de fluide constituée d'une longueur d'onde de l'allée et réaliser des simulations temporelles plus simples à implémenter que les simulations spatiales. Ce type d'analyse temporelle est équivalente à étudier l'évolution d'une tranche de fluide en négligeant localement les variations spatiales de l'écoulement moyen subies au cours de son advection. Cette méthode présente cependant une limite car elle ne peut reproduire un éventuel couplage de l'aval vers l'amont, ce qui est le cas lorsque l'instabilité secondaire est absolue. En revanche, elle est bien appropriée lorsque l'écoulement est convectivement instable. Le comportement dynamique des instabilités secondaires a été abordé dans l'étude expérimentale que nous avons menée au préalable et nous a permis de nous positionner par rapport à cette limite.

## 1.4 Organisation du mémoire

Le chapitre 2 présente l'étude expérimentale d'un sillage généré par une plaque plane de très faible épaisseur. Ce travail nous a permis de caractériser les instabilités secondaires dans le cas plan, la sélection des modes, la sélection des longueurs d'ondes, la nature de l'instabilité secondaire. En particulier, l'expérience nous a permis de montrer le caractère convectif de l'instabilité secondaire légitimant ainsi l'approche temporelle adoptée dans l'étude numérique. Les chapitres 3 et 4 présentent les études numériques que nous avons menées. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à un modèle de sillage plan, l'allée simple de tourbillons contra-rotatifs déterminée par Mallier & Maslowe [46] (1993). Compte tenu des symétries de ce modèle, les perturbations ont pu être séparées en deux familles distinctes. Nous avons calculé la courbe de taux de croissance du mode le plus amplifié pour chaque famille et nous avons identifié les mécanismes d'instabilités associés. Cependant, cette solution de sillage ne modélise pas la tresse ("braid") qui connecte deux tourbillons consécutifs. Ainsi, dans le chapitre 4, nous avons entrepris l'étude d'un sillage plan plus réaliste. Nous avons simulé numériquement le profil de sillage expérimental mesuré. L'implémentation d'une méthode dite de "Krylov" [47] nous a donné accès non seulement au mode le plus amplifié mais aussi aux modes sous-dominants,

ce qui nous a permis d'identifier les différentes contributions du coeur et de la tresse dans le développement des instabilités secondaires 3D.

# Bibliographie

- [1] P.G. Drazin & W.H. Reid, “Hydrodynamic Stability,” Cambridge University Press (1981).
- [2] L. Rayleigh, “Scientific papers ,” **3**, Cambridge University Press (1892).
- [3] S. Goldstein, “Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics,” Proc. Camb. Phil. Soc. **26**, 1 (1930)
- [4] C.M. Ho & P. Huerre, “Perturbed free shear layers,” Ann. Rev. Fluid Mech. **16**, 365 (1984)
- [5] J.M. Chomaz, P. Huerre & Redekopp L.G., “Bifurcations to local and global modes in spatially-developing flows,” Phys. Rev. Lett. **60**, 25 (1988)
- [6] M. Provansal, C. Mathis & L. Boyer “Benard-von Kármán instability : transient and forced regimes,” J. Fluid Mech.**182**, 1 (1987).
- [7] F.R. Hama, “Three-dimensional vortex pattern behind a circular cylinder,” J. Aeronaut. Sci. **24**, 156 (1957).
- [8] J.H. Gerrard, “The wakes of cylindrical bluff bodies at low Reynolds number,” Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **288**, 351 (1978).
- [9] F.K. Browand & T.R. Troutt “A note on the spanwise structure in the two-dimensional mixing layer,” J. Fluid Mech. **97**, 771 (1980).
- [10] R. Breidenthal, “Structure in turbulent mixing layers and wakes using a chemical reaction,” J. Fluid Mech. **109**, 1 (1981).
- [11] J. Jimenez, “On the visual growth of the of turbulent mixing layer ,” J. Fluid Mech. **96**, 447 (1980).
- [12] Bernal & Roshko, “Streamwise vortex structure in plane mixing layers,” J. Fluid Mech. **170**, 499 (1986).
- [13] E. Meiburg & J.C. Lasheras, “Experimental and numerical investigation of the three-dimensional transition in plane wakes,” J. Fluid Mech. **190**, 1 (1987).
- [14] J.C. Lasheras & E. Meiburg, “Three dimensional vorticity modes in the wake of a flat plate,” Phys. Fluids A **2**(3), 371 (1990).
- [15] C.H.K. Williamson, “Three-dimensional wake transition,” J. Fluid Mech. **328**, 345 (1994).
- [16] C.H.K. Williamson, “Vortex dynamics in the cylinder wake,” Ann. Rev. Fluid Mech. **28**, 477 (1996).

- [17] T. Wei & C.R. Smith, "Secondary vortices in the wake of circular cylinders," *J. Fluid Mech.* **169**, 513 (1986).
- [18] M. Thompson, K. Hourigan & J. Sheridan "Three-dimensional instabilities in the cylinder wake," *Int. Colloq. Jets, Wakes, Shear Layers, Melbourne, Aust, April 18-20*, **Pap. 10** (1994).
- [19] C.H.K. Williamson, "Three-dimensional wake transition behind a cylinder," *J. Fluid Mech.* **328**, 345 (1996).
- [20] M.S. Bloor, "The transition to turbulence in the wake of a circular cylinder," *J. Fluid Mech.* **19**, 290 (1964).
- [21] C.H.K. Williamson, "Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder," *Phys. Fluids* **31**, 2742 (1988a).
- [22] C.H.K. Williamson, "Oblique and Parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers," *J. Fluid Mech.* **19**, 290 (1989).
- [23] H. Eisenlohr & H. Eckelmann, "Vortex splitting and its consequences in the vortex street wake of cylinders at low Reynolds numbers," *Phys. Fluids A* **1**, 189 (1989).
- [24] C. Norberg, "An experimental investigation of the flow around a circular cylinder : influence of aspect ratio," *J. Fluid Mech.* **258**, 287 (1994).
- [25] H. Zhang, U. Fey, B.R. Noack, M. König & H. Eckelmann, "On the transition of the cylinder wake," *Phys. Fluids* **7**, 1 (1995).
- [26] M. Hammache & M. Gharib, "An experimental study of the parallel and oblique vortex shedding from circular cylinders," *J. Fluid Mech.* **232**, 567 (1991).
- [27] G.D. Miller & C.H.K. Williamson, "Control of three-dimensional phase dynamics in a cylinder wake," *Exp. Fluids* **18**, 26 (1994).
- [28] T. Leweke, M. Provansal & L. Boyer, "Stability of vortex shedding modes in the wake of a ring at low Reynolds numbers," *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3469 (1993)
- [29] P. Albarede & P.A. Monkewitz, "A model for the formation of oblique shedding patterns and "chevrons" in cylinder wakes," *Phys. Fluids A* **4**, 744 (1992).
- [30] D.S. Park & L.G. Redekopp, "A model for pattern selection in wake flows," *Phys. Fluids A* **4**, 1697 (1991).
- [31] F.K. Browand & S.A. Prost-Domasky, "Experiment on pattern evolution in the 2-D mixing layer," In *New trends in nonlinear dynamics and Pattern Forming Phenomena*, ed. P. Couillet, P. Huerre, NATO ASI Ser. **8**, 159. New York : Plenum (1990).
- [32] B.N. Noack & H. Eckelmann, "A global stability analysis of the steady and periodic periodic cylinder wake," *J. Fluid Mech.* **270**, 297 (1994).
- [33] D. Barkley & R. D. Henderson, "Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder," *J. Fluid Mech.* **322**, 215 (1996).
- [34] M. Braza, "Transition features in wake flows by means of numerical analysis," *Current Topics in the Phys. Fluids* **1**, 391 (1994).

- [35] H. Persillon & M. Braza, “Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier-Stokes simulation simulation,” **365**, 23 (1998).
- [36] H. Eckelmann, J.M.R. Graham, P. Huerre & P.A. Monkewitz, “Proc. IUTAM conf. Bluff Body Wakes instabilities,” Berlin : Springer-Verlag, (eds 1992).
- [37] H. Mansy P. Yang & D.R. Williams, “Quantitative measurements of spanwise-periodic three-dimensional structures in the wake of a circular cylinder,” *J. Fluid Mech.* **270**, 277 (1994).
- [38] C.H.K. Williamson, “Three-dimensional transition in the near wake of a cylinder,” *Bull. Am. Phys. Soc.* **32**,2098 (1987).
- [39] J. Wu, J. Sheridan M.C. Welsh K. Hourigan, & M. Thompson, “Longitudinal vortex structures in a cylinder wake,” *Phys. Fluids* **6**, 28837 (1994).
- [40] R.T. Pierrehumbert & S.E. Widnall, “The two- and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer,” *J. Fluid Mech.* **114**, 59 (1982).
- [41] J.C. Lasheras & H. Choi, “Three-dimensional instability of a plane free shear layer. An experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices,” *J. Fluid Mech.* **189**, 53 (1988).
- [42] G.P. Klaassen & W.R. Peltier, “ The influence of stratification on secondary instability in free shear layers,” *J. Fluid Mech.* **227**, 71 (1991).
- [43] S.J. Lin & G.M. Corcos, “The mixing layer : deterministic models of a turbulent flow. Part 3 : The effect of plane strain on the dynamics of streamwise vortices,” *J. Fluid Mech.* **141**, 139 (1984).
- [44] J.C. Neu, “The dynamics of stretched vortices,” *J. Fluid Mech.* **143**, 253 (1984).
- [45] M. König, B.R. Noack & H. Eckelmann “Discrete shedding modes in the von Kármán vortex street ,” *Phys. Fluids A* **5**, 1846 (1993).
- [46] R. Mallier & S.A. Maslowe, “A row of counter-rotating vortices,” *Phys. Fluids* **5**(4), 1074 (1993).
- [47] W. S. Edwards, L.S. Tuckerman, R.A. Friesner & D.C. Sorensen, “ krylov Methods for the incompressible Navier-Stokes Equations,” *J. Comput. Phys.* **110**, 82 (1994).

## Chapitre 2

# Étude expérimentale d'un sillage de plaque plane

Ce chapitre présente l'étude expérimentale que nous avons effectuée sur le sillage plan. Le dispositif expérimental initial ainsi que les techniques de mesures et de visualisations utilisées sont exposées dans les sections 2.1 et 2.2. Les difficultés majeures que nous avons rencontrées afin de réaliser un écoulement de qualité sont ensuite abordées dans la section 2.3. L'ambiguïté soulevée par la quantification d'un taux de croissance à partir de visualisations sera définie dans la section 2.4. La section 2.5 présente les résultats et fait l'objet d'une soumission au *Journal of Fluid Mechanics*.

### 2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé permet l'étude d'écoulements cisailés non confinés de type couches de mélange [cf Schowalter *et al.* [1] (1994)] et sillages de plaques.

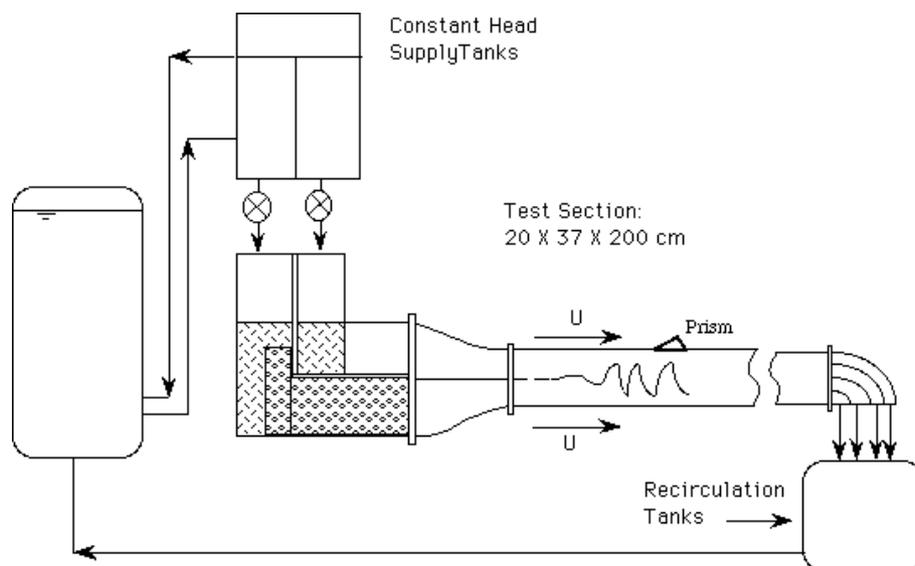


Figure 2.1: dispositif expérimental.

Il est formé d'un canal à eau ouvert (figure 2.1) de longueur 2 m et de section 20\*37 cm<sup>2</sup>. Une

plaque plane horizontale de longueur 1 m et de très faible épaisseur, 3 mm, est placée en amont de la section test et à mi-hauteur, partageant ainsi le convergent en deux cavités identiques. Le développement des couches limites de part et d'autre de la plaque plane génère en bord de fuite le profil de vitesse inflexionnel du sillage.

Quatre réservoirs de contenance 2000 litres joints deux à deux permettent l'alimentation en eau de deux bacs identiques placés en hauteur. Chaque bac est relié à une cavité par l'intermédiaire de deux tuyaux souples de diamètre 5 cm. La hauteur d'eau dans les deux bacs est maintenue durant la totalité d'une expérience afin d'assurer un débit constant. Les vitesses des deux écoulements moyens sont réglées et ajustées à l'aide de deux débitmètres et la plage de vitesse accessible s'étend jusqu'à 15 cm/s. Afin de s'affranchir de la turbulence générée en sortie des tuyaux, des blocs de mousse de forme et de texture différentes puis des nids d'abeille sont positionnés dans chaque cavité. Le convergent assure un écoulement moyen uniforme à l'entrée de la section test. Les expériences sont réalisées en circuit ouvert et durent en moyenne 20 minutes. En sortie, un coude de même section que le canal permet l'évacuation de l'eau. Trois fines plaques concaves fixées dans le coude inhibent la formation de tourbillons susceptibles de remonter l'écoulement. Un système de vannes nous permet de contrôler le débit de sortie afin d'éviter toute aspiration ou refoulement du fluide. De plus, supposant le défaut de vitesse associé au sillage négligeable en section de sortie (séparée de la plaque plane d'entrée d'une distance de 2 m), nous imposons un profil de vitesse laminaire uniforme.

## 2.2 Instrumentation

### 2.2.1 Mesure du profil de vitesse

Les profils de vitesse d'entrée et de sortie du canal sont évalués.

Le profil initial de vitesse longitudinale est mesuré au bord de fuite de la plaque plane (à une distance de 2 mm) dans la partie centrale du canal. On utilise à cet effet un système intrusif, l'anémomètre à film chaud. Afin de limiter les interactions avec l'écoulement, le film chaud est monté à la base d'un réglet vertical coulissant placé en aval de la section de mesure. Le film chaud doit être orienté perpendiculairement à la direction la vitesse que l'on veut mesurer. Le réglet est fixé sur un chariot situé au dessus du canal et mobile le long de la veine.

L'anémomètre est constitué d'un film de nickel très mince déposé sur un cône de quartz. Ce film conducteur de résistance  $R$  constante est chauffé électriquement. Le fluide qui s'écoule induit un refroidissement de la sonde qui se traduit par une modification de sa résistance électrique et donc de l'intensité du courant électrique qui la traverse. La sonde est reliée à un système d'amplification électronique qui restitue une réponse en volts. La tension  $E$  acquise est liée à la vitesse longitudinale par une loi de la forme :

$$E^2 = (m_1 + m_2 * U^{m_3}) \quad (2.1)$$

où  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  sont des constantes qui dépendent de la température et doivent être estimées par étalonnage. L'étalonnage du film chaud est réalisé avant chaque utilisation sur une expérience de jet libre. Le film chaud est placé en sortie de buse, au centre du jet de telle sorte que l'on mesure la vitesse axiale de sortie. Cette vitesse est elle-même imposée par quatre débitmètres à billes, le domaine de vitesse s'étendant sur [0;10 cm/s]. Une courbe de calibration est présentée figure 2.2. Les profils de vitesse mesurés sont inclus dans l'article expérimental figure 2.11 (page 35).

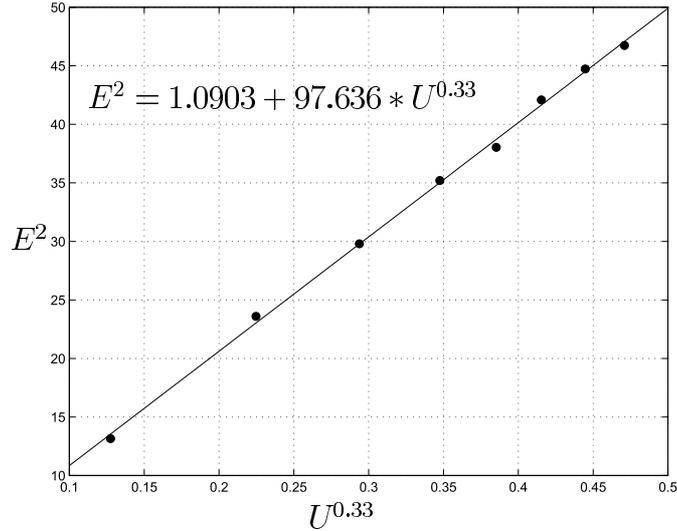


Figure 2.2: Courbe de calibration du fil chaud.

Les mesures par anémométrie à film chaud dans l'eau sont connues pour être plus difficiles à réaliser que dans l'air. En effet, des erreurs importantes peuvent être générées par le dépôt d'impuretés sur la partie sensible de la sonde, ce phénomène étant d'autant plus marqué que la quantité d'eau que l'on utilise est importante. Ce problème nous a contraint à effectuer plusieurs mesures de vitesse en chaque point du profil, cinq mesures en moyenne. Le nombre de mesures a été multiplié par deux au niveau de la plaque plane où le déficit de vitesse devient maximal. Les différentes mesures en chaque point étaient moyennées.

Le même protocole de mesure est suivi en sortie de canal.

## 2.2.2 Visualisations

L'interface entre les deux écoulements est visualisée par la technique de fluorescence induite par plans laser (P.L.I.F.). Les traceurs sont des particules de fluorescéine qui ont la propriété d'émettre une radiation fluorescente lorsqu'elles sont soumises à une lumière de longueur d'onde appropriée. Le colorant est dilué grâce à des agitateurs dans les deux réservoirs alimentant l'écoulement inférieur à raison de 0.005 g/l d'eau. A cette faible concentration, la différence de densité entre le colorant et l'eau est négligeable. Il est nécessaire de réaliser un bon pré-mélange sans générer de gradient de température dans les deux réservoirs.

Les plans lumineux sont créés par réflexion d'un faisceau laser sur un miroir tournant. Afin d'obtenir un plan très fin, une lentille convergente est placée sur le chemin du faisceau de telle sorte que le point focal soit localisé sur le miroir tournant. Le système optique est fixé au dessus du canal sur le chariot mobile. La rotation du miroir tournant nous permet de réaliser des plans le long de l'axe de l'écoulement. Un système identique tourné de 90° réalise des plans transverses.

Les images longitudinales et transverses sont prises à l'aide de deux caméras CCD connectées à un magnétoscope S-VHS. La vitesse d'acquisition de chaque caméra est de 60 trames/seconde, soit 30 images/seconde. Compte tenu des conditions expérimentales ( puissance laser, concentration du colorant, vitesse de l'écoulement moyen, etc...), le temps de pose a été réglé à 1/4000 secondes de telle sorte que les visualisations soient nettes.

Les prises longitudinales sont réalisées par une caméra placée perpendiculairement aux parois

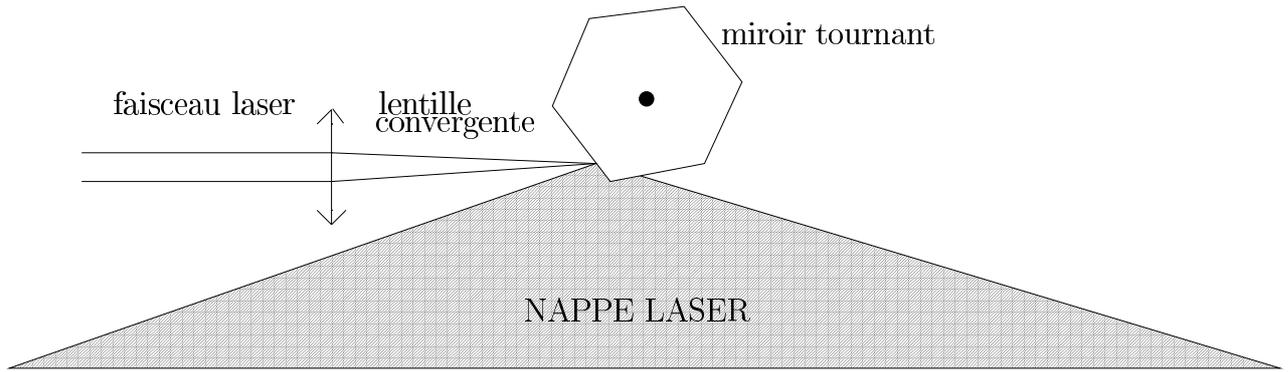


Figure 2.3: nappe laser.

latérales du canal afin d'éviter toute déformation de l'image. La caméra qui acquiert les vues transverses est fixée sur le plan mobile. Elle est placée perpendiculairement à une des surfaces d'un prisme légèrement immergé (figure 2.4), ce qui nous permet de nous affranchir des problèmes induits par la déformation de la surface libre.

## 2.3 Qualité de l'écoulement

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, l'instabilité primaire d'un sillage de plaque plane profilée se développe spatialement très lentement. Elle est fortement dépendante du dispositif expérimental dans et par lequel elle est générée et elle est aussi très réceptive à toute perturbation extérieure. Ainsi de nombreuses précautions expérimentales doivent être prises afin d'obtenir une double allée de tourbillons alternées régulière et d'inhiber toutes les perturbations localisées.

Les visualisations longitudinales et transverses du sillage proche du bord de fuite du biseau où l'instabilité primaire est dominante nous ont permis d'améliorer considérablement la qualité de l'écoulement généré dans ce dispositif expérimental.

Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à réaliser un écoulement de type couche de mélange car le réglage des vitesses moyennes ne nécessite pas d'attention particulière. Ce réglage est extrêmement délicat lorsqu'on désire obtenir une double allée de tourbillons contra-rotatifs préservant les symétries du sillage.

### AFFINAGE DE LA PLAQUE PLANE

Les premiers essais menés dans cette configuration couche de mélange se sont révélés décevants. Nous avons balayé la plage de vitesse accessible et imposé différents sauts de vitesses plus ou moins importants et les couches de mélange observées étaient très irrégulières. Même lors des phases de périodicité, la fréquence naturelle apparente ne vérifiait pas la loi  $St_n = (f_n \delta_\omega) / \bar{U} \simeq 0.03$  [cf Ho & Huerre [2] (1984)].

Ainsi, nous avons affiné le bord de fuite de la plaque plane en ajoutant un biseau formé de deux pans de métal très fins soudés sur la longueur en quelques points (voir figure 2.5). Ce système, emboîté sur la plaque plane est fixé de part et d'autre par du scotch de largeur 4 cm

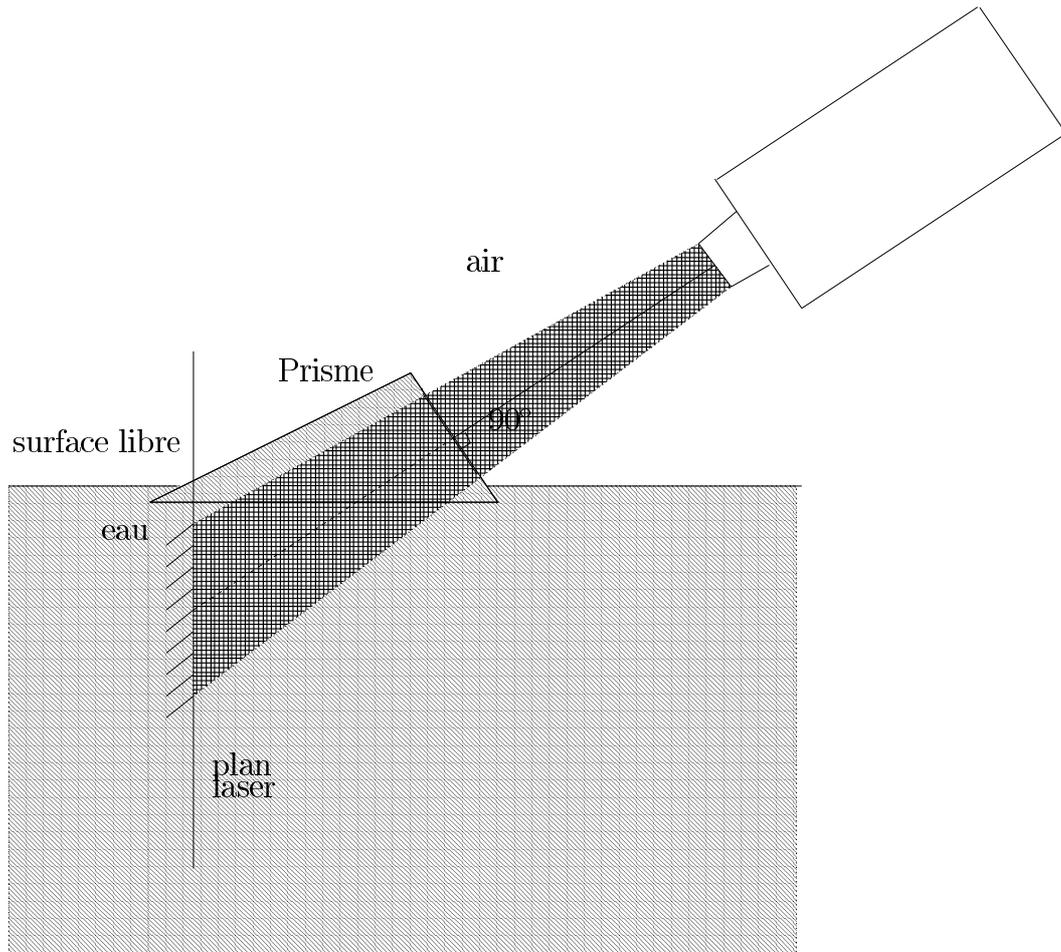


Figure 2.4: Prisme.

et d'épaisseur 0.1 mm. Deux épaisseurs de biseau ont été testées : 1 mm et 2 mm. Les essais menés avec le biseau le plus fin, 1 mm, mais aussi la plus fragile sur la configuration couche de mélange ont été les plus concluants.

#### UNIFORMITÉ DE L'ÉCOULEMENT

Nous nous sommes alors concentrés sur l'ajustement des vitesses moyennes d'écoulements, afin d'obtenir une double allée de tourbillons contra-rotatifs caractéristique des sillages.

Les réglages des débitmètres et des vannes placées en sortie de canal sont effectués simultanément. Un régleur placé sur une des parois latérales du canal nous permet de maintenir le niveau d'eau qui s'élève à 20 cm. La mesure des profils de vitesse à 2 mm du bord de fuite de la plaque plane et à 5 cm environ de la section de sortie du canal par anémométrie à film chaud ont validé nos réglages.

La première vitesse que nous avons retenue est 6.3 cm/s. Les visualisations longitudinales ont montré à cette vitesse une double allée qui se développe lentement et qui présente des phases

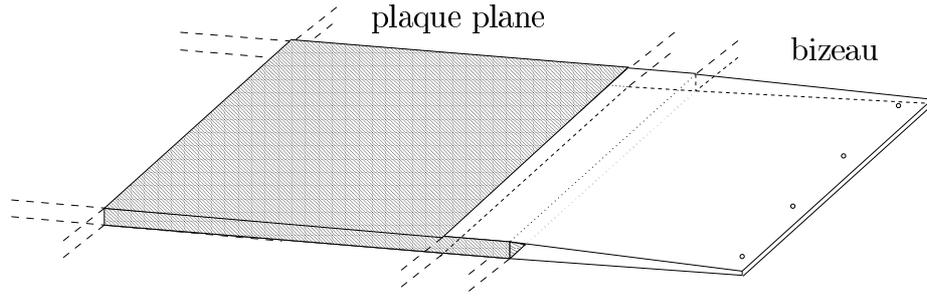


Figure 2.5: biseau.

régulières en espace et en temps. Un système de forçage nous a permis de régulariser cette allée. Un petit piston placé sous le convergent module la vitesse de l'écoulement inférieur. Les caractéristiques de l'instabilité primaire sont exposées dans la section 2.5.3 de l'article expérimental.

#### PERTURBATIONS LOCALISÉES

Cependant, nous avons observé de nombreuses perturbations localisées qui se développaient dès le bord de fuite du biseau puis qui s'intensifiaient lors de leur advection par l'écoulement moyen. La qualité de l'eau, initialement l'eau du "robinet" a du être remise en question. En effet, de multiples bulles de différentes tailles se formaient de part et d'autre de la plaque plane. Nous éliminions les plus grosses en utilisant un petit tuyau d'aspiration que l'on promenait de part et d'autre de la plaque mais cela n'était pas suffisant. Les bulles résiduelles de très faible taille engendraient toujours des perturbations qui se développaient ensuite spatialement dans le sillage. Nous avons alors effectué des tests avec de l'eau purifiée, désionisée.

En utilisant cette qualité d'eau et après aspiration des grosses bulles formées lors du remplissage du canal, aucune bulle ne se reforme en cours d'expérience, la surface de la plaque apparaît nette et le sillage non perturbé.

Une autre source de perturbations localisées a été identifiée au cours des expériences : elle provient de la qualité même du biseau rajouté au bord de fuite de la plaque plane qui de plus se détériore rapidement au cours des divers remplissages de par sa fragilité. Ainsi une grande attention a été portée sur les quelques points de soudure finement ponés lors de sa fabrication et sur les bulles d'air soigneusement éliminées lors de sa fixation avec du scotch. Nerveux, s'abstenir ! Le biseau doit être changé régulièrement car étant très fin et très souple, il se gondole rapidement probablement sous l'effet des variations de température lors des diverses expériences.

Nous avons voulu programmer deux à trois expériences par jour, le remplissage des quatre réservoirs prenant environ 4h. Mais nous nous sommes rapidement rendus compte que la qualité de l'écoulement de sillage était meilleure lors de l'expérience du matin que pour les deux autres. Pour la première expérience, les quatre grosses cuves étaient remplies la veille au soir et l'eau reposait toute la nuit alors que les deux autres expériences étaient effectuées dès la fin du remplissage. Nous avons principalement lié cette observation à un phénomène thermique, c'est à dire à un gradient de température qui s'établit lors du remplissage et qui s'atténue lorsque l'eau reste longuement au repos. Afin d'assurer les mêmes conditions expérimentales et la meilleure qualité possible d'écoulement, nous nous sommes restreints à une seule expérience par jour au petit matin!

Le développement des couches limites sur les parois latérales et inférieure ainsi que le développement d'ondes de surface sont des phénomènes susceptibles de perturber les observations de l'instabilité primaire et secondaire du sillage. Nous avons restreint l'étude de ces deux phénomènes à l'influence qu'ils peuvent exercer sur l'instabilité primaire forcée.

### couches limites

On a pu observer que les tourbillons primaires se courbent près des parois latérales comme s'ils sont freinés par celle-ci. L'épaisseur estimée des couches limites  $\delta_{99\%} = 5x/\sqrt{\text{Re}_x}$  en sortie de canal  $x=200$  cm est de l'ordre de 3 – 4 cm pour les vitesses étudiées sur les trois parois (latérales et inférieures) et seulement 1 cm en fin de la zone d'observation à  $x=20$  cm. Nous avons ainsi réduit le champ de visualisation à la partie centrale du canal. La couche limite qui se développe sur la paroi inférieure du canal n'atteint pas la demi-hauteur  $y=10$  cm en sortie et reste très faible sur la longueur d'observation de l'ordre de  $x=20$  cm ne perturbant pas les structures tourbillonnaires.

### ondes de surface

Les ondes de surface longitudinales de grande longueur d'onde et de fréquence  $f$  égale à la fréquence propre du sillage de l'ordre de 1.2 Hz pour la vitesse 6.3 cm/s, sont les plus "dangereuses". Elles résonnent avec le sillage interne à la couche fluide, modifiant considérablement son amplitude initiale. La zone où l'influence de ces ondes est critique est en effet proche du biseau où il y a création de vorticité.

Le calcul de la longueur caractéristique de ces ondes de fréquence  $f$  nous a permis de réaliser qu'elles sont effectivement susceptibles de se développer compte tenu des dimensions du canal.

Dans l'hypothèse *eau peu profonde*, c'est à dire dans le cas où la longueur d'onde  $\lambda$  est très grande devant l'épaisseur de la couche fluide, la vitesse de phase de ces ondes est approximée par  $c = \sqrt{gh}$ , avec  $h$  l'épaisseur de fluide.

La vitesse de phase d'une onde étant par ailleurs définie par  $c = \sqrt{f * \lambda}$  avec  $f$  la fréquence et  $\lambda$  la longueur d'onde, on obtient pour des ondes de l'ordre de 1.2 Hz, une longueur caractéristique

$$\lambda \simeq \frac{gh}{f} = 1.6 \text{ m}, \quad (2.2)$$

longueur proche de celle du canal (2 m).

En pratique, nous avons voulu att nuier l'effet de ces ondes en disposant des flotteurs, une sorte "d'amortisseurs" sur la surface libre.

Nous avons testé différentes configurations de flotteurs concentrées dans un premier temps sur l'aval de l'écoulement puis concentrées uniquement sur l'amont de l'écoulement et enfin nous nous sommes intéressés à un contrôle mixte amont-aval. L'amplitude de l'instabilité primaire a été mesurée à 1.5 cm du bord de fuite du biseau. Les visualisations de cette section transverse nous ont permis de suivre l'évolution de l'interface au cours du temps, évolution reportée sur le diagramme 2.6-a.   cette distance de la plaque, la déformation reste faible et l'interface est définie de manière unique. La moyenne selon  $z$  des diagrammes spatio-temporels (figure 2.6-b) donne une mesure de l'amplitude (en nombre de pixels) en fonction du temps, mesure qui nous a permis d'évaluer l'effet des différentes configurations de flotteurs testées.

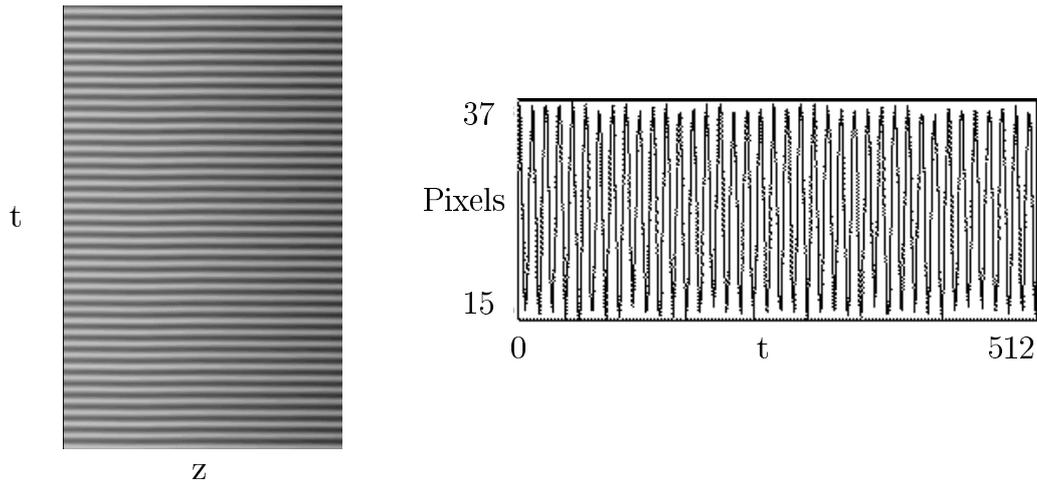


Figure 2.6: a) diagramme spatio-temporel, b) amplitude en fonction du temps.

Nous présentons ici le bilan des tests effectués :

Sans flotteur, c'est à dire sans aucun contrôle de la surface libre, l'amplitude de l'instabilité primaire mesurée est évaluée à 27 pixels.

- CONTRÔLE AVAL :

nous avons utilisé un grand flotteur de dimension  $36 * 60 \text{ cm}^2$  et des petits flotteurs de dimension  $36 * 10 \text{ cm}^2$ .

*3 configurations testées :*

1. Un grand flotteur et deux petits flotteurs simplement posés sur la surface libre.
2. un grand flotteur et deux petits flotteurs faiblement contraints sur les parois du canal. Ils sont scotchés sur les parois latérales mais gardent une certaine liberté de mouvement.
3. 5 petits flotteurs faiblement contraints.

*Résultats obtenus :*

configurations	Amplitude
sans flotteurs	27
1	31
2	16
3	19

- CONTRÔLE AMONT :

un flotteur de dimension  $37 * 30 \text{ cm}^2$  a été utilisé.

*2 configurations testées :*

4. Le flotteur simplement soumis au frottement des parois latérales du canal.
5. Le flotteur fixé rigidement aux parois latérales.

*Résultats obtenus :*

configurations	Amplitude
sans flotteurs	27
4	52
5	34

- CONTRÔLE MIXTE AMONT-AVAL :

*4 configurations testées :*

6. le flotteur amont 4 et les 5 petits flotteurs peu contraints.
7. le flotteur amont 5 et les 5 petits flotteurs peu contraints.
8. le flotteur amont, le grand flotteur aval et les 5 petits flotteurs, tous étant peu contraints.
9. le flotteur amont fortement contraint, le grand flotteur aval et les 2 petits flotteurs, peu contraints.

*Résultats obtenus :*

configurations	Amplitude
sans flotteurs	27
6	31
7	34
8	21
9	22

Les tableaux 1, 2 et 3 montrent que les ondes de surface influencent fortement le développement de l'instabilité primaire de sillage.

L'écoulement est très réceptif à un forçage amont, phénomène attendu compte tenu du caractère convectif de l'instabilité primaire d'un sillage plan. Le flotteur amont engendre un fort accroissement de l'amplitude de l'instabilité primaire. Les deux autres types de contrôle sont plus mitigés. En effet, certaines configurations amplifient l'instabilité primaire et d'autres l'amortissent.

La gamme des amplitudes mesurées étant très large [16;52], il a été nécessaire de faire un choix : la configuration 9 qui atténue modérément l'amplitude du sillage a été retenue. Remarquons que c'est la configuration qui "couvre" le plus la surface libre. L'idéal pour notre étude aurait sans doute été de fermer le canal, éliminant ainsi tout effet de la surface libre.

Il est important de noter qu'aucune onde transverse susceptible de modifier les caractéristiques des instabilités secondaires n'a été observée : la largeur du canal 37 cm est trop faible pour que les ondes les plus "dangereuses" (1.6 m) se développent et résonnent avec le sillage.

## 2.4 Taux de croissance des instabilités primaire et secondaire du sillage

L'étude expérimentale des instabilités primaire et secondaire du sillage que nous avons menée est fondée sur des visualisations de l'écoulement. Dans nos expériences, nous avons évalué le taux de croissance de ces instabilités en mesurant l'amplitude de la déformation de l'interface. Cependant, la pertinence ainsi que les limites de ces traitements doivent être justifiées.

Revenons tout d'abord sur les techniques de visualisations.

Une visualisation par injection de scalaire passif tel qu'un colorant, une fumée est largement utilisée en mécanique des fluides expérimentale car elle rend compte qualitativement du comportement du fluide, de la structure de l'écoulement. Néanmoins il est important d'interpréter correctement le type d'informations récoltées qui dépend de la technique expérimentale utilisée. Les visualisations peuvent en effet donner accès à trois types d'informations, les lignes de courant, les lignes d'émission ou les trajectoires.

Les lignes de courant sont *tangentes au vecteur vitesse* en tout point de l'écoulement. Il n'y a pas de fluide qui traverse une ligne de courant à un instant donné. Les lignes de courant peuvent être visualisées en semant des petites particules dans l'écoulement et en les photographiant avec un temps d'exposition adapté à la vitesse du fluide. On obtient les informations sur l'amplitude et la direction de la vitesse en différents points de l'écoulement et les lignes de courant peuvent alors être déduites en traçant les courbes tangentes aux vecteurs vitesses. De même, différentes photos réalisées à différents instants rendront compte de l'évolution des vitesses sur le domaine observé au cours du temps.

Une ligne d'émission correspond par contre à la *position instantannée* de toutes les particules fluides qui sont passées par un point particulier de l'écoulement. Une ligne d'émission peut être visualisée en injectant continuellement un colorant, une fumée.

Une trajectoire est la ligne qui suit une particule fluide dans l'écoulement en fonction du temps. La trajectoire rend compte de *l'histoire d'une particule fluide*. Elle peut être visualisée si on enregistre sur une période le mouvement d'une particule étrangère introduite dans l'écoulement.

Lorsque l'écoulement est stationnaire, les lignes de courant coïncident avec les lignes d'émission et les trajectoires. Ainsi quel que soit le type de visualisation que l'on a réalisé, les déformations de l'interface que l'on observe sont reliées au taux de croissance de l'instabilité. Cependant, lorsque l'écoulement dépend de l'espace et du temps, les lignes d'émission et les trajectoires diffèrent des lignes de courant et il est délicat d'interpréter la déformation de l'interface. Les positions des particules fluides sont très sensibles aux fluctuations de vitesse et sont fortement susceptibles de ne pas traduire l'évolution d'une instabilité.

F. Hama [3] (1962) a étudié numériquement en 1962 ce phénomène dans la configuration particulière d'un écoulement cisailé. Il s'est intéressé au comportement des lignes d'émission et des trajectoires dans la couche de mélange *saturée*. La couche de mélange est perturbée par une onde propagative sinusoïdale neutre. Le point d'émission de ces ondes est déplacé verticalement de telle sorte que tout le champ d'écoulement soit balayé. Deux points d'émissions de colorant sont particulièrement intéressants, le premier situé dans la couche critique et le second à l'extérieur. La couche critique est définie comme la seule région où la vitesse d'une onde est égale à la vitesse de l'écoulement. Elle est d'épaisseur  $1/Re^{1/3}$  et les effets visqueux ou non linéaires y sont dominants. F. Hama a montré que les lignes d'émissions dans la couche critique peuvent s'enrouler et former des tourbillons alors que l'onde perturbative, elle-même, n'est pas amplifiée. Bien entendu, les mesures de vitesse de phase et de longueur d'onde sont correctes du fait des propriétés de cette zone. Loin de la couche critique, les lignes d'émission présentent

alternativement des amplifications et amortissements, ne rendant pas compte du comportement de l'onde. Les trajectoires, tracées à partir d'une particule marquée dans l'écoulement ne suivent en aucun cas, c'est à dire à l'extérieur de la couche critique et dans la couche critique, le mouvement de l'onde.

Les profils de vitesse que nous avons mesurés étant des profils de Bickley, nous avons pu valider numériquement nos mesures de taux de croissance effectuées dans la phase de croissance initiale (linéaire) de l'instabilité. Nous avons introduit des particules traçantes en différents points du profil de vitesse et nous avons simulé l'instabilité linéaire 2D associée.

Dans un premier temps, nous avons mesuré et comparé l'évolution temporelle de l'amplitude de déformation de l'interface à celle de l'énergie des perturbations. La courbe 2.13 (page 38) présentée dans l'article expérimental montre que la déformation de l'interface suit le développement de l'instabilité dans la phase de croissance linéaire et ce, même lorsque l'émission de colorant est légèrement décalée par rapport au plan de symétrie du sillage.

Puis, nous avons comparé les taux de croissance évalués à partir de l'amplitude des déformations de l'interface avec la courbe théorique prédite, dans le cadre d'une analyse de stabilité linéaire du sillage de Bickley, par Drazin & Howard [4]. La figure 2.7 présente l'évolution du taux de croissance en fonction du nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda_{2D}$ . Les symboles ronds pleins représentent les résultats de nos simulations et la courbe en trait plein et ronds creux relate l'évolution du taux de croissance théorique. Cette comparaison montre que, quelle que soit la longueur d'onde  $\lambda_{2D}$  imposée, l'évaluation du taux de croissance à partir de l'amplitude des déformations de l'interface est proche de la théorie. Elle est une mesure correcte du développement initial de l'instabilité.

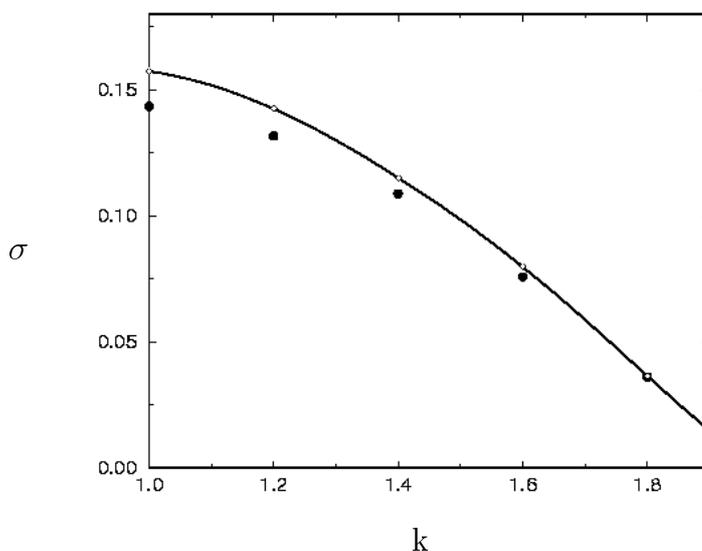


Figure 2.7: Comparaison entre les taux de croissance mesurés à partir des déformations de l'interface et les prédictions données par l'analyse de stabilité linéaire de Drazin & Howard [4].

# Bibliographie

- [1] D.G. Schowalter, C.W. Van Atta & J.C. Lasheras “A study of streamwise vortex structure in a stratified shear layer,” *J. Fluid Mech.* **281**, 247 (1994).
- [2] C.M. Ho & P. Huerre, “Perturbed free shear layers,” *Ann. Rev. Fluid Mech.* **16**, 365 (1984).
- [3] R. Hama, “Streaklines in a perturbed shear flow,” *Phys. Fluids* **5**(6), 644 (1962).
- [4] P.G. Drazin & W.H. Reid, “Hydrodynamic Stability,” Cambridge University Press (1981).

## 2.5 Three-dimensional instabilities in plane wake

Auteurs : Stéphanie Julien <sup>2</sup>, Juan C. Lasheras <sup>1</sup> and Jean-Marc Chomaz <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of AMES, University of California, San Diego, 92093 , USA

<sup>2</sup> Laboratoire d'Hydrodynamique, CNRS-UMR 156, École Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France

NOTE : les dénominations “sinuous mode” et “varicose mode” se réfèrent respectivement au mode antisymétrique et au mode symétrique.

### Abstract

We investigated experimentally the dynamics of the three-dimensional, secondary instability developing in the wake of a thin, flat plate at moderate Reynolds numbers. The wake is formed as the two laminar boundary layers developing on each side merge at the trailing edge of the flat plate. Both the spatial and temporal evolution of the two and three-dimensional instabilities are analyzed by means of laser induced visualizations of the deformation of the interface separating both streams. It was found that although the wake may exhibit two distinct, three-dimensional modes with different symmetry characteristics, sinuous and varicose modes, the latter appears to be amplified first, dominating the evolution of the near wake. By varying the forcing frequency of the primary two-dimensional instability for the Reynolds numbers studied, we found that the wavelength of the three-dimensional varicose mode is selected by the wavelength of the two-dimensional von Kármán vortices, with a ratio ( $\lambda_{3D}/\lambda_{2D}$ ) of order one. In the far wake region, the sinuous mode also appears to grow and co-exist with the varicose one. Furthermore, by analyzing the response of the wake to spanwise periodic or impulsive perturbations applied at the trailing edge of the plate, we demonstrate that the nature of the secondary instability of the wake behind a thin flat plate is convective.

### 2.5.1 Introduction

It has long been established that the primary instability of the wake behind a thin flat plate is two-dimensional (2-D) and leads to the formation of two staggered rows of spanwise vortices of opposite signs, the von Kármán vortex street (see [Williamson (1996)] for a review). This primary state is, in itself, unstable to three-dimensional (3-D) perturbations. The transition to three-dimensionality is thought to play an important role in the mixing properties and in the transition to turbulence in the wake. Furthermore, the combined development of both 2-D and 3-D instabilities, and their receptivity to various forcing or actuation techniques play a dominant role in the design of control strategies to minimize the drag of submerged bodies or to enhance the mixing of passive scalars in their wakes. Of course, the decomposition into primary and secondary instabilities arising sequentially in space is only conceptual since in many flows both may develop simultaneously. In our study, we selected a flat plate configuration so that the development of the primary and secondary instabilities could be controlled sequentially, and, therefore, the intrinsic dynamic of the secondary instability could be studied systematically.

In a previous related study, Lasheras & Meiburg (referred to hereafter as LM) found the existence of two families of 3-D instability modes with the periodicity of the basic flow, but with distinct symmetry characteristics ([Meiburg & Lasheras (1987)]). Owing to the associated cross-stream displacements of the von Kármán spanwise vortices, they named them the “sinuous” or

”anti-symmetric” mode and the ”varicose” or ”symmetric” mode (figures 2.8 and 2.9). The existence of these 3-D modes and their symmetry characteristics have been clearly established and have been shown to be an intrinsic feature of all types of wake flows. For example, they have been observed in wakes behind thin airfoils, and in wakes behind bluff bodies such as circular cylinders [Williamson (1994)], [Williamson (1996)].

LM also found the existence of a wide variety of additional 3-D modes resulting from the growth of oblique, subharmonic waves. However, in their experiments, they found that the amplification rate of these oblique modes appeared to be much slower than the ”sinuous” and ”varicose” modes. Thus, in the present study, we will restrict our investigation to the development of these two 3-D modes only, and in particular, will focus our attention on the problem of determining their amplification rate and their wavelength selection.

### 2.5.2 Mechanism of the secondary instability

As it was shown experimentally in plane shear layers (Lasheras & Choi (1988)), the mechanism of the secondary instability is based on the existence of strain fields acting both on the primary vortices and on the braid region between consecutive vortices which develop as the primary instability grows and saturates to form the von Kármán vortex street ([Meiburg & Lasheras (1987)], [Lasheras & Meiburg (1987)]). During the linear stage, the primary vortices start to undulate under the action of the strain field. At the same time, the vorticity which lies in the braids connecting two spanwise vortices of opposite signs is reoriented, tilted and stretched in the plane of positive strain rate. This stretching and concentration of the braid vorticity leads to the formation of the well known array of pairs of streamwise vortices of opposite signs. In the non-linear stage, the streamwise vortices wrap around the spanwise vortices and interact with them, inducing lateral displacements. Depending on the initial conditions, LM showed the appearance of two modes with different symmetry characteristics, i.e. the ”sinuous” and ”varicose” modes. They observed the formation of these two modes by introducing 3-D sinusoidal perturbations of a given wavelength deforming the trailing edge of the splitter plate either in the streamwise (indented plate) or in the crosswise direction (corrugated plate). The schematic views of figure 2.8 show the deformation of the von Kármán-like primary eddies as well as the formation of counter-rotating pairs of longitudinal vortices when the secondary instability is fully developed. In the ”sinuous” mode, the longitudinal vortices exhibit a ”lambda shape”, and the associated crosswise deformation of the spanwise opposite-signed vortices remains in-phase (see figure 2.8-a). In contrast, in the ”varicose” mode, the longitudinal vortices are aligned in the streamwise direction and result in an out-of-phase crosswise undulation of the spanwise opposite signed vortices (see figure 2.8- b). The end-views of the vortex sheets (figure 2.9 (a & b)) obtained from LM’s vortex dynamics numerical simulations show the ”in- phase” and the ”out-of-phase” crosswise undulations of primary eddies characteristic of the ”sinuous” (figure 2.9-a) and the ”varicose” modes (figure 2.9-b). This feature was also used by LM in naming the two modes as the ”in-phase” and ”out-of-phase” modes. It should be emphasized that the streamwise deformation of the primary vortices presents the opposite symmetry compared to the crosswise deformation (see figures (1 & 2) in [Lasheras & Meiburg (1987)]).

In the present study, we have analyzed the evolution of planar wakes developing under a wide range of initial and forcing conditions. In particular, we have focused our study on the determination of the 3-D wavelength and mode selection by using the above described symmetry characteristics of each of the 3-D modes.

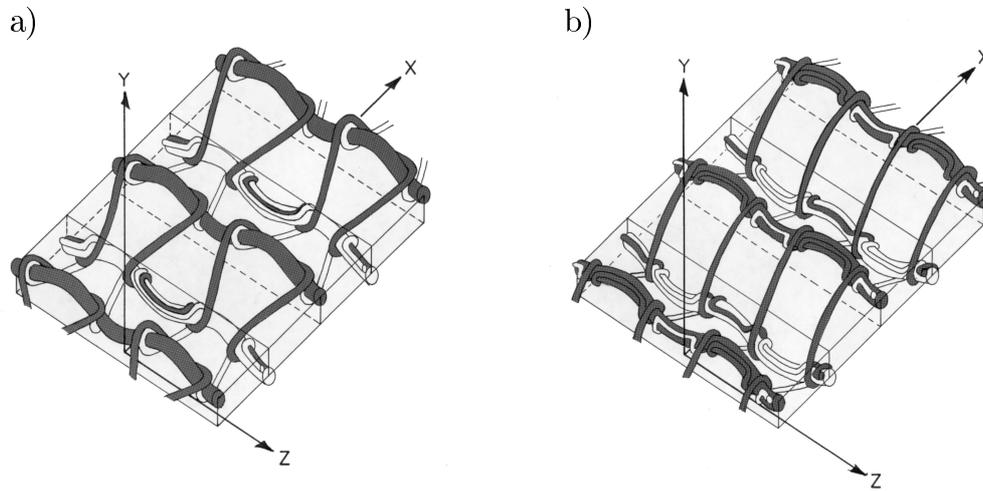


Figure 2.8: Schematic views of the vorticity tubes : a) Sinuous mode, b) Varicose mode.

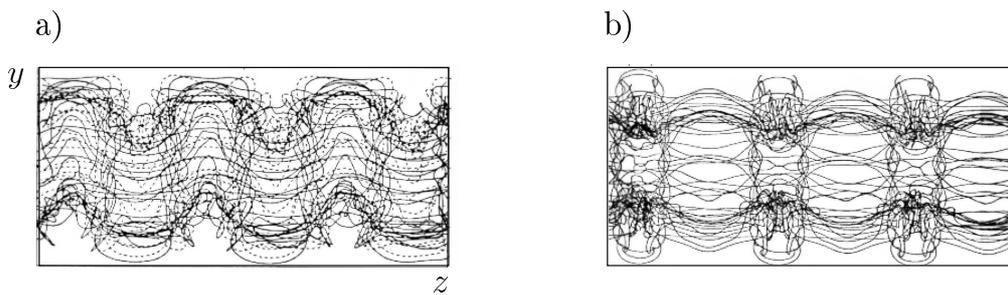


Figure 2.9: End view of the deformed vorticity layers from [LM] : a) Sinuous mode, b) Varicose mode.

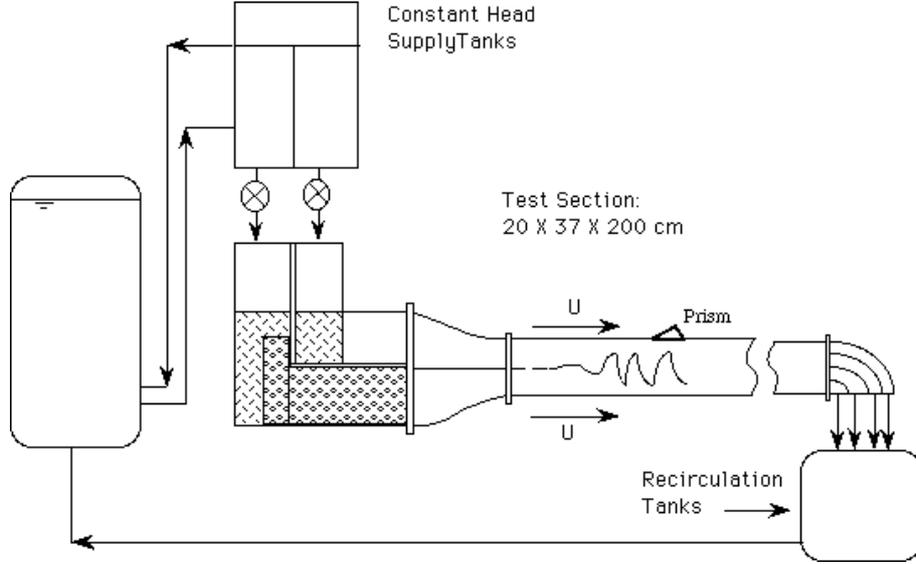


Figure 2.10: Experimental Set-up.

### 2.5.3 Experimental set-up

The experimental facility is a blow-down, two open stream water channel (figure 2.10) specifically designed to minimize the presence of uncontrolled random noises in the base-flow. A detailed description of the facility can be found in Schowalter, Van Atta & Lasheras (1994). The two parallel streams separated by a thin flat plate are allowed to meet at the trailing edge of the plate located at the entrance of a 2 m long test section. The evolution of the wake is then analyzed using various flow visualization techniques. Two series of experiments are reported here, corresponding to two different laminar free stream velocities,  $\bar{U} = 6.3$  cm/s and  $\bar{U} = 5.3$  cm/s. Figure 2.11 shows both sets of experimental points for the velocity measured at the trailing edge of the splitter plate ( $x = 2$  mm), with  $U$  non-dimensionalized by the free stream velocity  $\bar{U}$  and  $y$  rescaled by  $U^{-1/2}$ . Whichever the velocity, all the points describe a unique curve. This result is consistent with the laminar boundary layer theory where the thickness of a boundary layer scales as  $U^{-1/2}$ .

Both velocity profiles are well fitted by a Bickley wake :

$$\frac{U}{\bar{U}} = 1 - \Theta \operatorname{sech}^2\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (2.3)$$

$\Theta$  being the velocity defect approximately equal to 0.8 and  $\delta$  the dimensionalized Bickley wake thickness such that  $\delta = A/\sqrt{\bar{U}}$ , with  $A \approx 0.88 \text{ cm}^{3/2}\text{s}^{-1/2}$ . It should be noted that fitting with a Bickley profile slightly overestimates the central velocity of the wake profile. The Bickley wake thicknesses are equal to  $\delta = 0.35$  cm and  $\delta = 0.38$  cm for  $\bar{U} = 6.3$  cm/s and  $\bar{U} = 5.3$  cm/s respectively. Both sets of experiments running under these very close experimental conditions,  $Re_1 = 220$  and  $Re_2 = 200$ , were independent and allowed us to get rid of any artefacts like confinement effects or free surface effects (a third velocity  $\bar{U} = 4.8$  cm/s has been tested less exhaustively and confirms all the present observations).

For each Reynolds number case, we carried out three sets of experiments : unforced or natural flow, forcing the 2-D primary instability only, and forcing both the 2-D and 3-D instabilities. In each case, we used various flow visualization techniques and digital image processing analysis

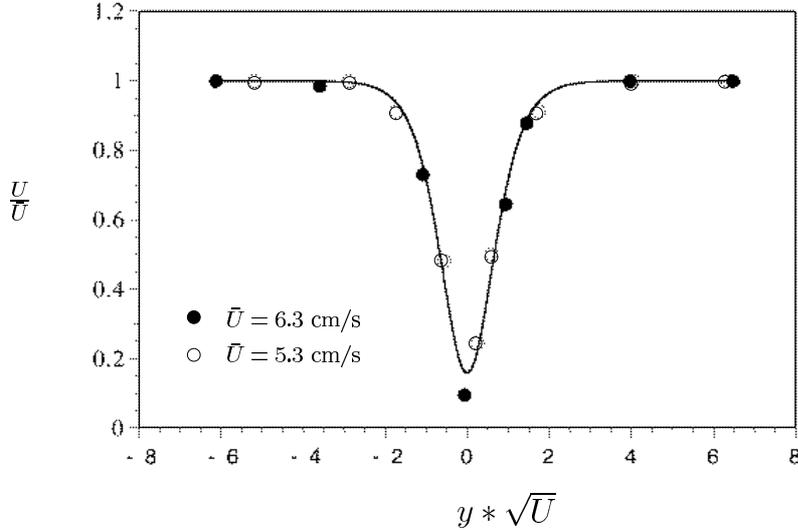


Figure 2.11: Rescaled velocity profiles measured at the trailing edge of the splitter plate,  $x = 2$  mm, fitted by  $U/\bar{U} = 1 - \Theta \times \text{sech}^2(y\sqrt{\bar{U}}/\delta)$  with  $\Theta = 0.8$  and  $\delta = 0.88$  evaluated with  $10^{-2}$  of accuracy.

to track the evolution of the wake from the trailing edge of the splitter plate to a downstream distance of about 24 cm (always larger than 8 times the wavelength of the 2-D instability).

To analyze the 3-D evolution of the wake, we measured the spatial and temporal deformations of the interface separating both streams. This technique allows us, although indirectly, to determine the growth rate of the 2- and 3-D instabilities developing in the wake. We will specifically address the validity of this technique later on in this section.

The evolution of the interface was tracked using planar laser induced fluorescence (PLIF). Fluorescent dye was added to the lower layer and the position of the interface separating both streams was recorded through the use of simultaneous longitudinal and cross-stream cuts produced by the intersection of thin laser planes. The longitudinal cut of the flow along the  $(xy)$ -plane will be referred to as the "side-view", while the cross-stream cuts along planes parallel to  $(yz)$  performed at various downstream locations  $x$  will be referred to as "end-views". As was shown by [Schowalter, Van Atta & Lasheras (1994)], the use of a prism slightly submerged in the free surface of the channel allowed us to avoid any problem resulting from the free surface distortion and changes in the index of refraction. The camera and laser plane assemblage were systematically moved downstream to provide the necessary information on the spatial evolution of the 3-D instabilities. To complement this set of visualizations, a spotlight array identical to that used in [Lasheras & Choi (1988)] was also used to observe the evolution of the complete 3-D topology of the interface separating both streams.

The recorded P.L.I.F. frames were processed on a Macintosh computer using the public domain NIH Image program (developed at the U.S. National Institutes of Health and available on the Internet at <http://rsb.info.nih.gov/nih-image/>). Since the characteristic time of diffusion of the fluorescein dye is an order of magnitude larger than the convective time of the flow of interest, the interface always appears as a sharp line in our flow visualization. However, as one moves downstream the interface becomes more diffused due to both 3-D foldings of the

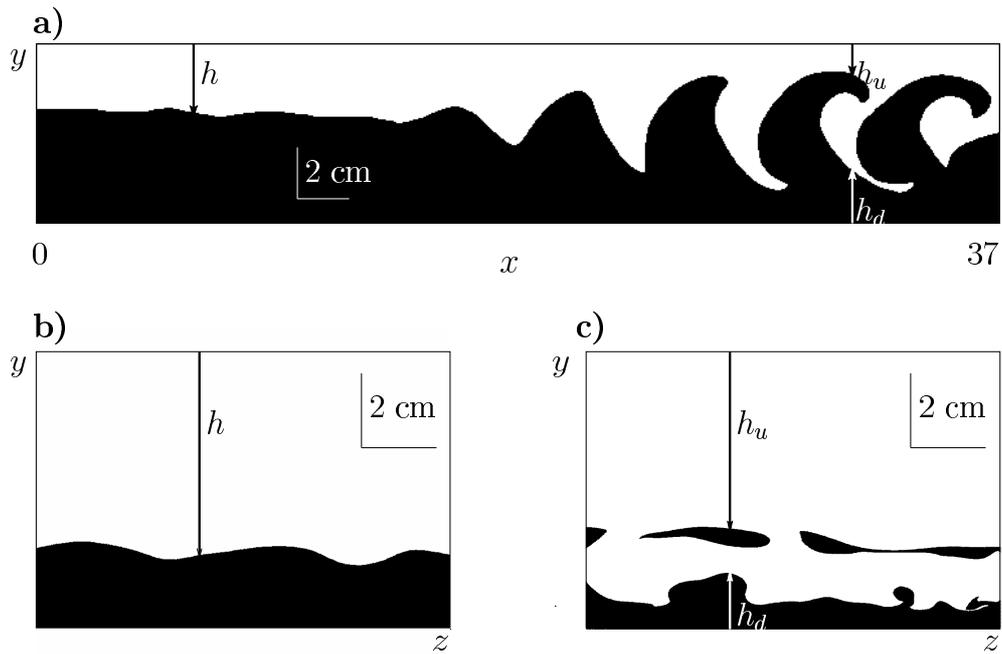


Figure 2.12: Interface elevation. Wake of a flat plate at  $Re_1 = 220$  forced at the frequency  $f = 1.2$  Hz ( $St = \delta f / \bar{U} = 0.07$ ), a) longitudinal section ( $z = z_c$ , center of the channel), b) interface defined by a single line ( $x = 6$  cm), c) folded interface ( $x = 20$  cm).

interface and the light attenuation effects. Throughout this study, the criterion used to detect the interface was to fix its location at the position where the pixel intensity is 50% of the average values of the intensity in the dye layer. Using this method, we measured the location of the interface along the span on each digitized image (see figure 2.12).

This information, which was collected for every consecutive frame in a sequence of images, allowed us to obtain the complete spatial-temporal evolution of the deformed interface. This procedure was carried out both for the longitudinal laser cuts (figure 2.12-a) as well as for the transverse laser cut (figure 2.12 (b & c)). It is important to emphasize that due to the low convective velocity of the mean flow (5.3 to 6.3 cm/s), a 30 frames per second sequence obtained with shutter speeds of 1/4000 s provided us with a very accurate description of both the spatial and temporal evolution of the interface.

Close to the splitter plate, as the 2-D von Kármán vortex street starts to grow, the interface is always characterized on the side-views by a slightly bent line. Furthermore, in this case, the end-view visualization (figure 2.9-b) reveals a very small 3-D deformation. Therefore, in this initial region where there is no overturning, the position of the interface given by its elevation  $h(x, z, t)$ , ( $(x, z)$  refer to the streamwise and the horizontal spanwise location respectively and  $t$  to time), is a uniquely defined quantity (a single-valued function), and can be measured on either the side view (figure 2.12-a) or the end-view cut (figure 2.12-b). Further downstream, the flow is overturned and the interface wraps around the spanwise von Kármán vortices, (see the downstream part of the side view shown in figure 2.12-a). Thus, at a given location downstream  $(x, z)$ , the interface is no longer defined by a single elevation, and the function  $h(x, z, t)$  becomes multi-valued. The interface is then defined by several lines and closed loops in the end-view cuts, figure 2.12-c. To analyze this stage where the interface has become highly corrugated, we introduce two symmetrically defined parameters  $h_u(x, z, t)$  and  $h_d(x, z, t)$  :  $h_u(x, z, t)$  is the uppermost position and  $h_d(x, z, t)$  the lowermost position of the interface at the location  $(x, z)$  at time  $t$ . Note that, in the near wake, when there is no flow overturn, both  $h_d$  and  $h_u$  are the same and equal to the  $h$  defined above.

In the early stage of the wake development (i.e. in the linear growth regime), the measurements of the streamwise interface deformations are related to the growth of the primary instability which leads to the formation of the staggered array of von Kármán vortices. Thus, the measured evolution of  $h$  allows us to evaluate the downstream evolution of the amplitude of the 2-D mode and consequently to deduce the growth rate of the primary instability.

To fully confirm the close correlation between the amplitude of the interface deformation and the amplitude of the instability development, we have performed a set of linear time-evolving simulations using the numerical procedure described in Delbende, I. & Chomaz, J.-M. (1998). Of course, interface deformations are not only related to the growth of the primary instability once the vortices are fully developed, since the interface deformation which results from the advection of a passive scalar may, for example keep increasing whereas the evolution of the vortex street is saturated (or vice versa). Numerical simulations show that the determination of the amplitude of the primary instability from measurements of the interface deformation is correct in the linear stage, even though it is erroneous in the later stage when the dynamics is non-linear.

We have investigated numerically the 2-D linear stability of the Bickley jet on a periodic box whose length  $L$  is fixed. To materialize the interface, we have "injected" initially streamwise horizontal lines of passive scalars along the  $y$ -axis ( $y \in [0; 0.8]$ ,  $y = 0$  being the symmetry axis of the Bickley jet). All the simulations were initialized by a random perturbation on the velocity field. Two sets of computations were performed. In the first set, the Navier-Stokes equations are linearized, but velocity perturbations are allowed to reach an order one amplitude

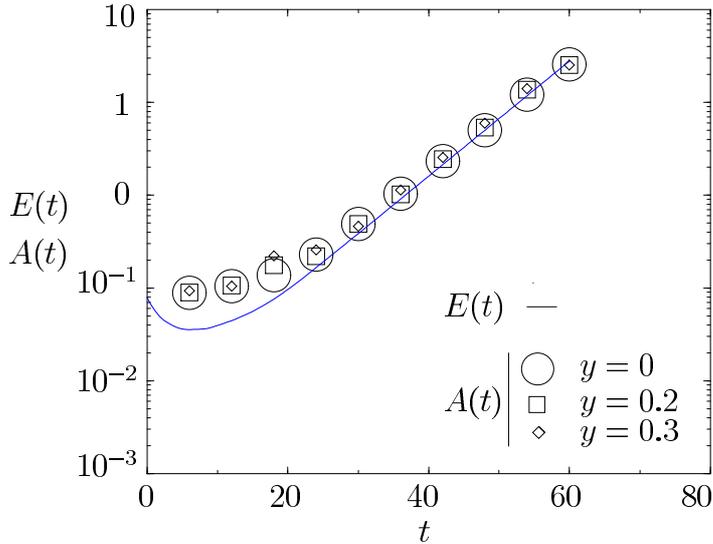


Figure 2.13: Time evolution of energy  $E(t)$  and maximum amplitude deformation of the 2-D bickley jet instability, the Bickley jet defined as  $(U = \text{sech}^2(y))$ .

leading to a non trivial passive scalar dynamics. In the second set, the fully non-linearized evolution of the vorticity is computed and therefore perturbations in velocity are allowed to saturate. Both sets give essentially similar results and a single example pertaining to the first set will be commented here (an exhaustive analysis will be presented elsewhere). Figure 2.13 shows the growth of energy  $E(t)$  and the growth of the amplitude of the interface deformation  $A(t) = (A_{max}(t) - A_{min}(t))$  as a function of time. Since we have imposed a 2-D wavelength ( $\lambda_{2D} = 2\pi/L$ ) and we have initialized the simulations with a white noise, all the harmonics are initially excited :  $\lambda_{2D} = 2n\pi/L$ ,  $n$  being an integer. These are completely damped during the initial instants of the simulations. This phenomenon appears clearly in the initial decrease of energy, till  $t = 20$  in Figure 2.13. After these transients, the energy  $E(t)$  grows exponentially. At this stage, the interface deformation amplitude  $A(t)$  starts also to grow exponentially with the same growth rate. Figure 2.13 shows three sets of points for the interface deformations, each corresponding to different interface location but all exhibiting the same behavior. This shows then the good agreement between growth rate measured from the development of the vorticity perturbation field and from the interface deformation growth even if the interface is not exactly located on the symmetry axis. This result extends to 3-D perturbations. Indeed, it is well justified from the early studies of LM, who have compared 3-D deformations of a passive scalar to deformations of a vorticity layer, to assume that the amplitude of the secondary instability, in its early development (i.e. when 3-D perturbations are small) can also be evaluated by measuring the spanwise deformations of the interface.

The P.L.I.F. visualization of the longitudinal sections (figures (2.12-a)) allows us to study and characterize the primary 2-D instability. When the wake develops naturally, without any forcing except for the inherent low level background noise of the experimental set-up, the primary instability grows slowly in space and saturates far downstream, forming irregular von Kármán vortex streets. The irregularity is quite apparent in the visualization shown in figure 2.14, where the local wavelength is shown to be considerably larger in the right hand side of the frame versus

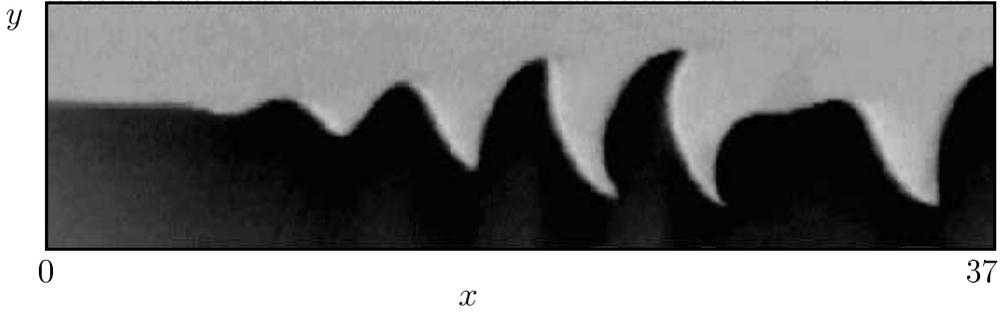


Figure 2.14: Longitudinal visualization of the unforced von Kármán vortex street,  $Re_1 = 220$ ,  $z = z_c$  near the center of the channel. Scales are identical in  $x$  and  $y$ .

that in the left.

To characterize the temporal irregularities in the wavelength of the 2-D mode, we have analyzed the temporal evolution of the interface at each downstream location. This can be easily achieved from the longitudinal visualizations by pasting together the temporal evolution of a single column in the digitized sequence of images. In our experiments, the time resolution of these measurements is 0.0045 since the images were acquired at 30 fps and with very high shutter speeds ( $< 10^{-3}$  s). Figure 2.15 shows a typical evolution of the 2-D mode. Each single, temporal diagram in figure 2.15 was taken at a different streamwise location. Observe that at each downstream location, the time evolution of the interface is roughly sinusoidal. The measured average period of the oscillation was found to be constant up until a downstream location  $x = 18$  cm. The amplitude was also found to be irregular with a mean value which increases with  $x$ .

To characterize the 2-D modes of the wakes, we calculated the Strouhal number,  $St = (\delta \times f/U)$ , defined by the mean 2-D frequency of the vortex street  $f$ , the width of the wake at the trailing edge of the splitter plate  $\delta$ , and the mean velocity of the free stream,  $\bar{U}$ . The mean frequencies of the naturally evolving wakes were  $f = 1.2$  Hz and  $f = 1$  Hz, which correspond to  $St = 0.07$  for both  $Re_1 = 220$  and  $Re_2 = 200$ , respectively.

In order to compare the predictions of the linear temporal theory of the secondary instability, we needed to measure the local wavelength of the primary instability. For this purpose, we followed the deformation of the interface both in time and in the streamwise direction at  $z_c$ , the center of the channel.

Figure 2.16 shows the value of the interface displacement  $h(x, z_c, t)$ , plotted in gray levels, as a function of both time and the streamwise coordinate,  $x$ . In this particular case, we observed the appearance of waves, as early as the streamwise location of  $x = 7$  cm. The waves propagate downstream while increasing in magnitude. The primary instability is irregular and as it saturates, we found that the mean wavelength can be assumed to be constant. Therefore, its wavelength may be determined from the frequency by using a phase velocity independent of  $x$ . In the  $(x, t)$  diagram of Figure 2.16, the phase velocity,  $V$ , is determined by the slope of the oblique stripes. We found  $V = 5.5$  cm/s and  $V = 4.6$  cm/s, for  $Re_1 = 220$  and  $Re_2 = 200$ , respectively, which correspond to  $V = 0.85 \times U$  in both cases.

To control the von Kármán vortex street, we modulated the velocity of the lower stream by means of a very small piston located in the upstream settling chamber of one of the two streams (see [Schowalter, Van Atta & Lasheras (1994)]). Although the forcing frequency was varied over a large range of Strouhal numbers  $St$ , from 0.04 to 0.16, a regular von Kármán vortex street

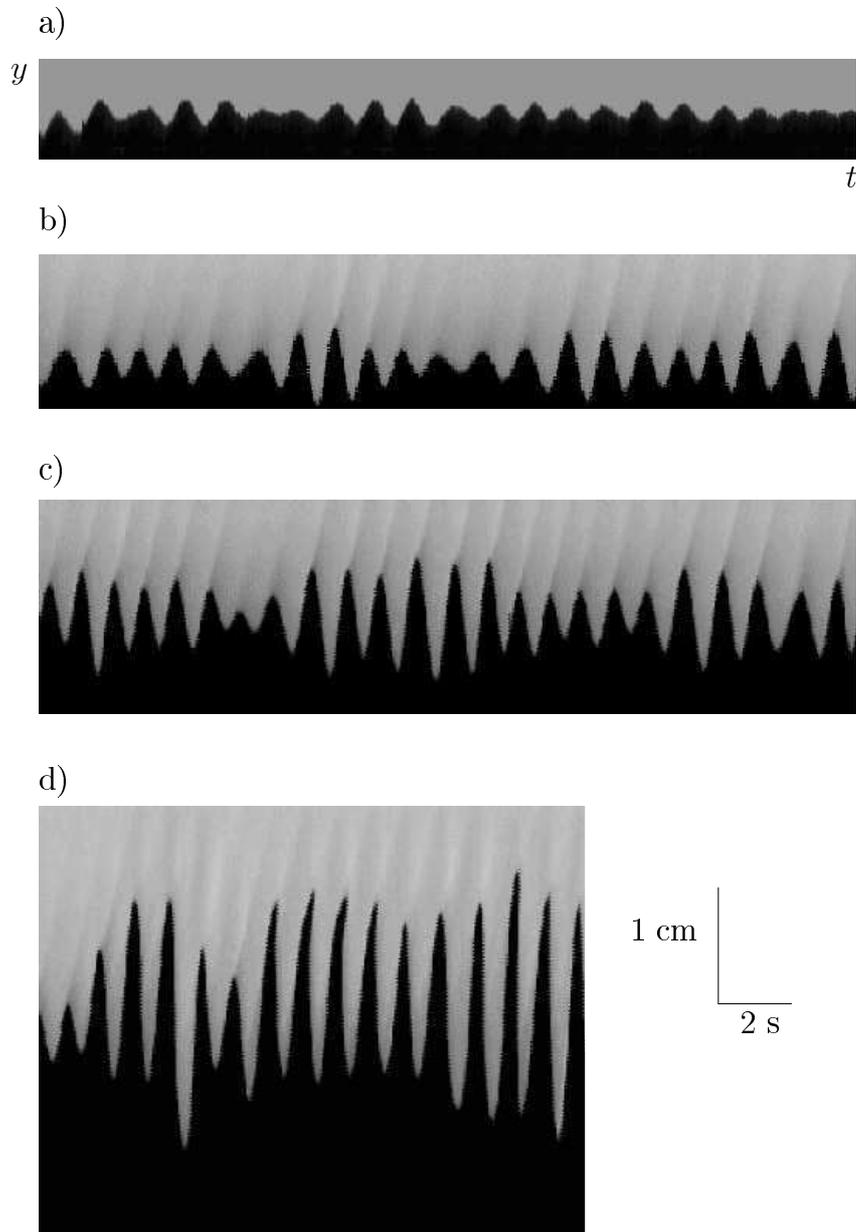


Figure 2.15: Temporal reconstitution of the unforced 2-D von Kármán vortex street,  $Re_1 = 220$ ,  $z = z_c$  near the center of the channel. a)  $x = 3$  cm, b)  $x = 7$  cm, c)  $x = 11$  cm, d)  $x = 18$  cm.

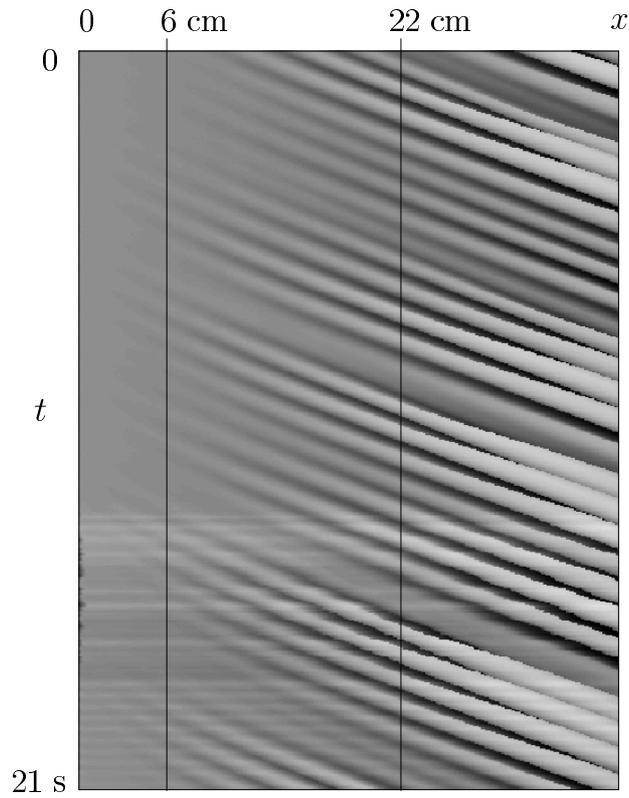


Figure 2.16: 2-D spatio-temporal diagram of the interface height for the unforced wake,  $Re_1 = 220$ ,  $z = z_c$  near the center of the channel.

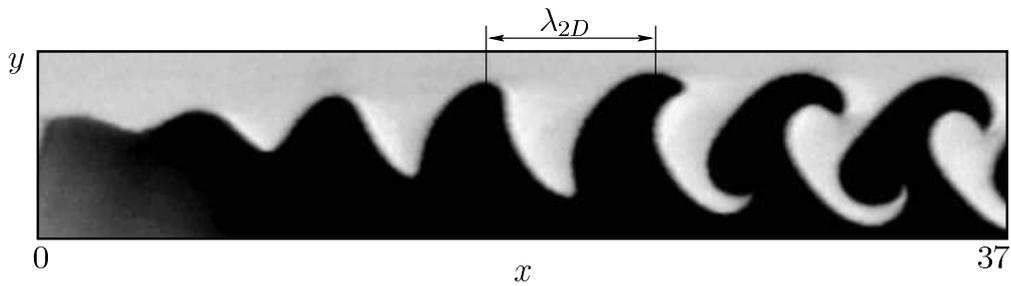


Figure 2.17: Longitudinal visualization of the forced von Kármán vortex street,  $Re_1 = 220$ ,  $St = 0.07$ ,  $z = z_c$  near the center of the channel. Scales in  $x$  and  $y$  are identical.

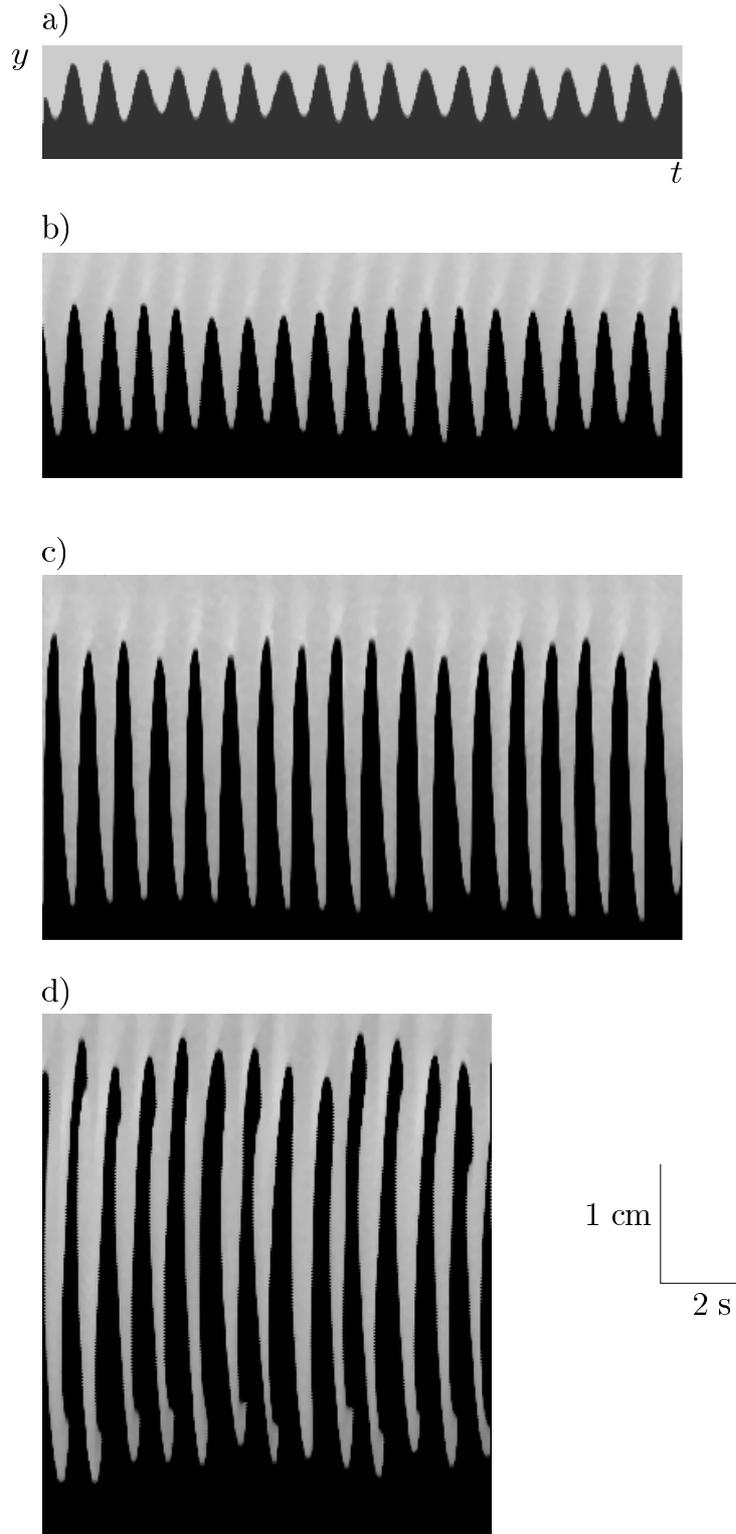


Figure 2.18: Temporal reconstitution of the forced 2-D von Kármán vortex street,  $Re_1 = 220$ ,  $St = 0.07$ ,  $z = z_c$  near the center of the channel. a)  $x = 3$  cm, b)  $x = 7$  cm, c)  $x = 11$  cm, d)  $x = 18$  cm.

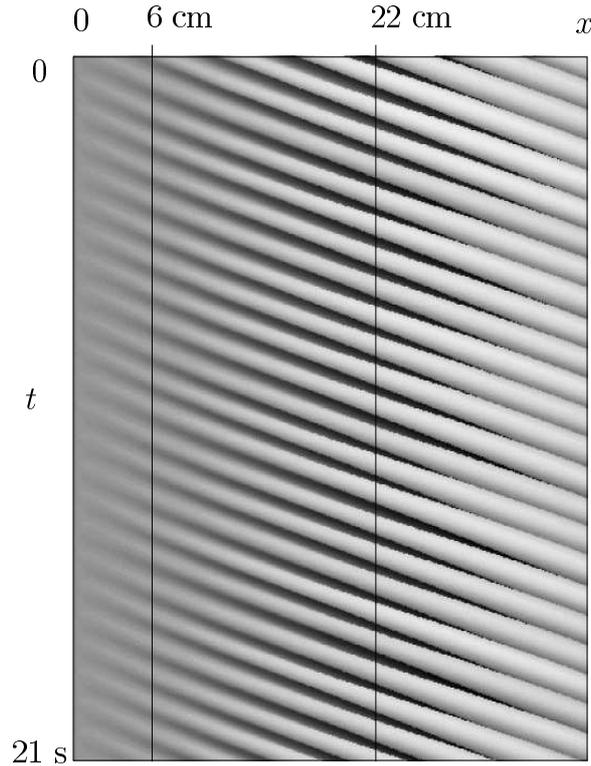


Figure 2.19: 2-D spatio-temporal diagram of the interface height for the forced wake,  $Re_1 = 220$ ,  $St = 0.07$ ,  $z = z_c$  near the center of the channel.

was obtained only for a subrange of forcing frequencies.

In the case  $Re_1 = 220$ , the von Kármán vortex street was found to be regular in space (figure 2.17) and time (figure 2.18) only for Strouhal numbers ranging from 0.06 to 0.09. Since the forcing amplitude is larger than the amplitude of the background noise, the amplitude of the primary instability measured in these cases was found always to be larger than in the natural case, forming a more regular vortex pattern absent of irregularities (compare the natural case figures (2.14, 2.15 & 2.16) and the forced case, figures (2.17, 2.18 & 2.19). Note that, in the forced case the interface has nearly overturned at the downstream location  $x = 11$  cm, figure 2.18, whereas it is still developing in the natural case, (figure 2.15). However, the phase velocities, evaluated on the spatio-temporal diagrams such as the one in figure 2.19, are independent of the forcing frequencies and are always equal to  $0.85 \times U$ .

#### 2.5.4 The close wake

In this section, we consider the initial evolution of the wake in the first 4 to 5 wavelengths downstream of the splitter plate (down to about 11 cm). This region will be referred to as the near wake. In these early stages, since there is no folding of the interface, the measurement of the parameter  $h(x, z, t)$ , height of the interface taken from the top of the frames, is sufficient to reconstruct the entire evolution of the interface.

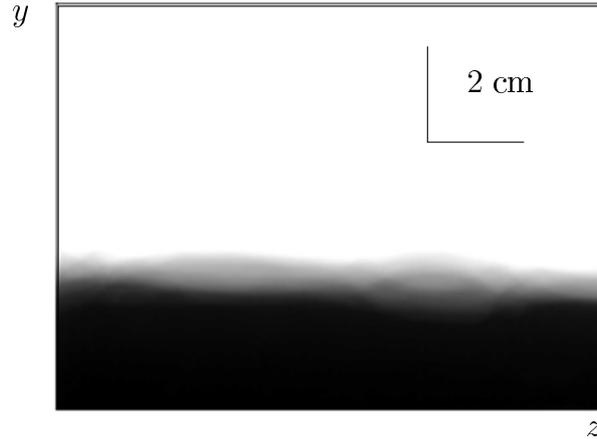


Figure 2.20: Varicose mode,  $Re_1 = 220$ ,  $x = 11$  cm.

### Unforced case

Despite the irregularity in the frequency and the amplitude of the primary instability observed in the natural unforced case, the secondary instability was always observed developing, producing deformations of the interface in the spanwise direction. This can be seen in the mean dye concentration shown in figure 2.20 which was obtained by averaging 20 consecutive end-views P.L.I.V. images in a time, taken at 15 frames/sec.

Figure 2.20 represents the concentration of dye averaged during several periods of the primary instability. In this averaged visualization, one can clearly see the deformation of the interface resulting from both the primary and the secondary 3-D instabilities. The symmetry characteristics of the mean concentration reveal that the selected 3-D mode is the "varicose" one (compare this figure with the vortex dynamic simulations shown in figure 2.9-b). However, in this uncontrolled reference experiment, where the naturally developing primary instability is irregular, the secondary instability, as characterized by its wavelength, was also seen to be irregular and unsteady. This can be observed in the spatio-temporal diagram, figure 2.21, which shows the evolution of the interface in both the spanwise direction and in time at a downstream location  $x = 11$  cm.

This representation is similar to the one shown in figures 2.16 and 2.19, except that we use now the visualization of the spanwise end view instead of the side view. Note that the length of the unit time-scale on the vertical axis of the spatio-temporal diagrams has been chosen using the phase velocity, therefore, relating the time to the streamwise deformations of the interface. This spatio-temporal evolution allows us to directly compare the streamwise deformations due to the primary instability and the spanwise deformations due to the secondary instability. In order to represent long time sequences, we have applied a factor of two between the spanwise coordinate and the equivalent streamwise length along the time axis. The primary instability, which induces time periodic oscillations of the interface in a cross-stream section, appears as a horizontal stripe since the darker the pixel the lower the interface (figure 2.21). Thus, the irregularity in the frequency of the 2-D von Kármán vortex street appears as the varying distance between the vertical stripes, and the irregularity in its amplitude appears as a variation along the span of the width of the white stripes. The appearance of the secondary instability is manifested by a waviness of the vertical lines, corresponding to the horizontal distortion of the primary

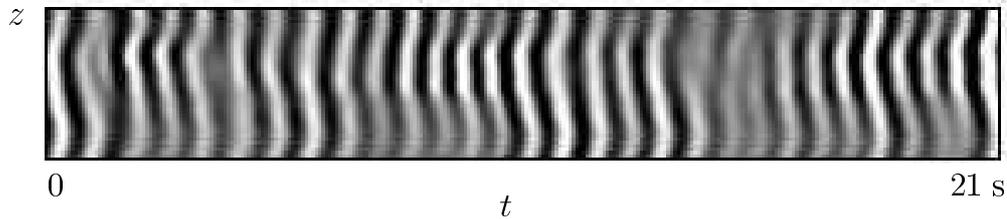


Figure 2.21: Spatio-temporal diagram of the irregular von Kármán vortex street, unsteady varicose mode,  $Re_1 = 220$ ,  $x = 11$  cm. The spanwise length shown ( $z$ -axis) is 11 cm.

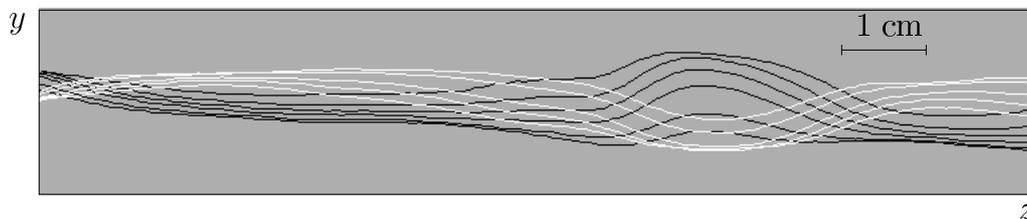


Figure 2.22: Superposition-diagram of interfaces during a period of the 2-D instability,  $Re_1 = 220$ ,  $x = 11$  cm. Scales are identical for  $y$  and  $z$ .

spanwise vortices. The horizontal, "in-phase" distortion of the von Kármán vortices, which is a characteristic feature of the "varicose" 3-D mode (see figure 2 in [Lasheras & Meiburg (1987)]) results in the "in-phase" waviness of the vertical stripes. Note that the "out-of-phase" undulation of two consecutive spanwise vortices in a vertical plane associated with the varicose mode induces a variation in the amplitude of the interface displacement along the span. In the spatio-temporal diagram, this modulation of the undulation amplitude corresponds to a variation in the contrast of the black and white stripes in the spanwise direction ( $z$ -axis) as can be seen in figure 2.21.

To confirm that we observed the appearance of the "varicose" mode, despite the irregularity of the primary and secondary instabilities, one can analyze the evolution of the interface over a single period of the primary instability. This was done by superimposing, as on the same diagram (figure 2.22), the location of the interface measured every one tenth of the period. Note that in the first half period (shown in black) the deformations of the interface along the span are approximately symmetric with respect to the average location of the interface to the other half (shown in white). This behavior indeed corresponds to the "out-of-phase" undulation of the interface, characteristic of the "varicose" mode. Thus, it confirms once again that the selected 3-D mode in this naturally evolving unforced flow is the "varicose" one.

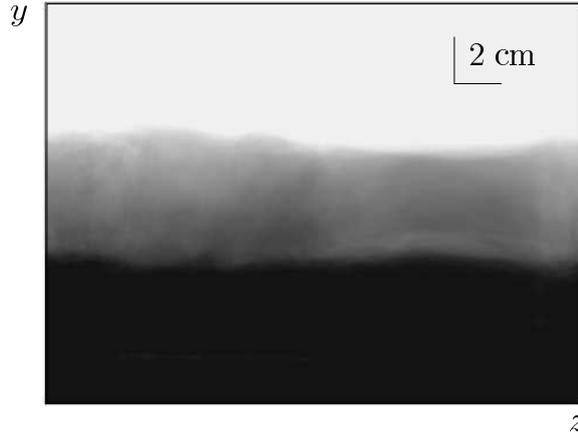


Figure 2.23: Concentration average picture,  $Re_2 = 200$ ,  $St = 0.07$ ,  $x = 10$  cm.

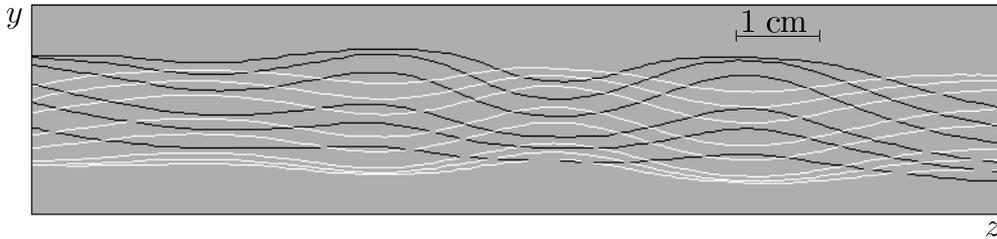


Figure 2.24: Superposition-diagram  $Re_1 = 220$ ,  $St = 0.07$ ,  $x = 7$  cm. Scales are identical in  $y$  and  $z$ .

### Two-dimensional forcing case

Under the effect of 2-D forcing, described in Section 2.5.3, the secondary instability was always observed to appear naturally (see figures 2.23, 2.24 & 2.25). Furthermore, we also observed that in this near region the "varicose" mode is dominant, regardless of the 2-D forcing frequencies applied.

Figure 2.23 shows a concentration average picture (similar to figure 2.20) measured at a section  $x = 10$  cm, for the case of  $Re_2 = 200$  with a forcing frequency corresponding to  $St = 0.07$ , exhibiting the vertical "out-of-phase" symmetry, characteristic of the "varicose" mode. Likewise, figure 2.24, which is a superposition-diagram for  $Re_1 = 220$   $St = 0.07$ , similar to the one shown in figure 2.22, also displays the vertical "out-of-phase" undulation of the interface for each half period.

In the spatio-temporal diagram, figure 2.25, one can clearly observe the spanwise modulation of the interface height amplitude  $h(x, z, t)$  which is visualized by the spanwise variations in the intensity of the periodic black and white. At the spanwise location A (figure 2.25) where only pale black and blurred grey are visible, the amplitude is smaller than at B where black and white saturates. On the other hand, in this figure, one can also observe the "in-phase" longitudinal distortion of the crest and trough of the interface characteristic of the streamwise undulation of the von Kármán vortices (figure 2 in [Lasheras & Meiburg (1987)]). Both features confirm

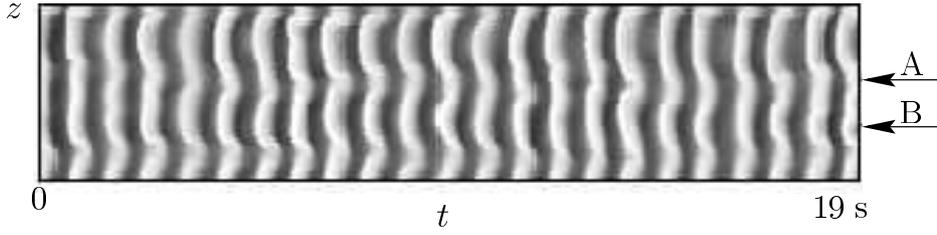


Figure 2.25: Spatio-temporal diagram,  $Re_1 = 220$ ,  $St = 0.07$ ,  $x = 11$  cm. The spanwise length shown ( $z$ -axis) is about 11 cm.

the appearance of the varicose mode. This spatio-temporal diagram demonstrates that the secondary instability appears to be not exactly stationary, i.e., the amplitude modulation and waviness move slowly along the span.

Measurements similar to figure 2.25, made at downstream locations every 2 cm (not presented here), showed that the mean wavelength of the varicose mode remains reasonably constant. By varying the forcing Strouhal number of the primary instability, we observed that the 3-D wavelength,  $\lambda_{3D}$ , of the varicose mode is always of the same order of magnitude as the wavelength of the 2-D mode,  $\lambda_{2D}$ . The 2-D wavelength is estimated as the ratio  $(V/f)$ , where  $V$  is the phase velocity and  $f$  is the applied forcing frequency of the primary instability. The mean 3-D wavelength was measured in the concentration averaged images (see figure 2.23), but we also obtained identical results when we measured it in the spatio-temporal diagrams of figure 2.25.

Table 2.1 shows the measured ratio  $(\lambda_{3D}/\lambda_{2D})$  as a function of the Strouhal number  $St = (f \times \delta)/U$ . As we varied the velocity and the 2-D forcing frequencies, the ratio  $(\lambda_{3D}/\lambda_{2D})$  always remained close to 1. Thus, we conclude that the wavelength of the primary and the secondary instabilities are of comparable magnitude. The values of  $(\lambda_{3D}/\delta)$  are also shown in Table 2.1. Note that they vary by a factor of 50%, demonstrating that the selection of the wavelength of the secondary instability is based on the wavelength of the primary vortices and not on the width of the initial wake profile. This result is consistent with the [Pierrehumbert & Widnall (1982)] translative instability computation for the mixing layer, and the [Brancher & Chomaz (1997)] stability analysis of jets which shows that the wavelength of the secondary instability is determined by the wavelength of the 2-D primary instability.

### Two- and three-dimensional forcing case

In order to investigate quantitatively the selection of the wavelength of the secondary instabilities, we performed additional series of experiments by forcing the varicose mode at varying wavelengths using indented trailing edges of the splitter plate. This technique introduced and discussed by [Meiburg & Lasheras (1987)] was shown to result in a spanwise varicose perturbation with the imposed wavelength. To vary the wavelength of the spanwise perturbation, we used 10 different shapes of trailing edges with wavelengths varying from 2.5 cm to 6 cm. The amplitude of the indentation was kept constant in all the cases and equal to 1 cm.

Figures 2.26 and 2.27 show the spatio-temporal evolution of the wake forced at  $St = 0.07$ , for two different 3-D forcing wavelengths. In both cases, the flow was found to develop a "varicose" mode at the imposed wavelength. Consistent with the development of the varicose mode, we

$Re$	$St$	$\frac{\lambda_{3D}}{\lambda_{2D}}$	$\frac{\lambda_{3D}}{\delta}$
200	0.07	1	12.6
	0.084	0.99	9.5
220	0.06	0.91	11.9
	0.07	0.96	11.1
	0.08	1.06	10.6
	0.09	0.93	8.3

$Re$	$St$	$\frac{\lambda_{3D}}{\lambda_{2D}}$	$\frac{\lambda_{3D}}{\delta}$
200	0.07	1	11.1
220	0.06	1	10.5

Table 2.1: Ratio ( $\frac{\lambda_{3D}}{\lambda_{2D}}$ ) for different  $St$  and both Reynolds numbers. a) 2-D forced cases, b) natural cases.

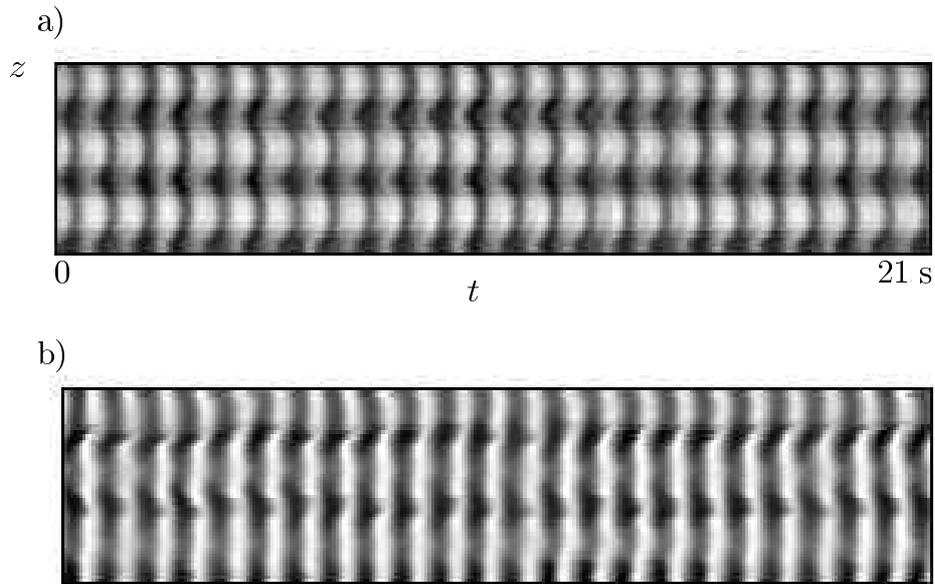


Figure 2.26: Spatio-temporal diagram,  $Re_1 = 220$ ,  $St = 0.07$ . Adjustment to a preferred 3-D wavelength,  $\frac{\lambda_{3D}}{\lambda_{2D}} = 0.76$ , a)  $x = 1$  cm, b)  $x = 7$  cm. The spanwise length shown ( $z$ -axis) is 11 cm.

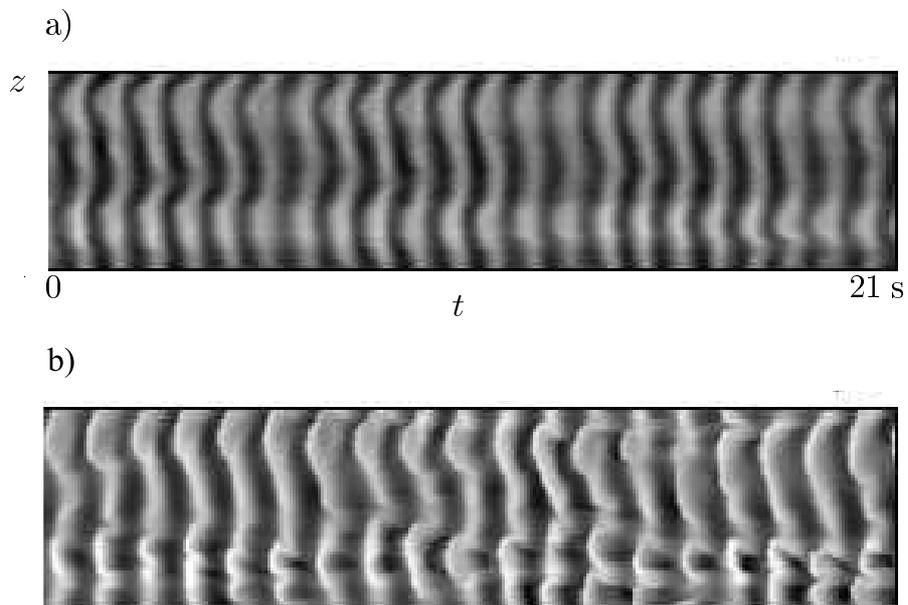


Figure 2.27: Spatio-temporal diagram,  $Re_1 = 220$ ,  $St = 0.07$ ,  $\frac{\lambda_{3D}}{\lambda_{2D}} = 1.29$ . The 3-D wavelength imposed does not persist, a)  $x = 1$  cm, b)  $x = 8$  cm. The spanwise length shown ( $z$ -axis) is 11 cm.

observed the spanwise modulation of the contrast, and the "in-phase" undulation between black and white stripes. The regularity in the spatial and temporal evolution of these undulations indicates the high receptivity of this mode to the applied forcing. However, we also observed that when the forcing wavelength is increased to a value much larger than that measured appearing naturally (i.e.  $\lambda_{3D}$  too large compared to  $\lambda_{2D}$ ), the receptivity to this forcing is weak and the 3-D pattern becomes highly irregular (see Figure 2.27-b). On the other hand, when the imposed 3-D forcing-wavelength is close to the natural one (i.e.  $\lambda_{3D} \approx \lambda_{2D}$ ), we found that the receptivity is very high, and the growth of the imposed mode dominated the entire evolution of the flow (figure 2.26 (a & b)).

The spatio-temporal diagrams corresponding to these forced experiments contain a large amount of information about the characteristic features of the 2-D and 3-D flow field, i.e., the interface oscillations in time due to the presence of the staggered von Kármán vortex array, the spanwise amplitude modulation in a vertical plane, and the in-phase undulations in the horizontal direction of the von Kármán vortices caused by the development of the varicose mode. To study these important features of the secondary instability, we isolated its phase and amplitude from the oscillating  $h(x, z, t)$  signal by applying a 2-D Fourier transform to the spatio-temporal diagram figure 2.26-b. This allowed us to obtain the complex 2-D spectrum, which gives the fundamental and all the harmonic frequency peaks, characteristic of the interface oscillations in time and in space. In addition, we filtered it around the fundamental frequency in order to recover only the spanwise modulations of the fundamental oscillations. By keeping half of the filtered frequency spectrum and by applying an inverse complex to complex fourier transform, we changed the real initial signal into a complex signal, which is equivalent to performing the Hilbert transform of the real signal. The phase and the modulus of the resulting complex field corresponds to the phase and the amplitude of the modulation of the interface oscillation.

The phase diagram (figure 2.28-a), shows vertical, wavy contrasted lines associated with the "in-phase" distortions of von Kármán vortices. The measured amplitudes, figure 2.28-b, show a well organized array of horizontal stripes which are reasonably constant in time, a characteristic of the varicose mode (black corresponding to large amplitudes and grey to low). The time sequence has been chosen long enough for the end effect of the demodulation to be weak.

As we followed the evolution of the interface between both streams, the growth of the amplitude of the secondary instability in the early development of three-dimensionality provided us with a measurement of the growth rate of the 3-D instability which allowed us to confirm the selection of the secondary instability wavelength. We defined the amplitude of the secondary instability as the spanwise modulation of the time oscillations of the interface. This can be measured in the averaged pictures (figure 2.23) of the mean concentration of dye, by fixing the upper intensity threshold at 95% of the maximum pixels intensity and the lower one at 5 % of the maximum intensity. Note that similar results are obtained if the amplitude of the varicose mode is defined by the difference between the maximum and the minimum of intensity measured on the amplitude diagrams after demodulation (figure 2.28-b).

In Figure 2.29-a, we plotted the measured amplitudes as a function of the streamwise distances,  $x$ . One case shown corresponds to conditions when the secondary instability was not forced whereas in the three other cases, 3-D forcings were applied at three different spanwise wavelengths (among 10 tested). Note that the perturbations corresponding to  $\lambda_{3D}/\lambda_{2D} = 0.76$  (triangles in Figure 2.29-a) grow much faster than all the others. In this case the amplitude of the 3-D wave measured at  $x = 3$  cm was found to be two times larger than in any other case. The 3-D growth rate was then calculated by the initial slope of the amplitude curves (figure 2.29-b). For the unforced secondary instability and for all the different spanwise forcing wavelengths studied, we always found a most amplified 3-D wavelength which confirms that a

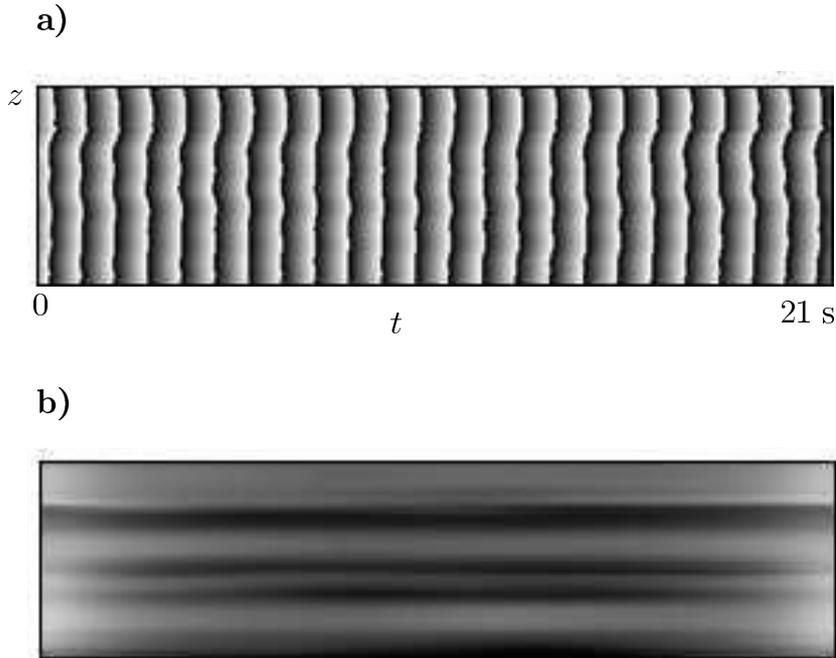


Figure 2.28: Demodulation of the spatio-temporal diagram  $Re_1 = 220$ ,  $St = 0.07$ ,  $\frac{\lambda_{3D}}{\lambda_{2D}} = 0.76$  : a) phase diagram, b) amplitude diagram. The spanwise length shown ( $z$ -axis) is about 11 cm.

selection of 3-D wavelengths exists for the varicose mode, and is such that  $(\lambda_{3D}/\lambda_{2D}) = 0.7$ .

### 2.5.5 The far wake

In this section, we turn our attention to the evolution of the wake in the far region which we define here as downstream distances of the order of 5 to 10 wavelengths, (i.e.  $x \in [12 \text{ cm} ; 24 \text{ cm}]$ ). Here, non-linear effects become important, although the transition to turbulence has not occurred yet. In this region, when the primary instability is forced, and regardless of whether the secondary instability is forced or not, we observed either a pure "varicose" mode or the coexistence of both varicose and "sinuous" mode. However, the "sinuous" mode was present in most cases.

Note for example, in the concentration average of Figure 2.30, a clearly visible "in-phase" undulation of the interface, characteristic of the sinuous mode (see figure 2.9-a). However, the superposition diagram of the interface elevations during a single period obtained from the same sequence as that used to construct figure 2.31 shows that the curvatures of  $h(x, z, t)$  from one half period (in white) to the next half period (in black) are opposite in the right part of the graph, whereas at the center of the graph they are oriented in the same direction. This appears to indicate that the "sinuous" mode is not pure, but coexists with the "varicose" mode.

In figure 2.32, we show two series of concentration averaged pictures showing the streamwise evolution of the secondary instability. In the first series, case a), we see that the varicose mode is amplified from a section close to the splitter plate,  $x = 6 \text{ cm}$ , to the furthest section studied,  $x = 22 \text{ cm}$ ; whereas in case b), the varicose mode dominates the flow until section  $x = 13 \text{ cm}$ , and the "in-phase" undulation characteristic of the presence of the sinuous mode appears at

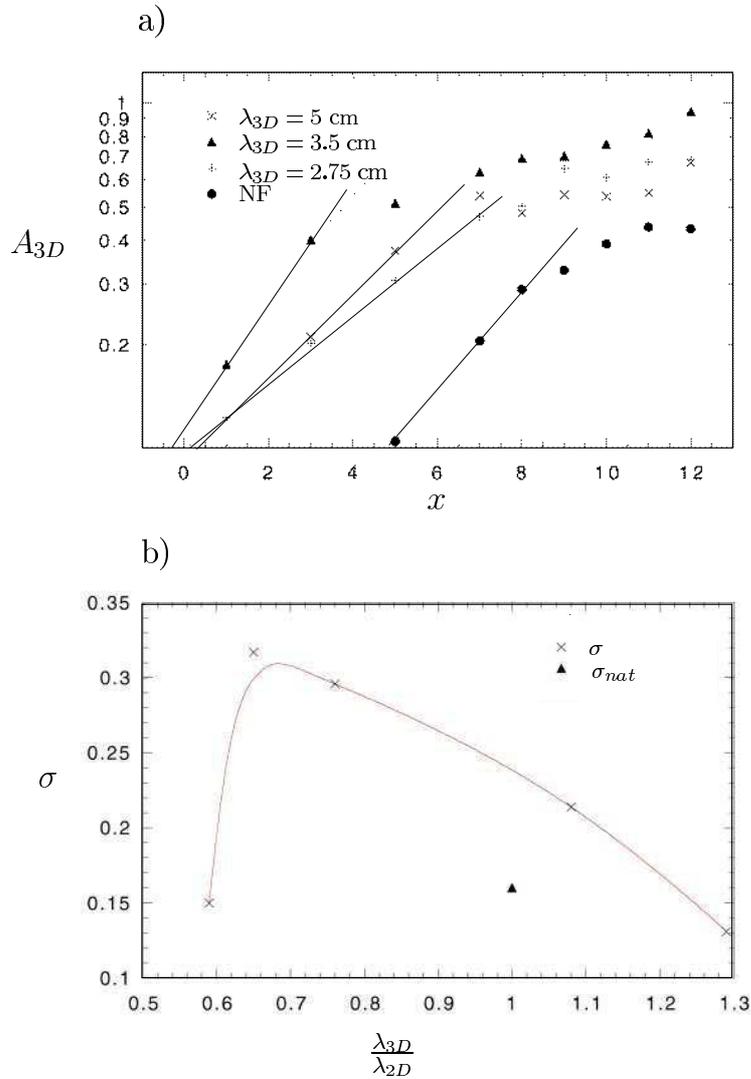


Figure 2.29: Selection of a wavelength, a) downstream evolution of the amplitude of the varicose mode,  $A_{3D}(x)$ , b) growth rate,  $\sigma$  of the 3-D instability measured from the initial slope of curves in figure 2.29-a.

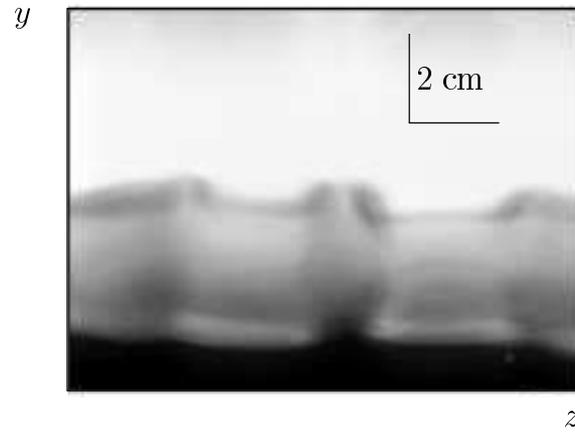


Figure 2.30: The sinuous mode,  $Re_1 = 220$ ,  $St = 0.07$ ,  $x = 18$  cm, averaged frames same as figure 2.20.

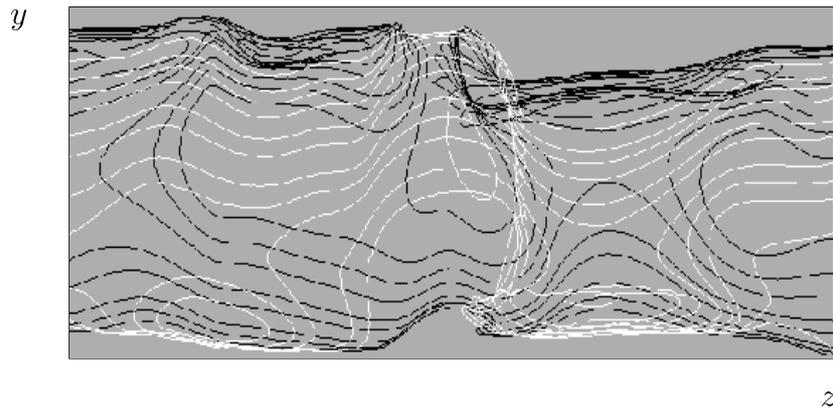


Figure 2.31: The sinuous mode,  $Re_1 = 220$ ,  $St = 0.07$ ,  $x = 18$  cm, superposition diagram, same as figure 2.22.

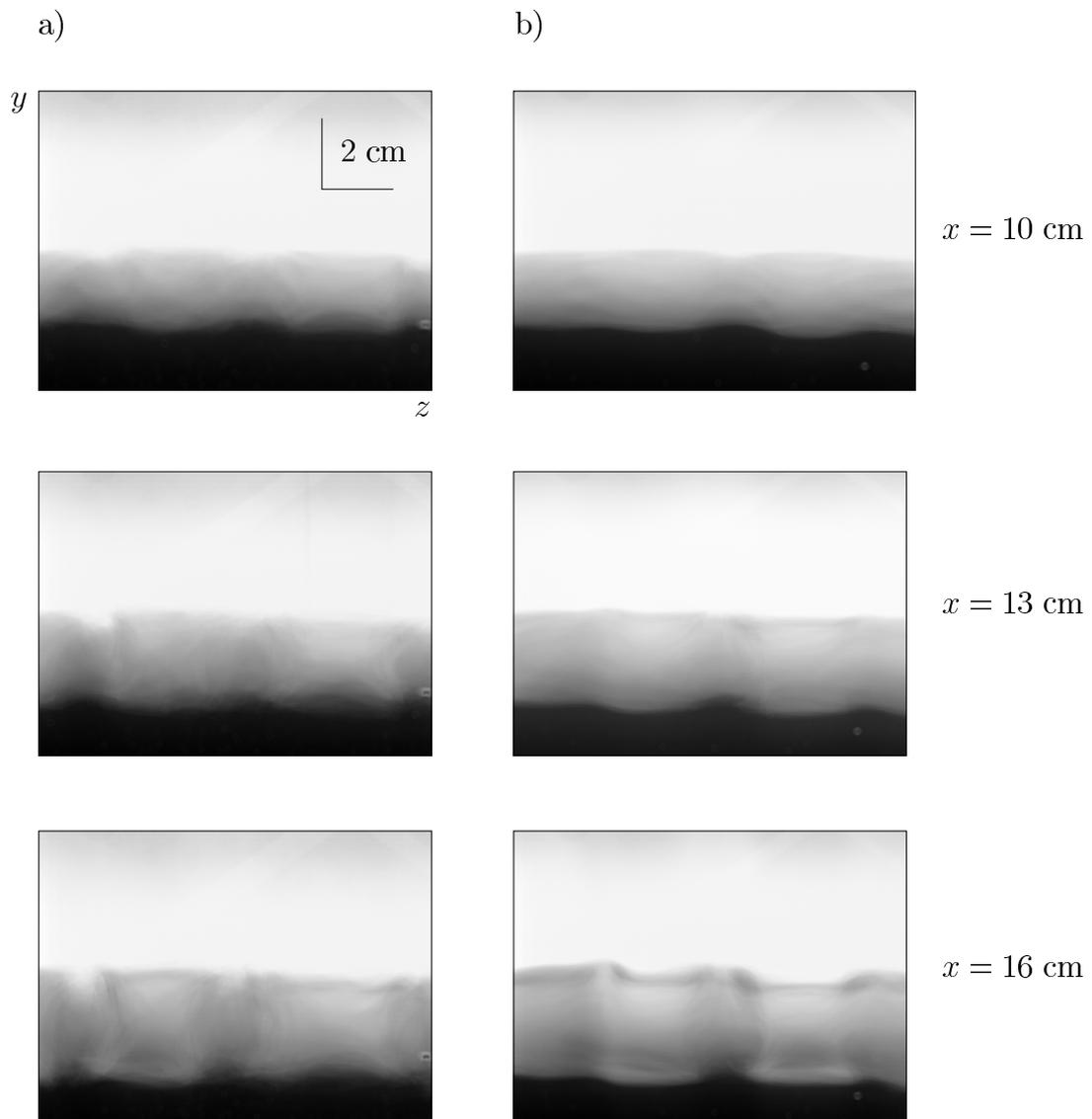


Figure 2.32: Far evolution of the secondary instability,  $Re_1 = 220$ , a) pure varicose mode, b) sinuous contribution.

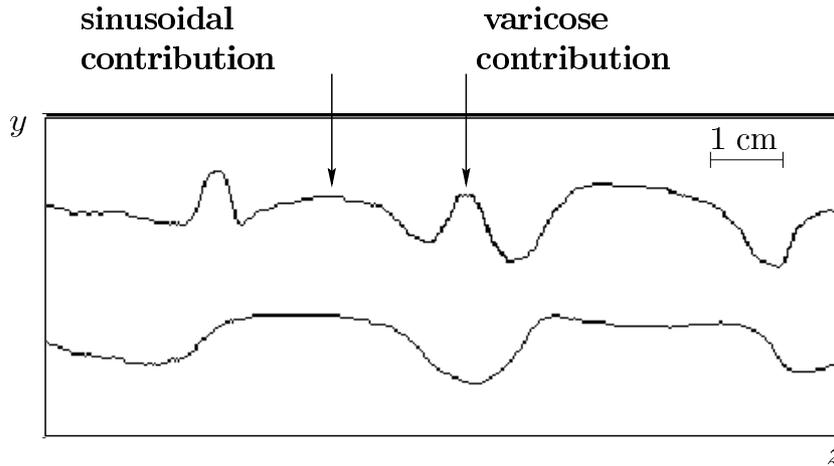


Figure 2.33: Coexistence of the varicose and the sinuous mode,  $Re_1 = 220$ ,  $St = 0.07$ ,  $x = 18$  cm.

$x = 16$  cm.

For the far wake considered in this section,  $x \in [12 \text{ cm} ; 20 \text{ cm}]$ , the interface between the two layers becomes very complex with many foldings and, as a result, its intersection with a cross-plane is not a simply connected object. Instead, several curves and closed loops appear. As we mentioned in Section 2.5.3, the elevation of the interface  $h(x, z, t)$  at a particular location is no longer unique, and the knowledge of the uppermost elevation of the interface (as presented in the spatio-temporal diagram of figures 2.26, 2.27) is not sufficient to describe the topology of the flow. However, we can still pick out the interface from the measurements of  $h_u(x, z, t)$  and  $h_d(x, z, t)$ . To confirm the coexistence of both 3-D modes, in figure 2.33 we plotted the time-averaged uppermost  $\overline{h_u(x, z)}$  and lowermost  $\overline{h_d(x, z)}$  elevation of the interface.

The symmetric and the antisymmetric vertical deformations, characteristic of the "sinuous" and the "varicose" mode, respectively, are clearly visible with an apparent dominance of the "sinuous" contribution.

The development of the "sinuous" mode in this far region could be due to the amplification of external noise at a growth rate smaller than that of the "varicose" mode, or due to the linear transfer between the "varicose" and the "sinuous" mode generated by the possible small asymmetry of the base velocity profile. The seemingly random appearance of the sinuous mode, and the complexity of the interface deformations at these downstream locations do not allow us to further analyze this wake region.

The coexistence of both modes in the far wake was further confirmed by two experiments performed under exactly the same experimental conditions ( $Re_2 = 200$  and  $St = 0.07$ , the secondary instability unforced) where we observed a strong amplification of the "varicose" mode in the first run (figure 2.34-a), while in the second run, a strong amplification of the "sinuous" mode occurred (figure 2.34-b).

Figure 2.34 (a & b) shows two top-view spotlight visualizations of these two wakes developing under the same conditions. The upper part of the interface alone is shown in these visualizations. In the first run (figure 2.34-a), the streamwise vortices, visualized by filaments of dye connecting the primary rolls, are aligned in the flow direction, a characteristic feature of the "varicose" mode whereas, in the second run (figure 2.34-b) the streamwise vortices exhibit a "lambda-shape" characteristic of the "sinuous" mode (see LM). Both modes exhibit different wavelengths but less different than it appears on the pictures since figures 2.34-a and 2.34-b were not taken

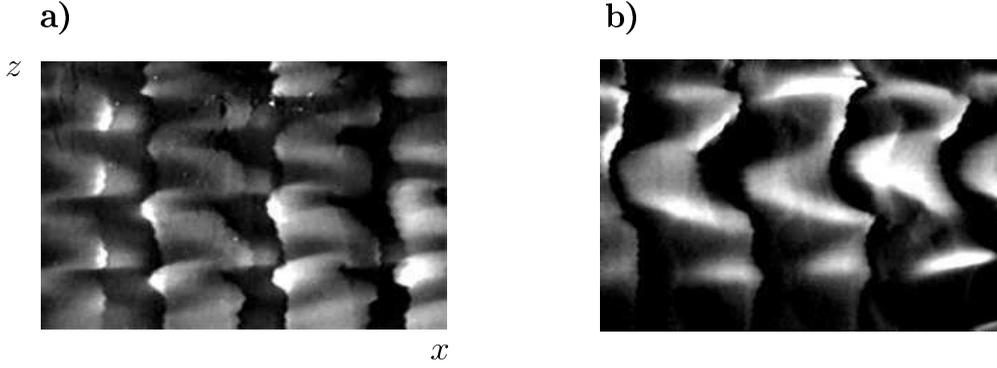


Figure 2.34: Spotlight visualization. Two runs in the same experimental conditions,  $Re_2 = 200$ ,  $St = 0.07$ , the pictures are taken at the same downstream location  $x \approx 10$  cm, the flow is from left to right : a) Varicose mode, b) Sinuous mode. Both pictures are about the same size in  $x$  ( $\approx 3.5 \times \lambda_{2D}$ ), but they have been taken with a different focal length and parallax effect and cannot be used to compare  $\lambda_{3D}$ .

with the same focal length nor with the same parallax. Appearance of the pure sinuous mode was such an exceptional event that spotlight visualizations have not been performed systematically. Nevertheless, since the pure sinuous mode has been observed several times, figure 2.34 is indeed evidence that both modes compete. Precise discussions of the wavelength selection rely on previously discussed observations (2.30-2.33).

### 2.5.6 Nature of the secondary instability

The combined facts that, first, without any controlled 3-D forcing the secondary instability is irregular and depends upon the noise present in the flows, and second, the flow is strongly receptive to the low amplitude 3-D forcing, advocate the convective nature of the secondary instability. This assumption seems to be confirmed by a particular state of the flow that was observed in several independent runs in which the background noise was, by chance, particularly low.

Figure 2.35 presents a temporal sequence of spotlight visualizations showing the evolution of a localized perturbation that appeared randomly. In these pictures, the mean flow is from left to right. The perturbation appears close to the splitter plate and grows while being advected by the flow. In the last frame, the flow has returned to the base state at the location where the perturbation was on the first visualization. Note that the perturbation develops a varicose structure (compare this with the spotlight visualization of figure 2.34-a). This observation is consistent with the behavior of a convectively unstable flow for which a perturbation localized in space and time gives rise to a wave packet which is amplified as it moves downstream. Meanwhile, the flow relaxes back to the basic state at the location where the perturbation was originally introduced.

### 2.5.7 Discussion and conjecture on the wavelength and mode selection in plane wakes

All the experiments reported here were limited to planar wakes behind a thin flat plate at low Reynolds numbers. These wakes, which are formed as two parallel laminar streams merge at the trailing edge of a very thin flat plate, possess a single characteristic length; i.e., the boundary

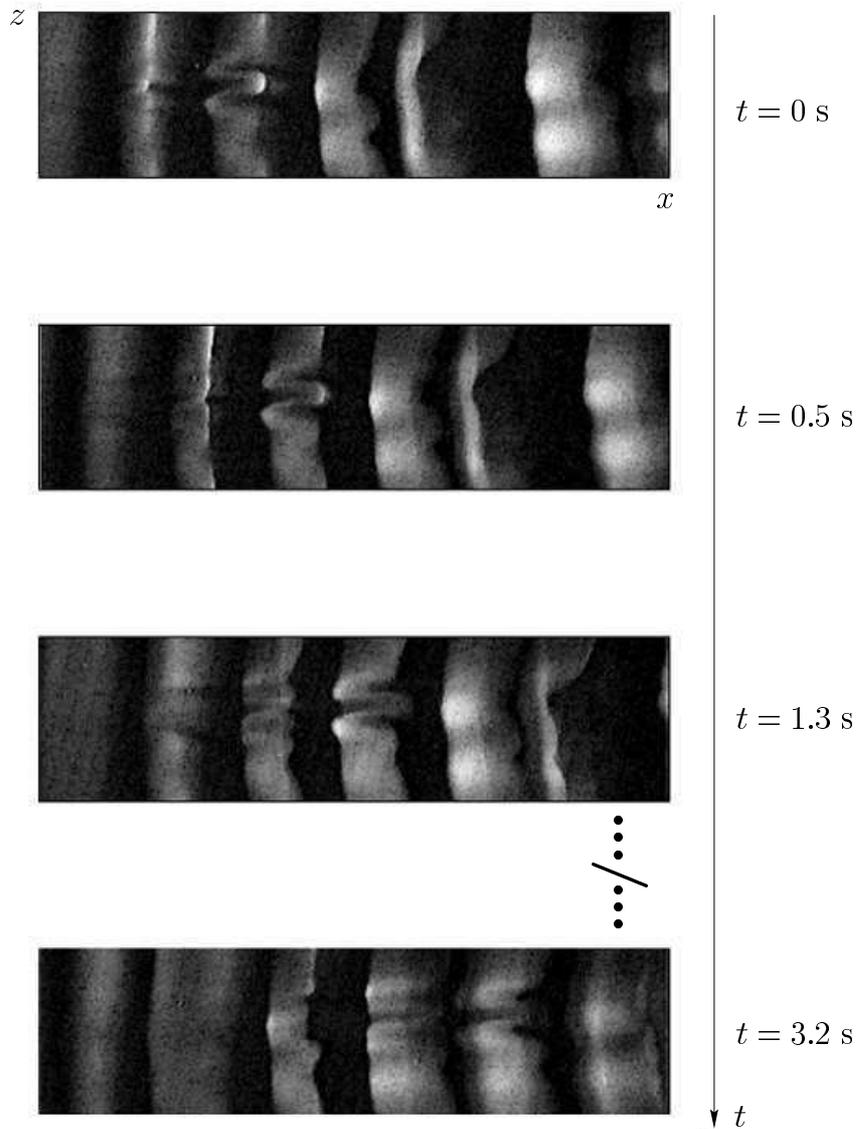


Figure 2.35: Spotlight visualization of the primary vortices : Temporal sequence following a localized perturbation,  $Re_2 = 200$ ,  $St = 0.07$ . The streamwise length ( $x$ -axis) is about 29 cm.

layer thickness, the momentum thickness, or any other dimension which characterizes the state of the laminar boundary layer on each side of the plate. Under these conditions, we have demonstrated that the dominant 3-D mode is the "varicose mode", and that its wavelength is always comparable to that of the 2-D mode. We also found that the sinuous mode is slightly less unstable with a preferred wavelength approximately the same as the varicose mode. However, the question which remains to be investigated is if these results are also applicable to wakes behind bluff bodies where shear layers separate at a certain location on the surface of the body, thus, introducing a second characteristic length in the problem. Comparison of our results to recent cylinder wake experiments is enlightening (see [Williamson (1996)] for a review). In the case of the wake behind a cylinder, the so called mode A, which develops when the Reynolds number is above a well defined threshold ( $Re_c \approx 190$ ), possesses the symmetry of a varicose mode and its wavelength is such that  $(\lambda_{3D}/\lambda_{2D})$  belongs to the range  $[3/5, 4/5]$ , thus close to our value of 1 despite the strong difference between both types of wakes. On the other hand, the sinuous mode (the so called mode B) is observed in the cylinder case at higher Reynolds numbers ( $Re_c \approx 260$ ), and was found to have a wavelength four times smaller  $\lambda_{3D}/\lambda_{2D} \approx 1/4$ . It is important to remark that such a small wavelength was never observed in the lee of a flat plate for the Reynolds numbers cases studied here. Note that for the flat plate, the Reynolds number is based on the Bickley wake profile whereas it is based on the body radius diameter  $D$  for the cylinder wake .

The search for an interpretation of these differences from parallel stability theory has already collected many signs but the issue is still open. As we already remarked, the cylinder wake is no longer characterized by a single length, i.e., the boundary layer thickness  $\delta$  (or vorticity thickness), but also the thickness of the body  $D$  (since the flow separates on the body). Furthermore, the periodicity of the primary vortex shedding adds a third characteristic length scale to the problem,  $\lambda_{2D}$ , i.e., the spacing between vortices determined by the forcing Strouhal number in the present experiment or the self-sustained Strouhal number in bluff body wake. When the primary vortices have saturated, these three length scales influence first the vorticity concentration (intuitively the smaller  $\delta$  the more concentrated the vortices), and second the lateral spacing,  $b$ , of the vortices (the vortices in the flat plate wake are initially nearly aligned, whereas they are initially staggered in bluff bodies wakes).

Robinson & Saffman (1984), studying the 3-D stability of vortex arrays show that, when the core diameter of the vortices is small compared to  $\lambda_{2D}$ , the von Kármán vortex street is unstable to long-wavelength spanwise disturbances for a large range of ratio  $b/\lambda_{2D}$ . They found that the dominant mode is antisymmetric with a most unstable wavelength about  $\lambda_{2D}$ . Compared to the cylinder wake, this mode possesses the symmetry of the observed mode B but the wavelength selection does not match. This analysis does not agree either with the present plate wake experiment, with a length scale close to the theoretical one, where we observed that even if in some cases the anti-symmetric mode finally appears, the symmetric mode always dominated. In [Robinson & Saffman (1982)] study, the core of the vortices was not allowed to deform and only long wavelengths compared to the core size were described. In any real wake, the core is not small compared to the wake periodicity and therefore the Robinson & Saffman analysis applies only to long wavelengths compared to  $\lambda_{2D}$ . At shorter wavelengths, deformations of the core must be considered and an elliptic instability takes place since each vortex is subjected to the strain fields of the others. This mechanism has been studied for a single vortex of finite size with uniform vorticity by [Tsai & Widnall (1976)], [Robinson & Saffman (1984)], [Waleffe (1990)]. [Klaassen & Peltier (1991)] and [Potylitsin & Peltier (1999)] have shown that this instability is present in mixing layers and extension of their work to the wake case would predict that both sinuous and varicose modes possess similar growth rates with a maximum

for the same wavelength. Therefore this core instability might account for the wavelength selection observed in cylinder and plate wake but not for the symmetry selection as argued by [Lewke & Williamson (1998)] in the cylinder configuration. Following Klaassen & Peltier (1991) stability analysis, the braid region in the early stage of the vortex roll up (i.e. before the braid is depleted by the strain field) exhibits an instability with the length scale of the braid thickness that is initially equal to the boundary layer thickness (see also Leblanc & Cambon (1998)): the hyperbolic instability. This hyperbolic instability may account for the wavelength selection of mode B. But since this instability is of small scale, both a varicose and a sinuous hyperbolic mode should have similar characteristics. Therefore, if the core instability and the hyperbolic instability are good candidates to explain wavelength selection in cylinder wake, they do not account for the symmetry selection. In the flat plate wake, both instabilities are associated to similar scale selection and may both explain the present results.

Finally, it should be emphasized that in the case of a cylinder, the secondary instability is self sustained and appears through a global bifurcation as demonstrated by the global stability analysis ([Barkley & Henderson (1996)]) of the complete (non parallel) flow past a cylinder, whereas our observations demonstrate that the secondary instability is noise driven. This behavior has been associated with the idea that the secondary instability is convective in the lee of a flat plate. We may conjecture that, following the well known mechanism of the primary instability, the appearance of the mode A is related to the existence of a finite region where the secondary varicose core instability is absolute, the absolute nature being caused by the presence of a mean back-flow behind the cylinder. In this spirit, mode B would be linked to a finite region where the braid instability would be absolute. Presently, we are implementing the [Brancher & Chomaz (1997)] procedure to define the absolute/convective transition of the secondary instability of the wake as a function of the back-flow to confirm that a resonant mechanism is present in the cylinder wake and induces a specific selection and dynamics of mode A.

### 2.5.8 Conclusion

We have studied the development of the secondary instability in a planar wake forming as two parallel laminar streams merge at the trailing edge of a thin flat plate. Careful analysis of the symmetry properties of the interface deformation revealed that the "varicose" mode always grows first, dominating the evolution of the near wake. Furthermore, measurements conducted in the naturally evolving flow as well as by forcing the primary 2-D instability over a wide range of frequencies revealed that the wavelengths of both the 2-D and 3-D modes are always comparable ( $\lambda_{3D}/\lambda_{2D} \approx 1$ ). This result was further confirmed by measurements of the growth rate of the 3-D modes developing under a wide range of spanwise forcing wavelengths introduced at the trailing edge of the flat plate, and it appears to indicate that the secondary mode is due to "translative" instability of the type studied by [Pierrehumbert & Widnall (1982)] in plane shear layers. The response of the wake to impulsive 3-D perturbations clearly demonstrates the convective nature of the secondary instability developing in the wake of the thin flat plate.

*The authors would like to warmly thank Marcus Lobbia who contributed to performing all experiments and Ivan Delbende who initiated the numerical work to justify the validity of the growth rate measurements.*

# Bibliographie

- [Barkley & Henderson (1996)] BARKLEY, D. & HENDERSON, R. D. 1996 Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **322**, 215-241.
- [Brancher & Chomaz (1997)] BRANCHER, P. & CHOMAZ, J.-M. 1997 Absolute and convective secondary instabilities in spatially periodic shear flows. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 658-661;
- [Delbende, I. & Chomaz, J.-M. (1998)] DELBENDE, I. & CHOMAZ, J.-M. 1998 Nonlinear convective/absolute instabilities of parallel two-dimensional wakes. *Phys. Fluids* **10**(11), 2724-2736.
- [Julien, Chomaz & Lasheras] JULIEN S. CHOMAZ J.M. & LASHERAS, J.C. Study of the temporal stability of a row of counter-rotating vortices. *submitted to Phys. Fluids* .
- [Klaassen & Peltier (1991)] KLAASSEN G.P. & PELTIER W.R. 1991 The influence of stratification on secondary instability in free shear layers *J. Fluid Mech.* **227**, 71-106.
- [Lasheras & Choi (1988)] LASHERAS, J.C., & CHOI, H. 1988 Three-dimensional instability of a plane free shear layer. An experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.* **189**, 53-86.
- [Lasheras & Meiburg (1987)] LASHERAS, J.C. & MEIBURG, E. 1987 Comparison between experiments and numerical simulations of three-dimensional plane wakes. *Phys. Fluids* **30**, 371-380.
- [Leblanc & Cambon (1998)] LEBLANC S. & CAMBON C. 1998 Effects of the coriolis force on the stability of stuart's vortices *J. Fluid Mech.* **356**, 353-379.
- [Lewke & Williamson (1998)] LEWEKE T. & WILLIAMSON C.H.K. 1998 Three-dimensional instabilities in wake transition. *European Journal of Mechanics B/Fluids* **17**(4), 571-586.
- [Mallier & Maslowe (1993)] MALLIER, R. & MASLOWE, S.A. 1993 A row of counter-rotating vortices. *Phys. Fluids* **5**, 1074-1075.
- [Meiburg & Lasheras (1987)] MEIBURG, E. AND LASHERAS, J.C. 1987 Experimental and numerical investigation of the three- dimensional transition in plane wakes. *J. Fluid Mech.* **190**, 1-37.
- [Potylitsin & Peltier (1999)] POTYLITSIN, P.G. & PELTIER, W.R. 1999 Three-dimensional destabilization of Stuart vortices : the influence of rotation and ellipticity. *J. Fluid Mech.* **387**, 205-226.

- [Pierrehumbert & Widnall (1982)] PIERREHUMBERT, R.T. & WIDNALL, S.E. 1982 The two- and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer. *J. Fluid Mech.* **114**, 59-82.
- [Robinson & Saffman (1982)] ROBINSON A.C. & SAFFMAN P.G. 1982 Three-dimensional stability of vortex arrays. *J. Fluid Mech.* **125**, 411-427.
- [Robinson & Saffman (1984)] ROBINSON A.C. & SAFFMAN P.G. 1984 Three-dimensional stability of an elliptical vortex in a straining field. *J. Fluid Mech.* **142**, 451-466.
- [Schowalter, Van Atta & Lasheras (1994)] SCHOWALTER, D.G., VAN ATTA, C.W. & LASHERAS, J.C. 1994 A study of streamwise vortex structure in a stratified shear layer. *J. Fluid Mech.* **281**, 247-291.
- [Tsai & Widnall (1976)] TSAI C-Y. & WIDNALL S.E. 1976 The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field. *J. Fluid Mech.* **73**, 721-733.
- [Waleffe (1990)] WALEFFE 1990 On the three-dimensional instability of strained vortices. *Phys. Fluid. A* **2**, 76-80.
- [Williamson (1994)] WILLIAMSON, C.H.K. 1994 Three-dimensional wake transition. *J. Fluid Mech.* **328**, 345-407.
- [Williamson (1996)] WILLIAMSON, C.H.K. 1996 Vortex dynamics in the cylinder wake. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **28**, 477-539.



## Chapitre 3

# Étude numérique de stabilité temporelle 3D d'un sillage modèle

Ce chapitre présente l'étude de stabilité temporelle 3D menée sur un sillage modèle, l'allée simple de tourbillons contra-rotatifs, solution déterminée par Mallier & Maslowe [1] (1993). Ce chapitre est écrit en anglais car il fait l'objet d'un article soumis à la revue *Physics of Fluids*.

# Three dimensional stability of periodic arrays of counter-rotating vortices

**Auteurs :** Stéphanie Julien<sup>1</sup>, Jean-Marc Chomaz<sup>1</sup> and Juan C. Lasheras<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d'Hydrodynamique, CNRS - École Polytechnique, F- 91128 Palaiseau, France

<sup>2</sup> Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, San Diego, 92093 , USA

We study the temporally developing three dimensional (3-D) stability of a row of counter-rotating vortices defined by the exact solution of the Euler's equations proposed by Mallier and Maslowe [1]. On the basis of the symmetries of the base state, the instability modes are classified into two types, symmetric and anti-symmetric. We show that the row is unstable to two dimensional (2-D) symmetric perturbations leading to the formation of a staggered array of counter-rotating vortices. For long wavelengths, the anti-symmetric mode is shown to exhibit a maximum amplification rate at small wavenumbers whose wavelengths scale mainly with the period of the row. This mode could be interpreted as due to the Crow-type of instability extended to the case of a periodic array of vortices. For short wavelengths, symmetric and anti-symmetric instability modes are shown to have comparable growth rates, and the shorter the wavelength, the more complex the structure of the eigenmode. We show that this short wavelength dynamic is due to the elliptic instability of the base flow vortices, and is well modeled by the asymptotic theory of Tsai & Widnall. The effect of varying the Reynolds number was also found to be in agreement with theoretical predictions based on the elliptic instability.

## 3.1 Introduction

The primary instability of free shear flows leads to the advection and the roll-up of the initial vorticity field into two-dimensional eddies oriented in the spanwise direction relative to the flow. The well-known mechanism of this inviscid instability is a consequence of the presence of inflexion points in the initial velocity profile [2, 3]. Depending on the particular configuration, the eddies organize themselves to develop extended coherent structures which have been shown to be characteristic features of free shear flows such as mixing layers, wakes or jets. These rows of vortices are usually unstable to subsequent pairing and translative instabilities. A doubling of the initial wavelength occurs through the pairing of two consecutive spanwise vortices [4]. Translative instability has been identified as a secondary 3-D instability of shear flows with the same periodicity as the base configuration. It precedes the transition to fully developed turbulence and is suspected to play an important role in this transition. During the evolution of the translative instability, the primary, spanwise vortices deform in a wavy fashion and a periodic array of streamwise, counter-rotating rolls appear superimposed to the primary spanwise eddies. Experimentally, this secondary 3-D instability was observed by Miksad [5], Konrad [6] along with many others in mixing layers. It was also discovered to occur in the wake of a cylinder by Hama [7] and later by Gerrard [8] who identified a growth of the waviness of the primary vortices into "fingers of dye". Since then, many studies have shown that the appearance of this secondary structure of counter-rotating streamwise vortex pairs is also a characteristic feature of transitional wakes. As was the case with shear layers and wakes, many experimental and numerical studies have shown the existence of this secondary structure in round jets. Yule [9] found azimuthal undulations of the vortex rings. Other studies have associated this undulation with the radial ejections of fluid [10].

The identification of the origin of this secondary 3-D instability has motivated a large body of theoretical work, most of which involves the mixing layer configuration. Pierrehumbert & Widnall [11], in 1982, studying numerically the stability of an array of Stuart vortices identified the translative instability as a waviness of the spanwise vortices. This instability arises in the vortex cores and the ellipticity of the streamlines are responsible for its development [12, 13, 14]. In 1991, Klaassen & Peltier [15] focussed their attention on the 3-D stability in free shear layers and found not only the appearance of the core instability but also of hyperbolic modes centered in the braid region where vorticity is being withdrawn by the roll-up of the Kelvin-Helmoltz billows. A model for the generation of streamwise vortices in which the longitudinal structures could appear through the action of the plane strain existing in the braid connecting two consecutive spanwise vortices had already been proposed in 1984 by Lin & Corcos [16] and later shown experimentally by Lasheras and Choi [17] in 1986.

The wake configuration exhibiting two shear layers is more complex than the mixing layer since the positive and negative vorticity layers interact among themselves. Experimental studies [18, 19, 20, 21] have shown the existence of two kinds of 3-D modes with distinct symmetries, characteristic of these wake flows. In the case of a wake behind a circular cylinder, Williamson [20, 21] observed that one mode, the symmetric mode (called mode A) is governed by an instability of the vortex cores and that the second one, the anti-symmetric mode (called mode B) is characterized by a wavelength four times smaller. This could be due to an instability of the hyperbolic regions.

Theoretical analyses of the secondary instability in wakes are less numerous. Robinson & Saffman [22] have modeled the wake by an infinite double row of alternating sign vortices with smaller core sizes compared to both the distance between vortices and the wavelength of the instability. They showed that the staggered double row is unstable to a small wavenumber instability analogous to the Crow instability [23] found in a single pair of vortices. Dauxois *et al.* [24] have studied the two dimensional stability of the wake model proposed by Mallier & Maslowe [1] (M & M in the following). The Mallier & Maslowe model is similar to the Stuart vortex street but consists of vortices of alternating signs aligned in a single row. Such a configuration was experimentally studied by Tabeling *et al.* [25] who created a linear array of counter-rotating vortices generated and controlled by electromagnetic forcing. In the M&M model, the opposite sign vortices are not staggered but form a single row. Thus, this configuration could be viewed as a model of the wake developing behind a flat plate where the initial distance between both rows of counter-rotating vortices is small. However, owing to the alignment of the vortices, this model does not contain hyperbolic points of the velocity field. Therefore, it does not represent the braid shear layer developing between two consecutive counter-rotating vortices. Dauxois *et al.* [24] have found that there is a threshold Reynolds number beyond which the single row when subjected to a 2D instability develops into a staggered configuration of vortices of opposite sign.

The present paper extends the earlier studies of Dauxois *et al.* [24] to the analysis of 3D instability of the M&M wake model. We will consider only instabilities with the same streamwise periodicity as the base flow. The M&M model is described in section II, the system of linearized equations that governs the stability of the M&M solution and the numerical method used to solve the linear eigenvalue problem are described in section III. In section IV, we present the results obtained for three different concentrations of vortices evaluated at two different Reynolds numbers.

## 3.2 Mallier & Maslowe model

The exact 2-D solution of the Euler equations proposed by M&M [1] representing a row of counter-rotating vortices is given by:

$$\psi(x, y) = \log \left( \frac{\cosh Cy - C \cos x}{\cosh Cy + C \cos x} \right), \quad (3.1)$$

where  $C \in [0; 1]$ , is the concentration parameter. Velocities and length have been non-dimensionalized such that the flow is  $2\pi$ -periodic in  $x$ , and the total circulation  $\Gamma$  associated with each vortex is independent of  $C$  and equal to  $4\pi$ .

The corresponding three-dimensional velocity  $\mathbf{U} = (U, V, 0)$  and vorticity  $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$  fields, with  $\Omega = -\Delta\psi$ , are given by:

$$U(x, y) = \frac{2C^2 \sinh Cy \cos x}{\cosh^2 Cy - C^2 \cos^2 x} \quad (3.2)$$

$$V(x, y) = -\frac{2C \sin x \cosh Cy}{\cosh^2 Cy - C^2 \cos^2 x} \quad (3.3)$$

$$\Omega(x, y) = \frac{(1 - C^2)}{2} \sinh(2\psi) \quad (3.4)$$

The value of the parameter  $C$  controls the concentration of the vortices. The limiting value  $C = 1$  corresponds to point vortices while  $C = 0$  represents a fluid at rest ( $\psi(x, y) = 0$ ). The larger the value of  $C$ , the more concentrated the vortex cores are. This is shown in figure 3.1 where the iso-contours of the vorticity field in one period for  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$  are plotted for three different values of the concentration parameter  $C = 0.9$ ,  $C = 0.75$ , and  $C = 0.5$ . It is important to point out that the iso-vorticity contours are elliptical with their major axis oriented in the vertical direction. In addition, the ellipticity of the vortex cores increases with decreasing values of the concentration parameter.

For each value of the concentration studied, one may define a length scale characterizing the mean size of the vortices.

$a$  is obtained from the first moment of the spanwise base flow vorticity  $\Omega$ :

$$a = \frac{1}{\Gamma} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + y^2)^{1/2} \Omega(x, y) dx dy, \quad (3.5)$$

Moreover, we define the aspect ratio  $\theta = d/c$  that characterizes the ellipticity of the streamline around the center of the vortex.  $c$  and  $d$  are obtained by expanding the vorticity function about  $(x, y) = (0, 0)$  where it achieves the maximum value  $\Omega_{max}$  :

$$\Omega(x, y) = -\Omega_{max} \left( 1 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} + \vartheta(x^2, y^2) \right), \quad (3.6)$$

where  $\vartheta(x^2, y^2)$  indicates that we are neglecting terms smaller than  $x^2$  or  $y^2$  when  $x$  and  $y$  goes to zero.

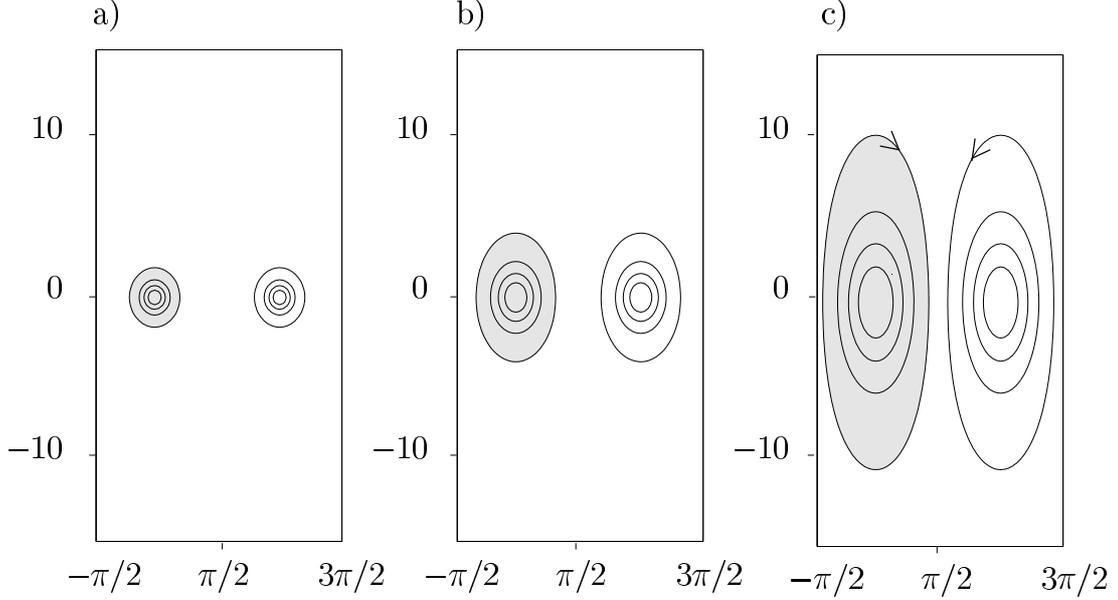


Figure 3.1: Spanwise vorticity contours of the base flow in a box spanning one wavelength  $\lambda_{2D}$ , a)  $C = 0.9$ , b)  $C = 0.75$ , c)  $C = 0.5$ . The contour values correspond to 80, 60, 40 and 20% of the maximum vorticity  $\Omega_{max}$  at the center of the vortex. The left vortex rotates clockwise and shaded area corresponds to negative values of vorticity  $\Omega$  such that  $|\Omega| > 0.2 * \Omega_{max}$ .

$C$	$a$	$\theta$	$\Omega_{max}$
0.9	0.68	1.11	17.15
0.75	1.17	1.33	5.36
0.5	2.15	2	1.67

Table I : Vortex core size and aspect ratio parameter

The estimated vortex core size and the aspect ratio given by the parameters defined above are gathered in table I. Note that the larger the value of the concentration parameter  $C$ , the smaller the core size and the ellipticity. As the core size decreases, the maximum vorticity increases to conserve the circulation.

### 3.3 Perturbation equation and numerical procedure

Since the M&M [1] solution is uniform along the  $z$ -axis, we consider a general linear perturbation of the form :

$$[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{p}}](x, y, z, t) = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}](x, y, t) e^{ikz} + \text{c.c.}, \quad (3.7)$$

where  $\tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \wedge \tilde{\mathbf{u}}$  and  $\tilde{\mathbf{p}}$  are respectively the 3-D velocity, vorticity and pressure perturbations and  $k$  is the wavenumber in the  $z$ -spanwise direction.  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  are complex three component vector fields, c.c. in equation (3.7) denotes the complex conjugate of the first term in the right-hand side. The evolution of the perturbation is governed by the Navier-Stokes equations linearized around the base flow defined by  $U$  and  $\Omega$  (3.2, 3.3, 3.4):

$$\text{div } \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.8)$$

and:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{t}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{U} = -\nabla [\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{U}] + \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.9)$$

where  $\nu$  is the viscosity. Since  $\Gamma = 4\pi$  for the M&M solution, the Reynolds number based on the circulation  $Re = \Gamma/4\pi\nu$  is always  $Re = 1/\nu$ .

As mentioned before, the base flow defined in section 2 is an exact solution of the inviscid Navier-Stokes equations. We will analyze the stability properties of this flow in the presence of viscosity by assuming, as is usually done in stability studies [3], that the viscous diffusion of the base flow is balanced by a ‘‘body force’’ ( $-\nu\Delta\mathbf{U}$ ). Note that, consistent with this approach, the term  $\nu\Delta\mathbf{U}$  does not appear in this Navier-Stokes formulation (4.28). When comparing to experiments, this approximation was found to be quite reasonable if the growth rate of the 3-D instabilities is large compared to the viscous damping of the base flow.

The perturbations  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}$  and  $\mathbf{p}$  are expressed in Fourier space via a 2-D complex Fourier transform :

$$[\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}](x, y, t) = \int \int [\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\mathbf{p}}](k_x, k_y, t) * e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (3.10)$$

where  $k_x$  and  $k_y$  are the horizontal components of the wavevector  $\mathbf{k}_t = (\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \mathbf{k})$ .

In spectral space, the Navier-Stokes equations take the form :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{t}} = P(\mathbf{k}_t)[\mathbf{u} \wedge \widehat{\boldsymbol{\Omega}} + \widehat{\mathbf{U}} \wedge \boldsymbol{\omega}] - \nu \mathbf{k}_t^2 \hat{\mathbf{u}}, \quad (3.11)$$

where  $P(\mathbf{k}_t)$  is the projection operator onto the space of solenoidal fields (i.e.  $P_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / \mathbf{k}_t^2$ ).

The linear eigenvalue problem that corresponds to seeking exponentially growing solutions of (3.11) is solved using an iterative power method (see Tuckerman’s lecture [27] for details). For this purpose, equation (3.11) is integrated in time starting from random initial conditions. Since we are considering only perturbations that preserve the periodicity of the base flow here, the integration domain is chosen to be equal to one wavelength of the base flow, (i.e.  $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ). If other Floquet multipliers were of interest, the box size should have been adapted (that is, if one were considering the pairing mode, the size of the integration domain should be doubled in  $x$ ). The perturbation is assumed to be periodic in the  $y$ -direction. To avoid boundary effects, the box size in the  $y$ -direction is chosen wide. The size  $L_y = 4\pi$  has been found to be sufficiently large since the results of our computations remain unaffected by increasing the  $y$ -dimension beyond  $4\pi$ .

The numerical integration code, written in Cartesian coordinates with periodic boundary conditions in  $x$  and  $y$ , is based on a pseudo-spectral method. Since all the details of the numerical procedure and the validation of this code are given in Billant *et al.* [28], we will omit its description here. The linearized advection term, i.e. the term in brackets on the right hand side of (3.11) is evaluated in the physical space via successive Fourier transforms in the  $x$  and  $y$  directions, and the 2/3 rule is applied for de-aliasing. The viscous term ( $\mathbf{k}_t^2 \nu \hat{\mathbf{u}}$ ) is exactly integrated in the spectral space. The time evolution is realized in the spectral space using the second-order Adams-Bashforth scheme.

For each value of the transverse wavenumber  $k$ , the perturbation velocity field is initialized with a divergence-free white noise. The integration of (3.11) is carried on in time long enough for the most unstable mode to dominate. This method gives only access to the most unstable mode. When  $t \rightarrow \infty$ , the velocity  $\mathbf{u}(x, y, t)$  tends to a solution of the form :  $\mathbf{A}(x, y) \exp(\sigma t)$ ,

where,  $\mathbf{A}(x, y)$  is the 3-D complex eigenfunction, and  $\sigma$  is the leading eigenvalue. The real part of  $\sigma$  represents the temporal growth rate, and the imaginary part the frequency of the most amplified mode. To speed up the convergence of our method, the eigenmode found at a close value of  $k$  may be used instead of the white noise to initialize the computation.

The growth rate is computed from the kinetic energy  $E$  of the perturbation integrated over the whole computational domain :

$$E = \int \int \mathbf{u}\mathbf{u}^* dx dy, \quad (3.12)$$

\* denoting the complex conjugate

$$\sigma_r = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{d \ln E}{dt} \quad (3.13)$$

The leading eigenmode is approximated by the perturbation obtained at the last time-step of the simulation. The convergence criteria is such that  $\frac{1}{\sigma_r} \frac{d\sigma_r}{dt}$  is less than  $10^{-3}$  on the last time-steps of the computation.

For the smaller concentration parameters,  $C = 0.5$  and  $0.75$ , the computations are performed on a Cartesian mesh consisting of  $64 \times 128$  collocation points with a mesh size in the  $x$ - and  $y$ -direction equal to  $\delta_x = \delta_y \simeq 0.098$ . A resolution of  $128 \times 256$  collocation points with  $\delta_x = \delta_y \simeq 0.049$  has been used for the case  $C = 0.9$ . The integration time step is  $\delta_t = 0.01$  for  $C = 0.5$  and  $C = 0.75$ ,  $\delta_t = 0.001$  for  $C = 0.9$ . Considering that the maximum velocity of the base flow increases with the concentration parameter  $C$ , this choice of time steps allows the Courant-Friedrich-Levy condition ( $\Delta x / \Delta t > U_{max}$ ) to be satisfied by one order of magnitude in all three concentration cases considered here.

As demonstrated by Robinson & Saffman [22] for the more general case of a staggered double row of vortices, the instability modes can be separated into two families. In our case, since the base state vorticity is symmetric when  $(x, y) \rightarrow (x + \lambda_{2D}/2, -y)$ , the symmetry of both mode families simplifies to:

- the symmetric mode (also called the varicose mode [18, 19]) with,

$$[u_x, u_y, u_z](x, y, t) = [u_x, -u_y, u_z](x + \lambda_{2D}/2, -y, t), \quad (3.14)$$

or equivalently

$$[\omega_x, \omega_y, \omega_z](x, y, t) = [-\omega_x, \omega_y, -\omega_z](x + \lambda_{2D}/2, -y, t). \quad (3.15)$$

- and the anti-symmetric mode (also called the sinuous mode [18, 19]), with

$$[u_x, u_y, u_z](x, y, t) = [-u_x, u_y, -u_z](x + \lambda_{2D}/2, -y, t) \quad (3.16)$$

or equivalently

$$[\omega_x, \omega_y, \omega_z](x, y, t) = [\omega_x, -\omega_y, \omega_z](x + \lambda_{2D}/2, -y, t) \quad (3.17)$$

These denominations follow those given by Robinson & Saffman [22]. It should be emphasized that it corresponds to the symmetry of the perturbation field  $u_z$  (3.14, 3.16). For example, the anti-symmetric mode is such that  $u_x$  and  $u_z$  are anti-symmetric whereas  $u_y$  is symmetric under the transformation  $(x, y) \rightarrow (x + \lambda_{2D}/2, -y)$ .

These symmetries have been imposed on the initial random condition or forced at each time step on the velocity field  $u$ . With both methods, the results of our iterative power method are identical.

To investigate the effect of viscosity, we have studied two different Reynolds numbers,  $Re = (400, 5000)$  for three distinct concentration parameters of the base flow vortices  $C = (0.5, 0.75, 0.9)$ . For both symmetric and anti-symmetric families, the growth rates  $\sigma_r$  have been computed as a function of the spanwise wavenumber  $k$  in the range  $[0; 9]$  and the associated eigenfunctions determined. In the following, the growth rate  $\sigma_r$  will be noted  $\sigma$ .

## 3.4 Results

### 3.4.1 Evolution of the growth rate

#### Anti-symmetric modes

Figure 3.2 presents the growth rate curves  $\sigma$  as a function of the spanwise wavenumber  $k$  for the anti-symmetric perturbation. Each diagram corresponds to a specific concentration, a)  $C = 0.9$ , b)  $C = 0.75$ , c)  $C = 0.5$ , the curve defined by open symbols corresponding to  $Re = 5000$  and the curve with filled symbols to  $Re = 400$ . For  $C = 0.9$  (figure 3.2-a), the base flow vortices are strongly concentrated and well separated whereas they are diffused and not distinctly separated for  $C = 0.5$ .

For  $C = 0.9$ , the growth rate of the anti-symmetric mode, stable at  $k = 0$ , exhibits a well defined peak at low wavenumbers with the maximum located at  $k_{max} = 0.4$ . The peak is confined to the band  $[0; 0.9]$ . Hereafter, we will call it the Crow instability mode for reasons to be explained later and will label it Cr. For larger wavenumbers, the growth rate presents two other maxima. These two maxima define two different regions, labeled as  $E_1$  and  $E_2$  in figure 3.2-a, where the curves are “bell-shaped” for both Reynolds numbers. These modes will be called elliptic modes.

For the concentration parameter  $C = 0.75$ , figure 3.2-b, we obtained similar behaviour. The Crow instability peak is visible in the range  $[0; 0.9]$  with a maximum amplification rate lower than that computed for  $C = 0.9$ , but still occurring at the value of  $k_{max} = 0.4$ . For  $Re = 5000$ , four other peaks, (as opposed to the two found for  $C = 0.9$ ) are clearly visible defining elliptic instability modes ( $E_1, E_2, E_3, E_4$ ). Their maximum growth rates are smaller than those found for the largest concentration parameter  $C = 0.9$ . The first and second maxima also occur at a lower wavenumber for  $C = 0.75$  than for  $C = 0.9$ .

For the smaller concentration parameter  $C = 0.5$ , figure 3.2-c, the Crow instability peak is not visible around  $k = 0.4$  but still the curve presents a clear breaking in curvature at  $k = 0.9$  where the growth rate slope changes radically. For large wavenumbers, the growth rate does not exhibit any peaks but the regions ( $E_1, E_2, E_3, E_4$ ) shown in figure 3.2-c were nevertheless defined using a criterion which will be explained later.

#### Symmetric modes

Subjected to symmetric perturbations, the M&M configuration is unstable at  $k = 0$  (figure 3.3) whichever concentration  $C$  is studied. The growth rate of this 2-D mode depends strongly on  $C$  : it decreases as  $C$  increases, tending to zero when the limit of point vortices is approached. Unlike the anti-symmetric case, the symmetric growth rate curves do not present a peak at low wavenumber. At large wavenumbers, the growth rate of the symmetric mode behaves similarly to its antisymmetric counterpart. The growth rate curves presents “bell-shaped” curves with

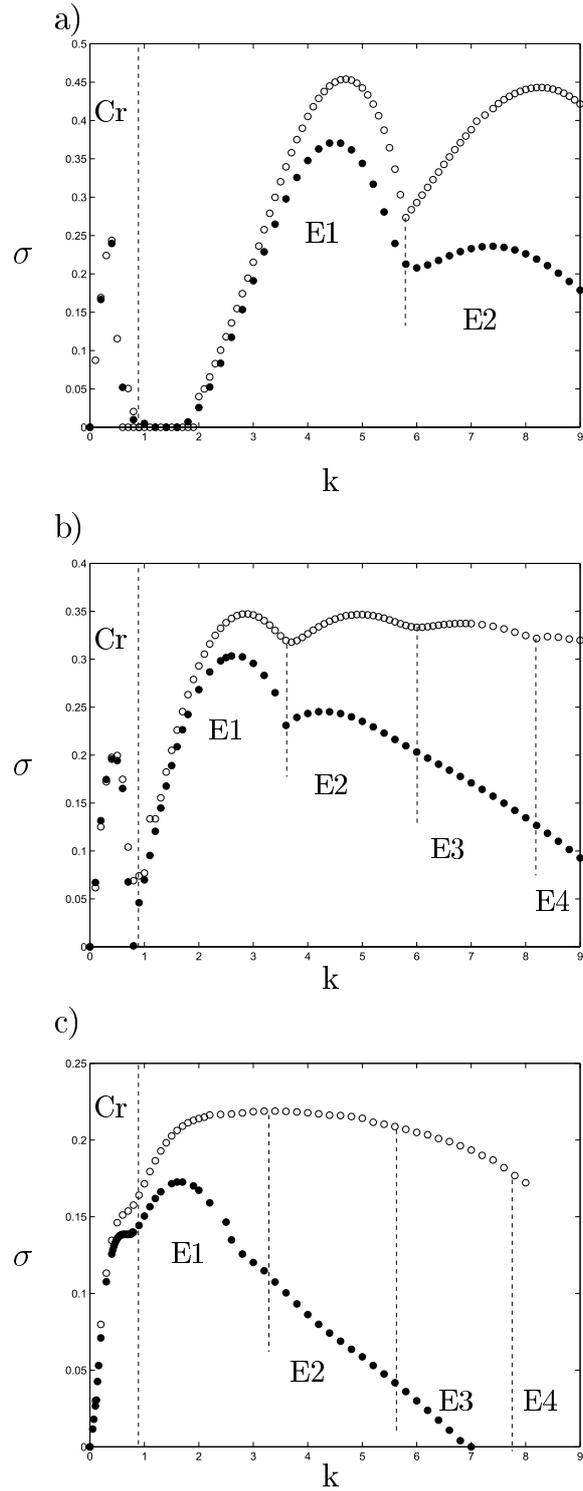


Figure 3.2: Growth rate curves of the anti-symmetric mode as a function of the transverse wavenumber  $k$  for both Reynolds numbers  $Re = 400$  (filled symbols) and  $Re = 5000$  (open symbols), a)  $C = 0.9$ , b)  $C = 0.75$ , c)  $C = 0.5$ .

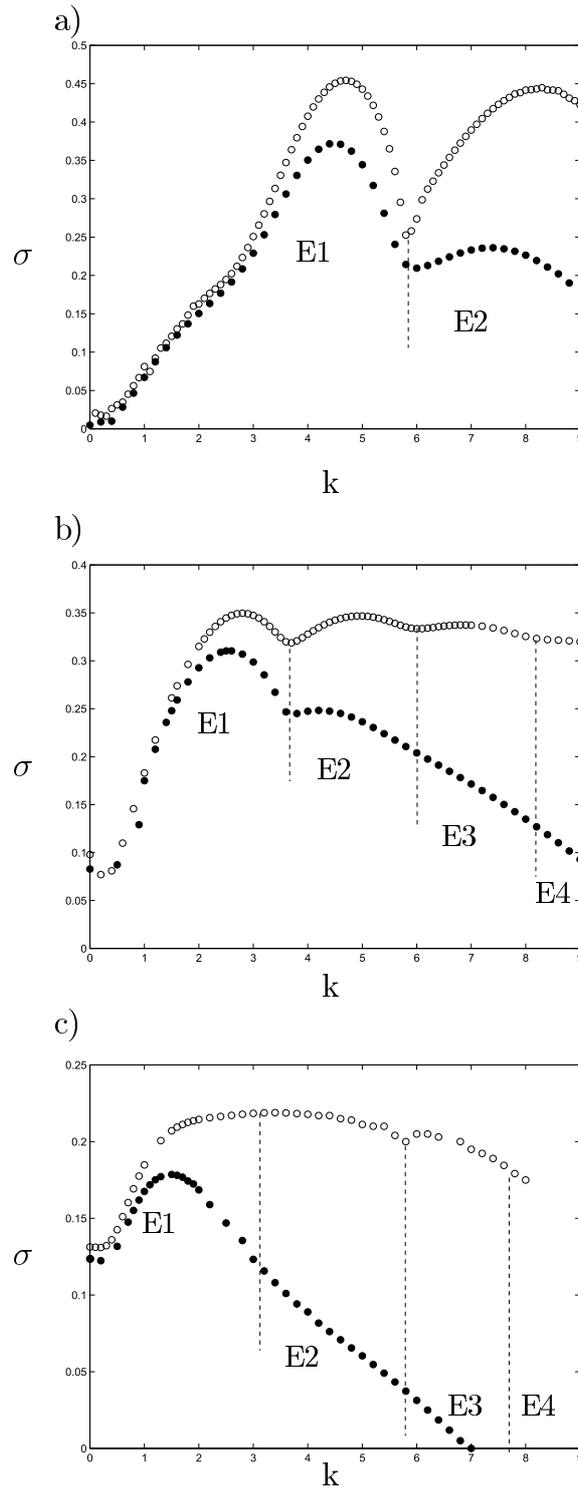


Figure 3.3: Growth rate curves of the symmetric mode as a function of the transverse wavenumber  $k$  for both Reynolds numbers  $Re = 400$  (filled symbols) and  $Re = 5000$  (open symbols), a)  $C = 0.9$ , b)  $C = 0.75$ , c)  $C = 0.5$ .

different maxima. The values of the maxima and the associate wavenumbers, as well as the elliptic regions  $(E_1, E_2)$  for  $C = 0.9$  and  $(E_1, E_2, E_3, E_4)$  for  $C = 0.75$ , are identical to the anti-symmetric ones.

### Effect of viscosity

The effect of Reynolds number on the growth rate of the instability may be analyzed by comparing curves obtained for  $Re = 5000$  (open symbols) to that computed for  $Re = 400$  (filled symbols). It is quite apparent that for the three values of  $C$  studied here, the growth rates in the more viscous case  $Re = 400$  are always smaller than for  $Re = 5000$ . Furthermore, the larger the  $k$ , the larger the viscous damping. It should be noted that for  $Re = 400$ , wavenumbers  $k$  larger than a particular threshold value  $k_c$  are totally stabilized. This threshold wavenumber  $k_c$  increases with the value of the concentration parameter  $C$  (table II). Comparison between  $Re = 5000$  and  $Re = 400$  may be carried on anticipating the elliptic nature of the instability at large  $k$ . Landman & Saffman [29], studying the 3-D stability of an elliptical 2-D flow with uniform constant vorticity in the viscous case, have shown that the growth rate  $\sigma(k)$  is such that

$$\sigma(k) = \sigma_\infty(k) - \nu k^2 \left[ 1 + \frac{1}{2}(\theta^2 - 1) \sin^2 \alpha \right] \quad (3.18)$$

where  $\sigma_\infty(k)$  is the inviscid growth rate,  $\nu$  the viscosity,  $k$  the wavenumber,  $\theta$  the aspect ratio of the elliptical streamlines, and  $\alpha$  the inclination angle of the wavevector to the spanwise direction.

When the ellipticity is small, the leading order of equation 3.18 gives

$$\sigma(k) = \sigma_\infty(k) - \nu k^2. \quad (3.19)$$

Although the inviscid growth rate  $\sigma_\infty(k)$  is unknown, we may approximate  $\sigma_\infty(k)$  by the growth rate  $\sigma_{5000}(k)$  numerically obtained at  $Re = 5000$  for the same  $k$ . Then one may estimate the critical value for the viscous stabilization as given by the implicit equation  $\sigma_{5000}(k^*) - \nu k^{*2} = 0$  for each value of  $\nu$ , when  $\nu$  is taken as the viscosity corresponding to  $Re = 400$ . The cut-off values  $k^*$  predicted by (3.19) are also given in table II and are shown to compare very favorably with the computed cut-off values  $k_c$ .

$C$	$k_c$	$k^*$
0.9	12.6	13.1
0.75	11	11.5
0.5	7	9

Table II : Table comparing the numerically computed cut-off wavenumbers  $k_c$  at  $Re = 400$  to the value  $k^*$  predicted by the viscous elliptic instability theory for each concentration  $C$  studied.

### 3.4.2 Modal structures

The above study of the growth rate curves has allowed us to identify several instability regions which were found to depend not only on the symmetry characteristics of the mode, but also on the order of magnitude of the wavenumber. For all combinations of values of the concentration parameter  $C$  and the Reynolds numbers we have shown that regardless of the symmetry of the mode, the growth rates diagrams are markedly different in two wavenumber ranges. At low  $k$ ,

the anti-symmetric and symmetric modes behave distinctly, while at large  $k$  both growth rates behave similarly.

In the present section, we shall demonstrate that the behavior of the modes in each of these wavenumber regions is characterized by a particular eigenmode structure with distinct instability mechanism.

### The periodic Crow instability

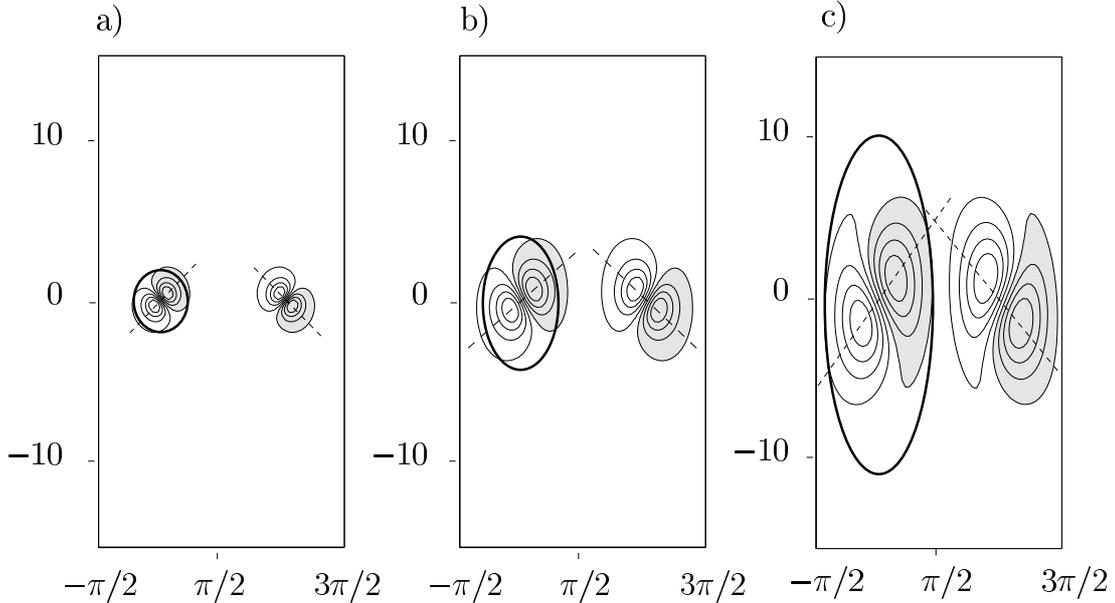


Figure 3.4: Spanwise isovorticity contours of the Crow antisymmetric mode,  $k = 0.4$ , at  $Re = 400$ , a)  $C = 0.9$ , b)  $C = 0.75$  and c)  $C = 0.5$ . The heavy contour marks the base flow vortex core since it represents isovorticity contour of the spanwise base flow vorticity corresponding to  $0.2\Omega_{max}$ . The dashed lines indicate the orientation of the perturbation dipole. Shaded area corresponds to negative values of vorticity  $\Omega$  such that  $|\Omega| > 0.2 * \Omega_{max}$ .

The spanwise vorticity distribution corresponding to the eigenmode at  $k = 0.4$  for which the maximum amplification rate of the Crow instability was calculated is plotted in figure 3.4. In the cases  $C = 0.9$  and  $C = 0.75$ , figure 3.4-a-b, the spanwise vorticity consists of two opposite sign perturbations, centered on each base flow vortex and inclined at  $47^\circ$  with respect to the  $y$ -axis. The heavy contour in the figure 3.4-a-b corresponds to the iso-vorticity contour  $0.2\Omega_{max}$  of the base flow and is indicative of the size of the vortex core. Comparing the eigenmode to the core of the vortex indicates that it affects the whole vortex, inducing an out-of phase undulation of each base vortex in the planes tilted at  $47^\circ$  with respect to the  $y$ -axis. This out-of-phase undulation induces the vortices to get alternatively closer or further apart as one moves either in the positive or negative  $y$  directions (figure 3.5).

For the value of the concentration parameter  $C = 0.5$ , figure 3.4-c, the perturbation is seen to have the same shape, but the perturbation dipoles are inclined at  $50^\circ$  to the vertical  $y$ -axis.

The eigenmode structure described above is similar to the perturbation mode of a single dipole known as the Crow instability (figure 8 of Crow's study [23]). However, it should be pointed out that there are considerable differences between the modes described above and those studied by Crow. In fact, Crow's theory is concerned with just a single pair of counter-

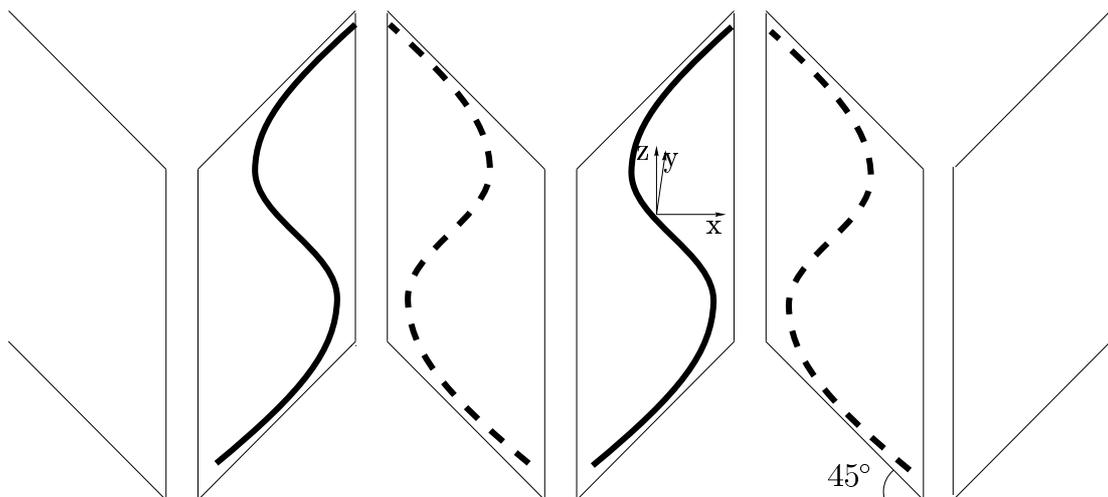


Figure 3.5: Scheme of periodic Crow instability. The plain vortices and the dashed vortices rotate in opposite directions.

rotating vortices with uniform vorticity, and is valid only in the limit where the vortex cores are smaller than the separation between eddies. In contrast, the M&M solution represents an infinite row of counter-rotating pairs of vortices with distributed vorticity. Only when the concentration parameter  $C$  is close to unity can the core of the vortices be assumed to be small compared to the distance between vortices.

Robinson & Saffman [22] have extended Crow's study [23] to vortex streets. Following their convention, Crow's instability is anti-symmetric (3.16,3.17) whereas for a single dipole, this instability is labelled symmetric since it refers to a different symmetry (i.e.  $x \rightarrow -x$ ). For a staggered double row of vortices Robinson & Saffman have shown that this 3-D long-wavelength instability is dominant over a large range of the ratios  $\kappa = h/\lambda_{2D}$ , where  $h$  is the distance between the two rows of counter-rotating vortices ( $h = 0$  so that  $\kappa = 0$  for the M & M model) and  $\lambda_{2D}$  is the 2-D wavelength defining the periodicity of each row. For very concentrated vortices  $a/\lambda_{2D} = 0.1$  ( $a$  is the vortex core size), they predicted that the most amplified wavenumber is 0.36 with a growth rate equal to 0.25 (figure 5 of [22]). For the largest concentration parameters  $C = 0.9$  where the vortex core size is  $a/2\pi = 0.05$ , we obtain a maximum at  $k = 0.4 \pm 0.05$  with a maximum growth rate  $\sigma_{max} = 0.25$ . For  $C = 0.75$ ,  $a/2\pi = 0.1$  and the maximum occurs at  $k = 0.4 \pm 0.05$  with  $\sigma_{max} = 0.21$ . Agreement with Robinson & Saffman predictions is excellent, further confirming that the mode dominating at small values of  $k$  corresponds to a Crow-type mode.

Acknowledging that in the M&M configuration, a periodic row of a pair of counter-rotating vortices with distributed vorticity is radically different from Crow's configuration, a single pair of uniform counter-rotating vortices, we compare in figure 3.6 the growth rate obtained numerically for  $Re = 5000$  and the growth rate predicted by Crow's theory [23] by taking the distance between vortices  $b$  equal to  $\pi$  as in our case and by using the estimated vortex core size  $a$ .

Following Crow's work on figure 3.6, the growth rate  $\sigma$  and the wavenumber  $k$  of the M&M solution are respectively re-scaled by  $\Gamma/2\pi b^2$  and by  $b$ .

It is quite remarkable that for the largest concentration parameter studied  $C = 0.9$ , Crow's

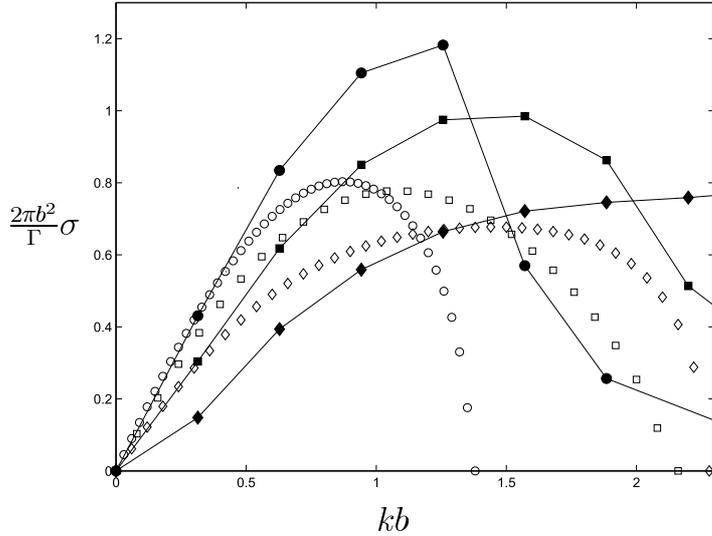


Figure 3.6: Comparison between the anti-symmetric growth rate peak and Crow’s predictions. Filled symbols are our numerical calculations and open symbols are Crow’s predictions. The circles correspond to  $C = 0.9$ , the squares to  $C = 0.75$  and the diamonds to  $C = 0.5$ .

theory for small wavenumber  $k$  predicts quite correctly our computed growth rates at small  $k$  (figure 3.6). Of course, at larger  $k$ , the asymptotic theory of Crow is not valid but it still appears to predict the behaviour of our growth rate curve. For the concentration  $C = 0.75$ , the agreement is less precise since the ratio of the vortex size to the vortex spacing is too large and invalidates the asymptotic theory. Nevertheless, the correct trends and order of magnitude for the growth rate curve appear to be well predicted by the theory. Surprisingly, for  $C = 0.5$ , where the cores of the vortices are so large that they nearly touch each other, the theory, valid for well-separated scales between vortex core size and vortices distance, still describes the general trend reasonably well. However, in this case, the growth rate does not decrease after  $k = 0.4$ , but rather keeps increasing.

### The two-dimensional instability

In the 2-D case, we have shown that the M&M flow is unstable only to a symmetric mode.

The corresponding eigenfunction is given in figure 3.7. In this case, the perturbation is concentrated into two opposite sign perturbations, each one being centered on one base flow vortex and slightly tilted from the  $y$ -axis. As we have done in the previous cases, the isoline  $0.2\Omega_{max}$  of the base flow vorticity is also shown in figure 3.7 as a heavy line to indicate the vortex core of positive sign. It may be observed that the perturbation is intense inside the whole vortex. This perturbation corresponds to a uniform displacement (indicated in figure 3.7 by arrows) of the base vortices opposite in the  $y$ -direction between the positive and the negative vortices. This mode, leading to two staggered rows of counter-rotating vortices, has already been described by Dauxois *et al.* (figure 4 of [24]). The effect of Reynolds number has also been studied by Dauxois *et al.* They found that the growth rate associated to this mode depends on the Reynolds number and that for sufficiently small Reynolds number (of order 1 for  $C = 0.5$ ), the base configuration remains stable. The slight damping of the growth rate observed when the Reynolds number decreases (see figure 3.3 in the previous section) is then consistent with their

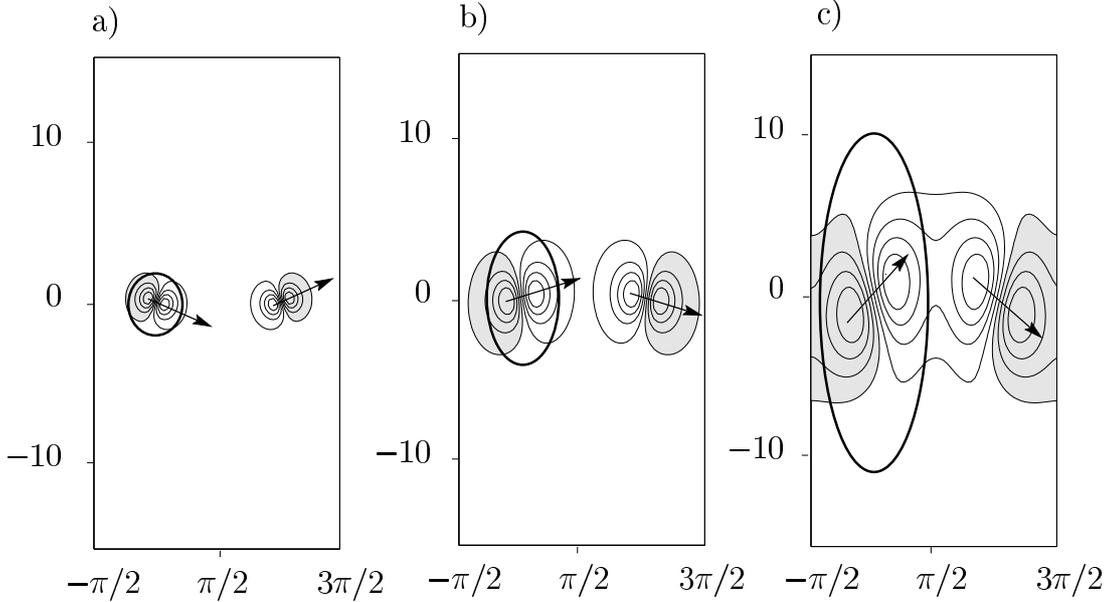


Figure 3.7: Same representation as figure 3.4 for the eigenmode of the 2-D instability presented as spanwise vorticity contours. The arrows represent the displacements undergone by the base vortices.

result. However, we have not considered low enough Reynolds number to observe stabilization.

Figure 3.8 presents the computed growth rates of the 2-D instability as a function of the concentration  $C$  for the case of  $Re = 400$ . In order to compare to Dauxois *et al.*, who restricted themselves to cases with  $C < 0.5$ , the 2-D instability mode has been computed for  $C = 0.1$ ,  $C = 0.2$  and  $C = 0.3$ . As shown in figure 3.8 our results are in excellent agreement with Dauxois *et al.* whose results are plotted as stars in the figure. For  $C$  lower than 0.5, the growth rate of the 2-D mode is seen to increase with the concentration parameter. However, for  $C$  larger than 0.5, the trend reverses and the growth rate decreases, figure 3.8. The decrease of  $\sigma$  with the concentration is to be expected since for  $C = 1$ , the vortices are infinitely concentrated and the point vortex stability theory [30] predicts that in the inviscid case, this configuration should be neutral ( $\sigma = 0$ ).

### Core mode

Since the symmetric and the anti-symmetric perturbations present similar evolution of the growth rate with  $k$  and similar structures for the eigenmodes, here we will describe only the anti-symmetric case.

The eigenmodes associated with the band E1 are given in figure 3.9 for Reynolds number  $Re = 5000$  and the three concentrations studied. We show only the perturbation relative to the base vortex of positive sign. The eigenmodes shown in figures 3.9-a and 3.9-b correspond to the wavenumbers that result in the maximum growth rate ( $k = 4.7$  for  $C = 0.9$  and  $k = 2.9$  for  $C = 0.75$ ). For figure 3.9-c, since no maximum appears for the concentration  $C = 0.5$  at  $Re = 5000$ , we have chosen the wavenumber  $k = 1.6$  that gave the maximum growth rate at  $Re = 400$ . In each perturbation field presented in figure 3.9, the eigenmode is formed by two opposite sign spanwise vorticity perturbations nested inside the core of each vortex. This perturbation affects only the inner region of each vortex. It corresponds to a deformation of the

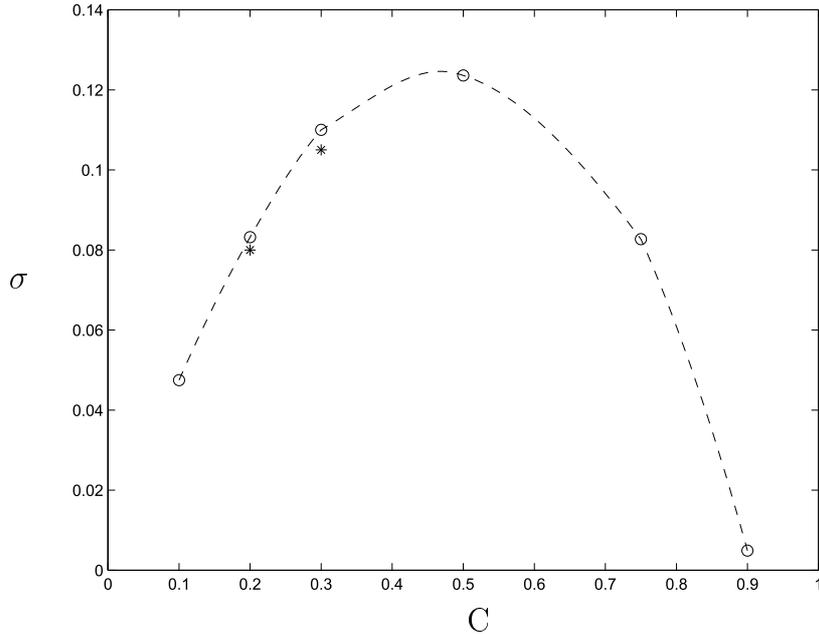


Figure 3.8: Growth rate of the 2-D mode ( $k = 0$ ) as a function of  $C$  for  $Re = 400$ . The stars symbols refers to Dauxois *et al.*'s results.

inner core of each vortex and is not just a simple displacement of the vortex as a whole as was the case in the previous section.

The eigenmode corresponding to the band E2 is presented in figure 3.10-b for the concentration  $C = 0.75$  and  $Re = 5000$ . The transverse vorticity perturbations, more complex than in the band E1, are concentrated in two pairs of opposite sign perturbations, surrounded by two ring-like parts of opposite vorticity.

These perturbation structures obtained in the bands E1 and E2 are characteristic of the short wave bending instability of a flow with elliptic streamlines, whose radial eigenmodes become more complex as the wavenumber is increased. They have been described among others by Moore & Saffman [32], Tsai & Widnall [33] and Robinson & Saffman [34]. The mechanism of this instability relies on a triadic interaction between the strain field and two Kelvin waves with azimuthal wavenumbers  $m = +1$  and  $m = -1$  which resonate when they have the same frequency  $\omega$ . The most amplified instability modes are obtained for  $\omega = 0$ . The eigenmodes obtained in band E1, figures 3.9 and 3.10-a, are similar to both the 3-D mode measured by Leweke & Williamson [35] (figure 10-b) in a vortex pair generated by a flap mechanism and the 3-D mode found by Pierrehumbert (figure 2 of [12]).

Observing the mode structure and the form of the growth rate curve as a function of  $k$ , one may wonder if the E1 and E2 modes are fundamentally distinct or if it is just one single mode which changes continuously with an increasingly complex core structure as  $k$  increases. To answer this question, a Krylov method has been implemented in the present numerical code to estimate the two leading eigenvalues and eigenvectors. Equation (3.11) is integrated using the same numerical method (see section 3 for details) until two distinct times  $T$  and  $T + \Delta T$ , with  $T$  and  $\Delta T$  long periods of time. The vector  $\vec{u}(T + \Delta T)$  is then orthogonalized to  $\vec{u}(T)$  and both vectors are normalized resulting in vectors  $\vec{v}_1$  and  $\vec{v}_2$  respectively. The space spanned by  $[\vec{v}_1, \vec{v}_2]$  is called the Krylov subspace. The linear operator  $L$  constituted by the right-hand-

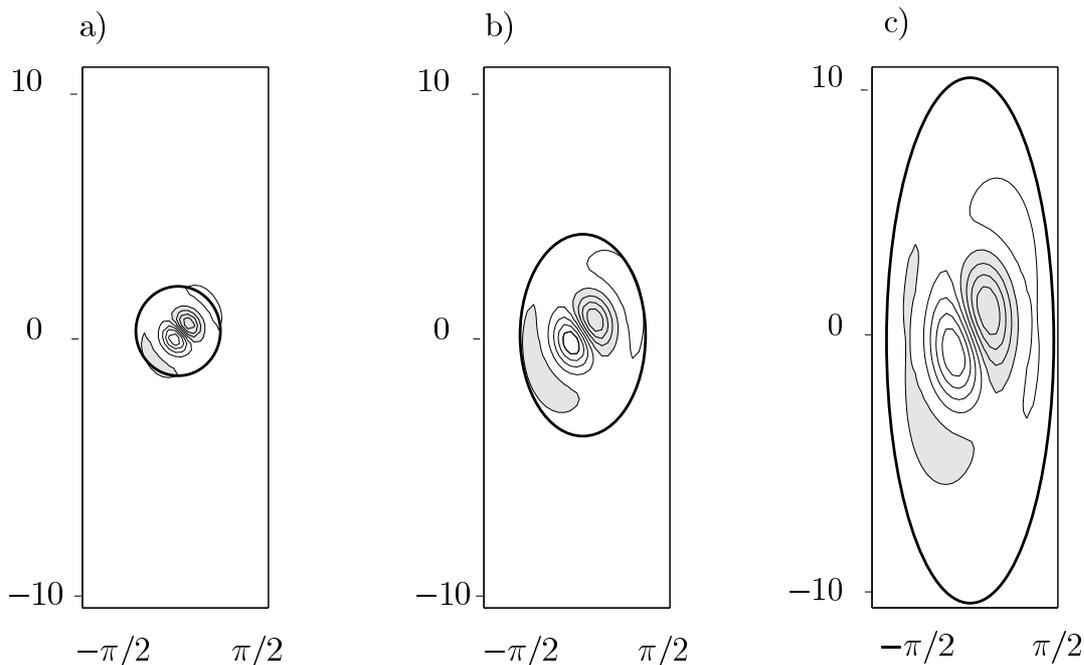


Figure 3.9: Spanwise vorticity contours of the elliptic antisymmetric mode in band E1 at  $Re = 5000$ , a)  $C = 0.9$ ,  $k = 4.7$ , b)  $C = 0.75$ ,  $k = 2.9$ , c)  $C = 0.5$ ,  $k = 1.6$ .

side terms of equation (3.11) are then estimated in the Krylov subspace to give  $[\vec{v}'_1, \vec{v}'_2]$ . The transfer matrix linking  $[\vec{v}'_1, \vec{v}'_2]$  to  $[\vec{v}_1, \vec{v}_2]$  is then diagonalized giving the two leading eigenvalues  $\lambda_i$  and eigenvectors  $\Phi_i$ . The error made on the leading eigenvalues is evaluated by the ratio  $\|L\Phi_i - \lambda_i\Phi_i\|/\|\Phi_i\|$  and is less than  $10^{-3}$  for both leading modes.

Figure 3.10-c presents the growth rate of the first two elliptical modes E1 and E2 obtained for  $C = 0.75$  at  $Re = 5000$ . Figures 3.10-a-b are the eigenfunctions corresponding to each instability branch at the same value of  $k$ ,  $k = 3.5$  (points  $e_1$  and  $e_2$ ). It can be seen in figure 3.10-c that curves corresponding to two elliptic modes E1 and E2 (figures 3.10-a-b) cross. This indicates that E1 and E2 are independent instability modes. This same observation has also been reported by Klaassen and Peltier [15] while studying the stability of a row of vortices of the same sign. However, it is possible that the numerical resolution accessible at that time did not allow Pierrehumbert & Widnall [11], to identify properly the different modes.

Tsai & Widnall [33], studying a single uniform vortex subjected to a weak strain field, have shown that the frequency scale of the elliptic instability is  $\Omega_{max}$  and the length scale is the core size. Robinson & Saffman [34] have extended this study to large strain fields, confirming that the asymptotic predictions are applicable to finite strain. Since it is clear from the above arguments that this instability should be identified as a core instability, we have re-scaled the growth rate curves for the case of  $Re = 5000$ . As proposed by Tsai & Widnall [33], the wavenumber  $k$  has been multiplied by the vortex radius  $a$  and the growth rate  $\sigma$  has been divided by  $\Omega_{max}$ . Both quantities  $a$  and  $\Omega_{max}$  were determined in section 2.

Figure 3.11 shows that for  $C = 0.9$  and  $C = 0.75$ , the maximum of amplification in bands E1 and E2 is achieved approximately for the same value ( $ka$ ). This means that the most amplified wavenumber in each band scales with the base vortex radius. Furthermore, the maximum growth rate is smaller for  $C = 0.9$  than for  $C = 0.75$ . All these features are consistent with

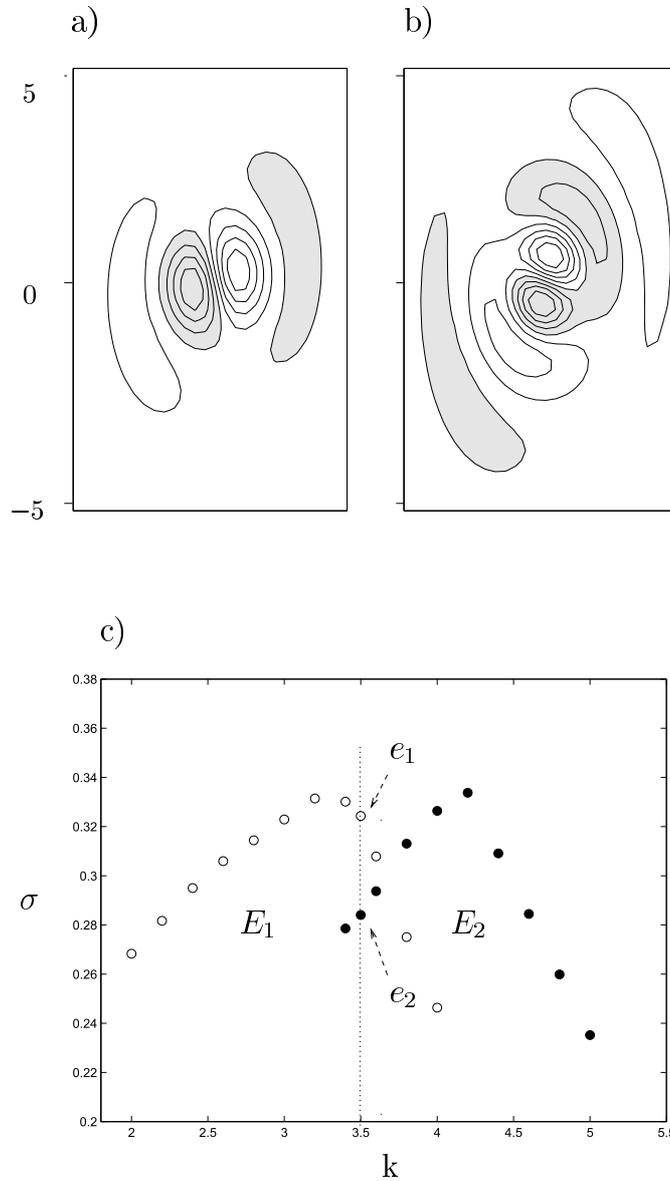


Figure 3.10: a)  $E_1$  elliptic eigenmode at  $k = 3.5$ , b)  $E_2$  elliptic eigenmode at  $k = 3.5$ , c) growth rate for  $C = 0.75$  and  $Re = 400$  showing the existence of two distinct instability mode  $E_1$  and  $E_2$  with a crossover. The two modes that coexist for  $k = 3.5$  are plotted in a) and b) for the branch  $E_1$  and  $E_2$  respectively.

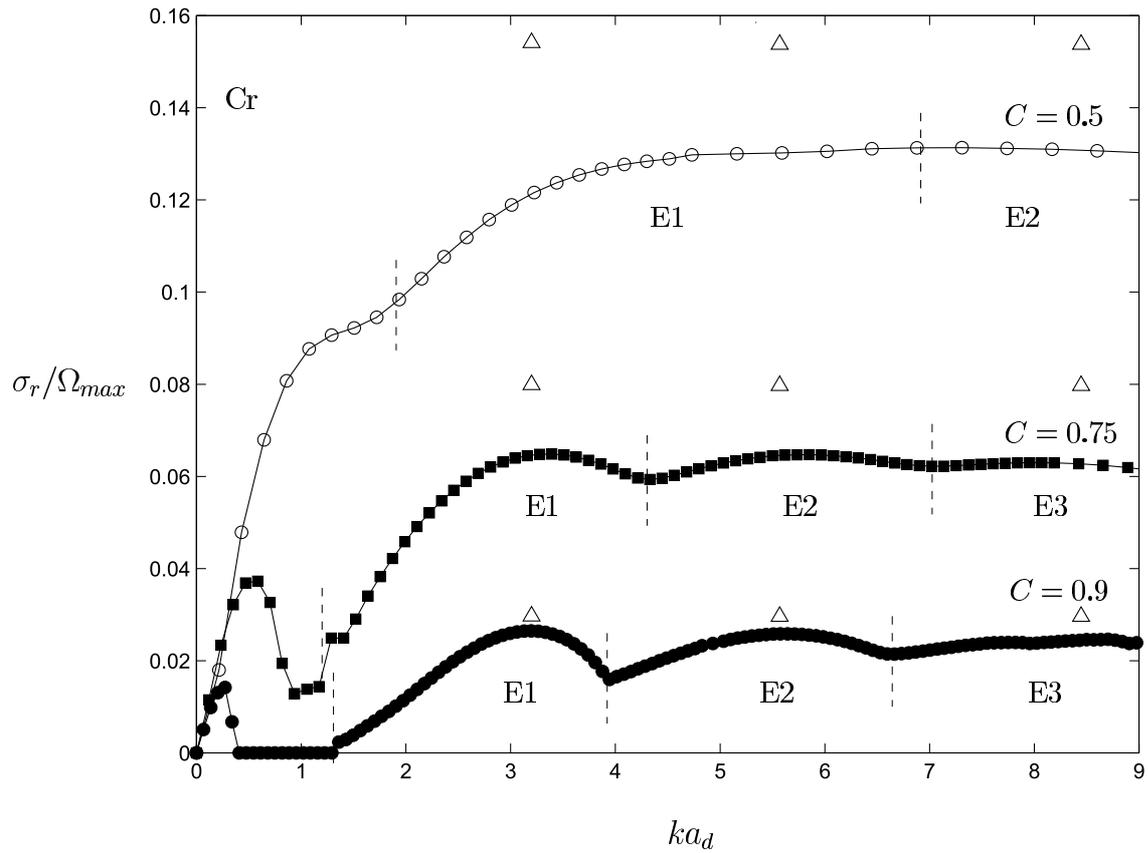


Figure 3.11: Non-dimensionalized growth rate curves of the anti-symmetric mode.  $\Omega_{max}$  is the maximum vorticity achieved at the vortex center and  $a_m$  the vortex radius. Triangles correspond to Tsai & Widnall's and Robinson & Saffman's predictions.

Tsai & Widnall's predictions since resonance bands  $E_i$  scale with  $ka$  in their theory and the larger the ellipticity parameter, the larger the growth rate. For the M&M flow, the ellipticity decreases when the concentration parameter  $C$  increases (see table I), and consequently the re-scaled growth rate (figure 3.11). All those trends are only qualitatively followed for the instability modes when  $C = 0.5$  since, as was already mentioned in the section discussing the Crow instability, the vortices are not well separated for this low concentration parameter value and the analysis adapted for isolated vortices can only be expected to qualitatively predict the dynamics of this concentration.

Furthermore, Tsai's & Widnall's theory [33] has been developed for a vortex with uniform vorticity while the vorticity in M&M vortices is distributed, even when they are well separated.

Tsai & Widnall have shown that for the first two modes, bands  $E_1$  and  $E_2$ , the most amplified non-dimensional wavenumbers are such that  $k_1a = 2.5$  and  $k_2a = 4.35$ . The corresponding non-dimensional growth rates are  $\sigma_1/\Omega_0 = 0.5708\varepsilon$ ,  $\sigma_2/\Omega_0 = 0.5695\varepsilon$ , with  $\Omega_0$  the value of the uniform vorticity and  $\varepsilon$  the ratio between the rate of strain and the vorticity. The parameter  $\varepsilon$  may be computed following Robinson & Saffman [22] using the aspect ratio  $\theta$  of the ellipse defined in section 2 :

$$\varepsilon = 2 \frac{\theta * (\theta - 1)}{(\theta^2 + 1) * (\theta + 1)} \quad (3.20)$$

The values of  $\varepsilon$  are gathered in table III.

$C$	$\theta$	$\varepsilon$
0.9	1.11	0.052
0.75	1.33	0.14
0.5	2	0.26

Table III : Table of the ellipticity  $\varepsilon$  for the concentration parameters  $C = 0.75$  and  $C = 0.9$ .

Without any adjustment, estimating  $\Omega_o$  by  $\Omega_{max}$ , the prediction for the most amplified elliptic mode growth rate  $\sigma_{max}$  given by Tsai & Widnall [33] matches remarkably well with the numerically computed growth rate (see figure 3.11).

While the vortex ellipticity, defined uniquely from the Taylor expansion (3.6) of the vorticity in the center of the vortex, allows an accurate comparison of the growth rate with Tsai & Widnall's theory [33], it is not so for the vortex core size. Indeed, the value of the core size varies greatly according to the definition used to estimate it. There is no theoretical reason to favor one definition over another when we want to compare the peak locations with the predictions of Tsai & Widnall [33] since their basic state is a uniform vortex with a sharp boundary at  $a = 1$  whereas the present vortices possess a smooth vorticity field. This remark has already been made by Eloy & Le Dizès [36] who have studied the elliptic instability of Gaussian vortices :

$$\Omega(r) = \frac{\Gamma}{4\pi\delta^2} e^{-\frac{r^2}{4\delta^2}} \quad (3.21)$$

$\delta$  being a definition of the vortex core size.

Eloy & Le Dizès [36] have shown that resonances occur for  $k_1\delta = 1.13$  and  $k_2\delta = 1.97$ , which differ from the Tsai & Widnall [33] predictions.

Presently, we estimate the radius of the vortex by the first moment of vorticity distribution (3.5) and if the vortex core size used in the Tsai & Widnall [33] formula is empirically fitted

as  $a_e = 0.8a$  then, both for  $C = 0.75$  and  $C = 0.9$ , the maxima of amplification for both E1 and E2 modes are well predicted (see figure 3.11). The fitting coefficient 0.8 expresses the adjustment from the core size estimated on the M & M model to the core size estimated by a theory developed for a vortex with uniform vorticity. In the case of gaussian vortices, the fitting coefficient that would allow comparison for the peak locations, using our definition of the core size (3.5) would be  $a_e = 1.2a$ . In the case of gaussian vortices,  $a$  underestimates the core size comparing to Tsai & Widnall [33] whereas in our model it overestimates it. This is not surprising since the M&M solution relaxes very slowly to zero away from the core compared to gaussian vortices (see figure 3.12).

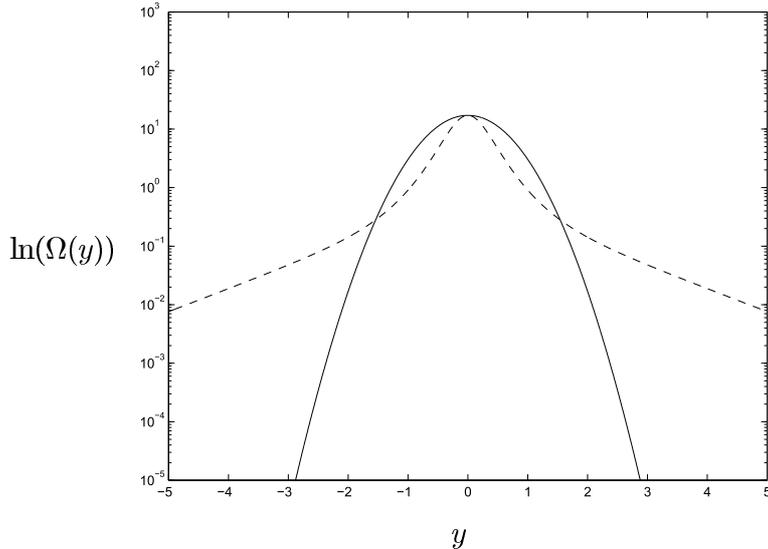


Figure 3.12: Vorticity distribution at  $x = 0$  for a gaussian vortex (full line) and the M & M vortex for  $C = 0.9$  (dashed line).

Tsai & Widnall have predicted that the resonance band width of the amplified wavenumber varies proportionately to the ellipticity  $\varepsilon$  and is equal to  $(2.14\varepsilon)$  for the first mode E1, and to  $(3.5\varepsilon)$  for the second one E2. Qualitatively, this trend is well recovered for the Mallier & Maslowe model since the curve for  $C = 0.9$ , where the vortices are less elliptical, is sharper than for  $C = 0.75$ . However, the “bells” have a larger and smoother top, even for  $C = 0.9$ , whereas Tsai & Widnall predict a sharp peak. The smoothness of the vortex contour and the distribution of vorticity in the present study could explain the softness of the observed resonance.

### 3.5 Conclusion

We have investigated the 3-D stability of an array of counter-rotating vortex pairs given by the Mallier & Maslowe model. The nature of the vorticity field of the base state depends on the value of the concentration parameter  $C$ . Three values have been investigated:  $C = 0.9$ , approaching the limit of point vortices,  $C = 0.75$  characterizing vortices less concentrated but still separated, and  $C = 0.5$  representing large, smooth elliptical patches of vorticity. The perturbations considered are restricted to those with the streamwise periodicity of the base flow. The intrinsic symmetries of the base states with respect to the middle plane between two consecutive vortices allow us to distinguish two classes of perturbations, symmetric and anti-

symmetric. For both classes, we have numerically determined the most unstable eigenmodes as a function of the spanwise wavenumber  $k$  at Reynolds numbers  $Re = 400$  and  $Re = 5000$ .

Depending on the symmetry and the wavenumber, we have identified three distinct instability mechanisms. At large wavenumbers, the dominant mode corresponds to the elliptic instabilities of the vortex cores. In this case, symmetric and anti-symmetric modes were found to be equally amplified. Core instabilities induce a distortion of the inner part of the base vortices and the corresponding eigenmode becomes more and more complex as the spanwise wavenumber is increased. Despite the periodicity and the vorticity distribution of the base state, a good quantitative agreement concerning the most amplified wavenumber and the corresponding growth rate has been found between the results obtained for concentration parameter  $C = 0.9$  and  $C = 0.75$  and the elliptic instability features of a uniform filament of vorticity predicted by Tsai & Widnall in the limit of infinitely small strain field. The most amplified wavenumber of these different core instabilities scales with the vortex core size and their maximum growth rate divided by the local maximum of vorticity scales with the ellipticity of the vortex.

At small wavenumbers,  $k < 1$ , the anti-symmetric mode exhibits an isolated peak corresponding to a Crow-type instability. The unstable wavenumber band and the corresponding maximum growth rate vary weakly with  $C$ . Comparison with the Crow instability is remarkably good for the three concentration parameters studied. The instability leads to an out-of-phase undulation of the base vortices in symmetric planes inclined at  $45^\circ$  to the axis of the vortex.

For 2-D perturbations, i.e. at  $k = 0$ , the symmetric mode has been found to be unstable with a growth rate which depends on both the concentration parameter and the Reynolds number. This instability leads to the formation of two staggered rows of counter-rotating vortices, as previously identified by Dauxois *et al.* in their 2-D linear stability study of the Mallier & Maslowe solution.

The direct application of the present study to the analysis of the stability of the vorticity field in the wake of a bluff-body should be done with care, since neither the thickness nor the hyperbolic regions of the vortex street are fully captured by the Mallier & Maslowe flow. Nevertheless, we can conclude that the Crow instability, scaling with the 2-D wavelength  $\lambda_{2D}$ , should exist until the distance between the two rows equals  $0.34\lambda_{2D}$ , a result predicted by Robinson & Saffman. Likewise, the elliptic modes should persist for staggered streets when the core of the vortex remains small comparing to  $\lambda_{2D}$ . However, a modification of the growth rate curves linked to a new selection is suspected to appear at large wavenumber  $k$ , due to the effect of hyperbolic regions of the type found in the Kelvin-Helmholtz street by Klaassen & Peltier.

# Bibliographie

- [1] R. Mallier & S.A. Maslowe, “A row of counter-rotating vortices”, *Phys. Fluids* **5**(4), 1074 (1993).
- [2] L. Rayleigh, “Scientific papers” , **3**, Cambridge University Press (1892).
- [3] P.G. Drazin & W.H. Reid, “Hydrodynamic Stability”, Cambridge University Press (1981).
- [4] C.D. Winant & F.K. Browand, “Vortex pairing : the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds numbers”, *J. Fluid Mech.* **63**, 237 (1974).
- [5] R.W. Miksad, “ Experiments on the nonlinear stages of free shear layer transition”, *J. Fluid Mech.* **56**, 695 (1972).
- [6] J.H. Konrad, “An experimental investigation of mixing in two-dimensional turbulent shear flows with applications to diffusion-limited chemical reaction”, Intern. Rep. CIT-8-PU, Calif. Inst. Tech., Pasadena (1976).
- [7] F.R. Hama, “Three-dimensional vortex pattern behind a circular cylinder”, *J. Aeronaut. Sci.* **24**, 156 (1957).
- [8] J.H. Gerrard, “The wakes of cylindrical bluff bodies at low Reynolds number”, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **288**, 351 (1978).
- [9] A.J. Yule, “Large-scale structure in the mixing-layer of a round jet”, *J. Fluid Mech.* **89**, 413 (1978).
- [10] P.A. Monkewitz, B. Lehmann, B. Barsikow & D.W. Bechert “The spreading of self-excited hot jets by side-jets”, *Phys. Fluids* **A1**, 446 (1989).
- [11] R.T. Pierrehumbert & S.E. Widnall, “The two- and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer”, *J. Fluid Mech.* **114**, 59 (1982).
- [12] R.T. Pierrehumbert, “Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid”, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2157 (1986).
- [13] B.J. Bayly, “Three-dimensional instability of elliptical flow”, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2160 (1986).
- [14] F. Waleffe, “On the three-dimensional instability of strained vortices”, *Phys. Fluids* **A2**, 76 (1990).
- [15] G.P. Klaassen & W.R. Peltier, “The influence of stratification on secondary instability in free shear layers”, *J. Fluid Mech.* **227**, 71 (1991).

- [16] S.J. Lin & G.M. Corcos, “The mixing layer : deterministic models of a turbulent flow. Part 3 : The effect of plane strain on the dynamics of streamwise vortices”, *J. Fluid Mech.* **141**, 139 (1984).
- [17] J.C. Lasheras & H. Choi, “Three-dimensional instability of a plane free shear layer. An experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices”, *J. Fluid Mech.* **189**, 53 (1988).
- [18] E. Meiburg & J.C. Lasheras, “Experimental and numerical investigation of the three-dimensional transition in plane wakes”, *J. Fluid Mech.* **190**, 1 (1987).
- [19] J.C. Lasheras & E. Meiburg, “Three dimensional vorticity modes in the wake of a flat plate”, *Phys. Fluids A* **2**(3), 371 (1990).
- [20] C.H.K. Williamson, “Three-dimensional wake transition”, *J. Fluid Mech.* **328**, 345 (1994).
- [21] C.H.K. Williamson, “Vortex dynamics in the cylinder wake”, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **28**, 477 (1996).
- [22] A.C. Robinson & P.G. Saffman, 1982. “Three-dimensional stability of vortex arrays”, *J. Fluid Mech.* **125**, 411 (1982).
- [23] S.C. Crow, “Stability theory for a pair of trailing vortices”, *A.I.A.A.J.* **8**, 2172 (1970).
- [24] T. Dauxois, S. Fauve & L. Tuckerman, “Stability of periodic arrays of vortices”, *Phys. Fluids* **8**(2), 487 (1996).
- [25] P. Tabeling, B. Perrin & S. Fauve, “Instability of a linear array of forced vortices”, *Europhys. Lett.* **3**, 459 (1987).
- [26] D. Fabre, C. Cossu, & L. Jacquin, “Spatio-temporal development of the long- and short-wave vortex pair instabilities”, *Phys. Fluids* **12**, In press (2000).
- [27] L.S. Tuckerman, “Stabilité hydrodynamique et méthodes numériques adaptées”, Cours de l’École De Printemps MFN, Carcans-Maubuisson, France (1995).
- [28] P. Billant, P. Brancher & J.-M. Chomaz, “Three-dimensional stability of a vortex pair”, *Phys. Fluids* **11**, 2069 (1999).
- [29] M. J. Landman & P.G. Saffman, “The three-dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid”, *Phys. Fluids* **30**, 2339 (1987).
- [30] H. Lamb, *Hydrodynamics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1932).
- [31] W. S. Edwards, L.S. Tuckerman, R.A. Friesner & D.C. Sorensen, “Krylov Methods for the incompressible Navier-Stokes Equations”, *J. Comput. Phys.* **110**, 82 (1994).
- [32] D.W. Moore & P.G. Saffman “The instability of a straight vortex filament in a strain field”, *Proc. R. Soc. Lond .A.* **346**, 413 (1975).
- [33] C-Y. Tsai & S.E. Widnall, “The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field”, *J. Fluid Mech.* **73**, 721 (1976).
- [34] A.C. Robinson & P.G. Saffman, “Three-dimensional stability of an elliptical vortex in a straining field”, *J. Fluid Mech.* **142**, 451 (1984).

- [35] T. Leweke & C.H.K. Williamson, “Three-dimensional instabilities in wake transition”, *European Journal of Mechanics B/Fluids* **17**(4), 571 (1998).
- [36] C. Eloy & S. Ledizès, “Three-dimensional instability of Burgers and Lamb-Oseen vortices in a strain field”, *J. Fluid Mech.* **378**, 145 (1999).



## Chapitre 4

# Étude de stabilité numérique temporelle 3D du sillage expérimental

La solution de sillage que nous avons étudiée au chapitre précédent, l'allée simple de tourbillons contra-rotatifs de Mallier & Maslowe [1] (1993) (M&M) n'exhibe pas de points d'arrêt pourtant présents dès que les tourbillons de signe contraire ne sont plus alignés. Le champ d'étirement qui se développe entre deux tourbillons consécutifs, région que l'on nommera hyperbolique, est absent du modèle. Or les observations expérimentales de Williamson [2] (1996), Meiburg & Lasheras [3] (1987) Lasheras & Meiburg [4] (1990), montrent que cette région apporte au même titre que les régions elliptiques, une contribution dans le développement des instabilités secondaires 3D du sillage. L'importance dynamique des zones hyperboliques a également été identifiée dans les couches de mélange. Les études effectuées sur une allée de tourbillons de Kelvin-Helmoltz par Klaassen & Peltier [5] (1991) et l'extension à la couche de mélange de l'analyse de Caulfield & Kerswell [6] (2000) sur les points hyperboliques de stagnation ont montré que les deux types d'instabilités, celle liée au coeur des tourbillons (instabilité elliptique) et celle liée à la zone d'étirement (instabilité du point hyperbolique) étaient susceptibles de se développer simultanément. A petit nombre d'onde, l'instabilité elliptique domine alors qu'à grand nombre d'onde, l'instabilité du point hyperbolique est prépondérante. La théorie globale d'instabilité elliptique a été détaillée au chapitre précédent. Afin de comparer les effets et les dynamiques à l'oeuvre à la fois dans les zones elliptiques et hyperboliques, nous présentons la théorie locale de ces deux mécanismes physiques d'instabilités.

### INSTABILITÉ ELLIPTIQUE - INSTABILITÉ HYPERBOLIQUE

Nous abordons ici les notions d'instabilité elliptique et hyperbolique sous l'aspect local. Considérons ainsi un écoulement bidimensionnel résultant de la superposition d'une rotation solide et d'un champ de contraintes défini dans tout le plan ( $xy$ ). Sans rotation, la direction principale de compression coïncide avec l'axe de coordonnées ( $Oy$ ) et la direction principale d'étirement avec l'axe ( $Ox$ ) (figure 4.1-b).

Cet écoulement est représenté par la fonction de courant quadratique :

$$\psi(x, y) = (\epsilon - \gamma)^2(x + y)^2 - \Delta^2(x - y)^2 \quad (4.1)$$

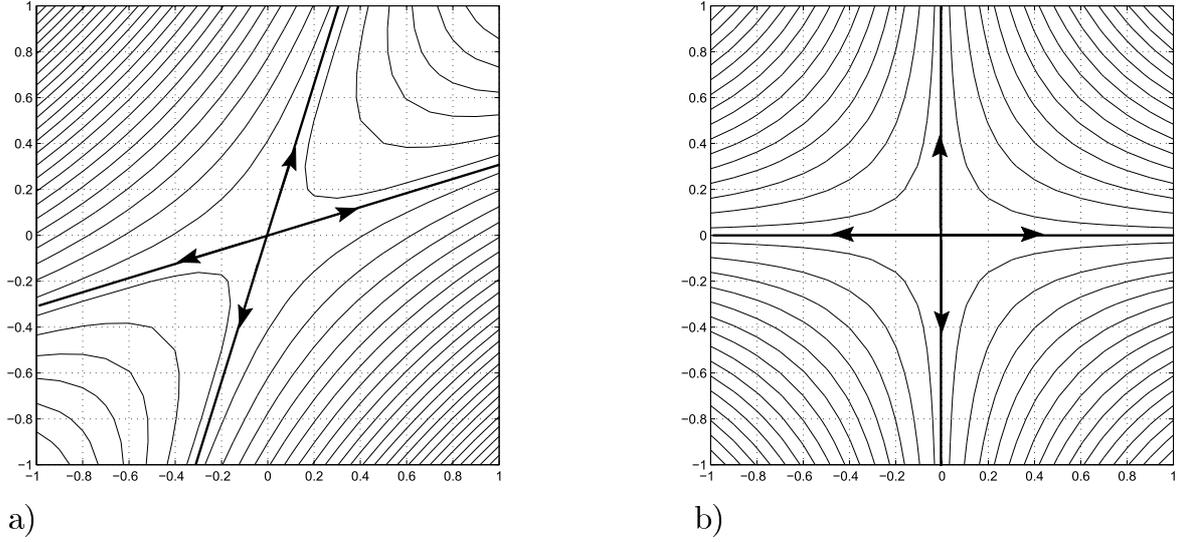


Figure 4.1: lignes de courant dans le cas hyperbolique  $\Delta > 0$  : a) étirement + rotation  $\epsilon = 1$ ,  $\gamma = 0.6$ . b) étirement pur.  $\epsilon = 1$ ,  $\gamma = 0$ .

où  $\gamma$ ,  $\epsilon$  positifs représentent respectivement les taux de rotation, de contrainte et  $\Delta^2 = \epsilon^2 - \gamma^2$  une mesure entre ces deux effets. Les directions principales de cet écoulement sont :

$$y\sqrt{\epsilon \mp \Delta} = x\sqrt{\epsilon \pm \Delta}. \quad (4.2)$$

Le champs de vitesse  $\mathbf{U}$  associé est tel que :

$$\mathbf{U} = \underline{\underline{L}} \cdot \mathbf{x}, \quad (4.3)$$

avec

$$\underline{\underline{L}} = \nabla \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \epsilon & -\gamma & 0 \\ \gamma & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Ce type d'écoulement est encore appelé "écoulement linéaire" car il est une fonction linéaire de la variable d'espace  $\mathbf{x}$ . C'est une solution des équations d'Euler bidimensionnelles. En effet  $\psi$  vérifie :

$$\partial_t(\nabla^2 \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) = 0 \quad (4.5)$$

où  $J$  est le jacobien.

La stabilité de ce type d'écoulement peut être appréhendée en considérant une perturbation de type onde avec un vecteur d'onde dépendant du temps :

$$[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}}](\mathbf{x}, t) = [\mathbf{u}, \mathbf{p}](t)e^{i\mathbf{k}(t)\cdot\mathbf{x}}, \quad (4.6)$$

$\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}}$  étant les perturbations de vitesse et de pression.  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{p}$  sont les amplitudes des perturbations et  $\mathbf{k}(t)$ , le nombre d'onde.

Elle a été étudiée par Bayly [7] (1986), Waleffe [8] (1990) dans le cas d'un écoulement elliptique c'est à dire dans la limite où la rotation est largement dominante  $\gamma \gg \epsilon$ ,  $\Delta$  est alors imaginaire pur. Lagnado & al [9] (1984), Craik & Criminale [10] (1986), Caulfield & Kerswell [6] (2000) se sont intéressés par contre au cas de l'écoulement hyperbolique pour lequel le taux de contrainte est prépondérant c'est à dire  $\gamma \ll \epsilon$ ,  $\Delta$  est dans ce cas réel.

En injectant les perturbations  $[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}}]$  dans les équations d'Euler linéarisées et après quelques manipulations (Lagnado & al [9] (1984), Bayly [7] (1986)), le système d'équations différentielles ordinaires suivant est obtenu :

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\underline{\underline{\mathbb{L}}}^T \mathbf{k}, \quad (4.7)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left( \frac{2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2} - \mathbb{I} \right) \underline{\underline{\mathbb{L}}} \mathbf{u}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} = 0. \quad (4.9)$$

$\underline{\underline{\mathbb{L}}}^T$  et  $\mathbf{k}^T$  sont la matrice et le vecteur transposés de  $\underline{\underline{\mathbb{L}}}$  et  $\mathbf{k}$  et  $\mathbb{I}$  représente la matrice identité.  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}^T$  correspond au produit matriciel de  $\mathbf{k}$  par  $\mathbf{k}^T$ .

L'équation 4.7 se résoud analytiquement dans tous les cas c'est à dire pour les écoulements de type elliptique et hyperbolique. Le cas critique  $\Delta = 0$  que nous ne considérerons pas correspond à un écoulement de cisaillement pur moyennant un changement de repère. En injectant l'expression du vecteur d'onde  $\mathbf{k}(t)$  dans (4.8) et en résolvant cette équation, on détermine l'évolution de l'amplitude des perturbations au cours du temps et on en déduit des critères d'instabilité.

### Écoulement elliptique

On se place dans le cas où  $\gamma \gg \epsilon$ ; on pose  $\gamma = 1$  et  $\Delta = i\sqrt{1 - \epsilon^2}$ .

Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{k}(t) = k_0 \begin{pmatrix} \sin \phi \cos[\Delta t] \\ E \sin \phi \sin[\Delta t] \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

avec  $\phi$ , l'angle minimum d'inclinaison entre  $\mathbf{k}(t)$  et l'axe vertical de rotation.  $E = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}$  représente le taux d'ellipticité des lignes de courant.

Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}(t)$  décrit une ellipse autour de l'axe de rotation ( $Oz$ ) avec une période  $2\pi/\Delta$ . Cette ellipse est de même excentricité que l'écoulement de base mais son petit et son grand axes sont inversés.

$\mathbf{k}(t)$  étant déterminé, l'équation (4.8) est un problème de Floquet, résolu par Bayly [7] en 1986. La solution générale est une combinaison linéaire de modes de Floquet de la forme :

$$\mathbf{u} = e^{\sigma t} \mathbf{f}(\phi) \quad (4.11)$$

$\mathbf{f}$  étant de période  $2\pi$  et  $\sigma$ , l'exposant de Floquet.  $\sigma$  est alors déterminé par la condition que  $e^{\sigma T}$ , avec  $T$  la période, est une valeur propre de la matrice  $M(2\pi)$ ,  $M(\phi)$  satisfaisant l'équation :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \left( \frac{2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2} - \mathbb{I} \right) \underline{\underline{\mathbf{M}}} \quad (4.12)$$

et,

$$M(0) = \mathbb{I}. \quad (4.13)$$

Bayly a montré que l'une des valeurs propres de la matrice  $M$  est toujours égale à 1 et que le produit des valeurs propres vaut toujours 1. Si les deux autres, notées  $\mu$  et  $\mu'$  sont réelles pour  $E$  et  $\phi$  donnés alors il existe une solution de (4.8) qui croît exponentiellement en temps à un taux :

$$\sigma(E, \phi) = \frac{\Delta^2}{2\pi} \ln[\mu(E, \phi)] \quad (4.14)$$

avec  $\mu > 1 > \mu'$  pour  $E$  et  $\phi$  donné.

Le taux de croissance  $\sigma$  n'est fonction que de  $E$ , le taux d'ellipticité et  $\phi$  l'angle d'inclinaison du vecteur initial. Lorsque  $E = 1$ , l'écoulement est réduit à une rotation rigide et on retrouve les résultats obtenus pour des ondes inertielles qui sont neutres. Les valeurs propres de  $M(2\pi)$  pour une inclinaison  $\phi$  sont alors de la forme

$$[\cos(4\pi \cos \phi) \pm i \sin(4\pi \cos \phi)]. \quad (4.15)$$

Elles sont réelles et positives pour  $\phi$  valant 0,  $\pi/2$  et  $\pi/3$ . Pour de faibles taux d'excentricité  $E \simeq 1$ , seules les ondes d'angle  $\pi/3$  sont déstabilisées. Cette limite  $E = 1$  permet une interprétation physique de cette instabilité elliptique. En effet, les ondes d'angle  $\phi = \pi/3$  possèdent dans le référentiel tournant une fréquence  $\omega$  égale à  $\Omega$ , la fréquence de rotation.  $\omega$  est donnée par la relation de dispersion des ondes inertielles  $\omega = 2\Omega |\cos \phi|$ . Ces ondes de fréquence  $\omega = \Omega$  sont déstabilisées par le forçage paramétrique dû au champ de compression-dilatation qui dans le référentiel tournant gire à la fréquence  $2\Omega$ . Le diagramme de stabilité dans le plan  $(\phi, E)$  déterminé numériquement par Bayly [7] (1986) est présenté figure 4.2. Les courbes a et c délimitent la zone d'instabilité et la courbe b est relative au maximum de taux de croissance.

Cette instabilité a été étendue au cas des fluides visqueux par Landman & Saffman [11] (1987). Waleffe [8] (1990) l'a reliée à l'instabilité d'écoulements confinés décrit précédemment par Tsai & Widnall [12] (1976) et Robinson & Saffman [13] (1984). La description de l'étude des instabilités d'écoulements elliptiques confinés, aussi appelée théorie globale de l'instabilité elliptique, n'est pas reprise ici car elle est détaillée dans le paragraphe intitulé "core mode" de l'article numérique sur l'allée simple de tourbillons alternés de Mallier & Maslowe.

### Écoulement hyperbolique

On se place dans le cas où  $\gamma \ll \epsilon$ . On pose  $\epsilon = 1$  d'où  $\Delta = \sqrt{1 - \gamma^2}$

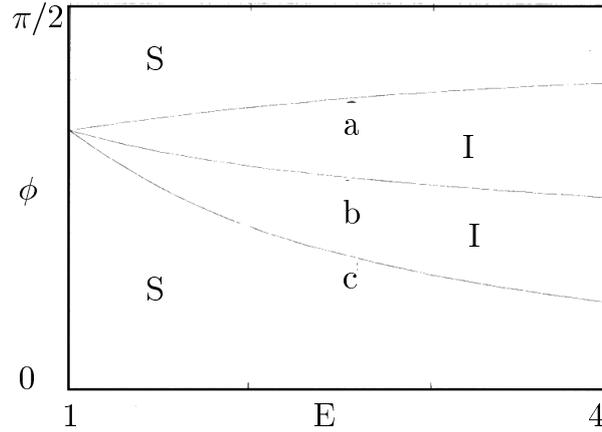


Figure 4.2: diagramme de stabilité déterminé par Bayly [7] (1986).

Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}(t)$  peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{k}(t) = k_0 \begin{pmatrix} \sin \phi \cosh[\Delta t] \\ E \sin \phi \sinh[\Delta t] \\ \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Le vecteur d'onde ne décrit plus une courbe fermée comme dans le cas précédent mais une hyperbole tournée à  $90^\circ$  par rapport à celle décrite par les trajectoires de l'écoulement de base. La théorie de Floquet n'est donc pas applicable. Dans tous les cas ou  $\phi \neq 0$ , le vecteur d'onde tend inexorablement vers l'infini et la dynamique est par essence transitoire. Ces effets transitoires ont été récemment décrits par Caulfield & Kerswell (2000) [6] mais, ne rentrant pas dans le contexte de notre étude, ils ne seront pas exposés.  $\phi = 0$  représente le cas singulier ou le vecteur d'onde ne varie pas au cours du temps et la dynamique peut être décrite par la théorie de l'instabilité.

Dans cette hypothèse, le vecteur d'onde est de la forme  $\mathbf{k}(t) = k e_z$ , perpendiculaire au plan de l'écoulement de base. Les perturbations le long de l'axe de compression et de dilatation sont homogènes. L'équation (4.8), régissant l'amplitude des perturbations, devient

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\underline{\underline{L}}\mathbf{u}, \quad (4.17)$$

dont la solution évidente croît exponentiellement en temps.

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} e^{\sigma t} \quad (4.18)$$

avec  $\sigma = \Delta$ , a et b valant respectivement  $(\frac{\epsilon - \Delta}{2\epsilon\Delta^2})^{1/2}\epsilon$ ,  $(\frac{\epsilon + \Delta}{2\epsilon\Delta^2})^{1/2}\epsilon$ .

Cet écoulement est donc instable et le taux de croissance associé vaut  $\Delta$ . La vitesse s'aligne avec la direction principale de compression au temps longs.

Ce résultat est souvent interprété en termes de vorticité. Le vecteur vorticité  $\tilde{\omega}(t)$  vérifie la relation :

$$\tilde{\omega}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k}(t) \wedge \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (4.19)$$

Parallèlement à la vitesse qui croît exponentiellement en temps, la perturbation de vorticité est étirée et s'oriente selon la perpendiculaire à la direction principale de compression, direction de la perturbation de vitesse aux temps longs [cf Leblanc & Cambon [14] [15] (1997-1998), Caulfield & Kerswell(2000) [6]]. Dans le cas où la rotation  $\gamma$  est nulle (figure 4.1-b), cette direction correspond à la direction principale de l'étirement et le résultat correspond à l'intuition. Cette instabilité est quelque peu académique car tous les vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}$  parallèles à  $\mathbf{e}_z$  sont instables avec le même taux de croissance quel que soit le module de  $\mathbf{k}$ . La prise en compte des effets visqueux va permettre de limiter la bande de nombres d'onde instables. Lagnado & al. [9] (1984) ont étudié l'effet de la viscosité et déterminé que les ondes instables doivent satisfaire la relation  $k_0 < \sqrt{\Delta/\nu}$ ,  $\nu$  étant la viscosité du fluide.

## 4.1  tat de base

Dans cette étude, nous avons abordé des écoulements de sillage plans plus réalistes. Cependant il n'existe pas de solution des équations de Navier-Stokes modélisant ce sillage "plus réaliste". Nous avons donc été amené à simuler cet écoulement de base, l'allée de von Kármán.

Le sillage expérimental se développe spatialement. Le profil de base, l'allée de von Kármán, évolue lorsqu'on se déplace dans la direction de l'écoulement moyen. Or dans le cas particulier du sillage plan, ce développement spatial est très lent. Cela nous permet, dans une première approximation, de le considérer homogène en espace et d'adopter une vision locale. On s'intéresse uniquement à une tranche de fluide et on étudie son comportement temporel. Dans la vision temporelle, l'allée de von Kármán se développe au cours du temps à partir de petites perturbations du sillage plan. Cette instationnarité est due dans les premiers instants à l'enroulement de la vorticité du tourbillon puis à la diffusion des tourbillons sous l'effet de la viscosité. Afin d'isoler et de caractériser les mécanismes d'instabilité présents dans les sillages, nous désirons nous affranchir de cette instationnarité. Pour cela, le profil de Bickley est maintenu "artificiellement" par une force volumique qui compense exactement sa diffusion. Une fois l'enroulement des tourbillons terminé, l'écoulement converge comme nous le montrerons vers un état quasi-stationnaire qui est alors choisi comme l'écoulement de base repr santant une allée de von Kármán saturée. Notre étude diffère donc de celle de Klaassen & Peltier [5] (1991) sur la couche de mélange où est calculée la stabilité "instantannée" de l'écoulement au cours de son enroulement. Dans ce cas, l'enroulement varie sur des échelles comparables à celle où l'instabilité se développe et l'interprétation des résultats devient plus délicate. Un tel ajout d'une force volumique qui permet d'obtenir un écoulement stationnaire et d'appliquer les théories standard de l'instabilité est coutumier que ce soit pour les jets ou les sillages [Drazin & Reid [16] (1981)]. Notre méthode a donc l'avantage de traiter un problème de stabilité bien posé et il sera toujours possible ultérieurement de comparer les branches d'instabilité trouvées pour notre écoulement asymptotique à celles calculées sur les "instantannées" lors de l'évolution vers cet état de référence. Dès lors deux paramètres caractérisent cet état de référence, le nombre de Reynolds basé sur le saut de vitesse de l'écoulement moyen et l'épaisseur de vorticité,  $Re = \Delta U \delta_\omega / \nu$  et le nombre de Strouhal  $St = \frac{2\pi}{5} \delta_\omega / \lambda_{2D}$ , déterminé par la périodicité imposée à notre état de base.

L'instabilité primaire saturée est simulée numériquement à l'aide de la version 2D non linéaire du code utilisé pour le calcul de stabilité 3D.

Le profil initial est celui mesuré dans l'étude expérimentale c'est-à-dire un sillage de Bickley. Il est de la forme :

$$U(y) = 2 - \frac{2}{1 + \sinh^2(\operatorname{arcsinh}(1)y)}. \quad (4.20)$$

Le déficit de vitesse est  $\Delta U = 2$  et l'échelle de longueur  $\delta = 1/\operatorname{arcsinh}(1)$ , la demi largeur du sillage.

#### 4.1.1 Méthode numérique

Le profil de base (4.20) ci-dessus étant uniforme le long de l'axe longitudinal (Ox), les perturbations non linéaires sont supposées périodiques en  $x$  et de période  $\lambda_{2D}$  arbitraire.

L'évolution des perturbations de vitesse 2D, de vorticité et de pression,  $\tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}$  est régie par les équations de Navier-Stokes *non-linéaires* :

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.21)$$

$$\text{où } \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}}$$

et

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{U} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \wedge \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \left[ \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{U} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right] + \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.22)$$

où  $\nu$  est la viscosité,  $\mathbf{U} = U(y)\mathbf{e}_x$  et  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{\partial}{\partial x} U(y)\mathbf{e}_z$ . Le terme  $\nu \Delta \mathbf{U}$  a été omis car, afin d'obtenir une solution stationnaire pour l'allée tourbillonnaire, la diffusion du profil initial est supposé artificiellement compensée par une force volumique  $-\nu \Delta \mathbf{U}$ .

La méthode de résolution des équations de Navier-Stokes suit le schéma numérique présenté dans l'article concernant l'allée de M&M (paragraphe III) pour le cas 3D. Le terme supplémentaire non linéaire  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \wedge \tilde{\mathbf{u}}$  est calculé dans l'espace réel (méthode pseudo-spectrale avec points de collocations sur une grille régulière).

Les perturbations dans les premières simulations que nous avons réalisées étaient initialisées par du bruit blanc. La solution obtenue était instationnaire et alternait entre un mode de von Kármán et un mode de jet pour lequel les tourbillons contra-rotatifs ne sont pas décalés d'une demi longueur d'onde. Afin d'obtenir une solution représentant une allée de von Kármán, nous avons tout d'abord imposé des perturbations initiales forçant le mode de von Kármán. Nous les avons choisies sous la forme d'une modulation en  $x$  du profil de vitesse de base.

La perturbation de vitesse longitudinale est

$$\tilde{\mathbf{u}}_x(x, y, 0) = -0.01 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_{2D}}x\right)\mathbf{\Omega}(y) \quad (4.23)$$

et la perturbation de vitesse transverse déduite de l'équation de continuité vérifie

$$\tilde{\mathbf{u}}_y(x, y, 0) = 0.01 \frac{2\pi}{\lambda_{2D}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_{2D}}x\right)\mathbf{U}(y) \quad (4.24)$$

Mais cela n'est pas suffisant. Au bout d'un certain temps, on obtient à nouveau une alternance entre les modes de von Kármán et de jet. Nous avons donc été amené à imposer les symétries du mode de von Kármán durant toute la simulation :

$$[u_x, u_y](x, y, t) = [u_x, -u_y](x + \frac{\lambda_{2D}}{2}, -y, t). \quad (4.25)$$

Le maillage cartésien considéré est de  $128 \times 512$  points de collocations, ce qui fixe la taille de la maille à  $\delta_x = \delta_y = 0.0078$ . Le pas de temps, choisi pour remplir la condition C.F.L. ( $\Delta x/\Delta t > U_{max}$ ) est  $\delta t = 0.001$ .

#### 4.1.2 Résultats

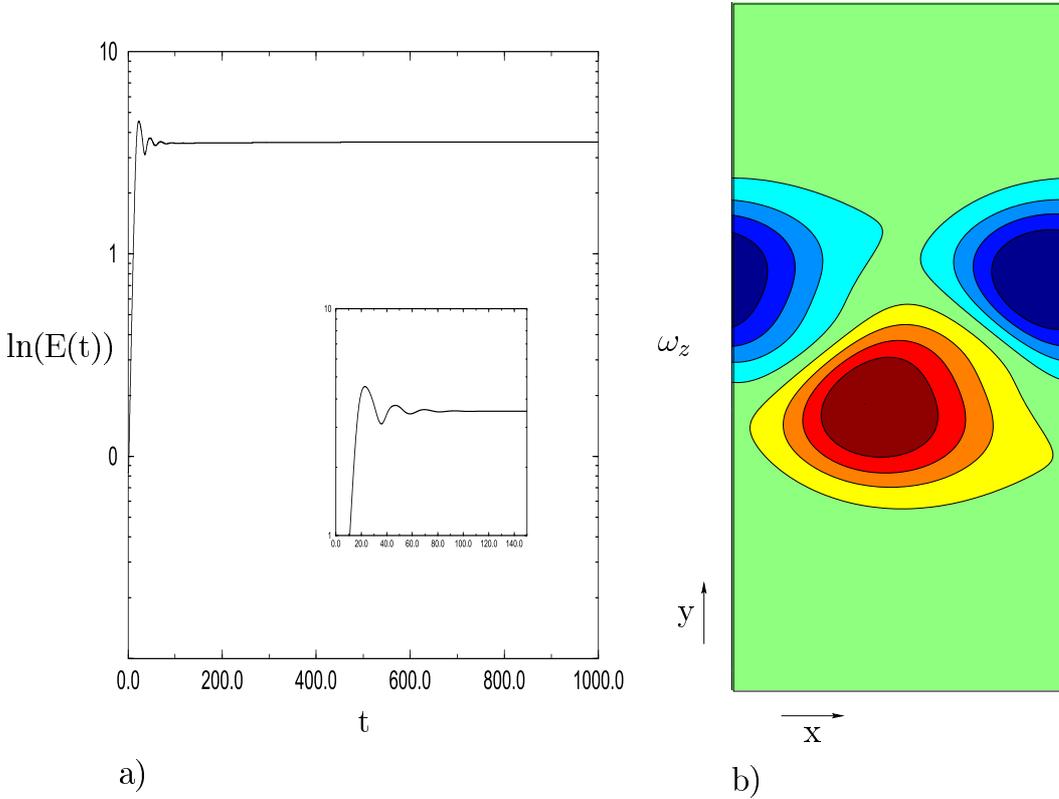


Figure 4.3: a) Enstrophie en fonction du temps. b) Écoulement de base à l'instant  $t = 1000$ . Les valeurs des contours correspondent à 80,60,40 et 20% de la vorticité maximale  $|\Omega_{max}|$  atteinte au centre du tourbillon. Les dégradés de bleu correspondent aux valeurs négatives de la vorticité  $\Omega$  telle que  $\Omega > 0.2|\Omega_{max}|$  et les dégradés de rouge-orangé aux valeurs positives de la vorticité.

Afin de se rapprocher des conditions expérimentales, nous avons choisi de simuler le cas où  $Re = 220$  et  $St = 0.07$ , ceci correspond à la viscosité numérique  $\nu = 0.013$  et compte tenu que  $\delta_\omega = 0.35$ ,  $\lambda_{2D}$  associée à  $St=0.07$  vaut  $2\pi$ .

La figure 4.3-a présente l'évolution de l'enstrophie en fonction du temps. Entre les instants  $t = 0$  et  $t = 10$ , la courbe montre la croissance linéaire de l'instabilité. Ensuite il apparaît

des oscillations correspondant à l'enroulement de la vorticit e avant saturation. L' etat saturée est atteint  a  $t = 120$ . La variation de l'enstrophie en fin de simulation, c'est  a dire calcul ee entre les instants  $t = 900$  et  $t = 1000$  est tr es faible, de l'ordre de  $10^{-5}$ . L' ecoulement obtenu peut ainsi  etre consid er e comme stationnaire.

Le motif de l'all ee dans le plan  $(xy)$  obtenu au dernier instant de la simulation  $t = 1000$  est pr esent e figure 4.3-b. Les tourbillons obtenus sont peu concentrées. Ils pr esentent une section multipolaire qui r esulte de l'interaction non sym etrique des deux voisins de signes opposées. Les tourbillons bleus correspondent  a des zones de vorticit e n egative c'est  a dire qu'ils tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. Les tourbillons rouges, inversement, tournent dans le sens trigonom etrique et sont attribuées aux zones de vorticit e positive. Les r egions elliptiques sont identifi ees au coeur des tourbillons et les r egions hyperboliques, r egions de fort  etirement, aux interstices de couleur verte entre deux tourbillons cons ecutifs.

## 4.2 Stabilit e de l' etat de base

Nous avons r ealis e l' etude de stabilit e 3D sur l' ecoulement de base 2D obtenu  a  $t = 1000$ , figure 4.3-b, compte tenu de sa tr es faible  evolution temporelle.

Nous rappelons ici le syst eme d' equations lin earis ees au voisinage d'un  ecoulement de base 2D. L' ecoulement de base consid er e étant invariant le long de l'axe  $z$ , les perturbations sont prises sous la forme :

$$[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\mathbf{p}}](x, y, z, t) = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{p}](x, y, t)e^{ikz} + cc \quad (4.26)$$

et elles v erifient les  equations de Navier-Stokes lin earis ees au voisinage de l' ecoulement de base d efini par  $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})$  :

$$\text{div } \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.27)$$

et :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{U} = -\nabla [\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{U}] + \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}}. \quad (4.28)$$

L' evolution des perturbations est calcul ee par la m ethode pseudo-spectrale expos ee dans l'article num erique pr esent e au chapitre 3.

### 4.2.1 D etermination de la vitesse moyenne de l' ecoulement

Afin de mener  a bien l'analyse de stabilit e lin eaire, il faut se placer dans le r ef erentiel o u l' ecoulement de base est stationnaire, c'est  a dire le r ef erentiel liée  a l'all ee de von K arm an. Nous avons ainsi implementée une m ethode de d etermination de la vitesse d'advection moyenne de l' ecoulement.

Les  equations de la dynamique formul ees en termes de vorticit e s' ecrivent :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -J(\omega, \psi) + \nu \Delta \omega, \quad (4.29)$$

o u  $J$  est le jacobien formée des termes d'advection de la vorticit e.

La vitesse  $\bar{U}$  qui rend l' ecoulement stationnaire est donc celle qui annule le jacobien, soit :

$$\int \int [(u + \bar{U}) \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y}]^2 ds = 0. \quad (4.30)$$

## 4.2.2 Symétries

Nous avons comme dans l'étude portant sur la solution de M&M [1] (1993) séparé les perturbations en deux familles de symétries distinctes. En effet l'état de base que l'on considère ici est symétrique lorsque  $x \rightarrow x + \lambda_{2D}/2$  et  $y \rightarrow -y$ .

Le mode "antisymétrique" est tel que

$$[u_x, u_y, u_z](x, y, t) = [-u_x, u_y, -u_z](x + \lambda_{2D}/2, -y, t) \quad (4.31)$$

où

$$[\omega_x, \omega_y, \omega_z](x, y, t) = [\omega_x, -\omega_y, \omega_z](x + \lambda_{2D}/2, -y, t) \quad (4.32)$$

et le mode "symétrique" vérifie :

$$[u_x, u_y, u_z](x, y, t) = [u_x, -u_y, u_z](x + \lambda_{2D}/2, -y, t) \quad (4.33)$$

où

$$[\omega_x, \omega_y, \omega_z](x, y, t) = [-\omega_x, \omega_y, -\omega_z](x + \lambda_{2D}/2, -y, t) . \quad (4.34)$$

La terminologie "antisymétrique" et "symétrique" a été empruntée à Robinson & Saffman [13] (1984), elle fait référence à la symétrie des déformations des tubes de vorticité (alignés selon (Oz)) dans la direction (Ox). Comme pour l'étude de stabilité de la solution de M&M [1] (1993), les relations [4.31,4.32,4.33,4.34] montrent bien que cette terminologie ne décrit pas la symétrie de toutes les composantes des champs de vorticité ou de vitesse. Si le mode "antisymétrique" a une composante  $\omega_z$  symétrique, il est associé à une composante  $\omega_x$  symétrique mais à une composante  $\omega_y$  antisymétrique. La particularité des équations de Navier-Stokes linéarisées autour du champs de vitesse de base est d'être interne dans chacune des familles, c'est à dire que si la perturbation de vitesse est "antisymétrique" (respectivement "symétrique") alors son évolution  $\frac{\partial u}{\partial t}$  est aussi "antisymétrique" (respectivement "symétrique"). Illustrons cette propriété sur la première équation de Navier-Stokes en  $u_x$  et sur le terme  $\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{u}$ .

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}(x, y, t) = \Omega(x, y, t)u_y(x, y, t) - \omega_z(x, y, t)U_y(x, y, t) - \dots \quad (4.35)$$

$\Omega(x, y, t)$  et  $U_y(x, y, t)$  étant la vorticité et la vitesse longitudinale de l'écoulement de base.

Comme  $\Omega(x, y, t) = -\Omega(x + \lambda_{2D}/2, -y, t)$  et  $U_y(x, y, t) = -U_y(x + \lambda_{2D}/2, -y, t)$ ,

$$\begin{aligned} \Omega(x, y, t)u_y(x, y, t) &= -\Omega(x + \lambda_{2D}/2, -y, t)u_y(x + \lambda_{2D}/2, -y, t) \\ \omega_z(x, y, t)U_y(x, y, t) &= -\omega_z(x + \lambda_{2D}/2, -y, t)U_y(x + \lambda_{2D}/2, -y, t) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ce raisonnement appliqué sur tous les termes de l'équation et pour chaque composante montre que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{\partial u_x}{\partial t}(x + \lambda_{2D}/2, -y, t) \\ \frac{\partial u_y}{\partial t}(x, y, t) = \frac{\partial u_y}{\partial t}(x + \lambda_{2D}/2, -y, t) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{\partial u_z}{\partial t}(x + \lambda_{2D}/2, -y, t) \end{cases} . \quad (4.37)$$

L'opérateur d'évolution linéaire est donc interne au sous-espace vectoriel (s.e.v.) des perturbations "antisymétrique" et "symétrique". De plus, toute perturbation initiale  $\mathbf{u}(x, y, 0)$  s'écrit comme la somme de deux perturbations, l'une "antisymétrique" et l'autre "symétrique" :

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \begin{pmatrix} [\mathbf{u}_x(x, y) - \mathbf{u}_x(x + \lambda_{2D}/2, -y)]/2 \\ [\mathbf{u}_y(x, y) + \mathbf{u}_y(x + \lambda_{2D}/2, -y)]/2 \\ [\mathbf{u}_z(x, y) - \mathbf{u}_z(x + \lambda_{2D}/2, -y)]/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [\mathbf{u}_x(x, y) + \mathbf{u}_x(x + \lambda_{2D}/2, -y)]/2 \\ [\mathbf{u}_y(x, y) - \mathbf{u}_y(x + \lambda_{2D}/2, -y)]/2 \\ [\mathbf{u}_z(x, y) + \mathbf{u}_z(x + \lambda_{2D}/2, -y)]/2 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

La recherche de l'ensemble des modes propres du problème se décompose donc en deux recherches séparées des modes propres appartenant aux familles "antisymétrique" et "symétrique".

Bien sûr, de part l'invariance par translation en  $z$ , l'ensemble des modes d'instabilité est défini à une phase près  $\theta$ . Si on connaît un mode propre  $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t)$

$$\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, t)e^{ikz} + \text{c.c.} \quad (4.39)$$

alors quel que soit  $z_0$ ,

$$\tilde{\mathbf{v}}(x, y, z, t) = \xi_{z_0}(\tilde{\mathbf{u}}(x, y, z, t)) \quad (4.40)$$

où  $\xi_{z_0}$  définit l'opérateur de translation

$$\xi_{z_0} = \begin{cases} x \longrightarrow x \\ y \longrightarrow y \\ z \longrightarrow z - z_0 \\ \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u} \end{cases}, \quad (4.41)$$

$\tilde{\mathbf{v}}(x, y, z, t)$  est aussi un mode propre avec,  $\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{u}(x, y)e^{-ikz_0} = \mathbf{u}(x, y)e^{i\theta}$

Lorsque nous avons effectué nos premières simulations 3D, nous nous sommes rendus compte que si, pour chaque famille de modes "antisymétrique" et "symétrique", une des valeurs propres est complexe,  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$  alors nous obtenons systématiquement son conjugué,  $\sigma' = \bar{\sigma}_r - i\bar{\sigma}_i$ . La fonction propre associée est alors la conjuguée de la fonction propre de  $\sigma$  et a bien les mêmes symétries. Physiquement, cela correspond à deux ondes propagatives de même taux de croissance qui se déplacent en sens inverse le long de l'axe (Oz).

En effet, le problème perturbé autour de l'écoulement de base est invariant sous la transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} x + \lambda_{2D}/2 \\ -y \\ -z \\ u_x \\ -u_y \\ -u_z \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

qui représente une rotation de  $\pi$  du référentiel autour de l'axe (Ox) suivi d'une translation de  $\lambda_{2D}/2$ . Cela correspond au fait que l'on voit la même allée de tourbillons décalée de  $\lambda_{2D}/2$  si l'on regarde l'écoulement depuis  $z = -\infty$  au lieu de  $z = \infty$  et qu'on se retourne ( $y \rightarrow -y$ ). Cette symétrie physique sera notée  $\mathcal{S}$ .

Une telle symétrie du problème impose que si

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, y, z, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, y)e^{\sigma t}e^{ikz} + \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, y)e^{\bar{\sigma} t}e^{-ikz} \quad (4.43)$$

est solution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour de l'état de base, l'allée de von Kármán, son symétrique

$$\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, y, z, t)) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, y, z, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, y)e^{\sigma' t}e^{ikz} + \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, y)e^{\bar{\sigma}' t}e^{-ikz} \quad (4.44)$$

est aussi solution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour de l'écoulement de base.

$$\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, y, z, t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y)e^{\sigma t}e^{-ikz} + \bar{\mathbf{u}}_x(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y)e^{\bar{\sigma} t}e^{ikz} \\ -\mathbf{u}_y(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y)e^{\sigma t}e^{-ikz} - \bar{\mathbf{u}}_y(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y)e^{\bar{\sigma} t}e^{ikz} \\ -\mathbf{u}_z(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y)e^{\sigma t}e^{-ikz} - \bar{\mathbf{u}}_z(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y)e^{\bar{\sigma} t}e^{ikz} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

donc  $\sigma'$  et  $v_x(\mathbf{x}, y)$  vérifient

$$\begin{cases} \sigma' = \bar{\sigma} \\ v_x(\mathbf{x}, y) = \bar{\mathbf{u}}_x(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y) \\ v_y(\mathbf{x}, y) = -\bar{\mathbf{u}}_y(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y) \\ v_z(\mathbf{x}, y) = -\bar{\mathbf{u}}_z(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y) \end{cases} \quad (4.46)$$

Il est évident de vérifier que si  $\mathbf{u}$  appartient à la famille des modes "antisymétrique", c'est à dire vérifie les relations (4.31) rappelées ici

$$\begin{cases} \mathbf{u}_x(\mathbf{x}, y) = -\mathbf{u}_x(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y) \\ \mathbf{u}_y(\mathbf{x}, y) = \mathbf{u}_y(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y) \\ \mathbf{u}_z(\mathbf{x}, y) = -\mathbf{u}_z(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y) \end{cases} \quad (4.47)$$

alors  $v$  définie par 4.46 vérifie

$$\begin{cases} v_x(\mathbf{x}, y) = -v_x(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y) \\ v_y(\mathbf{x}, y) = v_y(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y) \\ v_z(\mathbf{x}, y) = -v_z(\mathbf{x} + \lambda_{2D}/2, -y) \end{cases} \quad (4.48)$$

et appartient donc à la famille des modes "antisymétrique".

De la propriété (4.46), il découle que si l'opérateur d'évolution possède une valeur propre réelle associée à un mode antisymétrique  $\mathbf{u}$ , alors  $\mathbf{v}$  défini par (4.46) et  $\mathbf{u}$  sont associés à la même valeur propre et peuvent donc être considérés comme identique (avec un choix de phase approprié),  $v(\mathbf{x}, y) = u(\mathbf{x}, y)$ . La symétrie  $\mathcal{S}$  de l'écoulement impose d'après les relations (4.46) que :

$$\begin{cases} u_x(x, y) = \bar{u}_x(x + \lambda_{2D}/2, -y) \\ u_y(x, y) = -\bar{u}_y(x + \lambda_{2D}/2, -y) \\ u_z(x, y) = -\bar{u}_z(x + \lambda_{2D}/2, -y) \end{cases} \quad (4.49)$$

Or comme  $\mathbf{u}$  appartient à la famille des modes antisymétriques, on a alors

$$\begin{cases} u_x(x, y) = \bar{u}_x(x + \lambda_{2D}/2, -y) = -\bar{u}_x(x, y) \\ u_y(x, y) = -\bar{u}_y(x + \lambda_{2D}/2, -y) = -\bar{u}_y(x, y) \\ u_z(x, y) = -\bar{u}_z(x + \lambda_{2D}/2, -y) = \bar{u}_z(x, y) \end{cases} \quad (4.50)$$

Ce mode propre possède donc la propriété que  $u_x$  et  $u_y$  sont imaginaires purs alors que  $u_z$  est réel.

Maintenant si l'opérateur d'évolution possède une valeur propre complexe associée à un mode propre appartenant à la famille des modes "antisymétrique" alors, il possède la valeur propre  $\bar{\sigma}$  associée aussi à un mode propre "antisymétrique". En identifiant comme précédemment les relations (4.46) et (4.50), on obtient :

$$\begin{cases} v_x(x, y) = -\bar{u}_x(x, y) \\ v_y(x, y) = -\bar{u}_y(x, y) \\ v_z(x, y) = \bar{u}_z(x, y) \end{cases} \quad (4.51)$$

Les formules précédentes (4.51) définissent la relation entre les composantes des fonctions propres associées à  $\sigma$  et  $\bar{\sigma}$ .

Sans refaire la démonstration, il en va de même pour les modes "symétriques" donc si  $\sigma$  est la valeur propre réelle associée au mode propre  $\mathbf{u}$  "symétrique" alors

$$\begin{cases} u_x(x, y) = \bar{u}_x(x, y) \\ u_y(x, y) = \bar{u}_y(x, y) \\ u_z(x, y) = -\bar{u}_z(x, y) \end{cases} \quad (4.52)$$

et par conséquent  $u_x$  et  $u_y$  sont réels et  $u_z$  imaginaire pur.

Si  $\sigma$  est une valeur propre complexe associée à un mode propre appartenant à la famille des modes "symétriques" alors il possède la valeur propre  $\bar{\sigma}$  associée aussi à un mode propre "symétrique" et

$$\begin{cases} v_x(x, y) = \bar{u}_x(x, y) \\ v_y(x, y) = \bar{u}_y(x, y) \\ v_z(x, y) = -\bar{u}_z(x, y) \end{cases} \quad (4.53)$$

Nous avons ici considéré les vitesses mais le même raisonnement peut-être effectué en termes de vorticités.

## 4.3 Méthode numérique

### 4.3.1 Détermination de la vitesse d'advection du sillage

En pratique, nous avons résolu l'équation du second degré en  $\bar{U}$

$$\int \int [(u + \bar{U}) \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y}]^2 ds = 0, \quad (4.54)$$

qui s'écrit sous la forme :

$$A\bar{U}^2 + B\bar{U} + C = 0, \quad (4.55)$$

avec  $A = \int \int (\frac{\partial \omega}{\partial x})^2 ds$ ,  $B = -2 \int \int [(\frac{\partial \omega}{\partial x})^2 u + v \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}] ds$  et  $C = \int \int (u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y})^2 ds$ . Les quantités intégrales A, B et C sont calculées via des transformées de fourier.

### 4.3.2 Imposition des symétries

Nous avons déterminé les caractéristiques d'instabilité pour chaque famille de perturbations. Lors d'une simulation, les symétries sont imposées sur les conditions initiales (bruit blanc) et à chaque pas de temps.

### 4.3.3 Méthode de Krylov

Avec le code de calcul de base utilisé pour l'étude de M&M, nous n'accédons qu'au mode le plus amplifié. Dans l'intention de séparer les contributions des régions elliptiques et hyperboliques, nous avons implementé une méthode dite de Krylov donnant accès aux modes sous-dominants. Ce programme introduit dans le code de calcul de base permet d'accroître la rapidité de convergence sur le premier mode, ce qui présente un intérêt du fait du développement de structures fines ("braid") dans les régions hyperboliques qui impose des maillages très fins et donc très coûteux en temps de calcul. De plus, cette méthode procure une estimation objective de l'incertitude sur chaque valeur propre.

### 4.3.4 Mise en place de la méthode de Krylov

#### SYSTÈME À RÉSOUDRE

Le système d'évolution s'écrit de façon formelle :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \underline{\underline{L}} \mathbf{u} \quad (4.56)$$

où  $\underline{\underline{L}}$  est un opérateur intégro-différentiel linéaire. On note  $\lambda_k$  les valeurs propres de l'opérateur  $\underline{\underline{L}}$  telles que  $Re[\lambda_k] > Re[\lambda_{k+1}]$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $\psi_k$  les vecteurs propres associés. La solution s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k e^{\lambda_k t} \psi_k \quad (4.57)$$

où  $a_k$  est l'amplitude initiale.

## RÉDUCTION DU SYSTÈME

Formellement, nous pouvons projeter la trajectoire  $\mathbf{u}$  sur le sous-espace vectoriel (s.e.v.)  $\mathbb{V}$  décrit par les  $M$  premiers vecteurs propres. La solution  $\mathbf{u}$  peut alors s'écrire

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{r} \quad (4.58)$$

avec

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{k=M} a_k e^{\lambda_k t} \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = \sum_{k=M+1}^{k=\infty} a_k e^{\lambda_k t}. \quad (4.59)$$

$\mathbf{r}$  est appelé le résidu aux temps longs. Il est tel que :

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|a_k e^{\lambda_k t}\|} \sim e^{(\lambda_{M+1} - \lambda_k)t} \quad \text{pour tout } k \leq M. \quad (4.60)$$

L'erreur commise en approximant le vecteur d'état  $\mathbf{u}$  par sa projection  $\mathbf{v}$  tend exponentiellement vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Le vecteur  $\mathbf{v}$  appartient à l'espace  $\mathbb{V}$  généré par les vecteurs  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M$ .

Soit maintenant le s.e.v.  $\mathbb{V}'$  engendré par  $M$  vecteurs d'état  $\mathbf{u}(x, t)$  pris à  $M$  instants différents  $t_i$  le long d'une seule trajectoire. Sauf malchance, aucun des coefficients  $a_k$  de la condition initiale est nul et le problème n'est pas dégénéré. Aux temps longs,  $\mathbb{V}'$  tend vers  $\mathbb{V}$  et tout vecteur de  $\mathbb{V}$  est estimé avec une erreur qui varie comme  $e^{(\lambda_{M+1} - \lambda_k)t_i}$  ( $k \in [1; M]$ ) par un vecteur de  $\mathbb{V}'$ .

Pour illustrer ces propriétés, la figure 4.4 présente une dynamique réduite à trois modes. Les vecteurs propres solutions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont contenus dans le plan  $\mathbb{V}$  et la trajectoire  $\mathbf{u}(x, t)$  représentée par la courbe épaisse tend vers ce plan  $\mathbb{V}$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

Considérons deux vecteurs d'état  $u_1(x, t)$  et  $u_2(x, t)$  sur cette trajectoire pris aux instants  $t_1$  et  $t_2$ . Ils déterminent un nouveau plan noté  $\mathbb{V}'$ . Ces deux vecteurs d'état nous permettront de déterminer les vecteurs propres  $\psi'_1$  et  $\psi'_2$  dans le plan  $\mathbb{V}'$ . L'erreur commise entre cette solution et la "vraie" solution  $\psi_1$  et  $\psi_2$  appartenant au plan  $\mathbb{V}$  est estimée par l'angle  $\alpha$  entre les deux plans  $\mathbb{V}$  et  $\mathbb{V}'$ . Elle est de l'ordre de  $e^{(\lambda_3 - \lambda_i)t_i}$  avec  $i \in [1; 2]$  et  $\lambda_3$ , la première valeur propre négligée. Aux temps longs, l'angle  $\alpha$  tend vers zéro de sorte que les vecteurs d'états  $\psi'_1$  et  $\psi'_2$  sont une bonne approximation de  $\psi_1$  et  $\psi_2$ .

En dimension  $M$ , la procédure numérique de base est implementée sur une durée  $\Delta T$  et  $M$  vecteurs d'état  $\mathbf{u}(x, t)$  sont générés à différents instants  $t_i$ . La base formée par les  $\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}(x, t_i), j \in [1; M]$  est alors orthonormalisée (procédé de Schmidt) :

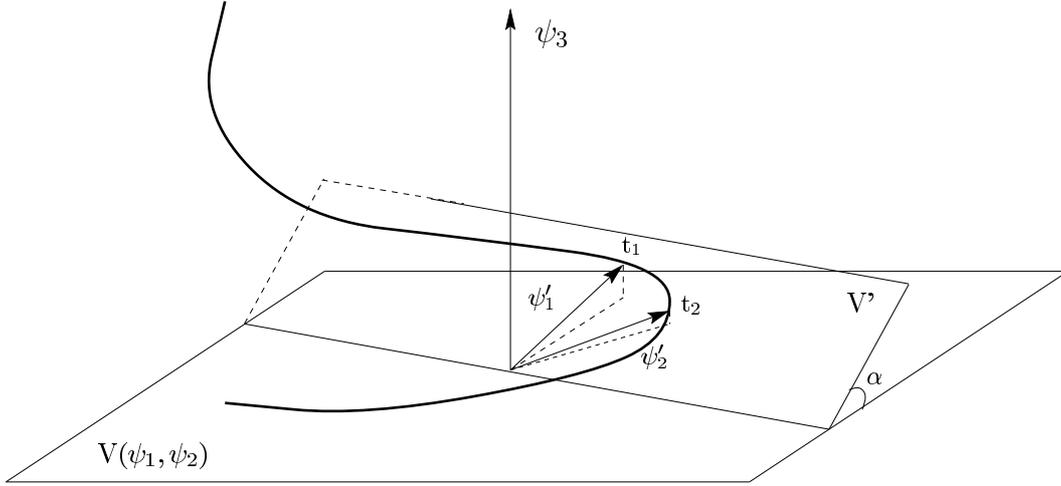


Figure 4.4: dynamique en dimension 3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}^{(1)}(x, t) = \frac{\mathbf{u}^{(1)}(x, t)}{\|\mathbf{u}^{(1)}(x, t)\|} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{e}^{(j)}(x, t) = \frac{\mathbf{u}^{(j)}(x, t) - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{e}^{(i)}(x, t), \mathbf{u}^{(j)}(x, t)) \mathbf{e}^{(i)}(x, t)}{\|\mathbf{u}^{(j)}(x, t) - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{e}^{(i)}(x, t), \mathbf{u}^{(j)}(x, t)) \mathbf{e}^{(i)}(x, t)\|} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{e}^{(M)}(x, t) = \frac{\mathbf{u}^{(M)}(x, t) - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{e}^{(i)}(x, t), \mathbf{u}^{(M)}(x, t)) \mathbf{e}^{(i)}(x, t)}{\|\mathbf{u}^{(M)}(x, t) - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{e}^{(i)}(x, t), \mathbf{u}^{(M)}(x, t)) \mathbf{e}^{(i)}(x, t)\|} \end{array} \right. \quad (4.61)$$

On définit la matrice  $\underline{\underline{K}}$  formée par la base de ces vecteurs  $\mathbf{e}^{(j)}$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{(1)} & \dots & \mathbf{e}^{(j)} & \dots & \mathbf{e}^{(M)} \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Comme  $\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  alors  $\underline{\underline{K}}^T \underline{\underline{K}} = \mathbb{I}$ .

Tout vecteur  $\mathbf{v}$  dans le sous-espace  $\mathbb{V}'$  peut alors s'écrire :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{v}'_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{v}'_M \mathbf{e}_M = \underline{\underline{K}} \mathbf{v}'. \quad (4.63)$$

Substituons alors le vecteur d'état  $\mathbf{u} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}\mathbf{v}' + \mathbf{r}$  dans l'équation d'évolution (4.56) :

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{K}}} \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}} \mathbf{v}' + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{L}}} \mathbf{r}, \quad (4.64)$$

qui devient

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}' \mathbf{v}' + \mathbf{r}', \quad (4.65)$$

avec  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}' = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}$ , le projeté de l'opérateur d'évolution  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$  sur  $\mathbb{V}'$  et  $\mathbf{r}' = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T [\underline{\underline{\mathbf{L}}}\mathbf{r} - \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$  le projeté de  $\mathbf{r}$  sur  $\mathbb{V}'$ .

Les valeurs propres  $\lambda'_k$  et les vecteurs propres  $\psi'_k$  de l'opérateur d'évolution projeté sur  $\mathbb{V}'$  sont alors déterminés et  $\mathbf{v}'$  s'écrit

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a'_k e^{\lambda'_k t} \psi_k \quad (4.66)$$

$\mathbf{r}'$ , le résidu est tel que :

$$\frac{\|\mathbf{r}'\|}{\|\mathbf{a}'_k e^{\lambda'_k t}\|} \sim e^{(\lambda'_{M+1} - \lambda'_k)t} \quad \text{pour tout } k \leq M. \quad (4.67)$$

Il tend vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

$(\lambda'_k, \psi'_k)$  sont donc les valeurs propres approchées de  $(\lambda_k, \psi_k)$ . Aux temps longs, l'erreur  $\mathbf{r}'$  commise sur les valeurs propres négligées dans le s.e.v  $\mathbb{V}'$  et l'erreur commise sur les "vraies" valeurs propres  $(\lambda_k, \psi_k)$  tendent vers zéro.

En pratique, ces erreurs ont été évaluées par l'expression

$$\beta_k = \frac{\|\underline{\underline{\mathbf{L}}}'\psi'_k - \lambda'_k \psi'_k\|}{\|\psi'_k\|}, \quad (4.68)$$

$\lambda'_k \psi'_k$  vérifiant  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}'\psi'_k = \lambda'_k \psi'_k$

### 4.3.5 validation de la méthode

Dans un premier temps, nous avons implémenté une méthode de Krylov d'ordre 2.

Nous avons validé cette méthode dans l'étude effectuée sur l'allée de Mallier & Maslowe [1] (1993) présentée chapitre 3 paragraphe 5. Les modes d'instabilité peuvent être calculés en les séparant en deux familles de symétries distinctes, symétries que l'on impose sur l'état initial. Nous avons lancé des simulations à partir d'un bruit blanc sans symétries et calculé simultanément les deux modes par la méthode de Krylov. Des tests ont été effectués sur des cas où les valeurs propres sont très différentes c'est-à-dire à petits nombres d'onde et sur des cas où les valeurs propres sont très proches c'est-à-dire à grands nombres d'onde.

A petit nombre d'onde, nous avons retrouvé le pic basse fréquence du mode "antisymétrique" et le comportement du mode "symétrique" de taux de croissance plus faible. La précision obtenue par la méthode de Krylov sur la première valeur propre est de l'ordre de  $10^{-5}$  comparée à celle obtenue par l'ancienne méthode et l'erreur sur la seconde est de l'ordre de  $10^{-3}$ . A grand nombre d'onde où les valeurs propres sont du même ordre de grandeur, les résultats sont aussi

satisfaisants. Les valeurs propres et les structures des modes propres associés sont similaires à celles que l'on a obtenu en imposant les symétries. Les erreurs sont du même ordre de grandeur que dans le cas des valeurs propres très différentes.

Dans un second temps, nous avons appliqué notre méthode au calcul des instabilités 3D de l'allée de tourbillons de Stuart modélisant une couche de mélange afin de pouvoir comparer nos résultats avec ceux obtenus par Potylitsin & Peltier [18] en 1999. Leur étude est plus particulièrement consacrée à l'influence de la force de Coriolis sur la déstabilisation des tourbillons de Stuart. Néanmoins, ils présentent un graphique (figure 9 de leur article) représentant le taux de croissance en fonction du nombre de Rossby  $R_0$  des modes les plus amplifiés pour une concentration des tourbillons de Stuart de 0.5. A  $R_0 = 0$ , c'est-à-dire sans rotation comme dans le cas présent de la couche de mélange, deux modes apparaissent, le plus amplifié qu'ils nomment "braid-centred mode", ce qui correspond à une perturbation dominante entre deux tourbillons consécutifs et le second qu'ils nomment "edge mode" pour lequel la perturbation est dominante sur la périphérie des tourbillons de Stuart. Nous avons donc effectué une simulation pour les mêmes valeurs de paramètres et nous avons obtenu des taux de croissance et des structures de modes proches de leurs résultats.

Les premiers résultats des simulations sur l'allée de von Kármán définie figure 4.3-b donnaient en général une valeur propre réelle et une valeur propre complexe. Ainsi, nous avons mis en place une méthode de Krylov d'ordre 3 et la propriété énoncée au paragraphe 3.2 nous a permis de définir un critère de tolérance sur l'erreur  $\beta$ . En effet, si  $\beta < 10^{-4}$  alors nous avons constatés que les valeurs propres complexes conjuguées sont égales avec une précision d'au moins  $10^{-3}$ .

## 4.4 Résultats

Afin de comparer avec l'expérience, nous présentons ici les résultats pour la viscosité  $\nu = 0.013$ . Seuls les trois premiers modes d'instabilité ont été déterminés. L'intervalle des nombres d'onde est pour l'instant décrit avec un pas de 0.2 et pourra être raffiné ultérieurement si nécessaire. Nous exposons dans un premier temps les courbes de taux de croissance en fonction du nombre d'onde transverse  $k \in [0; 3]$ . L'identification de différentes branches d'instabilité nous permettra ensuite de discuter les structures des fonctions propres obtenues.

### 4.4.1 courbes de taux de croissance

Les figures 4.5 et 4.6 présentent les taux de croissance et les fréquences des premiers modes dominants "symétriques" et "antisymétriques" en fonction du nombre d'onde. Les modes stationnaires ( $\sigma \in \mathbb{R}$ ) sont indiqués par des carrés pleins et les modes propagatifs ( $\sigma \in \mathbb{C}$ ) par des carrés creux. Sur les figures 4.5-b et 4.6-b, seules les fréquences positives ont été reportées mais pour chaque valeur propre  $\sigma$  complexe, nous avons montré dans le paragraphe 3-2 que  $\bar{\sigma}$  (eq. 4.46) est aussi valeur propre. Sur la figure 4.5-a et 4.6-a, les carrés creux correspondent en fait à deux modes et  $\sigma_r$  est associé à  $+\sigma_i$  et  $-\sigma_i$ . Seules les valeurs positives de  $\sigma_i$  sont reportées sur les figures 4.5-b et 4.6-b.

Toutes les valeurs propres associées à une erreur  $\beta$  inférieure à  $10^{-4}$  ont été reportées. Cependant, pour certains  $k$ , nous avons reporté des valeurs propres pour lesquelles l'erreur  $\beta$  est supérieure à  $10^{-4}$  car elles apparaissent en continuité avec des branches d'instabilité précisément déterminées. Dans ce cas des barres d'erreurs variant entre 0.005-0.01 sur la partie réelle  $\sigma_r$  et 0.01-0.02 sur  $\sigma_i$  identifient ces points sur les figures 4.5 et 4.6. Ces barres d'erreurs ont été évaluées par la différence entre les deux valeurs propres complexes conjuguées.

## COURBES “SYMÉTRIQUES”

La figure 4.5-a présente principalement deux branches “symétriques” d’instabilité, l’une stationnaire (traits pleins) et l’autre propagative (traits pointillés).

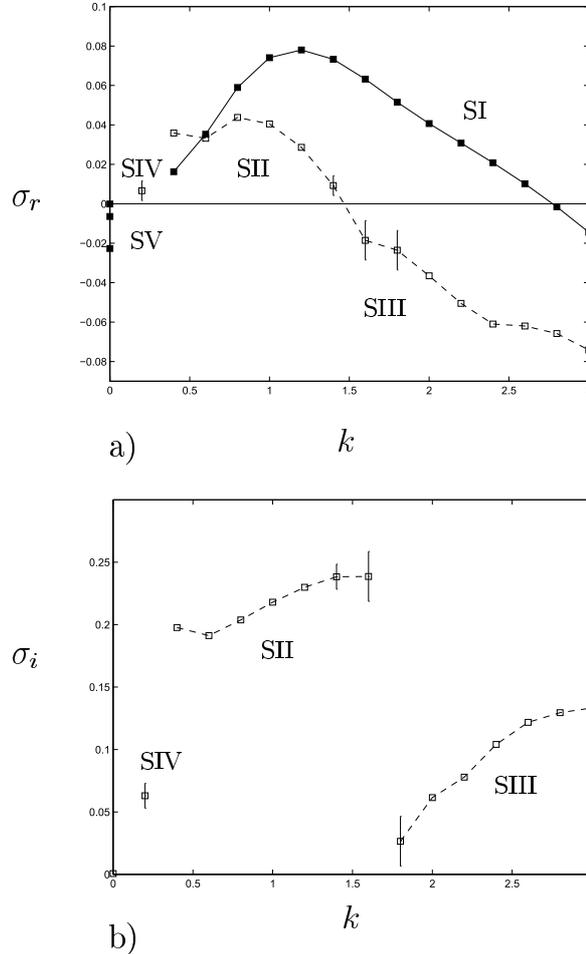


Figure 4.5: Taux de croissance des modes dominants “symétriques”.

Pour  $k \geq 0.6$ , le mode le plus amplifié est le mode stationnaire. Il présente un maximum à  $k = 1.2$ ,  $\sigma_{rmax} = 0.08$ . Pour  $k > 1.2$ , le taux de croissance diminue de façon monotone avec  $k$  et s’annule pour la valeur de coupure  $k_c \simeq 2.8$ . Cet amortissement est la manifestation des effets visqueux qui deviennent dominants lorsque le nombre d’onde augmente. Cette branche est nommée SI pour référence ultérieure.

La branche instationnaire présente un maximum de croissance à  $k = 0.8$ ,  $\sigma_{rmax} = 0.04$ , et une valeur de coupure  $k_c \simeq 1.5$  plus faible que celle obtenue pour le mode stationnaire. Les fréquences associées (figure 4.5-b) augmentent avec le nombre d’onde sur les domaines  $k \in [0.4; 1.6]$  et  $k \in [1.8; 3]$ . Un saut important de fréquence sépare ces deux domaines, les fréquences des modes à petits nombres d’ondes  $k \in [0.4; 1.6]$  étant plus élevées qu’à grand  $k$ . Ce saut brutal se manifeste sur la figure 4.5-a par un changement de pente net de la courbe instationnaire. L’erreur  $\beta$  sur les taux de croissance (barre verticale sur la figure 4.5-a-b) mesurée pour les nombres d’ondes voisins  $k = 1.6$  et  $k = 1.8$  est supérieure à  $10^{-4}$ . Ces différents facteurs

indiquent que près de  $k = 1.8$ , deux branches de modes propagatifs se croisent. Nous avons ainsi séparé la courbe en deux parties, l'une relatant un mode SII dans le domaine  $k \in [0.4; 1.6]$  et l'autre se référant à un mode SIII dans le domaine  $k \in [1.8; 3]$ . Notons que le mode SII instationnaire est plus amplifié que le mode SI stationnaire à  $k = 0.4$ .

A  $k = 0$ , les taux de croissance sont négatifs, aucun mode n'est amplifié. Les trois valeurs propres obtenues sont réelles. Ce comportement est prévisible car cette famille de perturbations respecte les symétries de l'écoulement de base.

A  $k = 0.2$ , une paire de modes propagatifs est reportée. L'erreur en ce point est très importante. La fréquence associée est très faible comparée à celle obtenue à  $k = 0.4$ . Ainsi on s'attend à une structure de la fonction propre distincte du mode SII et donc à l'existence d'un mode SIV.

### COURBES "ANTISYMMÉTRIQUES"

La figure 4.6-a présente les courbes de taux de croissance obtenues dans le cas des perturbations "antisymétriques".

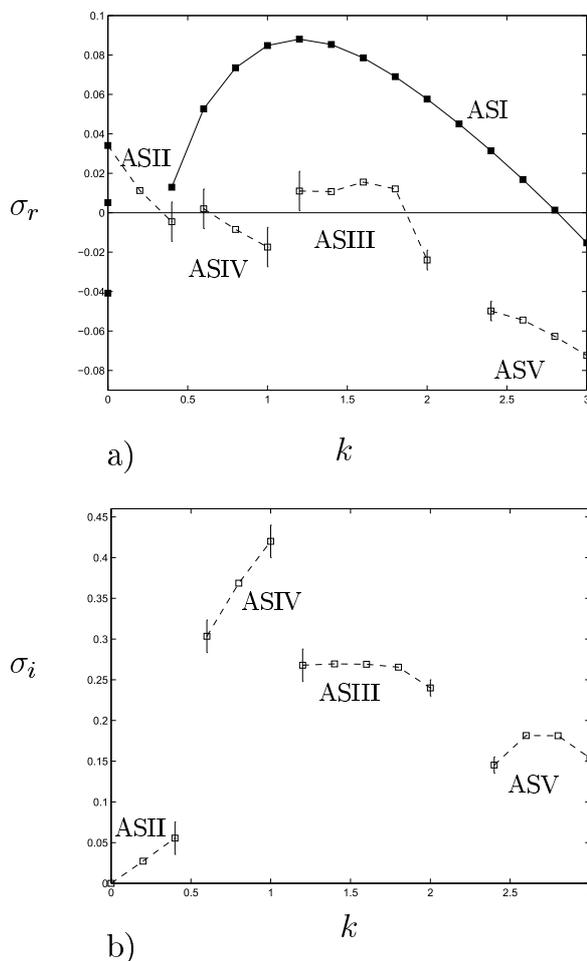


Figure 4.6: Taux de croissance des modes dominants "antisymétriques".

Une branche stationnaire ASI continue apparaît clairement sur le domaine  $k \in [0.4; 3]$ . Elle présente le même comportement que celle associée au mode “symétrique” SI dans le domaine  $k \in [0.6; 3]$ . Le maximum atteint à  $k = 1.2$  est un peu plus élevé  $\sigma = 0.09$  et le nombre d’onde de coupure  $k_c$  pour lequel les perturbations sont amorties est le même que dans le cas “symétrique”  $k_c = 2.8$ .

Au delà de  $k = 0.4$ , comme dans le cas “symétrique”, tous les modes sous-dominants sont propagatifs. Cependant, l’évolution des fréquences associées est plus complexe. Il faut distinguer trois portions de branches d’instabilité, notées ASIII, ASIV et ASV, séparées par trois sauts de fréquence au voisinage de  $k = 0.5$ ,  $k = 0.9$  et  $k = 2.2$ . Ces différents sauts se traduisent par une forte augmentation de l’erreur sur les valeurs propres voisines. Seul le mode ASIII est amplifié sur le domaine  $k \in [1.2; 1.7]$ . Notons que la fréquence associée à ce mode présente un plateau sur le domaine  $k \in [1.2; 1.8]$ . Le mode ASIV a un taux de croissance proche de zéro à  $k = 0.6$  mais l’erreur commise sur ce taux est trop importante pour pouvoir réellement se prononcer. Le mode à grand nombre d’onde ASV est complètement amorti. Nous avons volontairement omis les valeurs de taux de croissance et de fréquence obtenues à  $k = 2.4$ . Nous avons calculé les valeurs propres entre différents instants  $t_i$  plus ou moins espacés mais les erreurs  $\beta$  obtenues sur les différents tests étaient trop importantes pour valider les résultats.

Deux modes stationnaires ont un taux de croissance positif à  $k = 0$  et correspondent à des instabilités 2D de l’allée. Pour  $k \in [0.2; 0.4]$ , les modes sous-dominants ASII sont oscillants. Les fréquences associées croissent à partir de zéro indiquant que ce premier mode propagatif découle du mode dominant stationnaire obtenu à  $k = 0$ . Un phénomène semblable a été mis en évidence par Pierrehumbert & Widnall [19] (1982) pour le mode 2D d’appariement qui donne naissance à un mode stationnaire pour  $k \neq 0$  (appariement hélicoïdal).

#### 4.4.2 structure des modes propres

Les structures des différents modes pour les deux familles de perturbations sont représentées par la fonction  $\Omega_2 = |\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2|$ , l’énstrophie locale dans une coupe (xy) calculée en chaque point du maillage. Cette fonction présente l’avantage de visualiser les maxima de vortacité, ce qui nous permettra entre autre d’évaluer les contributions de la tresse et du coeur. D’autre part, la représentation spatiale de la vortacité transverse  $\omega_z$  sera dans quelques cas nécessaires pour identifier précisément le mécanisme d’instabilité.

Dans un premier temps, les modes stationnaires seront analysés puis les principaux modes instationnaires sous-dominants seront présentés plus succinctement.

### MODES STATIONNAIRES

#### mode SI - mode ASI :

Pour  $k \geq 0.4$ , les modes dominants stationnaires “symétriques” et “antisymétriques” notés respectivement SI et ASI ont le même comportement. Ainsi nous limiterons notre description à celle du mode “symétrique”, SI.

#### MODE SI

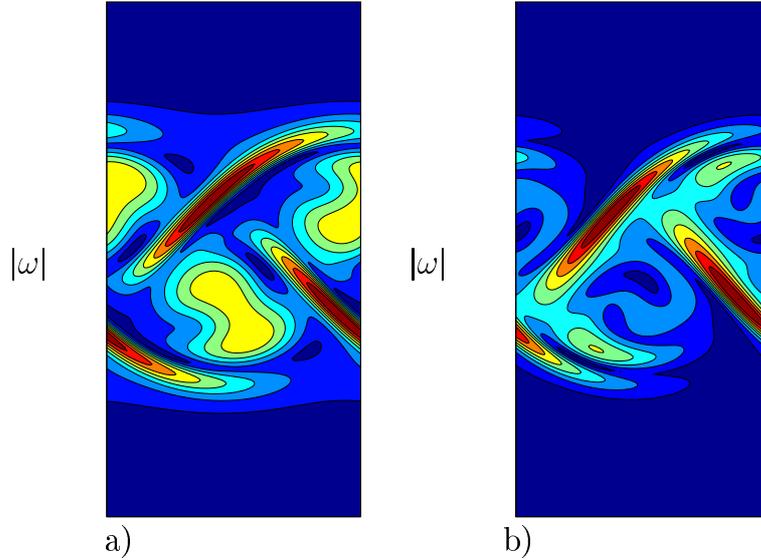


Figure 4.7: Enstrophie locale  $\Omega_2$  du mode stationnaire “symétrique” SI. a)  $k = 0.8$ , b)  $k = 2.2$ . La couleur rouge intense correspond au maximum d’enstrophie et la couleur bleu foncée aux zones où l’enstrophie est négligeable. Les valeurs des isolignes séparant les différentes couleurs sont équidistantes, séparées de  $\Omega_{max}/10$ .

La figure 4.7 présente l’enstrophie locale de la perturbation “symétrique” pour les nombres d’ondes  $k = 0.8$  et  $k = 2.2$ . Ces champs ont été calculés pour l’allée de von Kármán présentée en 2-2 et la figure 4.3-b sert de référence pour localiser la tresse (régions hyperboliques) et les coeurs (régions elliptiques) des tourbillons. Quel que soit le nombre d’onde considéré, la tresse est très active. Les maxima sont en effet strictement localisés dans cette région sur les figures 4.7-a-b. Le coeur des tourbillons contribue de façon significative à  $k = 0.8$  (zone jaune). Lorsque  $k$  augmente, la contribution du coeur s’affaiblit, et la fonction propre devient dominée par la tresse (figure 4.7-b).

La figure 4.8 présente les champs de perturbation  $\omega_z$  correspondants aux nombres d’ondes  $k = 0.8$  (figure 4.8-a) et  $k = 2.2$  (figure 4.8-b). A  $k = 0.8$ , on reconnaît la structure caractéristique du mode d’instabilité elliptique semblable à celui présenté par Pierrehumbert [20] (1986), figure 2. Ce mode a été détaillé dans le chapitre précédent sur l’allée simple de tourbillons contra-rotatifs. La perturbation de vorticité transverse dipolaire est centrée sur chaque coeur des tourbillons de l’écoulement de base. La déformation des isolignes  $0.2|\Omega_{max}|$  et  $0.4|\Omega_{max}|$  du tourbillon bleu central est due à la présence de la tresse. A  $k = 2.2$ , la structure dipolaire est perdue. Les maxima de vorticité sont atteints en périphérie des tourbillons.

Pour les nombres d’ondes  $k$  petits, les modes SI et ASI sont des modes de coeur et pour les  $k$  plus grands, ce sont des modes hyperboliques. La dominance de chaque région elliptique et hyperbolique évolue de façon continue.

### mode ASII : mode 2D

La figure 4.9 présente l’enstrophie de la perturbation “antisymétrique” à  $k = 0$ . Rappelons que ce mode est stationnaire à  $k = 0$  uniquement, il devient ensuite oscillant. Les maxima sont concentrés en un lobe très intense situé à la périphérie du coeur des tourbillons de l’écoulement de base et la tresse est pour ce mode inactive.

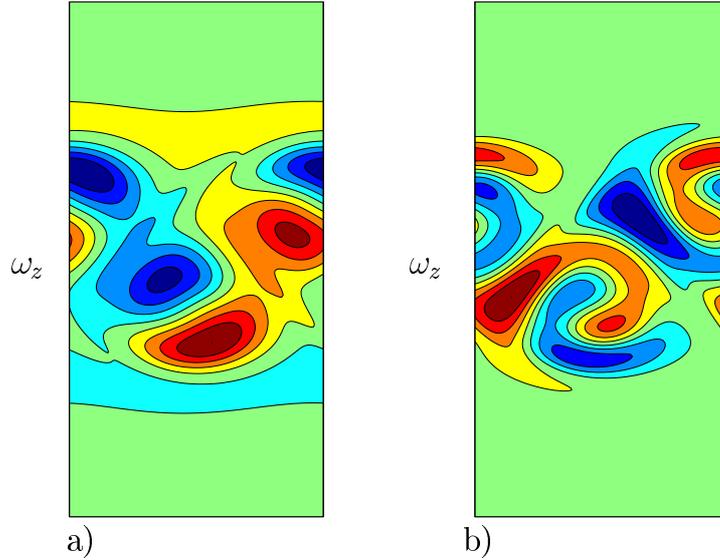


Figure 4.8: distribution de vorticité transverse  $w_z$  du mode SI. a)  $k = 0.8$ , b)  $k = 2.2$ . Les valeurs des contours correspondent à 80,60,40 et 20% de la vorticité maximale  $|\Omega_{max}|$  atteinte au centre du tourbillon. Les dégradés de bleu correspondent aux valeurs négatives de la vorticité  $\Omega$  telle que  $\Omega > 0.2|\Omega_{max}|$  et les dégradés de rouge-orangé aux valeurs positives de la vorticité.

Cette perturbation déplace les tourbillons de l'écoulement de base initialement en quinconce qui tendent alors à s'aligner suivant  $y$ , formant une allée symétrique caractéristique d'un "mode de jet". Ce résultat est cohérent avec les observations faites lors des simulations de l'écoulement de base 2D. En effet, sans forcer la symétrie de la double allée décalée, on obtient ce motif symétrique (mode de jet) en alternance avec le motif antisymétrique (allée de von Kármán).

#### MODES PROPAGATIFS

Les structures des fonctions propres en enstrophie et en vorticité des divers modes propagatifs qu'ils soient "symétriques" ou "antisymétriques", sont complexes.

Nous ne dégagerons pas de l'observation de ces modes un mécanisme physique précis. Néanmoins ils peuvent être le fruit d'une combinaison de plusieurs types d'instabilités, tels que l'instabilité hyperbolique, l'instabilité elliptique qui mène à des modes oscillants de taux de croissance plus faible que les modes stationnaires [cf Tsai & Widnall [12] (1976)]. De même, les modes "antisymétriques" instationnaires peuvent être réminiscents du mode de jet obtenu à petit nombre d'onde. Notons de plus que les tourbillons de l'écoulement de base présentent une déformation tripolaire qui donne lieu à des modes de coeur complexes décrits par Ledizès & Eloy [21] (1999). En comparant la structure des parties réelle et imaginaire de certains modes, il serait tentant d'identifier des modes de Kelvin  $m = 1$  et  $m = 2$  en interaction mais les fonctions propres sont trop complexes pour qu'une telle analyse soit convaincante.

Ces modes propagatifs étant sous-dominants, nous ne nous attacherons pas à les décrire en détails c'est à dire que nous ne présenterons pas les fonctions propres (appartenant à  $\mathbb{C}$ ) en vorticité.

La figure 4.10 représente l'enstrophie locale du mode amplifié SII pour le nombre d'onde  $k = 0.8$  et du mode amorti SIII pour les nombres  $k = 1.8$  et  $k = 2.4$ .

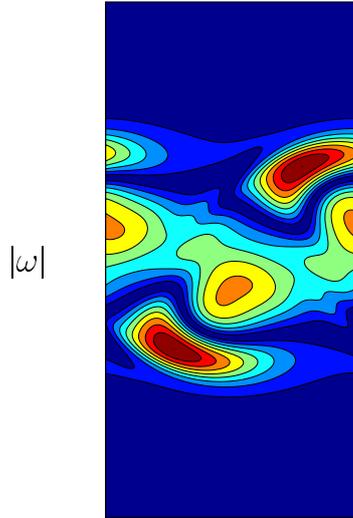


Figure 4.9: Enstrophie locale  $\Omega_2$  du mode stationnaire “antisymétrique” ASII (mode de jet) obtenu à  $k = 0$ . cf légende figure 4.7.

A  $k = 0.8$ , la figure 4.10 montre un mode où le coeur domine, le maximum de vorticité étant atteint dans cette région. Bien que dans la zone de fort étirement une région de vorticité élevée soit apparente, la tresse n’est pas intense.

Lorsque  $k$  augmente, la tresse devient active figure 4.10-b-c, la contribution du coeur diminue fortement et devient très localisée. On peut remarquer en comparant les fonctions propres  $b$  et  $c$  que la structure de la tresse se complexifie lorsque  $k$  croît. En effet, à  $k = 2.4$ , une seconde structure étirée parallèlement à la première se développe et s’intensifie. Ce phénomène n’a pas été observé sur les modes stationnaires.

L’enstrophie locale des modes “antisymétriques” ASIV ( $k = 0.6$ ), ASIII ( $k = 1.6$ ) et ASV ( $k = 2.4$ ), est présentée figure 4.11. Contrairement aux modes “symétriques”, la contribution du coeur dominante à  $k = 0.6$  et  $k = 1.6$  persiste à grand  $k$ . Remarquons qu’elle est plus étendue dans le mode ASIII, seul mode amplifié, que dans le mode ASIV. En revanche, le mode ASV présente une tresse intense dont la structure est dipolaire, structure semblable à celle du mode SIII à  $k = 2.4$ .

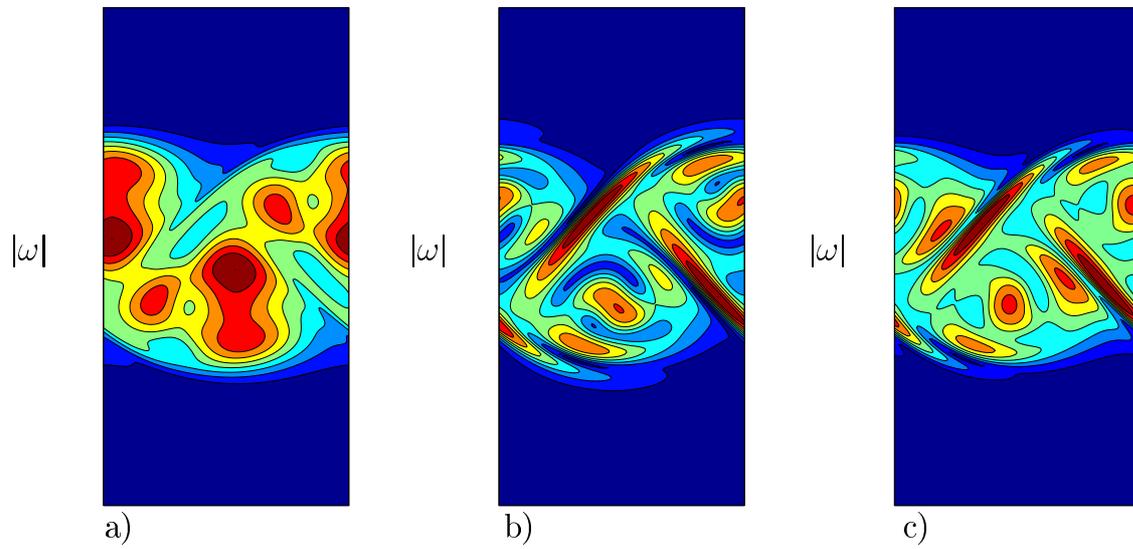


Figure 4.10: Enstrophie locale  $\Omega_2$  des modes instationnaires “symétriques”. a) mode SII,  $k = 0.8$ . b) mode SIII,  $k = 1.8$ . c) mode SIII,  $k = 2.4$ . cf légende figure 4.7.

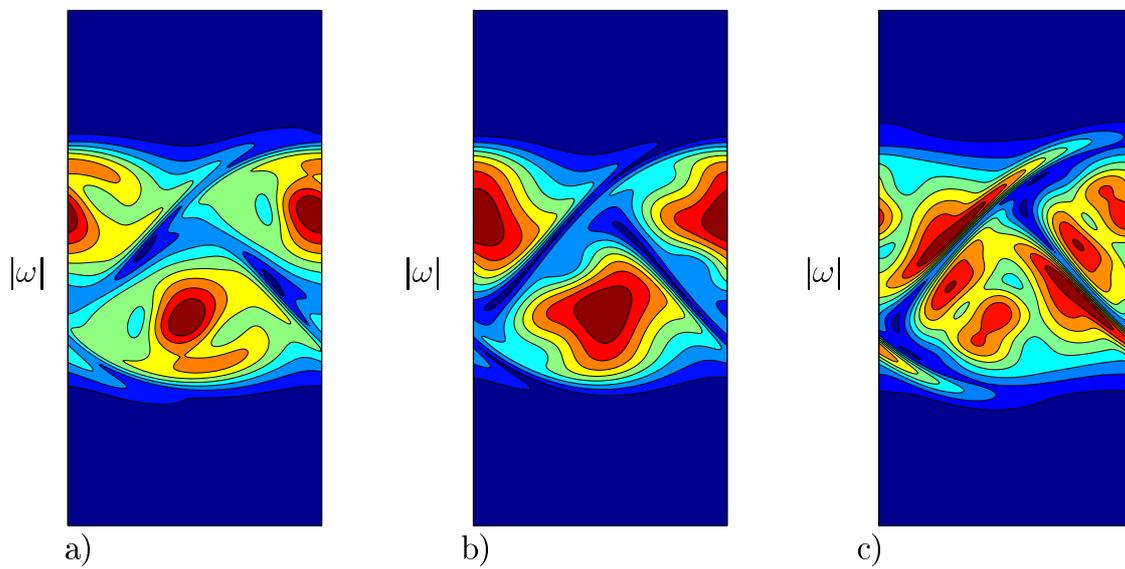


Figure 4.11: Enstrophie locale  $\Omega_2$  des modes instationnaires “antisymétriques”. a) mode ASIV,  $k = 0.6$ . b) mode ASIII,  $k = 1.6$ . c) mode ASV,  $k = 2.4$ . cf légende figure 4.7.

# Bibliographie

- [1] R. Mallier & S.A. Maslowe, “A row of counter-rotating vortices,” *Phys. Fluids* **5**(4), 1074 (1993).
- [2] C.H.K. Williamson, “Three-dimensional wake transition behind a cylinder,” *J. Fluid Mech.* **328**, 345 (1996).
- [3] E. Meiburg & J.C. Lasheras, “Experimental and numerical investigation of the three-dimensional transition in plane wakes,” *J. Fluid Mech.* **190**, 1 (1987).
- [4] J.C. Lasheras & E. Meiburg, “Three dimensional vorticity modes in the wake of a flat plate,” *Phys. Fluids A* **2**(3), 371 (1990).
- [5] G.P. Klaassen & W.R. Peltier, “The influence of stratification on secondary instability in free shear layers,” *J. Fluid Mech.* **227**, 71 (1991).
- [6] C. P. Caulfield & R.R. Kerswell, “The nonlinear development of three-dimensional disturbances at hyperbolic stagnation points : A model of the braid region in mixing layers,” *Phys. Fluids* **12**(5), 1032 (2000).
- [7] B.J. Bayly, “Three-dimensional instability of elliptical flow,” *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2160 (1986).
- [8] F. Waleffe, “On the three-dimensional instability of strained vortices,” *Phys. Fluids* **A2**, 76 (1990).
- [9] R.R. Lagnado, N. Phan-thien & L.G. Leal, “The stability of two-dimensional linear flows,” *Phys. Fluids* **30**, 2239 (1984).
- [10] A.D.D. Craik & W.O. Criminale “Evolution of wavelike disturbances in shear flows : A class of exact solutions of the Navier-Stokes equations,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **406**, 13 (1986).
- [11] M. J. Landman & P.G. Saffman, “The three-dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid,” *Phys. Fluids* **30**, 2339 (1987).
- [12] C-Y. Tsai & S.E. Widnall, “The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field,” *J. Fluid Mech.* **73**, 721 (1976).
- [13] A.C. Robinson & P.G. Saffman, “Three-dimensional stability of an elliptical vortex in a straining field,” *J. Fluid Mech.* **142**, 451 (1984).
- [14] S. Leblanc & C. Cambon, “On the three-dimensional instabilities of plane flows subjected to Coriolis force,” *Phys. Fluids* **9**, 1307 (1997).

- [15] S. Leblanc & C. Cambon, “ Effects of the Coriolis force on the stability of Stuart’s vortices,” *J. Fluid Mech.* **356**, 353 (1998).
- [16] P.G. Drazin & W.H. Reid, “ Hydrodynamic Stability,” Cambridge University Press (1981).
- [17] W. S. Edwards, L.S. Tuckerman, R.A. Friesner & D.C. Sorensen, “Krylov Methods for the incompressible Navier-Stokes Equations,” *J. Comput. Phys.* **110**, 82 (1994).
- [18] P. G. Potylitsin & W. R. Peltier, “Three-dimensional destabilization of Stuart vortices : the influence of rotation and ellipticity,” *J. Fluid Mech.* **387**, 205 (1999).
- [19] R.T. Pierrehumbert & S.E. Widnall, “The two- and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer,” *J. Fluid Mech.* **114**, 59 (1982).
- [20] R.T. Pierrehumbert, “Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid,” *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2157 (1986).
- [21] S. Ledizès & C. Eloy, “ Short-wavelength instability of a vortex in a multipolar strain field,” *Phys. Fluids* **11** (2), 500 (1999).



## Chapitre 5

# Conclusion générale et perspectives

Ce travail est une contribution à l'étude de la transition *laminaire/turbulent* des écoulements de sillage. Il complète les connaissances sur les modes secondaires 3D des sillages plans et peut être mis en parallèle avec les avancées sur les sillages de corps non effilés. Dans le sillage plan, deux modes nommés "symétrique" et "antisymétrique" ont été identifiés [Meiburg & Lasheras [1] (1987), Lasheras & Meiburg [2] (1990)]. Ils sont respectivement à rapprocher des modes A et B déterminés dans la configuration du cylindre [Williamson [3] (1996)]. L'étude des instabilités secondaires des sillages plans a été abordée d'un point de vue expérimental puis d'un point de vue numérique sous l'angle de la théorie de l'instabilité temporelle.

L'étude expérimentale présentée dans le chapitre 2 porte sur le sillage qui se développe à l'aval d'une plaque plane de très faible épaisseur. Trois séries d'expériences basées sur des visualisations de l'écoulement ont été menées. Dans un premier temps, nous avons observé le sillage qui se développe naturellement sans aucun contrôle. Puis, nous avons forcé uniquement l'instabilité primaire, l'allée de von Kármán. Nous avons montré que le mode d'instabilité secondaire "symétrique" est préférentiellement amplifié dans le sillage proche de la plaque plane mais que plus en aval, le mode "antisymétrique" se développe. Contrairement au cas du sillage de cylindre où les modes A (mode "symétrique") et mode B (mode "antisymétrique") apparaissent sur des plages de nombre de Reynolds distinctes, respectivement [140; 190], [230; 260], les modes "symétrique" et "antisymétrique" sont observés sous les mêmes conditions expérimentales. Nous avons de plus identifié que les longueurs d'ondes caractéristiques de ces deux modes secondaires sont comparables.

Le mode "symétrique" étant dominant, nous l'avons alors contrôlé en imposant des déformations sinusoïdales de différentes longueurs d'onde au bord de fuite de la plaque plane. Nous avons trouvé que la longueur d'onde la plus amplifiée de ce mode est de l'ordre de la longueur d'onde de l'écoulement de base. Ainsi, les longueurs d'ondes des deux modes d'instabilités secondaires dans le cas du sillage plan sont de l'ordre de grandeur de celle de l'écoulement de base. Ce résultat diffère des observations faites dans la configuration cylindre car les longueurs d'ondes des modes A et B sont distinctes. Le rapport  $\lambda_{3D}/\lambda_{2D}$  est de l'ordre de 1 pour le mode A, en accord avec nos prévisions sur le mode "symétrique", mais il est de l'ordre de 1/4 pour le mode B.

Le dernier résultat que nous avons dégagé de ces expériences concerne la nature *convective/absolue* de ces instabilités secondaires. En effet, la réponse de l'écoulement soumis à des impulsions montre la nature *convective* des instabilités qui se développent. Toute perturbation localisée est amplifiée par l'écoulement tout en étant advectée vers l'aval.

Forts de ces résultats expérimentaux, nous nous sommes intéressés au problème de sélection et à l'origine physique de ces deux modes. Nous avons réalisé deux études numériques temporelles de stabilité secondaire de sillage. L'utilisation de la théorie temporelle est justifiée par le caractère convectif des instabilités secondaires observées expérimentalement.

Comme il n'existe pas de solution des équations de Navier-Stokes modélisant un sillage expérimental, nous avons dans un premier temps étudié la stabilité d'un sillage modèle, l'allée simple de tourbillons contra-rotatifs, déterminée par Mallier & Maslowe [4] (1993). Celle-ci représente une allée infinie unique de tourbillons contrarotatifs dont la concentration de vorticité est contr ol e par un paramètre. Ce modèle est proche d'un sillage de plaque car dans ce cas les deux rangées de tourbillons sont peu décalées verticalement. Les symétries de ce modèle nous ont permis de séparer les perturbations en deux familles, "symétrique" et "antisymétrique". Nous avons effectué une étude paramétrique en fonction de la concentration des tourbillons, et ce pour deux nombres de Reynolds. Pour chaque famille de perturbations, nous avons déterminé les courbes de taux de croissance du mode le plus amplifié et nous avons pu identifier les mécanismes d'instabilité associés aux différents maxima du taux de croissance.

  grand nombre d'onde, les modes "symétrique" et "antisymétrique" ont le même comportement. Les courbes de taux de croissance ainsi que les fonctions propres associées nous ont permis de montrer que ces modes sont pilotés par une instabilité du coeur des tourbillons, l'instabilité elliptique. Le nombre d'onde associé aux maxima varient comme la taille du coeur des tourbillons et le taux de croissance comme le produit du maximum de vorticité par l'ellipticité des tourbillons. Sur la plage des petits nombres d'ondes, les modes "symétrique" et "antisymétrique" se distinguent. Le mode "antisymétrique", stable à  $k = 0$  présente un maximum du taux de croissance à  $k = 0.4$  du   une instabilité similaire à celle de Crow mais dans le cas périodique. Les tourbillons de l'écoulement de base ondulent en opposition de phase dans deux plans inclinés à  $\pm 45^\circ$ . Le mode "symétrique" présente un maximum d'instabilité à  $k = 0$ . Sous l'effet de cette instabilité, les tourbillons de base ont tendance à se positionner en quinconce, formant une double allée de tourbillons alternés, décalés verticalement, semblable à l'allée de von Kármán. Cette instabilité bidimensionnelle avait déjà été identifiée par Dauxois & al [5] (1996).

Le modèle utilisé dans l'étude précédente, présente uniquement des régions elliptiques assimilées au coeur des tourbillons séparés par des lignes de courant transverses sur lesquelles la vorticité s'annule alors que la vitesse reste finie. Une allée correspondant à ce qu'il se passe réellement à l'arrière d'une plaque ou d'un cylindre présente au contraire des points hyperboliques ou la vitesse relative au tourbillon s'annule. Les observations expérimentales du sillage de cylindre [Williamson [3] (1996)] ainsi que les études numériques sur la couche de mélange (Klaassen & Peltier [6] (1991), Caulfield & Kerswell [7] (2000)) ont montré que ces régions hyperboliques, régions de fort étirement entre deux tourbillons consécutifs contribuent fortement aux instabilités secondaires.

Motivés par ces résultats, nous avons étudié la stabilité d'une allée alternée de tourbillons en quinconce obtenue en laissant se développer et saturer les instabilités primaires du profil de vitesse mesuré dans les expériences proche du bord de fuite de la plaque. Dans l'intention d'identifier les contributions des zones elliptiques et hyperboliques de ce sillage au développement des modes secondaires, nous avons implémenté une méthode de Krylov [8] (1994) qui nous donne accès, non seulement au mode le plus amplifié, mais aussi aux modes sous-dominants. Cette méthode a été validée sur le modèle de Mallier & Maslowe [4] (1993) et sur l'allée simple de tourbillons corotatifs de Stuart. Comme dans l'étude précédente, les symétries de l'écoulement de base nous ont permis de séparer les perturbations en deux familles préservées par l'opérateur

d'évolution linéaire. De plus, nous avons montré théoriquement que lorsqu'un mode propagatif appartenant à une des deux familles "symétrique" ou "antisymétrique" est amplifié alors le mode se propageant en sens inverse, appartenant à la même famille est également amplifié avec le même taux de croissance.

Dans le cadre de cette étude, nous avons montré que les modes d'instabilité secondaires les plus amplifiés "symétrique" et "antisymétrique" du sillage de Bickley sont stationnaires. Quel que soit le nombre d'onde  $k$ , les régions hyperboliques et les régions elliptiques sont actives, contribuant au développement des instabilités secondaires du sillage. Le rôle de chaque région évolue de façon continue lorsque  $k$  augmente. A petit nombre d'onde, nous avons identifié des modes de coeur et à grand nombre d'onde des modes hyperboliques. Les modes sous-dominants sont propagatifs. Les structures des fonctions propres sont complexes et sont le résultat de l'interaction entre différents mécanismes d'instabilités.

Les résultats de cette étude numérique peuvent être comparés avec les expériences que nous avons menées. En effet, les deux modes "symétrique" et "antisymétrique" dominants ont des taux de croissance égaux pour un même nombre de Reynolds et un même Strouhal. Ce phénomène confirme les observations expérimentales qui montrent que les deux modes d'instabilité secondaire 3D apparaissent sous les mêmes conditions expérimentales. De plus, les longueurs d'onde correspondant aux maxima de croissance des modes "symétrique" et "antisymétrique" sont les mêmes et de l'ordre de la longueur d'onde de l'écoulement de base  $\lambda_{2D}$ , résultat que l'on a également obtenu expérimentalement. Les structures des fonctions propres associées à ces maxima montrent que régions hyperboliques et elliptiques sont actives. Ainsi, le développement des modes secondaires du sillage plan est piloté par les deux mécanismes d'instabilités elliptique et hyperbolique. Ce constat distingue à nouveau les modes secondaires du sillage plan et du sillage de cylindre si l'on se réfère aux observations de Williamson [3] (1996) qui attribue le mode A à une instabilité du coeur des tourbillons et le mode B à une instabilité de la tresse.

## PERSPECTIVES

La continuité naturelle de notre travail sera d'étendre l'étude du sillage réaliste présentée dans la partie 4 à différents profils initiaux et différents forçages. En particulier, le profil étudié dans notre travail est caractérisé par une seule longueur, la largeur du sillage. Or dans le cas de sillages d'objets non profilés, les couches limites se détachent sur l'objet et le sillage présente deux échelles de longueur distinctes, l'épaisseur de cisaillement et l'écart  $D$  entre ces couches cisillées. Dans ce cas, la structure et la stabilité des allées de tourbillons formées par enroulement varieront probablement fortement en fonction de  $\delta_w/D$  et de la longueur d'onde imposée quantifiée par le nombre de strouhal  $St = \lambda_{2D}/D$ . La méthode que nous avons mise en place est directement adaptée à cette étude. Les effets induits par la séparation des deux échelles, l'épaisseur de la couche de vorticité et la largeur du sillage sont éventuellement à l'origine des sélections différentes de longueur d'onde des modes A et B du sillage de cylindre.  ventuellement, ces études permettront d'identifier les mécanismes qui prévalent à cette sélection d'échelle. De plus, l'étude de Robinson & Saffman [9] (1982) confirmée par notre étude du chapitre 3, prévoit qu'une instabilité antisymétrique analogue à celle de Crow, mais ici périodique, devrait se manifester à grande longueur d'onde. Cette instabilité ne semble pas avoir été mise en évidence et l'étude proposée permettra de préciser les conditions de son observation.

Cependant, la dynamique du sillage de cylindre est plus complexe que celle de la plaque plane. En effet, contrairement à la configuration plaque plane où les points de décollement des

couches limites coïncident avec son bord de fuite, les couches limites, dans le cas du cylindre, se détachent avant d'avoir atteint le point le plus en aval de l'obstacle. L'observation de ces points de décollement a montré qu'ils sont oscillants. De plus, ce décollement des couches limites engendre la formation d'une zone de recirculation à l'aval du cylindre qui se met à osciller, émettant périodiquement et alternativement des tourbillons de signe opposé [cf Williamson [10] (1996)]. En revanche, la zone de recirculation n'existe pas dans le cas de la plaque plane.

Si les outils numériques que nous avons mis en place ne permettent pas de traiter l'effet d'une oscillation du point de décollement, ils permettent d'analyser l'impact de la zone de recirculation sur la dynamique des instabilités secondaires. En effet, la présence de celle-ci est susceptible de provoquer une transition instable *convectif* / instable *absolu*. La transition *convectif/absolu* d'une instabilité a des conséquences radicales sur la dynamique de ce type d'écoulements. En particulier, le caractère *absolu* peut amener l'écoulement à se comporter comme un oscillateur c'est à dire à avoir une dynamique globale intrinsèque qui impose sa propre sélection de mode. Cette analyse est particulièrement tentante dans le cadre des écoulements de sillage car, comme nous l'avons montré dans nos expériences, l'instabilité secondaire a un caractère convectif alors que les modes secondaires dans la configuration du cylindre ont été identifiés comme le résultat d'une instabilité globale de l'écoulement [Barkley & Henderson [11] (1996)].

La méthode utilisée pour ce type d'étude directement applicable avec les codes développés pour ce travail est de simuler numériquement l'effet, sur un écoulement de base de type sillage de von Kármán, d'une perturbation initiale localisée et de suivre l'évolution spatio-temporelle du paquet d'ondes résultant. Un tel travail a été mené par Brancher & Chomaz [12] (1997) sur l'instabilité secondaire 2D des tourbillons de Stuart (l'appariement) et 3D (instabilité translative). Une étude numérique de l'instabilité des profils de vitesse locale derrière un cylindre peut donc déterminer si cette instabilité secondaire globale est liée ou non à une transition *convective/absolue* locale.

D'un point de vue expérimental, les effets du paramètre de contrôle  $\delta_\omega/D$  peuvent être testés en remplaçant la plaque plane unique par deux plaques planes espacées. Ce système permet de faire varier le paramètre  $D$  tout en évitant qu'une dynamique imposée par des éventuelles oscillations du point de décollement ne viennent forcer les instabilités secondaires. De plus, ce montage permet de tester les idées de sélection liées à une transition *absolue/convective* comme dans l'étude de Hammond & Redekopp [[13], [14](1997a-b)] concernant l'instabilité primaire. Par aspiration ou soufflage de la couche fluide comprise entre les deux plaques, on peut contrôler la taille de la zone de recirculation et voir s'il existe un seuil de transition *convectif/absolu* de l'instabilité secondaire.

# Bibliographie

- [1] E. Meiburg & J.C. Lasheras, “Experimental and numerical investigation of the three-dimensional transition in plane wakes,” *J. Fluid Mech.* **190**, 1 (1987).
- [2] J.C. Lasheras & E. Meiburg, “Three dimensional vorticity modes in the wake of a flat plate,” *Phys. Fluids A* **2**(3), 371 (1990).
- [3] C.H.K. Williamson “Three-dimensional wake transition behind a cylinder,” *J. Fluid Mech.* **328**, 345 (1996).
- [4] R. Mallier & S.A. Maslowe, “A row of counter-rotating vortices,” *Phys. Fluids* **5**(4), 1074 (1993).
- [5] T. Dauxois, S. Fauve & L. Tuckerman, “Stability of periodic arrays of vortices,” *Phys. Fluids* **8**(2), 487 (1996).
- [6] G.P. Klaassen & W.R. Peltier, “The influence of stratification on secondary instability in free shear layers,” *J. Fluid Mech.* **227**, 71 (1991).
- [7] C. P. Caulfield & R.R. Kerswell, “The nonlinear development of three-dimensional disturbances at hyperbolic stagnation points : A model of the braid region in mixing layers,” *Phys. Fluids* **12**(5), 1032 (2000).
- [8] W. S. Edwards, L.S. Tuckerman, R.A. Friesner & D.C. Sorensen, “Krylov Methods for the incompressible Navier-Stokes Equations,” *J. Comput. Phys.* **110**, 82 (1994).
- [9] A.C. Robinson and P.G. Saffman, 1982. ”Three-dimensional stability of vortex arrays,” *J. Fluid Mech.* **125**, 411 (1982).
- [10] C.H.K. Williamson, “Vortex dynamics in the cylinder wake,” *Ann. Rev. Fluid Mech.* **28**, 477 (1996).
- [11] D. Barkley & R. D. Henderson, “Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder,” *J. Fluid Mech.* **322**, 215 (1996).
- [12] P. Brancher & J.M. Chomaz, “Absolute and convective secondary instabilities in spatially periodic shear flows,” *Phys. Rev. Lett.* **78**, 658 (1997).
- [13] D.A. Hammond & L. G. Redekopp, “Global dynamics of symmetric and asymmetric wakes,” *J. Fluid Mech.* **331**, 231 (1997).
- [14] D.A. Hammond & L. G. Redekopp, “Global dynamics and aerodynamic flow vectoring of wakes,” *J. Fluid Mech.* **338**, 231 (1997).



## Chapitre 6

# Bibliographie générale

- P. Albarede & P.A. Monkewitz, “A model for the formation of oblique shedding patterns and “chevrons” in cylinder wakes,” *Phys. Fluids A* **4**, 744 (1992).
- D. Barkley & R. D. Henderson, “Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder,” *J. Fluid Mech.* **322**, 215 (1996).
- B.J. Bayly, “Three-dimensional instability of elliptical flow,” *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2160 (1986).
- Bernal & Roshko, “Streamwise vortex structure in plane mixing layers,” *J. Fluid Mech.* **170**, 499 (1986).
- P. Billant, P. Brancher & J.-M. Chomaz, “Three-dimensional stability of a vortex pair,” *Phys. Fluids* **11**, 2069 (1999).
- M.S. Bloor, “The transition to turbulence in the wake of a circular cylinder,” *J. Fluid Mech.* **19**, 290 (1964).
- P. Brancher & J.M. Chomaz, “Absolute and convective secondary instabilities in spatially periodic shear flows,” *Phys. Rev. Lett.* **78**, 658 (1997).
- M. Braza, “Transition features in wake flows by means of numerical analysis,” *Current Topics in the Phys. Fluids* **1**, 391 (1994).
- R. Breidenthal, “Structure in turbulent mixing layers and wakes using a chemical reaction,” *J. Fluid Mech.* **109**, 1 (1981).
- F.K. Browand & T.R. Troutt “A note on the spanwise structure in the two-dimensional mixing layer,” *J. Fluid Mech.* **97**, 771 (1980).
- F.K. Browand & S.A. Prost-Domasky, “Experiment on pattern evolution in the 2-D mixing layer,” In *New trends in nonlinear dynamics and Pattern Forming Phenomena*, ed. P. Couillet, P. Huerre, NATO ASI Ser. **8**, 159. New York : Plenum (1990).
- C. P. Caulfield & R.R. Kerswell, “The nonlinear development of three-dimensional disturbances at hyperbolic stagnation points : A model of the braid region in mixing layers,” *Phys. Fluids* **12**(5), 1032 (2000).
- J.M. Chomaz, P. Huerre & Redekopp L.G., “ Bifurcations to local and global modes in spatially-developing flows,” *Phys. Rev. Lett.* **60**, 25 (1988)

- A.D.D. Craik & W.O. Criminale “Evolution of wavelike disturbances in shear flows : A class of exact solutions of the Navier-Stokes equations,” Proc. R. Soc. London, Ser. A **406**, 13 (1986).
- S.C. Crow, “Stability theory for a pair of trailing vortices,” A.I.A.A.J. **8**, 2172 (1970).
- T. Dauxois, S. Fauve & L. Tuckerman, “Stability of periodic arrays of vortices,” *Phys. Fluids* **8**(2), 487 (1996).
- I. Delbende & J.-M. Chomaz, “Nonlinear convective/absolute instabilities of parallel two-dimensional wakes,” *Phys. Fluids* **10**(11), 2724 (1998).
- P.G. Drazin & W.H. Reid, “Hydrodynamic Stability,” Cambridge University Press (1981).
- H. Eckelmann, J.M.R. Graham, P. Huerre & P.A. Monkewitz, “Proc. IUTAM conf. Bluff Body Wakes instabilities,” Berlin : Springer-Verlag, (eds 1992).
- W. S. Edwards, L.S. Tuckerman, R.A. Friesner & D.C. Sorensen, “Krylov Methods for the incompressible Navier-Stokes Equations,” *J. Comput. Phys.* **110**, 82 (1994).
- H. Eisenlohr & H. Eckelmann, “Vortex splitting and its consequences in the vortex street wake of cylinders at low Reynolds numbers,” *Phys. Fluids A* **1**, 189 (1989).
- D. Fabre, C. Cossu, & L. Jacquin, “Spatio-temporal development of the long- and short-wave vortex pair instabilities”, *Phys. Fluids* **12**, In press (2000).
- J.H. Gerrard, “The wakes of cylindrical bluff bodies at low Reynolds number,” *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **288**, 351 (1978).
- S. Goldstein, “Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics,” *Proc. Camb. Phil. Soc.* **26**, 1 (1930)
- F.R. Hama, “Three-dimensional vortex pattern behind a circular cylinder,” *J. Aeronaut. Sci.* **24**, 156 (1957).
- R. Hama, “Streaklines in a perturbed shear flow,” *Phys. Fluids* **5**(6), 644 (1962).
- M. Hammache & M. Gharib, “An experimental study of the parallel and oblique vortex shedding from circular cylinders,” *J. Fluid Mech.* **232**, 567 (1991).
- D.A. Hammond & L. G. Redekopp, “Global dynamics of symmetric and asymmetric wakes,” *J. Fluid Mech.* **331**, 231 (1997).
- D.A. Hammond & L. G. Redekopp, “Global dynamics and aerodynamic flow vectoring of wakes,” *J. Fluid Mech.* **338**, 231 (1997).
- C.M. Ho & P. Huerre, “Perturbed free shear layers,” *Ann. Rev. Fluid Mech.* **16**, 365 (1984)
- J. Jimenez, “On the visual growth of the of turbulent mixing layer ,” *J. Fluid Mech.* **96**, 447 (1980).
- S. Julien J.M. Chomaz & J.C. Lasheras, “Study of the temporal stability of a row of counter-rotating vortices,” *to be submitted to Phys. Fluids* .

- G.P. Klaassen & W.R. Peltier, "The influence of stratification on secondary instability in free shear layers," *J. Fluid Mech.* **227**, 71 (1991).
- M. König, B.R. Noack & H. Eckelmann "Discrete shedding modes in the von Kármán vortex street," *Phys. Fluids A* **5**, 1846 (1993).
- J.H. Konrad, "An experimental investigation of mixing in two-dimensional turbulent shear flows with applications to diffusion-limited chemical reaction," Intern. Rep. CIT-8-PU, Calif. Inst. Technol., Pasadena (1976).
- R.R. Lagnado, N. Phan-thien & L.G. Leal, "The stability of two-dimensional linear flows," *Phys. Fluids* **30**, 2239 (1984).
- H. Lamb, "Hydrodynamics," (Cambridge University Press, Cambridge, 1932).
- M. J. Landman & P.G. Saffman, "The three-dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid," *Phys. Fluids* **30**, 2339 (1987).
- J.C. Lasheras & H. Choi, "Three-dimensional instability of a plane free shear layer. An experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices," *J. Fluid Mech.* **189**, 53 (1988).
- J.C. Lasheras & E. Meiburg, "Three dimensional vorticity modes in the wake of a flat plate," *Phys. Fluids A* **2**(3), 371 (1990).
- S. Leblanc & C. Cambon, "On the three-dimensional instabilities of plane flows subjected to Coriolis force," *Phys. Fluids* **9**, 1307 (1997).
- S. Leblanc & C. Cambon, "Effects of the Coriolis force on the stability of Stuart's vortices," *J. Fluid Mech.* **356**, 353 (1998).
- S. Ledizès & C. Eloy, "Short-wavelength instability of a vortex in a multipolar strain field," *Phys. Fluids* **11** (2), 500 (1999).
- T. Leweke, M. Provansal & L. Boyer, "Stability of vortex shedding modes in the wake of a ring at low Reynolds numbers," *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3469 (1993).
- T. Leweke & C.H.K. Williamson, "Three-dimensional instabilities in wake transition," *European Journal of Mechanics B/Fluids* **17**(4), 571 (1998).
- S.J. Lin & G.M. Corcos, "The mixing layer : deterministic models of a turbulent flow. Part 3 : The effect of plane strain on the dynamics of streamwise vortices," *J. Fluid Mech.* **141**, 139 (1984).
- R. Mallier & S.A. Maslowe, "A row of counter-rotating vortices," *Phys. Fluids* **5**(4), 1074 (1993).
- H. Mancy P. Yang & D.R. Williams, "Quantitative measurements of spanwise-periodic three-dimensional structures in the wake of a circular cylinder," *J. Fluid Mech.* **270**, 277 (1994).
- E. Meiburg & J.C. Lasheras, "Experimental and numerical investigation of the three-dimensional transition in plane wakes," *J. Fluid Mech.* **190**, 1 (1987).

- R.W. Miksad, "Experiments on the nonlinear stages of free shear layer transition," *J. Fluid Mech.* **56**, 695 (1972).
- G.D. Miller & C.H.K. Williamson, "Control of three-dimensional phase dynamics in a cylinder wake," *Exp. Fluids* **18**, 26 (1994).
- P.A. Monkewitz, B. Lehmann, B. Barsikow & D.W. Bechert "The spreading of self-excited hot jets by side-jets," *Phys. Fluids* **A1**, 446 (1989).
- D.W. Moore & P.G. Saffman "The instability of a straight vortex filament in a strain field," *Proc. R. Soc. Lond .A.* **346**, 413 (1975).
- J.C. Neu, "The dynamics of stretched vortices," *J. Fluid Mech.* **143**, 253 (1984).
- B.N. Noack & H. Eckelmann, "A global stability analysis of the steady and periodic cylinder wake," *J. Fluid Mech.* **270**, 297 (1994).
- C. Norberg, "An experimental investigation of the flow around a circular cylinder : influence of aspect ratio," *J. Fluid Mech.* **258**, 287 (1994).
- D.S. Park & L.G. Redekopp, "A model for pattern selection in wake flows," *Phys. Fluids A* **4**, 1697 (1991).
- H. Persillon & M. Braza, "Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional Navier-Stokes simulation," **365**, 23 (1998).
- R.T. Pierrehumbert & S.E. Widnall, "The two- and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer," *J. Fluid Mech.* **114**, 59 (1982).
- R.T. Pierrehumbert, "Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid," *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2157 (1986).
- P.G. Potylitsin & W.R. Peltier, "Three-dimensional destabilization of Stuart vortices : the influence of rotation and ellipticity," *J. Fluid Mech.* **387**, 205 (1999).
- M. Provansal, C. Mathis & L. Boyer " Benard-von Kármán instability : transient and forced regimes," *J. Fluid Mech.***182**, 1 (1987).
- L. Rayleigh, "Scientific papers ," **3**, Cambridge University Press (1892).
- A.C. Robinson & P.G. Saffman, 1982. "Three-dimensional stability of vortex arrays," *J. Fluid Mech.* **125**, 411 (1982).
- A.C. Robinson & P.G. Saffman, "Three-dimensional stability of an elliptical vortex in a straining field," *J. Fluid Mech.* **142**, 451 (1984).
- D.G. Schowalter, C.W. Van Atta & J.C. Lasheras "A study of streamwise vortex structure in a stratified shear layer," *J. Fluid Mech.* **281**, 247 (1994).
- P. Tabeling, B. Perrin & S. Fauve, "Instability of a linear array of forced vortices," *Europhys. Lett.* **3**, 459 (1987).

- M. Thompson, K. Hourigan & J. Sheridan “Three-dimensional instabilities in the cylinder wake,” Int. Colloq. Jets, Wakes, Shear Layers, *Melbourne, Aust, April 18-20*, **Pap. 10** (1994).
- C-Y. Tsai & S.E. Widnall, “The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field,” *J. Fluid Mech.* **73**, 721 (1976).
- L.S. Tuckerman, “Stabilité hydrodynamique et méthodes numériques adaptées,” Cours de l’École De Printemps MFN, Carcans-Maubuisson, France (1995).
- F. Waleffe, “On the three-dimensional instability of strained vortices,” *Phys. Fluids* **A2**, 76 (1990).
- T. Wei & C.R. Smith, “Secondary vortices in the wake of circular cylinders,” *J. Fluid Mech.* **169**, 513 (1986).
- C.H.K. Williamson, “Three-dimensional transition in the near wake of a cylinder,” *Bull. Am. Phys. Soc.* **32**, 2098 (1987).
- C.H.K. Williamson, “Oblique and Parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers,” *J. Fluid Mech.* **19**, 290 (1989).
- C.H.K. Williamson, “Three-dimensional wake transition,” *J. Fluid Mech.* **328**, 345 (1994).
- C.H.K. Williamson, “Vortex dynamics in the cylinder wake,” *Ann. Rev. Fluid Mech.* **28**, 477 (1996).
- C.H.K. Williamson, “Three-dimensional wake transition behind a cylinder,” *J. Fluid Mech.* **328**, 345 (1996).
- C.H.K. Williamson, “Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder,” *Phys. Fluids* **31**, 2742 (1988a).
- C.D. Winant & F.K. Browand, “Vortex pairing : the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds numbers,” *J. Fluid Mech.* **63**, 237 (1974).
- J. Wu, J. Sheridan M.C. Welsh K. Hourigan, & M. Thompson, “Longitudinal vortex structures in a cylinder wake,” *Phys. Fluids* **6**, 28837 (1994).
- A.J. Yule, “Large-scale structure in the mixing-layer of a round jet,” *J. Fluid Mech.* **89**, 413 (1978).
- H. Zhang, U. Fey, B.R. Noack, M. König & H. Eckelmann, “On the transition of the cylinder wake,” *Phys. Fluids* **7**, 1 (1995).