HAL
archives-ouvertes.fr

Analyse de stabilité globale pour un écoulement transsonique soumis au phénomène de tremblement de voilure

Sarah Benbaba

▶ **To cite this version:**

Sarah Benbaba. Analyse de stabilité globale pour un écoulement transsonique soumis au phénomène de tremblement de voilure. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2011. Français. <pastel-00663520>

HAL Id: pastel-00663520

https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00663520

Submitted on 27 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

présentée par

Sarah BENBABA

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Ecole Polytechnique

Spécialité : Mécanique des fluides

Analyse de stabilité globale pour un écoulement transsonique soumis au phénomène de tremblement de voilure.

soutenue le Jeudi 20 Octobre 2011

devant le jury composé de :

M.	Christophe AIRIAU	*Rapporteur*
M.	Florent RENAC	*Examinateur*
M.	Jean Christophe ROBINET	*Rapporteur*
M.	Peter SCHMID	*Directeur de thèse*
M.	Denis SIPP	*co-Directeur de thèse*

Analyse de stabilité globale pour un écoulement transsonique soumis au phénomène de tremblement de voilure

Résumé : En configuration croisière d'un avion de transport civil, où les conditions de l'écoulement sont transsoniques, une augmentation de la vitesse ou de l'incidence, nécessaire par exemple lors d'un virage ou d'un changement d'altitude, peut générer des décollements sur l'extrados de l'aile par la recompression de l'écoulement ou par l'interaction onde de choc/couche limite plus forte. Ces décollements modifient la répartition de charge sur la voilure, donc la portance, et deviennent instables par les échappées tourbillonnaires dans le sillage lorsqu'ils sont étendus jusqu'au bord de fuite. Ces instabilités aérodynamiques, correspondent à la répartition spatiale et temporelle des décollements et de la position du choc. Elles modifient la charge de la voilure et par couplage excitent la structure sur ces modes propres, tremblement. Par conséquent, il apparaît intéressant d'approfondir l'étude des instabilités qu'on vient d'identifier à travers d'une nouvelle approche. De ce fait, ce mémoire s'orientera vers une analyse de stabilité linéaire globale d'un écoulement compressible turbulent soumis au phénomène de tremblement. En particulier, la démarche de cette thèse s'inspirera des travaux effectués par l'équipe de Crouch. Dans ce contexte, l'objectif de cette thèse est le développement d'un outil numérique permettant d'étudier la stabilité globale d'un écoulement compressible turbulent pour des géométries quelconques. Ce travail est essentiellement numérique, il mettra en oeuvre l'implémentation du code dans le logiciel *elsA* de l'ONERA, pour calculer le champ de base et réaliser l'extraction explicite de la jacobienne des équations RANS linéarisées. Cet objectif, a pour but de prouver qu'on est capable de retrouver les acteurs responsables du phénomène de tremblement qui apparaît à l'extrados d'une voilure bidimensionnelle. En vue de l'étude de la stabilité de l'écoulement, l'implémentation des méthodes numériques ainsi que leurs validations au sein du logiciel *elsA*, ont été réalisé avec succès. Une fois ce résultat est acquis, on s'intéressera, en particulier, à déterminer le spectre des modes propres, grâce aux techniques spécifiques fournies par la théorie de stabilité.

Mots-clés : Ecoulement turbulent, Tremblement transsonique, Instationnarité, Analyse de stabilité globale, Logiciel *elsA*.

Global stability analysis of transonic shock buffeting

Abstract Experiments on transonic flow over an airfoil have revealed a characteristic oscillatory motion of the transonic shock location. This shock buffeting causes oscillatory wing loads that are detrimental to both lift generation and material fatigue. The description of this low-frequency shock oscillations shall be the subject of this thesis where special emphasis shall be directed at explaining the physical mechanisms underlying this phenomenon as well as efficient means in manipulating it. Iterative techniques, applied to direct numerical simulations and resulting in global modes, are expected to shed light on the dominant features that cause shock buffeting. So this memory will include a variety of techniques ranging from global stability analysis to direct numerical simulations of transonic flow subjected shock buffeting. In particular, the approach of this thesis will take as a starting point the work carried out by the team of Crouch. In this context, the objective of this thesis is the development of a digital tool making it possible to study the global stability of transonic flow for unspecified geometries. In this work, we will implement in the software *elsA* of ONERA, to obtain the basic flow and the achievement of the extraction of the jacobien matrix of the RANS equations linearized. The

purpose of this objective, is to prove that we are able to find the actors responsible for the phenomenon of buffeting that appears on the upper surface of a bi-dimensional wing.

Keywords : Transonic buffet, Unsteady flow, Numerical simulation, Global stability analysis, Software *elsA*.

1 Remerciements

Cette thèse n'aurait pu aboutir sans la présence de plusieurs personnes, que je tiens à remercier ici. Je remercie Laurent Jacquin, chef département du DAFE (Département Aérodynamique Fondamentale et Expérimentale), de m'avoir accueilli pour réaliser cette thèse, ainsi que de m'avoir soutenu pour obtenir le financement tout au long de ces années.
Toute ma gratitude pour Peter Schmid, qui a accepté d'être mon directeur de thèse et Denis Sipp, mon encadreur à l'ONERA, pour leurs intérêts qu'ils m'ont porté à mon travail et pour m'avoir sans cesse encouragé. Leurs compétences ne se limitent pas uniquement à des aspects strictement scientifiques, mais aussi, à des qualités humaines indéniables.
J'adresse tous mes remerciements aux membres du jury qui ont participé à ma soutenance. Christophe Airiau, qui a accepté, à mon grand honneur, de présider mon jury, de rapporter mon manuscrit et d'évaluer mes travaux avec pertinences et rigueur scientifique. Je remercie Jean Christophe Robinet, qui a accepté de rapporter ma présente thèse, qui a bien voulu me faire profiter de sa rigueur scientifique, de la pertinence de ses remarques et son soutien moral. Le jury, aussi composé de Florent Renac, qui a assumé les délicates tâches d'encadrement dans le développement numérique au sein du logiciel *elsA*, avec amitié et indulgence, sans jamais se départir de la rigueur scientifique nécessaire. Je voudrais lui exprimer toute ma reconnaissance.

Je tiens particulièrement à remercier Jacques Peter, le papa d'*elsA*, pour son aide précieuse et ses conseils avisés, pour mes premiers pas dans *elsA*.Un remerciement particulier est adressé à l'ensemble des membres du DSNA.
J'ai bénéficié tout au long de cette thèse d'un environnement de travail des plus agréables et je dois une partie du plaisir que j'ai tiré de ces années à différentes personnes de l'ONERA. Je voudrais remercier tout particulièrement tous les membres du DAFE qui ont contribué à son atmosphère de confiance et à son dynamisme et sans qui je n'aurais sûrement pas eu autant de plaisir à travailler : Benjamin, Olivier, Serge, Claire, Yves, Alexandre, Clément, Benoit, Ferid, Samuel, Marie-Claire, Thierry, Sébastien, Pascal, Rasika ... Je remercie Jean Pierre Tobeli, pour ses encouragements constant durant tous les moments difficiles.
Plus que trois ans dans un même bureau, partagé avec Vincent Brion. Durant les moments heureux et difficiles de ses années de thèse, Vincent est un vrai ami pour moi, je ne trouverai jamais les mots pour le dire MERCI.
Les mots ne suffiraient pas pour exprimer ma profonde gratitude envers Dominique Grandson. Sans ses encouragements, générosité et sa patience, cette thèse n'aurait pas pu aboutir. Je veux vivement la remercier pour son soutien, m'a aidé à surmonter même les moments les plus délicats de cette thèse. Nos discussions ont toujours été un moment fort agréables me permettant de trouver réconfort et sérénité. Merci Dominique.

Ma dette de reconnaissance est va en premier lieu à ceux grâce à qui j'ai pu voir le jour, à mes parents, sans qui je n'aurais jamais été ce que je suis, sans leurs appui moral et sans leurs nombreux sacrifices, ce travail n'aurait jamais pu aboutir. Vous êtes des parents exceptionnels, merci de m'avoir appris à ne jamais s'arrêter avant d'y arriver ; merci de m'avoir appris à aimer sans limite ; merci de m'avoir appris à viser loin ; merci de m'avoir indiqué les bons chemins. Merci maman Noura, pour tous les soins, sans toi, je ne serai jamais guérit. Merci, aussi à ma deuxième mère, ma très chère grand-mère. J'associe mes sincères remerciements, à mon mari Anis, pour les bonnes conditions qu'il a su mettre pour motiver mon travail. Je tiens à remercier mon très cher frère, pour ces encouragements, son affection et sa générosité. Un grand merci, à ma meilleure amie Yousra, qui est toujours à mon écoute et présente toute le temps. Un grand merci aussi, à ma très chère cousine Dora, à mes deux soeurs, mes tantes et les reste de toute ma famille et amis.

Je finirai, par remercier le bon Dieu, qui m'a donné le courage, la foie et la santé pour soutenir cette thèse.

Table des matières

Sommaire **i**

1 Remerciements **iii**

Remerciements **iii**

Notations **xv**

I Introduction **1**

2 Introduction **3**
2.1 Enjeu industriel et motivation 3
2.2 Objectif et organisation du manuscrit 4

3 Phénomène de tremblement **7**
3.1 Caractérisation et origine du tremblement 8
3.1.1 Historique et définition phénoménologique 8
3.1.2 Description du phénomène, les études théoriques et expérimentales 8
3.1.2.1 Les études théoriques 9
3.1.2.2 Les études expérimentales 12
3.1.2.3 Les études numériques 15
3.2 Analyse de stabilité linéaire 17
3.2.1 Approche globale de la stabilité 18
3.2.2 Technique des petites perturbations 19
3.2.3 Algorithme de résolution du problème aux valeurs propres 21
3.3 Conclusion 22

II Calcul non-linéaire **25**

4 Méthodes et résolutions numériques des équations de Navier-Stokes pour les écoulement compressibles turbulents. **27**
4.1 Formulation des équations de Navier-Stokes 27
4.1.1 Caractéristiques du fluide 28
4.1.1.1 Équations de bilan 28
4.1.1.2 Lois d'état 29
4.1.1.3 Lois de comportement pour un fluide 30
4.2 Modélisation des écoulements turbulents 31
4.2.1 Équations de Navier-Stokes moyennées - **RANS** 32

4.2.1.1 Modélisation du tenseur de Reynolds : hypothèse de Boussinesq . . . 33
4.2.2 Modélisation de la viscosité turbulente . . . 34
4.2.2.1 Modèles algébriques . . . 34
4.2.2.2 Modèle de turbulence à une seule équation . . . 35
4.2.2.3 Modèles de turbulence à deux équations . . . 36
4.3 Résolutions numériques des équations de conservation . . . 37
4.3.1 Méthodes des volumes finis . . . 38
4.3.2 Discrétisation spatiale des équations du champ moyen . . . 41
4.3.2.1 Discrétisation du flux convectif - Schéma de Roe . . . 42
4.3.2.2 Discrétisation du flux diffusif . . . 46
4.3.3 Discrétisation spatiale du modèle de turbulence . . . 49
4.3.3.1 Flux convectif pour le champ turbulent . . . 49
4.3.3.2 Flux diffusif pour le champ turbulent . . . 49
4.3.3.3 Terme source . . . 49
4.4 Conditions aux limites . . . 50
4.4.1 Paroi adiabatique . . . 51
4.4.2 Non réflexion . . . 52
4.4.3 Champ turbulent . . . 52
4.5 Condition de "raccord" . . . 53
4.5.1 Définition des frontières raccord . . . 53
4.5.2 Traitements numériques des raccords . . . 54
4.6 Intégration en temps . . . 55
4.6.1 Calcul stationnaire . . . 55
4.6.2 Calcul instationnaire . . . 56
4.6.2.1 Méthode de Gear . . . 56
4.7 Conclusion . . . 57

5 Application numérique - Buffet **59**
5.1 Définition d'un écoulement de base . . . 59
5.1.0.2 Champ de base laminaire . . . 59
5.1.0.3 Champ de base turbulent . . . 60
5.2 Présentation des Maillages . . . 61
5.2.1 Profil sans culot . . . 61
5.2.1.1 Maillage mono-bloc et sans culot . . . 63
5.2.2 Profil avec culot . . . 63
5.3 Applications stationnaires - Calcul RANS . . . 65
5.3.1 Caractéristiques aérodynamiques . . . 65
5.3.2 Modèle de turbulence Spalart-Allmaras . . . 66
5.3.3 Modèle de turbulence $(k-\omega)$ de Wilcox . . . 66
5.4 Applications instationnaires - Calcul URANS . . . 66
5.4.1 Modèle de turbulence Spalart-Allmaras . . . 67
5.4.2 Modèle de turbulence $(k-\omega)$ de Wilcox . . . 67
5.5 Conclusion . . . 68

III Calcul Linéaire 77

6 Extraction de la matrice Jacobienne explicite 79
6.1 Introduction . . . 79
6.2 Stratégie d'extraction des éléments d'une matrice . . . 79
6.2.1 Opération produit "*matrice*vecteur*" . . . 80
6.2.2 Technique d'extraction - Choix pertinent . . . 81
6.2.2.1 Stencil à 3 points . . . 82
6.2.2.2 Stencil à 5 points . . . 84
6.3 Construction des Jacobiens . . . 87
6.3.1 Expression des résidus explicites dans le stencil de discrétisation . 89
6.3.2 Calcul des Jacobiens à partir de la linéarisation des flux du champ moyen . . . 91
6.3.2.1 La Jacobienne du flux convectif . . . 91
6.3.2.2 La Jacobienne du Flux diffusif - Approximation de type *couche-mince* . . . 97
6.3.3 Calcul des jacobiens à partir de la linéarisation des flux du champ turbulent . . . 102
6.3.3.1 La jacobienne du flux convectif turbulent . . . 102
6.3.3.2 La jacobienne du flux diffusif turbulent . . . 103
6.3.3.3 La jacobienne du terme source . . . 104
6.3.3.3.a Terme de destruction . . . 105
6.3.3.3.b Linéarisation du terme de production . . . 106
6.4 Structure de la matrice Jacobienne et son assemblage . . . 109
6.5 Conclusion . . . 113

7 Validation numérique de l'extraction - Inversion 115
7.1 Méthodes d'inversion . . . 115
7.1.1 Méthode itérative . . . 116
7.1.2 Méthode directe . . . 117
7.1.2.1 MUMPS . . . 118
7.2 Technique de comparaison . . . 118
7.3 Validation de l'extraction . . . 119
7.4 Conclusion . . . 120

IV Modes et vecteurs propres 131

8 Analyse de stabilité - Calcul des modes globaux 133
8.1 Analyse de stabilité linéaire . . . 133
8.2 Calcul des modes globaux : écoulement laminaire . . . 135
8.2.1 Calcul d'un champ de base pour un écoulement laminaire compressible . . . 135
8.2.2 Spectre et vecteurs propres . . . 137
8.3 Calcul des modes globaux : écoulement turbulent . . . 140
8.3.1 Calcul du champ de base d'un écoulement turbulent . . . 140
8.3.2 Spectre des modes propres avec approximation "μ_t *figé*" . . . 141
8.3.3 Spectre des modes propres sans approximation de "μ_t *figé*" . . . 142
8.4 Conclusion . . . 143

V Conclusion - Perspective **161**

9 Conclusion - Perspective **163**

VI Annexes **167**

A Méthodes mathématiques **169**
A.1 Algorithme de Newton 169
A.2 Principe de la détermination du pas de temps 169
A.3 Méthode d'Arnoldi 170
A.4 Condition de convergence de l'algorithme itératif 173

B Dérivation du terme de production **175**
B.1 Calcul de Φ 175
B.2 Calcul des dérivées de la production 175

Bibliographie **178**

Table des figures

2.1 *(a)Tourbillons engendrés dans le sillage de l'avion et liés à l'apparition du tremblement (Calcul* elsA*). (b) Calcul de l'écoulement transsonique autour du fuselage et des ailes en phase de vol de l'avion générique Cat3D, V.Brunet / ONERA* 5

3.1 *Différentes topologies d'écoulement transsonique soumis au phénomène de tremblement selon Pearcey [32]* 9
3.2 *Les trois catégories de configurations d'écoulements transsoniques instationnaires selon Tijdeman [80]* 10
3.3 *Illustration de l'évolution du coefficient de portance maximal en fonction du nombre de Mach et de l'incidence. Extrait de Lee [43]* 11
3.4 *Mécanisme d'oscillations auto-entretenues du choc, d'après Lee [43]* . . . 11
3.5 *Visualisation du profil supercritique OAT*15*A dans la soufflerie S3 de Meudon [23]* 13
3.6 *Visualisation du champ aérodynamique par strioscopie pour le profil OAT*15*A à la soufflerie S3 de Meudon.* $M = 0.73$, $\alpha = 3.5$ *[23]* 13
3.7 *Visualisations de la vitesse longitudinale moyennée (position la plus amont et avale du choc).* $M_\infty = 0.73$, $R_e = 3 \times 10^6$ *et* $\alpha = 3.5$. 14
3.8 *La grandeur de la vitesse u et phase du mode propre instable. Résultats obtenus pour le profil NACA*0012 *avec les conditions aérodynamiques :* $M = 0.76$, $R_e = 10^7$ *et* $\alpha = 3.2$ *[38]* 16
3.9 *Les modes propres pour* $M = 0.76$, $R_e = 10^7$ *et* $\alpha = 3.0$, 3.1 *et* 3.2 *[38]* . 17
3.10 *Principe de la stratégie de la thèse* 23

4.1 *Schéma de discrétisation pour la méthode des volumes finis* 28
4.2 *Description des cellules pour l'évaluation du flux de Roe sur l'interface* $\Sigma_{i+\frac{1}{2}}$. 42
4.3 *La fonction* ψ *de la correction de Harten* 44
4.4 *Stencil pour le calcul de gradients aux centres des cellules* 47
4.5 *Types de frontière* 50
4.6 *État à la frontière du domaine* 51
4.7 *Conditions de raccord* 53
4.8 *Frontières adjacentes coïncidentes* 54
4.9 *Cellules de discrétisation au voisinage d'un raccord* 54

5.1 *Topologie du maillage* 61
5.2 *Représentation schématique d'un maillage de type C et aperçu de ces paramètres géométriques* 62
5.3 *Vue globale et partielle du domaine de calcul : Maillage de type C, monobloc* 63

5.4 *Maillage type C-H multidomaine bidimentionnel du profil OAT*15*A, présentant un culot* 64
5.5 *Plages d'isovaleurs du nombre de Mach pour le calcul d'écoulement stationnaire avec modèle Spalart-Allmaras. Incidence* $\alpha = 3.5$ *, Mach* $M = 0.73$ *et Reynolds* $Re = 3 \times 10^6$ 69
5.6 *Evolution de la norme L2 des résidus de l'équation Navier-Stokes en fonction des itérations au cours d'un calcul stationnaire avec le modèle de turbulence Spalart-Allmaras* 70
5.7 *Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de Mach pour le calcul d'écoulement stationnaire avec modèle* $(k - \omega)$ *de Wilcox. Incidence* $\alpha = 3.5$ *, Mach* $M = 0.73$ *et Reynolds* $Re = 3 \times 10^6$. 71
5.8 *Distribution de coefficient de pression* c_p *pour le calcul d'écoulement stationnaire avec le modèle* $(k - \omega)$ *de Wilcox. Incidence* $\alpha = 3.5$ *, Mach* $M = 0.73$ *et Reynolds* $Re = 3 \times 10^6$ *pointillés bleu :expérience de Jacquin [23]* 72
5.9 *Evolution de la norme L2 des résidus de l'équation Navier-Stokes en fonction des itérations au cours d'un calcul stationnaire avec le modèle de turbulence* $(k - \omega)$ *de Wilcox* 72
5.10 *Les iso-valeurs du nombre de Mach pour un calcul URANS avec le modèle Spalart-Allmaras, une incidence* $\alpha = 3.5$ *, un nombre de Mach à l'infini* $M = 0.73$ *et Reynolds* $Re = 3 \times 10^6$. 73
5.11 *Comparaison des lignes des iso-valeurs du nombre de Mach au cours d'un cycle de tremblement; modèle de Spalart-Allmara; incidence* $\alpha = 3.5$ *, Mach* $M = 0.73$ *et Reynolds* $Re = 3 \times 10^6$. 74
5.12 $(k - \omega)$ *de Wilcox : Visualisation du phénomène de tremblement dans l'écoulement transsonique autour d'un profil OAT*15*A de type C-H à* $M = 0.73$, $\alpha = 3.5$ *et* $Re = 3.10^6$ *: huit instants successifs au cours d'une période du phénomène : planche d'isovaleurs de nombre de Mach avec des lignes de courant proches de la paroi.* 75
5.13 *Lignes des isovaleurs de la vitesse :* (a) *la position la plus avale et* (b) *la position la plus amont du choc; calcul URANS avec le modèle* $(k - \omega)$ *de Wilcox.* $M = 0.73$, $\alpha = 3.5$ *et* $Re = 3.10^6$ 76

6.1 *Circuit du produit "matrice*vecteur" dans* elsA. 80
6.2 *Stencil à* 3 *points en mono-dimensionnel.* 82
6.3 *Grille du triplet des vecteurs correspondants à un stencil à* 3 *points.* . . . 84
6.4 *Stencil à* 5 *points en mono-dimensionnel.* 84
6.5 *Grille d'un Stencil à* 5 *points.* 86
6.6 *Cellule* Ω *dans un maillage structuré bidimensionnel.* 88
6.7 *Présentation d'une cellule de discrétisation* $\Omega_{i,j}$ *et de ses interfaces pour un maillage bidimensionnel.* 89
6.8 *Présentation des stencils de discrétisation pour les schémas d'ordre* 1 *et* 2. 90
6.9 *Stencil utilisé dans la linéarisation du flux de convection discret pour une cellule courante.* 92
6.10 *Stencil de linéarisation du flux convectif pour une une frontière min.* . . 94
6.11 *Stencil de linéarisation du flux convectif pour une frontière max.* 96
6.12 *Stencil de* 3 *points pour la linéarisation du flux diffusif.* 98
6.13 *Présentation des cellules adjacentes aux frontières.* 104
6.14 *Structure de la matrice jacobienne* $(\mathbf{J})_{cell}$ *sur une cellule* Ω_{cell} *du maillage.* 109

6.15 *Décomposition de la matrice jacobienne pour une cellule du maillage.* . . 110
6.16 *Forme matricielle de la jacobienne* (**J**) 110
6.17 *Stencil à neuf cellules qui contribuent au calcul de* ($\mathbf{J}_{i,j}$) *d'une cellule courante.* 111
6.18 *Structure matricielle de la jacobienne pour une cellule courante* 112
6.19 *Structure matricielle de la jacobienne avec condition de Raccord 1* 113
6.20 *Structure matricielle de la jacobienne avec une condition de raccord 2* . . 114

7.1 *Position du point* M_0. 118
7.2 *Cas d'un écoulement laminaire compressible pour un profil NACA*0012 *avec incidence* $\alpha = 10$, $M = 0.5$ *et* $Re = 689$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* ρ *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS).* 121
7.3 *Cas d'un écoulement laminaire compressible pour un profil NACA*0012 *avec incidence* $\alpha = 10$, $M = 0.5$ *et* $Re = 689$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρu) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)* 122
7.4 *Cas d'un écoulement laminaire compressible pour un profil NACA*0012 *avec incidence* $\alpha = 10$, $M = 0.5$ *et* $Re = 689$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρw) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)* 123
7.5 *Cas d'un écoulement laminaire compressible pour un profil NACA*0012 *avec incidence* $\alpha = 10$, $M = 0.5$ *et* $Re = 689$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρE) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)* 124
7.6 *Cas d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox pour un profil OAT*15*A avec incidence* $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ *et* $Re = 10^6$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* ρ *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)* 125
7.7 *Cas d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox pour un profil OAT*15*A avec incidence* $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ *et* $Re = 10^6$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρu) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)* 126
7.8 *Cas d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox pour un profil OAT*15*A avec incidence* $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ *et* $Re = 10^6$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρw) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)* 127
7.9 *Cas d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox pour un profil OAT*15*A avec incidence* $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ *et* $Re = 10^6$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρE) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)* 128
7.10 *Cas d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox pour un profil OAT*15*A avec incidence* $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ *et* $Re = 10^6$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρk) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)* 129
7.11 *Cas d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox pour un profil OAT*15*A avec incidence* $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ *et* $Re = 10^6$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* ($\rho\omega$) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)* 130

8.1 *Organigramme de calcul des modes propres par une approche linéarisée.* . 135
8.2 *Maillage de type C autour d'une aile NACA*0012 *pour un calcul laminaire compressible : (a) Vue global du maillage bidimensionnel, (b) détail du maillage dans la région proche paroi* 136
8.3 *Superposition des maillages* $Mesh_1$ *et* $Mesh_2$ 136
8.4 *Lignes de courant du champ de la vitesse longitudinale et du nombre de Mach autour d'un profil NACA*0012 *d'un écoulement laminaire compressible.* $M = 0.5$, $Re = 689$ *et* $\alpha = 10$ 137
8.5 *Spectre des modes propres pour le maillage* $Mesh_1$, *avec* $M = 0.5$, $Re = 689$ *et* $\alpha = 10$ 138
8.6 *Spectre des modes propres pour le maillage* $Mesh_2$, *avec* $M = 0.5$, $Re = 689$ *et incidence* $\alpha = 10$ 139
8.7 *Comparaison des spectres pour les deux maillages* $Mesh_1$ *et* $Mesh_2$ *; écoulement laminaire compressible, avec* $M = 0.5$, $Re = 689$ *et* $\alpha = 10$ 139
8.8 *Domaine d'instabilité pour un écoulement laminaire incompressible autour du profil NACA0012 [86].* 140
8.9 *Partie réelle des composantes de quantité de masse volumique et de la vitesse relatives au mode global instable* σ_5, *d'un écoulement laminaire compressible sur le maillage* $Mesh_1$ 145
8.10 *Parties réelles des composantes de vitesse longitudinale et la quantité d'énergie relatives au mode global instable* σ_5 *de l'écoulement laminaire compressible, sur le maillage* $Mesh_1$ 146
8.11 *Les iso-valeurs du rapport de viscosité* $\frac{\mu_t}{\mu}$ *selon plusieurs valeurs de Mach pour un calcul RANS d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox sur un profil OAT*15*A, avec* $Re = 3.10^6$ *et* $\alpha = 3.5$ 147
8.12 *Les lignes de courant autour du profil OAT*15*A pour un calcul RANS d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox, avec* $Re = 3.10^6$ *et* $\alpha = 3.5$ 148
8.13 *Les lignes des iso-valeurs des quatre nombres de Mach pour un calcul RANS d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox sur un profil OAT*15*A, avec* $3.Re = 10^6$ *et* $\alpha = 3.5$. 149
8.14 *Les contours des nombres de Mach pour un calcul RANS d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox sur un profil OAT*15*A, avec* $Re = 3.10^6$ *et* $\alpha = 3.5$. 150
8.15 *Spectre des Modes propres avec une approximation "*μ_t figé*" autour de* $\sigma_0 = (0, Str)$ *pour le profil OAT*15*A avec incidence* $\alpha = 3.5$ *et* $Re = 3.10^6$. 150
8.16 *Approximation "*μ_t figé*" : Valeurs réelles des composantes* $(\widehat{\rho})$ *du vecteur propre associé à* $\sigma = (0.005149, 0.062233)$ *le mode propre le plus instable autour du profil OAT*15*A, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$. 151
8.17 *Approximation "*μ_t figé*" : Valeurs réelles des composantes* $(\widehat{\rho u})$ *du vecteur propre associé à* $\sigma = (0.005149, 0.062233)$ *le mode propre le plus instabe autour du profil OAT*15*A, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$. 152
8.18 *Approximation "*μ_t figé*" : Valeurs réelles des composantes* $(\widehat{\rho w})$ *du vecteur propre associé à* $\sigma = (0.005149, 0.062233)$ *le mode propre le plus instabe autour du profil OAT*15*A, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$. 153
8.19 *Approximation "*μ_t figé*" : Valeurs réelles des composantes* $(\widehat{\rho E})$ *du vecteur propre associé à* $\sigma = (0.005149, 0.062233)$ *le mode propre le plus instabe autour du profil OAT*15*A, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$. 154

8.20 *Spectre des Modes propres sans l'approximation "μ_t* figé *" autour de* $\sigma_0 = (0, Str)$ *pour le profil* $OAT15A$ *avec incidence* $\alpha = 3.5$ *et* $Re = 3.10^6$. . . 155
8.21 *Approximation "μ_t* figé *" : Valeurs réelles des composantes de* $(\widehat{\rho})$ *associées à* $\sigma = (0.061144, 0.064749)$ *le mode propre le plus instable autour du profil* $OAT15A$, *avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$. 156
8.22 *Approximation "μ_t* figé *" : Valeurs réelles des composantes de la vitesse* $(\widehat{\rho u})$ *associées à* $\sigma = (0.061144, 0.064749)$ *le mode propre le plus instabe autour du profil* $OAT15A$, *avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$. 157
8.23 *Approximation "μ_t* figé *" : Valeurs réelles des composantes de la vitesse longitudinale* $(\widehat{\rho w})$ *associées à* $\sigma = (0.061144, 0.064749)$ *le mode propre le plus instable autour du profil* $OAT15A$, *avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$. . . 158
8.24 *Approximation "μ_t* figé *" : Valeurs réelles des composantes de l'énergie* $(\widehat{\rho E})$ *associées à* $\sigma = (0.061144, 0.064749)$ *le mode propre le plus instable autour du profil* $OAT15A$, *avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$. 159
8.25 *Sans l'approximation "μ_t* figé *" : Valeurs réelles des composantes turbulentes* $(\widehat{\rho k})$ *et* $(\widehat{\rho\omega})$ *associées à* $\sigma = (0.061144, 0.064749)$ *le mode propre le plus instable autour du profil* $OAT15A$, *avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$. . . 160

Notations

$\mathbf{W} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E, \rho k, \rho\omega)^t$	Champ aérodynamique du champ turbulent
$\mathbf{U} = (u, v, w)^t$	Composantes du vecteur vitesse instantané
$P = (\rho, u, v, w, p)^t$	Variable primitive
ρ	Masse volumique du fluide
$\mathbf{q}$	Vecteur flux de chaleur
μ	Viscosité dynamique
μ_t	Viscosité dynamique turbulente
k	Energie cinétique turbulente moyenne
ω	Taux spécifique de dissipation
p	Pression
T	Température
e, E	Énergie du gaz, énergie totale
t, T	Temps
H	Enthalpie totale
τ	tenseur des contraintes visqueuses
$\mathbf{P}$	Terme de production
$Prod_6$ et $Prod_7$	Composantes du terme de production
$Dest_6$ et $Dest_7$	Composantes du terme de la destruction du terme source
Ω	Cellule d'un maillage
$\mathcal{V}_\Omega$	volume d'une cellule Ω
$\mathcal{S} = (\mathcal{S}^x, \mathcal{S}^y, \mathcal{S}^z)^t$	Composantes de vecteur surface
$n = (n_x, n_y, n_z)^t$	Vecteur normal unitaire
$\Sigma_{i+\frac{1}{2},j}$	Interface droite d'une cellule
Σ_b	Interface de bord
α	Incidence du profil en degré
c	Corde du profil
(i, j, k)	Indice du maillage
(x, y, z)	Composantes des directions du maillage
$\mathbf{R}$	Résidus discret
$\mathbf{R}^{mf}$	Résidus discret du champ moyen
$\mathbf{R}^{tur}$	Résidus discret du champ turbulent
$\mathbf{F}^c, \mathbf{F}^{c_t}$	Flux convectif, flux convectif turbulent
$\mathbf{F}^v, \mathbf{F}^{v_t}$	Flux visqueux, flux visqueux turbulent
T^{source}	Terme source
$\mathbf{J}$	Jacobien

Première partie

Introduction

2 Introduction

La plupart des applications en dynamique des fluides rencontrent ou génèrent des écoulements instationnaires. Le tremblement, par exemple, est un phénomène que l'on peut relever sur des profils d'aile d'avion en régime transsonique et qui se caractérise par une oscillation du choc sur le profil.
Si, dans le meilleur des cas, la présence de ces instationnarités se trouve être sans conséquence sur le comportement mécanique du système, elles ont majoritairement des effets indésirables. De ce fait, plusieurs écoulements du même type font l'objet d'un grand nombre d'études, le plus souvent numériques ou expérimentales, pour tenter de comprendre et de caractériser les phénomènes mis en jeu.

2.1 Enjeu industriel et motivation

Le terme de tremblement regroupe, de manière générale, toute réponse d'une structure à une excitation d'origine aérodynamique, causée le plus souvent par un décollement et crée par un écoulement fortement instationnaire. Cette excitation se caractérise par de fortes fluctuations de pression qui peuvent engendrer des efforts surfaciques importants. En anglais, le tremblement est désigné par le terme *buffeting* et l'excitation aérodynamique par le terme *buffet*. Pour ce qui concerne l'aérodynamique externe, le tremblement le plus classique est celui qui peut être observé à l'extrados d'une voilure tridimensionnelle, pour des conditions de vol à coefficient de portance ou à nombre de Mach élevé, ou bien lors de manoeuvres.

En pratique, ce tremblement d'extrados de voilure limite les conditions opérationnelles de vol d'un avion en terme de vitesse, de nombre de Mach et de portance. Il est donc important d'essayer de repousser les limites du tremblement et de le contrôler, en jouant sur la cause (excitation aérodynamique) et non sur la conséquence (réponse vibratoire de la structure). Sa prévision et son contrôle, dès la phase de conception d'un avion, prennent de plus en plus d'importance dans l'objectif d'optimiser les performances de l'avion et de contrôler les écoulements afin d'avoir à chaque condition de vol un écoulement optimal. De plus, avec l'apparition de nouveaux matériaux pour l'aéronautique, les voilures d'avions sont bien plus "souple" et les vibrations induites par le phénomène de tremblement peuvent "accrocher" des modes propres de la structure et entraîner le phénomène de flottement.

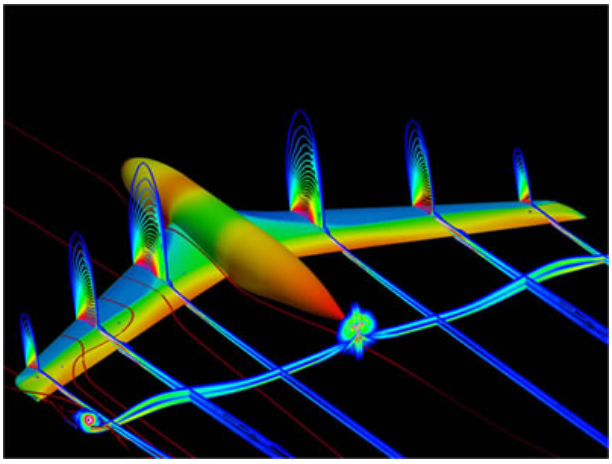
Les performances actuelles d'un avion en croisière sont en partie liées à celles lors des manoeuvres puisque des marges sont imposées, par exemple pour le c_z de vol de croisière par rapport à celui d'apparition du tremblement est de 30%. De fait, le contrôle du tremblement sur un avion de transport moderne améliorera les performances de

l'avion et offrira plus de souplesse pour la conception des formes et de la structure de l'avion. En effet, repousser les limites d'apparition du tremblement devrait permettre de diminuer la surface de la voilure.
On comprend bien alors les enjeux pour l'industrie aéronautique et l'importance stratégique de contrôler le tremblement, ce qui conduit à proposer cette thèse dans le but d'effectuer l'analyse de la dynamique de l'écoulement afin de préparer les premiers pas vers la démonstration du contrôle.
Le domaine du vol d'un avion de transport est actuellement limité dans le plan Mach-incidence par le phénomène de tremblement de voilure. Pour des nombres de Mach de l'ordre de 0.8 et des incidences élevées, le choc situé sur l'extrados de l'aile se met subitement à osciller. Ceci provoque des vibrations nuisibles à la structure. Des problèmes de fatigue en résultent, ce qui augmente d'une manière considérable le coût de maintenance. On souhaite éviter la fatigue rapide des structures et leur destruction en excitant au mieux les instabilités. On cherche à déterminer les acteurs responsables de ces instabilités afin d'étudier leurs dynamiques et chercher les moyens efficaces pour les contrôler.

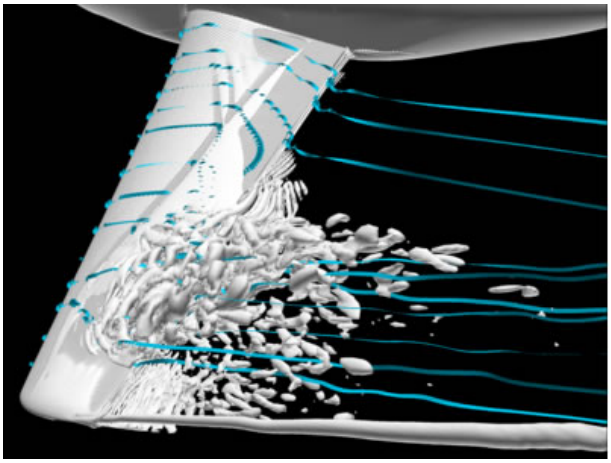
2.2 Objectif et organisation du manuscrit

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le cadre général de la simulation d'écoulements transsoniques instationnaires. La simulation numérique des écoulements turbulents est un excellent outil aussi bien pour essayer de mieux comprendre les mécanismes physiques que pour la conception et le développement dans l'industrie. Son utilisation courante a été rendue possible par le progrès réalisé dans le domaine de la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides et surtout par l'explosion des moyens de calcul. Aujourd'hui, la simulation numérique est un véritable complément aux études expérimentales et permet de limiter le nombre d'essais en soufflerie, entraînant une réduction des coûts et des délais de conception, et constituant ainsi un enjeu économique majeur. Actuellement, les applications concernent des géométries de plus en plus proches des configurations réelles (avion complet, moteur, tuyère...) et qui sont capable de mettre en jeu des phénomènes complexes : problèmes de représentativité des calculs par rapport à la physique à reproduire, problèmes de précision, robustesse et coût de calcul.

Dans le cadre des simulations des écoulements transsoniques soumis au phénomène de tremblement, L'ONERA possède une excellente expérience et une banque de données très importantes. Dans la figure (2.1), on montre une des simulations réalisée par Brunet (ingénieur au DAAP à l'ONERA) sur un écoulement transsonique. Les effets des instationnarités sont bien visibles. Par conséquent, il apparaît intéressant d'approfondir l'étude des instabilités qu'on vient d'identifier à travers une nouvelle approche, notamment dans le but de préparer le terrain pour les contrôler. De ce fait, ce mémoire s'orientera vers une analyse de stabilité linéaire globale d'un écoulement bidimensionnel compressible turbulent soumis à un phénomène de tremblement. En particulier, la démarche de cette thèse s'inspirera des travaux effectués par Crouch [38], qui résume les différents points de vue qui peuvent être adoptés lors d'une étude de stabilité de l'écoulement.



(a)



(b)

FIGURE 2.1 – *(a)Tourbillons engendrés dans le sillage de l'avion et liés à l'apparition du tremblement (Calcul* elsA*). (b) Calcul de l'écoulement transsonique autour du fuselage et des ailes en phase de vol de l'avion générique Cat3D, V.Brunet / ONERA*

L'objectif de cette thèse, consiste à développer un outil numérique permettant d'étudier la stabilité globale d'un écoulement compressible turbulent pour des géométries quelconques. Ce travail est essentiellement numérique, il mettra en oeuvre l'implémentation du code dans le logiciel *elsA* de l'ONERA, pour d'une part calculer le champ de base et d'autre part, la réalisation de l'extraction explicite de la jacobienne des équations RANS linéarisées. Cet objectif, a pour but de prouver qu'on est capable de retrouver les acteurs responsables du phénomène de tremblement qui apparaît à l'extrados d'une voilure bidimensionnelle. Il s'agit par conséquent d'étudier le phénomène de tremblement dont l'origine est l'instabilité aérodynamique qui apparaît à l'extrados de la voilure, par augmentation soit de l'angle d'incidence soit du nombre de Mach.
Afin de construire l'approche globale ainsi définie, la présente thèse se structure en cinq parties.
Dans la première partie, on présente l'introduction et le contexte général du cadre de cette thèse, elle se décompose en deux chapitres. Dans le chapitre 3, on replace cette étude dans son contexte en présentant un aperçu des études antérieures. Les études théoriques, expérimentales et numériques des écoulements bidimensionnels soumis au phénomène de tremblement vont être citées, en particulier l'approche de Crouch [38]

pour identifier les instabilités. On décrira également, l'approche de l'analyse de stabilité linéaire, qui représente l'outil fondamental pour étudier la dynamique de l'écoulement considéré. Par conséquent, on s'intéressera à exposer la stratégie optée dans cette thèse.

La deuxième partie, intitulée "calcul non-linéaire", est composée de deux chapitres 4 et 5. Le chapitre 4 va être dédié à la description des outils numériques dans le cadre non linéaire des équations de Navier-Stokes. Des rappels en compressible et en modélisation de la turbulence seront détaillés, car le modèle du fluide parfait compressible turbulent est la base de cette étude. Les choix numériques pour la résolution des équations de Navier-Stokes en utilisant une méthode des volumes finis, seront exposés. Des exemples de calcul stationnaire et instationnaire sur profil d'un écoulement compressible turbulent seront présentés dans le chapitre 5. En revanche, un seul modèle de turbulence va être retenu pour la suite des travaux.

Dans la troisième partie, la démarche suivie consiste à utiliser une approche linéarisée des équations de Navier-Stokes. Dans le chapitre 6, on fait part d'une description technique de la stratégie d'extraction de la matrice jacobienne du logiciel *elsA*. On détaillera la linéarisation des équations de Navier-Stokes et donnera la composition et la construction de la matrice jacobienne. Il est important de signaler que la tâche du développement du code est très conséquente. La validation de l'extraction de cette matrice fera l'objet du chapitre 7. Cette validation est réalisée par comparaison entre deux méthodes d'inversion (directe et itérative).

La quatrième partie sera consacrée au calcul des modes globaux. Une brève description des algorithmes de résolution en analyse de stabilité sera présentée. Le cas test d'un écoulement laminaire compressible à bas Reynolds sera également étudié. Ainsi, deux cas des modes globaux d'un écoulement transsonique soumis au phénomène de tremblement autour d'un profil seront examiné (avec ou sans l'hypothèse "μ_t *figée*").

Pour finir, la dernière partie sera dédiée à la présentation des conclusions et des éventuelles perspectives. Des directives pour l'utilisation de ce travail seront exposées et des futures voies de recherches sont identifiées telle que la réalisation du contrôle en boucle fermé du phénomène, dans un futur proche.

3 Phénomène de tremblement

Le régime transsonique est caractérisé par d'importants effets de compressibilité de l'écoulement. Le phénomène de tremblement peut être défini comme la réponse d'une structure à une excitation aérodynamique due à un décollement. Pour un profil d'ail d'avion, un mouvement périodique auto-entretenu par l'onde de choc peut prendre naissance sous certaines conditions précise d'angle d'attaque et de nombre de Mach. En effet, la cause du phénomène est aérodynamique, son apparition étant liée à la combinaison de certaines valeurs. Cette instabilité d'origine purement aérodynamique est connue sous le nom de tremblement transsonique. Cette situation est pénalisante pour la manoeuvrabilité de l'avion, le confort des passagers et pour la durée de vie de l'aile.
Plusieurs travaux de recherche visent d'une part à améliorer la connaissance du tremblement transsonique, ses conditions d'apparition et son contrôle grâce à des simulations numériques ou par des études expérimentales.

Ce premier chapitre vise à replacer les études menées par cette thèse dans leur contexte, afin de justifier au lecteur l'intérêt de l'étude sur le problème des oscillations de choc en bidimensionnelle. Pour cela, on s'attachera à aborder de manière synthétique les différents travaux antérieurs selon trois volets principaux.
On présentera un état d'art synthétique des études sur le tremblement transsonique, en se concentrant sur celles qui ont été utiles aux travaux de cette thèse.
Dans un premier temps, on rappellera brièvement la multiplicité des manifestations du phénomène de tremblement pour se recentrer, dans la suite, sur le tremblement de l'extrados de voilure.
Dans un second temps, les travaux théoriques qui concernent la caractérisation du tremblement sont présentés, afin de décrire et de comprendre le phénomène, et tout particulièrement son origine.
Les travaux expérimentaux qui peuvent être utiles pour les simulations numériques réalisées dans cette thèse sont aussi présentées.
Ensuite, les travaux consacrés à la simulation numérique d'un écoulement bidimensionnel, autour d'un profil d'aile soumis au phénomène de tremblement, sont alors introduits. On analysera les enseignements qui peuvent en être tirés pour mener à bien les propres simulations de cette thèse.
On abordera ensuite une introduction sur l'historique des instabilités globales, sur l'étude de l'analyse de stabilité et de sa procédure numérique.
La présentation proposée dans ce chapitre est essentiellement bibliographique. Les contributions de cette thèse à l'analyse physique du phénomène de tremblement seront détaillées par la suite dans ce manuscrit et ne sont qu'évoquées brièvement dans un premier temps.

3.1 Caractérisation et origine du tremblement

3.1.1 Historique et définition phénoménologique

Après l'accident d'un Junkers monoplan en 1975, la notion du tremblement est apparu. En effet, le bureau d'investigation britannique a attribué la rupture à une fatigue de la structure ; l'empennage horizontal aurait subi une excitation provoquée par le sillage tourbillonnaire de la voilure, la turbulence n'ayant fait qu'accroître le niveau de fluctuation au cours de l'accident.
La réaction d'une structure subissant une excitation par un écoulement fortement instationnaire est couramment appelé phénomène de tremblement. On peut observer le phénomène de tremblement sur plusieurs structures différentes comme les fusées, les entrées d'air, les étages de compresseur, les tuyères d'échappement, les voilures...
Pour ce qui concerne l'aérodynamique externe, il existe plusieurs formes de tremblement comme le tremblement de configuration ou le tremblement géométrique. On s'intéressera en particulier dans cette étude, au phénomène de tremblement dit "classique", qui se développe sur l'extrados de voilure en régime d'écoulement transsonique. Il peut être observé pour des conditions de vol à portance ou nombre de Mach élevés, ou lors de manoeuvres (atterrissage ou décollage). L'instationnarité est provoquée par une interaction instable entre onde de choc et la couche limite, initiant une zone qui peut s'étendre du pied de choc au bord de fuite ; on assiste alors à un mouvement périodique du choc et à de fortes fluctuations de pression dans la zone décollée.
De plus, ces fortes fluctuations de pression sont particulièrement sévères pour l'avion moderne équipé d'ailes à profil mince supercritique [1] et peuvent être indésirables d'un point de vue manoeuvrabilité de l'avion. Néanmoins, le tremblement d'extrados de voilure n'est pas dangereux car il est non destructif, mais il conditionne les limites opérationnelles du vol en terme de vitesse et de portance.

Dans le cadre de cette étude, on procède à des simplifications par rapport à une voilure réelle, tridimensionnelle ($3D$) et on traite uniquement le phénomène bidimensionnel ($2D$) en considérant un profil supercritique, représentatif d'une section de voilure d'avion de transport moderne. Sachant que le phénomène $2D$ est complètement différent que celui rencontré sur une voilure réelle $3D$, les oscillations étant d'amplitudes plus importantes et de fréquence bien définie. Cependant, la physique de l'écoulement reste $3D$ du fait de la présence de zones décollées [13].

3.1.2 Description du phénomène, les études théoriques et expérimentales

Durant les années 70, le phénomène de tremblement a été étudié par une approche aéroélastique. Le présent état d'art commence après cette période. Le tremblement en régime transsonique met en jeu des phénomènes physiques complexes dont la description proposée dans cette section ne fournit qu'un bref aperçu. On s'est inspiré de l'étude bibliographique de Alfano [3].

1. Une voilure supercritique est un type de voilure dont la vitesse critique est plus grande que pour une voilure conventionnelle. Au-delà de cette vitesse, l'écoulement d'air sur la partie supérieure de l'aile atteint localement la vitesse du son ce qui produit une trainée d'onde

3.1.2.1 Les études théoriques

Pearcey *et al* . [32] classent les instationnarités d'un écoulement transsonique sur profil en deux grandes catégories, comme le montre la figure (3.1) :

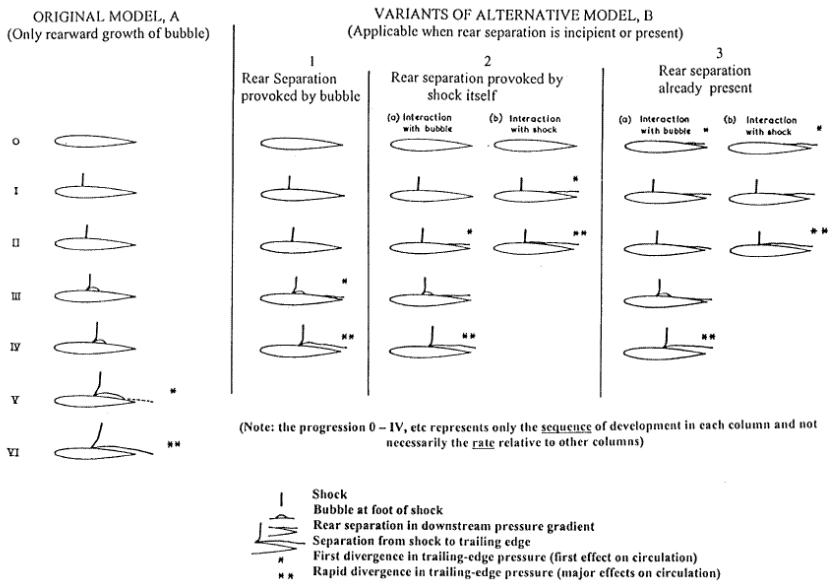


FIGURE 3.1 – *Différentes topologies d'écoulement transsonique soumis au phénomène de tremblement selon Pearcey [32]*

D'une part, la première catégorie d'écoulement de type A, est réalisable que lorsque le décollement du pied du choc croît d'une manière progressive jusqu'à fusionner avec le sillage du profil. D'autre part, la catégorie des écoulements de type B, représente les écoulements dont le décollement de bord de fuite coexiste avec le décollement du pied du choc.

Dans cette dernière catégorie, les mêmes auteurs distinguent des sous-catégories de topologies d'écoulement, selon que le décollement de bord de fuite soit provoqué par le bulbe de décollement de pied de choc (B1), par le choc lui-même (B2), ou bien si ce décollement de bord de fuite est présent avant la formation du choc (B3). En revanche, toutes ces classements topologiques d'un écoulement soumis au phénomène de tremblement, suppose que les oscillations auto-entretenues du système onde de choc et couche limite apparaissent seulement si la zone d'écoulement décollé est présente du pied de choc au bord de fuite. Pour cela, Tijdeman [80] a introduit une nouvelle classification de l'écoulement transsonique soumis au tremblement. Cette classification dépend de l'instationnarité de l'écoulement et non de sa topologie comme indiqué dans les travaux de Pearcey et *al* [32]. En effet, l'étude des oscillations de choc sur le profil NACA64A006, a permis à Tijdeman de classer ces oscillations en trois catégories comme l'indique la figure (3.2) :

– Les oscillations de type A : l'onde de choc reste présente tout au long du cycle d'oscillations, avec des variations d'intensité et de localisation ;

– Les oscillations type B : l'onde de choc disparaît d'une manière discontinue, surtout quand il remonte vers le bord d'attaque ;

– Les oscillations de type C : l' onde de choc se propage en amont du bord d'attaque.

Dans la suite de ce mémoire, on s'intéressera principalement des oscillations de type A suivant la classification de Tijdeman.

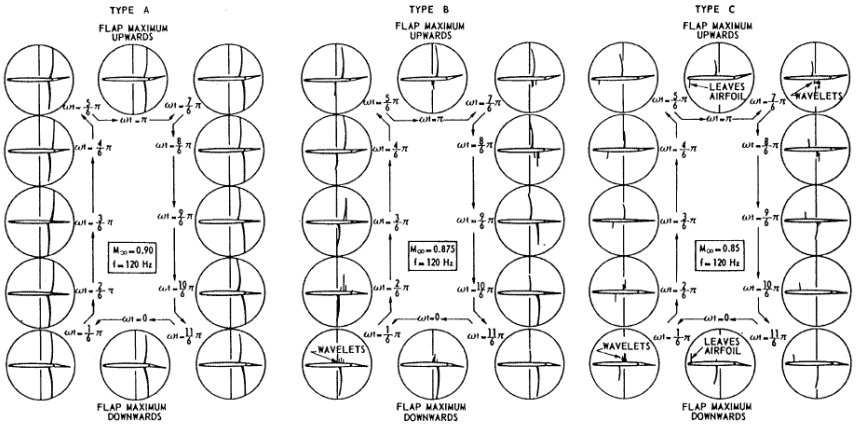


FIGURE 3.2 – *Les trois catégories de configurations d'écoulements transsoniques instationnaires selon Tijdeman [80]*

Les mécanismes fondamentaux du phénomène de tremblement semblent être globalement les mêmes dans les cas laminaire et turbulent comme le montrent entre autres ces différentes études [21] [6]. Les principales différences apparaissent au niveau des seuils de déclenchement de cette instationnarité ce qui peut en partie s'expliquer par la nature des couches limites, laminaires ou turbulentes. La fréquence caractéristique de cette instationnarité semble également sensible à la valeur du nombre de Reynolds. Dans le cas transsonique, le saut de pression nécessaire pour faire décoller une couche limite turbulente est significativement plus important que pour une couche limite laminaire.

Selon McDevitt et al. [15], le phénomène de battement de choc s'explique par une déformation fictive du profil d'aile sous l'effet de l'épaississement alternatif des couches limites. Plus précisément, lorsque le nombre de Mach sur la surface supérieure en amont du choc dépasse la valeur critique provoquant une séparation au pied du choc alors que le décollement sur la surface inférieure est proche du bord de fuite, l'épaisseur effective du profil n'est plus symétrique et l'obstacle équivalent présente une courbure négative, ce qui a tendance à ralentir l'écoulement sur la face supérieure et donc à supprimer le décollement induit par le choc. Simultanément, l'accélération de l'écoulement sur la surface inférieure conduit à la valeur limite du nombre Mach pour l'apparition d'un décollement au pied du choc sur cette surface. L'oscillation est ainsi entretenue. Ce phénomène est illustré sur la figure (3.4) où il apparaît que le ralentissement de l'écoulement suite à une extension de la zone décollée en aval du choc s'accompagne d'un déplacement de ce dernier vers l'amont.
L'apparition d'instationnarités sur un profil d'aile est généralement mise en évidence par une augmentation de l'incidence ou du nombre de Mach (figure (3.3)).

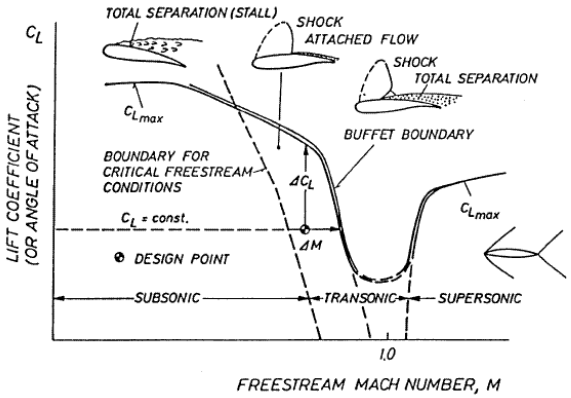


FIGURE 3.3 – *Illustration de l'évolution du coefficient de portance maximal en fonction du nombre de Mach et de l'incidence. Extrait de Lee [43]*

Dussauge et *al.*[40] rappellent dans leurs travaux que les mouvements du choc sont généralement présents à des fréquences bien inférieures aux fréquences des structures turbulentes présentes dans les couche-limites en amont du choc ou en aval après le recollement. Il est donc légitime de se demander d'où viennent ces basses fréquences.
Le mouvement du choc autour de la position x_s (figure (3.4)) génère des ondes de pres-

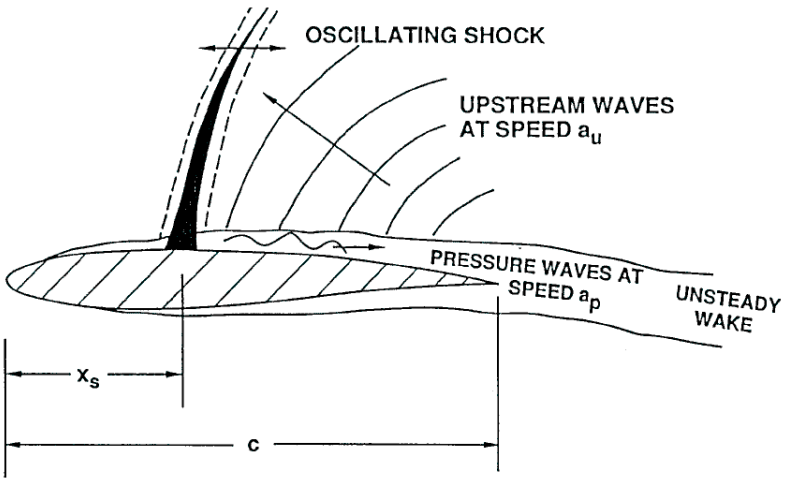


FIGURE 3.4 – *Mécanisme d'oscillations auto-entretenues du choc, d'après Lee [43]*

sion qui se propagent vers le bord de fuite, dans la couche de limite décollée, à une vitesse a_p. En impactant le bord de fuite, ces perturbations génèrent des ondes qui se propagent vers le choc à une vitesse a_u, dans la partie non-visqueuse de l'écoulement. Ainsi, de manière globale, il existe deux phases principales : une phase "fluide-parfait" avec une propagation de l'information entre le bord de fuite et le choc, et une phase "visqueuse" pour une propagation dite de retour entre le choc et le bord de fuite, ce qui permet de créer une boucle fermée. Néanmoins, la première phase est considérée comme primordiale car elle permet d'alimenter le choc en énergie, via un couplage avec les ondes acoustiques.

D'après Lee [43], le phénomène serait essentiellement dirigé par l'interaction entre le choc et la couche limite. L'auteur a également proposé un mécanisme physique pour le tremblement lequel est communément accepté dans la littérature. D'après son modèle, des ondes de pression sont dû au mouvement du choc et se propagent vers l'aval. Dès qu'elles impactent le bord de fuite, des nouvelles ondes sont générées et dirigées vers l'amont, lesquelles interagissent avec le choc, en lui apportant l'énergie pour maintenir l'oscillation (figure (3.4)). Lee [43] réunit en particulier diverses stratégie de contrôle actif ou passif qui peuvent être mises en oeuvre pour limiter le phénomène de tremblement.

3.1.2.2 Les études expérimentales

Les études expérimentales ont pour objectif de constituer une base de données permettant de valider les méthodes de simulation numériques stationnaires et instationnaires.
Plusieurs expériences ont été menées sur des profils différents (lentille convexe, profil supercritique....).
Pour cette étude, le choix de la géométrie s'est orienté vers les profils bidimensionnels conventionnels (NACA0012) et supercritiques (OAT15A) .
Le profil NACA0012 est un profil classique très connu par les aérodynamiciens pour mettre en évidence le phénomène de tremblement. Les travaux expérimentaux de référence pour cette configuration sont ceux de McDevitt [15]. Dans le cas de ce profil, un décollement apparaît tout d'abord sous la forme d'un bulbe à la base du choc qui grossit progressivement avec une augmentation du nombre de Mach ou de l'angle d'incidence ; le tremblement se met finalement en place lorsque le décollement s'étend du choc jusqu'au bord de fuite. Pour $Re = 9.9 \times 10^6$ et $M = 0.77$, l'expérience [15] prédit une entrée en tremblement dès une incidence $\alpha = 2.5$.
L'autre profil supercritique OAT15A est représentatif d'une section d'avion moderne de type Airbus, sur lequel ONERA possède une forte expérience en conditions d'écoulement transsonique.
Lors des différentes campagnes d'essais [42] [23] [71], réalisées dans la soufflerie S3 transsonique de Meudon (figure (3.5)), le nombre de Mach M_∞, en entrée de veine d'essai, varie de 0.70 à 0.75 pour des conditions de pression et de température génératrices égales à 1 Pa et 300K. L'angle d'incidence de la maquette varie entre 1.36 à 3.91, la limite supérieure étant donnée par des contraintes mécaniques de déformation de parois haute et basse.

Plusieurs méthodes de mesures ont été déployées dans ces campagnes d'essais, comme les visualisations pariétales, visualisations par strioscopie, les mesures pariétales de pression et les mesures par vélocimétrie laser à franges.
La description du phénomène de tremblement, tel qu'il est caractérisé dans cette étude expérimentale, à travers des aspects qualitatifs et quantitatifs, est utile à la fois à la compréhension et à la prévision de ce type d'écoulement.
Le domaine de tremblement a été exploré en faisant varier l'incidence α entre 2.5 et 3.91, pour un nombre de Mach $M_\infty = 0.73$. Après exploration [23], l'entrée en tremblement est estimée à une incidence $\alpha = 3.25$, avec un régime pleinement établi pour $\alpha = 3.5$. Cette dernière incidence constitue alors la configuration principale, à la fois pour les mesures laser et pour les études numériques.
D'autre part, l'analyse détaillée des signaux de pression [71] [23], a permis d'examiner l'évolution des fréquences du signal au cours du temps. Dans cette étude la fréquence de

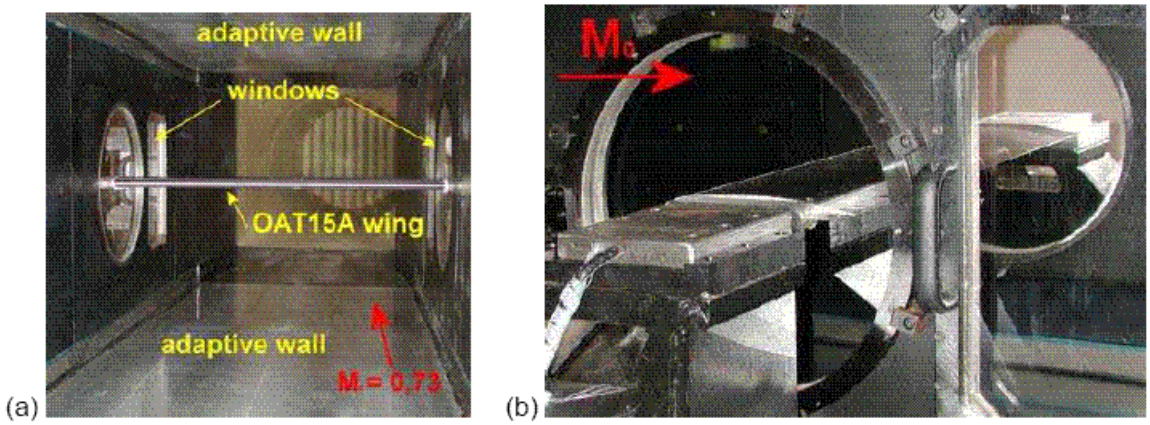


FIGURE 3.5 – *Visualisation du profil supercritique OAT*15*A dans la soufflerie S3 de Meudon [23]*

$70Hz$ a été observée correspondant à $\alpha = 3.5$ et $M_\infty = 0.70$.

Les visualisations par strioscopie [2] (figure(3.6)) apportent une description qualitative de l'oscillation de choc en mettant en évidence les principaux phénomènes mis en jeu : onde de pression causée par la transition, onde de choc (milieu), décollement et couche cisaillée (derrière le choc). La période T est décomposée en huit instants.
Entre $\frac{T}{8}$ et $\frac{4T}{8}$, le choc se déplace vers l'aval alors qu'il remonte l'écoulement de$\frac{5T}{8}$ à $\frac{8T}{8}$. Sachant qu' à $\frac{T}{8}$, le choc est à sa position la plus amont, tandis qu'à $\frac{5T}{8}$, le choc est à sa position la plus avale.
Ces visualisations mettent en évidence l'onde de choc, l'interaction onde de choc couche-limite ainsi que le décollement de la couche limite. La succession des images illustre le mouvement d'ensemble des phénomènes.

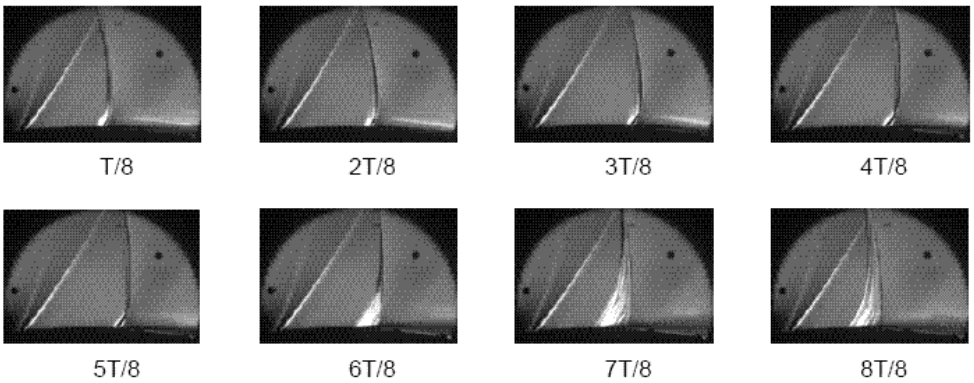


FIGURE 3.6 – *Visualisation du champ aérodynamique par strioscopie pour le profil OAT*15*A à la soufflerie S3 de Meudon.* $M = 0.73$, $\alpha = 3.5$ *[23]*

2. Une méthode qui permet de visualiser et de photographier l'écoulement d'un fluide dans l'air (très utilisée dans les essais en soufflerie).

Les mesures par vélocimétrie laser à franges réalisées par Jacquin et *al* [23] obtenues pour le couple $\alpha = 3.5$ et $M_\infty = 0.70$, permettent de confirmer les observations précédentes, surtout sur la nature de la couche de limite à l'aval du choc. La figure(3.7) montre les cartographies générales de la moyenne de phase de la vitesse longitudinale et l'influence du battement de choc et du décollement sur le sillage.
Concernant la figure(3.7) ; à l'instant $\frac{T}{20}$ le choc est dans sa position la plus amont. Quand le choc descend l'écoulement, les décollement diminue jusqu'à disparaître (à mi-parcours de la demi-période). Pour l'instant $\frac{10T}{20}$, le choc est dans sa position la plus avale et aucune recirculation n'est perçu entre le choc et le bord de fuite. Ensuite, le mouvement du choc vers le bord d'attaque conduit à nouveau au développement de la zone décollée.

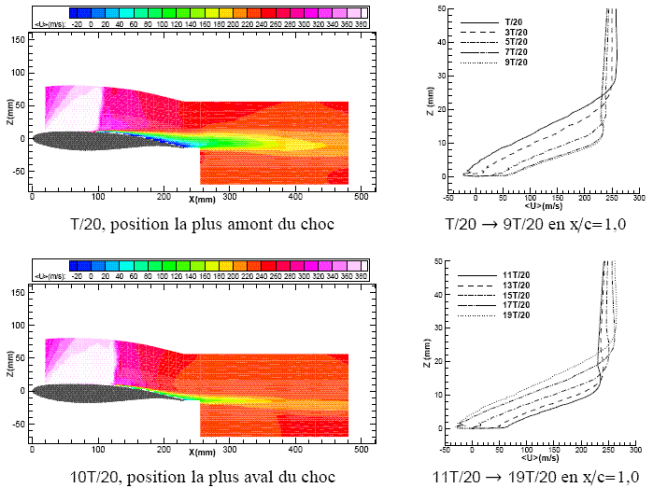


FIGURE 3.7 – *Visualisations de la vitesse longitudinale moyennée (position la plus amont et avale du choc).* $M_\infty = 0.73$, $R_e = 3 \times 10^6$ *et* $\alpha = 3.5$.

Les nombreuses campagnes d'essais, définies par l'ONERA dans différentes souffleries, ont eu pour objectifs non seulement de comprendre les mécanismes d'action en jeu, mais également de générer des bases de données exploitables par les numériciens. De fait, plusieurs simulations numériques des écoulements turbulents instationnaires en entrée de régime de tremblement ou en tremblement établi ont été réalisées à l'ONERA, faisant appel aux résolutions des équations de Navier-Stokes de type "LES", "RANS", ou "URANS", aux méthodes hybrides "URANS/LES"... Une synthèse des études numériques montre que ces différents méthodes permettent d'obtenir une bonne prévision du phénomène de tremblement avec plus ou moins de précision, compte tenu des limitations que chacune d'entre elles comportent.

Maintenant, avec le développement des méthodes numériques, on dispose de nouveaux outils de prévision, qui semblent offrir plus de souplesse que les campagnes expérimentales. Un ensemble d'études fondées sur des simulations numériques pour des écoulements compressibles autour d'ailes à grands nombre de Reynolds, en particulier en régime transsonique, est présenté dans l'ouvrage de synthèse de Dervieux et *al.* [1].
On propose dans la section suivante, de voir l'apport des simulations numériques sur

l'étude du phénomène de tremblement.

3.1.2.3 Les études numériques

On aborde maintenant une partie des travaux disponible dans la littérature qui est spécifiquement consacrée à la simulation numérique du phénomène de tremblement transsonique.
La simulation du phénomène de tremblement, nécessite la résolution des équations de Navier-Stokes. La non linéarité de ces équations annonce la multiplicité des échelles qui seront rencontrées dans l'écoulement, de nature imprédictible, dissipative et diffusive.

Les études numériques permettent d'obtenir une prévision de phénomène de tremblement avec plus ou moins de précision, les schémas numériques à l'ordre deux sont plus recommandés. La fréquence est relativement bien reproduite, car les études théoriques et expérimentales, ont bien montré que la fréquence est bien liée à la géométrie du profil étudié.
D'autre part, il existe une forte dispersion sur la prévision des conditions d'entrée en tremblement : certaines approches numériques nécessitent un décalage en incidence ou en nombre de Mach pour déclencher le phénomène.

La simulation numérique du phénomène de tremblement transsonique a été réalisé par plusieurs auteurs. On propose de citer quelques auteurs :

- Reberga[62] qui a étudié pendant sa thèse le tremblement sur le profil $OAT15A - CA$ à l'aide du code de couplage $VIS15$ (développé par Girodroux-Lavigne et Le Balleur [53]).

- Les travaux de Mc Devitt [15], ou encore de Renaud [63] qui s'appuient sur le classique modèle algébrique de Baldwin-Lomax, pour effectuer des simulations de tremblement transsonique sur le profil NACA0012. Ils ont montré que ce modèle semble être suffisant pour accéder à des informations qualitatives sur les oscillations de choc auto-entretenues qui apparaissent pour ce profil.

- Les travaux de Renaud [63], Brunet [5], qui utilisent le modèle de turbulence Spalart-Allmaras. Concrètement, une simulation avec ce modèle, se fait prédire une entrée en tremblement tardive, ceci se traduit par le besoin d'augmenter l'incidence par rapport à l'expérience afin d'obtenir des oscillations de choc auto-entretenues.

Pour le cas du tremblement transsonique, on peut relever deux mécanismes possibles. Le premier serait un mécanisme en boucle fermée, traité par Lee [43].
Plusieurs auteurs ont travaillé sur les différents aspects de ce mécanisme, entre autre, les travaux numériques de Deck [12], qui utilise dans ce cas l'approche DES (*Detached Eddy Simulation*), consacrés à l'écoulement sur le profil OAT15A en régime de tremblement étudié expérimentalement par Jacquin et *al.* [42] ; semblent confirmer l'existence d'un bouclage aéroacoustique, en particulier en montrant que les ondes de perturbations allant vers l'amont ont pour origine l'impact de grosses structures tour-

billonnaires issues du décollement sur la partie extrados proche du bord de fuite du profil.

Le deuxième type de mécanisme avancé quant à l'origine du tremblement, est celui d'une instabilité globale de l'écoulement décollé et du sillage associé. On peut citer notamment les travaux de Crouch [38] qui se situent plus généralement dans la continuité des travaux sur les instabilités globales, dont une revue est donnée par Theofilis [78] . Le principe de la méthode utilisée par Crouch [38], est de calculer la

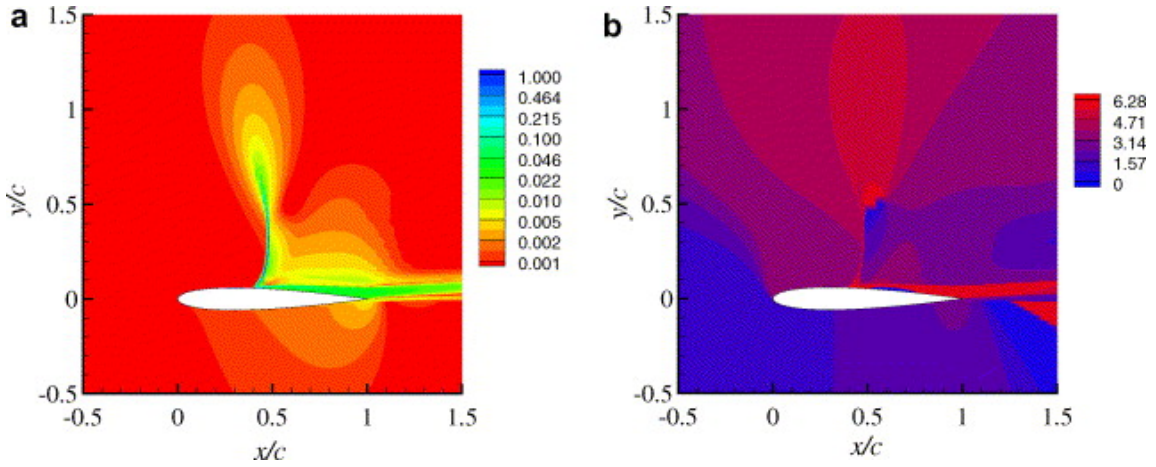


FIGURE 3.8 – *La grandeur de la vitesse u et phase du mode propre instable. Résultats obtenus pour le profil NACA*0012 *avec les conditions aérodynamiques :* $M = 0.76$, $R_e = 10^7$ *et* $\alpha = 3.2$ *[38]*

stabilité de l'écoulement représenté par un champ de base issu d'une simulation RANS. Ce calcul de stabilité consiste en l'écriture des équations de Navier-Stokes en petites perturbations avec des conditions aux limites homogènes à la frontière du domaine. Il cherche alors les solutions les plus instables de ce système d'équations aux perturbations, c'est-à-dire celles qui vont éloigner le plus la solution de la solution non perturbée. Ce type d'approche permet de savoir quand la solution devient instable en fonction de différents paramètres comme les nombres de Mach, de Reynolds et l'angle d'incidence.
Les résultats que Crouch [39] obtient sur la lentille bi-convexe d'épaisseur 18% montrent qu'il existe un angle d'incidence critique, les autres paramètres était fixés, pour lequel une bifurcation apparaît, la solution finale passe d'un état stationnaire à un état oscillatoire saturé. On retient que cette analyse de stabilité sur ce cas permet de retrouver la fréquence expérimentale principale de tremblement avec une erreur de l'ordre du pourcent.

D'autre part, Crouch a montré dans son article [38] qu'on peut étudier les instabilités d'un écoulement avec la théorie de la stabilité globale. Il présente la méthode d'obtention du champ de base dans le cas d'un nombre de Reynolds bas et dans le cas d'un haut nombre de Reynolds.
Dans le cas d'un tremblement transsonique, le nombre de Reynolds est de l'ordre de $Re = 10^7$, Crouch présente le mode instable et l'amplitude de la vitesse pour le profil NACA0012 (figure(3.8)).
Le spectre des modes propres en fonction de trois valeurs différentes d'incidence est représenté dans la figure (3.9) . En effet, les modes restent stables pour des incidences faibles et à partir de l'incidence $\alpha \approx 3.03$, on a l'apparition du premier mode instable.

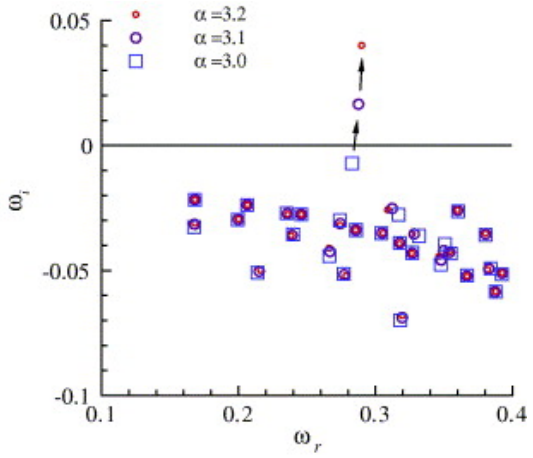


FIGURE 3.9 – *Les modes propres pour* $M = 0.76$, $R_e = 10^7$ *et* $\alpha = 3.0$, 3.1 *et* 3.2 *[38]*

Ainsi, la porte a été ouverte aux chercheurs pour étudier la stabilité des écoulements compressible à haut Reynolds.
Au commencement de cette thèse, l'hypothèse qui prévaut, est celle proposée par Crouch et qui consiste à attribuer l'origine du tremblement, à la présence d'un mode global instable.
Dans cette thèse, on s'est lancé dans l'exploration de cette voie.

Pour cela, on présentera dans la section suivante, la théorie de l'analyse de stabilité. Un aperçu de son historique et une description générale visant à décrire simplement l'usage, seront présentés.

3.2 Analyse de stabilité linéaire

La théorie de la stabilité a pour objectif la recherche des solutions à partir d'un écoulement de base. Autrement dit un écoulement déjà solution d'un problème considéré peut servir de base au développement d'une autre solution voire de plusieurs. Cet écoulement de base est dans beaucoup de cas un écoulement stationnaire. On parle de stabilité linaire dès lors que l'on cherche des solutions de faible amplitude appelées perturbations de l'écoulement de base. Comme ces perturbations sont petites, les termes quadratiques intervenant dans les équations de Navier-Stokes peuvent être négligés. Par conséquent le système d'équations restant est linéaire vis-à-vis de ces perturbations. Les solutions trouvées à ce système seront donc valables tant que leurs amplitudes resteront assez petites pour que la non-linéarité des équations de Navier-Stokes puisse être négligée. Selon les cas, les perturbations calculées peuvent croître et devenir non négligeables par rapport à l'écoulement de base ; allant même jusqu'à sa modification. En fonction des propriétés de l'écoulement de base, les perturbations sont cherchées sous la forme de modes normaux, c'est-à-dire une fonction d'amplitude inconnue que multiplie une dépendance exponentielle.

La théorie de la stabilité linéaire a été mise en place en 1904 dans le cadre de la résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld et a donné naissance aux fameuses ondes

de Tollmien-Schlichting [81]. L'écoulement de base dans ce cas est celui d'une couche limite d'une plaque plane. Etant donné les propriétés d'un tel écoulement de base, une approche locale de la stabilité linéaire a été utilisée. Mathématiquement, le caractère quasi-parallèle[3] de l'écoulement de base permet la recherche de fonctions d'amplitude ne dépendant que d'une variable.
A partir de cet exemple la théorie de stabilité linéaire en approche locale a été appliquée avec succès à des écoulements qui possèdent les mêmes propriétés de parallélisme. Jusque dans les années 90 seule cette approche locale de la stabilité linéaire a été utilisée. Cependant, la nécessité d'appliquer cette théorie à d'autres cas d'écoulements a conduit au développement d'une approche non locale de la théorie de la stabilité linéaire. Il ne s'agit pas d'une modification de la théorie, il s'agit surtout de rendre possible la résolution du système découlant de tout modèle choisi.
La première application a été faite par Tatsumi et Yoshimura [74], qui en 1990 ont mis en évidence les modes des instabilités de l'écoulement de Poiseuille en canal en section rectangulaire. On peut citer entre autres les travaux de Lin et Malik [45] concernant les écoulements de Hiemenz et les travaux de Theofilis en 2003 [77] traitant différents types d'écoulements dans un grand nombre de cas.

3.2.1 Approche globale de la stabilité

Huerre et *al* [54] ont classé en deux grandes catégories les instationnarités dans les écoulements. La première catégorie considère que l'écoulement se conduit comme un oscillateur et capable d'imposer sa propre dynamique instationnaire ; tandis que la deuxième catégorie estime que l'écoulement peut se comporter comme un amplificateur de bruit et devient l'image d'un bruit déjà existant dans l'écoulement. En effet, les différentes propriétés de stabilité de l'opérateur de Navier-Stokes linéarisé induisent cette distinction.
L'approche globale de la théorie de stabilité linéaire consiste à étudier la stabilité linéaire d'un champ de base qui dépend donc de deux directions de l'écoulement.

Cette approche a débuté au cours des années 90 avec les travaux de Jackson [36] ; Zebib [88] ; mais n'a connu un réel essor que ces dix dernières années (Barkley and Henderson [4] ; Barkley et *al.* [10] ; Theofilis [77]). Cet essor s'explique probablement par l'augmentation des ressources informatiques et l'amélioration des algorithmes, deux motifs indispensables à la résolution des problèmes aux valeurs propres de très grande taille qui apparaissent dans cette approche globale [77].

Le but de cette analyse est d'obtenir la relation de dispersion par une technique de linéarisation des équations aux perturbations en négligeant les termes non linéaires des quantités perturbées. Si les perturbations sont petites alors cette procédure est justifiée. L'avantage de la linéarisation est le principe de superposition qui n'est valable que pour les équations linéaires. Si le taux de croissance des perturbations est décrit par un ensemble d'équations linéaires, alors une perturbation quelconque peut être décomposée par une superposition de plusieurs composantes d'une série de Fourier et l'évolution de chaque mode peut être étudiée de façon indépendante. La méthode d'analyse de stabilité linéaire consiste à introduire des perturbations sinusoïdales d'un état de base

3. l'existence d'une unique direction privilégiée

dont la stabilité est recherchée.

Ces perturbations sont recherchées sous la forme de modes globaux dépendant exponentiellement du temps. Cette décomposition permet de transformer les équations de Navier-Stokes en un problème aux valeurs propres généralisé. La recherche des valeurs propres de plus grand taux d'amplification permet de déterminer la stabilité globale de l'écoulement.

Dans le cas de cette thèse, l'analyse de stabilité globale permet de déterminer le mode global le plus instable responsable du tremblement.

Jackson [36] a étudié la stabilité globale en utilisant des méthodes d'éléments finis. Cette approche est aussi utilisée à l'ONERA où Denis Sipp et *al* [72] ont réalisé leur code de stabilité à partir du logiciel *FreeFEM++*. Ces méthodes ont été développées pour des écoulements incompressibles, leur résultats dans ce cas, ont été bien validés, que cela soit pour des calculs de stabilité ou des simulations numériques directes. Cependant, leur utilisation avec des écoulements compressibles, subsoniques ou supersoniques, et en particulier en aéronautique, n'est pas adéquate. En effet, la difficulté découle du traitement du choc et de la compressibilité.

A propos de l'analyse de stabilité globale pour des écoulements compressibles, la bibliographie n'est en revanche pas très riche. Parmi les quelques références compressibles, on peut citer, en écoulement transsonique, Crouch et al [38], sur un profil en incidence, Robitaillé-Montané [65], sur une aile en flèche, Méliga [48] en écoulement subsonique sur de la dynamique d'arrière corps, ou Theofilis et Colonius [79] en supersonique sur une cavité ouverte ainsi que Robinet [64] sur l'interaction onde de choc/couche-limite laminaire.

3.2.2 Technique des petites perturbations

On considère les équations de Navier-Stokes non linéaires qui régissent un écoulement compressible turbulent :

$$\frac{d}{dt}W = \mathbf{R}(W) \tag{3.1}$$

avec W le champ aérodynamique et $\mathbf{R}$ le résidu discret des équations de la mécanique des fluides.
Cette équation (3.1) est fortement non linéaire à cause de son terme de convection. Pour étudier la stabilité du champ aérodynamique W, on est amené à supposer qu'il est stationnaire et que, bien sûr, il est solution des équations du mouvement. Autrement dit, il vérifie $\mathbf{R}(W) = 0$. L'approche proposée est basée sur la technique des petites perturbations, c'est à dire que l'écoulement de base est perturbé de façon infinitésimale. Toutes les quantités physiques du champ W (pression, vitesse et température) sont décomposées comme la superposition d'une valeur non perturbée et d'une valeur fluctuante :

$$W = \overline{W} + \epsilon W_f, \quad \epsilon \ll 1 \tag{3.2}$$

Les quantités $\overline{W}$ représentent les grandeurs relatives à l'écoulement de base avec $\mathbf{R}(\overline{W}) = 0$. Les quantités notées W_f représentent les grandeurs relatives à l'écoulement

fluctuant.
La technique des petites perturbations revient donc à supposer que l'écoulement instantané s'écrit comme superposition d'un écoulement de base, considéré maintenant comme une donnée du problème, et d'un écoulement fluctuant représentant l'inconnue.

On dispose donc de deux solutions du problème $\overline{W}$ et $\overline{W} + \epsilon W_f$.
La méthode consiste ensuite à écrire les équations du mouvement pour l'écoulement instantané et à y effectuer les simplifications dûes au fait que ces mêmes équations sont satisfaites par l'écoulement de base. Formellement, on note l'ensemble des équations satisfaites à la fois par l'écoulement de base et par l'écoulement instantané de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}W = \mathbf{R}(\overline{W} + \epsilon W_f) \\ \qquad \text{et} \\ \dfrac{d}{dt}\overline{W} = \mathbf{R}(\overline{W}) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

A partir de là on fait une nouvelle hypothèse : celle des petites perturbations. On suppose que les quantités fluctuantes sont suffisamment petites pour que l'on puisse linéariser les équations suivant la fluctuation. Ce qui permet de développer formellement l'équation (3.1) en :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\overline{W} + \epsilon W_f) &= \mathbf{R}(\overline{W} + \epsilon W_f) \\ \frac{d}{dt}\overline{W} + \epsilon\frac{d}{dt}W_f &= \mathbf{R}(\overline{W}) + \epsilon\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}(\overline{W}) \cdot W_f + \Theta(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}$ est un opérateur différentiel, fonction de l'écoulement de base $\overline{W}$; en plus il est linéaire en W_f.
Sachant que l'écoulement de base est solution des équations $\dfrac{d}{dt}\overline{W} = \mathbf{R}(\overline{W})$, la relation (3.4) devient :

$$\frac{d}{dt}W_f = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}(\overline{W}) \cdot W_f \tag{3.5}$$

On cherche des solutions particulière de (3.5) sous la forme $W_f = e^{\sigma t}\widehat{W}$ tel que $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$, sachant que σ_r et σ_i sont des réels qui désignent respectivement le taux d'amplification et pulsation du mode globale et que $\widehat{W}$ est le vecteur propre associé. En remplaçant cette solution particulière dans la relation (3.5), on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{\sigma t}\widehat{W}) &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}(\overline{W})e^{\sigma t}\widehat{W} \\ \sigma e^{\sigma t}\widehat{W} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}(\overline{W})e^{\sigma t}\widehat{W} \end{aligned} \tag{3.6}$$

On appelle la relation (3.7) par le problème aux valeurs propres généralisées :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}\widehat{W} = (\sigma_r + i\sigma_i)\widehat{W} \tag{3.7}$$

Il est clair que seule la valeur de σ_r (taux d'amplification) est prise en compte dans la recherche des quantités physiques. D'ailleurs les valeurs de σ_r qui représentent les

valeurs propres de la matrice jacobienne $\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}$, jouent un rôle déterminant concernant la nature de la stabilité du champ de base $\overline{W}$. En effet :

$$\begin{cases} \sigma_r < 0 : \text{Champ de base stable} \\ \sigma_r > 0 : \text{Champ de base instable} \\ \sigma_r = 0 : \text{Stabilité neutre} \end{cases} \tag{3.8}$$

3.2.3 Algorithme de résolution du problème aux valeurs propres

Pour trouver l'ensemble des valeurs propres (et les vecteurs propres associés) du problème (3.7), il existe plusieurs méthodes. La plus classique, dès lors qu'il s'agit d'un problème aux valeurs propres généralisé construit à partir de matrices non-symétriques et d'éléments complexes, est l'algorithme QZ. On peut trouver une description de cet algorithme faite par Glob et Van Loan dans [29]. Cet algorithme convient parfaitement pour ce type de problème sur le plan théorique, certes en pratique il est inutilisable à partir du moment où la taille des matrices considérées devient grande. Les allocations de mémoires requises et les temps de calculs sont monstrueux.
Heureusement, il existe une méthode itérative dont la qualité principale est de réduire la taille du système dont il faut extraire les valeurs propres. Cette méthode est celle d'Arnoldi [59]. Le principe consiste à projeter la matrice $\mathcal{J} = \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}$ sur un sous-espace de dimension très inférieure à celle du problème initiale. Le sous-espace en question est un sous-espace dit de Krylov. Ses propriétés permettent d'extraire une approximation des valeurs propres de plus grand module du problème initial. On propose ici que les grandes lignes de la méthode, une description détaillée étant faite dans [29].
On considère le problème aux valeurs propres de dimension $N \times N$ et on pose $\mathcal{X} = \widehat{W}$:

$$\mathcal{J}\mathcal{X} = \sigma\mathcal{X} \tag{3.9}$$

On note $\Bbbk_n$ le sous-espace vectoriel de Krylov de dimension n définit par :

$$\Bbbk_n = vect\{\mathcal{X}_0, \mathcal{J}\mathcal{X}_0, \cdots, \mathcal{J}^{n-1}\mathcal{X}_0\} \tag{3.10}$$

où l'entier n est très inférieur à N et $\mathcal{X}_0$ est un vecteur initial quelconque. La notation $vect\{\mathcal{X}_0, \mathcal{J}\mathcal{X}_0, \cdots, \mathcal{J}^{n-1}\mathcal{X}_0\}$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathcal{X}_0, \mathcal{J}\mathcal{X}_0, \cdots, \mathcal{J}^{n-1}\mathcal{X}_0$.
En construisant une base de sous-espace de Krylov $(q_1, \cdots, q_n)$ à partir de $\mathcal{X}_0$, on arrive à la relation suivante :

$$\mathcal{J}\mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_n\mathcal{H}_n + r_n^t e_n \tag{3.11}$$

avec $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique, $\mathcal{Q}_n$ la matrice représentant la base $(q_1, \cdots, q_n)$ exprimée dans $(e_1, \cdots, e_n)$.
$\mathcal{H}_n$ est une matrice de Hessenberg [4] et r_n est un vecteur résiduel qu'il faut minimiser. En effet, si $\|r_n\|_2 = 0$ alors les valeurs propres de $\mathcal{H}_n$ sont les n valeurs propres de plus grand module de $\mathcal{J}$. On itère sur la valeur de $\|r_n\|_2$ en changeant le vecteur initial $\mathcal{X}_0$. Le nouveau vecteur $\mathcal{X}_0$ est calculé à chaque début d'itération par combinaison linéaire des vecteurs de la base $(q_1, \cdots, q_n)$ à l'itération précédente.

4. Une matrice est sous la forme de Hessenberg supérieure si et seulement si ses composantes : $h_{i,j}$ sont nulles pour $i > j + 1$

L'intérêt des sous-espaces de Krylov réside dans la construction faisant intervenir les puissances successives de $\mathcal{J}$ dont les valeurs propres de plus grand module sont de plus en plus écartées les unes des autres. Alors les résultats deviennent indépendants de n.
Néanmoins, le problème considéré dans cette thèse n'est pas si simple. De plus, on est seulement intéressé par les valeurs de plus grande partie réelle. Pour faire un lien entre la méthode d'Arnoldi et le problème aux valeurs propres généralisés, une petite astuce est bien utile. Elle consiste à introduire une cible σ_0 [5] (un nombre complexe). Si σ_0 n'est pas une valeur propre, alors $(\mathcal{J} - \sigma_0\mathcal{I})$ est inversible. On écrit le problème (3.9) avec la petite astuce de la manière suivante :

$$(\mathcal{J} - \sigma_0\mathcal{I})^{-1}\,\mathcal{X} = \frac{1}{(\sigma - \sigma_0)}\mathcal{X} \tag{3.12}$$

Par conséquent, chercher les valeurs propres de plus grand module du problème aux valeurs propres (3.9) revient à chercher les valeurs propres σ les plus proche de σ_0 dans le problème (3.12). Cette méthode a été mise en place dans un code écrit en Fortran, à l'aide de la librairie ARPACK, par Robitaillié-Montané et Feraille [66] et [26].
On pose $\mathcal{J}_{\sigma_0} = (\mathcal{J} - \sigma_0\mathcal{I})$, l'équation (3.12) devient :

$$\mathcal{J}_{\sigma_0}^{-1}\mathcal{X} = \frac{1}{(\sigma - \sigma_0)}\mathcal{X} \tag{3.13}$$

Afin de résoudre ce problème (3.13), il suffit de chercher les valeurs propres autour de la valeur cible σ_0. On peut résoudre ce problème par une approche itérative, qui permettra l'obtention des modes propres. Dans le cadre de cette thèse, on a opté pour une autre stratégie pour le calcul des modes globaux, qui consiste à obtenir explicitement la matrice jacobienne $\mathcal{J} = \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}$. L'obtention de cette matrice est très utile, en effet, l'inversion de la matrice peut se faire dans ce cas, par des méthodes directes. Entre autre, on peut obtenir la matrice adjointe discrète (déduite par transposition).

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, un aperçu de la phénoménologie des écoulements transsoniques soumis au tremblement et les principaux enjeux des études consacrées à ces phénomènes ont été introduits.
Les travaux théoriques ont contribué à l'explication du phénomène de tremblement et de le classer selon son origine et sa nature. La richesse dans les travaux expérimentaux ont formé une banque de données qualitatives et quantitatives, qui serviront à valider les choix retenus dans cette thèse. Plus spécifiquement, l'étude bibliographique sur la simulation du tremblement transsonique sur profil montre que la simulation de ce phénomène est loin d'être achevée mais au contraire il reste beaucoup d'effort de recherche à fournir. En particulier, les écoulements à forte instationnarité et à un nombre de Reynolds élevé, représentent des difficultés pour lesquelles il faut impérativement réaliser des choix pertinents. Dans ce contexte, Crouch [38] a montré que le tremblement de voilure est dû à la présence d'un mode propre instable. Dans cette thèse, on s'est lancé dans l'exploration de cette voie. Pour cela, la dernière partie de ce chapitre présente la théorie d'analyse de stabilité et ses techniques spécifiques qui permettront de procéder

5. En anglais, on désigne par " Shift-Invert"

au calcul des modes globaux. D'ailleurs, on s'est ramené à étudier cette dynamique avec une approche linéaire. En effet, l'approche linéaire permet d'utiliser les outils existants dans ce cadre tel que la décomposition en valeurs propres, la décomposition en valeurs singulières, l'opérateur adjoint, les modèles réduits, les technologies du contrôle..... Ces outils sont puissants et fournissent un cadre mathématique rigoureux pour l'étude de la dynamique et du contrôle d'un système.

La nouveauté dans cette thèse, est l'étude du mode global instable responsable du tremblement sur l'extrados d'une voilure, ce qui est traduit par l'étude de l'analyse de stabilité globale d'un écoulement compressible turbulent à Reynolds élevés.
L'objectif de cette contribution est de construire une stratégie capable de retrouver le mode instable responsable du tremblement transsonique et en perspective de l'inclure dans une boucle fermée afin de réaliser un contrôle optimal. Le principe qu'on va mettre en oeuvre est indiqué sur le schéma de la figure (3.10).

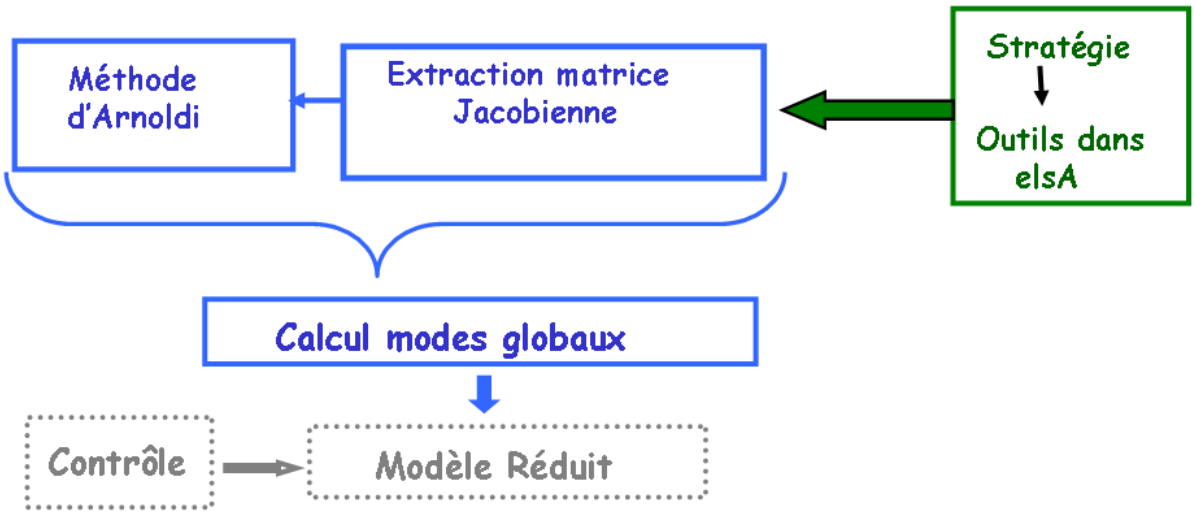


FIGURE 3.10 – *Principe de la stratégie de la thèse*

L'approche envisagée consiste dans un premier temps à développer numériquement un code de calcul capable d'extraire la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}\right)$, issue des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un champ de base vérifiant $\mathbf{R}(W) = 0$. Ensuite, grâce aux techniques spécifiques fournies par la théorie de l'analyse de stabilité (méthode d'Arnoldi et Shift-Invert ...), on cherchera à calculer les modes globaux de cette matrice jacobienne. Une bonne partie des outils existants dans le cadre d'analyse de stabilité linéaire, nécessitent l'obtention explicite de cette matrice jacobienne, ce qui permet de justifier l'utilité de son extraction.

Cette thèse traite cette stratégie selon plusieurs parties dont la prochaine sera consacrée au calcul non linéaire. En effet, les travaux menés dans la présente étude se basent essentiellement sur la simulation numérique des équations de Navier-Stokes incluant un modèle de turbulence. Les outils mis en oeuvre dans ce contexte seront décrits dans le chapitre suivant.

Deuxième partie

Calcul non-linéaire

4 Méthodes et résolutions numériques des équations de Navier-Stokes pour les écoulement compressibles turbulents.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les outils numériques, qui ont servi de base à cette étude. Le modèle physique considéré dans le cadre de la présente étude est constitué des équations de Navier-Stokes instationnaires pour les écoulements compressibles éventuellement couplées à un modèle de turbulence. L'approche de simulation numérique repose sur une formulation "volumes-finis" de ces équations et s'avère largement utilisée dans la littérature. L'outil de simulation est le logiciel *elsA* (Ensemble Logiciel pour la Simulation en Aérodynamique).

Dans un premier temps, le modèle mathématique continu que constituent les équations de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles est rappelé. Les choix de la modélisation de la turbulence qui seront utilisés dans ce travail sont détaillés. Ces choix, pour décrire les écoulements transsoniques turbulents ont été retenus en raison de leur coût modéré de mise en oeuvre.
On s'intéresse ensuite à la discrétisation des équations de Navier-Stokes décrivant les équations de la mécanique des fluides. La méthode de discrétisation considérée et implémentée dans le logiciel *elsA* (développé à l'ONERA), est la méthode des volumes finis. Le domaine de calcul est défini par un maillage bidimensionnel multi-domaines, structuré éventuellement multi-blocs. Les indices des maillages sont notés (i, j) comme le montre la figure (4.1). L'orientation des vecteurs normaux aux surfaces est définie suivant les indices croissants.

En plus de la présentation de la discrétisation des différents termes (convectifs, diffusifs et sources), le traitement des conditions limites et de raccord a été décrit. Tout au long de cette partie, une attention particulière sera portée aux choix retenus. En effet, les choix concernant la discrétisation spatiale sont très important pour la linéarisation plus tard ; c'est pour cela que cette partie est assez détaillée. Quant à la discrétisation temporelle, elle sera présentée d'une manière concise.

4.1 Formulation des équations de Navier-Stokes

Le modèle mathématique généralement retenu pour décrire localement, sous forme d'équations aux dérivées partielles, l'évolution spatio-temporelle des écoulements, d'un point de vue macroscopique, est constitué des équations de Navier-Stokes [13]. Dans cette section, ce système d'équations est rappelé dans le contexte de la modélisation

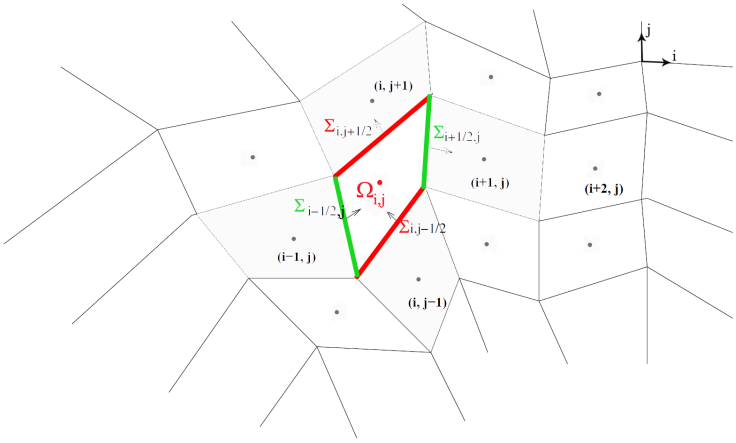


FIGURE 4.1 – *Schéma de discrétisation pour la méthode des volumes finis*

d'écoulements compressibles.

4.1.1 Caractéristiques du fluide

On se place ici dans l'hypothèse d'un milieu continu, constitué d'un fluide compressible et visqueux. On suppose que le fluide considéré vérifie les équations de Navier-Stokes complétées par des lois de comportement classiques et de loi d'état de gaz parfait. De plus, on admet que la masse volumique du fluide est suffisamment faible pour que les effets de la gravité puissent être négligés (hypothèse de fluide non pesant). Dans cette section on va préciser les relations admises pour le comportement du gaz considéré. On aborde d'abord la loi d'état permettant de relier la pression p, la température T et l'énergie e du gaz. Ensuite la loi de comportement retenue pour le fluide visqueux en rappelant l'expression du tenseur des contraintes au sein du fluide dûes aux gradients de pression et de vitesse.

4.1.1.1 Équations de bilan

Ces équations sont présentées sous la forme d'équations aux dérivées partielles permettant de déterminer l'évolution, à partir de conditions initiales données, des champs de la masse volumique ρ, de la quantité de mouvement par unité de volume $\rho\mathbf{U}$ et de l'énergie totale par unité de volume ρE. L'énergie totale E est égale à la somme de l'énergie interne e et de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\mathbf{U}^2$, sachant que toutes les grandeurs sont homogènes à des énergies par unités de masse.
Les équations de Navier-Stokes permettent de décrire l'évolution de l'état du fluide en exprimant successivement la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie :

Équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \tag{4.1}$$

Équation de conservation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{4.2}$$

Équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho H u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \frac{\partial (\tau_{ij} u_i)}{\partial x_j} = 0 \tag{4.3}$$

où t désigne le temps, x_j les coordonnées spatiales cartésiennes, ρ la masse volumique, u_i les composantes du vecteur vitesse $\mathbf{U}$, p la pression, E l'énergie totale, H l'enthalpie totale, q_j les composantes du vecteur flux de chaleur $\mathbf{q}$ et τ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes visqueuses τ.

Les équations de Navier-Stokes (4.1) à (4.3) sont encore ouvertes. Pour les fermer, il faut préciser l'expression du scalaire p, du tenseur τ et du vecteur $\mathbf{q}$.

4.1.1.2 Lois d'état

La pression statique p du gaz est reliée à sa température T et à sa masse volumique ρ par la loi des gaz parfaits :

$$p = \rho r T \tag{4.4}$$

où r désigne le rapport de la constante universelle des gaz parfaits R à la masse molaire $\mathcal{M}$ du gaz considéré ($r = \frac{R}{\mathcal{M}} = 287.4 J.K^{-1}$).
Les deux lois de Joule permettent de relier l'énergie interne du gaz et son enthalpie libre, $h = e + \frac{p}{\rho}$, à sa température par l'intermédiaire des chaleurs spécifiques du gaz à volume constant (C_v) et pression constante(C_p) :

$$e = C_v T \qquad h = C_p T \tag{4.5}$$

La relation de Mayer utilisée dans le cadre d'un gaz parfait permet d'établir que le fluide est à chaleurs spécifiques constantes de rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.4$.
Les relations reliant p et T à e s'obtiennent alors directement et permettent ainsi la fermeture du système :

$$p = (\gamma - 1)\rho e \qquad T = \frac{\gamma - 1}{r} e \tag{4.6}$$

Ces hypothèses restent valables pour une plage de température T comprise entre 100 et 1200 K.

4.1.1.3 Lois de comportement pour un fluide

4.1.1.3.1 Tenseur des contraintes visqueuses Le théorème du moment cinétique permet de montrer que le tenseur des contraintes visqueuses τ est symétrique. Avec l'hypothèse du fluide *newtonien*, le tenseur des contraintes visqueuses est alors donné par la loi suivante :

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{4.7}$$

avec

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.8}$$

où λ et μ sont respectivement les coefficients de viscosité volumique et dynamique exprimés en Poiseuille, δ_{ij} le symbole de Kronecker et S_{ij} le tenseur des déformations. En supposant que l'hypothèse de Stokes est vérifiée (i.e. $3\lambda + 2\mu = 0$), le tenseur des contraintes visqueuses (4.7) sera exprimé en fonction de la viscosité dynamique :

$$\tau_{ij} = 2\mu\left(S_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) \tag{4.9}$$

soit :

$$\tau = -\frac{2}{3}\mu\left(\nabla \cdot \mathbf{U}\right) I + \mu\left(\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T\right) \tag{4.10}$$

4.1.1.3.2 Viscosité dynamique La viscosité étant une propriété liée à l'agitation moléculaire, la loi de Sutherland [46] permet de caractériser son évolution en fonction de la température exprimée en Kelvin :

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T + 110,4}{T_0 + 110,4} \tag{4.11}$$

avec T_0 = 273,16 K et μ_0 = 1,711.10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1} pour l'air.

4.1.1.3.3 Vecteur flux de chaleur Le vecteur flux de chaleur est donné par la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\kappa_T \nabla T \tag{4.12}$$

où κ_T représente le coefficient de conductivité thermique du fluide.
L'introduction du nombre de Prandtl (supposé constant dans l'hypothèse de gaz parfait), permet de relier κ_T à la viscosité dynamique et à la chaleur spécifique du fluide à pression constante par l'expression :

$$Pr = \frac{C_p \mu}{\kappa_T} \tag{4.13}$$

Le nombre de Prandtl est sans dimension et représente le rapport entre les temps caractéristiques associés aux phénomènes de diffusion de quantité de mouvement et de diffusion thermique pour un fluide donné. On suppose ce nombre constant et $Pr = 0.72$ dans le cas de l'air.

Dans la section suivante, on se propose à simplifier la modélisation de la turbulence en la réduisant à la donnée des grandeurs qui la caractérisent.

4.2 Modélisation des écoulements turbulents

La simulation numérique des écoulements turbulents est devenu un des excellent outil pour mieux comprendre les mécanismes physiques, pour la conception et le développement industriel.

Toutefois, malgré la puissance des calculateurs, la simulation de toutes les échelles spatio-temporelles actives au sein d'un écoulement turbulent, ne peut être envisagée à l'heure actuelle. Cette approche, appelée Simulation Numérique Directe ou DNS , est en pratique limitée à des cas très simples à faible nombre de Reynolds. Dès lors, pour évaluer les performances aérodynamiques des composants industriels, le recours à des modélisations s'impose pour réduire les coûts de calcul, tout en garantissant un bon niveau de précision.

Une solution est de résoudre les équations de Navier-Stokes sur une gamme restreinte d'échelles et de modéliser l'action des autres. Cette séparation des échelles débouche sur différents niveaux d'approximation de la turbulence comme la simulation de grandes échelles ou LES (Large Eddy Simulation) ou l'approche moyennée RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) :

- La première (LES), par filtrage en espace, résout la dynamique des grandes et moyennes échelles porteuses d'énergie. Elle utilise un modèle pour représenter l'action des échelles dont la taille est inférieure à celle de la maille de calcul, sur des échelles résolues. Cette méthode requiert un maillage très fin et reste encore très coûteuse [69].

- La seconde (RANS), utilise un traitement statique : les variables du système sont décomposées en une partie moyenne et une partie fluctuante. Le système des équations de Navier-Stokes instantanées est alors remplacé par un système d'équations sur les valeurs moyennes du champ [70] [8]. Pour un écoulement stationnaire, la moyenne de l'ensemble des équations de Navier-Stokes (moyenne obtenue sur un grand nombre de réalisations) peut être remplacée par une moyenne temporelle (hypothèse d'ergodicité). Dans le cas d'écoulements instationnaires,l'hypothèse d'ergocité de la turbulence n'est plus valable et pose le problème de la signification de l'URANS (Unsteady RANS)

Dans cette thèse, on opte pour la seconde approche (RANS). On considère des écoulements caractérisés par des nombres de Reynolds de l'ordre de plusieurs millions, au sein desquels les effets de l'inertie sont dominants par rapport aux effets visqueux. Dans cette classe d'écoulement, les perturbations présentes dans l'écoulement tendent à croître et induisent la transition vers la turbulence. La turbulence au sein du fluide présente une gamme très large d'échelles de mouvements tourbillonnaires. Ceci pose un problème de représentation toujours ardu. Les capacités de calcul passées et actuelles, conjuguées aux besoins pratiques de l'industrie ont engendré une grande variété d'approches de simulation de la turbulence. Ces approches visent à décomposer l'énergie issue de la turbulence en une partie résolue et une partie modélisée afin de mettre en adéquation la quantité de prédiction atteignable et la puissance de calcul ; sur ce point le lecteur intéressé peut voir plus de détails dans les références classiques [69][70] et [8].

Différents modèles de turbulence utilisés pour la simulation numérique d'écoulements en tremblement transsonique sont présentés dans cette sous-section, en particulier le

modèle retenu pour le calcul du champ de base et l'étude de l'analyse de stabilité de l'état linéarisé. Les avantages et les inconvénients des différents modèles sont également discutés.
On note par ailleurs que la viscosité dynamique turbulente $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$ est construite à partir de deux échelles caractéristiques, l'une de la vitesse $\mathbf{U}$, l'autre de la longueur L ; donc, $\nu_t \approx \mathbf{U} \times L$ ce qui permet de définir le nombre de Reynolds par $Re = \frac{\mathbf{U}L}{\nu_t}$.

4.2.1 Équations de Navier-Stokes moyennées - RANS

Lorsque les effets de convection au sein d'un écoulement dominent les effets de diffusion (nombre de Reynolds élevé $\approx 10^6$), des zones turbulentes apparaissent. Elles sont caractérisées par la présence de petites structures multidimensionnelles instationnaires et rotationnelles qui ne se retrouvent plus à l'identique lorsque l'on reproduit l'écoulement. La turbulence pose ainsi le problème de la modélisation d'un phénomène caractérisé par un très grand nombre d'échelles de temps et d'espace. La petitesse des échelles de la turbulence rend impossible la simulation complète d'écoulements correspondant à des problèmes concrets.

La modélisation de la turbulence dans une approche statistique a été envisagée par Reynolds dès la fin du XIX ième siècle. Dans cette approche, chaque grandeur $f(x_1, x_2, x_3, t)$ de l'écoulement est décomposée en une composante moyenne $< f >$ et composante fluctuante f^* :

$$f =< f > +f^* \qquad \text{avec} \qquad < f^* >= 0 \tag{4.14}$$

L'opérateur $< . >$ est une moyenne d'ensemble, c.à.d la limite de la moyenne arithmétique prise sur un grand nombre de réalisations de f dans les mêmes conditions générales d'écoulement :

$$< f >= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k \tag{4.15}$$

où $f_k (k = 1, .., n)$ sont les valeurs prises par f au cours de n réalisations indépendantes de l'écoulement (avec des caractéristiques identiques aux frontières). Le calcul de cette moyenne nécessite la production de nombreuses réalisations indépendantes ce qui est souvent irréalisable. Le principe d'ergodicité permet de confondre cette moyenne avec la moyenne temporelle pour un écoulement sous conditions lointaines stationnaires :

$$\overline{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau) d\tau \tag{4.16}$$

La décomposition introduite par Reynolds est bien adaptée pour des écoulements turbulents incompressibles. Pour les écoulements turbulents compressibles, il est commode d'introduire une pondérée par la masse, ou moyenne de Favre. Cette moyenne que l'on notera $\widetilde{.}$, s'écrit pour une quantité f :

$$f = \widetilde{f} + f^\star \qquad \text{avec} \qquad \widetilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}} \tag{4.17}$$

La partie fluctuante est définie de telle sorte que $\overline{\rho f^\star} = 0$. On a de plus les relations suivantes :

$$\overline{\rho f} = \overline{\rho}\widetilde{f} \quad \text{et} \quad \overline{\rho f g} = \overline{\rho}\widetilde{f}\widetilde{g} + \overline{\rho f^{\star} g^{\star}} \tag{4.18}$$

Les équations moyennées sont formellement identiques à (4.1), (4.2) et (4.3) :

Équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = 0 \tag{4.19}$$

Équation de conservation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\tau}_{ij} - \widetilde{\bar{\rho}u_i'' u_j''}) = 0 \tag{4.20}$$

Équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial \bar{\rho}\hat{E}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_j\hat{H})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{q}_j + \widetilde{\bar{\rho}e'' u_j''})}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left((\bar{\tau}_{ij} - \widetilde{\bar{\rho}u_i'' u_j''})\tilde{u}_i\right) = -T_s^k \tag{4.21}$$

où $\hat{E} = \tilde{e} + \frac{1}{2}\tilde{u}_k\tilde{u}_k$ est l'énergie totale et $\hat{H} = \hat{e} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}$ l'enthalpie totale, quantités relatives à l'écoulement moyen et T_s^k un terme source d'énergie cinétique turbulente. Ainsi, au sein des équations (4.20) et (4.21) deux nouvelles expressions apparaissent :

- le tenseur de Reynolds $\widetilde{\bar{\rho}u_i'' u_j''} = \tau_r$,
- le vecteur de flux de chaleur turbulent $\widetilde{\bar{\rho}e'' u_j''}$. Il est modélisé suivant la loi de type premier gradient : $q_t = -\kappa_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}$

κ_t est relié au nombre de Prandtl turbulent par l'expression :

$$\kappa_t = \frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \tag{4.22}$$

Le nombre de Prandtl turbulent est supposé constant avec $Pr_t = 0.9$ pour l'air.

Pour fermer le système RANS, il reste donc à exprimer la viscosité turbulente μ_t en fonction du champ moyen, c'est à dire qu'il faut disposer d'un modèle de turbulence pour μ_t.

4.2.1.1 Modélisation du tenseur de Reynolds : hypothèse de Boussinesq

Boussinesq fut le premier à introduire en 1877 le concept de viscosité turbulente en proposant pour les tensions de Reynolds turbulentes une relation analogue à celle de Newton pour les contraintes visqueuses. Le tenseur de Reynolds et le flux de chaleur turbulent s'expriment par des lois en gradient de manière analogue à celle définissant le tenseur des contraintes de l'écoulement moyen et son flux de chaleur.

L'expressions du tenseur de Reynolds est donc modélisé suivant l'hypothèse de Boussinesq qui relie linéairement les contraintes turbulents aux taux de cisaillement moyen :

$$\tau_r = \mu_t \left(S_{ij} - \frac{2}{3} \widetilde{\frac{\partial u_k''}{\partial x_k}} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} \tag{4.23}$$

où le coefficient μ_t est appelé viscosité dynamique de la turbulence ou viscosité tourbillonnaire (dû au fait que la turbulence est caractérisée par la présence de tourbillons d'échelles très variées) et k est l'énergie cinétique de la turbulence.
Pour fermer le système RANS, on exprime la viscosité turbulente μ_t en fonction du champ moyen, c'est à dire on doit disposer d'un modèle de turbulence pour μ_t. Afin d'alléger les écritures, on notera désormais, les quantités moyennées sans signes distinctifs tels que $\bar{.}$ ou $\tilde{.}$.

4.2.2 Modélisation de la viscosité turbulente

La modélisation de la turbulence consiste à modéliser μ_t dans l'écoulement, cette viscosité étant variable et dépendante des fonctions de champ de l'écoulement considéré. Comme pour la viscosité moléculaire, on introduit une viscosité cinématique de la turbulence donnée par $\nu_t = \mu_t/\rho$ et de manière dimensionnelle, on établit que :

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = C_\mu \times u_t \times l_t \tag{4.24}$$

où u_t et l_t désignent respectivement des échelles de vitesse et de longueur caractéristique de l'agitation turbulente où C_μ est une constante. La modélisation de la turbulence consiste alors à caractériser ces échelles, dans le champ. Pour cela, plusieurs approches sont possibles.
Historiquement les premiers modèles à variation de ν_t dans le champ furent les modèles à "longueur de mélange". Ils consistent à relier de manière explicite l_t aux gradients de vitesse du champ moyen et u_t se déduisant de cette première relation par analyse dimensionnelle. Ces modèles rapides de mise en oeuvre ont été largement utilisés. On pourra se référer à [37] pour une présentation précise des modèles les plus célèbres. Calibrés pour des applications précises, leur manque de généralité pour des simulations d'écoulements complexes autour de corps tridimensionnels a poussé à l'élaboration de modèles plus généraux. Ces derniers se distinguent par une ou plusieurs équations de transport de quantités caractérisant la turbulence. Ils permettent de prendre en compte dans l'expression de la viscosité turbulente "l'histoire" de l'écoulement.

Le choix du modèle de turbulence repose sur divers paramètres : sa disponibilité dans *elsA*, son niveau de validation et l'intérêt qu'il peut apporter, en fonction de ses propriétés théoriques ou des résultats obtenus pour d'autres types d'applications.
Les choix des modèles de turbulence seront exposés en détail en s'appuyant sur les avantages et inconvénients de chaque fermeture.

4.2.2.1 Modèles algébriques

Les modèles algébriques ou à zéro équation reposent sur l'évaluation du tenseur de Reynolds de manière algébrique ; c'est à dire ils s'expriment par le biais d'une relation

algébrique sans recours à une équation de transport des quantités turbulentes : la viscosité turbulente en fonction des caractéristiques du champ moyen. Ils introduisent la notion de longueur de mélange, caractéristique d'une "'épaisseur" de brassage turbulent. Cette longueur est évaluée par des expressions empiriques, qui diffèrent selon la zone de l'écoulement turbulent considérée. Les modèles qui en découlent sont généralement simples et rapides à mettre en oeuvre.
Parmi ces modèles algébriques, on distingue les modèles de Baldwin-Lomax [20]et de Michel-Quémard-Durant [57][33]. Cependant, ils montrent leur limite en présence d'un décollement. Par ailleurs, ils nécessitent d'avoir des renseignements sur l'écoulement à simuler. Ainsi, on n'utilisera pas ces modèles et la viscosité turbulente sera déterminée à partir des quantités transportables.

4.2.2.2 Modèle de turbulence à une seule équation

Dans la catégorie des modèles à une équation, deux types de stratégies sont possibles selon la quantité transportée :

- une échelle caractéristique de la turbulence ; le choix s'oriente naturellement vers l'énergie cinétique turbulente k, pour laquelle on dispose d'une équation de transport exacte, directement déduite des équations de Navier-Stokes, et la fermeture est relativement simple. Cependant, l'échelle de longueur reste à reconstruire algébriquement, ce qui n'apporte aucune avancée par rapport aux modèles à zéro équation.

- une échelle proportionnelle à μ_t, où le problème de fermeture dépend de la détermination d'une équation de transport, qui ne peut pas être déduite des équations de Navier-Stokes. Elle est donc construite de manière empirique en partant d'une forme classique :
  "convection = production +Diffusion - dissipation"
  et en déterminant les différents termes à partir d'écoulements de base ou d'une analyse dimensionnelle.

On va s'intéresser au deuxième type de modèle, dont les résultats sont généralement intéressants au regard de l'effort de modélisation.
Le modèle de Spalart-Allmaras [25] restitue correctement le comportement de la couche limite en gradient de pression positif. Il s'avère alors très performant pour simuler le phénomène d'oscillation de choc. Ce modèle de Spalart-Allmaras utilise une seule équation de transport pour la quantité $\tilde{\nu}$ qui, loin des parois, se confond avec $\nu_t = \mu_t/\rho$. Il est simple, robuste et permet de donner des propriétés numériques satisfaisantes.
Le vecteur des quantités transportées ne contient qu'une seule composante, la variable $\rho\tilde{\nu}$ avec $\tilde{\nu}$ la viscosité cinématique.
Le flux convectif est donné par :

$$\mathbf{F}^c{}_{\tilde{\nu}}\left(\mathbf{W}_{\tilde{\nu}}\right) \cdot n d\Sigma = \oint_{\Sigma} \rho\tilde{\nu}(\mathbf{U}) \cdot n d\Sigma. \tag{4.25}$$

Le flux diffusif est donné par :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{F}^v{}_{\tilde{\nu}}\left(\mathbf{U}_{\tilde{\nu}}, \nabla\mathbf{U}_{\tilde{\nu}}\right) \cdot n d\Sigma = \left(- \oint_{\Sigma} \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} (\mu + \rho\tilde{\nu}) \nabla\tilde{\nu} \cdot n d\Sigma \right). \tag{4.26}$$

et le terme source de modélisation :

$$\int_\Omega \left(C_{b1}(1-f_{t2})\tilde{S}\rho\tilde{\nu} + \frac{C_{b2}}{\sigma}\nabla\rho\tilde{\nu}\cdot\nabla\tilde{\nu} - \left[C_{w1}f_w - \frac{C_{b1}}{K^2}f_{t2}\right]\rho\frac{\tilde{\nu}^2}{\eta^2}\right)d\Omega \tag{4.27}$$

Les constantes de ce modèle sont bien détaillées dans la référence [25].
Au début de cette thèse, ce modèle n'était pas linéarisé dans *elsA*, mais, il va être testé cependant, pour la simulation du tremblement.

4.2.2.3 Modèles de turbulence à deux équations

Les modèles à deux équations de transport disposent d'une équation de transport pour l'énergie cinétique de turbulence k et d'une autre pour la grandeur $\mathbf{q}$. De nombreuses voies ont été explorées pour choisir la variable $\mathbf{q}$ (flux de chaleur), mais elles reposent toutes sur le principe de construire une grandeur qui permet de retrouver l'échelle de longueur caractéristique de la turbulence.

On dispose des modèles de type $(k-\epsilon)$, où ϵ représente le taux de dissipation turbulente (le modèle Jones-Launder [16] et Launder-Sharma [17]) . L'équation pour ϵ est construite de manière schématique et nécessite des fonctions d'amortissement pour les régions de proche paroi. À titre d'exemple :
Les modèles de type $(k-\epsilon)$ présentent généralement le défaut de sous estimer la pente de la loi logarithmique en présence de gradient de pression positif. Cela conduit à une surestimation du coefficient de frottement, ce qui limite la formation des décollement et fausse la résolution de l'interaction choc couche-limite pilotée par l'apparition ou non d'un décollement de pied de choc.
Ce défaut étant amplifié par une augmentation du nombre de Reynolds, on ne retient donc pas ce type de modèle dans ce travail.

D'autre part, il existe les modèles de type $(k-\omega)$ où $\omega = \frac{\epsilon}{\beta^* k}$, qui apportent une autre alternative. Plusieurs versions pour ces modèles existent, entre autres :

- modèle de Wilcox original de 1988 [84] ;
- modèle de Wilcox avec termes de diffusion croisé de 1993 [85] ;
- modèle de Kok [41] ;
- modèle de Menter de BSL(BaSeLine)[49] ;
- modèle de Menter avce correction SST [50] (Shear Stress Tensor) ....

Les quantités transportées dans les modèles $(k-\omega)$ sont l'énergie cinétique de turbulence k et son taux spécifique de dissipation isotrope ω.
On présente ici le modèle de $(k-\omega)$ de Wilcox, qui sera retenu pour la suite des travaux de cette thèse. En effet, ce modèle a été linéarisé dans *elsA* [46].
On a :

$$\mathbf{U}_{k\omega} = [\rho k, \rho\omega]^t \text{ avec } \left[\begin{array}{l} k : \text{ énergie cinétique de turbulence,} \\ \omega : \text{ taux spécifique de dissipation.} \end{array}\right. \tag{4.28}$$

Le terme source de modélisation s'écrit :

$$\int_\Omega T_{k\omega}^{source}(\mathbf{U},\mathbf{U}_{kw})d\Omega = \int_\Omega \left[\begin{array}{c} \tau_r : \nabla\mathbf{U} - \beta^*\rho k\omega \\ \frac{\gamma}{\nu_t}\tau_r : \nabla\mathbf{U} - \beta\rho\omega^2 \end{array}\right] d\Omega \tag{4.29}$$

La viscosité turbulente est évaluée par :

$$\mu_t = \gamma^* \frac{\rho k}{\omega} \tag{4.30}$$

Les équations de transport pour le modèle $(k-\omega)$ de Wilcox peuvent s'écrire sous la forme conservative :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{U}\rho k - (\mu + \sigma^* \mu_t)\nabla k] = \mathbf{P} - \beta^* \rho \omega k = S_k \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{U}\rho \omega - (\mu + \sigma \mu_t)\nabla \omega] = \frac{\gamma \omega}{k}\mathbf{P} - \beta \rho \omega^2 = S_\omega \end{cases} \tag{4.31}$$

où S_k et S_ω sont les termes sources de ce modèle.
$\mathbf{P}$ le terme de production de k s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{P} = \tau_r : \nabla \mathbf{U} = \left(\mu_t \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3}\mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} \right) \frac{\partial u_i}{x_j} \tag{4.32}$$

et les constantes

$$\beta = \frac{3}{40},\ \beta^* = 0.009,\ \gamma = \frac{5}{9},\ \gamma^* = 1,\ \sigma = \frac{1}{2},\ \sigma^* = 1. \tag{4.33}$$

Les méthodes de résolution des équations décrites ci-dessus font précisément l'objet de la section qui suit.

4.3 Résolutions numériques des équations de conservation

Cette section est dédiée à l'étude détaillée de la méthode numérique utilisée pour la résolution des équations. On s'intéresse à leur discrétisation pour un problème stationnaire dans le cadre d'un écoulement compressible turbulent. Dans ce sens, la discrétisation spatiale de chacun des termes pour le champ moyen et le champ turbulent sera expliquée. La compréhension des schémas numériques utilisés a été une étape importante dans la perspective de linéariser les différentes contributions au résidu explicite afin d'établir la matrice jacobienne explicite. Les traitements de raccords et les conditions limites seront également présentés dans la même perspective. L'intégration en temps et la résolution numérique des systèmes issus de la discrétisation seront ensuite présentés. Ces équations seront formulées par un système de lois de bilan, sous forme intégrale. La méthode de discrétisation considérée et implémentée dans le logiciel *elsA* est la méthode des volumes finis [46] dans laquelle les inconnues sont les valeurs moyennes dans les cellules de discrétisation et sont affectées au centre de cellules (approche *cell-centred*). En outre, on fait l'hypothèse que les grandeurs sont uniformes sur une interface et sont égales à la demi-somme des valeurs dans les cellules adjacentes. Ces approximations sont compatibles avec la précision d'ordre 2 des schémas numériques classiques.

Le domaine de calcul est défini par un maillage bidimensionnel et structuré, comme présenté dans la figure (4.1) .
Dans cette méthode, le volume $\mathcal{V}$ intervenant dans les équations intégrales de conservation pour le champ moyen et pour le champ turbulent est discrétisé sur des petites cellules

de fluide. Ensuite, on réalise sur ces cellules, des bilans de flux des grandeurs conservatives pour accéder à un système d'équations permettant de trouver la valeur moyenne des variables conservatives moyennes et turbulentes valables pour chaque cellule. Cette méthode se révèle particulièrement bien adaptée pour le domaine de l'aérodynamique où une forme intégrale des équations est la manière la plus naturelle d'exprimer le bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie pour l'air dans un domaine donné.

4.3.1 Méthodes des volumes finis

Comme introduite par Patankar [55] , la méthode des volumes finis repose sur le fait que les équations qui décrivent les écoulements du fluide sont des équations de conservation, dont la forme fondamentale est une forme intégrale, et consiste à discrétiser cette forme intégrale des équations. Cette méthode consiste à diviser le domaine de calcul en un nombre fini de volumes de contrôle ou mailles ; à réaliser l'intégration des équations qui gouvernent l'écoulement sur les volumes de contrôle locaux pour construire les équations algébriques pour les variables dépendantes discrètes (inconnues)et à effectuer la linéarisation des équations discrétisées.

Les équations de Navier-Stokes locales avec modèle de turbulence $(k-\omega)$ de Wilcox sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + p\mathbf{I} - \tau] = 0 \\ \dfrac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho E \mathbf{U} + p\mathbf{U} - \tau \cdot \mathbf{U} + \mathbf{q}] = 0 \\ \dfrac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{U}\rho k - (\mu + \sigma^* \mu_t)\nabla k] - \mathbf{P} + \beta^* \rho \omega k = 0 \\ \dfrac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{U}\rho\omega - (\mu + \sigma \mu_t)\nabla \omega] \dfrac{\gamma \omega}{k} - \mathbf{P} + \beta \rho w \omega^2 = 0 \end{cases} \tag{4.34}$$

Les équations de conservation intégrales pour le champ moyen et le champ turbulent s'écrivent sous la forme intégrale suivante :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \mathbf{W} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F^c}(W) + \mathbf{F^v}(W, \nabla W)) \cdot \mathbf{n} d\Sigma - \int_\Omega \mathbf{T}^{source}(W, \nabla W) d\Omega \tag{4.35}$$

où Ω est le domaine de calcul, de frontière $\partial\Omega$, de normal extérieur $\mathbf{n}$.
En intégrant les équations de Navier-Stokes locales sur une partie du domaine de calcul (en pratique une cellule du maillage structuré (figure (4.1)), on obtient une équation de type (4.35). Le terme source $\mathbf{T}^{source}$ apparaît. Le domaine de calcul d'une manière générale, est constitué d'un ensemble de cellules hexaédriques élémentaires représentées par la suite par Ω. Chaque cellule élémentaire Ω est caractérisée par son volume $\nu(\Omega) = \int_\Omega d\Omega$ et sa surface fermée $\partial\Omega = \bigcup_{l=1}^{6} \sum_l$ où $\sum_l$ représente la face l de la cellule hexaédrique considérée dans le maillage structuré.
La méthode de discrétisation se caractérise par une approche dite *cell-centred* indiquant que les moyennes des variables conservatives issues de l'équations intégrale de bilan

(4.35) sont affectées au centre des cellules.

On considère l'écriture du système exact (4.35) dans une cellule élémentaire du domaine de calcul :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\mathbf{W}d\Omega=\left[\sum_{l=1}^{6}\int_{\sum_l}(\mathbf{F^c}(\mathbf{W})+\mathbf{F^v}(\mathbf{W},\nabla\mathbf{W}))\cdot\mathbf{n}d\Sigma-\int_{\Omega}\mathbf{T}^{source}(\mathbf{W},\nabla\mathbf{W})d\Omega\right] \tag{4.36}$$

On définit les quantités suivantes afin de simplifier les expressions du système :

- la valeur moyenne du vecteur des variables conservatives $\mathbf{W}$ dans la cellule Ω :

$$\overline{\mathbf{W}}_{\Omega}=\frac{1}{\nu(\Omega)}\int_{\Omega}\mathbf{W}d\Omega \tag{4.37}$$

- la valeur du vecteur flux physique (somme du flux convectif et diffusif) à travers une interface Σ_l :

$$(\mathbf{F})_{\Sigma_l}=\int_{\Sigma_l}[\mathbf{F^c}(\mathbf{W})+\mathbf{F^v}(\mathbf{W},\nabla\mathbf{W})]\cdot\mathbf{n}d\Sigma \tag{4.38}$$

- la valeur moyenne du vecteur terme source dans la cellule Ω :

$$\overline{\mathbf{T}}_{\Omega}^{source}=\frac{1}{\nu(\Omega)}\int_{\Omega}\mathbf{T}^{source}(\mathbf{W},\nabla\mathbf{W})d\Omega \tag{4.39}$$

On peut écrire le système exact (4.36) sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{V}(\Omega)\overline{\mathbf{W}}_{\Omega})=\left[\sum_{l=1}^{6}(\mathbf{F})_{\Sigma_l}-\mathcal{V}(\Omega)\overline{\mathbf{T}}_{\Omega}^{source}\right]. \tag{4.40}$$

En plus de la construction du maillage, la discrétisation en espace va consister également à choisir un flux numérique $F_{\Sigma_l}^{num}$ pour estimer le flux physique exact F_{Σ_l} à travers chaque interface Σ_l. Cette approximation satisfait la propriété usuelle de consistance. Dans la discrétisation "volumes finis", les grandeurs moyennes exactes sont remplacées par leurs approximations numériques :

$$\frac{d}{dt}\left(\nu(\Omega)\mathbf{W}_{\Omega}\right)=\left[\sum_{l=1}^{6}\mathbf{F}_{\Sigma_l}^{num}(\mathbf{W}_{\Omega},\mathbf{W}_{\Omega_l})-\mathcal{V}(\Omega)\mathbf{T}_{\Omega}^{source}\right]=\mathcal{V}(\Omega)\mathbf{R}_{\Omega}, \tag{4.41}$$

où :

- $\mathbf{W}_{\Omega}$ est une approximation numérique de la valeur moyenne $\overline{\mathbf{W}}_{\Omega}$;

- $\mathbf{F}^{num}(\mathbf{W}_{\Omega},\mathbf{W}_{\Omega_l})$ est le flux physique numérique (approximation numérique du flux physique), fonction de $\mathbf{W}_{\Omega}$ et des approximations numériques $\mathbf{W}_{\Omega_l}$ calculés dans un certain nombre de cellules voisines à chacune des interfaces Σ_l. L'ensemble des variables conservatives approchées représente l'ensemble des indices des cellules voisines à l'interface Σ_l et intervenant, par l'intermédiaire d'un schéma donné, dans l'évaluation des flux convectifs et diffusifs sur cette interface ;

– $\mathbf{T}_{\Sigma}^{source}$ est une approximation numérique de $\overline{\mathbf{T}}_{\Sigma}^{source}$.

Ce type de formulation appelée aussi *semi-discrète* en espace, permet de découpler le problème de l'intégration spatiale et temporelle des équations de conservation.

Dans le cas d'un maillage fixe, on considère donc la méthode *semi-discrète* en espace sous la forme ;

$$\frac{d}{dt}\mathbf{W}_{\Omega} = \frac{1}{\mathcal{V}(\Omega)}\left[\sum_{l=1}^{6}\mathbf{F}_{\Sigma_l}^{num}(\mathbf{W}_{\Omega},\mathbf{W}_{\Omega_l}) - \mathcal{V}(\Omega)\mathbf{T}_{\Omega}^{source}\right] = \mathbf{R}_{\Omega}, \tag{4.42}$$

Enfin, dans l'expression (4.42), $\mathbf{R}_{\Omega}$ sera appelé le *résidu numérique explicite de la modélisation.*
Ce résidu discret au centre de la cellule Ω est un bilan de flux de cette cellule auquel on ajoute un terme source.
La résolution numérique du problème consiste alors à minimiser le maximum ce résidu pour toutes les cellules du domaine de calcul.

4.3.1.0.1 Expression du résidu explicite avec les directions du maillage Dans l'expression (4.41), la convention retenue pour l'orientation des faces pour une cellule traitée doit être la même et le parcours de toutes les interfaces de la cellule est nécessaire. Comme on considère uniquement des maillages structurés, il est possible de réécrire l'expression du résidu en faisant apparaître pas seulement l'ensemble des faces de la cellule mais aussi les faces groupées par direction de maillage. Il convient alors de retenir une convention pour l'orientation des facettes de la cellule traitée par rapport à la direction de maillage considérée. La convention retenue au sein d'*elsA* consiste à considérer une orientation positive des vecteurs normaux aux interface lorsque qu'ils correspondent à celui du sens indice de maillage croissant. Ceci conduit à écrire le résidu explicite comme suit :

$$R_{\Omega} = \frac{d}{dt}(W_{\Omega}) = \frac{1}{\mathcal{V}_{\Omega}}\left[\sum_{l\in[i,j,k]}(F_{l+\frac{1}{2}}^{num} - F_{l-\frac{1}{2}}^{num}) - \mathcal{V}_{\Omega}T_{\Omega}^{source}\right] \tag{4.43}$$

Sachant qu'on note :

$$\sum_{l=1}^{6}F(\mathbf{W}_{\Omega},\mathbf{W}_{\Omega_l})\cdot\mathbf{N}_{\Sigma_l} = \sum_{l=1}^{6}\left(F_{l+\frac{1}{2}}^{num} - F_{l-\frac{1}{2}}^{num}\right) \tag{4.44}$$

On remarque ici que l'interface Σ est remplacée par son indice selon la ligne de maillage considérée pour éviter une surcharge des notations. Lorsqu'on développe les expressions pour le champ moyen et le champ turbulent ; on introduit alors les notations suivantes :

$$\begin{aligned} R_{\Omega}^{mf} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{\Omega}}\left[\sum_{l\in[i,j,k]}\left((F_{l+\frac{1}{2}}^{c} - F_{l-\frac{1}{2}}^{c}) + (F_{l+\frac{1}{2}}^{v} - F_{l-\frac{1}{2}}^{v})\right)\right] \\ R_{\Omega}^{tur} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{\Omega}}\left[\sum_{l\in[i,j,k]}\left((F_{l+\frac{1}{2}}^{ct} - F_{l-\frac{1}{2}}^{ct}) + (F_{l+\frac{1}{2}}^{vt} - F_{l-\frac{1}{2}}^{vt})\right) - \mathcal{V}_{\Omega}T_{\Omega}^{source}\right] \end{aligned} \tag{4.45}$$

où :

- R_Ω^{mf} résidu du champ moyen et R_Ω^{tur} résidu du champ turbulent.
- F^c et F^v représentent les flux numériques de convection et de diffusion du champ moyen à l'interface Σ_l ;
- F^{ct} et F^{vt} représentent les flux numériques de convection de diffusion du champ turbulent à l'interface Σ_l ;
- T_Ω^{source} représente les termes source numérique du champ turbulent au centre de la cellule Ω.

Dans ce travail, le choix des schémas pour estimer les différents termes du flux numérique $F_{\Sigma_l}^{num}$ a été imposé par le développement des méthodes numériques pour le calcul du gradient au sein d'*elsA*. En effet, la simulation du tremblement transsonique nécessite l'utilisation des méthodes numériques aptes à calculer des écoulements contenant à la fois des chocs et des couches de cisaillement.
Concrètement, les schémas utilisés pour la simulation du tremblement sont : centrés à dissipation scalaire comme le schéma de Jameson [2] utilisé par exemple par Deck [11], Brunet [5], Furlano [27] ... D'autre part les schémas décentrés à dissipation matricielle ou scalaire comme celui de Roe-MUSCL utilisé par [7] et [63] et il y a aussi les schémas décentrés basés sur une décomposition du vecteur flux comme celui Van Leer [68] ou encore AUSM+p.

D'autre part, l'opération de linéarisation des schémas numériques, indispensable pour la construction de ces méthodes , nécessite un travail important qui diffère d'un schéma numérique à l'autre. Le choix des schémas de discrétisation spatiale des termes convectifs et diffusifs est très importants.
Dans la section suivante, on va prendre le soin de bien expliciter les schémas numériques qui seront retenus dans cette étude et qui seront fortement utiles pour le formalisme de linéarisation dans le chapitre 6.

4.3.2 Discrétisation spatiale des équations du champ moyen

Dans le cadre de la simulation d'écoulements transsoniques où des discontinuités liées à la présence de chocs peuvent apparaître, l'utilisation de schémas décentrés pour la discrétisation des termes convectifs s'avère judicieuse. L'idée générale de cette approche par rapport aux schéma centrés, est la prise en compte de propriétés physiques de l'écoulement dans la discrétisation en considérant notamment les directions privilégiées de propagation de l'information dans l'écoulement (lignes caractéristiques). Dans la pratique, les schémas décentrés vers l'amont présentent l'avantage d'inclure implicitement une dissipation permettant d'éviter l'apparition d'oscillations au voisinage des discontinuités comme cela est observé avec un schéma centré. Il faut néanmoins noter que de nombreuse approches de stabilisation des schémas centrés ont été proposées dans la littérature, notamment les schémas de Jamson [2] et de Swanson [60], largement mis en oeuvre.

D'autre part, concernant le flux diffusif du champ moyen, *elsA* propose un flux diffusif centré avec évaluation des gradients de vitesse et de température aux centres de cellules ou aux centres des interfaces. Pour la présentation de la discrétisation du flux diffusif, on s'est largement inspiré de la thèse de Pham.C [56].

4.3.2.1 Discrétisation du flux convectif - Schéma de Roe

On définit le champ aérodynamique $\mathbf{W} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T$, le flux physique s'écrit dans le cas d'un système à cinq équations dans la direction $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$:

$$F^c = F^c \cdot \mathbf{n} = (\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + pI) \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{pmatrix} n_x + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{pmatrix} n_y + \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{pmatrix} n_z, \tag{4.46}$$

où H est l'enthalpie totale.

4.3.2.1.1 Flux de Roe. Premier ordre en espace

Soient les deux cellules Ω_i et Ω_{i+1} adjacentes et ordonnées dans une topologie croissante en contact par l'interface $\Sigma_{i+\frac{1}{2}}$ telles que présentées dans la figure (4.2).

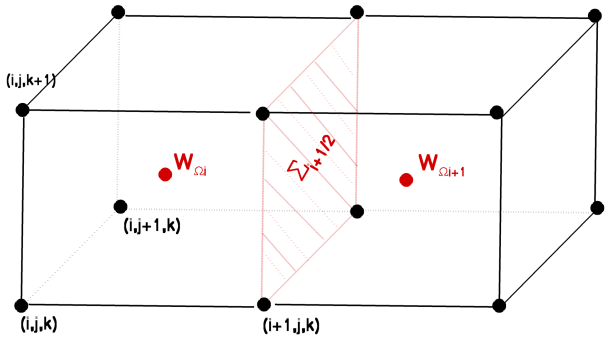


FIGURE 4.2 – *Description des cellules pour l'évaluation du flux de Roe sur l'interface* $\Sigma_{i+\frac{1}{2}}$.

Pour la direction i, (figure (4.2)) on définit dans un premier temps, pour une précision d'ordre 1 en espace, par état gauche et état droit les valeurs des variables conservatives au centre des cellules Ω_i et Ω_{i+1}.
Ils sont représentés par :

$$W_g = W_{\Omega_i} \text{ et } W_d = W_{\Omega_{i+1}}. \tag{4.47}$$

L'évaluation du flux convectif à l'interface $\Sigma_{i+\frac{1}{2}}$ de vecteur surface $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^x, \mathcal{S}^y, \mathcal{S}^z)^t$ est réalisée par un flux numérique proposé par Roe [67] et défini par :

$$F^c_{Roe}(W_g, W_d) = \frac{F^c(W_g) + F^c(W_d)}{2} - \frac{1}{2}|\mathbf{A}_{Roe}(\tilde{\chi})|\,(W_d - W_g) \tag{4.48}$$

où $\mathbf{A}_{Roe}(\tilde{\chi})$ correspond à la jacobienne du flux convectif par rapport aux variables conservatives estimées en un état moyen spécifiques des états gauche et droit, défini par

Roe.
Cette moyenne est calculé pour les variables ρ, $\mathbf{U}$, et $H = e + \frac{p}{\rho}$. La définition de $\tilde{\chi} = (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{H})^t$ à partir des états gauche et droit est donnée par :

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = \sqrt{\rho_g \rho_d} \\ \text{pour } \tilde{f} = (\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{H}) \text{ on a } \tilde{f} = \sqrt{\rho_d}\frac{\sqrt{\rho_g} f_g + \sqrt{\rho_d} f_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}} \end{cases} \tag{4.49}$$

La matrice $\mathbf{A}_{Roe}(\tilde{\chi})$ ainsi définie permet d'accéder au saut du flux convectif physique crée par la discontinuité entre les états gauche et droite de l'interface. Cette propriété est vérifiée par la relation :

$$\mathbf{A}_{Roe}(\tilde{\chi})(W_d - W_g) = F^c(W_d) - F^c(W_g)$$

En plus de ces propriétés cette matrice est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. : $|\mathbf{A}_{Roe}(\tilde{\chi})| = M diag(|\lambda_A|) M^{-1}$, la matrice $diag(|\lambda_A|)$ avec M inversible et λ_A représentent les valeurs propres.
Afin de simplifier la mise en oeuvre de ce flux numérique, le calcul du terme $|\mathbf{A}_{Roe}|(W_d - W_g)$ est remplacé par une décomposition présentée par R.Collercandy dans [9] :

$$|\mathbf{A}_{Roe}|(W_d - W_g) = \Delta F^c_{|_1} + \Delta F^c_{|_4} + \Delta F^c_{|_5} \tag{4.50}$$

avec :

$$\Delta F^c_{|_1} = |\lambda_1| \left\{ \left(\Delta\rho - \frac{\Delta p}{\tilde{c}^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \widehat{u} \\ \widehat{v} \\ \widehat{w} \\ \frac{\tilde{\mathbf{U}}^2}{2} \end{pmatrix} + \widehat{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta u - n_x \Delta\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} \\ \Delta v - n_y \Delta\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} \\ \Delta w - n_z \Delta\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} \\ \left(\tilde{\mathbf{U}}\cdot\Delta\mathbf{U}\right) - (\tilde{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{n})\Delta\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} \end{pmatrix} \right\} \tag{4.51}$$

$$\Delta F^c_{|^4_5} = |\lambda^4_5| \left(\frac{\Delta p \pm \widehat{\rho}\tilde{c}\Delta\mathbf{U}\cdot\mathcal{S}}{2\tilde{c}^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \pm n_x\tilde{c} \\ \tilde{v} \pm n_y\tilde{c} \\ \tilde{w} \pm n_z\tilde{c} \\ \tilde{h} \pm \tilde{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{n}\tilde{c} \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

où toutes les grandeurs $\tilde{.}$ sont les moyennes de Roe entre l'état gauche et l'état droit. La notation $\Delta\cdot$ désigne la différence entre l'état droit et l'état gauche pour la quantité " $\cdot$ ". Les valeurs propres de $\mathbf{A}_{Roe}$ sont données par :

$$\lambda_1 = \tilde{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{n} \quad , \quad \lambda_4 = \tilde{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{n} + \tilde{c}||\mathbf{n}|| \quad \text{et} \quad \lambda_5 = \tilde{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{n} - \tilde{c}||\mathbf{n}|| \tag{4.53}$$

L'expression du flux de Roe dans ce cas est :

$$F^c_{Roe}(W_g, W_d) = \frac{F^c(W_g) + F^c(W_d)}{2} - \left(\Delta F^c{}_{|_1} + \Delta F^c{}_{|_4} + \Delta F^c{}_{|_5}\right) \tag{4.54}$$

où $\Delta F^c{}_{|_1}$, $\Delta F^c{}_{|_4}$ et $\Delta F^c{}_{|_5}$ sont évaluées à partir des expressions (4.51) et (4.52).

Ce schéma à 3 points par direction d'espace est connu pour sa robustesse mais sa forte dissipation numérique(ordre 1) ne lui permet pas bien sûr de fournir des solutions

suffisamment précises dans des maillages raisonnablement fins. En effet, pour obtenir la solution physique du problème, il faut rendre le schéma de Roe compatible avec la condition d'entropie. Il s'avère que le champ aérodynamique numérique obtenu à partir du flux de Roe tel que présenté ici ne vérifie pas toujours le second principe de la thermodynamique (possibilité de diminution de l'entropie à la traversée d'un choc). Afin d'obtenir des solutions physiques, Harten [22] a montré que la solution vérifie la condition d'entropie si le flux de Roe (4.48) est modifié de la manière suivante :

$$F_{Roe}(W_g, W_d) = \frac{F^c(W_g) + F^c(W_d)}{2} - \frac{1}{2}\Psi(|\mathbf{A}_{Roe}|)\,(W_d - W_g) \tag{4.55}$$

où $\Psi(|\mathbf{A}_{Roe}|) = Mdiag(\psi(\lambda_A))M^{-1}$, avec la fonction ψ est définie par :

$$\psi = \begin{cases} |z| & si \quad |z| \geq \sigma, \\ \dfrac{z^2 + \sigma^2}{2\sigma} & si \quad |z| \leq \sigma, \end{cases} \tag{4.56}$$

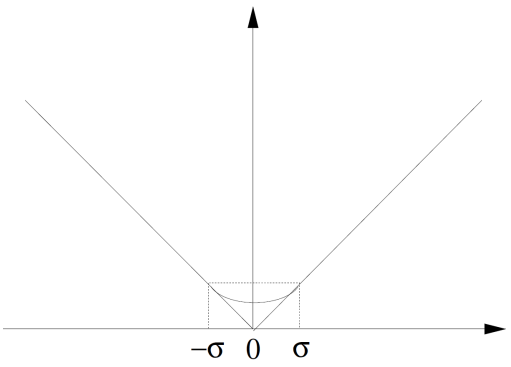


FIGURE 4.3 – *La fonction ψ de la correction de Harten*

La fonction ψ s'applique aux valeurs propres de la matrice jacobienne $\mathbf{A}_{Roe}$. Le paramètre de correction entropique σ est proportionnel à un majorant de la vitesse maximale des ondes :

$$\sigma = \epsilon_\sigma \left(|\overline{u}| + |\overline{v}| + |\overline{w}| + \overline{a}\right). \tag{4.57}$$

Avec cette formulation, le flux de Roe reste toujours dissipatif au niveau des points où la vitesse caractéristique s'annule. Ce schéma est mis en oeuvre dans cette thèse, principalement pour son efficacité sur machines vectorielles. Son écriture pratique est en effet aisément vectorisée à la compilation sur la machine utilisée. Cependant, ce schéma de Roe est dépourvu de fonctions tests dans la boucle sur les indices, tests qui inhiberaient potentiellement la vectorisation. L'inconvénient de cette correction est qu'elle introduit le paramètre ϵ_σ qui doit être ajusté en fonction des conditions d'écoulement.
Ces formules sont différentiées pour la linéarisation du flux convectif dans le logiciel *elsA*.

4.3.2.1.2 Extension au second ordre d'approximation en espace (méthode MUSCL) Cette technique consiste à choisir pour les états à gauche et à droite de l'interface, dans les formules du flux numérique utilisé, des valeurs du vecteur $\mathbf{W}$ extrapolées à partir des valeurs prises dans les cellules de part et d'autre de l'interface.

Il apparaît qu'une extrapolation sur les variables primitives est le compromis le plus judicieux en terme de précision-robustesse et c'est pour cette raison qu'on a opté pour ce choix dans cette étude.
L'extrapolation des variables conduit à l'apparition d'oscillations dans la solution numérique au voisinage des discontinuités. Ce phénomène peut naturellement se révéler problématique lors de la mise en oeuvre d'un code de calcul car les oscillations de pression ou de masse volumique en particulier peuvent conduire à l'apparition de valeurs négatives pour ces quantités. Ce résultat est d'une part physiquement impossible et d'autre part génère inévitablement l'arrêt intempestif du code.
Depuis les travaux de Harten, l'apparition des oscillations dans la solution d'un schéma numérique peut être précisément définie grâce à la notion de variation totale. L'augmentation de l'ordre des schémas obtenus par la procédure MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws) génère la création des oscillations dans la solution numérique. Il est cependant possible de corriger ce problème en introduisant un processus de limitation dans l'extrapolation des variables.

La procédure permettant une extension au second ordre d'approximation en espace est la méthode MUSCL de Van Leer [44] qui repose sur une reconstruction linéaire par morceaux de la solution approchée. Cette méthode est indépendante du schéma décentré mis en oeuvre et est appliquée en maillage structuré successivement dans les trois directions du maillage. L'extrapolation est réalisée sur un ensemble de variables "'primitives"' P_{cell} en bijection avec les variables conservatives W_{cell}. On fait le choix suivant pour les variables P_{cell} :

$$P_{cell} = (\rho, u, v, w, p)^t. \tag{4.58}$$

La transformation entre l'état conservatif et l'état primitif est bijective. Elle est donnée par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ 0 & -\frac{(\gamma-1)\rho u}{2\rho} & -\frac{(\gamma-1)\rho v}{2\rho} & -\frac{(\gamma-1)\rho w}{2\rho} & (\gamma-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

Ayant accès à l'état primitif moyen de chaque cellule, on va simplifier la présentation en écrivant les formules dans le cas particulier d'un maillage structuré en particularisant la direction curviligne qui est décrite par l'indice de maillage i, les indices j et k étant fixés. On repère ici une cellule de maillage par les indices (i, j, k).
On considère ainsi deux cellules, Ω_i et Ω_{i+1} séparées par l'interface $\Sigma_{i+\frac{1}{2}}$. Les états primitifs moyens au centre de ces cellules sont P_i et P_{i+1}. Le principe de l'extension au second ordre est de définir, de part et d'autre de l'interface, les états P^g et P^d. On utilise pour cela un processus de reconstruction linéaire par morceaux de la solution obtenue aux centres des cellules :

$$\begin{cases} P^g_{i+\frac{1}{2}} = P_i + 0.5 \times slopi\,(i, j, k) \\ P^d_{i+\frac{1}{2}} = P_{i+1} - 0.5 \times slopi\,(i+1, j, k) \end{cases} \tag{4.60}$$

où **slopi** [46] désigne la pente de la variation des valeurs primitives par unité d'indice i au centre d'une cellule $\Omega_{i,j,k}$. Elle est calculée par la formule :

$$slopi\,(i,j,k) = \Phi\left(P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}, P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}\right) \tag{4.61}$$

où Φ est une fonction qui va permettre d'assurer une limitation des pentes lors du processus de reconstruction linéaire par morceaux du champ à partir des valeurs moyennes du champ au centre des cellules. Cette fonction assure plus généralement une condition dite de monotonicité. Elle est présentée en détails dans [44]. Le seul limiteur différentiable disponible dans *elsA* est le limiteur de Van Albada [28]. Dans le cadre de ce travail, il a été sélectionné et il est définit comme suit :

$$\Phi_{va}(a,b) = \frac{\left(b^2+\epsilon\right)a + \left(a^2+\epsilon\right)b}{a^2+b^2+2\epsilon} \tag{4.62}$$

avec ϵ très petit fixé.
Les variables conservatives $\mathbf{W}^{g,d}_{i\pm\frac{1}{2}}$ intervenant dans les flux sont déduites des valeurs $P^{g,d}_{i\pm\frac{1}{2}}$ par la transformation bijective définie au (4.59).

4.3.2.1.3 Évaluation du flux convectif pour une interface au bord du domaine La présentation de la discrétisation du flux convectif faite dans la section précédente est valable pour les interfaces internes au domaine de calcul. Pour les interfaces à la frontière, sans traitement particulier, les formules à quatre points ne sont plus applicables. Le code de calcul *elsA* intègre aux frontières des rangées supplémentaires de cellules appelées "cellules fictives" telles que présentées dans la figure (4.6). Ces cellules permettent de calculer tous les états "gauche" et "droit" des interfaces internes au domaine de calcul (plus particulièrement pour les deux rangées d'interfaces voisines à une frontière du domaine). La difficulté de cette technique consiste à réaliser un bon "remplissage" des cellules fictives en fonction des conditions aux limites et de raccord. On abordera plus précisément ce remplissage lors de la présentation des conditions aux limites et de raccord ultérieurement.

4.3.2.2 Discrétisation du flux diffusif

Dans cette section on notera le coefficient de viscosité totale $\overline{\mu} = \mu + \mu_t$ et le coefficient de conductivité thermique totale $\overline{\kappa} = \kappa + \kappa_t$.
Le flux diffusif associé aux grandeurs du champ moyen pour une interface de vecteur surface $\mathcal{S} = (\mathcal{S}^x, \mathcal{S}^y, \mathcal{S}^z)^t s$ peut s'écrire :

$$\mathbf{F}^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f^v{}_{21} & f^v{}_{22} & f^v{}_{23} \\ f^v{}_{31} & f^v{}_{32} & f^v{}_{33} \\ f^v{}_{41} & f^v{}_{42} & f^v{}_{43} \\ f^v{}_{51} & f^v{}_{52} & f^v{}_{53} \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

La diffusion est due aux gradients de vitesse et de température présents dans l'écoulement. Ainsi, les composantes de la matrice $\mathbf{F}^v$ peuvent être détaillées grâce aux lois de Newton et de Fourier :

$$\mathbf{F}^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \overline{\mu}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial w}{\partial z}\right) & \overline{\mu}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \overline{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \overline{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \overline{\mu}\left(-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial w}{\partial z}\right) & \overline{\mu}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \overline{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \overline{\mu}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \overline{\mu}\left(-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \overline{k}\frac{\partial T}{\partial x} & \overline{k}\frac{\partial T}{\partial y} & \overline{k}\frac{\partial T}{\partial z} \\ +f^v{}_{21}u + f^v{}_{22}v + f^v{}_{23}w & +f^v{}_{31}u + f^v{}_{32}v + f^v{}_{33}w & +f^v{}_{41}u + f^v{}_{42}v + f^v{}_{43}w \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

La discrétisation du flux diffusif consiste alors à choisir un schéma qui permet d'évaluer numériquement les gradients des composantes (u, v, w) de la vitesse du fluide et de la température T. Ces gradients peuvent être évalués selon deux approches : au centre des cellules ou bien au centre des interfaces.
La linéarisation envisagée dans les méthodes de calculs de gradients pour le flux diffusif se révèle être mieux adaptée par une approche de calcul de gradients aux centres des cellules. Par ailleurs, on note que la deuxième approche présente un inconvénient de surcoût de mémoire par rapport à la première. Pour manipuler une différentielle plus compacte, on retient la discrétisation des gradients aux centres des cellules.
La sous-section suivante décrit le principe de l'évaluation des gradients aux centres des cellules.

4.3.2.2.1 Gradients évalués aux centres des cellules Pour ne pas alourdir la présentation de la méthode de calcul, on considère le cas d'un maillage bidimensionnel avec des cellules de longueur unité suivant la troisième direction de l'espace comme l'indique la figure (4.4). L'extension au cas d'un maillage tridimensionnel peut être réalisée par un traitement similaire sur les interfaces de type k.
On récapitule sur cette dernière figure, les caractéristiques du stencil utilisé pour l'évaluation du gradient aux centres de cellules.

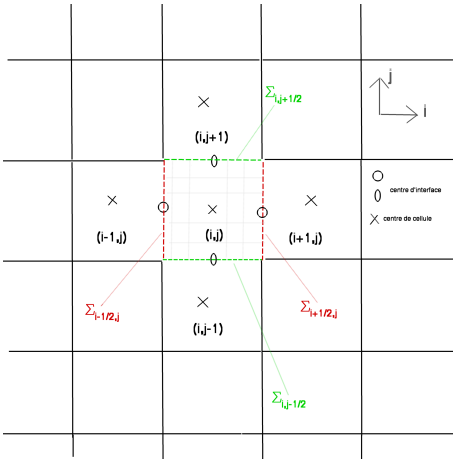


FIGURE 4.4 – *Stencil pour le calcul de gradients aux centres des cellules*

Soit $g \in \{u, v, w, T\}$ la grandeur scalaire dont on veut évaluer son gradient au centre d'une cellule d'indices (i, j). On considère la dérivée d'une grandeur par rapport à x.

Afin d'obtenir la dérivée de cette même grandeur par rapport à y ou z, il suffit de remplacer x par y ou z.

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

Le théorème de Green permet d'écrire :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \int_{\mathcal{V}_{i,j}} \frac{\partial g}{\partial x} dV = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \oint_{\mathcal{S}} g n_x d\mathcal{S} \quad = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \oint_{\mathcal{S}} g d\mathcal{S}^x \tag{4.66}$$

avec $\mathcal{V}_{(i,j)}$ le volume de la cellule $\Omega_(i,j)$.
L'évaluation du gradient de g est obtenue en effectuant le bilan de flux au centre de la cellule :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{i,j} &\approx \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left[g_{i+\frac{1}{2},j} \mathcal{S}^x_{i+\frac{1}{2},j} - g_{i-\frac{1}{2},j} \mathcal{S}^x_{i-\frac{1}{2},j} + g_{i,j+\frac{1}{2}} \mathcal{S}^x_{i,j+\frac{1}{2}} - g_{i,j-\frac{1}{2}} \mathcal{S}^x_{i,j-\frac{1}{2}} \right] \\ &\approx \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left[\frac{1}{2}(g_{i+1,j} + g_{i,j}) \mathcal{S}^x_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{1}{2}(g_{i,j} + g_{i-1,j}) \mathcal{S}^x_{i-\frac{1}{2},j} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}(g_{i,j+1} + g_{i,j}) \mathcal{S}^x_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(g_{i,j} + g_{i,j-1}) \mathcal{S}^x_{i,j-\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \tag{4.67}$$

avec :
$\mathcal{S}^x_{i\pm\frac{1}{2},j}$ projection suivant la direction x du vecteur surface de l'interface $\Sigma_{i\pm\frac{1}{2},j}$ et $g_{i+\frac{1}{2},j} = \dfrac{g_{i,j} + g_{i+1,j}}{2}$.

Les signes moins qui apparaissent dans (4.67) s'expliquent par la convention de surfaces orientées dans le sens des indices croissants. Quand la grandeur g a pour indice entier, elle est donc évaluée aux centres de cellules, alors que celle comportant un indice demi-entier est extrapolée comme une moyenne faisant intervenir des cellules adjacentes. On obtient ainsi un stencil pour la discrétisation de gradient évalué aux centres de cellules de quatre points pour un problème bidimensionnel.
Réellement, le stencil comporte cinq points comme le coefficient multiplicatif de $g_{i,j}$ est nul alors il est réduit à quatre points. En effet,

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \frac{1}{2}(\mathcal{S}^x_{i+\frac{1}{2},j} - \mathcal{S}^x_{i-\frac{1}{2},j} + \mathcal{S}^x_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathcal{S}^x_{i,j-\frac{1}{2}}) = \int_{\partial\mathcal{V}} 1 \cdot \vec{\mathbf{n}} = \int \nabla 1 d\mathcal{V} = 0 \tag{4.68}$$

la projection sur x de l'intégration du vecteur surface élémentaire sur un volume fermé est nulle.

Dans le cas de la discrétisation avec un gradient évalué aux centres des cellules, on utilise une discrétisation centrée pour l'évaluation du flux diffusif sur la surface de l'interface interne $\mathcal{S}_{i+\frac{1}{2},j}$:

$$\mathbf{F}^v \cdot \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\mathbf{F}^v{}_{i,j} \cdot \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2},j} + \mathbf{F}^v{}_{i+1,j} \cdot \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2},j}}{2} \tag{4.69}$$

On obtient ainsi un stencil pour la discrétisation du flux diffusif avec gradients évalués aux centres des cellules. En disposant des gradients de vitesse et de température aux

centres des cellules, l'évaluation numérique de $\mathbf{F}^v$ est réalisée en remplaçant les valeurs analytiques des gradients par leurs estimations numériques. Toutes les autres grandeurs apparaissant dans le tenseur de diffusion comme $\overline{\mu}$, $\overline{\kappa}$ et les composantes de U sont évaluées au centre de la cellule.
D'autre part, les formules ainsi présentées pour la discrétisation du flux diffusif ne sont plus applicables pour le traitement du flux diffusif pour une interface frontière du domaine de calcul, car elles ne tiennent pas compte de certaines conditions particulières. On utilise donc, des rangées de cellules fictives ajoutées au domaine de calcul pour évaluer ce flux au centre de la cellule. Les détails de remplissage des cellules fictives seront exposées dans les parties traitant le traitement des conditions aux limites et de raccord.

4.3.3 Discrétisation spatiale du modèle de turbulence

On s'intéresse maintenant à la discrétisation du résidu turbulent définie dans l'expression (4.45).
On rappelle les deux équations de transport qui définissent le modèle $(k-\omega)$ de Wilcox :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{U}\rho k - (\mu + \sigma^* \mu_t)\nabla k] = \mathbf{P} - \beta^* \rho \omega k \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{U}\rho \omega - (\mu + \sigma \mu_t)\nabla w] = \frac{\gamma \omega}{k}\mathbf{P} - \beta \rho \omega^2 \end{array} \tag{4.70}$$

4.3.3.1 Flux convectif pour le champ turbulent

Le flux convectif physique pour le champ turbulent $(\rho k, \rho\omega)^t$ est donné par la formule :

$$F^{ct} = \begin{pmatrix} \nabla \rho k U \cdot \mathbf{n} \\ \nabla \rho \omega U \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} \tag{4.71}$$

Il est discrétisé par un flux de Roe à l'ordre 1 :

$$F^{ct}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(F^{ct}_{i+1} + F^{ct}_{i}\right) \tag{4.72}$$

4.3.3.2 Flux diffusif pour le champ turbulent

Le flux diffusif physique du champ turbulent pour une interface de vecteur surface $\mathcal{S}$ est donné par :

$$F^{vt} = \begin{pmatrix} \nabla((\mu + \sigma^* \mu_t)\nabla k) \cdot \mathbf{n} \\ \nabla((\mu + \sigma^* \mu_t)\nabla \omega) \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} \tag{4.73}$$

Ce flux est discrétisé par un schéma centré, avec les gradients de k et ω évalués au centres des cellules par la même procédure utilisée pour l'évaluation des gradients apparaissant dans le flux diffusif du champ moyen.

4.3.3.3 Terme source

Le terme source des équations turbulentes du modèle $(k-\omega)$ de Wilcox est évalué par l'expression :

$$T^{source} \simeq \begin{pmatrix} S_k = \mathbf{P} - \beta^* \rho k \omega \\ S_w = \frac{\alpha \rho}{\mu_t}\mathbf{P} - \beta \rho \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Prod_6 + Dest_6 \\ Prod_7 + Dest_7 \end{pmatrix} \tag{4.74}$$

avec :

$$\begin{cases} Prod_6 = \mathbf{P}, Prod_7 = \frac{\alpha\rho}{\mu_t}\mathbf{P} : \text{ les composantes du terme de production de k,} \\ Dest_6 = -\beta^*\rho k\omega, Dest_7 = -\beta\rho\omega^2 : \text{ les composantes du terme de destruction D.} \end{cases} \tag{4.75}$$

Pour discrétiser les termes sources, il suffit d'établir la discrétisation du terme de production $\mathbf{P}$, ensuite celle du terme de destruction D.
On rappelle, comme définie auparavant dans (4.32), l'expression de $\mathbf{P}$:

$$P = \tau_r : \nabla\mathbf{U} = \left(\mu_t\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] - \frac{2}{3}\mu_t\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}\right)\frac{\partial u_i}{x_j} \tag{4.76}$$

Les gradients des composantes de vitesse (u, v, w) sont évalués aux centres de cellules. Leur discrétisation se fait de la même manière qu'au (4.67) en prenant $g = \{u, v, w\}$.
D'autre part, le terme de destruction D a été discrétisé dans *elsA* sous la forme $D = 2\mu(\sqrt{k}) \cdot (\sqrt{k})$. On extrait tout d'abord $\sqrt{k}$ ensuite on évalue le gradient de cette quantité aux centre de cellules. Pour cela, il suffit de prendre $g = \sqrt{k}$ dans la formule (4.67).
Dans les cellules adjacentes à une frontière, on utilise les valeurs des quantités $\mathbf{U}$ et $\sqrt{k}$ données par la condition aux limites. Pour le calcul de $\nabla(\nabla\mathbf{U})$ dans une cellule adjacente à la frontière, il faut évaluer $\nabla\mathbf{U}$ dans les cellules fictives. Pour cette raison, $\mathbf{U}$ est extrapolé à l'ordre 0 [56].

4.4 Conditions aux limites

On se propose d'exposer les conditions aux limites imposées sur la frontière Σ du domaine de calcul Ω. On admet que la frontière Σ est constituée d'éléments de surface de deux types. Le premier type, noté Σ_w, correspond aux surfaces matérielles, alors que le second type, noté Σ_∞, regroupe les frontières introduites artificiellement pour borner le domaine de calcul Ω (figure 4.5).

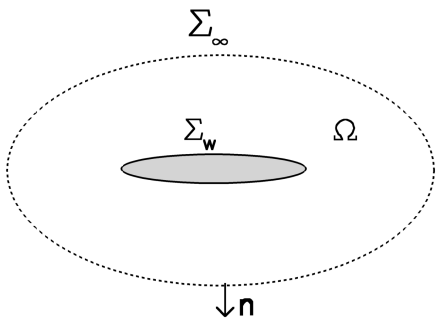


FIGURE 4.5 – *Types de frontière*

Les frontières sont traitées en considérant la physique des phénomènes mis en jeux : l'adhérence du fluide à une paroi ; les phénomènes de convection du fluide et de propa-

gation d'ondes acoustiques. De part l'utilisation de schémas d'ordre deux pour la discrétisation du flux convectif, on ajoutera deux rangées de cellules au delà des frontières du domaine telles que représentées dans la figure(4.6) .

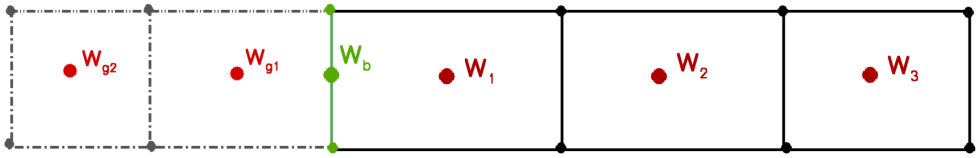


FIGURE 4.6 – *État à la frontière du domaine*

Les notations retenues pour les différents états près d'une frontière sont les suivantes :

- "b" : l'état à la frontière ;
- "1" , "2" et "3" :les états moyens au centre des cellules du domaine de calcul ;
- "g1" et "g2" : les états moyens au centre des cellules en dehors du domaine de calcul, ces cellules sont appelées "cellules fictives".

Les sections suivantes présentent, pour chacune des conditions aux limites, les expressions des états b en fonction des états du voisinage. Les relations seront données pour les variables primitives (en bijection avec les variables conservatives).

4.4.1 Paroi adiabatique

Cette condition assure l'adhérence du fluide à la paroi et également l'isolement thermique de la paroi. Ainsi, elle n'échange aucun flux de chaleur avec le fluide. Une condition d'absence de gradient de pression normale à la paroi est également utilisée. Les expressions reliant les grandeurs primitives aux centre de la cellule adjacente à celle au centre d'une interface de paroi visqueuse, sont données par :

$$\begin{cases} \rho_b = \rho_1 \\ \mathbf{U}_b = 0 \\ p_b = p_1 \\ \mathbf{q}_b = 0 \end{cases} \tag{4.77}$$

Pour cette condition, il s'avère que le remplissage des cellules fictives, pour un calcul précis du flux diffusif à la paroi (qui permet d'éviter toute rupture de pente dans le profil de vitesse de la sous-couche laminaire) doit vérifier :

$$\begin{cases} p_{g1} = p_{g2} = p_b \\ \rho_{g1} = \rho_{g2} = \rho_b \\ \mathbf{U}_{g1} = \mathbf{U}_{g2} = 2\mathbf{U}_b - \mathbf{U}_1 \end{cases} \tag{4.78}$$

A la paroi, on impose pour les grandeurs turbulentes, de part l'utilisation d'un modèle de type $(k-\omega)$ de Wilcox, pour l'énergie cinétique la condition $\rho k = 0$. Ainsi, pour la dissipation spécifique, on impose ω tend vers l'infini à la paroi selon la loi $\lim_{d\to 0}\omega = \frac{6\nu}{\beta d^2}$ et on impose à $\rho\omega$ une valeur dont l'expression fait intervenir la distance entre la paroi et le centre de la première cellule comme présenté dans [46].

4.4.2 Non réflexion

La condition de non-réflexion est destinée à éviter la réflexion des ondes transitoires sur la frontière. Pour cette condition aux limites, on utilise toutes les relations caractéristiques associées à des relations caractéristiques sortantes pour relier W_b à W_1 et les caractéristiques entrantes pour relier W_b à W_∞, l'état à l'infini. Le concept de relation caractéristique n'est pas détaillé ici, mais on peut se rapporter au Manuel théorique d'*elsA* [46].
Les deux variables turbulentes sont extrapolées.
Cependant, avec la définition d'un état externe uniforme, ce traitement de frontière peut parfois s'avérer dangereux car il renvoie des ondes parasites dans le domaine de calcul, si la frontière est placée trop proche du corps.

On définit ici les coefficients ϵ_0, ϵ_m et ϵ_p :

$$\epsilon_0 = \begin{vmatrix} 1 & \text{si } (\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}_i)_0 < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{vmatrix}$$

$$\epsilon_m = \begin{vmatrix} 1 & \text{si } (c - \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}_i)_0 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{vmatrix}$$

$$\epsilon_p = \begin{vmatrix} 1 & \text{si } (-c - \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}_i)_0 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{vmatrix}$$

où $\mathbf{n}_i$ est la normale intérieure. Deux types d'équations sont disponibles. L'une est basée sur les invariants de Riemann et l'autre sur l'entropie :

$$\epsilon_0\left[\frac{P_b}{\rho_b^\gamma} - \frac{P_0}{\rho_0^\gamma}\right] + (1-\epsilon_0)\left[\frac{P_b}{\rho_b^\gamma} - \frac{P_\infty}{\rho_\infty^\gamma}\right] = 0$$

$$\epsilon_m\left[\frac{2}{\gamma-1}(c_b - c_0) - ((\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}_i)_b - (\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}_i)_0)\right] + (1-\epsilon_m)\left[\frac{2}{\gamma-1}(c_b - c_\infty) - ((\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}_i)_b - (\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}_i)_\infty)\right] = 0$$

$$\epsilon_p\left[\frac{2}{\gamma-1}(c_b - c_0) + ((\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}_i)_b - (\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}_i)_0)\right] + (1-\epsilon_p)\left[\frac{2}{\gamma-1}(c_b - c_\infty) + ((\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}_i)_b - (\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}_i)_\infty)\right] = 0$$

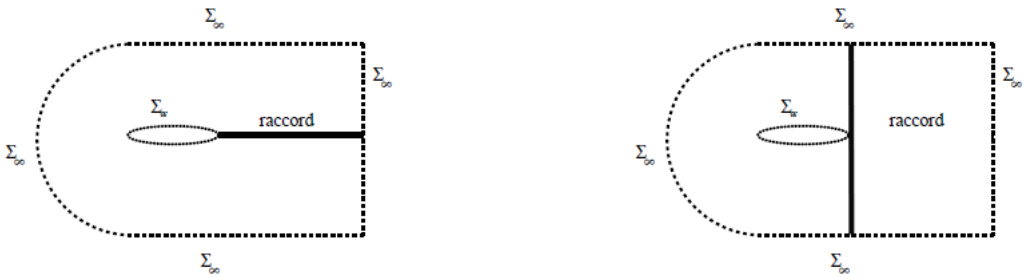
4.4.3 Champ turbulent

Pour le champ turbulent, les grandeurs transportées doivent être imposées à l'infini. Elles peuvent être calculées en fonction du taux de turbulence T_u et de la viscosité turbulent à l'infini μ_t, selon les formulations suivantes [46] :

$$\begin{aligned} (\rho k)_\infty &= \frac{3}{2}T_u^2\rho_\infty U_\infty^2 \\ (\rho\omega)_\infty &= \frac{(\rho k)_\infty}{\mu_{t_\infty}}\rho_\infty \end{aligned} \tag{4.79}$$

4.5 Condition de "raccord"

La décomposition d'un domaine de calcul en plusieurs sous-domaines peut être motivée par diverses considérations telles que : la complexité de la géométrie et son incompatibilité avec la construction d'un maillage structuré unique, la capacité mémoire de l'ordinateur utilisé ne permet pas de manipuler tous les points de discrétisation simultanément. Pour certaines frontières du domaine de calcul, il est nécessaire d'effectuer un raccordement avec d'autres frontières constituant le domaine de calcul (figure (4.7 a)) ou bien de raccorder des frontières appartenant à des blocs de maillage distinct (figure 4.7 (b)).



(a) (b)

FIGURE 4.7 – *Conditions de raccord*

4.5.1 Définition des frontières raccord

La figure (4.7) montre la décomposition du domaine de calcul en sous-domaines et ajoute aux frontières matérielles et physiques des frontières de raccord . On appelle alors frontière une portion de surface qui borne le sous-domaine de calcul et qui est représentée par un rectangle dans l'espace des indices. Les points de la frontière sont des noeuds du maillage qui appartiennent à cette frontière. Le traitement de raccord concerne les cellules de discrétisation pour lesquelles, du fait de la proximité d'une frontière de raccord, les traitements numériques usuels ne sont pas applicables. L'objectif de ces traitements spéciaux est d'assurer une précision de discrétisation de l'écoulement dans chaque voisinage de raccord, proche (voir identique, si possible) de celle que l'on obtiendrait si un seul sous-domaine recouvrait largement ce voisinage. Plusieurs types de frontières de raccord existent. En pratique, on va considérer uniquement le type de frontière adjacente coïncident (tous les points d'un sous-domaine coïncident avec ceux d'une frontière d'un autre sous-domaine) comme le montre la figure (4.8).

Ces raccords sont utilisés pour connecter deux blocs de calcul ou pour lier les frontières d'un même bloc. Ainsi, on peut traiter des maillages multi-blocs qui permettent une plus grande souplesse dans la construction de la topologie du domaine de calcul. Ce type de raccord réalise une mise en correspondance des cellules fictives des domaines à raccorder (généralement deux rangées de cellules fictives dont celles utilisées pour des flux précis à l'ordre deux) avec des cellules réelles de ces domaines. Ce qui permet d'assurer un calcul de flux à travers le raccord identique à celui réalisé sur le domaine complet sans raccord.

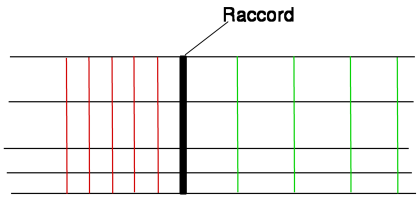


FIGURE 4.8 – *Frontières adjacentes coïncidentes*

4.5.2 Traitements numériques des raccords

On rappelle que la discrétisation utilisée est de type "*cell-centred*" [46] pour laquelle les variables de calcul sont connues aux barycentres des cellules de maillage.
On distingue deux étapes : l'extraction des données dans le sous-domaine opposé, et les traitements numériques.

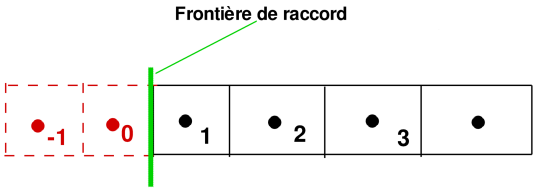


FIGURE 4.9 – *Cellules de discrétisation au voisinage d'un raccord*

Pour la première étape, les grandeurs sont connues aux barycentres des cellules du sous-domaine considéré (1,2,3 de la figure (4.9) et elles sont calculées, à partir des valeurs connues dans le sous-domaine opposé dans deux rangées de cellules fictives (0, -1 de la figure (4.9)). Le principe dans le cas d'une frontière adjacente coïcidente est que le nombre de cellule fictives considéré dépend pour ce type de frontière de l'ordre de l'opérateur numérique considéré, de manière à obtenir une discrétisation de type "point courant", identique à celle qui existerait s'il n'y a pas de raccord multi-domaine à cet endroit.

D'autre part, la deuxième étape s'appuie largement sur la présentation des schémas au point courant, ainsi que sur celle du traitement des conditions aux limites physiques.

Le principe dans le cas d'une frontière adjacentes coïcidente est d'appliquer les formules de type point courant après avoir extrait dans le sous-domaine opposé les valeurs sur le nombre de couches de maillage nécessaire au traitement considéré.
Le lecteur intéressé, peut se diriger vers le manuel théorique d'*elsA* [46] pour mieux comprendre les détails techniques du traitement numérique des raccords..

4.6 Intégration en temps

Compte tenu du fait qu'on a repris les techniques d'avancement en temps disponibles dans *elsA*, on se contente ici de récapituler les points principaux de la stratégie suivie.
Le système des équations différentielles issu de la formulation temps/espace découplé avec la méthode de volume fini s'écrit

$$\frac{d}{dt}W_\Omega = \mathbf{R}_\Omega. \tag{4.80}$$

avec $\mathbf{R}_\Omega$ est le résidu de la modélisation qui contient les contributions spatiale du flux convectif, du flux diffusif et du terme source.
On a donc :

$$\begin{aligned} &\tfrac{\Delta W}{\Delta t} = R(W+\Delta W) = (R(W) + \tfrac{\partial R}{\partial W}\delta W), \\ &\Delta W - \Delta t \tfrac{\partial R}{\partial W}\Delta W = \Delta t R(W) \end{aligned} \tag{4.81}$$

4.6.1 Calcul stationnaire

Les calculs stationnaires sont réalisés avec des schémas Backward-Euler, introduits par Beam et Warming [24] dans les années 70. La solution stationnaire étant définie par le système d'équations non linéaires $\mathbf{R}(W) = 0$ (traduisant la nullité de la somme bilan des flux + terme source sur l'ensemble des cellules d'un maillage structuré).

Le schéma Backward-Euler utilisé s'écrit donc :

$$\left(I - \Delta t \frac{dR}{dW}^{(app)}\right)(W^{(n+1)} - W^{(n)}) = \Delta t R(W^{(n)}) \tag{4.82}$$

avec un pas de temps $t^n = n\Delta t$ et $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. La matrice $\frac{dR}{dW}^{(app)}$ [18] est une certaine approximation de la différentielle $\frac{dR}{dW}$. La difficulté est précisément de construire des matrices $\frac{dR}{dW}^{(app)}$ conduisant à une matrice implicite bien conditionnée et à un schéma robuste et performant. A convergence, on voit qu'on a résolu le système d'équations initiales ; lorsque Δt tend vers l'infini, on voit apparaître les itérations d'une méthode de Newton avec différentielle approchée pour le système initial. Dans ces calculs le système des grandeurs turbulentes et le système du champ moyen sont avancés en temps de manière découplée. On distingue désormais le résidu des équations du champ moyen et le résidu des équations de la turbulence :

$$\begin{cases} R^{mf}(W) = 0 \\ R^{t}(W, W^t) = 0 \end{cases} \tag{4.83}$$

Définir le schéma Backward-Euler revient à définir deux matrices $\frac{dR^{mf}}{dW}^{(app)}$ et $\frac{\partial R^t}{\partial W^t}^{(app)}$. Le schéma correspondant s'écrit alors :

$$\begin{cases} \left(I - \Delta t \frac{dR^{mf}}{dW}^{(app)}\right)(W^{(n+1)} - W^{(n)}) = \Delta t R^{mf}(W^{(n)}) \\ \left(I - \Delta t \frac{\partial R^t}{\partial W^t}^{(app)}\right)(W^{t(n+1)} - W^{t(n)}) = \Delta t R^t(W^{(n+1)}, W^{t(n)}) \end{cases} \tag{4.84}$$

Une revue bibliographique de ce type de schémas a été donnée par Briley et McDonald [19] .
Dans *elsA*, il y a deux phases implicites de ce type qui sont disponibles ; elles sont appelées LURELAX [18] et LUSSOR (LU-Symmetric Successive Over Relaxation) [83]. Chacune est disponible dans des versions dite "scalaire" ou "matricielle".

La résolution de ces systèmes par une méthode itérative avec relaxation, sera décrite plus tard dans la section (7.1.1).

Dans notre cadre d'étude, les équations du champ moyen sont implicites en utilisant la méthode Backward-Euler avec laquelle on met en oeuvre une phase implicite LUSSOR-SCA dite "scalaire" qui offre un bon compromis entre efficacité et place mémoire. En effet, la forme LUSSOR a pour avantage de permettre une résolution quasi exacte du système par application d'une succession de cycles de relaxation. De plus, l'intérêt de cette phase implicite scalaire est également qu'elle peut être couplée indifféremment avec une phase explicite s'appuyant sur un schéma de Roe.

On définit maintenant le champ discret avec un pas de temps Δt. Usuellement, pour les calculs stationnaires, le pas de temps imposé dans chaque cellule est le produit de ce pas de temps de référence - local - par le nombre CFL. La précision du schéma est discutée à partir de l'équation :

$$\left(\frac{I}{\Delta t} - \frac{dR}{dW}^{(app)}\right)\left(W^{(n+1)} - W^{(n)}\right) = R\left(W^{(n)}\right) \tag{4.85}$$

Pour cette équation (ou à convergence des pas de relaxation pour les schémas utilisés en pratique) on trouve une précision d'ordre un en temps et une précision en espace égale à celle du schéma utilisé pour $\mathbf{R}$ (en l'occurrence d'ordre deux sur maillage régulier pour les flux numériques choisis). On montre par ailleurs que le schéma numérique avec relaxation utilisant deux pas de relaxation pour l'inversion approchée de la matrice n'est pas consistent en temps. Pour plus de détails, on peut se référer au manuel théorique d'*elsA* [46].

4.6.2 Calcul instationnaire

Pour le cas des écoulements instationnaires, on doit préserver la même précision en temps dans toutes les régions de l'écoulement. L'avancement en temps est réalisé par l'intermédiaire d'un schéma précis au deuxième ordre en temps, dit méthode de Gear [46].

4.6.2.1 Méthode de Gear

Le schéma de Gear est un schéma itératif qui permet d'avoir accès au schéma implicite non-linéaire, il se traduit :

$$\mathcal{H}(W^{n+1}) = \frac{\mathcal{V}}{\Delta t^n}[\frac{3}{2}W^{n+1} - 2W^n + \frac{1}{2}W^{n-1}] + \mathbf{R}^{(n+1)} = 0 \tag{4.86}$$

Le schéma de Gear est d'une précision d'ordre 2 en temps. Quand le résidu de la modélisation $\mathbf{R}$ comprend la dissipation numérique, il est facile de vérifier que le schéma est inconditionnellement stable.

La méthode de Gear est équivalente à la méthode de Newton selon la formulation suivante :

$$\left(\frac{d\mathcal{H}}{dW}\right)^{m,n} \Delta W^{(m,n)} = -\mathcal{H}(W^{m,n}) \tag{4.87}$$

avec l'indice ^{m} représente le sous-itérations de l'algorithme Newton et l'indice ^{n} représente les itérations qui relient la progression physique au temps. D'autre part, la matrice d'approximation différentielle $\left(\frac{\mathcal{H}}{dW}\right)^{m,n}$, peut être soit fixe au début du processus itératif, soit évoluer selon les valeurs de W, choisies dans les expressions ci-dessus de la matrice.

Ce qui conduit à établir le schéma implicite suivant :

$$\left[\frac{3}{2}\frac{\mathcal{V}}{\Delta t^n}\mathbf{I} - \frac{d\mathbf{R}}{dW}^{m,n}\right] \Delta W^{m,n} = \mathbf{R}^{m,n} \tag{4.88}$$

avec $(\frac{d\mathbf{R}}{dW})$ relie d'une manière implicite la contribution de l'espace opérateur aux termes source.

4.7 Conclusion

Ce chapitre a donc permis de récapituler les principales méthodes numériques et modèles qui vont servir pour les calculs des champs de base et plus tard dans l'utilisation de la linéarisation des équations de Navier-Stokes.
Ce chapitre a été dédié à une présentation détaillée du modèle retenu tout au long de ce travail de thèse pour l'étude d'un écoulement compressible en régime de tremblement.
Après une présentation des équations de Navier-Stokes en formulation adaptée pour ce type de problème, la discrétisation des équations par la méthode des volumes finis au sein d'*elsA* a été rappelée. Une attention particulière a été portée sur les choix numériques utilisés pour la discrétisation de chacun des termes des équations. Ces rappels permettant de poser le cadre du travail de la linéarisation du modèle discret qui va être présenté dans le chapitre 6, sont indispensables pour promouvoir la construction de la matrice jacobienne exacte.
Ceci permet ainsi de pouvoir envisager, dans de bonnes conditions, la prochaine étape de ce travail qui consiste à effectuer des simulations numériques pour caractériser le tremblement et calculer les champs de bases correspondants.

5 Application numérique - Buffet

Après avoir présenté les méthodes et modèles numériques utiles ici et déjà existants dans *elsA*, on exposera dans ce chapitre deux séries de calculs préliminaires en régimes transsoniques, destinés à valider le calcul de ces méthodes et modèles numériques. Il s'agit d'une part d'une simulation d'un écoulement turbulent stationnaire sur un profil supercritique et d'autre part une simulation instationnaire. Ces deux types de simulations feront intervenir deux modèles de turbulence. On choisira le modèle de turbulence qui reproduira aux mieux le tremblement afin de le linéariser plus tard.

Entre autre, on rappellera la définition d'un champ de base d'un champ aérodynamique. On donnera aussi une présentation des maillages considérés dans cette étude sur lesquels les différents calculs seront effectués.

5.1 Définition d'un écoulement de base

La définition élémentaire d'un écoulement de base [51], est que la solution des équations du mouvement possédant le plus grand degré de symétrie soit compatible avec la géométrie du problème.
La notion du champ de base comme étant une solution des équations du mouvement se traduit d'un point de vue mathématiques par la démonstration de l'existence et l'unicité de de la solution des équations de Navier-Stokes. Néanmoins, cette éventuelle solution unique n'a pas été encore démontrée dans le cas tridimensionnel. On dit qu'une solution est "observable" si elle est représentée par une solution physique unique. La difficulté réside surtout sur la démonstration de l'unicité. En pratique, l'unicité n'est pas garantie. En effet, la solution validée mathématiquement, est une solution "observable" car elle représente un écoulement de base stable, tandis que les solutions dont l'unicité n'a pas été prouvée, sont assimilées à un écoulement de base instable.

5.1.0.2 Champ de base laminaire

Dans le cas d'une transition vers la turbulence d'écoulements, comme une couche limite se développant sur une plaque plane par exemple, l'écoulement de base est parfaitement connu : c'est celui de Blasius.. En revanche, lorsque l'écoulement est moins simple, la solution analytique ou quasi-analytique du problème n'est pas établie, par conséquent l'écoulement de base n'est pas connu. Toute la difficulté est de calculer cet écoulement de base numériquement en tenant compte de son instabilité.

Plusieurs méthodes ont été mis en oeuvre pour calculer le champ de base issu d'un écoulement globalement instable ; en particulier si l'apparition de l'instabilité dépend de certains seuils dans l'espace des paramètres (Reynolds, Mach, incidence...) :

- Un "peu" au delà du seuil d'apparition de l'instabilité, les méthodes numériques implicites ou stationnaires, peuvent faire converger l'écoulement globalement instable vers une solution stationnaire. En revanche, très loin du seuil, ces méthodes numériques n'assurent plus efficacement la convergence de la solution.

- Lorsque qu'il existe un seuil d'apparition des instabilités, il est possible d'explorer le champ de base au delà du seuil. Pour cela, la solution que l'on cherche à obtenir est une solution extrapolée à partir de plusieurs solutions obtenues avant le seuil. Cette solution fonctionne convenablement tant que la solution que l'on cherche à obtenir n'est pas trop loin du seuil. Au delà du seuil, la solution obtenue est pathologique. Un exemple de champ de base obtenu par cette méthode est dans la thèse de Marquilie [47].

- la bifurcation est de type Holf [31], on remplace le champ de base par le champ moyen, sachant que ce dernier est obtenu en effectuant la moyenne temporelle de la solution instationnaire sur plusieurs périodes. La substitution du champ de base par le champ moyen, reste efficace tant que l'instabilité n'est pas de forte d'amplitude. Certes, lorsque l'amplitude de l'instabilité est très forte, cette méthode n'est plus valable, car le régime non-linéaire rétro-agit sur l'écoulement de base et le modifie. Plus de détails dans l'article de Sipp et Lebedev [72].

- Les méthodes dites de *continuation*, permettent de suivre théoriquement le champ de base même au delà du seuil, tout en assurant une bonne précision [35]. Tout de même, leur mise en oeuvre n'est pas toujours si évidente.

5.1.0.3 Champ de base turbulent

Bien que la définition d'un champ de base issu d'un écoulement pleinement turbulent très subtile, de nombreuses études de stabilité ont été fructueuses.
Un écoulement turbulent peut être modélisé par la superposition de trois champs : un champ moyen, un champ cohérent et un champ aléatoire. Afin d'étudier la stabilité linéaire d'un tel écoulement turbulent, on admet que l'origine du champ cohérent soit indépendant de la turbulence. Néanmoins, la grande difficulté réside dans le fait que le champ moyen et le champ aléatoire aient le même ordre de grandeur. Plusieurs pistes ont été explorées afin d'apporter une solution à cette difficulté. Entre autres, Crouch [38] a proposé une approche qui consiste à modéliser le champ turbulent comme la superposition d'un champ moyen turbulent et d'une fluctuation. Il a calculé le champ moyen en résolvant les équations RANS stationnaires et il a considéré que la fluctuation est solution de ces même équations RANS écrites sous une forme perturbative puis linéarisée. Cette approche a pu calculer avec succès, la stabilité globale d'un profil d'aile en régime transsonique soumis au phénomène de tremblement. Elle est dépendante du modèle de turbulence choisi, qui intervient à son tour dans l'obtention du champ moyen et dans les calculs des perturbations.

La dernière approche considérée par Crouch, constitue le cas d'étude de référence de cette thèse pour retrouver le champ de base en régime transsonique à l'approche d'un tremblement. On s'est limité à rappeler seulement cette approche ; le lecteur intéressé peut se diriger vers [82] [76] [61] pour voir d'autres approches.

5.2 Présentation des Maillages

Pour la réalisation des simulations du tremblement, les maillages s'étendent classiquement à au moins 50 cordes du profil pour reproduire des conditions d'atmosphère illimitée. Ils reposent sur une topologie de type CH (maillage avec culot) ou sur une topologie de type C (maillage sans culot) (figure (5.1)).

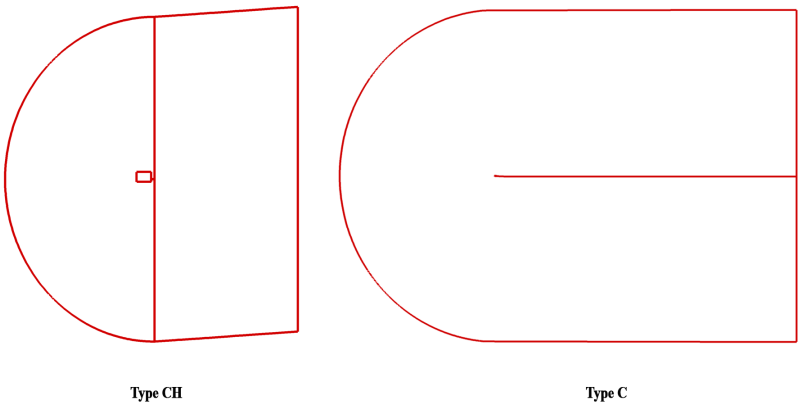


FIGURE 5.1 – *Topologie du maillage*

La qualité du maillage est primordiale pour la précision de la résolution des équations Navier-Stokes. Les principales contraintes à respecter sont la régularité et l'orthogonalité des mailles pour conserver la précision des schémas spatiaux.
Il est capital de s'intéresser à l'influence du choix du raffinement de maillage dans la qualité des résultats obtenus.

5.2.1 Profil sans culot

Pour la création d'un maillage de profil sans culot, on a utilisé un code analytique de génération automatique de maillage qui est basé sur la génération d'un réseau homofocal d'hyperboles (méthode développée par Rizzi et repris par Mortelewitz (DDSS/ONERA)). Il permet l'obtention de maillage en C pour un profil.
Celui ci est décrit dans le repère (O, i, k) de manière à ce que la corde soit dirigée suivant i. Les paramètres géométriques et aérodynamiques sont ajustables. Le lissage du profil est défini par les polynômes de Jacobi. En effet, les polynômes de Jacobi définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ constituent une base orthogonale pour le poids $w(x) = (1+x)^{\beta}(1-x)^{\alpha}$: $\int_{-1}^{1} w(x)P_n(x)P_m(x)dx = \delta_{n,m}$. Les profils des voilures d'avions se décrivent correctement

en utilisant 10 polynômes avec les poids $\beta = 0.5$ et $\alpha = 1$. L'équation des profils intrados et extrados sur l'intervalle de référence est :

$$y(x) = w(x) \sum_{n=1}^{n=10} a_n P_n(x) + 0.5(1+x)y(1) \tag{5.1}$$

Le sens de description des profils peut être choisi du bord d'attaque vers le bord de fuite ou inversement. Une méthode de spline d'ordre 3 permet d'interpoler finement les profils aux points de Gauss.

Ce code gère la topologie du domaine et des frontières et assure l'orientation des frontières en raccord coïncident.
Plusieurs paramètres interviennent pour la création du maillage. Dans la figure (5.2) on présente certains paramètres géométriques :

- Le paramètre c qui est la longueur réelle de la corde du profil,
- NSI : le nombre de mailles dans le sillage ;
- $NCL1$: le nombre de points proches du profil (couche-limite) ;
- $NCL2$ le nombre de mailles restant ;
- la taille de la première maille sur le profil ;
- la raison qui détermine la progression géométrique dans la direction normale au profil pour la couche proche du profil,
- Les grandeurs (en abscisse curviligne) qui définissent les mailles de l'intrados et l'extrados ;
- L'épaisseur de la couche limite est déduite en faisant la somme des termes de la suite géométrique de raison la taille de la première maille....

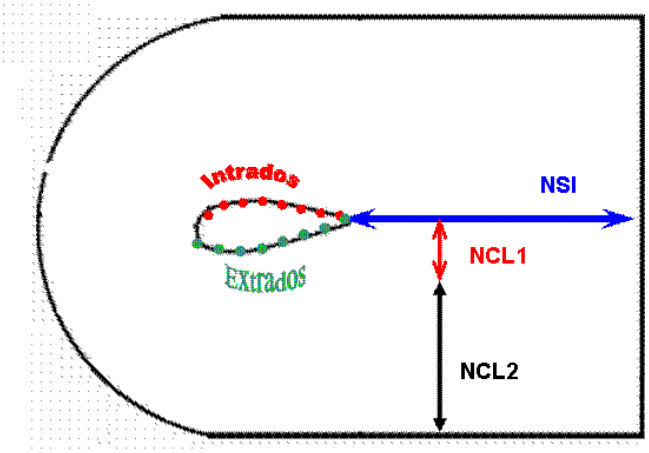


FIGURE 5.2 – *Représentation schématique d'un maillage de type C et aperçu de ces paramètres géométriques*

En plus des paramètres géométriques, la création de ce maillage fait intervenir l'angle θ en degré pour la mise en incidence du profil.

Grâce à ce code analytique, on obtient un maillage de type C (fig. 5.3), mono-bloc qui ne possède pas de culot et qui vérifie une condition de raccord coïncident.

5.2.1.1 Maillage mono-bloc et sans culot

Le maillage est généré par le code analytique précédemment décrit. On obtient un maillage de type C. La corde c vaut $0.23m$, les frontières sont situées à $90c$ en aval du profil et le raccord est coïncident. L'angle d'incidence du profil vaut $\alpha = 3.5$, le nombre de Mach amont $M = 0.73$. Le choix du profil OAT15A ou NACA0012 dépend des valeurs des coefficients des polynômes de Jacobi. Sur la base de calculs stationnaires avec les mêmes nombres de Reynolds $Re = 3 \times 10^6$, la taille de la première maille est fixée à $4.5 \times 10^{-3}c$ qui dans la pratique revient à assurer un critère $y^+ < 1$ tout autour du profil.
Les maillages NACA0012 ou OAT15A obtenus, sont monobloc sans culot. On a raffiné d'avantage la zone de l'extrados pour mieux capturer le choc et on a allongé le sillage vers l'avale pour la capture des modes propres plus tard (ce qui justifie entre autre les $90c$). L'étude de l'écoulement transsonique turbulent autour de ces profils est un cas de validation classique pour les codes de calculs utilisant une approche RANS ou URANS. Ils présentent un profil conventionnel qui a été largement utilisé pour mettre en évidence le phénomène de tremblement.

La figure (5.3) présente une vue globale du maillage de type C avec un sillage qui s'étend jusqu'à $90c$ et un zoom sur le profil où on peut repérer la zone dédiée à la capture du choc. Les données géométriques du maillage utilisé dans le schéma précédent

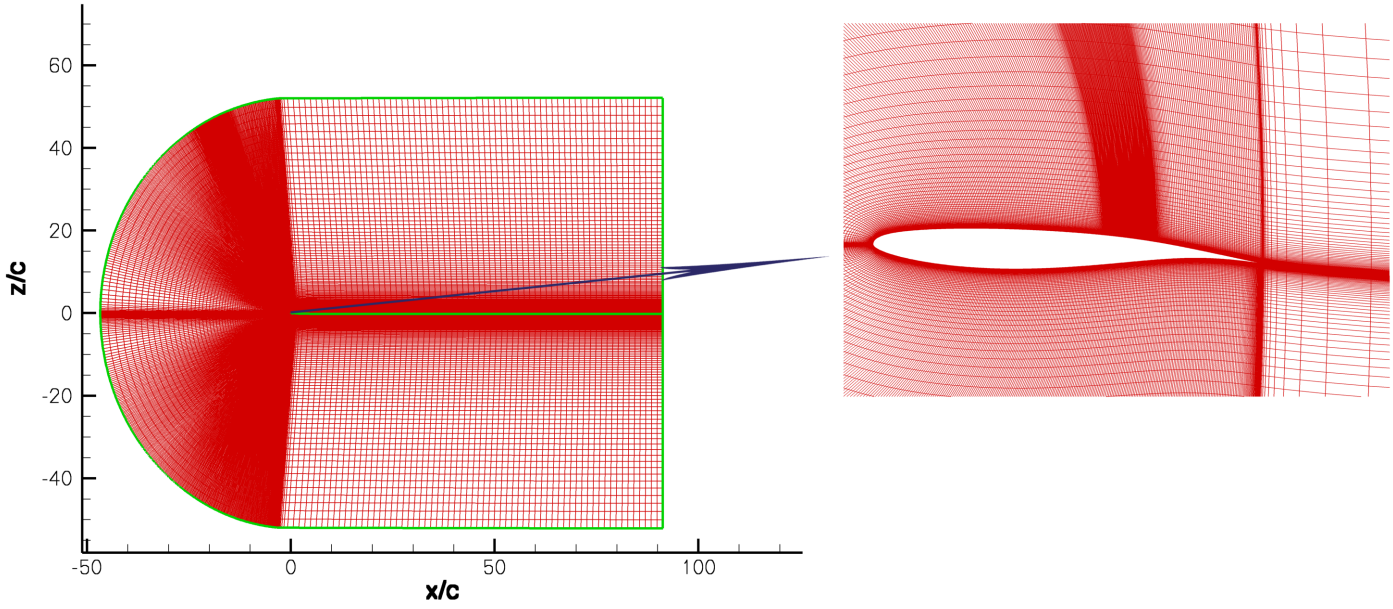


FIGURE 5.3 – *Vue globale et partielle du domaine de calcul : Maillage de type C, monobloc*

sont récapitulées dans le tableau 5.1.

5.2.2 Profil avec culot

Le maillage avec culot est constitué de deux domaines. Il s'étend à 50 cordes du profil pour reproduire des conditions d'atmosphère illimitée et repose sur une topologie

$I_{max} \times J_{max}$	N_{Total}	Sillage	NCL1	NCL2	Taille 1^{er} maille
851×141	119991	$90c$	30	110	$4 \times 10^{-3}c$

TABLE 5.1 – Données géométriques du maillage de type C

de type C-H (figure (5.1)).
Un soin particulier a été porté au traitement du culot (0.5% de corde) ainsi qu'à l'évasement du sillage et sa discrétisation.
Ce profil est dans les plan (O, i, j) et le maillage présente des raccords coïncidents qui relient les deux domaines.
Dans le tableau (5.2), quelques informations concernant ce maillage bi-blocs :

Bloc1	Bloc2	N_{Total}	Sillage	N_{culot}	Δx^+_{culot}	Δy^+
316×121	92×288	64732	92	75	~ 2	~ 0.2

TABLE 5.2 – Données géométriques du maillage de type C-H

Dans la figure (5.4), le Bloc1 est le premier domaine représenté en rouge, tandis que le deuxième domaine Bloc2 est représenté en vert. On agrandit la zone du culot afin de le mettre en évidence.

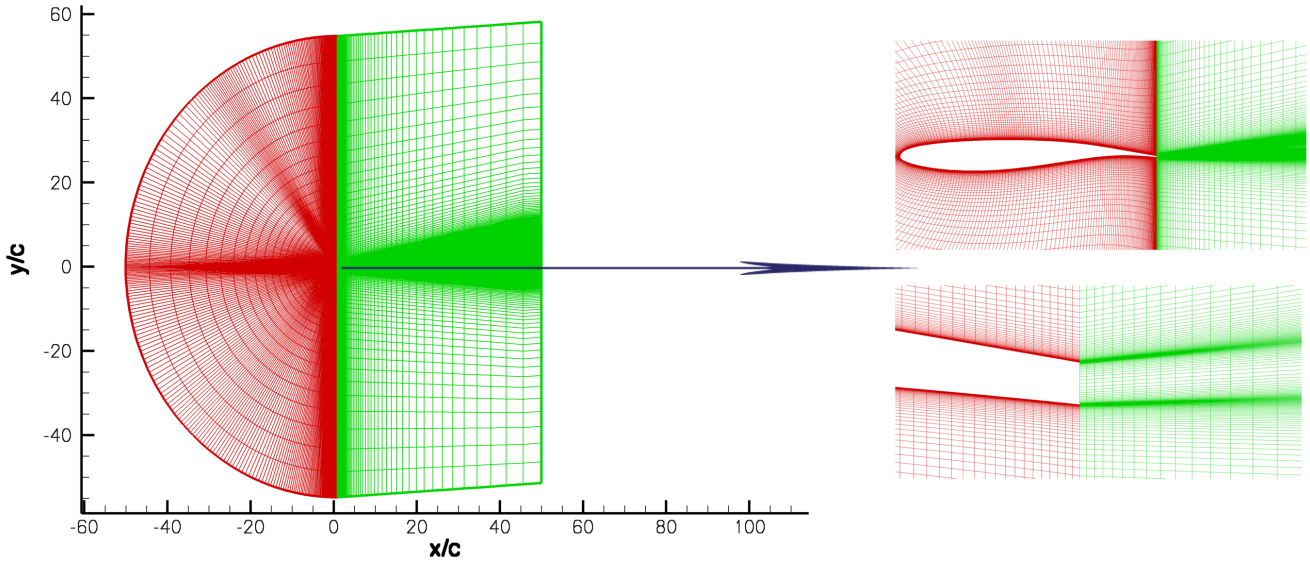


FIGURE 5.4 – *Maillage type C-H multidomaine bidimentionnel du profil OAT15A, présentant un culot*

On souhaite étudier dans les sections suivantes, les calculs de type RANS et URANS pour simuler le comportement d'un profil en régime de tremblement.

5.3 Applications stationnaires - Calcul RANS

On va s'intéresser dans cette partie aux calculs stationnaires d'écoulements turbulents (modélisés par une ou deux équations de transport) afin de simuler le comportement d'un écoulement transsonique en régime de tremblement pour obtenir les champs de base $\mathbf{W}$ tel que $R(\mathbf{W}) = 0$.

5.3.1 Caractéristiques aérodynamiques

Pour réaliser les simulations, le choix a été fait avec les conditions du tableau 5.3 :

M_∞	Re_c	Incidence	T_i (K)	Fréquence
0.73	3×10^6	$3.5 < \alpha < 4.5$	300 K	70Hz

TABLE 5.3 – Conditions aérodynamiques pour un écoulement turbulent compressible

Le nombre de Reynolds choisi est $Re = 3.10^6$, le nombre de Mach $M = 0.73$. Pour ces valeurs, l'expérience [23] prédit une entrée en tremblement pour une incidence $\alpha = 2.5$. Puisqu'on veut simuler dans un premier temps un écoulement stationnaire en régime de tremblement, on se place à une incidence $\alpha = 3.5$.
On impose des conditions aux limites appropriées : condition adiabatique sur la paroi, condition de non réflexion pour la frontière extérieure et champ à l'infini pour la frontière de sortie. On applique les conditions génératrices expérimentales en entrée et une pression statique en sortie. La fréquence calculée est la même que la fréquence expérimentale $f_{exp} = 70Hz$.

Pour les aspects numériques, le schéma spatial employé est encore le schéma de Roe, avec une extrapolation MUSCL et un limiteur Van-Albada. L'avancement en temps est réalisé avec une méthode Backward-Euler, une phase implicite LUSSOR scalaire est employée pour converger vers les états pseudo-stationnaires. Le principe de la détermination du pas de temps est expliquée dans l'annexe (A.2). Le calcul stationnaire permettra d'obtenir une convergence vers le champ de base pour chaque modèle de turbulence choisi, et pour cela on va utiliser un pas de temps local, c'est-à-dire différent d'une maille à une autre.

Une série de calcul a été effectuée avec les deux modèles de turbulence, sur les deux types de maillages (C ou C-H). Afin de ne pas mettre des résultats quasi-similaires, on ne présente que les résultats obtenus sur le maillage de type C-H : le profil OAT15A bi-bloc avec culot (figure (5.4)).
On commence par effectuer les calculs avec le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras, ensuite avec le modèle de turbulence $(k-\omega)$ de Wilcox.

5.3.2 Modèle de turbulence Spalart-Allmaras

Pour calculer le champ de base de l'écoulement compressible, avec un modèle de Spalart-Allmaras, on considère les conditions aérodynamiques du tableau (5.3) et le maillage bi-bloc du profil OAT15A .

Pour pouvoir quantifier avec plus de précision la convergence de ce champ de base, on s'intéresse aux résidus. La figure (5.6) représente l'évolution de la norme $L2$ du résidu en fonction des itérations. au bout de 1000 itérations, les résidus diminuent de 3 ordres de grandeurs. Après 10000 itérations les résidus baissent de plus de 6 ordres de grandeurs. La figure (5.5), illustre les plages des iso-valeurs du nombre de Mach sur le profil et les détails des iso-valeurs au pied du choc.

5.3.3 Modèle de turbulence $(k-\omega)$ de Wilcox

Le modèle de turbulence retenu ici, est le modèle $(k-\omega)$ de Wilcox. Pour le calculer, on considère les conditions aérodynamiques du tableau 5.3 et le maillage bi-blocs du profil OAT15A .
La figure (5.7), illustre les plages des iso-valeurs du nombre de Mach sur le profil, qui permettent de visualiser l'emplacement moyen de l'onde de choc.
Pour déterminer les forces qui s'appliquent sur le profil, il faut connaître la distribution de la pression autour du profil, ce qui équivaut pour un écoulement compressible à déterminer le coefficient c_p avec $c_p = \dfrac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty \mathbf{U}_\infty^2}$. Pour ce qui concerne la distribution de coefficient de pression, on s'intéresse à réaliser une comparaison avec les données expérimentales disponible pour cette configuration. En effet, dans la figure (5.8(a)), les évolutions expérimentales [23](pointillés bleu) à l'intrados et sur la première moitié de l'extrados (plateau supersonique) sont presque bien simulées par ce modèle de turbulence. Ce modèle prévoit une position de choc environ 10% de corde à l'aval de la position expérimentale. Cet écart peut être justifié principalement par l'effet de la modélisation de la turbulence et par l'effet du décalage sur les prévisions de la position du choc. De plus, la recompression après le choc est moyenement bien reproduite par ce modèle.

La figure (5.9) présente l'évolution des résidus au cours des calculs menés avec *elsA*. Dans tous les cas, les résidus perdent au moins quatre ordres de grandeurs et on constate que le calcul du champ de base converge plus rapidement -en terme d'itérations-. Plus précisément, cette convergence des résidus est plus perceptible lors des premiers milliers d'itérations. Les calculs ont nécessité 500000 itérations afin de perdre en moyenne 4 à 5 ordres sur le résidu en norme L_2 pour atteindre un état considéré comme stationnaire.

5.4 Applications instationnaires - Calcul URANS

Après avoir calculé les écoulements stationnaires qui ont permis de caractériser le champ de base, on s'intéresse maintenant à la simulation d'écoulements instationnaires turbulents qui met en évidence le phénomène de tremblement. Ce phénomène est représentatif des instabilités que l'on cherche à simuler et à retrouver dans le chapitre 8 par une analyse de stabilité.
Les simulations numériques de type URANS (Unsteady RANS) consistent à résoudre les équations de Navier-Stokes moyennées instationnaires, sans modification du modèle

de turbulence par rapport au cas stationnaire. Le traitement statique de Reynolds induit une séparation d'échelles et ne permet de représenter que des phénomènes instationnaires basses fréquences de l'ordre de la centaine de Hertz.

L'approche URANS sous-entend ainsi qu'il y a un découplage entre l'instationnarité du champ moyen et la turbulence. D'autre part, l'hypothèse d'ergodicité de la turbulence (qui permet de remplacer la moyenne d'ensemble par une moyenne temporelle) n'est plus valide lorsque l'écoulement moyen est instationnaire.
Les conditions des écoulements qu'on va examiner sont les mêmes que précédemment : un nombre de Mach $M = 0.73$, un nombre de Reynolds basé sur la corde du profil et l'état à l'infini amont $Re = 3.10^6$ et une incidence $\alpha = 3.5$.
On a mené les calculs instationnaires sur le maillage de type C-H, avec le profil OAT15A qui est formé de deux blocs.
Le premier écoulement turbulent qu'on va étudier est l'écoulement instationnaire avec le modèle de turbulence Spalart-Allmaras.

5.4.1 Modèle de turbulence Spalart-Allmaras

Une série de calculs a été menée dans les conditions aérodynamiques déjà décrites. La figure (5.10) montre l'évolution des iso-valeurs du nombre de Mach au cours d'un cycle. On constate que la différence entre ces quatre figures n'est pas évidente. Ceci permet de déduire que le mouvement du tremblement est assez faible.
Une autre représentation de ce faible mouvement de tremblement pour le modèle de Spalart-Allmaras pour l'incidence $\alpha = 3.5$ et $M = 0.73$, peut être donnée en examinant la figure (5.11). Cette figure compare les lignes de niveaux du nombre de Mach au cours d'un cycle de tremblement. Chaque couleur dans cette figure, représente un instant. La différence entre les lignes est très faible. Ce qui confirme le faible mouvement de l'oscillation au cours d'un cycle avec ce modèle de turbulence Spalart.

Il est apparu que l'entrée en tremblement avec le modèle de Spalart-Allmaras est très tardive. Le phénomène de tremblement peut être obtenu si on augmente encore l'incidence.

5.4.2 Modèle de turbulence $(k-\omega)$ de Wilcox

En choisissant maintenant, le modèle $(k-\omega)$ de Wilcox comme modèle de turbulence, on effectue une série de calcul. La figure (5.12) illustre le phénomène de tremblement dans un écoulement transsonique autour du profil OAT15A à Mach $M = 0.73$, Reynolds $Re = 3 \times 10^6$ et $\alpha = 3.5$. Au cours d'une période d'oscillation, plusieurs instants apparaissent décrivant le mouvement du choc et le décollement. Ces sept instants sont représentés au cours d'une période du phénomène, ils sont décrits de la manière suivante :
Dans les phases b à d, l'onde de choc est repoussée vers l'amont du profil, en même temps que le décollement croît. A l'instant e, on constate que le décollement du pied de choc remonte par rapport à l'instant précédent. Les instants f, g, h et a se caractérisent par le mouvement de l'onde vers le bord de fuite du profil.
En plus, dans la zone proche du bord de fuite, comme on peut l'observer sur la figure

(5.12), l'écoulement semble en effet décollé.

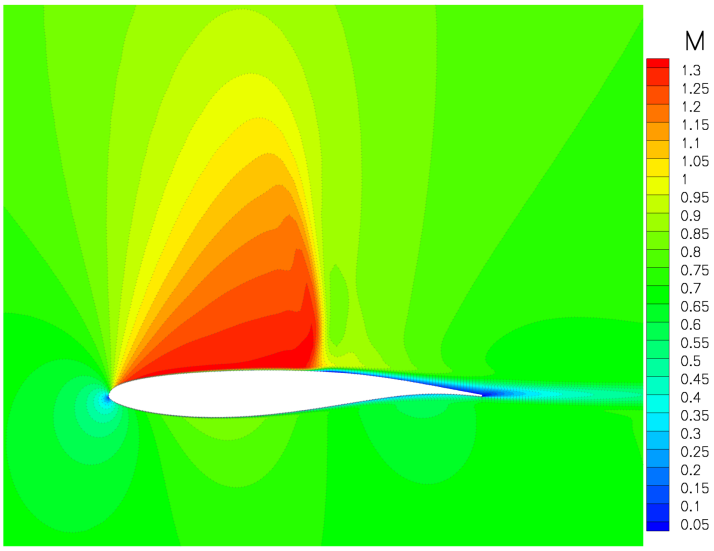
Il apparaît clairement, à l'analyse de cette dynamique, que la prédiction correcte du tremblement transsonique nécessite l'utilisation d'un modèle de turbulence correctement sensible aux conditions aérodynamiques imposées.
Avec ce modèle de turbulence $(k-\omega)$ de Wilcox, le mouvement est clair et le tremblement est bien caractérisé. Entre autre, on illustre cela par la figure (5.13), qui met en évidence les lignes des isovaleurs de la composante de la vitesse, dans la position du choc la plus amont et la position du choc la plus avale.

5.5 Conclusion

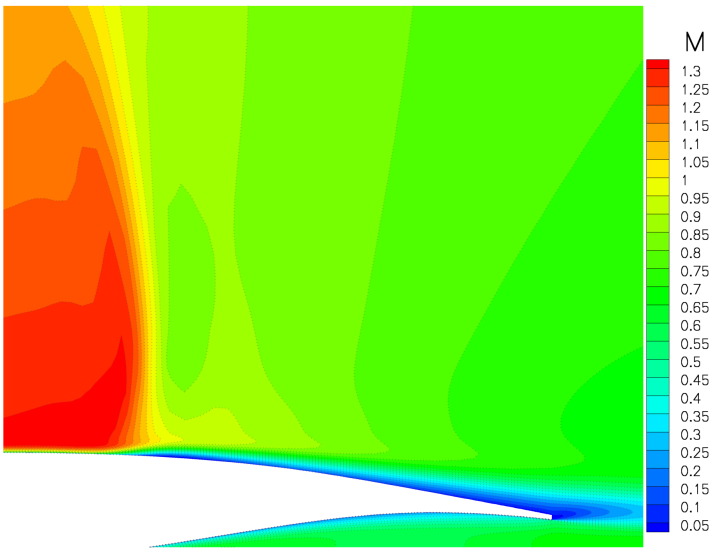
Le premier objectif de cette partie est d'appliquer les différents outils numériques choisis, qui vont permettre, entre autre, de représenter les oscillations du choc sur un profil et de calculer le champ de base correspondant. On souligne les performances du logiciel *elsA* pour effectuer ce type de simulation.

De plus, il ressort des calculs instationnaires avec les deux modèles de turbulence (en fixant les mêmes données aérodynamiques : incidence $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ et $Re = 3.10^6$) que le tremblement est mieux caractérisé avec le modèle $(k - \omega)$ de Wilcox qu'avec le modèle de Spalart-Allmaras. En effet, avec ce dernier, l'entrée en tremblement est tardive.

Par ailleurs, dans la suite de cette thèse, on ne va pas choisir le modèle de Spalart-Allmaras comme modèle de turbulence de base. Non seulement parce qu'il ne caractérise pas le tremblement, mais aussi, parce que la linéarisation du modèle de Spalart n'était pas disponible dans *elsA* au départ de ce travail.
En plus, pour la suite de cette étude, le maillage de type C va être choisi. En effet, le code analytique qui génère ce type de maillage permet de le créer selon les besoins. On peut obtenir plusieurs profils et gérer convenablement plusieurs zones du maillages.
Enfin, après avoir déterminé le champ de base, on s'intéressera à la linéarisation des équations de Navier-Stokes. En effet, ces équations sont fortement non-linéaires à cause du terme de convection. L'extraction explicite de la matrice jacobienne $(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{W}})$ est l'objectif du chapitre suivant.

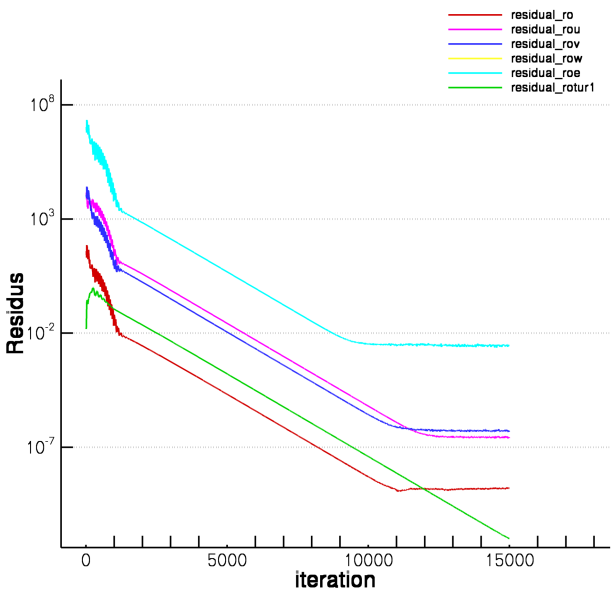


(a)



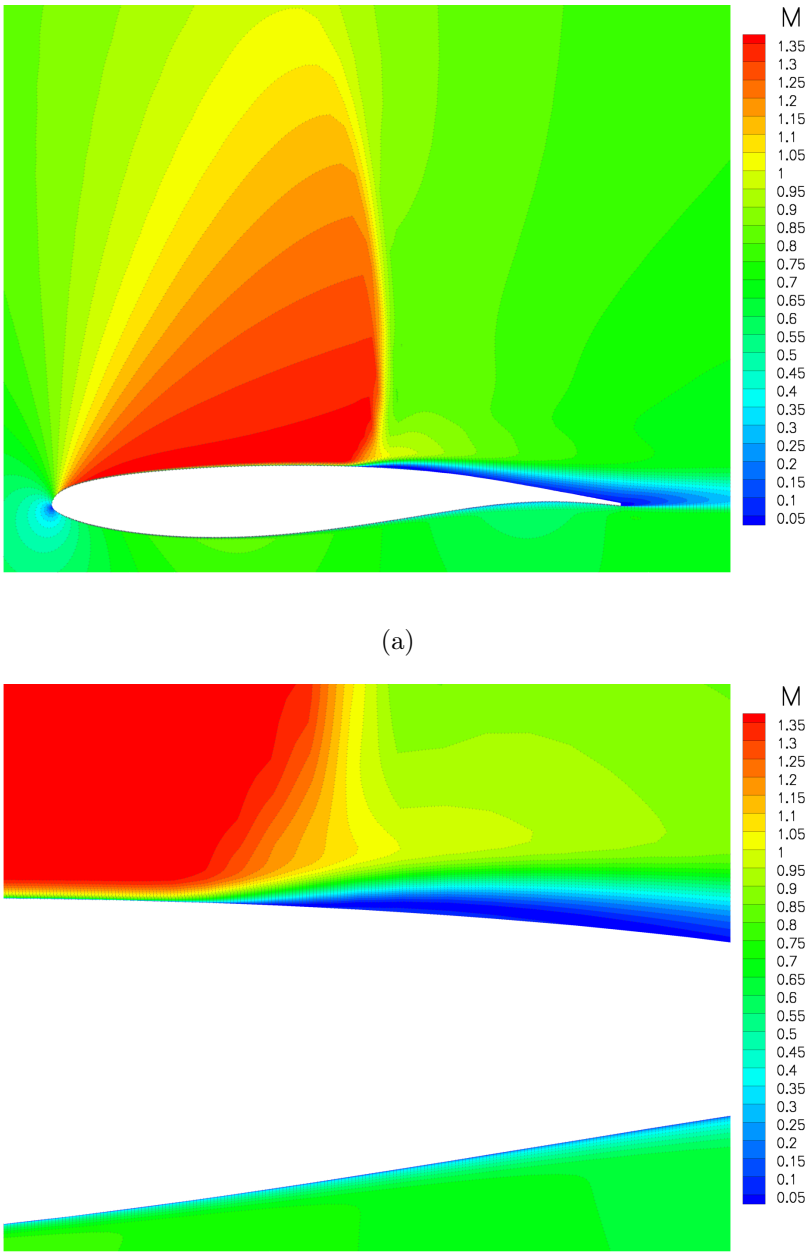
(b)

FIGURE 5.5 – *Plages d'isovaleurs du nombre de Mach pour le calcul d'écoulement stationnaire avec modèle Spalart-Allmaras. Incidence* $\alpha = 3.5$ *, Mach* $M = 0.73$ *et Reynolds* $Re = 3 \times 10^6$



(a)

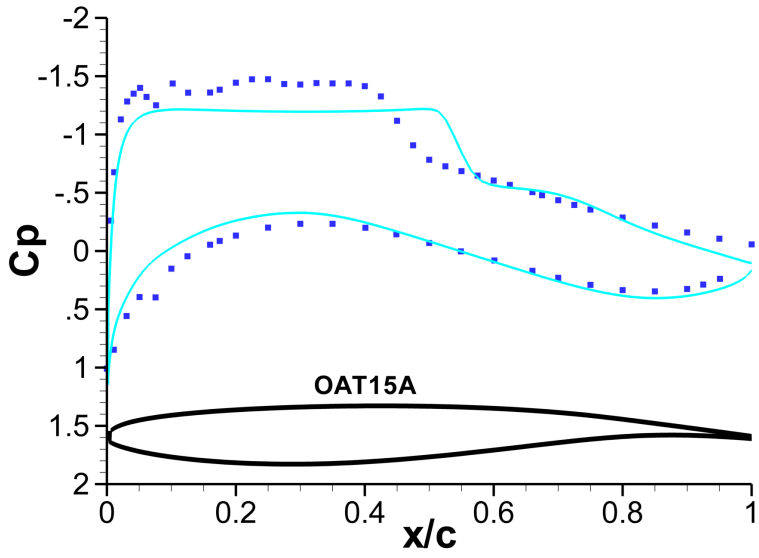
FIGURE 5.6 – *Evolution de la norme L2 des résidus de l'équation Navier-Stokes en fonction des itérations au cours d'un calcul stationnaire avec le modèle de turbulence Spalart-Allmaras*



(a)

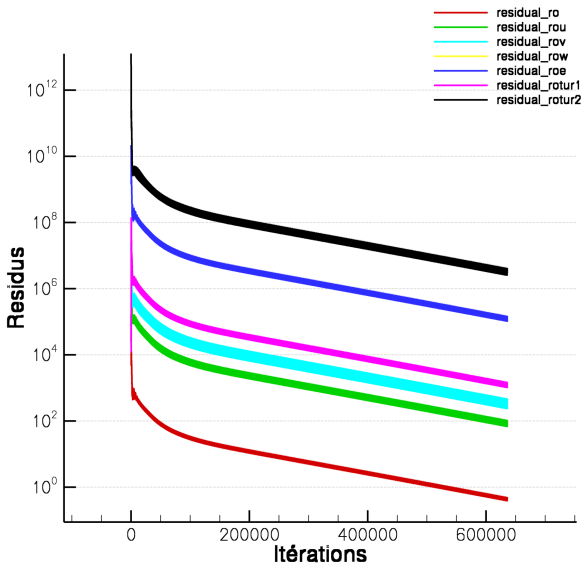
(b)

FIGURE 5.7 – *Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de Mach pour le calcul d'écoulement stationnaire avec modèle* $(k-\omega)$ *de Wilcox. Incidence* $\alpha = 3.5$ *, Mach* $M = 0.73$ *et Reynolds* $Re = 3 \times 10^6$.



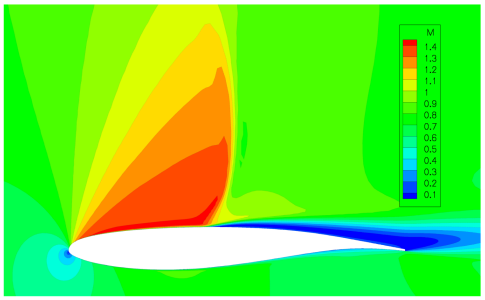
(a)

FIGURE 5.8 – *Distribution de coefficient de pression c_p pour le calcul d'écoulement stationnaire avec le modèle $(k-\omega)$ de Wilcox. Incidence $\alpha = 3.5$, Mach $M = 0.73$ et Reynolds $Re = 3 \times 10^6$ pointillés bleu :expérience de Jacquin [23]*

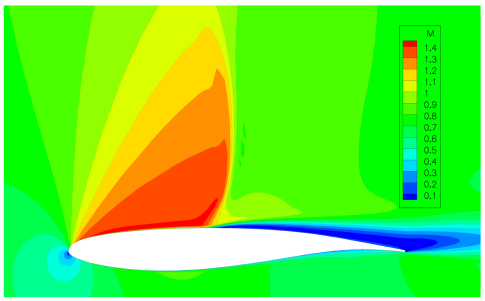


(a)

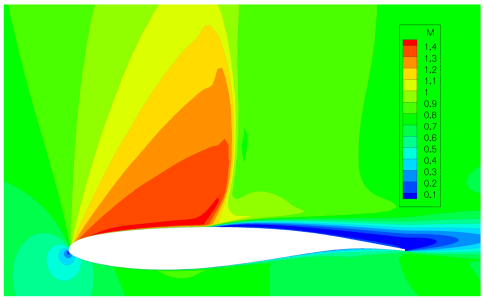
FIGURE 5.9 – *Evolution de la norme L2 des résidus de l'équation Navier-Stokes en fonction des itérations au cours d'un calcul stationnaire avec le modèle de turbulence $(k-\omega)$ de Wilcox*



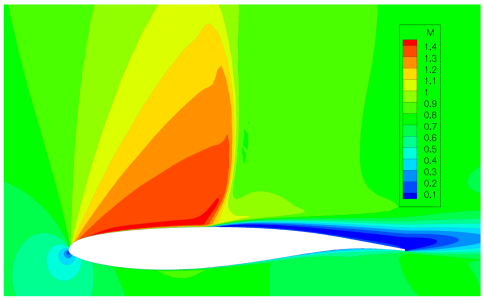
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 5.10 – *Les iso-valeurs du nombre de Mach pour un calcul URANS avec le modèle Spalart-Allmaras, une incidence* $\alpha = 3.5$ *, un nombre de Mach à l'infini* $M = 0.73$ *et Reynolds* $Re = 3 \times 10^6$.

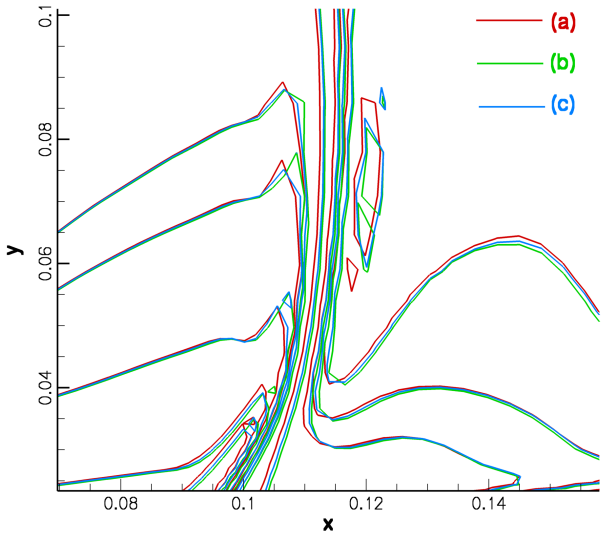


FIGURE 5.11 – *Comparaison des lignes des iso-valeurs du nombre de Mach au cours d'un cycle de tremblement ; modèle de Spalart-Allmara ; incidence* $\alpha = 3.5$ *, Mach* $M = 0.73$ *et Reynolds* $Re = 3 \times 10^6$.

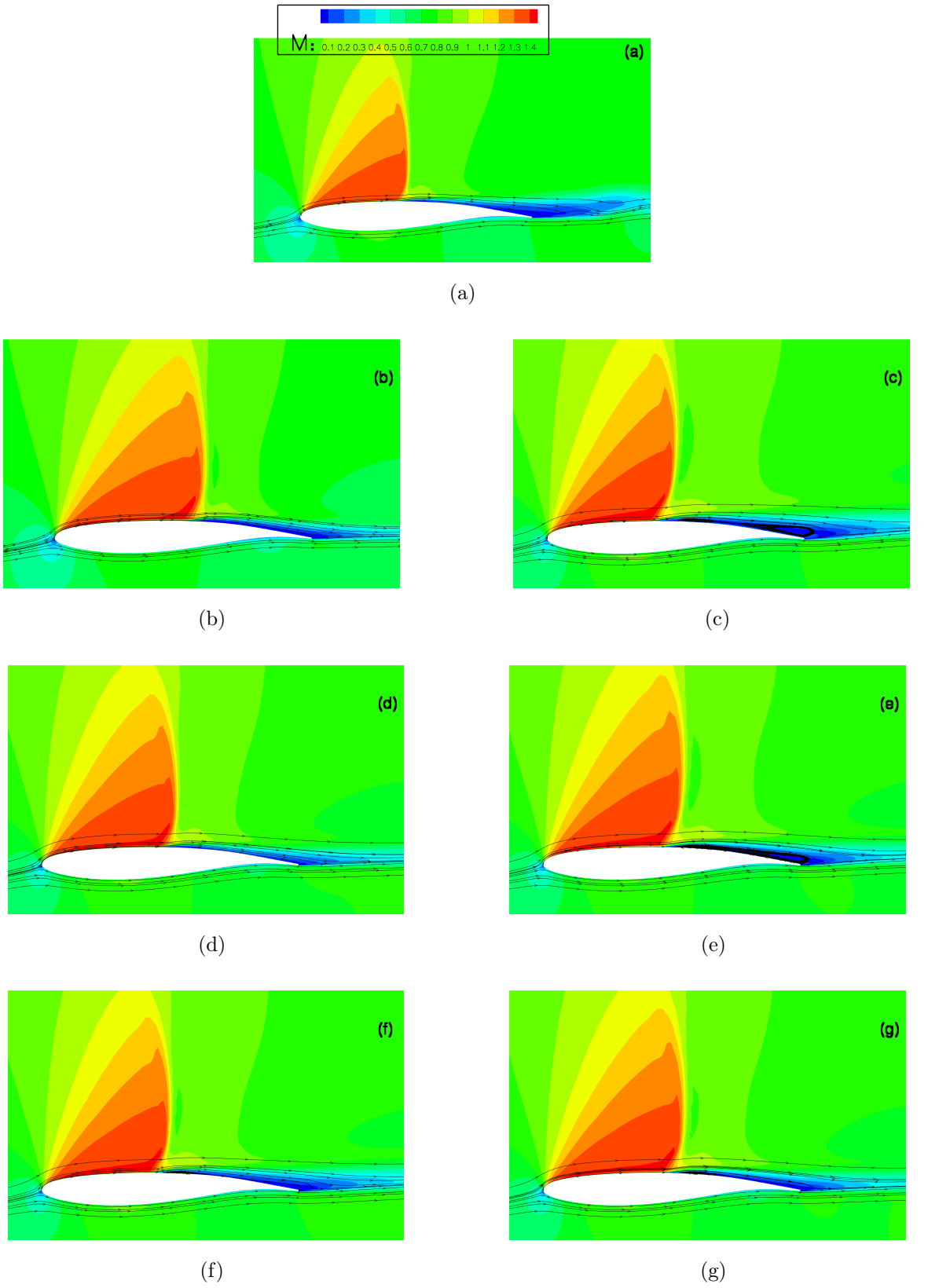
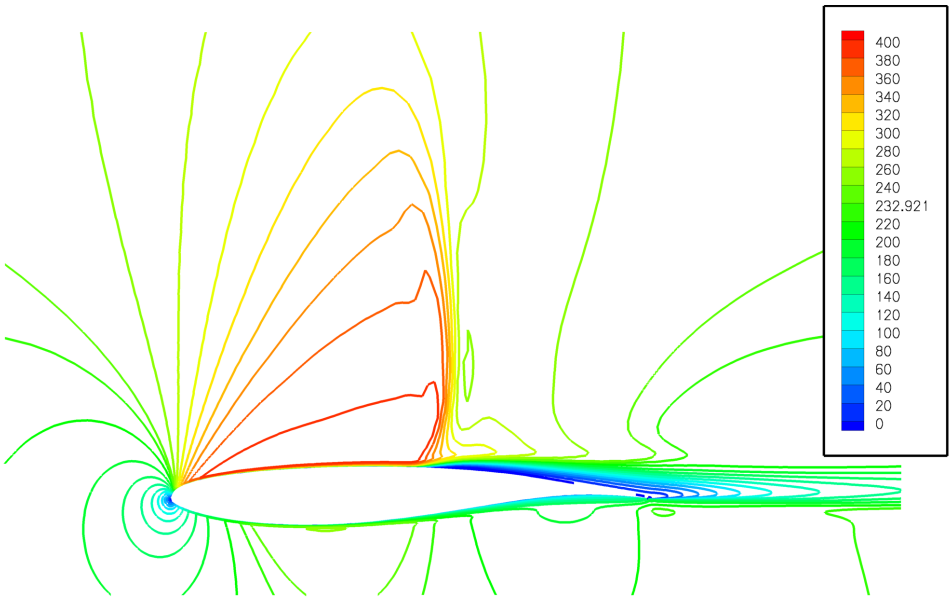
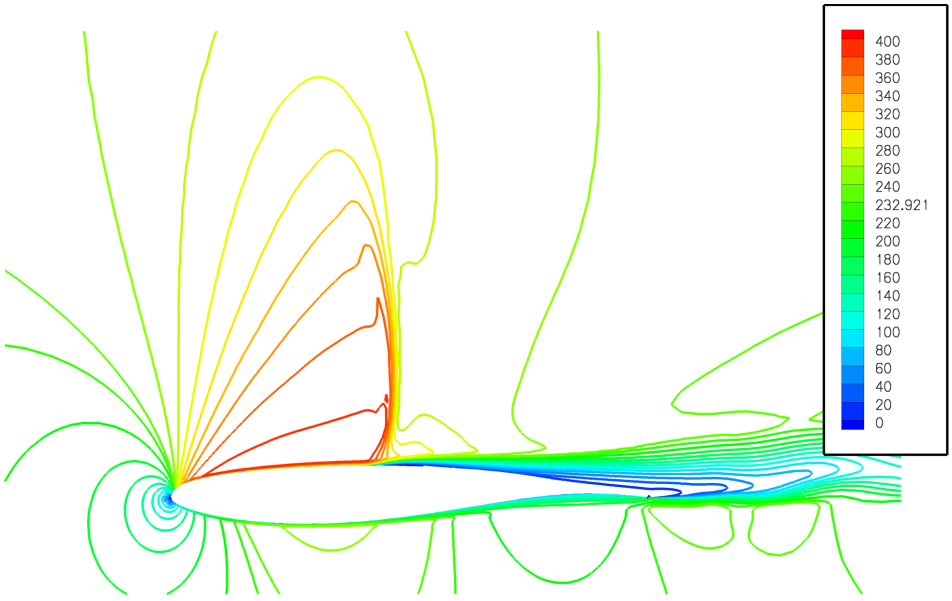


FIGURE 5.12 – $(k-\omega)$ *de Wilcox : Visualisation du phénomène de tremblement dans l'écoulement transsonique autour d'un profil OAT*15*A de type C-H à* $M = 0.73$, $\alpha = 3.5$ *et* $Re = 3.10^6$ *: huit instants successifs au cours d'une période du phénomène : planche d'isovaleurs de nombre de Mach avec des lignes de courant proches de la paroi.*



(a)



(b)

FIGURE 5.13 – *Lignes des isovaleurs de la vitesse : (a) la position la plus avale et (b) la position la plus amont du choc ; calcul URANS avec le modèle* $(k-\omega)$ *de Wilcox.* $M = 0.73$, $\alpha = 3.5$ *et* $Re = 3.10^6$

Troisième partie

Calcul Linéaire

6 Extraction de la matrice Jacobienne explicite

6.1 Introduction

L'hypothèse principale de cette thèse est que l'ensemble des équations de Navier-Stokes, va être traité dans un cadre linéarisé. Ceci constitue l'une des hypothèses fondatrice de ce chapitre.
On rappel, que l'objectif de ce travail de thèse est l'élaboration et développement d'un code numérique qui permettra l'extraction de la matrice jacobienne des équations RANS linéarisées d'une manière explicite du logiciel *elsA* (cette tâche est essentiellement numérique). Sans oublier de mentionner que les équations RANS linéarisées sont déjà existantes dans *elsA* et ont été implémenté dans ce logiciel par Jacques Peter.

Les différents volets de ce chapitre portent exclusivement sur la méthode de calcul explicite de la matrice jacobienne issue de *elsA*.
La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de la stratégie permettant de retrouver explicitement tous les éléments non nuls de la matrice jacobienne. Un soin particulier va être apporté à la description des différentes étapes afin de permettre aux lecteurs d'entrevoir avec le plus de lisibilité possible les tenants et les aboutissants de cette stratégie.
Le deuxième volet se concentre d'une part sur la description des stencils adéquats pour effectuer la discrétisation et d'autre part, sur la linéarisation des différents flux. Ensuite, les méthodes de résolution implémentées dans *elsA* seront détaillées afin de représenter les équations linéarisées des différents flux et termes sources ; dans le cadre de l'extraction de la matrice jacobienne, le développement du code effectué sera présenté durant cette étude. Enfin, on présentera la construction de cette matrice et l'assemblage de ces différents éléments selon un maillage de type C.
Une validation de l'extraction de la matrice jacobienne est dressée en guise de conclusion dans le prochain chapitre.

6.2 Stratégie d'extraction des éléments d'une matrice

Dans le cadre de cette thèse, on cherche à retrouver tous les éléments qui constituent la matrice jacobienne $\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}$ existante dans *elsA*. On note $\mathbf{J} = \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}$.

Dans le logiciel *elsA*, on ne connait que l'action de la matrice jacobienne sur un vecteur donné, c'est à dire, pour un vecteur Ψ donné, on obtient par l'intermédiaire du

logiciel *elsA*, seulement le résultat du produit de ce vecteur avec la matrice jacobienne $\mathbf{J} * \Psi$ (figure (6.1)) sans avoir accès à la matrice $\mathbf{J}$ elle-même. Les données de la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ sont implicites dans *elsA*.

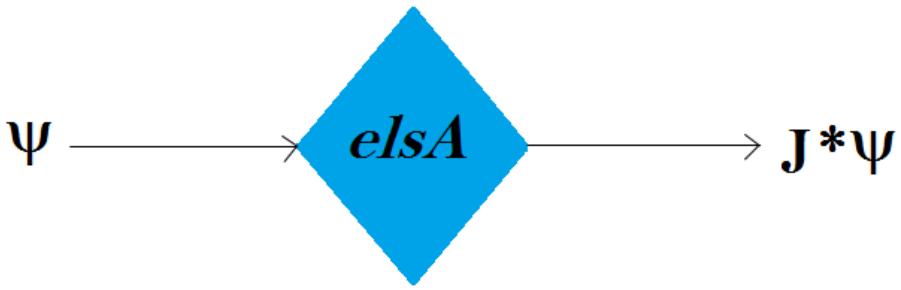


FIGURE 6.1 – *Circuit du produit "matrice*vecteur" dans* elsA.

A partir de cette caractéristique spécifique entre autres à *elsA*, on a eu l'idée de retrouver explicitement $\mathbf{J} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et de la construire, en faisant une extraction de tous ces éléments $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ qui la constituent.

Pour mieux comprendre la stratégie adoptée pour extraire les éléments $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de la matrice $\mathbf{J}$, on va décrire dans la section suivante l'idée de base.

6.2.1 Opération produit "*matrice*vecteur*"

La première idée qu'on peut avoir pour accéder à toutes les valeurs $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ d'une matrice $\mathbf{J}$, est de considérer les vecteurs $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots \Psi_n\}$ avec :

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \text{ et } \Psi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

En effectuant le produit de la matrice $\mathbf{J}$ par chacun de ces vecteurs, détaillons ce qu'on obtient :

– Le résultat du produit $\mathbf{J} * \Psi_1$ permet d'obtenir les éléments de la matrice qui constituent la première colonne de $\mathbf{J}$: $C_1 = (a_{i,1})_{1 \leq i \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$,

– Le résultat du produit $\mathbf{J} * \Psi_2$ permet d'obtenir les éléments de la matrice qui constituent la deuxième colonne de $\mathbf{J}$: $C_2 = (a_{i,2})_{1\leq i\leq n} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$,

– $\vdots$

– Enfin le résultat du produit $\mathbf{J} * \Psi_n$ permet d'obtenir les éléments de la matrice qui constituent la dernière colonne de $\mathbf{J}$: $C_n = (a_{i,n})_{1\leq i\leq n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$.

Ce choix particulier de vecteurs $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots \Psi_n\}$, permet de retrouver tous les éléments $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. On doit ainsi effectuer n fois l'opération "*matrice*vecteur*", pour extraire tout ces éléments.
Dans les travaux menés par cette thèse, la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ qu'on souhaite extraire est généralement une matrice de très grande taille ($n > 10^6$). Il s'avère que ce dernier choix de vecteurs, entraînera un très grand nombre d'opérations c'est à dire effectuer n fois l'opération (*matrice*vecteur*) ; ce qui va être très coûteux. On propose de retrouver une alternative moins coûteuse, en utilisant ce qu'on connait sur la nature de cette matrice.
Connaissant d'une part, la structure de la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ qui est en particulier une matrice creuse et par blocs, il est évident de s'intéresser à extraire que les éléments non nuls.
D'autre part, la matrice $\mathbf{J}$ dépend dans sa décomposition des différents termes : convectif, diffusif et terme source. Ces termes sont définis à partir des schémas numériques discrétisés au premier ou au second ordre. Cela permet de déduire que la matrice $\mathbf{J}$ dépend aussi des schémas de discrétisation et de leur ordre.

Pour cela, on a pensé à minimiser le nombre d'opérations ("*matrice*vecteur*") possibles pour extraire les éléments non nuls de $\mathbf{J}$.

Dans le paragraphe suivant, on expose le choix approprié des vecteurs Ψ afin d'extraire que les éléments non nuls de la matrice $\mathbf{J}$. Pour cela, on va considérer un problème simple, qui servira à mieux expliquer la technique d'obtention des éléments non nuls. Bien que cet exemple soit très simplifié par rapport au cas de cette thèse, il montrera au lecteur le mode de fonctionnement qu'on optera pour effectuer l'extraction des éléments de la matrice jacobienne.

6.2.2 Technique d'extraction - Choix pertinent

Sachant que la discrétisation des flux qui contribuent dans la matrice jacobienne est définie soit par un schéma à l'ordre 2 soit par un schéma à l'ordre 1 ; on considère un cas simplifié afin d'aborder la technique d'extraction des éléments non nuls d'une matrice.
D'une part, on utilisera un problème mono-dimensionnel, qui va être discrétisé à l'ordre 1 et qui nécessitera un stencil de 3 points. D'autre part, le même problème

mono-dimensionnel discrétisé à l'ordre 2 et qui fera intervenir un stencil à 5 points.

6.2.2.1 Stencil à 3 points

On pose le système :

$$L = \alpha \left(\frac{du}{dx} \right).$$

On suppose qu'on est en mono-dimensionnel selon la direction x.

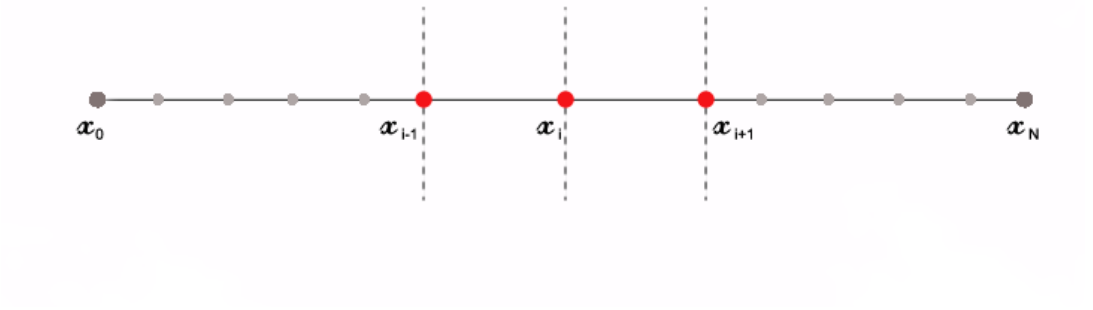


FIGURE 6.2 – *Stencil à 3 points en mono-dimensionnel.*

A partir d'un maillage en volumes finis, où l'on prend les inconnus au centre x_i des volumes élémentaires, on discrétise le domaine en N points.
Dans le cas d'une discrétisation avec un schéma centré à l'ordre 1, on a un stencil à 3 points (figure (6.2)) et on obtient :

$$L(x_i) = \alpha(x_i) \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \right) = \frac{\alpha(x_i)}{2\Delta x} u_{i+1} - \frac{\alpha(x_i)}{2\Delta x} u_{i-1} \text{ pour } i = 1, \cdots N. \tag{6.2}$$

On pose la matrice $\mathcal{A}$ qui vérifie $L = \mathcal{A} * U$, on a :

$$L_i = L(x_i) = \mathcal{A}(i, i-1) u_{i-1} + \mathcal{A}(i, i+1) u_{i+1} \tag{6.3}$$

On obtient la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} L_1 = L(x_1) = \dfrac{1}{2\Delta x} \left(a_{12} u_2 \right), & \text{pour } i = 1, \\ L_2 = L(x_2) = \dfrac{1}{2\Delta x} \left(-a_{21} u_1 + a_{23} u_3 \right), & \text{pour } i = 2, \\ \qquad \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ L_i = L(x_i) = \dfrac{1}{2\Delta x} \left(-a_{i,i-1} u_{i-1} + a_{i,i+1} u_{i+1} \right), & \text{pour } i, \\ \qquad \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ L_N = L(x_N) = \dfrac{1}{2\Delta x} \left(-a_{N,N-1} u_{N-1} \right), & \text{pour } i = N. \end{cases} \tag{6.4}$$

alors la matrice $\mathcal{A}$ s'écrit :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 0 & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{43} & 0 & a_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{i,i+1} & 0 & a_{i,i+2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{N,N-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

Maintenant, on souhaite trouver tous les éléments de la matrice $\mathcal{A}$, pour cela, on va supposer (par exemple) que $N = 7$.
Alors la matrice $\mathcal{A}$ s'écrit :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 0 & a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{43} & 0 & a_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{54} & 0 & a_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{65} & 0 & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{76} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

On va choisir un ensemble de vecteurs $\{\Psi\}$ correspondant au schéma de discrétisation d'un stencil de 3 points. Cet ensemble de vecteurs est formé par le triplet $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$, tel que :

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

On remarque qu'on a plusieurs 1 dans ces vecteurs, d'ailleurs, la distribution des 1 dépend de la nature du stencil à 3 points comme l'indique la figure (6.3). En effet, grâce à seulement ces trois vecteurs, on peut extraire tous les éléments non nuls de la matrice $\mathcal{A}$. En faisant l'opération produit "*matrice*vecteurs*", on obtient :

$$\mathcal{A} \times \Psi_1 = \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} 0 \\ -a_{21} \\ a_{34} \\ 0 \\ -a_{54} \\ a_{67} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A} \times \Psi_2 = \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} a_{12} \\ 0 \\ -a_{32} \\ a_{45} \\ 0 \\ -a_{65} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A} \times \Psi_3 = \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} 0 \\ a_{23} \\ 0 \\ -a_{43} \\ a_{56} \\ 0 \\ -a_{76} \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

Ainsi, on retrouve tous les éléments de la matrice $\mathcal{A}$, en effectuant seulement trois opérations produit "*matrice *vecteur*".

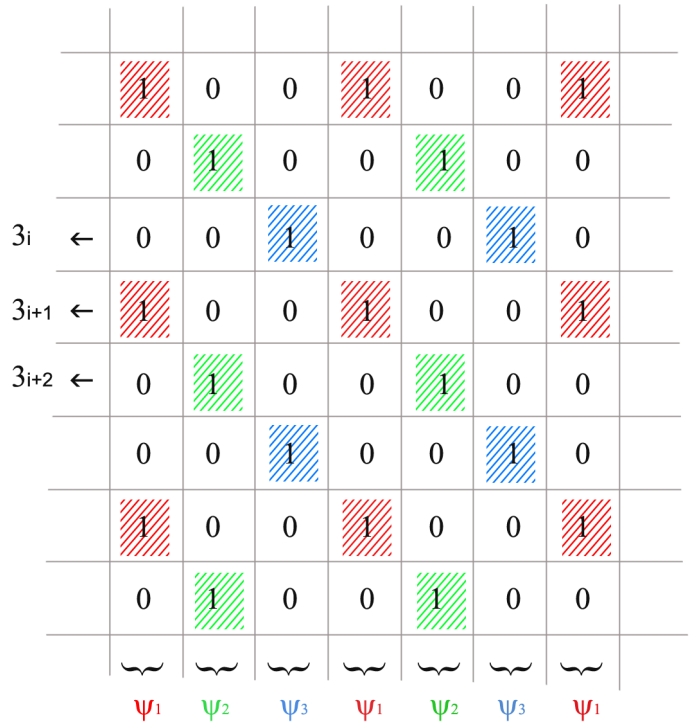


FIGURE 6.3 – *Grille du triplet des vecteurs correspondants à un stencil à* 3 *points.*

6.2.2.2 Stencil à 5 points

On considère un problème simple :

$$L = \alpha \left(\frac{du}{dx} \right).$$

On suppose qu'on est dans un cas mono-dimensionnel selon la direction x.
A partir d'un maillage en volumes finis, où l'on prend les inconnus au centre x_i des volumes élémentaires, on discrétise le domaine en N points.
Dans le cas d'une discrétisation avec un schéma à l'ordre 2, on a un stencil à 5 points

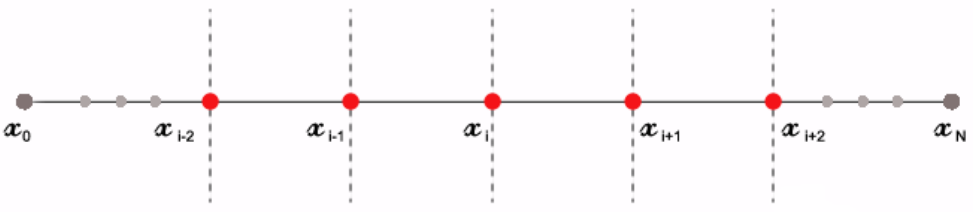


FIGURE 6.4 – *Stencil à* 5 *points en mono-dimensionnel.*

(figure (6.4)) et on obtient :

$$\begin{aligned} L(x_i) = & \quad \alpha(x_i)\left(\frac{u_{i-2}-8u_{i-1}+8u_{i+1}-u_{i+2}}{12\Delta x^2}\right), \\ = & \quad \frac{\alpha(x_i)}{12\Delta x^2}u_{i-2}-\frac{\alpha(x_i)}{12\Delta x^2}8u_{i-1}+\frac{\alpha(x_i)}{12\Delta x^2}8u_{i+1}-\frac{\alpha(x_i)}{12\Delta x^2}u_{i+2}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

La matrice $\mathcal{A}$ vérifie :

$$\begin{cases} \mathcal{A}(i,i-2) = \dfrac{\alpha(x_i)}{12\Delta x^2}, \\ \mathcal{A}(i,i-1) = -\dfrac{8\alpha(x_i)}{12\Delta x^2}, \\ \mathcal{A}(i,i) = 0, \\ \mathcal{A}(i,i+1) = \dfrac{8\alpha(x_i)}{12\Delta x^2}, \\ \mathcal{A}(i,i+2) = -\dfrac{\alpha(x_i)}{12\Delta x^2}. \end{cases} \tag{6.10}$$

donc

$$L(x_i) = \mathcal{A}(i,i-2)u_{i-2}+\mathcal{A}(i,i-1)u_{i-1}+\mathcal{A}(i,i+1)u_{i+1}+\mathcal{A}(i,i+2)u_{i+2}. \tag{6.11}$$

En faisant varier i de 1 à N, on obtient la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} L_1 = L(x_1) = \dfrac{1}{12\Delta x^2}\left(8a_{12}u_2 - a_{13}u_3\right), & \text{pour } i=1, \\ L_2 = L(x_2) = \dfrac{1}{12\Delta x^2}\left(-8a_{21}u_1 + 8a_{23}u_3 - a_{24}u_4\right), & \text{pour } i=2, \\ \vdots\!\vdots \\ L_i = L(x_i) = \dfrac{1}{12\Delta x^2}\left(a_{i,i-2}u_{i-2} - 8a_{i,i-1}u_{i-1} + 8a_{i,i+1}u_{i,i+1} - a_{i,i+2}u_{i+2}\right), & \text{pour } i, \\ \vdots\!\vdots \\ L_N = L(x_N) = \dfrac{1}{12\Delta x^2}\left(a_{N,N-2}u_{N-2} - 8a_{N,N-1}u_{N-1}\right), & \text{pour } i=N. \end{cases} \tag{6.12}$$

La matrice $\mathcal{A}$ s'écrit alors :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{12\Delta x^2}\begin{pmatrix} 0 & 8a_{12} & -a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8a_{21} & 0 & 8a_{23} & -a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & -8a_{32} & 0 & 8a_{34} & -a_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{i,i-2} & -8a_{i,i-1} & 0 & 8a_{i,i+1} & -a_{i,i+2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N,N-2} & -8a_{N,N-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

Pour le cas $N = 7$, on a :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{12\Delta x^2} \begin{pmatrix} 0 & 8a_{12} & -a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8a_{21} & 0 & 8a_{23} & -a_{24} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & -8a_{32} & 0 & 8a_{34} & -a_{35} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & -8a_{43} & 0 & 8a_{45} & -a_{46} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & -8a_{54} & 0 & 8a_{56} & -a_{57} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & -8a_{65} & 0 & 8a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & -8a_{76} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

On va choisir un ensemble de vecteurs $\{\Psi\}$ correspondant au schéma de discrétisation d'un stencil de 5 points. Cet ensemble de vecteurs est formé par les cinq vecteurs $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5\}$, tel que :

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

On remarque qu'on a plusieurs 1 dans ces vecteurs, d'ailleurs, la distribution des 1 dépend de la nature du stencil à 5 points comme l'indique la figure (6.5). En effet, grâce à seulement ces cinq vecteurs, on peut extraire tous les éléments non nuls de la matrice $\mathcal{A}$.

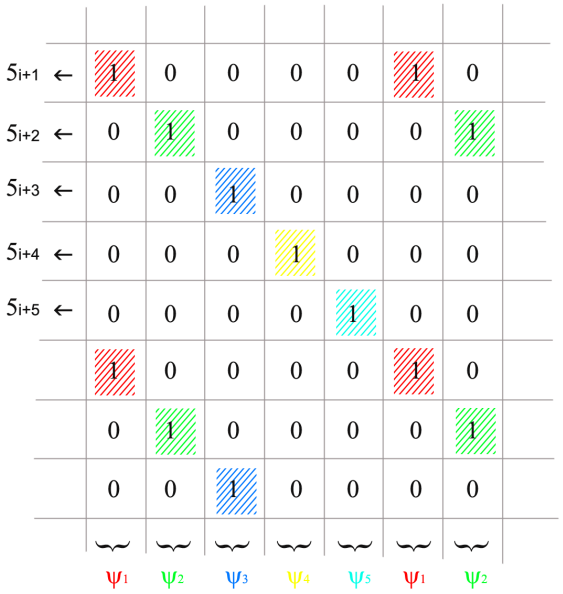


FIGURE 6.5 – *Grille d'un Stencil à 5 points.*

On effectue l'opération produit *matrice*vecteur* afin d'extraire les éléments non nuls. On obtient :

$$\mathcal{A}\times\Psi_1 = \frac{1}{12\Delta x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ -8a_{21} \\ a_{31} \\ -a_{46} \\ 8a_{56} \\ 0 \\ -8a_{76} \end{pmatrix}, \mathcal{A}\times\Psi_2 = \frac{1}{12\Delta x^2}\begin{pmatrix} 8a_{12} \\ 0 \\ -8a_{32} \\ a_{42} \\ -a_{57} \\ 8a_{67} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}\times\Psi_3 = \frac{1}{12\Delta x^2}\begin{pmatrix} -a_{13} \\ 8a_{23} \\ 0 \\ -8a_{43} \\ a_{53} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.16}$$

$$\mathcal{A}\times\Psi_4 = \frac{1}{12\Delta x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ -a_{24} \\ 8a_{34} \\ 0 \\ -8a_{54} \\ a_{64} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{A}\times\Psi_5 = \frac{1}{12\Delta x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_{35} \\ 8a_{45} \\ 0 \\ -8a_{65} \\ a_{75} \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

Ainsi, on retrouve tout les éléments non nuls de la matrice $\mathcal{A}$, en effectuant simplement cinq opérations produit "*matrice *vecteur*".

Maintenant, avec ces choix astucieux de vecteurs, on dispose d'une stratégie qui permet d'extraire tous les éléments non nuls de la matrice jacobienne en effectuant soit 3 soit 5 opérations. L'implémentation de ces vecteurs tests a été réalisé avec succès dans le logiciel *elsA*. Toutefois, dans le cadre de cette thèse, le problème considéré est plus compliqué que le cas simplifié, sans oublier que le maillage est bidimensionnel.

On propose dans la section suivante, une illustration détaillée de la matrice jacobienne en s'appuyant sur la description de la discrétisation et de la linéarisation des flux qui la constituent.

6.3 Construction des Jacobiens

Le résidu au centre d'une cellule Ω est un bilan des flux convectif, diffusif et des termes sources évalués au centre de cette cellule :

$$\mathbf{R}_\Omega = \frac{\sum_l (\mathbf{F}^c + \mathbf{F}^v)\cdot\Sigma_l - \mathcal{V}(\Omega)T^{source}}{\mathcal{V}(\Omega)} \tag{6.18}$$

Ce résidu, nul à la convergence du calcul d'analyse ($\mathbf{R}(W) = 0$), s'écrit en séparant le résidu du champ moyen $\mathbf{R}^{mf}$ et le résidu du champ turbulent $\mathbf{R}^{tur}$; sachant que $\mathbf{R}^{mf} = \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^v$ et $\mathbf{R}^{tur} = \mathbf{F}^{c_t} + \mathbf{F}^{v_t} - \mathcal{V}T^{source}$.

Depuis le début de ce travail, on a opté pour les schémas de discrétisation des flux suivants :

- Le flux convectif du champ moyen $\mathbf{F}^c$ est discrétisé par un flux de Roe à l'ordre 2, avec approche MUSCL, limiteur de pente de van Albada et correction entropique de Harten ;

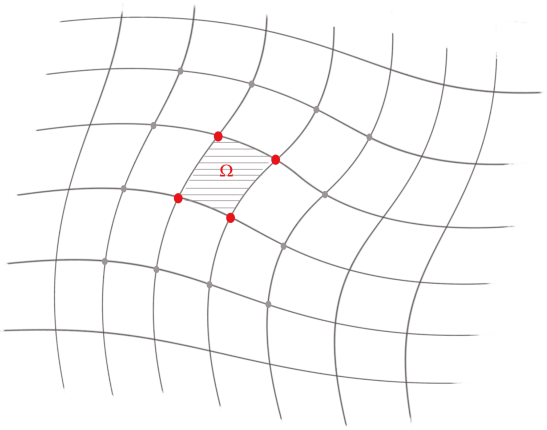


FIGURE 6.6 – *Cellule* Ω *dans un maillage structuré bidimensionnel.*

- Les flux diffusif du champ moyen $\mathbf{F}^v$ et du champ turbulent $\mathbf{F}^{v_t}$ sont discrétisés par un schéma centré à l'ordre 1 avec gradient de vitesse et de température évalués aux centres des cellules.
- Le flux convectif du champ turbulent $\mathbf{F}^{c_t}$ est discrétisé avec le flux de Roe à l'ordre 1.
- Les termes source (T^{source}) sont discrétisés par un schéma centré à l'ordre 1 .

Les méthodes ont été étendues à d'autres schémas de discrétisation et linéarisation du champ turbulent depuis le début de cette thèse, mais le présent travail s'est limité aux schémas et modèles qui étaient disponibles au sein d'*elsA*.
En général, quatre principaux niveaux d'approximation peuvent être envisagés pour effectuer une linéarisation des flux :

1. une linéarisation complète des équations de la mécanique des fluides (champs moyen et modèle de turbulence) ;
2. une hypothèse de μ_t figé : le coefficient de viscosité turbulente et le coefficient du flux de chaleur turbulent sont considérés constants lors de la linéarisation ;
3. une hypothèse de *couche mince* pour la linéarisation du flux visqueux [34] ;
4. la linéarisation du flux visqueux sans l'hypothèse de *couche mince* .

Le choix retenu, est la linéarisation complète des modèles de turbulence et l'utilisation de l'hypothèse de *couche-mince*[1] pour la linéarisation du flux visqueux.
Actuellement, on ne peut citer que quelques modèles linéarisés dans *elsA* : le modèle algébrique de Michel, le modèle de Spalart-Allmaras ainsi que les modèles à deux équations de transport de type $(k-\omega)$ de Wilcox et $(k-\epsilon)$.
En commençant cette thèse, la linéarisation du modèle de Spalart-Allmaras n'était pas encore disponible au sein d'*elsA*, c'est pour cette raison que les travaux ont été réalisés avec le modèle $(k-\omega)$ de Wilcox seulement.
Le code *elsA* intègre un module (*Opt*) dédié au calcul de gradients qui implémente un produit "*matrice*vecteur*" avec un opérateur linéarisé direct et adjoint en approche discrète [34] [46]. Le développement de ce module a été réalisé par l'équipe de travail encadrée par Jacques Peter au département de simulation numérique en aérodynamique

1. Connue par *Thin-Layer* en anglais.

et aéroacoustique (DSNA) de l'ONERA.

Le but de cette section est d'établir la linéarisation des flux du champ moyen et des flux du champ turbulent pour la construction des jacobiens correspondants. Ce développement va être directement implémenté dans le module *Opt* d'*elsA*.

Le principe de la linéarisation consiste, à considérer un comportement linéaire pour de faibles variations des flux.
La linéarisation du flux convectif est rigoureusement exacte, même aux interfaces de bord et aux interfaces voisines des bords.
La linéarisation du flux diffusif est réalisée avec une hypothèse dite de "*couche mince*".

On commence tout d'abord la présentation des stencils qu'on va linéariser pour en extraire ensuite les jacobiens.

6.3.1 Expression des résidus explicites dans le stencil de discrétisation

Soit une cellule $\Omega_{i,j}$ donnée dans un maillage structuré bidimensionnel.
$\Omega_{i,j}$ est une cellule délimitée par les deux interfaces $\Sigma_{i+\frac{1}{2},j}$ et $\Sigma_{i-\frac{1}{2},j}$ selon la direction i et les interfaces $\Sigma_{i,j+\frac{1}{2}}$ et $\Sigma_{i,j-\frac{1}{2}}$ selon la direction j, comme l'indique la figure (6.7). On note $\mathcal{V}_{i,j}$ le volume de la cellule $\Omega_{i,j}$.

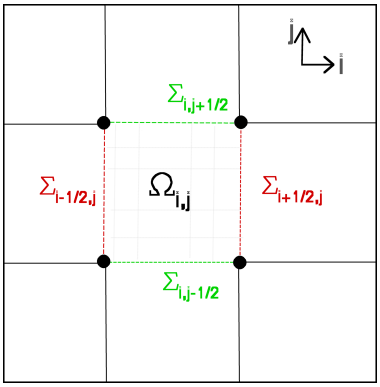
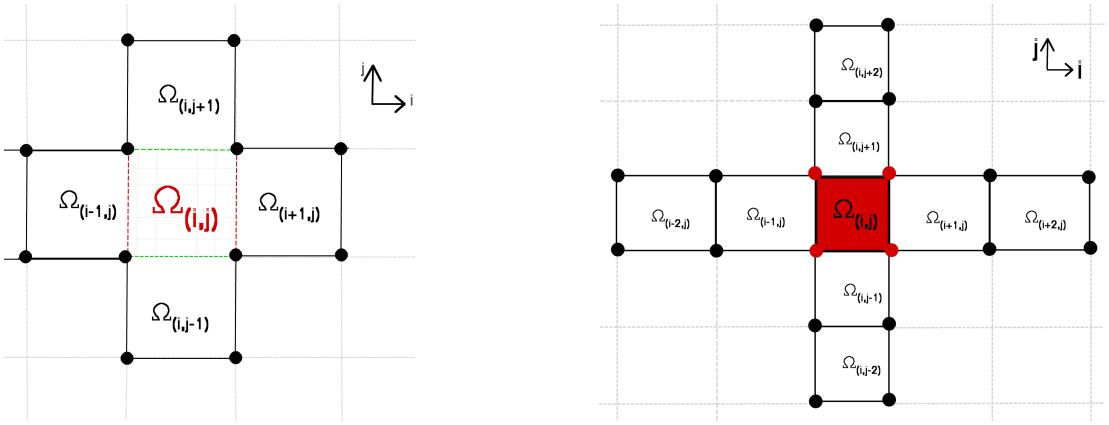


FIGURE 6.7 – *Présentation d'une cellule de discrétisation $\Omega_{i,j}$ et de ses interfaces pour un maillage bidimensionnel.*

On rappelle que le résidu discret se décompose en somme de résidus discrets du champ moyen et du champ turbulent ($\mathbf{R}_{i,j} = \mathbf{R}^{mf}_{i,j} + \mathbf{R}^{tur}_{i,j}$) et qu'il s'écrit pour une cellule $\Omega_{i,j}$, en fonction des flux sous cette forme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{i,j}\mathbf{R}^{mf}_{i,j}(W) &= \left[(\mathbf{F}^{c}{}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{F}^{c}{}_{i-\frac{1}{2},j}) + (\mathbf{F}^{c}{}_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^{c}{}_{i,j-\frac{1}{2}})\right] + \left[(\mathbf{F}^{v}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{F}^{v}_{i-\frac{1}{2},j}) + (\mathbf{F}^{v}{}_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^{v}{}_{i,j-\frac{1}{2}})\right] \\
\mathcal{V}_{i,j}\mathbf{R}^{t}_{i,j}(W,W^t) &= \left[(\mathbf{F}^{ct}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{F}^{ct}_{i-\frac{1}{2},j}) + (\mathbf{F}^{ct}_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^{ct}_{i,j-\frac{1}{2}})\right] + \left[(\mathbf{F}^{vt}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{F}^{vt}_{i-\frac{1}{2},j}) + (\mathbf{F}^{vt}_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^{vt}_{i,j-\frac{1}{2}})\right] + \\
&\quad - \mathcal{V}_{ij}T^{source}_{ij}
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Dans les schémas de discrétisation, on a choisi un schéma à l'ordre 2 pour la discrétisation du flux convectif du champ moyen, et un schéma à l'ordre 1 pour le reste des autres flux (visqueux, convectif turbulent, termes source...).
On obtient donc, deux stencils pour effectuer la linéarisation des flux (figure (6.8)) :



(a) ordre 1 (b) ordre 2

FIGURE 6.8 – *Présentation des stencils de discrétisation pour les schémas d'ordre* 1 *et* 2.

1. Si le schéma de discrétisation est d'ordre 1 alors le stencil est à 5 cellules. Ces 5 cellules vont intervenir pour la contribution du calcul du jacobien. La différentielle du résidu est donnée par :

$$\delta \mathbf{R}_{i,j} = \sum_{\substack{i-1 \leq l \leq i+1 \\ j-1 \leq m \leq j+1}} \frac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial W_{l,m}} \delta W_{l,m} \tag{6.20}$$

2. Si le schéma de discrétisation est d'ordre 2 alors le stencil est à 9 cellules. La différentielle du résidu s'écrit sous la forme d'une somme des contributions de chaque cellule de ce stencil :

$$\delta \mathbf{R}_{i,j} = \sum_{(i-2;j-2) \leq (l;m) \leq (i+2;j+2)} \frac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial W_{l,m}} \delta W_{l,m} \tag{6.21}$$

On s'intéresse maintenant à la détermination de l'expression du jacobien $\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}\right)$ qu'on notera désormais par $\mathbf{J}$.
Pour le stencil de 5 cellules, on a :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial W_{l,m}}\right)_{\substack{i-1 \leq l \leq i+1 \\ j-1 \leq m \leq j+1}} = (\mathbf{J}_{l,m})_{\substack{i-1 \leq l \leq i+1 \\ j-1 \leq m \leq j+1}} \tag{6.22}$$

et pour le stencil de 9 cellules, on a :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}_{i,j}}{\partial W_{l,m}}\right)_{\substack{i-2 \leq l \leq i+2 \\ j-2 \leq m \leq j+2}} = (\mathbf{J}_{l,m})_{\substack{i-2 \leq l \leq i+2 \\ j-2 \leq m \leq j+2}} \tag{6.23}$$

D'autre part, $\mathbf{R}_{i,j} = \mathbf{R}^{mf}_{i,j} + \mathbf{R}^{tur}_{i,j}$, on en déduit que :

$$(\mathbf{J}_{l,m}) = (\mathbf{J}_{l,m})^{mf} + (\mathbf{J}_{l,m})^{tur} \tag{6.24}$$

avec :

$$\begin{aligned}(\mathbf{J}_{l,m})^{mf}{}_{\substack{i-2\le l\le i+2\\ j-2\le m\le j+2}} &= (\mathbf{J}_{l,m})^{c}{}_{\substack{i-2\le l\le i+2\\ j-2\le m\le j+2}} + (\mathbf{J}_{l,m})^{v}{}_{\substack{i-1\le l\le i+1\\ j-1\le m\le j+1}} \\ = \left(\mathbf{J}^c_{i-2,j} + \mathbf{J}^c_{i-1,j} + \mathbf{J}^c_{i,j} + \mathbf{J}^c_{i+1,j} + \mathbf{J}^c_{i+2,j} + \mathbf{J}^c_{i,j-2} + \mathbf{J}^c_{i,j-1} + \mathbf{J}^c_{i,j+1} + \mathbf{J}^c_{i,j+2}\right) \\ + \left(\mathbf{J}^v_{i-1,j} + \mathbf{J}^v_{i,j} + \mathbf{J}^v_{i+1,j} + \mathbf{J}^v_{i,j-1} + \mathbf{J}^v_{i,j+1}\right)\end{aligned} \tag{6.25}$$

et

$$\begin{aligned}(\mathbf{J}_{l,m})^{tur}{}_{\substack{i-1\le l\le i+1\\ j-1\le m\le j+1}} &= \left[(\mathbf{J}_{l,m})^{ct} + (\mathbf{J}_{l,m})^{vt} - (\mathbf{J}_{l,m})^{source}\right]_{\substack{i-1\le l\le i+1\\ j-1\le m\le j+1}} \\ &= \left(\mathbf{J}^{ct}_{i-1,j} + \mathbf{J}^{ct}_{i,j} + \mathbf{J}^{ct}_{i+1,j} + \mathbf{J}^{ct}_{i,j-1} + \mathbf{J}^{ct}_{i,j+1}\right) \\ &+ \left(\mathbf{J}^{vt}_{i-1,j} + \mathbf{J}^{vt}_{i,j} + \mathbf{J}^{vt}_{i+1,j} + \mathbf{J}^{vt}_{i,j-1} + \mathbf{J}^{vt}_{i,j+1}\right) \\ &- \left(\mathbf{J}^{source}_{i-1,j} + \mathbf{J}^{source}_{i,j} + \mathbf{J}^{source}_{i+1,j} + \mathbf{J}^{source}_{i,j-1} + \mathbf{J}^{source}_{i,j+1}\right)\end{aligned} \tag{6.26}$$

On définit ainsi tous les termes du jacobien $(\mathbf{J}_{l,m})$ pour les champs moyen et turbulent. Pour la suite, on s'attachera à détailler les calculs qui ont permis l'obtention de ces termes. Dans les deux sections suivantes, on commence par le calcul des termes des jacobiens du champ moyen $(\mathbf{J}^{mf})$ ensuite les termes du jacobien du champ turbulent $(\mathbf{J}^{tur})$.

6.3.2 Calcul des Jacobiens à partir de la linéarisation des flux du champ moyen

On rappelle ci-dessous l'expression explicite du résidu du champ moyen, pour une cellule $\Omega_{i,j}$ d'un maillage bidimensionnel :

$$\mathcal{V}_{ij}\mathbf{R}^{mf}_{ij}(\mathbf{W}) = \left[\mathbf{F}^c{}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{F}^c{}_{i-\frac{1}{2},j} + \mathbf{F}^c{}_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^c{}_{i,j-\frac{1}{2}}\right] + \left[\mathbf{F}^v{}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{F}^v{}_{i-\frac{1}{2},j} + \mathbf{F}^v{}_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^v{}_{i,j-\frac{1}{2}}\right] \tag{6.27}$$

où $\mathbf{F}^c$ est le flux de Roe étendu à l'ordre 2 (méthode de MUSCL avec limiteur de Van Albada) et $\mathbf{F}^v$ le flux visqueux centré avec calcul des gradients aux centres des cellules. La linéarisation de ces flux et le calcul des jacobiens seront effectués selon la direction i du maillage pour alléger les notations.

6.3.2.1 La Jacobienne du flux convectif

La linéarisation du flux convectif de Roe étendu à l'ordre 2 (méthode MUSCL avec limiteur de Van Albada) est réalisée d'une manière exacte. L'expression de sa différentielle pour les différents type d'interfaces, ainsi que les jacobiens $\mathbf{J}^c$ qui en résultent, vont être présentés dans les sous-sections suivantes.

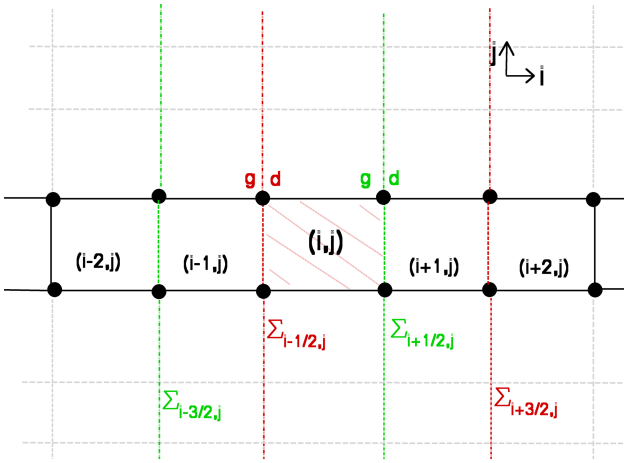


FIGURE 6.9 – *Stencil utilisé dans la linéarisation du flux de convection discret pour une cellule courante.*

6.3.2.1.1 Cas d'une cellule courante Pour une cellule $\Omega_{i,j}$ courante telle que schématisée dans la figure (6.9) (elle n'est pas adjacente à une interface de frontière ou de raccord) le flux convectif dépend des quatre états aux centres de cellules de part et d'autre de cette cellule $\Omega_{i,j}$.
La convention retenue au sein d'*elsA* consiste à considérer une orientation positive des vecteurs normaux aux interfaces lorsqu'ils correspondent à celui du sens du maillage croissant. La cellule $\Omega_{i,j}$ est délimitée à droite par l'interface $\Sigma_{i+\frac{1}{2}}$ et à gauche par l'interface $\Sigma_{i-\frac{1}{2}}$ selon la direction i du maillage.
Le calcul du flux convectif au centre de cette cellule $\Omega_{i,j}$ dépend donc de l'interface $\Sigma_{i+\frac{1}{2}}$ qui fait intervenir les deux cellules Ω_{i+1} et Ω_i et aussi de l'interface $\Sigma_{i-\frac{1}{2}}$ qui à son tour fait intervenir les deux cellules Ω_{i-1} et Ω_i.
Les relations suivantes, expriment les états conservatifs indexé par ^{W} en fonction des états primitifs indexé par ^{P} à gauche et à droite de chacune des interfaces :

$$\mathbf{F}^{cW}_{\Sigma_{i+\frac{1}{2}}}(W_{i-1},W_i,W_{i+1},W_{i+2}) = \mathbf{F}^{cP}_{\Sigma_{i+\frac{1}{2}}}(P^g,P^d)_{\Sigma_{i+\frac{1}{2}}} \tag{6.28}$$

$$\mathbf{F}^{cW}_{\Sigma_{i-\frac{1}{2}}}(W_{i-2},W_{i-1},W_i,W_{i+1}) = \mathbf{F}^{cP}_{\Sigma_{i-\frac{1}{2}}}(P^g,P^d)_{\Sigma_{i-\frac{1}{2}}}, \tag{6.29}$$

sachant que la linéarisation de la variable primitive P (pour les deux interfaces) est sous cette forme :

$$\Sigma_{i+\frac{1}{2}}\begin{cases} P^g_{i+\frac{1}{2}} = P_i + \frac{1}{2}\Phi_{Va}(P_i-P_{i-1},P_{i+1}-P_i) \\ P^d_{i+\frac{1}{2}} = P_{i+1} - \frac{1}{2}\Phi_{Va}(P_{i+1}-P_i,P_{i+2}-P_{i+1}) \end{cases} \tag{6.30}$$

et

$$\Sigma_{i-\frac{1}{2}}\begin{cases} P^g_{i-\frac{1}{2}} = P_{i-1} + \frac{1}{2}\Phi_{Va}(P_{i-1}-P_{i-2},P_i-P_{i-1}) \\ P^d_{i-\frac{1}{2}} = P_i - \frac{1}{2}\Phi_{Va}(P_i-P_{i-1},P_{i+1}-P_i) \end{cases} \tag{6.31}$$

On rappelle que la fonction Φ_{Va} est le limiteur de Van-Albada défini auparavant à la

(4.3.2.1.2).
Ceci permet d'écrire :

$$\mathbf{F}^{cW}_{\Sigma_{i+\frac{1}{2}}}(W_{i-1},W_i,W_{i+1},W_{i+2}) = \mathbf{F}^{cP}_{\Sigma_{i+\frac{1}{2}}}(P_{i-1},P_i,P_{i+1},P_{i+2})_{\Sigma_{i+\frac{1}{2}}} \tag{6.32}$$

$$\mathbf{F}^{cW}_{\Sigma_{i-\frac{1}{2}}}(W_{i-2},W_{i-1},W_i,W_{i+1}) = \mathbf{F}^{cP}_{\Sigma_{i-\frac{1}{2}}}(P_{i-2},P_{i-1},P_i,P_{i+1})_{\Sigma_{i-\frac{1}{2}}}, \tag{6.33}$$

La différentielle du flux convectif par rapport aux états conservatifs, est donnée par :

$$\begin{aligned}
\delta\left(\mathbf{F}^{cW}_{i+\frac{1}{2},j}-\mathbf{F}^{cW}_{i-\frac{1}{2},j}\right) = & \frac{\partial F^{cP}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P^g}\left(\frac{\partial P^g}{\partial P_{i-1}}\frac{\partial P_{i-1}}{\partial W_{i-1}}dW_{i-1}+\frac{\partial P^g}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial W_i}dW_i+\frac{\partial P^g}{\partial P_{i+1}}\frac{\partial P_{i+1}}{\partial W_{i+1}}dW_{i+1}\right)\\
+ & \frac{\partial F^{cP}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P^d}\left(\frac{\partial P^d}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial W_i}dW_i+\frac{\partial P^d}{\partial P_{i+1}}\frac{\partial P_{i+1}}{\partial W_{i+1}}dW_{i+1}+\frac{\partial P^d}{\partial P_{i+2}}\frac{\partial P_{i+2}}{\partial W_{i+2}}dW_{i+2}\right)\\
- & \frac{\partial F^{cP}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P^g}\left(\frac{\partial P^g}{\partial P_{i-2}}\frac{\partial P_{i-2}}{\partial W_{i-2}}dW_{i-2}+\frac{\partial P^g}{\partial P_{i-1}}\frac{\partial P_{i-1}}{\partial W_{i-1}}dW_{i-1}+\frac{\partial P^g}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial W_i}dW_i\right)\\
- & \frac{\partial F^{cP}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P^d}\left(\frac{\partial P^d}{\partial P_{i-1}}\frac{\partial P_{i-1}}{\partial W_{i-1}}dW_{i-1}+\frac{\partial P^d}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial W_i}dW_i+\frac{\partial P^d}{\partial P_{i+1}}\frac{\partial P_{i+1}}{\partial W_{i+1}}dW_{i+1}\right)
\end{aligned} \tag{6.34}$$

On déduit donc les jacobiens du flux convectif sur les cinq cellules :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^c_{i-2,j} &= -\frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}}\left[\frac{\partial F^{cP}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P^g}\frac{\partial P^g}{\partial P_{i-2}}\right]\frac{\partial P_{i-2}}{W_{i-2}}\\
\mathbf{J}^c_{i-1,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}}\left[\left(\frac{\partial F^{cP}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P^g}-\frac{\partial F^{cP}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P^g}\right)\frac{\partial P^g}{\partial P_{i-1}}-\left(\frac{\partial F^{cP}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P^d}\right)\frac{\partial P^d}{\partial P_{i-1}}\right]\frac{\partial P_{i-1}}{\partial W_{i-1}}\\
\mathbf{J}^c_{i,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}}\left[\left(\frac{\partial F^{cP}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P^g}-\frac{\partial F^{cP}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P^g}\right)\frac{\partial P^g}{\partial P_i}+\left(\frac{\partial F^{cP}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P^d}-\frac{\partial F^{cP}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P^d}\right)\frac{\partial P^d}{\partial P_i}\right]\frac{\partial P_i}{\partial W_i}\\
\mathbf{J}^c_{i+1,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}}\left[\left(\frac{\partial F^{cP}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P^d}-\frac{\partial F^{cP}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P^d}\right)\frac{\partial P^d}{\partial P_{i+1}}+\left(\frac{\partial F^{cP}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P^g}\right)\frac{\partial P^g}{\partial P_{i+1}}\right]\frac{\partial P_{i+1}}{\partial W_{i+1}}\\
\mathbf{J}^c_{i+2,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}}\left[\frac{\partial F^{cP}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P^d}\frac{\partial P^d}{\partial P_{i+2}}\right]\frac{\partial P_{i+2}}{\partial W_{i+2}}
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Le flux convectif est discrétisé par le schéma de Roe et il est calculé comme suit :

$$\mathbf{F}^{cP}_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(F^c_{i\pm\frac{1}{2}}(P^g)+F^c_{i\pm\frac{1}{2}}(P^d)\right)+\Delta F^c_{|1}+\Delta F^c_{|4}+\Delta F^c_{|5} \tag{6.36}$$

• Les matrices $\left(\frac{\partial F^{cP}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P^g}\right)$, $\left(\frac{\partial F^{cP}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P^d}\right)$, $\left(\frac{\partial F^{cP}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P^d}\right)$ et $\left(\frac{\partial F^{cP}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P^g}\right)$ sont constituées de termes issus de la linéarisation du flux physique évalués en fonction des états gauche et droite, et de la linéarisation des termes $\Delta F^c_{|1}$ $\Delta F^c_{|4}$ $\Delta F^c_{|5}$ issus de la décomposition expliquée dans le chapitre 4. Ce travail difficile de linéarisation était disponible dans *elsA*.

• Les matrices $\left(\frac{\partial P_l}{\partial W_l}\right)_{i-2\leq l\leq i+2}$ ont été définies dans le chapitre 3 : matrice de passage entre les variables primitives et conservatives

• Les termes $\left(\frac{\partial P^g}{\partial P_l}\right)_{i-2\leq l\leq i+2}$ ou $\left(\frac{\partial P^d}{\partial P_l}\right)_{i-2\leq l\leq i+2}$ sont calculés directement à partir de la fonction Φ_{Va}, ce calcul existe dans *elsA*.

6.3.2.1.2 Cas d'une cellule adjacente à une interface frontière *min* ou *max*

Dans ce cas, le flux qu'on considère est le flux physique de l'état frontière et on calcule sa différentielle en faisant apparaître le jeu des variables primitives, ce qui permet de simplifier les expressions des jacobiens.

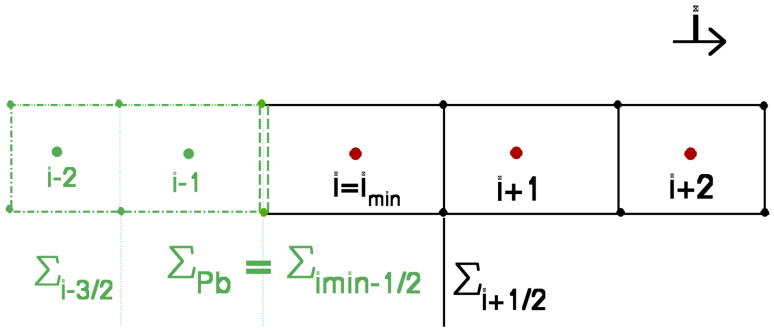


FIGURE 6.10 – *Stencil de linéarisation du flux convectif pour une une frontière min.*

• Pour une interface placée en frontière *min* , comme l'indique la figure (6.10), on a $\Sigma_{bord} = \Sigma_{i_{min}-\frac{1}{2}}$. L'expression du flux au centre de la cellule adjacente à l'interface du bord est :

$$d\mathbf{F}^c = \left(\mathbf{F}^c{}_{\Sigma_{i_{min}+\frac{1}{2}}} - \mathbf{F}^c{}_{\Sigma_{bord}}\right) = \left(\mathbf{F}^{cP}{}_{i_{min}+\frac{1}{2}}(P^d, P^g)_{i_{min}+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^{c\Phi}{}_{i_{min}-\frac{1}{2}}(P_b)\right) \tag{6.37}$$

P_b représente la valeur de la variable primitive au bord, avec :

$$\Sigma_{i_{min}-\frac{1}{2}} \begin{cases} P^g{}_{i_{min}-\frac{1}{2}} = P_{i-1} + \frac{1}{2}\Phi_{Va}(P_{i-1} - P_{i-2}, P_b - P_{i-1}) \\ P^d{}_{i_{min}-\frac{1}{2}} = P_b - \frac{1}{2}\Phi_{Va}(P_b - P_{i-1}, P_{i+1} - P_b) \end{cases} \tag{6.38}$$

et

$$\Sigma_{i_{min}+\frac{1}{2}} \begin{cases} P^g{}_{i_{min}+\frac{1}{2}} = P_b + \frac{1}{2}\Phi_{Va}(P_b - P_{i-1}, P_{i+1} - P_b) \\ P^d{}_{i_{min}+\frac{1}{2}} = P_{i+1} - \frac{1}{2}\Phi_{Va}(P_{i+1} - P_b, P_{i+2} - P_{i+1}) \end{cases} \tag{6.39}$$

la différentielle du flux convectif au bord *min* est donnée par :

$$\begin{aligned}
&\delta\left(\mathbf{F}^{cW}{}_{i_{min}+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^{c\Phi}{}_{i_{min}-\frac{1}{2}}(P_b)\right) = \\
&\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}-\frac{1}{2}}}{\partial P^g}\left(\frac{\partial P^g}{\partial P_{i_{min}-1}}\frac{\partial P_{i_{min}-1}}{\partial W_{i_{min}-1}}dW_{i_{min}-1} + \frac{\partial P^g}{\partial P_b}\frac{\partial P_b}{\partial P_{i_{min}}}\frac{\partial P_{i_{min}}}{\partial W_{i_{min}}}dW_{i_{min}}\right. \\
&\qquad\left. + \frac{\partial P^g}{\partial P_{i_{min}+1}}\frac{\partial P_{i_{min}+1}}{\partial W_{i_{min}+1}}dW_{i_{min}+1}\right) \\
&+\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}-\frac{1}{2}}}{\partial P^d}\left(\frac{\partial P^d}{\partial P_b}\frac{\partial P_b}{\partial P_{i_{min}}}\frac{\partial P_{i_{min}}}{\partial W_{i_{min}}}dW_{i_{min}} + \frac{\partial P^d}{\partial P_{i_{min}+1}}\frac{\partial P_{i_{min}+1}}{\partial W_{i_{min}+1}}dW_{i_{min}+1}\right. \\
&\qquad\left. + \frac{\partial P^d}{\partial P_{i_{min}+2}}\frac{\partial P_{i_{min}+2}}{\partial W_{i_{min}+2}}dW_{i_{min}+2}\right) \\
&-\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}+\frac{1}{2}}}{\partial P^g}\left(\frac{\partial P^g}{\partial P_{i_{min}-2}}\frac{\partial P_{i_{min}-2}}{\partial W_{i_{min}-2}}dW_{i_{min}-2} + \frac{\partial P^g}{\partial P_{i_{min}-1}}\frac{\partial P_{i_{min}-1}}{\partial W_{i_{min}-1}}dW_{i_{min}-1}\right. \\
&\qquad\left. + \frac{\partial P^g}{\partial P_b}\frac{\partial P_b}{\partial P_{i_{min}}}\frac{\partial P_{i_{min}}}{\partial W_{i_{min}}}dW_{i_{min}}\right) \\
&-\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}+\frac{1}{2}}}{\partial P^d}\left(\frac{\partial P^d}{\partial P_{i_{min}-1}}\frac{\partial P_{i_{min}-1}}{\partial W_{i_{min}-1}}dW_{i_{min}-1} + \frac{\partial P^d}{\partial P_b}\frac{\partial P_b}{\partial P_{i_{min}}}\frac{\partial P_{i_{min}}}{\partial W_{i_{min}}}dW_{i_{min}}\right. \\
&\qquad\left. + \frac{\partial P^d}{\partial P_{i_{min}+1}}\frac{\partial P_{i_{min}+1}}{\partial W_{i_{min}+1}}dW_{i_{min}+1}\right)
\end{aligned} \tag{6.40}$$

On obtient donc, les expressions des jacobiens du flux convectif du champ moyen pour une condition limite située sur une interface *min* :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^c_{i+2,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i_{min},j}}\left[\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}-\frac{1}{2}}}{\partial P^d}\frac{\partial P^d}{\partial P_{i_{min}+2}}\right]\frac{\partial P_{i_{min}+2}}{\partial W_{i_{min}+2}} \\
\mathbf{J}^c_{i+1,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i_{min},j}}\left[\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}-\frac{1}{2}}}{\partial P^g}\frac{\partial P^g}{\partial P_{i_{min}+1}} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}-\frac{1}{2}}}{\partial P^d} - \frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}+\frac{1}{2}}}{\partial P^d}\right)\frac{\partial P^d}{\partial P_{i_{min}+1}}\right]\frac{\partial P_{i_{min}+1}}{\partial W_{i_{min}+1}} \\
\mathbf{J}^c_{i,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i_{min},j}}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}-\frac{1}{2}}}{\partial P^g} - \frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}-\frac{1}{2}}}{\partial P^g}\right)\frac{\partial P^g}{\partial P_b} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}-\frac{1}{2}}}{\partial P^d} - \frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}+\frac{1}{2}}}{\partial P^d}\right)\frac{\partial P^d}{\partial P_b}\right]\frac{\partial P_b}{\partial P_{i_{min}}}\frac{\partial P_{i_{min}}}{\partial W_{i_{min}}} \\
\mathbf{J}^c_{i-1,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i_{min},j}}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}-\frac{1}{2}}}{\partial P^g} - \frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}+\frac{1}{2}}}{\partial P^g}\right)\frac{\partial P^g}{\partial P_{i_{min}-1}} + \frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{min}+\frac{1}{2}}}{\partial P^d}\frac{\partial P^d}{\partial P_{i_{min}-1}}\right]\frac{\partial P_{i_{min}-1}}{\partial W_{i_{min}-1}}
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Les matrices qui constituent les jacobiens, sont calculées de manière analogue au cas d'une interface courante, en effectuant juste un changement de variable.
De même, on s'intéresse au interfaces max.
• Pour une interface placée en frontière *max* $\Sigma_{bord} = \Sigma_{i_{max}-\frac{1}{2}}$ comme le montre la figure (6.11), l'expression de la différentielle du flux au centre de la cellule adjacente à ce bord est :

$$d\mathbf{F}^c = \left(\mathbf{F}^c{}_{\Sigma_{i_{max}-\frac{1}{2}}} - \mathbf{F}^c{}_{\Sigma_{i_{max}-\frac{3}{2}}}\right) = \left(\mathbf{F}^{c\Phi}(P_b) - \mathbf{F}^c(P^d, P^g)_{\Sigma_{i_{max}-\frac{3}{2}}}\right) \tag{6.42}$$

avec :

$$\Sigma_{i_{max}-\frac{3}{2}} \begin{cases} {P^g}_{i_{max}-\frac{3}{2}} = & P_{i_{max}-2} + & \frac{1}{2}\Phi_{Va}(P_{i_{max}-2} - P_{i_{max}-3}, P_{i_{max}-1} - P_{i_{max}-2}) \\ {P^d}_{i_{max}-\frac{3}{2}} = & P_{i_{max}-1} - & \frac{1}{2}\Phi_{Va}(P_{i_{max}-1} - P_{i_{max}-2}, P_b - P_{i_{max}-1}) \end{cases} \tag{6.43}$$

et

$$\Sigma_{i_{max}-\frac{1}{2}} \begin{cases} {P^g}_{i_{max}-\frac{1}{2}} = & P_{i_{max}-1} + & \frac{1}{2}\Phi_{Va}(P_{i_{max}-1} - P_{i_{max}-2}, P_b - P_{i_{max}-1}) \\ {P^d}_{i_{max}-\frac{1}{2}} = & P_b - & \frac{1}{2}\Phi_{Va}(P_b - P_{i_{max}-1}, P_{i_{max}+1} - P_b) \end{cases} \tag{6.44}$$

On obtient l'expression des jacobiens du flux convectif du champ moyen pour une

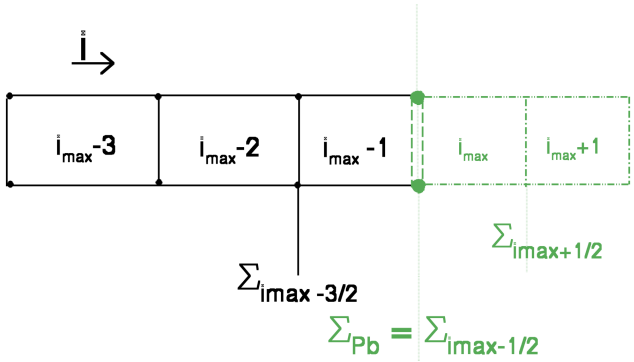


FIGURE 6.11 – *Stencil de linéarisation du flux convectif pour une frontière max.*

condition limite à l'interface *max* :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^c_{i-2,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i_{max},j}} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{max}-\frac{1}{2}}}{\partial P^g} - \frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{max}-\frac{3}{2}}}{\partial P^g} \right) \frac{\partial P^g}{\partial P_{i_{max}-2}} - \frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{max}-\frac{3}{2}}}{\partial P^d} \frac{\partial P^d}{\partial P_{i_{max}-2}} \right] \frac{\partial P_{i_{max}-2}}{\partial W_{i_{max}-2}} \\
\mathbf{J}^c_{i-1,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i_{max},j}} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{max}-\frac{1}{2}}}{\partial P^g} - \frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{max}-\frac{3}{2}}}{\partial P^g} \right) \frac{\partial P^g}{\partial P_{i_{max}-1}} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{max}-\frac{1}{2}}}{\partial P^d} - \frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{max}-\frac{3}{2}}}{\partial P^d} \right) \frac{\partial P^d}{\partial P_{i_{max}-1}} \right] \frac{\partial P_{i_{max}}}{\partial W_{i_{max}}} \\
\mathbf{J}^c_{i,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i_{max},j}} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{max}-\frac{1}{2}}}{\partial P^d} - \frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{max}-\frac{3}{2}}}{\partial P^d} \right) \frac{\partial P^d}{\partial P_b} + \frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{max}-\frac{1}{2}}}{\partial P^g} \frac{\partial P^g}{\partial P_b} \right] \frac{\partial P_b}{\partial P_{i_{max}}} \frac{\partial P_{i_{max}}}{\partial W_{i_{max}}} \\
\mathbf{J}^c_{i+1,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i_{max},j}} \left[\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_{i_{max}-\frac{1}{2}}}{\partial P^d} \frac{\partial P^d}{\partial P_{i_{max}+1}} \right] \frac{\partial P_{i_{max}+1}}{\partial W_{i_{max}+1}}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

le jacobien $\frac{\partial \mathbf{F}^c{}_b}{\partial P_b}$ s'écrit (avec $e_c = \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)$) :

$$\frac{\partial F_b^c}{\partial P_b} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_b\mathcal{S} & \rho\mathcal{S}_{bx} & \rho\mathcal{S}_{by} & \rho\mathcal{S}_{bz} & 0 \\ u_b\mathbf{U}_b.\mathcal{S}_b & \rho\mathbf{U}_b.\mathcal{S}_b + u_b\mathcal{S}_{bx} & \rho u_b\mathcal{S}_{by} & \rho u_b\mathcal{S}_{bz} & \mathcal{S}_{bx} \\ \mathbf{U}_b\mathbf{U}_b.\mathcal{S}_b & \rho\mathbf{U}_b\mathcal{S}_{bx} & \rho(\mathbf{U}_b.\mathcal{S} + \mathbf{U}_b\mathcal{S}_{by}) & \rho\mathbf{U}_b\mathcal{S}_{bz} & \mathcal{S}_{by} \\ w_b\mathbf{U}_b.\mathcal{S}_b & \rho w_b\mathcal{S}_{bx} & \rho w_b\mathcal{S}_{by} & \rho(\mathbf{U}_b.\mathcal{S} + w_b\mathcal{S}_{bz}) & \mathcal{S}_{bz} \\ e_c\mathbf{U}_b.\mathcal{S}_b & \begin{matrix}\rho u_b\mathbf{U}_b.n_b \\ +(\frac{\gamma}{\gamma-1}P+\rho e_c)\mathcal{S}_{bx}\end{matrix} & \begin{matrix}\rho\mathbf{U}_b u_b.n_b \\ +(\frac{\gamma}{\gamma-1}P+\rho e_c)\mathcal{S}_{by}\end{matrix} & \begin{matrix}\rho w_b\mathbf{U}_b.n_b \\ +(\frac{\gamma}{\gamma-1}P+\rho e_c)\mathcal{S}_{bz}\end{matrix} & (\frac{\gamma}{\gamma-1})\mathbf{U}_b.\mathcal{S}_b \end{pmatrix} \tag{6.46}$$

6.3.2.2 La Jacobienne du Flux diffusif - Approximation de type *couche-mince*

Pour la linéarisation des flux diffusifs, une simplification de type *couche-mince* [34] a été envisagée. Les hypothèses pour se situer dans cette approche sont que le nombre de Reynolds Re est élevé, et il se trouve au voisinage d'une paroi dans la couche limite. Par contre, cette approche n'est pas satisfaisante dans le cas des forts décollements. Dans les régions où l'hypothèse de *couche mince* est valide, la partie diffusive des équations de Navier-Stokes vérifie les équations de la couche limite (équations de Prandtl) : dans le flux visqueux suivant les directions x et y, les dérivées dont l'amplitude est prépondérante sont les dérivées en y ($\perp$ à la paroi).

En effet, cette approche consiste à prendre en compte, pour une direction de maillage donnée, l'unique contribution des dérivées dans cette direction, c-à-d, à ne prendre en compte dans la linéarisation du flux visqueux suivant la direction $\overrightarrow{n}$ que les dérivées suivant cette dernière.
On rappelle ici l'expression du flux diffusif de type *couche mince* indispensable pour la linéarisation.
Pour une interface de type $\Sigma_{i+\frac{1}{2}}$ de normale unitaire $n = (n_x, n_y, n_z)^T$, le flux diffusif en approche *couche-mince* numérique est donné par [56] :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{v\,(cm)} = ||\mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}|| \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\left((1+\frac{1}{3}n_x^2)\frac{\partial u}{\partial n}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_xn_y\frac{\partial v}{\partial n}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_xn_z\frac{\partial w}{\partial n}_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ \overline{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}n_xn_y\frac{\partial u}{\partial n}_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_y^2)\frac{\partial v}{\partial n}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_yn_z\frac{\partial w}{\partial n}_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ \overline{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}n_xn_z\frac{\partial u}{\partial n}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}n_yn_z\frac{\partial v}{\partial n}_{i+\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{3}n_z^2)\frac{\partial w}{\partial n}_{i+\frac{1}{2}}\right) \\ \overline{k}_{i+\frac{1}{2}}\frac{\partial T}{\partial n}_{i+\frac{1}{2}} + \overline{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\frac{\left(F^{v\,(cm)}_{i+\frac{1}{2}}\right)_2}{||\mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}||}u_{i+\frac{1}{2}} + \overline{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\frac{\left(F^{v\,(cm)}_{i+\frac{1}{2}}\right)_3}{||\mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}||}v_{i+\frac{1}{2}} + \overline{\mu}_{i+\frac{1}{2}}\frac{\left(F^{v\,(cm)}_{i+\frac{1}{2}}\right)_4}{||\mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}||}w_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{6.47}$$

où la notation $g_{i+\frac{1}{2}}$ représente la moyenne $\frac{1}{2}(g_i + g_{i+1})$ avec g_i la grandeur parmi $\{u, v, w, \nu_t\}$ pour une cellule Ω_i.
Les gradients de vitesse et de température de type $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}}_{i+\frac{1}{2}}$, sont évalués en approximation de type *couche-mince* par :

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h_{i+1}\mathcal{S}_{i+1} - h_i\mathcal{S}_i}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \tag{6.48}$$

avec

$$\mathcal{S}_{i+1} = \frac{\mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}} + \mathcal{S}_{i+\frac{3}{2}}}{2} \text{ et } \mathcal{S}_i = \frac{\mathcal{S}_{i-\frac{1}{2}} + \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}}{2} \tag{6.49}$$

En utilisant la grandeur $g_{i+\frac{1}{2}}$ comme spécifiée auparavant, on redéfinit le flux visqueux $\mathbf{F}^v_{i+\frac{1}{2},j}{}^{(cm)}$ (6.47) par les notations suivantes :

$$\mathbf{F}^v_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\mathbf{F}^v_{i+\frac{1}{2},j}(g_i, g_{i+1})\right)_2 \\ \left(\mathbf{F}^v_{i+\frac{1}{2},j}(g_i, g_{i+1})\right)_3 \\ \left(\mathbf{F}^v_{i+\frac{1}{2},j}(g_i, g_{i+1})\right)_4 \\ \left(\mathbf{F}^v_{i+\frac{1}{2},j}(g_i, g_{i+1})\right)_5 \end{pmatrix} \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}} \tag{6.50}$$

et

$$\mathbf{F}^v_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\mathbf{F}^v_{i-\frac{1}{2},j}(g_i, g_{i-1})\right)_2 \\ \left(\mathbf{F}^v_{i-\frac{1}{2},j}(g_i, g_{i-1})\right)_3 \\ \left(\mathbf{F}^v_{i-\frac{1}{2},j}(g_i, g_{i-1})\right)_4 \\ \left(\mathbf{F}^v_{i-\frac{1}{2},j}(g_i, g_{i-1})\right)_5 \end{pmatrix} \mathcal{S}_{i-\frac{1}{2}} \tag{6.51}$$

La discrétisation du flux visqueux du champ conservatif moyen s'effectue par un schéma centré avec évaluation des gradients de vitesse et de température au centre des cellules, déjà décrit dans le chapitre 3.
La linéarisation du flux visqueux basée sur l'approche de type *couche-mince*, nécessite un stencil de trois cellules comme l'indique la figure (6.12) pour une cellule courante.

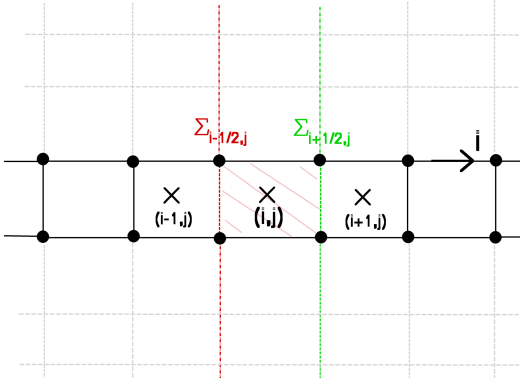


FIGURE 6.12 – *Stencil de* 3 *points pour la linéarisation du flux diffusif.*

6.3.2.2.1 Cas d'une interface courante On note $\mathbf{F}^{v}_{i+\frac{1}{2},j}{}^{(cm)}$ le flux visqueux avec l'hypothèse de *couche-mince*, évalué sur l'interface $\Sigma_{i+\frac{1}{2}}$ associée à la surface $\mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}$ par $\mathbf{F}^{v}_{i+\frac{1}{2},j}$.
Pour une cellule Ω_i entre les deux interfaces courantes $\Sigma_{i+\frac{1}{2}}$ et $\Sigma_{i-\frac{1}{2}}$ (le passage par le jeu des variables primitives étant réalisé pour permettre un calcul plus aisé des jacobiens des flux), la différentielle de ce flux s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial W} = \frac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i+1}} \frac{\partial P_{i+1}}{\partial W_{i+1}} dW_{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i}} \frac{\partial P_{i}}{\partial W_{i}} dW_{i} \tag{6.52}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial W} = \frac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i}} \frac{\partial P_{i}}{\partial W_{i}} dW_{i} + \frac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i-1}} \frac{\partial P_{i-1}}{\partial W_{i-1}} dW_{i-1} \tag{6.53}$$

Sachant que $\mathbf{J}^{v} = \dfrac{\partial \mathbf{R}^{mf_v}}{\partial W} = \dfrac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(\dfrac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial W} - \dfrac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial W} \right)$ On peut donc déduire les expressions du jacobiens des flux visqueux pour une cellule courante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{v}_{i+1,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left[\frac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i+1}} \right] \frac{\partial P_{i+1}}{\partial W_{i+1}} \\
\mathbf{J}^{v}_{i-1,j} &= \frac{-1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left[\frac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i-1}} \right] \frac{\partial P_{i-1}}{\partial W_{i-1}} \\
\mathbf{J}^{v}_{i,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left[\frac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i}} - \frac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i}} \right] \frac{\partial P_{i}}{\partial W_{i}}
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Les expressions des jacobiens du flux visqueux $\mathbf{J}^{v}$ font intervenir d'une part, les matrices de passage des variables primitives aux variables conservatives $\dfrac{\partial P_i}{\partial W_i}$, $\dfrac{\partial P_{i+1}}{\partial W_{i+1}}$ et $\dfrac{\partial P_{i-1}}{\partial W_{i-1}}$ et d'autre part les matrices $\dfrac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i+1}}$, $\dfrac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i}}$, $\dfrac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i-1}}$ et $\dfrac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i}}$.
On note $\dfrac{\partial \mathbf{F}^{v}_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i+1}} = \Pi_{i+1}$ dont l'expression est donnée par [56] :

$$\Pi_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{xx} & \gamma^{xy} & \gamma^{xz} & 0 \\ 0 & \gamma^{yx} & \gamma^{yy} & \gamma^{yz} & 0 \\ 0 & \gamma^{zx} & \gamma^{zy} & \gamma^{zz} & 0 \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{pmatrix} \tag{6.55}$$

avec γ et m_{ij} sont des coefficients donnés par :

$$\begin{cases} \gamma^{xx} = \dfrac{\overline{\mu_{i+\frac{1}{2}}} s_{i+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \left(1 + \dfrac{1}{3} n_x^2\right) \mathcal{S}_{i+1} \quad ; \\ \gamma^{yy} = \dfrac{\overline{\mu_{i+\frac{1}{2}}} s_{i+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \left(1 + \dfrac{1}{3} n_y^2\right) \mathcal{S}_{i+1} \quad ; \\ \gamma^{zz} = \dfrac{\overline{\mu_{i+\frac{1}{2}}} s_{i+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \left(1 + \dfrac{1}{3} n_z^2\right) \mathcal{S}_{i+1} \quad ; \\ \gamma^{xy} = \gamma^{yx} = \dfrac{\overline{\mu_{i+\frac{1}{2}}} s_{i+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \left(n_x n_y\right) \mathcal{S}_{i+1} \quad ; \\ \gamma^{xz} = \gamma^{zx} = \dfrac{\overline{\mu_{i+\frac{1}{2}}} s_{i+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \left(n_x n_z\right) \mathcal{S}_{i+1} \quad ; \\ \gamma^{yz} = \gamma^{zy} = \dfrac{\overline{\mu_{i+\frac{1}{2}}} \mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \left(n_y n_z\right) \mathcal{S}_{i+1} \quad ; \\ m_{51} = \left(\dfrac{\mu}{Pr} + \dfrac{\mu_t}{Pr_t}\right)_{i+\frac{1}{2}} \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \dfrac{-p_{i+1}}{\rho_{i+1}^2} \dfrac{\mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \mathcal{S}_{i+1} \quad ; \\ m_{52} = \gamma^{xx} u_{i+\frac{1}{2}} + \gamma^{xy} v_{i+\frac{1}{2}} + \gamma^{xz} w_{i+\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2} (\mathbf{F}^v_{i+\frac{1}{2},j})_2 \quad ; \\ m_{53} = \gamma^{yx} u_{i+\frac{1}{2}} + \gamma^{yy} v_{i+\frac{1}{2}} + \gamma^{yz} w_{i+\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2} (\mathbf{F}^v_{i+\frac{1}{2},j})_3 \quad ; \\ m_{54} = \gamma^{zx} u_{i+\frac{1}{2}} + \gamma^{zy} v_{i+\frac{1}{2}} + \gamma^{zz} w_{i+\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2} (\mathbf{F}^v_{i+\frac{1}{2},j})_4 \quad ; \\ m_{55} = \left(\dfrac{\mu}{Pr} + \dfrac{\mu_t}{Pr_t}\right)_{i+\frac{1}{2}} \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \dfrac{1}{\rho_{i+1}} \dfrac{\mathcal{S}_{i+\frac{1}{2}}}{\mathcal{V}_{i+\frac{1}{2}}} \mathcal{S}_{i+1} \end{cases} \tag{6.56}$$

L'obtention de la matrice $\dfrac{\partial \mathbf{F}^v_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_i}$ peut être effectuée en remplaçant directement dans la matrice Π_{i+1} le terme $\mathcal{S}_{i+1}$ par le terme $-\mathcal{S}_i$, on a donc $\dfrac{\partial \mathbf{F}^v_{i+\frac{1}{2},j}}{\partial P_i} = -\Pi_i$.
De la même manière, si on note $\dfrac{\partial \mathbf{F}^v_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P_{i-1}} = -\Pi_{i-1}$ alors, la substitution du terme $\mathcal{S}_{i-1}$ dans la matrice Π_{i-1} par le terme $\mathcal{S}_i$ permet d'obtenir $\dfrac{\partial \mathbf{F}^v_{i-\frac{1}{2},j}}{\partial P_i} = \Pi_i$.

Ce qui permet d'écrire les jacobiens des flux visqueux sous cette forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^v_{i,j} &= \frac{2}{\mathcal{V}_{i,j}} \Pi_i \frac{\partial P_i}{\partial W_i} \\ \mathbf{J}^v_{i+1,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(\Pi_{i+1} \frac{\partial P_{i+1}}{\partial W_{i+1}}\right) \\ \mathbf{J}^v_{i-1,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(\Pi_{i-1} \frac{\partial P_{i-1}}{\partial W_{i-1}}\right) \end{aligned} \tag{6.57}$$

6.3.2.2.2 Linéarisation pour une interface de frontière Dans ce cas de figure, la différentielle est tronquée pour ne conserver que la contribution interne du domaine.

Le volume de contrôle de la cellule vaut celui de la cellule adjacente b, la somme des viscosités est égale celle au centre de la cellule b ; de même pour $\bar{\kappa}$.
La vitesse à l'interface frontière b est choisi égale à la vitesse au centre de la cellule b pour la cinquième composante de $\mathbf{F}_b^v$ et est considérée constante par rapport aux composantes de vitesse dans la cellule adjacente (pour la dérivation).
Pour une frontière d'indice $b = i_{min} - \frac{1}{2}$, la linéarisation devient :

$$d\mathbf{F}_b^{v(cm)} = \Pi_{i_{min}} \frac{\partial P_{i_{min}}}{\partial W_{i_{min}}} dW_{i_{min}} \tag{6.58}$$

et pour une interface d'indice $b = i_{max} - \frac{1}{2}$:

$$d\mathbf{F}_b^{v(cm)} = \Pi_{i_{max}} \frac{\partial P_{i_{max}}}{\partial W_{i_{max}}} dW_{i_{max}} \tag{6.59}$$

L'écriture du jacobien visqueux dans ce cas est donnée par :

$$\mathbf{J}_{ij}^v = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(\Pi_{i_{max}} \frac{\partial P_{i_{max}}}{\partial W_{i_{max}}} \right) \tag{6.60}$$

ou

$$\mathbf{J}_{ij}^v = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(\Pi_{i_{min}} \frac{\partial P_{i_{min}}}{\partial W_{i_{min}}} \right) \tag{6.61}$$

6.3.2.2.3 Linéarisation pour une interface de paroi adiabatique En tenant compte de l'approche type *couche-mince*, seule la condition aux limites d'une paroi adiabatique avec adhérence à la paroi est linéarisé précisément. Cette condition aux limites impose les relations : $\mu_t = 0$, $\mathbf{U} = 0$ et $\nabla T = 0$ à l'interface. On considère à titre d'exemple une frontière d'interface $\Sigma_b = \Sigma_{i_{min}-\frac{1}{2}}$. La prise en compte de la condition limite à la paroi implique des simplifications de la matrice $\Pi_{i_{min}}$. En effet, tous les termes m_{ij} deviennent nuls et la linéarisation s'écrit alors :

$$d\mathbf{F}_b^{v\,(cm)} = \Pi_{i_{min}}^{pa} \frac{\partial P_{i_{min}}}{\partial W_{i_{min}}} dW_{i_{min}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{xx} & \gamma^{xy} & \gamma^{xz} & 0 \\ 0 & \gamma^{yx} & \gamma^{yy} & \gamma^{yz} & 0 \\ 0 & \gamma^{zx} & \gamma^{zy} & \gamma^{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial P_{i_{min}}}{\partial W_{i_{min}}} dW_{i_{min}} \tag{6.62}$$

L'écriture du jacobien visqueux dans ce cas est donnée par :

$$\mathbf{J}_{ij}^v = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(\Pi_{i_{min}}^{pa} \frac{\partial P_{i_{min}}}{\partial W_{i_{min}}} \right) \tag{6.63}$$

On a détaillé les termes de la matrice jacobienne des résidus explicite du champ moyen $(\mathbf{J})^{mf} = \dfrac{\partial \mathbf{R}^{mf}}{\partial W}$.
En ce qui concerne les termes de la matrice jacobienne des résidus du champ turbulent $(\mathbf{J})^{tur} = \dfrac{\partial \mathbf{R}^{tur}}{\partial W}$, comme on va le voir dans la section suivante, on utilisera le modèle de $(k-\omega)$ de Wilcox comme modèle de turbulence.

6.3.3 Calcul des jacobiens à partir de la linéarisation des flux du champ turbulent

L'expression du résidu explicite du champ turbulent pour une cellule $\Omega_{i,j}$ est :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{ij}\mathbf{R}^{tur}_{i,j}(W,W^{tur}) = &\left[(\mathbf{F}^{ct}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{F}^{ct}_{i-\frac{1}{2},j}) + (\mathbf{F}^{ct}_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^{ct}_{i,j-\frac{1}{2}})\right]\\ &+ \left[(\mathbf{F}^{vt}_{i+\frac{1}{2},j} - \mathbf{F}^{vt}_{i-\frac{1}{2},j}) + (\mathbf{F}^{vt}_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^{vt}_{i,j-\frac{1}{2}})\right]\\ &- \mathcal{V}_{ij}T^{source}_{ij}\end{aligned} \tag{6.64}$$

où $\mathbf{F}^{ct}$ est le flux convectif turbulent discrétisé avec le schéma de Roe à l'ordre 1, $\mathbf{F}^{vt}$ est le flux visqueux discrétisé avec un schéma centré à l'ordre 1 avec un calcul des gradients aux centres des cellules et T^{source} le terme source qui est aussi discrétisé avec un schéma centré à l'ordre 1.
On constate que pour tous les flux intervenant dans le calcul des jacobiens du champ turbulent sont discrétisés par un schéma d'ordre 1.

W représente le champ conservatif et W^{tur} est la variable qui désigne le champ turbulent. On a choisi dans cette thèse le modèle $(k-\omega)$ de Wilcox comme modèle de turbulence. Désormais, on notera $W^{tur} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E, \rho k, \rho\omega)^t$.

L'expression des jacobiens du champ turbulent est tel que :

$$\begin{aligned}(\mathbf{J}_{l,m})^{tur}_{\substack{i-1\le l\le i+1\\ j-1\le m\le j+1}} = &\quad \left(\mathbf{J}^{ct}_{i-1,j} + \mathbf{J}^{ct}_{i,j} + \mathbf{J}^{ct}_{i+1,j} + \mathbf{J}^{ct}_{i,j-1} + \mathbf{J}^{ct}_{i,j+1}\right)\\ + &\quad \left(\mathbf{J}^{vt}_{i-1,j} + \mathbf{J}^{vt}_{i,j} + \mathbf{J}^{vt}_{i+1,j} + \mathbf{J}^{vt}_{i,j-1} + \mathbf{J}^{vt}_{i,j+1}\right)\\ - &\quad \left(\mathbf{J}^{source}_{i-1,j} + \mathbf{J}^{source}_{i,j} + \mathbf{J}^{source}_{i+1,j} + \mathbf{J}^{source}_{i,j-1} + \mathbf{J}^{source}_{i,j+1}\right)\end{aligned} \tag{6.65}$$

La linéarisation des différents flux et le calcul des jacobiens vont être détaillés dans les sections suivantes.
On précise que les calculs vont être présentés selon l'indice i afin d'alléger les notations.

6.3.3.1 La jacobienne du flux convectif turbulent

On utilise l'expression du flux convectif turbulent.

$W^{tur} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E, \rho k, \rho\omega)^t$ avec :

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{p_{turb}}{\gamma_{turb} - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) \tag{6.66}$$

où [46] :

$$p_{turb} = (\gamma_{turb} - 1)\rho k, \text{ et } \gamma_{turb} = \frac{5}{3} \tag{6.67}$$

Le flux convectif turbulent est discrétisé par le schéma de Roe à l'ordre 1. Pour cela, on considère le stencil à trois points présenté dans la figure (6.12).
Sur l'interface $\Sigma_{i+\frac{1}{2}}$ on a bien : $W^{tur}_g = W^{tur}_i$ et $W^{tur}_d = W^{tur}_{i+1}$.

On a :

$$d\mathbf{F} = \mathbf{F}^{ct}_{\Sigma_{i+\frac{1}{2}}}(W^{tur}_{i+1}, W^{tur}_{i}) - \mathbf{F}^{ct}_{\Sigma_{i-\frac{1}{2}}}(W^{tur}_{i}, W^{tur}_{i-1}) \tag{6.68}$$

Après calcul de la différentielle des flux, on obtient les jacobiens du flux convectif du champ turbulent (pour le cas d'une cellule courante) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{ct}_{i,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}}\left(\frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{i+\frac{1}{2}}}{\partial W^{tur}_{i}} - \frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{i-\frac{1}{2}}}{\partial W^{tur}_{i}}\right) \\
\mathbf{J}^{ct}_{i+1,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}}\frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{i+\frac{1}{2}}}{\partial W^{tur}_{i+1}} \\
\mathbf{J}^{ct}_{i-1,j} &= -\frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}}\frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{i-\frac{1}{2}}}{\partial W^{tur}_{i-1}}
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Les matrices $\left(\frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{i\pm\frac{1}{2}}}{\partial W^{tur}_{i\pm1}}\right)$ et $\left(\frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{i+\pm\frac{1}{2}}}{\partial W^{tur}_{i}}\right)$ existent dans *elsA*. En effet, le flux convectif turbulent exacte est donné par :

$$\mathbf{F}^{ct} = \left(\rho u, \rho u^2 + p + p_{turb}, \rho uv, \rho uw \rho H u, \rho k u, \rho \omega u\right) \text{ avec } H = \frac{E + p + p_{turb}}{\rho}$$

Pour plus de détails du calcul de ces matrices sont présentés dans le manuel théorique d'*elsA* [46].

En revanche, dans le cas d'une interface adjacente à une frontière, le stencil de linéarisation se réduit à une seule cellule (figure (6.13)).

Le jacobien dans le cas d'une frontière *min*, s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{ct}_{i,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}}\left(\frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{i_{min}+\frac{1}{2}}}{\partial W^{tur}_{i_{min}}} - \frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{b}}{\partial W^{tur}_{i_{min}}}\right) \\
\mathbf{J}^{ct}_{i,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}}\left(\frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{i_{min}+\frac{1}{2}}}{\partial W^{tur}_{i_{min}}} - \frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{i_{min}-\frac{1}{2}}}{\partial W^{tur}_{i_{min}}}\right).
\end{aligned} \tag{6.70}$$

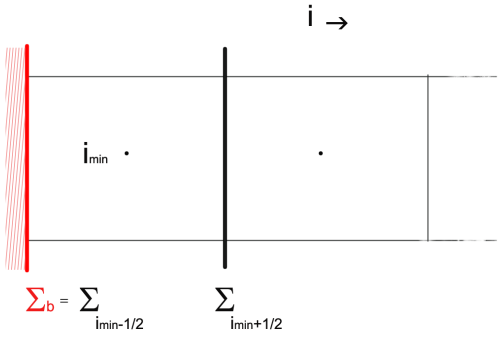
Le jacobien dans le cas d'une frontière *max*, s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{ct}_{i,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}}\left(\frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{b}}{\partial W^{tur}_{i_{max}}} - \frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{i_{max}-\frac{1}{2}}}{\partial W^{tur}_{i_{max}}}\right) \\
\mathbf{J}^{ct}_{i,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}}\left(\frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{i_{max}+\frac{1}{2}}}{\partial W^{tur}_{i_{max}}} - \frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{i_{max}-\frac{1}{2}}}{\partial W^{tur}_{i_{max}}}\right).
\end{aligned} \tag{6.71}$$

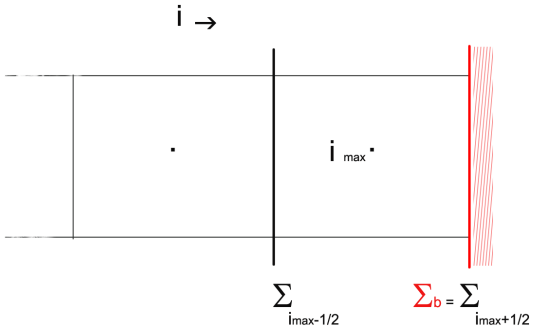
Sachant que $\left(\frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{b}}{\partial W^{tur}_{i_{max}}}\right)$ et $\left(\frac{\partial \mathbf{F}^{ct}_{b}}{\partial W^{tur}_{i_{min}}}\right)$ sont calculées à partir de (6.46).

6.3.3.2 La jacobienne du flux diffusif turbulent

Le calcul du jacobien du flux visqueux turbulent se fait à peu près de la même façon que le jacobien du flux visqueux du champ moyen. Sauf que la variable du champ



(a) frontiére *min*



(b) frontière *max*

FIGURE 6.13 – *Présentation des cellules adjacentes aux frontières.*

aérodynamique $\mathbf{W}$ devient W^{tur}. On admet les mêmes conditions de linéarisation : l'hypothèse de *couche-mince*, la discrétisation par le même schéma centré à l'ordre 1 et la même évaluation des gradients de vitesse et de température qui s'effectue aux centres des cellules.

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{vt}_{i,j} &= \frac{2}{\mathcal{V}_{i,j}} \Pi_i \frac{\partial P_i}{\partial W^{tur}_i} \\
\mathbf{J}^{vt}_{i+1,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(\Pi_{i+1} \frac{\partial P_{i+1}}{\partial W^{tur}_{i+1}} \right) \\
\mathbf{J}^{vt}_{i-1,j} &= \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(\Pi_{i-1} \frac{\partial P_{i-1}}{\partial W^{tur}_{i-1}} \right).
\end{aligned} \tag{6.72}$$

Les conditions aux limites se traitent de la même manière que les conditions aux limites du flux diffusif moyen.

6.3.3.3 La jacobienne du terme source

Le terme source T^{source} du modèle de turbulence $(k-\Omega)$ de Wilcox est évalué par l'expression :

$$T^{source} \simeq \begin{pmatrix} S_k = \mathbf{P} - \beta^* \rho k \omega \\ S_w = \frac{\gamma\omega}{k}\mathbf{P} - \beta\rho\omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Prod_6 + Dest_6 \\ Prod_7 + Dest_7 \end{pmatrix} \tag{6.73}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{c} Prod_6 = \mathbf{P}, Prod_7 = \frac{\gamma\omega}{k}\mathbf{P} : \text{ les composantes du terme de production de k,} \\ Dest_6 = -\beta^*\rho k\omega, Dest_7 = -\beta\rho\omega^2 : \text{ les composantes du terme de destruction D.} \end{array} \right. \tag{6.74}$$

et les constantes :

$$\beta = \frac{3}{40},\ \beta^* = 0.009,\ \gamma = \frac{5}{9} \text{ et } \gamma^* = 1. \tag{6.75}$$

Les dérivées du coefficient de viscosité $\mu_t = \gamma^*\dfrac{\rho k}{\omega}$ par rapport à la variable ρ et les variables turbulentes ρk et $\rho\omega$, sont immédiates :

$$\begin{array}{rrrr} \dfrac{\partial \mu_t}{\partial \rho} = & \gamma^*\dfrac{\rho k}{\rho\omega} = & \dfrac{\mu_t}{\rho} \\ \dfrac{\partial \mu_t}{\partial \rho k} = & \gamma^*\dfrac{\rho}{\rho\omega} = & \dfrac{\mu_t}{\rho k} \\ \dfrac{\partial \mu_t}{\partial \rho\omega} = & -\gamma^*\rho\dfrac{\rho k}{\rho\omega^2} = & -\dfrac{\mu_t}{\rho\omega} \end{array} \tag{6.76}$$

On exprime les jacobiens du terme source sous la forme : $\mathbf{J}^{source} = \mathbf{J}^{prod} + \mathbf{J}^{dest}$.

6.3.3.3.a Terme de destruction

Dans les expressions des terme de destruction $Dest_6 = -\beta^*\rho k\omega$ et $Dest_7 = -\beta\rho\omega^2$, aucun gradient n'apparaît, ce qui permet de conclure que la linéarisation de ces termes se fait sur un stencil d'une seule cellule d'indice $\{(i,j)\}$: le jacobien du terme de destruction s'écrit :

$$(\mathbf{J}_{i,j})^{dest}_{6|7} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Dest_6}{\partial W^{tur}_{ij}} \\ \\ \frac{\partial Dest_7}{\partial W^{tur}_{ij}} \end{pmatrix} \tag{6.77}$$

avec $W^{tur}_{ij} = (\rho_{ij}, \rho u_{ij}, \rho v_{ij}, \rho w_{ij}, \rho E_{ij}, \rho k_{ij}, \rho\omega_{ij})^t$.
On écrit alors le jacobien du terme de destruction sous cette forme :

$$(\mathbf{J}_{i,j})^{dest}_{6|7} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Dest_6}{\partial W^{tur}_{ij}} \\ \\ \frac{\partial Dest_7}{\partial W^{tur}_{ij}} \end{pmatrix} = (d_{ks})_{\substack{6 \le k \le 7 \\ 1 \le s \le 7}} \tag{6.78}$$

avec :

$$\begin{cases} d_{61} = & \dfrac{\partial Dest_6}{\partial \rho_{ij}} = & -\beta^*\omega k = & \dfrac{Dest_6}{\rho_{ij}}, \\ d_{66} = & \dfrac{\partial Dest_6}{\partial \rho k_{ij}} = & -\beta^*\omega = & \dfrac{Dest_6}{\rho k_{ij}}, \\ d_{67} = & \dfrac{\partial Dest_6}{\partial \rho \omega_{ij}} = & -\beta^* k = & \dfrac{Dest_6}{\rho \omega_{ij}}, \\ d_{62} = & d_{63} = d_{64} = d_{65} = 0, & & \\ d_{71} = & \dfrac{\partial Dest_7}{\partial \rho_{ij}} = & -\beta\omega^2 = & \dfrac{Dest_7}{\rho_{ij}}, \\ d_{77} = & \dfrac{\partial Dest_7}{\partial \rho \omega_{ij}} = & -\beta\omega = & \dfrac{Dest_7}{\rho \omega_{ij}}, \\ d_{72} = & d_{73} = d_{74} = d_{75} = d_{76} = 0. & & \end{cases} \tag{6.79}$$

Les $d_{62}, d_{63}, d_{64}, d_{65}, d_{72}, d_{73}, d_{74}, d_{75}$ et d_{76} sont nuls. En effet, pour le vecteur de vitesse $\mathbf{U}_{i,j} = (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij})^t$, l'expression de $Dest_6$ ne dépend pas de $\mathbf{U}_{i,j}$ ni de la variable ρE_{ij}, ce qui permet d'écrire $\dfrac{\partial Dest_6}{\partial \mathbf{U}_{i,j}} = 0 = \dfrac{\partial Dest_6}{\partial \rho E_{i,j}}$. De même on peut conclure que, $\dfrac{\partial Dest_7}{\partial \mathbf{U}_{i,j}} = \dfrac{\partial Dest_7}{\partial \rho E_{i,j}} = \dfrac{\partial Dest_7}{\partial \rho k_{i,j}} = 0$.

Alors pour une cellule courante $\Omega_{i,j}$, on a :

$$(\mathbf{J}_{i,j})_{6|7}^{dest} = \begin{pmatrix} \frac{Dest_6}{\rho_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Dest_6}{\rho k_{ij}} & \frac{Dest_6}{\rho \omega_{ij}} \\ \frac{Dest_7}{\rho_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Dest_7}{\rho \omega_{ij}} \end{pmatrix} \tag{6.80}$$

$$(\mathbf{J}_{i,j})_{6|7}^{dest} = \begin{pmatrix} -\beta^*\omega k & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta^*\omega & -\beta^* k \\ -\beta\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta\omega \end{pmatrix} \tag{6.81}$$

6.3.3.3.b Linéarisation du terme de production

Les deux termes de production $Prod_6$ et $Prod_7$ représentent deux fonctions du champ $\mathbf{W}^{tur}$ et de la viscosité cinématique μ_t :

$$\begin{cases} Prod_6 = \mathbf{P} = f(\mathbf{W}^{tur}, \mu_t), \\ Prod_7 = \frac{\gamma\omega}{k}\mathbf{P} = \frac{\rho\gamma}{\mu_t}\mathbf{P} = g(\mathbf{W}^{tur}, \mu_t) \end{cases} \tag{6.82}$$

L'expression du terme $\mathbf{P}$ peut s'écrire sous cette forme :

$$\mathbf{P} = \mu_t \left(\nabla\mathbf{U} \cdot \nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U} \cdot \nabla\mathbf{U}^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{U})^2 \right) - \frac{2}{3}\rho k (\nabla \cdot \mathbf{U}). \tag{6.83}$$

Pour calculer les jacobiens du terme de production, on effectue tout d'abord la dérivation des termes $Prod_6$ et $Prod_7$ par rapport à $\mathbf{W}^{tur} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E, \rho k, \rho\omega)^t$ et le coefficient de viscosité turbulent μ_t.

Les dérivées des termes de production par rapport au coefficient de la viscosité dynamique μ_t est immédiate :

$$\frac{\partial Prod_6}{\partial \mu_t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t} = \nabla\mathbf{U} \cdot \nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U} \cdot \nabla\mathbf{U}^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{U})^2, \tag{6.84}$$

et

$$\frac{\partial Prod7}{\partial \mu_t} = \frac{\partial \frac{\gamma\omega\mathbf{P}}{k}}{\partial \mu_t} = \frac{\partial \frac{\gamma\rho\mathbf{P}}{\mu_t}}{\partial \mu_t} = \gamma\frac{\rho}{\mu_t}\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t} - \frac{\mathbf{P}}{\mu_t}\right). \tag{6.85}$$

Les dérivées par rapport à la masse volumique au centre de la cellule s'écrit directement :

$$\frac{\partial Prod_6}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t}\frac{\partial \mu_t}{\partial \rho} = \frac{\mu_t}{\rho}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t}, \tag{6.86}$$

et

$$\frac{\partial Prod_7}{\partial \rho} = \frac{\partial \frac{\gamma\omega\mathbf{P}}{k}}{\partial \rho} = \frac{\partial Prod_7}{\partial \mu_t}\frac{\partial \mu_t}{\partial \rho} = \gamma\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t} - \frac{\mathbf{P}}{\mu_t}\right). \tag{6.87}$$

De la même manière, la dérivation des deux termes de production par rapport aux deux variables turbulentes, se calcule directement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Prod_6}{\partial \rho k} &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho k} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t}\frac{\partial \mu_t}{\partial \rho k} = \frac{\mu_t}{\rho k}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t}, \\ \frac{\partial Prod_6}{\partial \rho \omega} &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho \omega} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t}\frac{\partial \mu_t}{\partial \rho \omega} = -\frac{\mu_t}{\rho \omega}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t}, \end{aligned} \tag{6.88}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial Prod_7}{\partial \rho k} &= \frac{\partial Prod_7}{\partial \mu_t}\frac{\partial \mu_t}{\partial \rho k} = \frac{\gamma}{k}\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t} - \frac{\mathbf{P}}{\mu_t}\right), \\ \frac{\partial Prod_7}{\partial \rho \omega} &= \frac{\partial Prod_7}{\partial \mu_t}\frac{\partial \mu_t}{\partial \rho \omega} = -\frac{\gamma}{\omega}\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t} - \frac{\mathbf{P}}{\mu_t}\right). \end{aligned} \tag{6.89}$$

Pour la dérivation des termes de production par rapport aux variables conservatives, on utilise les variables primitives $P = (\rho, u, v, w, p)^t$.

Ces variables primitives sont déduites par la matrice de passage $\dfrac{\partial P}{\partial W}$ avec $W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^t$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Prod_6}{\partial W} &= \frac{\partial Prod_6}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial W}, \\ \frac{\partial Prod_7}{\partial W} &= \frac{\partial Prod_7}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial W}. \end{aligned} \tag{6.90}$$

Le calcul de $\dfrac{\partial Prod_6}{\partial P}$ et de $\dfrac{\partial Prod_7}{\partial P}$ est détaillé dans l'annexe (B.2).

Après avoir effectué toutes les dérivations nécessaires, on calcule maintenant les termes du jacobien de production $\mathbf{J}^{prod}$.

Le stencil de linéarisation des deux termes de production $Prod_6$ et $Prod_7$ est un stencil de trois points à cause de la présence du gradient dans les expressions.

On note *cell* l'indice du stencil selon la direction i, avec $cell \in \{(i-1,j),(i,j),(i+1,j)\}$, on a :

$$\left(\mathbf{J}^{prod}\right)_{6|7} = \sum_{cell} \left((\alpha_{ks})_{\substack{6 \leq k \leq 7 \\ 1 \leq s \leq 7}} \right)_{cell} = \left(\mathbf{J}^{prod}_{i-1,j}\right)_{6|7} + \left(\mathbf{J}^{prod}_{i,j}\right)_{6|7} + \left(\mathbf{J}^{prod}_{i+1,j}\right)_{6|7} \tag{6.91}$$

Les dérivées partielles du champ de vitesse par rapport à la géométrie sont évaluées aux centres des cellules. La dérivée par rapport à une direction géométrique donnée $\mathcal{X} = x$, ou y, de la composante de vitesse u est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{X}} = \frac{1}{\mathcal{V}_{ijk}} \left(u_{i+\frac{1}{2}} S^{\mathcal{X}}_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} S^{\mathcal{X}}_{i-\frac{1}{2}} + u_{j+\frac{1}{2}} S^{\mathcal{X}}_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}} S^{\mathcal{X}}_{j-\frac{1}{2}} \right) \tag{6.92}$$

où $u_{i\pm\frac{1}{2}} = (u_{i\pm1,j} + u_{i,j})/2$ et $\mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}} = (S^x_{i+\frac{1}{2}}, S^y_{i+\frac{1}{2}})^t$. La norme du vecteur surface est égale à la surface de l'interface ($\Sigma_{i+\frac{1}{2}}$). Il est orienté perpendiculairement à celle-ci et dirigé dans le sens des indices croissants. Ces dérivées dépendent donc des valeurs du champ conservatif dans la cellule courante, ainsi que des valeurs de celles dans les cellules voisines. La différentiation de la dérivée (6.92) par rapport au champ primitif, permet de déduire les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u_{ij}} \left(\dfrac{\partial u}{\partial \mathcal{X}} \right) = \dfrac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(S^{\mathcal{X}}_{i+\frac{1}{2}} - S^{\mathcal{X}}_{i-\frac{1}{2}} + S^{\mathcal{X}}_{j+\frac{1}{2}} - S^{\mathcal{X}}_{j-\frac{1}{2}} \right) \\ \qquad\qquad = \displaystyle\int_{\partial \mathcal{V}} 1 \cdot \vec{n} dS = \int \nabla 1 \cdot d\vec{\mathcal{V}} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial u_{\mathcal{I}\pm1}} \left(\dfrac{\partial u}{\partial \mathcal{X}} \right) = \pm \dfrac{S^{\mathcal{X}}_{\mathcal{I}\pm\frac{1}{2}}}{2\mathcal{V}_{ij}}. \end{cases} \tag{6.93}$$

pour toute direction géométrique $\mathcal{X} = x$ ou y et pour toute direction de maillage $\mathcal{I} = i$ ou j. La formule (6.91) devient alors :

$$(\alpha_{6s})_{1\leq s\leq 7} = \left(\frac{\partial Prod_6}{\partial \mathbf{W}^{tur}_i} \right) + \sum_{cell \in \{i-1, i+1\}} \frac{\partial Prod_6}{\partial P_{cell}} \frac{\partial P_{cell}}{\partial W_{cell}} \tag{6.94}$$

$$(\alpha_{7s})_{1\leq s\leq 7} = \left(\frac{\partial Prod_7}{\partial \mathbf{W}^{tur}_i} \right) + \sum_{cell \in \{i-1, i+1\}} \frac{\partial Prod_7}{\partial P_{cell}} \frac{\partial P_{cell}}{\partial W_{cell}} \tag{6.95}$$

On en déduit les jacobiens du terme de production, sachant que l'absence d'indice indique que le terme est évalué au centre de la cellule courante :

$$\mathbf{J}^{prod}_{i\pm1,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Prod_6}{\partial P_{i\pm1}} \frac{\partial P_{i\pm1}}{\partial W_{i\pm1}} & \frac{\partial Prod_6}{\partial P_{i\pm1}} \frac{\partial P_{i\pm1}}{\partial W_{i\pm1}} & \frac{\partial Prod_6}{\partial P_{i\pm1}} \frac{\partial P_{i\pm1}}{\partial W_{i\pm1}} & \frac{\partial Prod_6}{\partial P_{i\pm1}} \frac{\partial P_{i\pm1}}{\partial W_{i\pm1}} & \frac{\partial Prod_6}{\partial P_{i\pm1}} \frac{\partial P_{i\pm1}}{\partial W_{i\pm1}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial Prod_7}{\partial P_{i\pm1}} \frac{\partial P_{i\pm1}}{\partial W_{i\pm1}} & \frac{\partial Prod_7}{\partial P_{i\pm1}} \frac{\partial P_{i\pm1}}{\partial W_{i\pm1}} & \frac{\partial Prod_7}{\partial P_{i\pm1}} \frac{\partial P_{i\pm1}}{\partial W_{i\pm1}} & \frac{\partial Prod_7}{\partial P_{i\pm1}} \frac{\partial P_{i\pm1}}{\partial W_{i\pm1}} & \frac{\partial Prod_7}{\partial P_{i\pm1}} \frac{\partial P_{i\pm1}}{\partial W_{i\pm1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.96}$$

et

$$\mathbf{J}^{prod}_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_t}{\rho} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t} & 0 & 0 & 0 & \Phi \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t} & \frac{\mu_t}{\rho k} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t} & -\frac{\mu_t}{\rho \omega} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t} \\ \gamma \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial_m u_t} - \frac{\mathbf{P}}{\mu_t} \right) & 0 & 0 & 0 & \Phi\gamma \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial_m u_t} - \frac{\mathbf{P}}{\mu_t} \right) & \frac{\gamma}{k} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial_m u_t} - \frac{\mathbf{P}}{\mu_t} \right) & -\frac{\gamma}{\omega} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial_m u_t} - \frac{\mathbf{P}}{\mu_t} \right) \end{pmatrix} \tag{6.97}$$

On rappelle que le calcul des $\dfrac{\partial Prod_6}{\partial P_{i\pm1}}$, $\dfrac{\partial Prod_7}{\partial P_{i\pm1}}$ et Φ sont disponibles dans l'annexe B.

6.4 Structure de la matrice Jacobienne et son assemblage

On note par $(\mathbf{J})_{cell}$ la matrice jacobienne d'une cellule donnée Ω_{cell} d'un maillage bidimensionnel structuré.
Pour un écoulement compressible avec le modèle de turbulence $(k-\omega)$ de Wilcox, la matrice jacobienne $(\mathbf{J})_{cell} = \left(\frac{\partial R}{\partial \mathbf{W}^{tur}}\right)_{cell}$ est une matrice de dimension (7×7), extraite du champ de base $(\mathbf{W}^{tur})_{cell}$ tel que $R(\mathbf{W}^{tur})_{cell} = 0$.
La structure de $(\mathbf{J})_{cell}$ est donnée par la figure (6.14) :

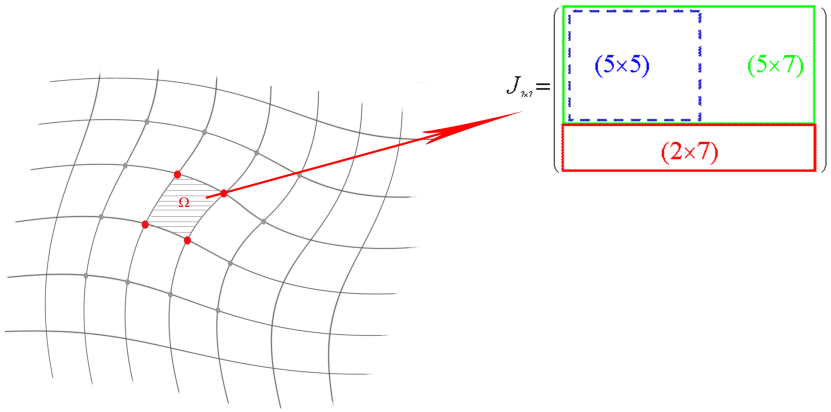


FIGURE 6.14 – *Structure de la matrice jacobienne* $(\mathbf{J})_{cell}$ *sur une cellule* Ω_{cell} *du maillage.*

La structure de cette matrice est dûe à sa décomposition en plusieurs sous-matrices. En effet, elle s'écrit de la manière suivante :

$$(\mathbf{J})_{cell} = \mathbf{J}^{mf}_{cell} + \mathbf{J}^{tur}_{cell} = (\mathbf{J}^{c}_{cell} + \mathbf{J}^{v}_{cell}) + \left(\mathbf{J}^{ct}_{cell} + \mathbf{J}^{vt}_{cell} - \mathbf{J}^{source}_{cell}\right) \tag{6.98}$$

Selon le type de flux, chaque matrice est caractérisée par une dimension. Dans la figure (6.15), on met en évidence la décomposition de la matrice jacobienne $(\mathbf{J})_{cell}$ en fonction de chaque type de flux. En effet, la matrice $\mathbf{J}^{c}_{cell}$ calculée à partir du flux convectif moyen, est représentée par une matrice de dimension (5×5). La matrice $\mathbf{J}^{v}_{cell}$ calculée en fonction du flux visqueux moyen, est représentée par une matrice de dimension (5×7). Enfin, les matrices $\mathbf{J}^{ct}_{cell}$, $\mathbf{J}^{vt}_{cell}$ et $\mathbf{J}^{source}_{cell}$ du champ turbulent, calculées à partir des flux turbulents, sont données sous forme de matrices de dimension (2×7).

On a présenté ainsi, la composition de $(\mathbf{J})_{cell}$ sur une cellule Ω_{cell} du maillage. Pour définir la matrice jacobienne $(\mathbf{J}) = \cup_{cell}(\mathbf{J})_{cell}$ de tout le maillage, on doit rassembler toutes les matrices $(\mathbf{J})_{cell}$ de chaque cellule qui constituent ce maillage. On en déduit que la structure de la matrice jacobienne $(\mathbf{J})$ dépend fortement de la structure du maillage. En effet, pour chaque cellule du maillage, on calcul une matrice $(\mathbf{J})_{cell}$ de dimension (7×7), sachant que chaque cellule dépend des huit cellules autour.
En assemblant la matrice jacobienne $(\mathbf{J})$ sur tout le maillage, on définit une matrice de dimension le nombre total des cellules : $N_i \times N_j$. On distingue plusieurs répartitions de cellules : les cellules où on traite la condition de raccord, les cellules où on applique les conditions limites (paroi, frontière..) et les cellules dites courantes, c'est à dire celles qui

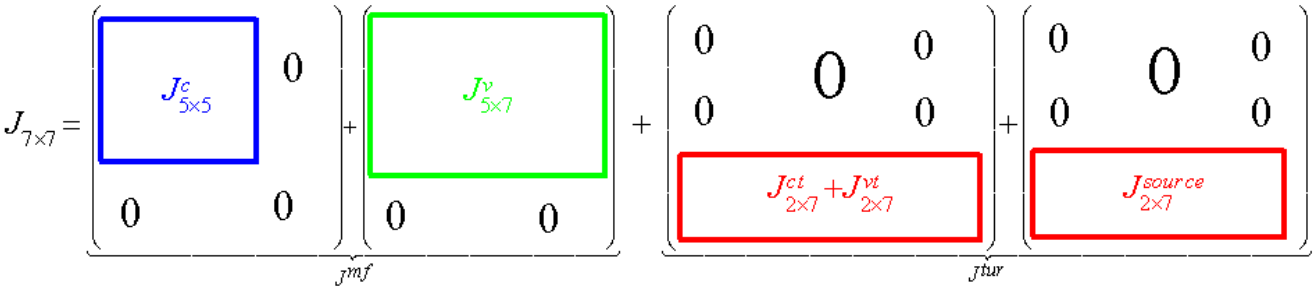


FIGURE 6.15 – *Décomposition de la matrice jacobienne pour une cellule du maillage.*

sont considérées sans conditions particulières.
On note que l'ordre des cellules est celui de l'ordre croissant des indices dans le maillage. La figure (6.16), montre l'architecture de la matrice jacobienne (**J**) selon la répartition des cellules dans le maillage relatif au type C.
Dans le cadre de cette thèse, on présente la forme matricielle de la jacobienne dans le cas d'un maillage de type C, dont la condition de raccord coïncident est selon la direction j du maillage. Dans les premières lignes d'une telle matrice, on met les $(\mathbf{J})_{cell}$ avec $cell \in$ { cellules du raccord1 }. Les lignes suivantes, sont attribuées aux $(\mathbf{J})_{cell}$ avec $cell \in$ {les cellules adjacentes à la paroi }, ensuite, on place les $(\mathbf{J})_{cell}$ avec $cell \in$ { {cellules du raccord2}. Les $(\mathbf{J})_{cell}$ avec $cell \in$ {cellules courantes }. A la fin, on place les $(\mathbf{J})_{cell}$ avec $cell \in$ {les cellules adjacentes aux frontières }.

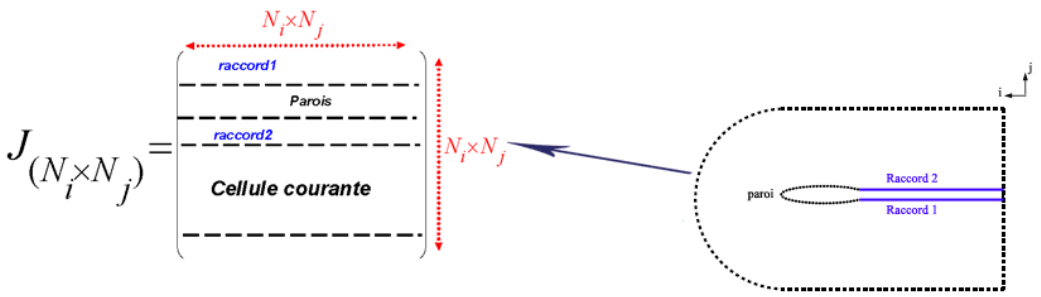


FIGURE 6.16 – *Forme matricielle de la jacobienne* (**J**)

On sait que le stencil à neuf cellules décrit dans la figure (6.17), permet de déduire que le calcul de $(\mathbf{J}_{i,j})$ d'une cellule $\Omega_{i,j}$ dépend des $(\mathbf{J}_{cell})$ des autres cellules autour.
Chaque cellule du maillage remplie une ligne de la matrice (**J**). On place les neuf $(\mathbf{J})_{cell}$ sur une même ligne. En balayant toutes les cellules, on remplit ainsi toutes les lignes de la matrice jacobienne (**J**). On considère dans un premier temps, le cas des cellules courantes.
On note $(\mathbf{J}) = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N_i\times N_j}$. La cellule courante $\Omega_{i,j}$ est repérée dans la matrice (**J**) par le couple d'indice (i,j), sachant que i vérifie la condition $i = \alpha N_i + \beta$ avec $2 \leq \alpha \leq (N_j - 2)$ et β vérifie $3 \leq \beta \leq N_i - 2$.
Le calcul de la matrice jacobienne de cette cellule a besoin de la contribution des neuf matrices $(\mathbf{J}_{cell})_{cell\in\mathcal{E}}$ avec $\mathcal{E} = \{(i,j),(i+1,j),(i+2,j),(i-1,j)(i-2,j),(i,j+1)(i,j+$

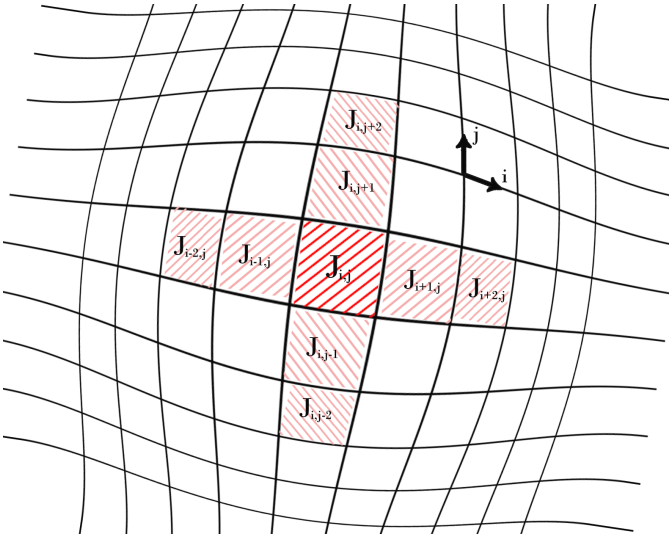


FIGURE 6.17 – *Stencil à neuf cellules qui contribuent au calcul de* $(\mathbf{J}_{i,j})$ *d'une cellule courante.*

$2), (i, j-1)(i, j-2)\}$.
Ces neuf matrices $(\mathbf{J}_{cell})_{cell\in\mathcal{E}}$ vont être placées sur la i^{im} ligne de la matrice jacobienne $(\mathbf{J})$. Il suffit donc, de trouver l'indice de la colonne j pour placer ces neuf matrices sur la i^{im} ligne de $(\mathbf{J})$. On a :

- Pour $j = i-2N_i = (\alpha-2)N_i+\beta$, $\Rightarrow a_{\alpha N_i+\beta,(\alpha-2)N_i+\beta} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j-2)\}$,
- Pour $j = i-N_i = (\alpha-1)N_i+\beta$, $\Rightarrow a_{\alpha N_i+\beta,(\alpha-1)N_i+\beta} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j-1)\}$,
- Pour $j = i-2 = \alpha N_i+\beta-2$, $\Rightarrow a_{\alpha N_i+\beta,\alpha N_i+\beta-2} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i-2, j)\}$,
- Pour $j = i-1 = \alpha N_i+\beta-1$, $\Rightarrow a_{\alpha N_i+\beta,\alpha N_i+\beta-1} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i-1, j)\}$,
- Pour $j = i = \alpha N_i+\beta$, $\Rightarrow a_{\alpha N_i+\beta,\alpha N_i+\beta} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j)\}$,
- Pour $j = i+1 = \alpha N_i+\beta$, $\Rightarrow a_{\alpha N_i+\beta,\alpha N_i+\beta+1} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i+1, j)\}$,
- Pour $j = i+2 = \alpha N_i+\beta+2$, $\Rightarrow a_{\alpha N_i+\beta,\alpha N_i+\beta+2} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i+2, j)\}$,
- Pour $j = i+N_i = (\alpha+1)N_i+\beta$, $\Rightarrow a_{\alpha N_i+\beta,(\alpha+1)N_i+\beta} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j+1)\}$,
- Pour $j = i+2N_i = (\alpha+2)N_i+\beta$, $\Rightarrow a_{\alpha N_i+\beta,(\alpha+2)N_i+\beta} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j+2)\}$,

Dans la figure (6.18), on montre l'emplacement des neuf matrices sur une ligne donnée.
D'autre part, on considère la cellule $\Omega_{i,j}$ parmi les cellules du raccord. Cette cellule du raccord $\Omega_{i,j}$ est repérée dans la matrice $(\mathbf{J})$ par le couple d'indice (i, j), sachant que i vérifie la condition $3 \leq i \leq intrados$.
Le calcul de la matrice jacobienne de cette cellule a besoin de la contribution des neuf matrices $(\mathbf{J}_{cell})_{cell\in\mathcal{E}}$ avec $\mathcal{E} = \{(i, j), (i+1, j), (i+2, j), (i-1, j)(i-2, j), (i, j+1)(i, j+$

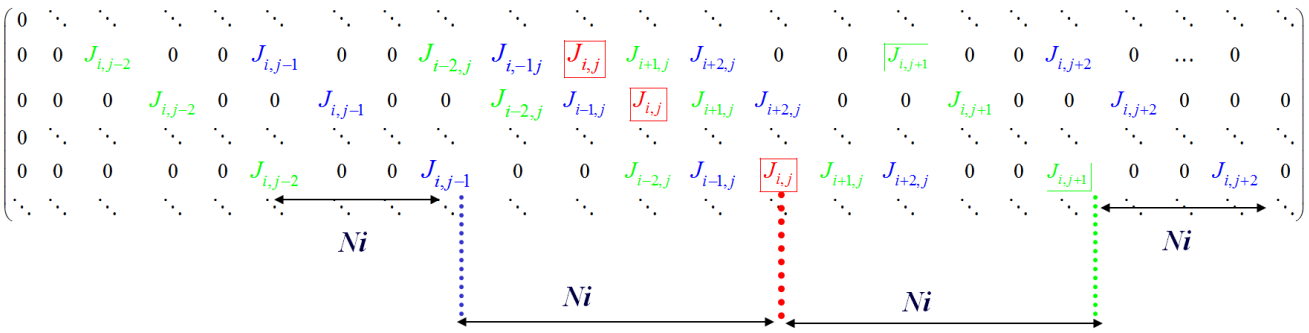


FIGURE 6.18 – *Structure matricielle de la jacobienne pour une cellule courante*

$2), (i, j-1)(i, j-2)\}$.
Ces neuf matrices $(\mathbf{J}_{cell})_{cell\in\mathcal{E}}$ vont être placées sur la i^{im} ligne de la matrice jacobienne $(\mathbf{J})$. Il suffit donc, de trouver l'indice de la colonne j pour placer ces neuf matrices sur la i^{im} ligne de $(\mathbf{J})$. On a :

- Pour $j = i-2$, on a $a_{i,i-2} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i-2, j)\}$;
- Pour $j = i-1$, on a $a_{i,i-1} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i-1, j)\}$;
- Pour $j = i$, on a $a_{i,i} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j)\}$;
- Pour $j = i+1$, on a $a_{i,i+1} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i+1, j)\}$;
- Pour $j = i+2$, on a $a_{i,i+2} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i+2, j)\}$;
- Pour $j = N_i - (i+1)$, on a $a_{i,N_i-(i+1)} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j-1)\}$;
- Pour $j = N_i + i$, on a $a_{i,N_i+i)} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j+1)\}$;
- Pour $j = 2N_i - (i+1)$, on a $a_{i,2N_i-(i+1)} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j-2)\}$;
- Pour $j = 2N_i + i$, on a $a_{i,2N_i+i)} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j+2)\}$;

Dans la figure (6.19), on montre l'emplacement des neuf matrices.

D'autre part, on considère la cellule $\Omega_{i,j}$ parmi les cellules du raccord. Cette cellule du raccord $\Omega_{i,j}$ est repérée dans la matrice $(\mathbf{J})$ par le couple d'indice (i, j), sachant que i vérifie la condition $= N_i - \delta$ avec $2 \leq \delta \leq s$ et $s = intrados + extrados + sillage$.
Le calcul de la matrice jacobienne de cette cellule a besoin de la contribution des neuf matrices $(\mathbf{J}_{cell})_{cell\in\mathcal{E}}$ avec $\mathcal{E} = \{(i, j), (i+1, j), (i+2, j), (i-1, j), (i-2, j), (i, j+1), (i, j+2), (i, j-1), (i, j-2)\}$.
Ces neuf matrices $(\mathbf{J}_{cell})_{cell\in\mathcal{E}}$ vont être placées sur la i^{im} ligne de la matrice jacobienne $(\mathbf{J})$. Il suffit donc, de trouver l'indice de la colonne j pour placer ces neuf matrices sur

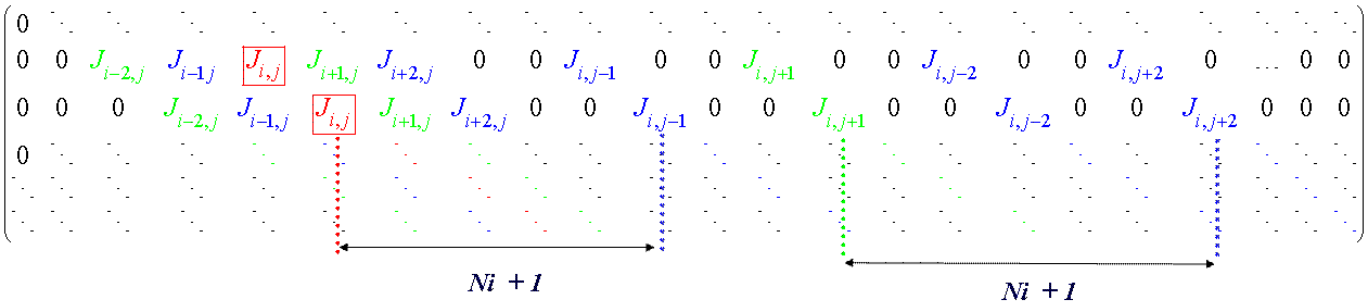


FIGURE 6.19 – *Structure matricielle de la jacobienne avec condition de Raccord 1*

la i^{im} ligne de $(\mathbf{J})$. On a :

- Pour $j = N_i - (i+1) = \delta + 1$, on a $a_{i,\delta+1} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j-1)\}$;
- Pour $j = i - 2 = N_i - \delta - 2$, on a $a_{i,N_i-\delta-2} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i-2, j)\}$;
- Pour $j = i - 1 = N_i - \delta - 1$, on a $a_{i,N_i-\delta-1} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i-1, j)\}$;
- Pour $j = i = N_i - \delta$, on a $a_{i,N_i-\delta} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j)\}$;
- Pour $j = i + 1 = N_i - \delta + 1$, on a $a_{i,N_i-\delta+1} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i+1, j)\}$;
- Pour $j = i + 2 = N_i - \delta + 2$, on a $a_{i,N_i-\delta+2} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i+2, j)\}$;
- Pour $j = i + 2\delta + 1 = N_i + \delta + 1$, on a $a_{i,N_i+\delta+1} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j-2)\}$;
- Pour $j = N_i + i$, on a $a_{i,N_i+i)} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j+1)\}$;
- Pour $j = i + N_i = 2N_i - \delta$, on a $a_{i,2N_i-\delta} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j+1)\}$;
- Pour $j = i + 2N_i = 3N_i - \delta$, on a $a_{i,3N_i-\delta} = (\mathbf{J}_{cell})$ avec $cell \in \{(i, j+2)\}$;

Dans la figure (6.20), on montre l'emplacement des neuf matrices.

6.5 Conclusion

En se basant sur les équations RANS linéarisées dans *elsA*, ce chapitre était dédié à une présentation de la matrice jacobienne pour un calcul d'écoulement compressible avec un modèle de turbulence $(k-\omega)$ de Wilcox.
Une description précise du travail numérique effectué dans cette thèse, a été présenté. On a commencé par la présentation de la stratégie optée pour extraire explicitement tous les éléments non nuls de la matrice jacobienne existante d'une manière implicite dans le logiciel *elsA*. Cette stratégie a été basé sur le choix pertinent des vecteurs tests utilisés dans l'opération produit "*matrice*vecteur*" ; afin de réduire le nombre d'opérations ef-

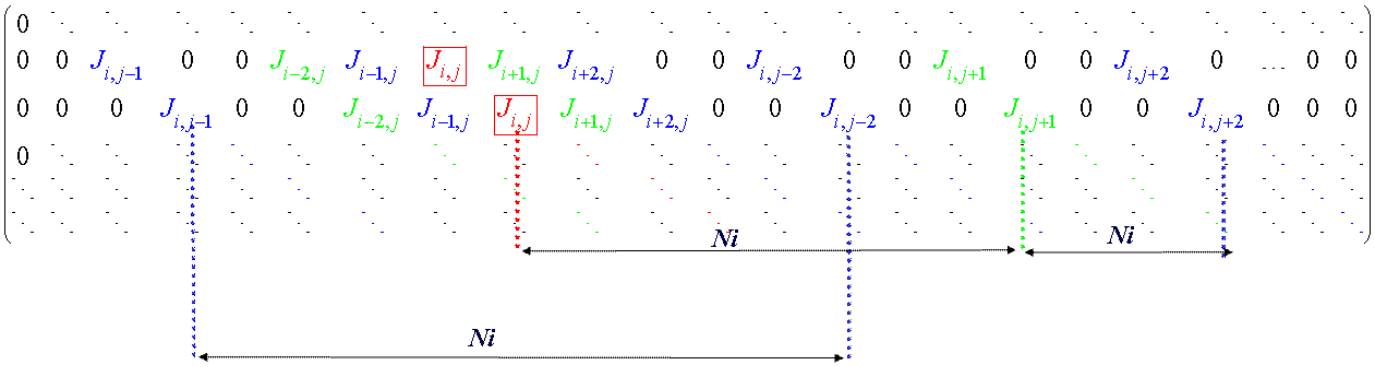


FIGURE 6.20 – *Structure matricielle de la jacobienne avec une condition de raccord 2*

fectuées pour extraire tous les éléments non nuls de la matrice. L'implémentation de ces vecteurs dans le logiciel *elsA* a été effectué.
Ensuite, les méthodes de résolutions implémentées dans le logiciel *elsA* et la linéarisation des différents types de flux ont été détaillées afin de présenter les équations linéarisées des différents termes constituant la matrice jacobienne. On note que les conditions particulières ont été pris en compte (conditions aux limites, parois ...). Les développements au sein d'*elsA*, nécessaires pour l'extraction explicite de la matrice jacobienne exacte, ont été présentés en détails. On notera que ces travaux sont disponibles dans la version 3.3 d'*elsA*.
Enfin, l'assemblage de cette matrice, ainsi que que la mise en oeuvre de sa structure ont été détaillés pour un maillage de type C.
La validation numérique de l'extraction de la matrice jacobienne fait l'objet du chapitre suivant.

7 Validation numérique de l'extraction - Inversion

La validation d'un code de calcul est une étape nécessaire pour la réalisation d'un outil numérique fiable. La validation est un processus qui détermine si l'implémentation d'un modèle et des méthodes numériques associées représentent précisément la solution. La stratégie de validation consiste à, dans le cadre de cette thèse, réaliser une comparaison entre deux solutions. Il s'agit donc, de comparer les solutions numériques émanent du code de calcul développé, à des solutions obtenues par le logiciel *elsA*, déjà validé.
On propose dans ce chapitre, une description des deux méthodes de résolution (itératives et directes) des systèmes linéaires ; la technique de comparaison entre les solutions des deux méthodes et la validation numérique associée. On s'attachera dans cette partie à faire apparaître les points originaux de ce travail et on exposera les choix adoptés pour réaliser l'inversion de la matrice jacobienne explicite.

7.1 Méthodes d'inversion

En simulation numérique des phénomènes physiques, un coût de calcul important provient souvent de la construction et de la résolution des systèmes linéaires. Dans cette thèse, on aura besoin d'inverser la jacobienne du résidu discret des équations pour la mécanique des fluide. Ce qui conduit à la résolution d'un système linéaire de la forme $\mathbf{J} \times X = B$ sur un domaine de calcul. On note par X l'inconnue et par B le vecteur donné de même taille que la matrice $\mathbf{J}$ à inverser. Les inversions de systèmes linéaires sont en fait omniprésents dans les codes et souvent enfouies au plus profond d'autres algorithmes numériques.
Ce type de problème incite à poser plusieurs questions :

- A-t-on accès à la matrice ou connaît-t'on simplement son action sur un vecteur ?
- Cette matrice est elle-creuse ou dense ?
- Quel est l'ordre de grandeur de la taille du problème, de la matrice et de sa factorisé par rapport aux capacités de traitement des CPU et des mémoires associées (RAM et disque) ?
- Quelles sont les propriétés numériques (symétrie, définie positive ...) et structurelles (réel/complexe, par bandes, par blocs..) ?

Dans cette étude, la matrice **J** est généralement de grande taille, creuse, définie par bande, complexe ou réelle et très coûteuse. Pour résoudre le système linéaire $\mathbf{J} \times X = B$, on fixe la donnée du vecteur B et on effectue l'inversion.
Deux types de méthodes sont proposées pour effectuer une telle résolution : les solveurs directs et les solveurs itératifs.
Quand on construit explicitement la matrice, on peut utiliser les solveurs directs ([30], [75]). En revanche, les méthodes itératives [87] n'ont pas besoin de la forme explicite de la matrice **J**, le produit matrice vecteur suffit.
La donnée explicite ou implicite de **J** permettra de choisir le type de solveur pour la résolution du système linéaire.
Dans les deux sous-sections suivantes on va présenter les deux solveurs itératifs et direct, utilisés dans cette thèse. En effet, le solveur direct est robuste et aboutit en un nombre fini d'opérations connu par avance. Sa théorie est relativement bien achevée et sa déclinaison suivant plusieurs types de matrices et d'architectures logicielles est très complète. En particulier, leur algorithmique multi-niveaux est bien adapté aux hiérarchies mémoires des machines actuelles. Cependant, ce type de solveur requiert des capacités de stockage qui croissent rapidement avec la taille du problème ce qui limite l'extensibilité de son parallélisme.
En revanche, le solveur itératif est plus extensible lorsqu'on augmente le nombre de processeurs. Sa théorie regorge de nombreux problèmes ouverts. En pratique, sa convergence en un nombre raisonnable d'itérations, n'est pas toujours acquise, elle dépend de la structure de la matrice, du point de départ, du critère d'arrêt.

Néanmoins, d'autre avantages peuvent être cités comme la gestion de la mémoire équivalente. En effet, on a besoin de connaître l'action de la matrice sur un vecteur, sans devoir véritablement la stocker. D'autre part, on n'est pas soumis aux exigences du phénomène de remplissage, on peut exploiter efficacement le caractère creux des opérateurs et contrôler la précision des résultats.
Différents solveurs itératifs peuvent être envisagés pour l'inversion d'un tel système. Dans le cadre de cette thèse, le solveur itératif choisi est celui qui est disponible dans *elsA*. Dans ce cas, on connait l'action de la matrice **J** sur un vecteur donné mais on n'a pas d'accès à la matrice elle même. Les solutions données grâce à ce solveur sont déjà validés. Ce qui permettra d'effectuer une comparaison avec les solutions issues du solveur direct et valider l'extraction explicite de la matrice **J** existante d'une manière implicite dans *elsA*. Les résultats de cette comparaison seront exposés plus tard.

7.1.1 Méthode itérative

Dans le cadre de cette thèse, on va utiliser la méthode itérative d'inversion disponible dans *elsA*. On obtient par l'intermédiaire de la méthode de type Newton une équation linéarisée telle que : une différentielle approchée apparaît à gauche du signe égal et une différentielle exacte ou aussi exacte que possible à droite du signe égal. La première matrice sera notée $(\mathbf{J})^{(app)}$ [18], la seconde $(\mathbf{J})^{(exa)}$. Soit l'algorithme itératif pour la méthode de l'équation linéarisée :

$$(\mathbf{J})^{(app)} \left((X)^{(l+1)} - (X)^{(l)}\right) = -\underbrace{\left((\mathbf{J})^{(exa)}(X)^{(l)} - B\right)}_{rhs}. \tag{7.1}$$

L'algorithme itératif ainsi défini, présente à chaque pas l, un grand système linéaire creux qui ne peut pas se résoudre exactement pour des maillages à grand nombre de cellules. Ce système est généralement résolu de manière approchée par une méthode de relaxation ou de gradient conjugué. La méthode de relaxation LU envisagée par Yoon [14] s'est avérée particulièrement efficace pour la simulation des écoulements en aéronautique. La matrice $\mathbf{J}^{(app)}$ est creuse et pentadiagonale, elle est décomposée en trois matrices blocs, une matrice diagonale par bloc D, une matrice triangulaire inférieur par bloc L et une matrice triangulaire supérieure par bloc U.

$$\mathbf{J}^{(app)} = (L + D + U) \tag{7.2}$$

On obtient donc :

$$((L + D + U)\,\Delta X = -rhs \tag{7.3}$$

avec $\Delta X = (X)^{l+1} - (X)^{l}$.
Ce système est résolu de manière approchée par relaxation qui consiste à calculer une succession de solutions approchées du système exact :

$$\begin{cases} \Delta X^0 = 0 \\ (L + D)\,\Delta X^1 = -rhs \\ (U + D)\,\Delta X^2 = -rhs - L\Delta X^1 \\ (L + D)\,\Delta X^3 = -rhs - U\Delta X^2 \\ \ldots \\ (L + D)\,\Delta X^{2l-1} = -rhs - U\Delta X^{2l-2} \\ (U + D)\,\Delta X^{2l} = -rhs - L\Delta X^{2l-1} \\ \ldots \end{cases} \tag{7.4}$$

Le plus souvent, on ne réalise que deux pas de relaxation (un avec la matrice $(L + D)$, l'autre avec la matrice $(U + D)$)
On peut se référer à l'annexe (A.4) pour trouver un critère de convergence de l'algorithme itératif.
Néanmoins, cette méthode itérative ne peut pas inverser les matrices complexes, par conséquent, elle ne permet pas de résoudre les problèmes de type aux valeurs propres avec la méthode du "Shift-invert".

7.1.2 Méthode directe

Le principe de base des méthodes directes est de décomposer la matrice du problème $\mathbf{J} \times X = B$ en un produit de matrices particulières (triangulaires inférieures et supérieures, diagonales) plus faciles à "inverser". Cette méthode est appelée la factorisation de la matrice. Plusieurs types de factorisation existent et cela dépend de la nature de la matrice (Symétrie, définie positive..), on cite comme exemples la factorisation de Cholesky ou la factorisation LU...En effet, la factorisation LU s'écrit $P\mathbf{J} = LU$ avec L une matrice triangulaire inférieure à diagonale l'unité, U une matrice triangulaire supérieure et P la matrice de permutation. Les références suivantes [75], [30] proposent plus de détails sur cette méthode. Dans cette thèse, on a opté pour le package MUMPS comme solveur direct.

7.1.2.1 MUMPS

"MUltifrontal Massivelly Parrallel sparse direct solver" est un solveur direct des systèmes linéaires de la forme $\mathbf{J} \times X = B$, avec $\mathbf{J}$ une matrice carré qui peut être symétrique ou non, réelle ou complexe, régulière ou singulière... Ce solveur implémente une méthode multifrontale "massivement" parallèle effectuant une factorisation $\mathbf{J} = LU$ ou $\mathbf{J} = LDL^T$, selon la condition de symétrie de $\mathbf{J}$. MUMPS possède plusieurs caractéristiques indéniables, mis à part son large périmètre d'utilisation, il propose différentes stratégies de résolutions (embarqués ..), les fonctionnalités connexes telles que la détection de petits pivots, le calcul de rang et de noyau, l'analyse d'erreurs sur la solution ; sans oublier les mises à l'échelle, le raffinement itératif et potentiel du calcul parallèle. On peut se référer à [73] pour avoir plus de détails sur ces techniques utilisées et en tant que guide d'utilisateur.

7.2 Technique de comparaison

Afin de valider numériquement l'extraction de la matrice jacobienne $\mathbf{J}$, on pose le système linéaire $\mathbf{J} \times X = B$ sachant que B est un vecteur donné et on cherche à résoudre ce système en calculant l'inconnu X tel que $X = \mathbf{J}^{-1} * B$. Pour cela, on réalise une inversion de cette matrice $\mathbf{J}$ par deux méthodes différentes et en fixant bien sûr le même vecteur B :

- La méthode itérative déjà existante dans *elsA*, qui est une méthode déjà validée.
- La méthode d'inversion directe qui utilise le logiciel MUMPS.

On effectue ensuite une comparaison entre la solution calculée par MUMPS et la solution calculée par *elsA*.

On considère un maillage bidimensionnel qui comporte $N_i N_j$ cellules (avec N_i et N_j les

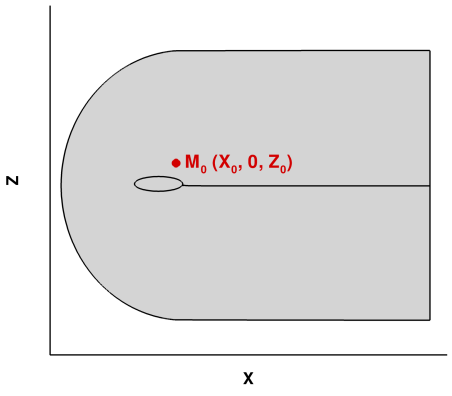


FIGURE 7.1 – *Position du point* M_0.

nombre de points selon la direction i et j). La matrice jacobienne $\mathbf{J}$ a pour dimension $(n_{var}N_iN_j, n_{var}N_iN_j)$ (avec n_{var} le nombre d'éléments dans le vecteur conservatif).
X et B sont deux vecteurs de dimension $(n_{var}N_iN_j, 1)$. Le nombre n_{var} dépend du type d'écoulement : si l'écoulement est laminaire, alors le vecteur conservatif s'écrit $W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^t$, on trouve bien $n_{var} = 5$ et d'autre part, si l'écoulement est turbulent avec un modèle de turbulence $(k - \omega)$ de Wilcox, alors le vecteur du champ

aérodynamique turbulent s'écrit $\mathbf{W}^{tur} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E, \rho k, \rho\omega)^t$, ce qui permet d'obtenir $n_{var} = 7$.

Le vecteur B est calculé de la manière suivante :

- On se donne un point dans le maillage de coordonnés $M_0(x_0, 0, z_0)$, tel que M_0 est situé légèrement au dessus de l'extrados du profil (voir figure (7.1)).
- Le vecteur B s'écrit sous la forme $B = \left(W_{cell_1}, W_{cell_2}, \cdots, W_{cell_i}, \cdots, W_{cell_{N_i N_j}}\right)^t$ sachant que $(cell_i)_{1 \leq i \leq N_i N_j}$ est l'indice des cellules dans le maillage.
- Dans le cas laminaire, on pose $W_{cell_i} = \left(0, 0, 0, e^{-\left((x_i - x_0)^2 + (z_i - z_0)^2\right)}, 0\right)^t$, alors le vecteur B devient sous cette forme :

$$B = \begin{pmatrix} \vdots \\ W_{cell_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-\left((x_i - x_0)^2 + (z_i - z_0)^2\right)} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

- Dans la cas d'un écoulement turbulent avec le modèle $(k - \omega)$ de Wilcox, on pose $\mathbf{W}^{tur}_{cell_i} = \left(0, 0, 0, e^{-\left((x_i - x_0)^2 + (z_i - z_0)^2\right)}, 0, 0, 0\right)^t$, alors le vecteur B devient sous la forme :

$$B^{tur} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{W}^{tur}_{cell_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-\left((x_i - x_0)^2 + (z_i - z_0)^2\right)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

Dans un premier temps, on considère un cas de calcul laminaire. Bien qu'il s'agisse d'un calcul laminaire subsonique, il permet de mettre une première fois en évidence l'extraction de la matrice jacobienne et de valider les développements effectués dans *elsA*. Ensuite, on va considère un cas de calcul turbulent avec le modèle $(k-\omega)$ de Wilcox.

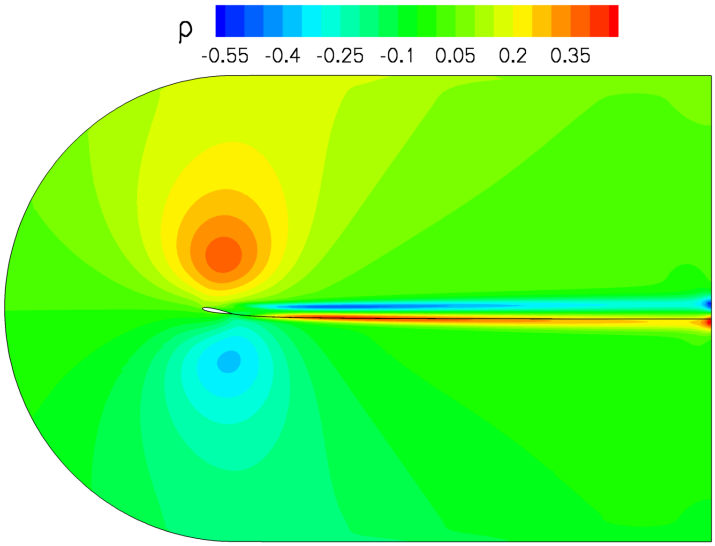
7.3 Validation de l'extraction

On considère le cas bidimensionnel d'un écoulement laminaire compressible autour d'un profil NACA0012.
Le maillage est visualisé dans la figure (8.2). Les conditions aérodynamiques de ce cas seront présentées dans le chapitre suivant (tableau 8.1).

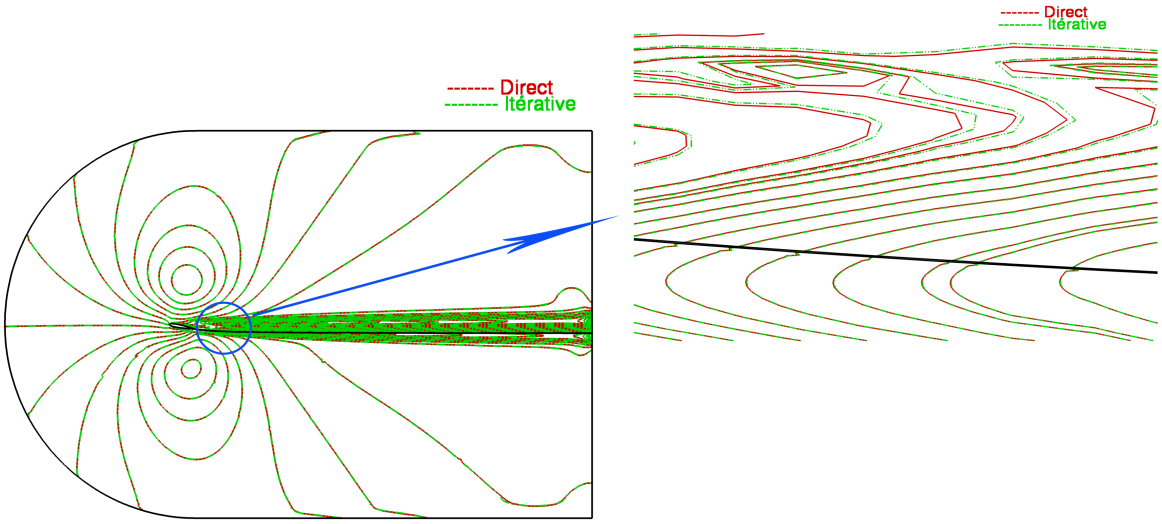
Pour l'écoulement turbulent, on considère le profil OAT15A décrit dans le chapitre 5 avec les mêmes conditions aérodynamiques.
Les figures ((7.2) , (7.3) , (7.4) , (7.5) , (7.6) , (7.7) , (7.8) , (7.9) ,(7.10) , (7.11)) attestent toutes de l'accord presque parfait qui existe entre la solution calculée par MUMPS et celle calculée par *elsA*.
En particulier, on remarque que les lignes des grandeurs telle que les variables conservatives du champ moyen, se superposent mieux que les lignes des grandeurs des variables turbulentes.

7.4 Conclusion

Le but du chapitre était de réaliser la validation de l'extraction explicite de la matrice jacobienne du logiciel *elsA*.
La stratégie optée, est de réaliser une comparaison entre la solution obtenue par le nouveau code développé et celle trouvée par l'intermédiaire du logiciel *elsA*. En effet, cette approche choisie, consiste à résoudre de deux manières différentes le système $\mathbf{J} \times X = B$, en fixant bien sûre le même vecteur B. La première méthode est celle qui consiste à résoudre le problème avec une méthode directe (MUMPS), tandis que la deuxième, avec une méthode itérative (*elsA*). Après avoir brièvement présentés dans ce chapitre les deux méthodes d'inversion, une évaluation des deux solutions obtenues par ces deux méthodes et la validation de l'extraction sont données en effectuant une comparaison entre les deux solutions.
Cette approche semble pouvoir efficacement effectuer la comparaison entre les deux méthodes de résolutions. La "presque" superposition des lignes des deux solutions, montre la validation de l'extraction de la matrice jacobienne pour un calcul laminaire ainsi que pour un calcul turbulent sur un maillage de type C autour du profil OAT15A ou NACA0012.
Les résultats obtenus dans ce chapitre constituent l'aboutissement des développements effectués au chapitre 6 et sont très satisfaisants. Cette validation fournit donc des preuves que le code de calcul ainsi développé est bien validé.
On note par ailleurs, que l'approche itérative peut résoudre les problèmes faisant intervenir des matrices réelles, mais elle est incapable de résoudre des problèmes utilisant des matrices complexes, tel que les problèmes aux valeurs propres avec le "Shift".
L'obtention de la matrice jacobienne, illustre l'efficacité de l'approche développée dans cette thèse et elle permet de réaliser les calculs des modes propres et vecteurs propres associés. Ceci, fait l'objet du chapitre suivant.

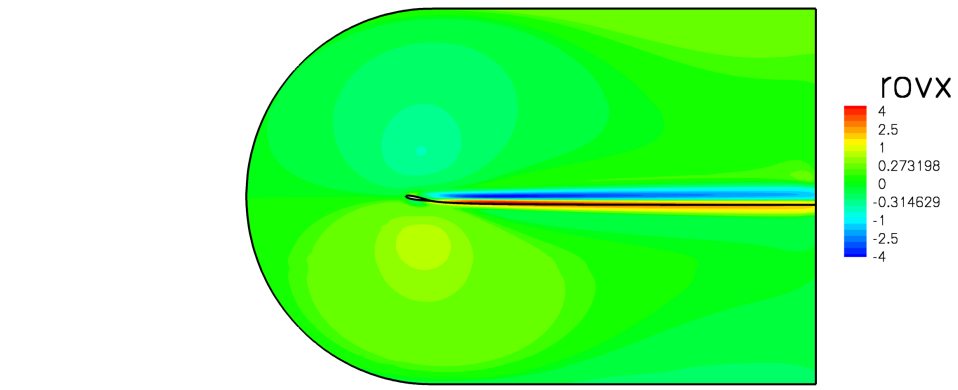


(a)

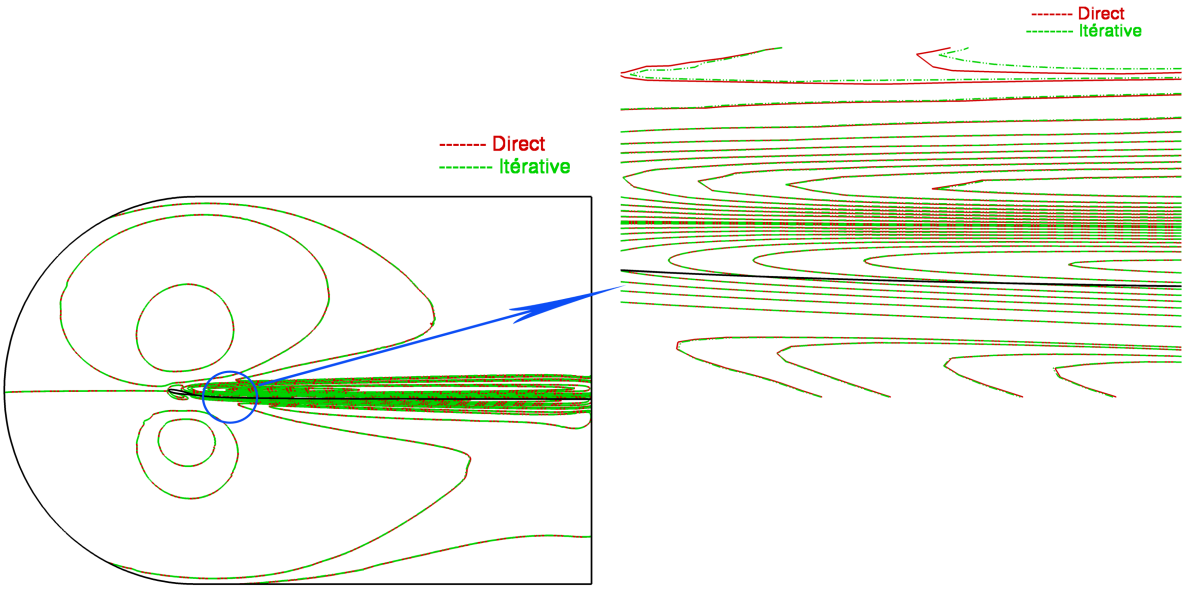


(b)

FIGURE 7.2 – *Cas d'un écoulement laminaire compressible pour un profil NACA*0012 *avec incidence* $\alpha = 10$, $M = 0.5$ *et* $Re = 689$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* ρ *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS).*



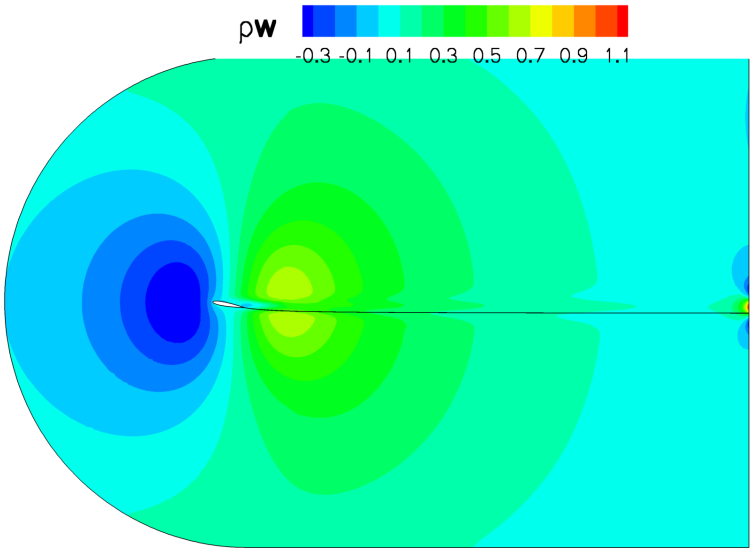
(a)



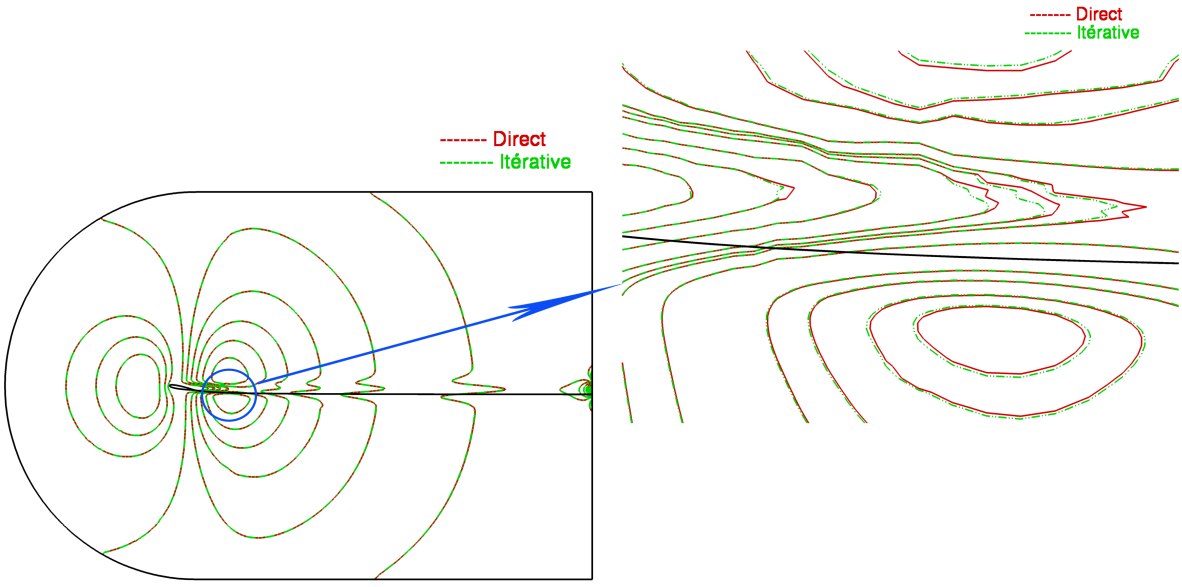
(b)

FIGURE 7.3 – *Cas d'un écoulement laminaire compressible pour un profil NACA*0012 *avec incidence* $\alpha = 10$, $M = 0.5$ *et* $Re = 689$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρu) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)*

.



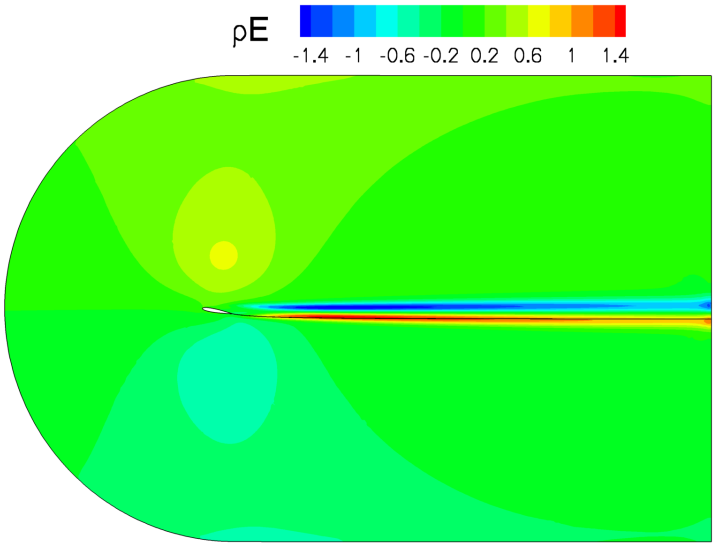
(a)



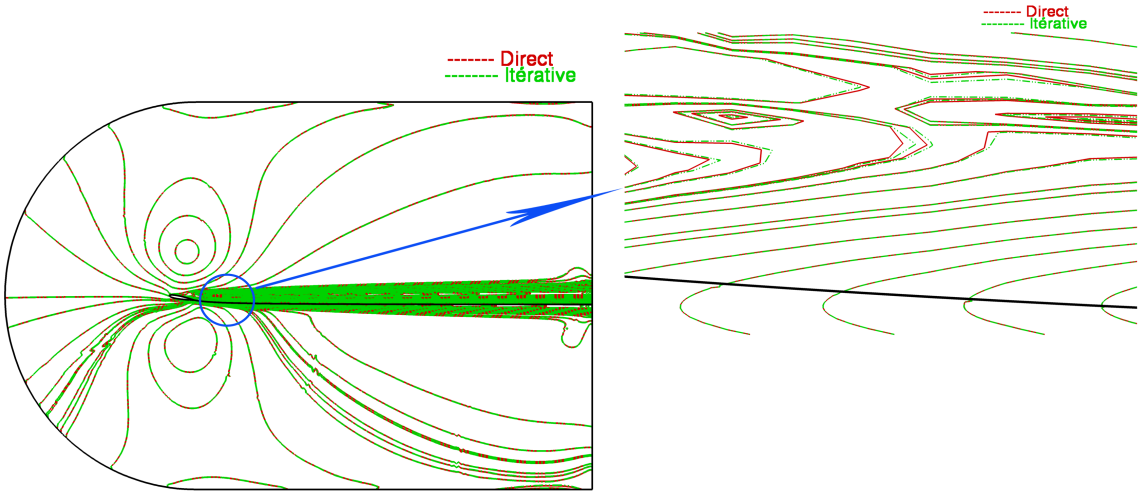
(b)

FIGURE 7.4 – *Cas d'un écoulement laminaire compressible pour un profil NACA*0012 *avec incidence* $\alpha = 10$, $M = 0.5$ *et* $Re = 689$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρw) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)*

.



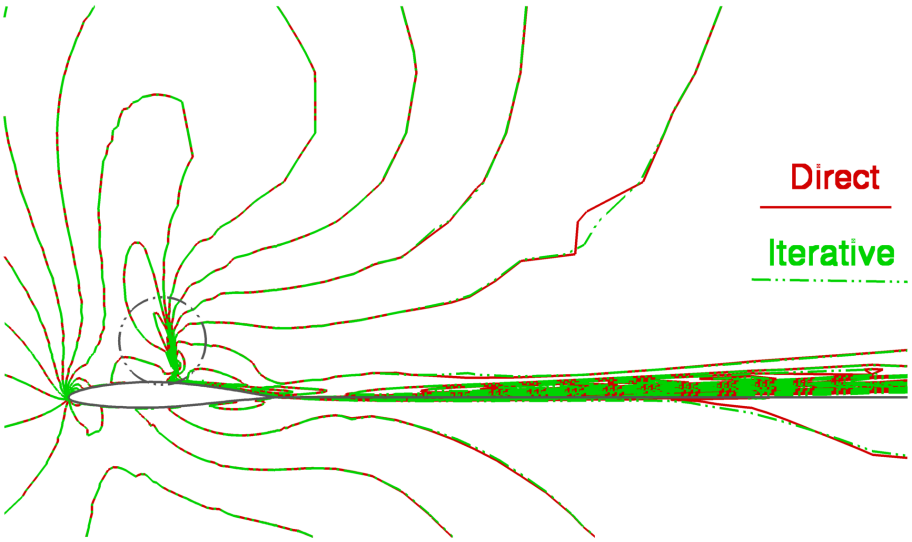
(a)



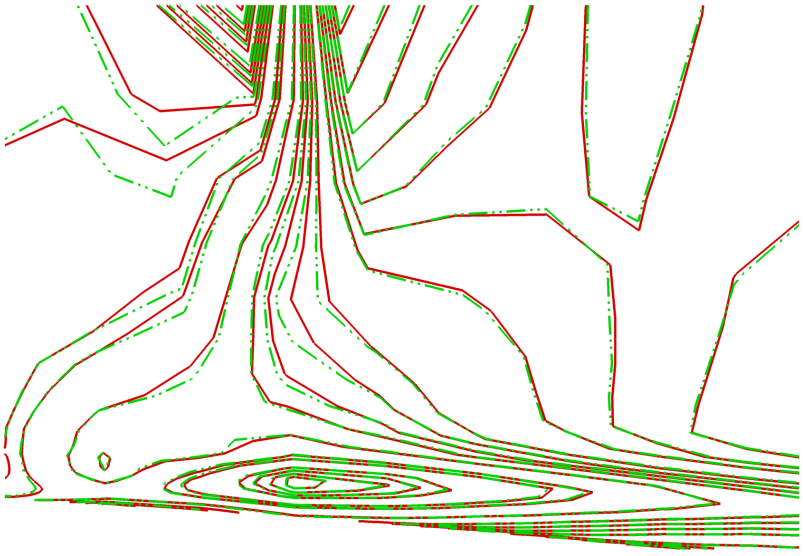
(b)

FIGURE 7.5 – *Cas d'un écoulement laminaire compressible pour un profil NACA*0012 *avec incidence* $\alpha = 10$, $M = 0.5$ *et* $Re = 689$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρE) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)*

.



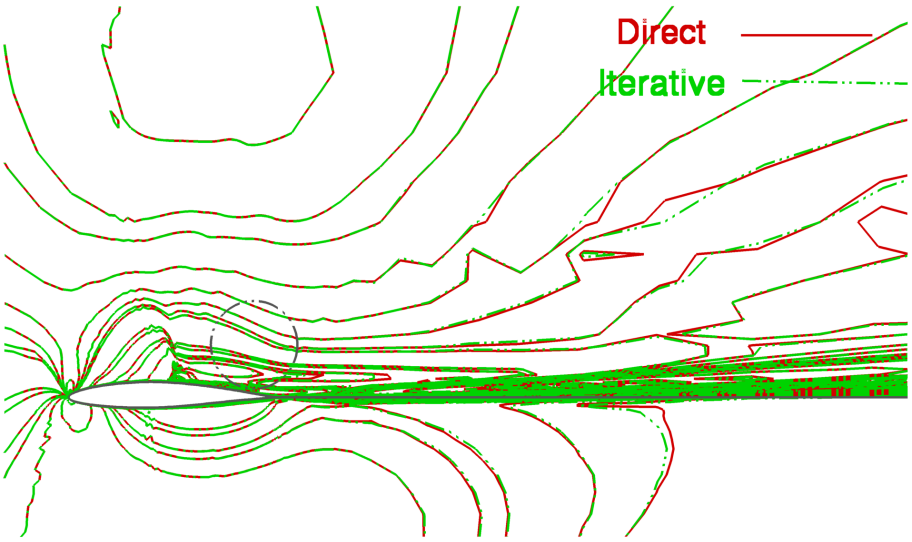
(a)



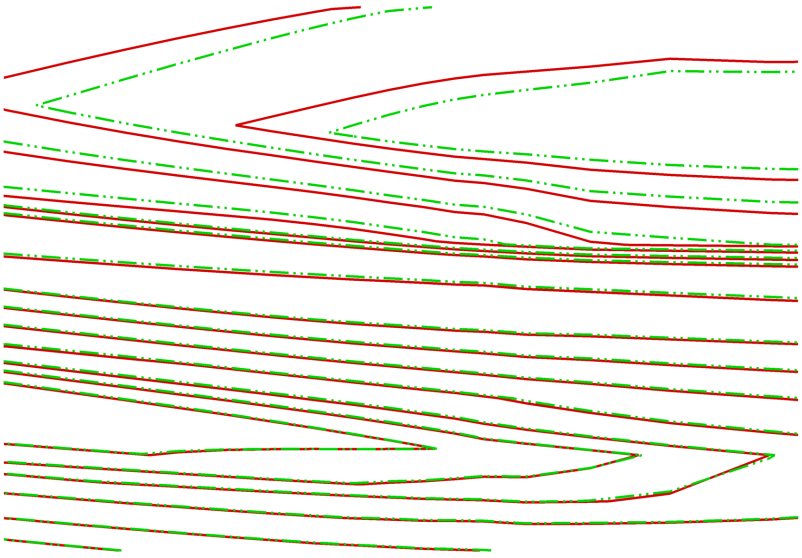
(b)

FIGURE 7.6 – *Cas d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox pour un profil* $OAT15A$ *avec incidence* $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ *et* $Re = 10^6$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* ρ *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)*

.



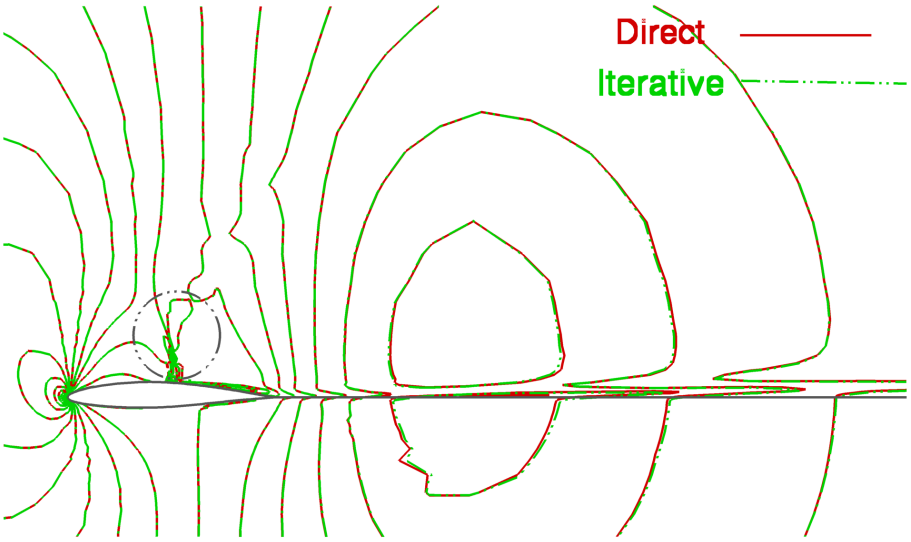
(a)



(b)

FIGURE 7.7 – *Cas d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox pour un profil OAT*15*A avec incidence* $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ *et* $Re = 10^6$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρu) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)*

.



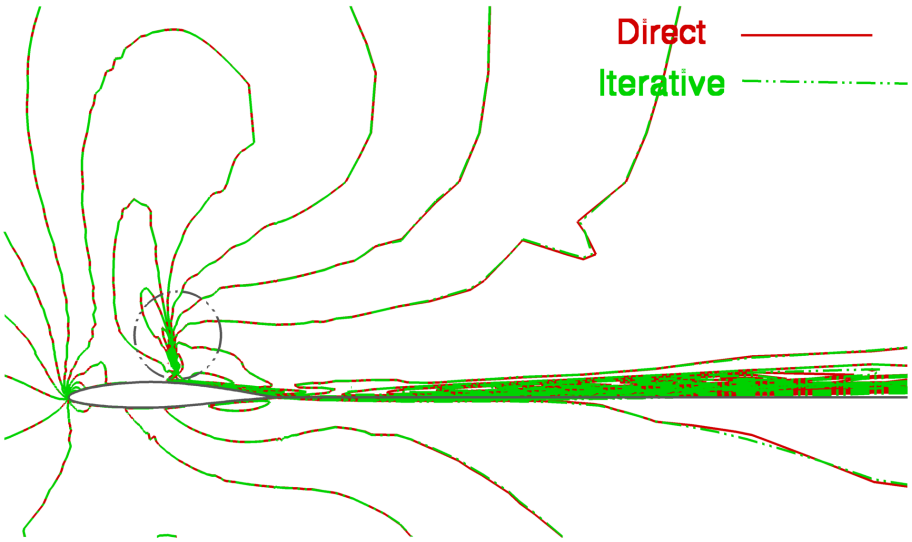
(a)



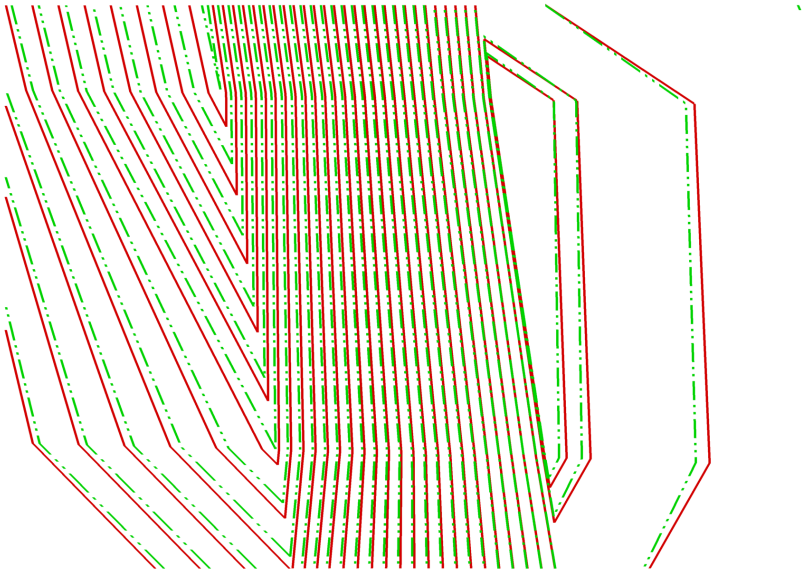
(b)

FIGURE 7.8 – *Cas d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox pour un profil* $OAT15A$ *avec incidence* $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ *et* $Re = 10^6$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρw) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)*

.



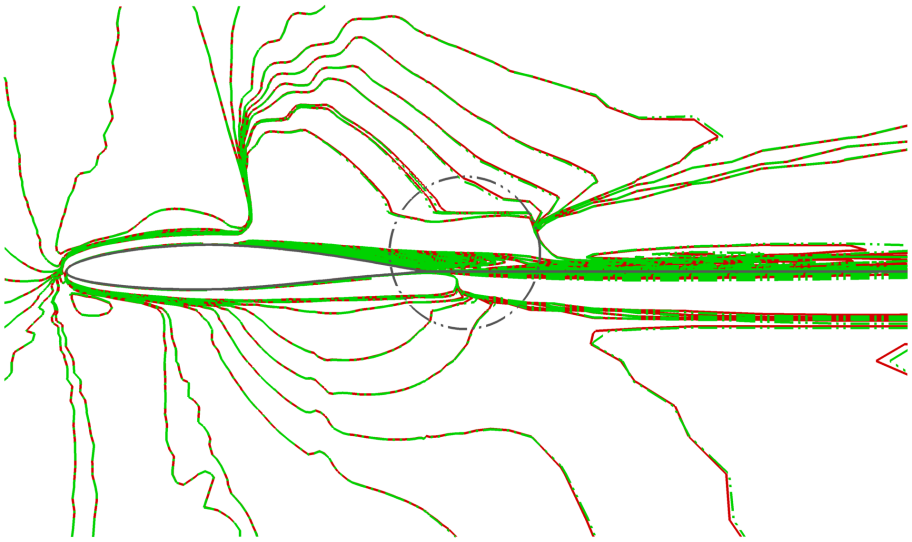
(a)



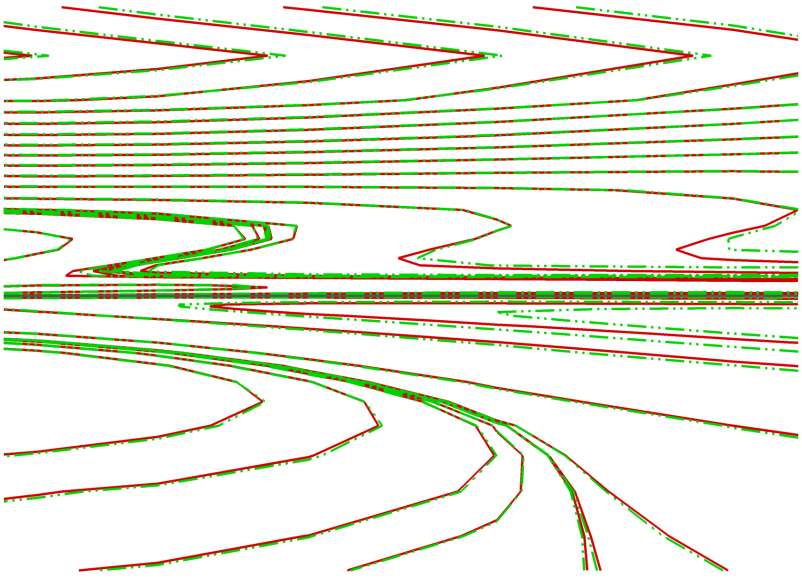
(b)

FIGURE 7.9 – *Cas d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox pour un profil OAT*15*A avec incidence* $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ *et* $Re = 10^6$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρE) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)*

.



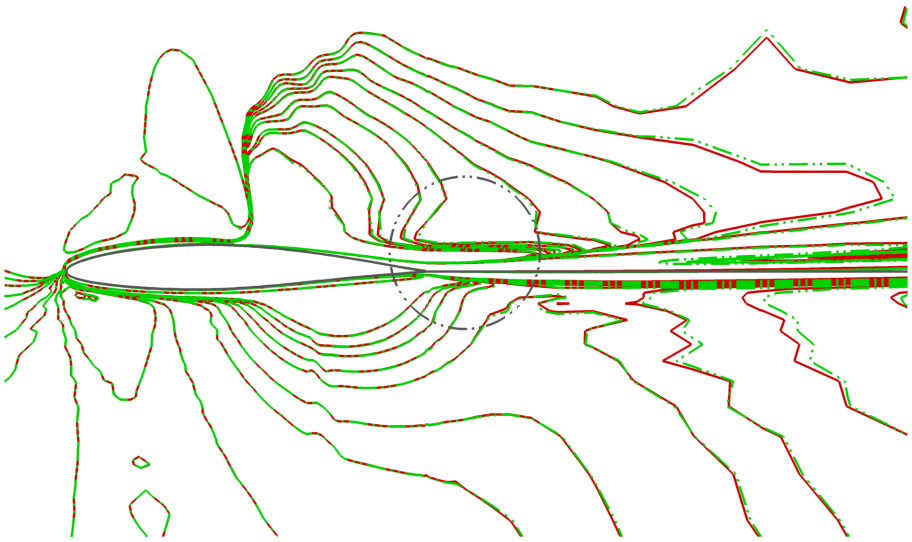
(a)



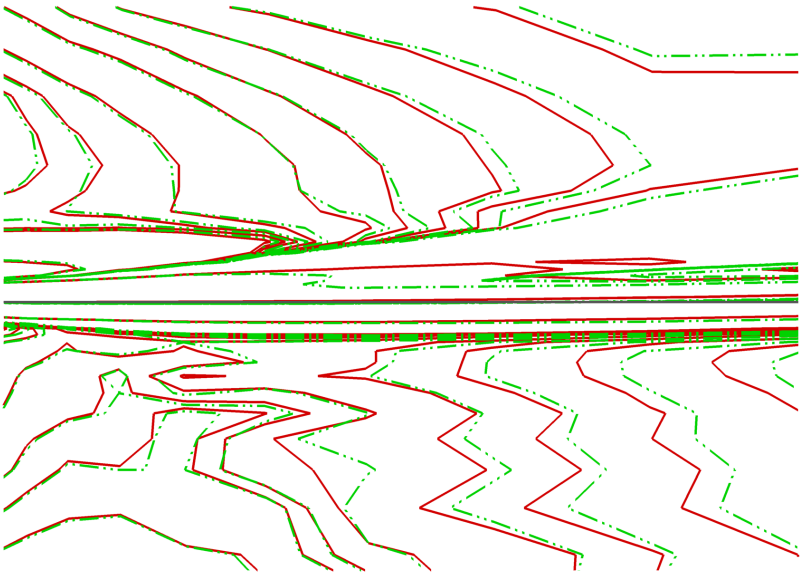
(b)

FIGURE 7.10 – *Cas d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox pour un profil OAT*15*A avec incidence* $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ *et* $Re = 10^6$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* (ρk) *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)*

.



(a)



(b)

FIGURE 7.11 – *Cas d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox pour un profil OAT*15*A avec incidence* $\alpha = 3.5$, $M = 0.73$ *et* $Re = 10^6$ *: Superposition des lignes d'isovaleurs de la variable* $(\rho\omega)$ *calculées par deux méthodes d'inversions (*elsA *et MUMPS)*

.

Quatrième partie

Modes et vecteurs propres

8 Analyse de stabilité - Calcul des modes globaux

Au commencement de cette thèse, l'hypothèse qui prévaut est celle proposée par Crouch [38], qui consiste à attribuer l'origine du tremblement d'une voilure à la présence des modes globaux. L'objectif principal de la théorie de la stabilité linéaire dans le cadre de cette étude, consiste à identifier le caractère stable ou instable de la dynamique d'un écoulement transsonique soumis au tremblement ; ce qui se traduit par retrouver les modes globaux responsables des instabilités. Il convient donc d'une part, de rappeler les notions et les outils de la théorie de la stabilité linéaire, qui soient formulés selon les objectifs fixés ; et d'autre part d'énoncer le processus expliquant la stratégie des calculs des modes globaux.
Afin de valider les développements, un cas test s'appuyant sur un écoulement laminaire compressible, est proposé. Il s'agit de calculer les modes et vecteurs propres d'un tel écoulement.
La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la recherche des modes globaux d'un écoulement turbulent. Ce calcul est abordé sous deux angles différents. Le premier consiste à utiliser une approximation sur la viscosité turbulente, tandis que le deuxième ne tient pas compte de cette approximation. Pour finir, les points intéressants de ces calculs seront abordés.

8.1 Analyse de stabilité linéaire

Dans les chapitres précédents, on a présenté le modèle retenu pour le calcul de l'écoulement transsonique autour d'une aile soumis au phénomène de tremblement ainsi que la méthode pour l'extraction de la matrice jacobienne de ce modèle. Maintenant on s'attache à présenter la mise en oeuvre des outils précédemment introduits pour réaliser un calcul du mode propre responsable du tremblement.
On rappelle dans cette section les notions de la théorie de stabilité linéaire, déjà introduites dans le chapitre 3.
Le comportement d'un écoulement transsonique présentant un phénomène de tremblement est décrit par un système d'équations de Navier-Stokes avec le modèle de turbulence $(k-\omega)$ de Wilcox, et donné par :

$$\frac{d}{dt}W = \mathbf{R}(W) \tag{8.1}$$

où $W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E, \rho k, \rho\omega)$ représente le champ aérodynamique qui spécifie le champ de densité, de vitesse, énergie et les quantités associées aux modèles de turbulence et $\mathbf{R}(W)$ est le résidu discret des équations de Navier-Stokes.

En appliquant la technique des petites perturbations, le champ aérodynamique W s'écrit sous la forme d'une superposition de l'écoulement de base (W_s) et d'une perturbation (W_f) : $W = W_s + \epsilon W_f$, avec $\epsilon << 1$. Afin de linéariser le système (8.1), on introduit cette décomposition dans les équations qui gouvernent le mouvement du modèle de l'écoulement, pour obtenir la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}(W_s + \epsilon W_f) = \mathbf{R}(W_s) + \epsilon \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}(W_s) \cdot W_f + \Theta(\epsilon^2). \tag{8.2}$$

La relation (8.2) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} W_f = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}(W_s) \cdot W_f. \tag{8.3}$$

On cherche donc, des solutions particulières de (8.3) sous la forme $W_f = e^{\sigma t}\widehat{W}$.
On a alors :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}\widehat{W} = \sigma \widehat{W}. \tag{8.4}$$

On rappel que, dans ce problème (8.4) nommé problème aux valeurs propres généralisé, σ représente la valeur propre et $\widehat{W}$ le vecteur propre associé. La procédure numérique pour la résolution de ce problème aux valeurs propres, consiste à utiliser la méthode itérative d'Arnoldi [59] dont la qualité principale est celle de réduire la taille du système. En revanche, pour mieux retrouver les modes, on utilise une petite astuce, qui consiste à introduire une cible σ_0 ("Shift-Invert") dans le système, et on écrit (8.4) sous la forme :

$$(\mathcal{J} - \sigma_0 \mathcal{I})^{-1} \widehat{W} = \frac{1}{(\sigma - \sigma_0)} \widehat{W} \tag{8.5}$$

avec $\mathcal{J} = \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}$ est la matrice jacobienne associée à ce problème.
Par conséquent, chercher les valeurs propres du plus grand module du problème (8.5), revient à chercher les valeurs propres σ de (8.4) les plus proches de σ_0.
Ainsi, les valeurs de la partie réelle de σ (noté σ_r) jouent un rôle déterminant pour déduire la nature de la stabilité de l'écoulement. Ce sont les $\sigma_r > 0$ qui vont représenter les modes instables.

La figure (8.1) présente le processus d'obtention des modes propres et des vecteurs propres associés, pour un écoulement donné.
L'organigramme représenté dans la figure (8.1) est décomposé en plusieurs étapes de calculs successives selon le sens des flèches :

- La première étape, consiste à calculer le champ de base d'un écoulement donné par un calcul RANS par l'intermédiaire du logiciel *elsA*. A la fin de cette étape, on retrouve le champ de base W telque $\mathbf{R}(W) = 0$.

- En effectuant une linéarisation des équations RANS, la seconde étape, consiste à extraire la matrice jacobienne $\mathcal{J} = \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial W}$ existante implicitement dans le logiciel *elsA*, ensuite à effectuer un assemblage de ces éléments (cet assemblage s'effectue en dehors de *elsA* et dépend du maillage utilisé).

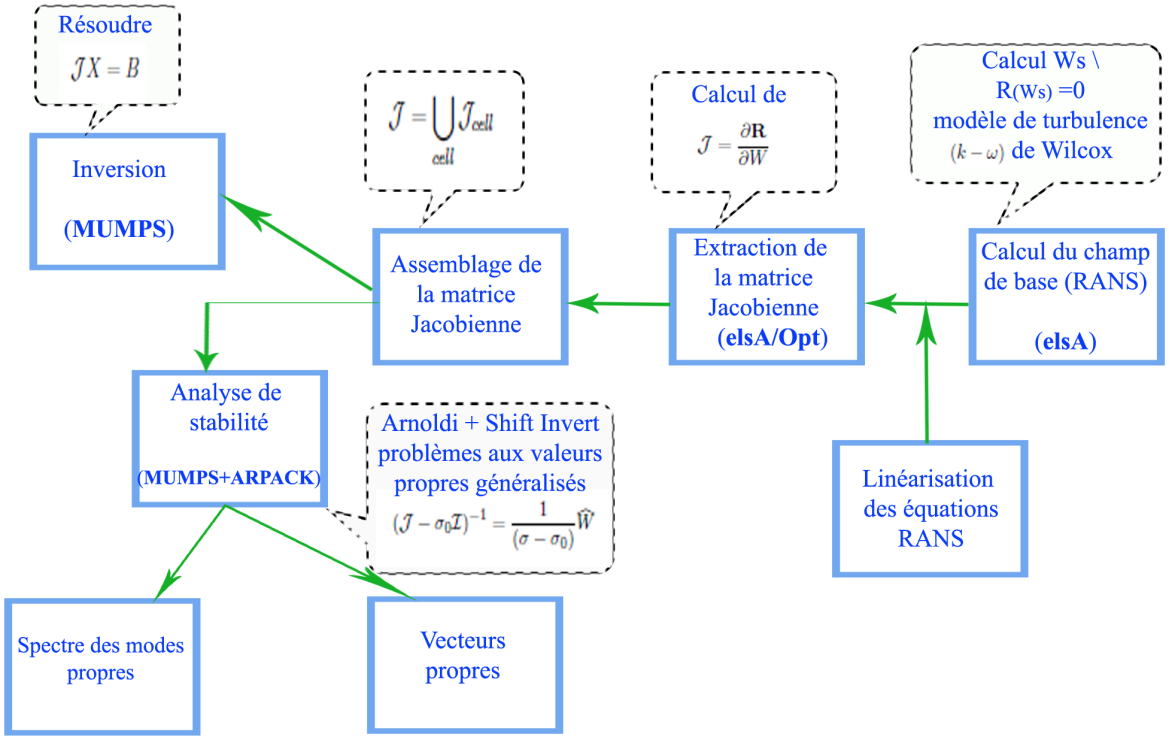


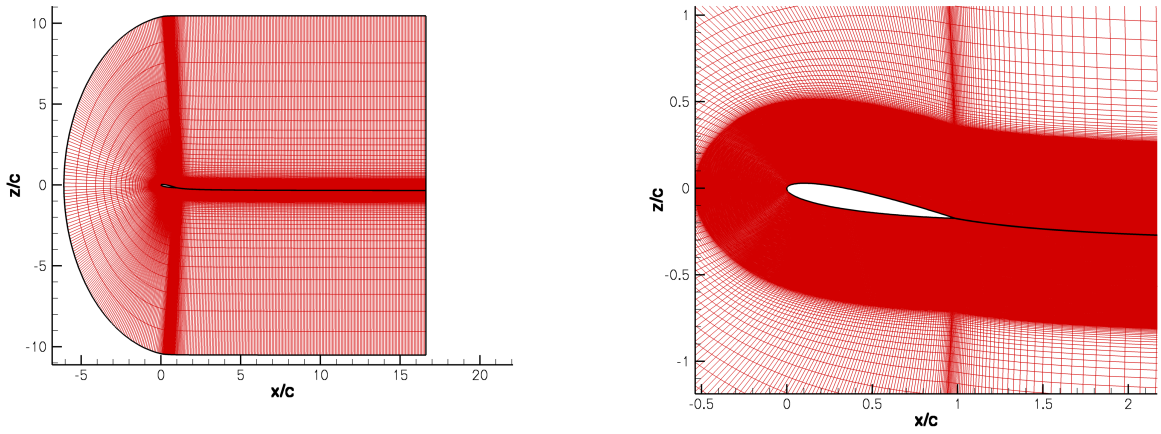
FIGURE 8.1 – *Organigramme de calcul des modes propres par une approche linéarisée.*

– La troisième étape, repose sur la théorie de l'analyse de stabilité globale pour calculer les modes propres ainsi que leur vecteurs propres associés. Dans cette étape, on utilise les logiciels MUMPS+ARPACK pour résoudre le problème aux valeurs propres généralisé (8.5), obtenu par la méthode d'Arnoldi-Shift Invert.

8.2 Calcul des modes globaux : écoulement laminaire

8.2.1 Calcul d'un champ de base pour un écoulement laminaire compressible

Pour définir ce cas test, on considère le cas bidimensionnel d'un écoulement laminaire compressible autour d'un profil NACA0012.
Le maillage a été crée par un générateur externe (voir la section 5.2 du chapitre 5), il est de type C, direct, orienté et structuré. Le maillage est décrit dans le repère (O, x, z) de manière que la corde soit dirigée suivant x.
La figure (8.2) montre une vue globale du maillage et une vue partielle du profil NACA0012. Le maillage est sous la forme d'un seul bloc avec une condition de raccord coïncident et de corde $c = 0.66$. On a raffiné d'avantage au niveau de la paroi et tout au long du sillage. Sur ce type de maillage, cinq cordes séparent le bord d'attaque du profil de la frontière extérieur et de plus de dix cordes de la frontière de sortie. Une telle distance a été jugée suffisante pour éviter les réflexions sur la frontière de sortie.
Pour ce cas test, on utilise deux maillages $Mesh_1$ et $Mesh_2$ du profil NACA0012. Le premier maillage $Mesh_1$ comprend 850×250 cellules, il est représenté en rouge dans la figure (8.3), tandis que le maillage $Mesh_2$ représenté en vert sur cette même figure,



(a) (b)

FIGURE 8.2 – *Maillage de type C autour d'une aile NACA*0012 *pour un calcul laminaire compressible : (a) Vue global du maillage bidimensionnel, (b) détail du maillage dans la région proche paroi*

comprend 600×250 cellules.
Sur cette figure (8.3), on observe la différence entre ces deux maillages. Cette différence réside au niveau du nombre de points dans leur sillage. En effet, les frontières de sortie sont situées à $16.5c$ du profil pour $Mesh_1$, et $11.5c$ pour $Mesh_2$. Néanmoins, Dans la zone amont du profil, les deux maillages ont le même nombre de points.
Avec ces deux maillages, on cherche à trouver le champ de base d'un écoulement lami-

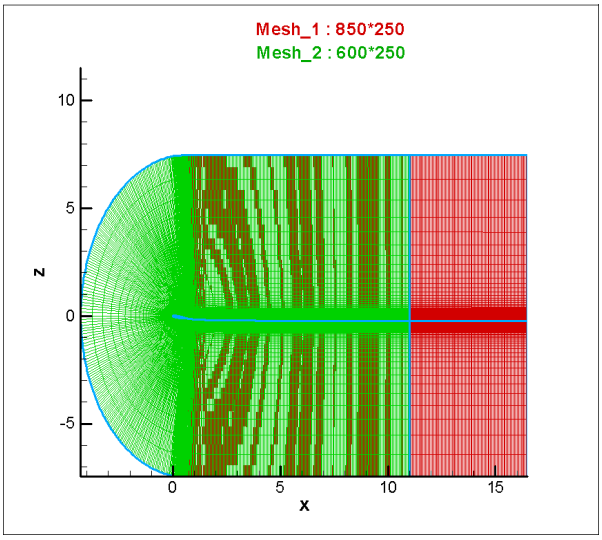


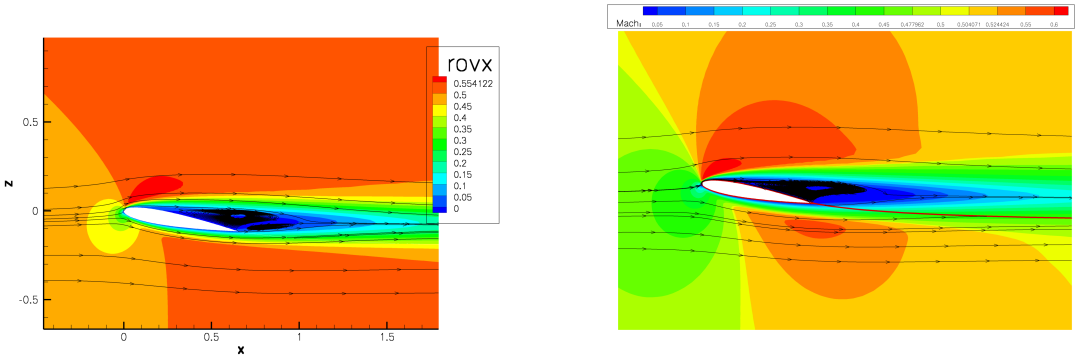
FIGURE 8.3 – *Superposition des maillages* $Mesh_1$ *et* $Mesh_2$

naire compressible. Pour cela, une solution stationnaire est calculée avec les conditions aérodynamiques récapitulées dans le tableau 8.1.
Dans la figure (8.4), on visualise les lignes de courant et les iso-valeurs de la composante longitudinale de la vitesse et du nombre de Mach autour du profil NACA0012. On peut constater facilement le décollement de la couche limite.

Mach	Reynolds	incidence	corde	Pression d'arrêt	Température d'arrêt
0.5	689	10 degré	$0.66m$	$2.3080009Pa$	$104.56730K$

TABLE 8.1 – *Conditions aérodynamiques pour un calcul stationnaire d'un écoulement laminaire compressible.*

On s'est restreint à montrer les calculs du champ de base sur le maillage $Mesh_1$ seulement, puisque les calculs sur l'autre maillage donne le même résultat.



(a) Vitesse longitudinale (b) Nombre de Mach

FIGURE 8.4 – *Lignes de courant du champ de la vitesse longitudinale et du nombre de Mach autour d'un profil NACA*0012 *d'un écoulement laminaire compressible.* $M = 0.5$, $Re = 689$ *et* $\alpha = 10$

8.2.2 Spectre et vecteurs propres

On appelle spectre l'ensemble des valeurs propres du problème (8.4). La partie imaginaire σ_i correspond à la pulsation du mode. Pour représenter un spectre des modes propres, on se place dans le plan complexe (σ_r, σ_i). Le spectre est paramétré par la valeur de la corde $c = 0.66$ du profil et la valeur de la vitesse à l'infini $u_\infty = 0.5$.
On définit le nombre de Strouhal [1] sans dimension par : $Str = \frac{frequence \times corde}{u_\infty}$.
Désormais, les spectres sont présentés dans le plan complexe en fonction du couple $(\widetilde{\sigma}, Str)$, avec :

$$\begin{cases} \widetilde{\sigma} = \sigma_r \dfrac{c}{u_\infty}, \\ Str = \dfrac{\sigma_i}{2\pi} \dfrac{c}{u_\infty}. \end{cases} \tag{8.6}$$

On considère plusieurs cibles (*Shift*) autour de $\sigma_0 = (0.0142, 0.66)$, pour établir un spectre des modes propres et cela sur les deux maillages $Mesh_1$ et $Mesh_2$.
Pour chaque valeur de *Shift*, on calcul 10 modes propres en effectuant une projection du système (8.5) sur 10 sous-espace de Krylov. La convergence des résidus r_n est très satisfaisante et elle est de l'ordre de 10^{-12}. On récapitule les valeurs des *Shift* utilisés

1. Le nombre de Strouhal *Str* est un nombre sans dimension décrivant les mécanismes de circulation oscillante. Il représente le rapport du temps d'advection et du temps caractéristique de l'instationnarité.

dans le tableau 8.2 suivant :

$Shift_1$	$Shift_2$	$Shift_3$	$Shift_4$
$(0.0142, 0.5)$	$(0.0142, 0.55)$	$(0.0142, 0.65)$	$(0.0142, 0.69)$

TABLE 8.2 – *Les différentes valeurs des* Shift

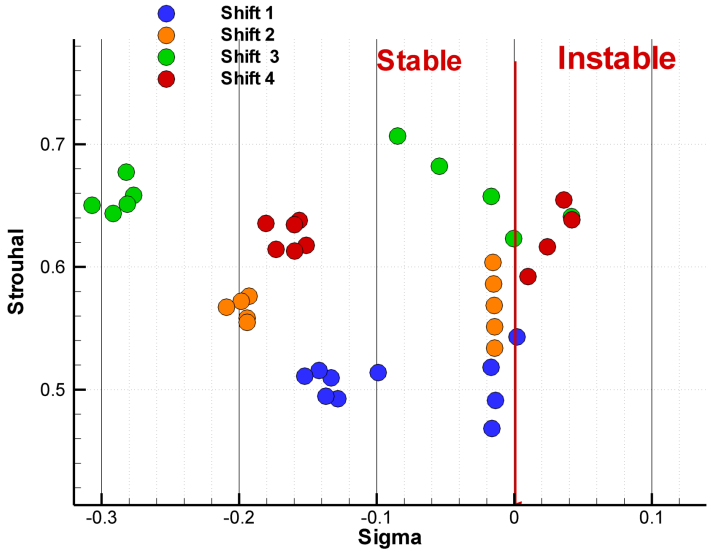


FIGURE 8.5 – *Spectre des modes propres pour le maillage* $Mesh_1$*, avec* $M = 0.5$*,* $Re = 689$ *et* $\alpha = 10$

Avec le maillage $Mesh_1$, on réalise plusieurs calcul en changeant la valeur de la cible σ_0. La figure (8.5) montre le spectre de l'écoulement laminaire compressible avec un Reynolds $Re = 689$ et Mach $M = 0.5$, composé de quatre résultats de calcul obtenus pour ces quatre différents valeurs du *Shift*. Pour ces quatre calculs, chaque spectre est présenté par une couleur différente. Dans les spectres autour de $Shift_1$ et $Shift_2$, on n'obtient aucun mode instable, puisque tous les σ_r sont négatifs. D'ailleurs, la partie imaginaire du $Shift_1$ est assez petite par rapport à $\sigma_i = 0.66$, ce qui montre que la cible $Shift_1$ n'appartient pas au voisinage de σ.
Dans le spectre vert de la cible $Shift_3$, on obtient un seul mode propre instable $\sigma_1 = (0.04153, 0.64)$, tandis que le spectre rouge de la cible $Shift_4$, on obtient 4 valeurs instables : $\sigma_2 = (0.041856, 0.638)$, $\sigma_3 = (0.03607, 0.6545)$, $\sigma_4 = (0.02409, 0.6164)$ et $\sigma_5 = (0.099, 0.5921)$.
Concernant les calculs réalisés sur le maillage $Mesh_2$, avec les mêmes cibles, on illustre le spectre obtenu dans la figure (8.6). Sur cette figure, on constate qu'il y a un seul mode propre instable : $\sigma_1 = (0.0185, 0.6487)$, autour du $Shift_4$.
On sait que $Mesh_2$ se caractérise par un sillage plus court que $Mesh_1$. Dans la figure (8.7), on a superposé les spectres des deux maillages, afin de mettre en lumière le rôle du sillage pour capturer les modes. On peut observer une meilleure définition des modes en augmentant le nombre de mailles au niveau du sillage. Le nombre des modes instables

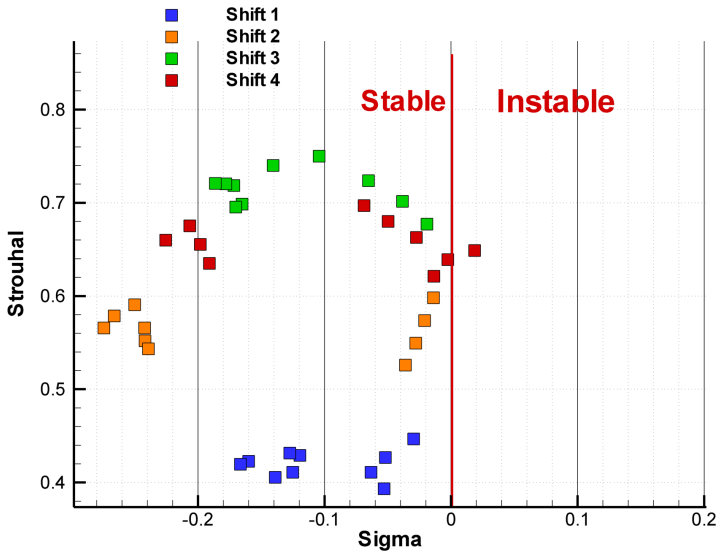


FIGURE 8.6 – *Spectre des modes propres pour le maillage $Mesh_2$, avec $M = 0.5$, $Re = 689$ et incidence $\alpha = 10$*

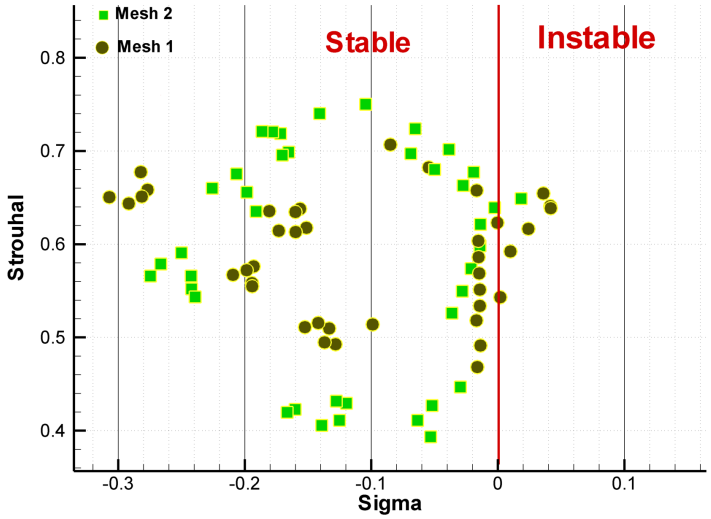


FIGURE 8.7 – *Comparaison des spectres pour les deux maillages $Mesh_1$ et $Mesh_2$; écoulement laminaire compressible, avec $M = 0.5$, $Re = 689$ et $\alpha = 10$*

dans le spectre de $Mesh_2$ est bien inférieur à celui du $Mesh_1$. On remarque que les modes se déplacent en bloc, et que la capture des modes instables est plus efficace avec un sillage plus long. En effet, pour $Shift_4$, on a quatre modes instable pour $Mesh_1$, mais on en trouve seulement un avec $Mesh_2$. Ce dernier point conforte l'influence de la discrétisation du maillage sur l'obtention des modes, le domaine du calcul semble un peu court en amont.

Dans ce cas d'écoulement laminaire autour du profil NACA0012 en incidence, on peut supposer dans notre cas, que l'effet de compressibilité est très faible, puisque $M = 0.3$.

On peut constater que le Strouhal obtenu $St = 0.64$, est compatible avec les résultats de Merle et Robinet [86]. En effet, la figure (8.8) montre dune part que, le choix du couple $(\alpha, Re) = (10, 689)$ est sur le seuil de l'instabilité et que d'autre part l'incidence $\alpha = 10$, permet d'obtenir une valeur $St = 0.64$ dans le domaine instable. Dans les figures

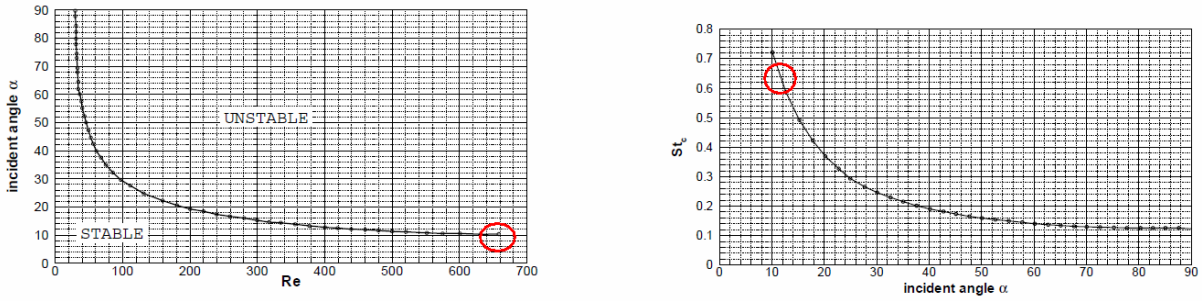


FIGURE 8.8 – *Domaine d'instabilité pour un écoulement laminaire incompressible autour du profil NACA0012 [86].*

(8.9) et (8.10), on représente les composantes réelles du vecteur propre $\widehat{W}$ associé au mode global σ_2 le plus instable dans le maillage $Mesh_1$, pour l'écoulement laminaire à $Re = 689$ et $M = 0.5$. On constate que ces vecteurs propres ressemblent au vecteur propre d'un écoulement subsonique autour d'un cylindre [48].

Le cas test précédent a permis d'appliquer les différentes étapes du processus de la figure (8.1), à travers l'examen des modes globaux d'un écoulement laminaire compressible. En particulier, le vecteur propre associé au mode global le plus instable, ressemble au vecteur propre d'un écoulement compressible autour d'un cylindre. De plus, le calcul des spectres a permis d'identifier l'influence des maillages dans la capture des modes instables. Le cas d'un écoulement laminaire compressible est un parfait exemple d'application qui valide le code de l'extraction de la matrice jacobienne. De ce fait, la prochaine partie est consacrée à une analyse de stabilité linéaire globale d'un écoulement compressible turbulent à Reynolds élevé.

8.3 Calcul des modes globaux : écoulement turbulent

Dans le cas d'un écoulement turbulent, on considère le maillage de type C, comme décrit dans le chapitre 5. Ce maillage du profil OAT15A, comprend 851×141 points avec une corde $c = 0.23$ et une incidence $\alpha = 3.5$, sachant que le sillage s'étend jusqu'à $90c$. On peut se référer à la figure (5.3) du chapitre 5.
Afin d'appliquer le processus décrit dans la figure (8.1) et de calculer les modes globaux, il convient de chercher un champ moyen qui définit au mieux un écoulement de base turbulent.

8.3.1 Calcul du champ de base d'un écoulement turbulent

On s'intéresse maintenant au calcul stationnaire RANS d'un écoulement transsonique en régime de tremblement, sachant que le modèle de turbulence retenu, est celui de

$(k-\omega)$ de Wilcox.
Le nombre de Reynolds est égal à $Re = 3.10^6$ et on se place à une incidence $\alpha = 3.5$. Pour établir la simulation de l'écoulement stationnaire, on propose quatre calculs selon les quatre valeurs de Mach : $M_1 = 0.70$, $M_2 = 0.73$, $M_3 = 0.75$ et $M_4 = 0.80$. Ces différents calculs permettent de voir l'effet de l'influence de l'augmentation du nombre de Mach.

Les figures (8.11) représentent les iso-valeurs du rapport de viscosité $\frac{\mu_t}{\mu}$ pour les différentes valeurs de Mach. Lorsqu'on augmente le nombre de Mach, l'intensité de ce rapport augmente au niveau du bord de fuite.
Les figures (8.12), montrent l'évolution des lignes de courant pour les quatre valeurs de Mach et permettent de mieux apercevoir la mise en place du décollement. Au niveau de l'extrados et à $M = 0.75$, le tourbillon qui constitue le décollement commence à se manifester. Cette recirculation apparaît pour un nombre de Mach $M = 0.78$ et elle grossit en augmentant le nombre de Mach jusqu'à $M = 0.80$. Cette zone de décollement s'étend de 90% de la corde jusqu'au bord de fuite.
Dans les figures (8.13), les échelles sont identiques et on peut visualiser l'influence de l'augmentation du nombre de Mach. En effet, la position du choc se déplace vers l'aval, dès que le nombre de Mach augmente. Les contours des différents nombre de Mach se comparent de manière très satisfaisante. Pour une comparaison plus précise, on a choisi de tracer les valeurs des contours avec différentes couleurs, comme présenté dans la figure (8.14). On précise aussi que la norme des résidus pour chaque cas de calculs, diminue de 3 à 4 ordres de grandeurs.

Après avoir retrouvé les champs moyens, on s'intéresse maintenant à calculer les modes et vecteurs propres. La fréquence choisie est celle issue de l'expérience $f = 70Hz$. Le nombre de Strouhal qui paramétré par la corde $c = 0.23$, vaut $Str = 0.0670833$. On cherche donc, à retrouver le spectre des modes propres autour de $\sigma_0 = (0, Str)$. Afin d'obtenir un spectre de 10 modes, on projette le problème sur 10 sous-espaces de Krylov.
On propose de réaliser ces calculs selon deux cas : avec une approximation "μ_t *figé*" et sans cette approximation. Dans les deux sous-sections suivantes, on présente les résultats obtenus.

8.3.2 Spectre des modes propres avec approximation "μ_t *figé*"

Dans un très grand nombre d'articles, le coefficient de viscosité turbulente μ_t et le coefficient du flux de chaleur turbulent κ_t sont considérés comme constants lors d'une linéarisation. Ces approximations sont si fréquemment adoptées, qu'elles peuvent être considérées comme le traitement par défaut pour le calcul de gradient avec les équations (RANS) pour l'optimisation de forme. Dans le cadre de cette thèse, on utilise un modèle de turbulence à deux équations de transport. Le système des équations de Navier-Stokes est donc un système non linéaire à 7 variables, défini en chaque cellule du domaine de calcul. En figeant μ_t et κ_t, la fonction à dériver dépend uniquement du champ moyen. En effet, la variation des quantités turbulentes pour la linéarisation du flux visqueux n'est alors pas prise en compte et le coefficient μ_t est considéré comme indépendant du champ conservatif, ces grandeurs sont considérées comme des constantes, d'où l'appellation "μ_t *figé*". Ainsi le choix et la complexité du modèle de turbulence n'interviennent pas dans

la linéarisation du flux diffusif.

On rappelle ici l'expression de la matrice jacobienne $\mathcal{J}$ sachant que *cell* représente l'ensemble des cellules qui constituent le domaine de calcul :

$$\mathcal{J} = \sum_{cell} \mathcal{J}^{mf}_{cell} + \sum_{cell} \mathcal{J}^{tur}_{cell} \tag{8.7}$$

$\mathcal{J}^{mf}$ est la matrice jacobienne du champ moyen et $\mathcal{J}^{tur}$ celle du champ turbulent.
Dans le cas d'une approximation "μ_t *figé*", on suppose que toutes les dérivées par rapport à la viscosité turbulentes (μ_t) sont nulles, ce qui permet d'avoir $\mathcal{J}^{tur} = 0$.
De ce fait, (8.7) devient :

$$\mathcal{J} = \sum_{cell} \mathcal{J}^{mf}_{cell} + \underbrace{\sum_{cell} \mathcal{J}^{tur}_{cell}}_{=0} = \sum_{cell} \mathcal{J}^{mf}_{cell} \tag{8.8}$$

Pour chaque cellule Ω du domaine de calcul, la matrice jacobienne $\mathcal{J}_\Omega$ extraite, a pour dimension 5×5 ; puisqu'elle est découplée des deux variables turbulentes.
En suivant le processus déjà décrit dans la figure (8.1) et en tenant compte de l'approximation "μ_t *figé*", on réalise l'extraction des matrices jacobiennes correspondantes à chaque champ. Puis, autour de la même cible $\sigma_0 = (0, Str)$, on obtient le spectre de 10 modes globaux pour chaque calcul.
La figure (8.20) illustre l'ensemble des spectres pour chaque valeur de Mach. En effet, seulement le spectre correspondant au Mach $M = 0.73$ ne possède aucun mode instable, sinon les autres ont au moins deux modes instables. Par ailleurs, le mode le plus instable $\sigma = (0.005149, 0.062233)$ appartient au spectre rouge, caractérisé par le nombre de Mach $M = 0.80$, sachant que pour ce nombre de Mach, on a constaté à travers les lignes de courant de son écoulement moyen, que la bulle de recirculation est devenue très grosse.
On remarque que la fréquence de ce mode instable est inférieure à la fréquence de l'expérience.
Les figures (8.16), (8.17), (8.18) et (8.19) donnent les résultats obtenus du vecteur propre associé au mode le plus instable $\sigma = (0.005149, 0.062233)$. On trace dans ces figures, les parties réelles des composantes du vecteur propre. On constate que ces valeurs se situent au niveau du sillage, en particulier entre la frontière de sortie et la position $60c$ et au niveau du choc. Une vue partiel du choc est donné.

8.3.3 Spectre des modes propres sans approximation de "μ_t *figé*"

Dans ce cas, on n'utilise pas l'approximation "μ_t *figé*", dans la linéarisation des équations de Navier-Stokes. La matrice jacobienne extraite, dépend des variables turbulentes. Il convient de rappeler que dans ce cas, la dimension de la matrice jacobienne sur une cellule donnée du maillage est 7×7.
De la même manière que précédemment, on applique le processus déjà décrit dans la figure (8.1) aux différents écoulements de base. Puis, autour de la cible $\sigma_0 = (0, Str)$, on obtient un spectre de 10 modes globaux pour chaque écoulement.
La figure (8.20) représente le spectre de 10 modes pour chaque valeur du nombre de Mach. Le spectre correspondant à $M = 0.73$ n'admet pas de mode instable, tandis que les autres ont chacun un seul mode instable . Le mode le plus instable

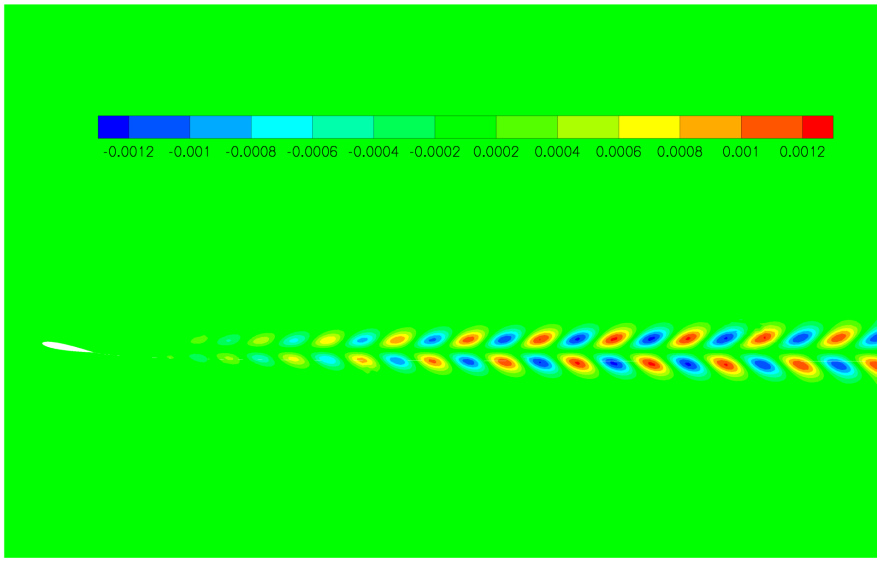
$\sigma = (0.061144, 0.064749)$ appartient au spectre du nombre de Mach $M = 0.80$. Dans ce cas, on a capturé moins de modes instables que le cas où on considère l'approximation "μ_t *figé*". La fréquence de ce mode est supérieur à la fréquence du mode calculé par l'approximation "μ_t *figé*".
Les figures (8.21), (8.22), (8.23), (8.24) et (8.25) montrent les parties réelles des composantes du vecteur propre associé au mode le plus instable $\sigma = (0.061144, 0.064749)$. Les valeurs des composantes de ce vecteur se situent au niveau du sillage, en particulier entre la frontière de sortie et la position $60c$ et au niveau du choc.

En comparaison avec les seuls travaux de Crouch [38], existant dans la littérature pour ce cas, on peut constater que $Str = 0.062$ obtenu par nos calculs, est une valeur un peu comparable avec celle trouvée par Crouch. En effet, dans la figure (3.9), Crouch a trouvé un $Str = 0.044$ pour son mode le plus instable, avec $M = 0.76$, $Re = 10^7$ et une incidence $\alpha = 3.2$.

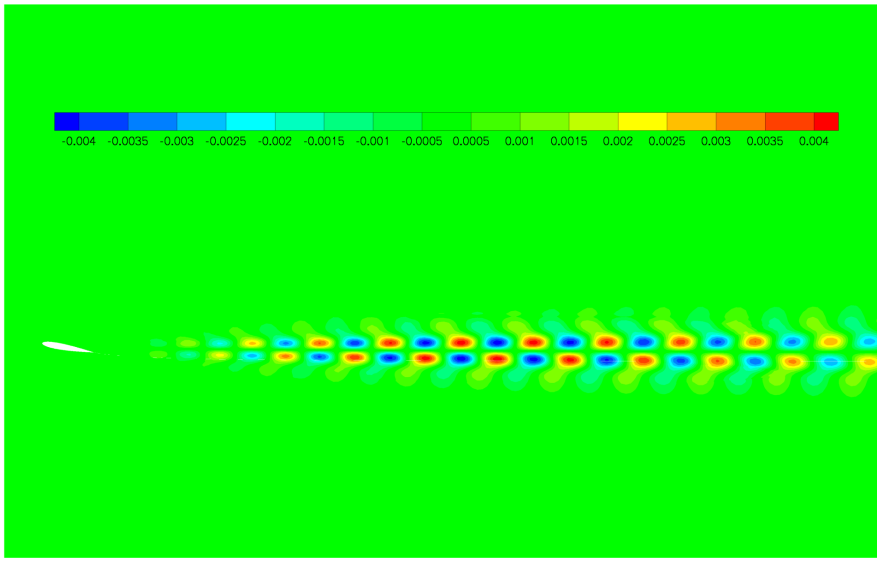
8.4 Conclusion

L'objectif principale de cette étude était de développer une nouvelle approche, de type stabilité globale pour les écoulements transsoniques soumis au phénomène de tremblement. L'approche choisie était d'attribuer les instabilités dûes par le tremblement à la présence d'un mode global instable. L'enjeu était de pouvoir mettre en oeuvre cette approche en calculant explicitement la matrice jacobienne. La plus grande partie de ce travail a été consacrée à la conception et l'implémentation du code au sein du logiciel *elsA* afin d'effectuer l'extraction de la matrice jacobienne.
Dans ce chapitre, on a réalisé une analyse de stabilité globale, basée sur une recherche des instabilités sous forme modale. En premier temps, cette analyse a permis d'étudier la dynamique d'un écoulement laminaire compressible. On a trouvé que le vecteur propre associé au mode le plus instable, ressemble à celui d'un écoulement subsonique autour d'un cylindre. Ce cas test, bien qu'il s'agisse d'un écoulement laminaire, a permis de mettre en évidence le succès de l'approche choisie.
Dans un deuxième temps, on s'est attaché, à retrouver les modes et vecteurs propres d'un écoulement transsonique soumis à un phénomène de tremblement. Tout d'abord, on a effectué un calcul stationnaire RANS pour un tel écoulement, sachant que le modèle de turbulence est celui de $(k-\omega)$ de Wilcox. Ces simulations ont été réalisé pour quatre valeurs de nombre de Mach et et $Re = 3.10^6$ pour obtenir les champs moyens. Deux cas de calculs se présentent : une fois sans l'approximation "μ_t *figé*" et l'autre avec cette approximation. A l'issue de ces calculs, on obtient les spectres et vecteurs propres correspondants. Dans le cas où l'on tient compte de l'approximation "μ_t *figé*", on note que son spectre possède plus de modes instables que celui o'u on ne tient pas compte de cette approximation. Dans ARPACK, l'inversion de la matrice jacobienne est mieux convergente, si on considère l'approximation "μ_t *figé*". Dans les deux cas, on visualise les composantes du mode instable au niveau du sillage et au niveau du choc.
La valeur du $Str = 0.062$ est assez proche de la valeur observée par Crouch dans une configuration très semblable.
Finalement, malgré que les valeurs des composantes du vecteur propre n'est pas assez significatives, la stratégie optée dans cette thèse pour capturer le mode instable, est bien

réalisée.

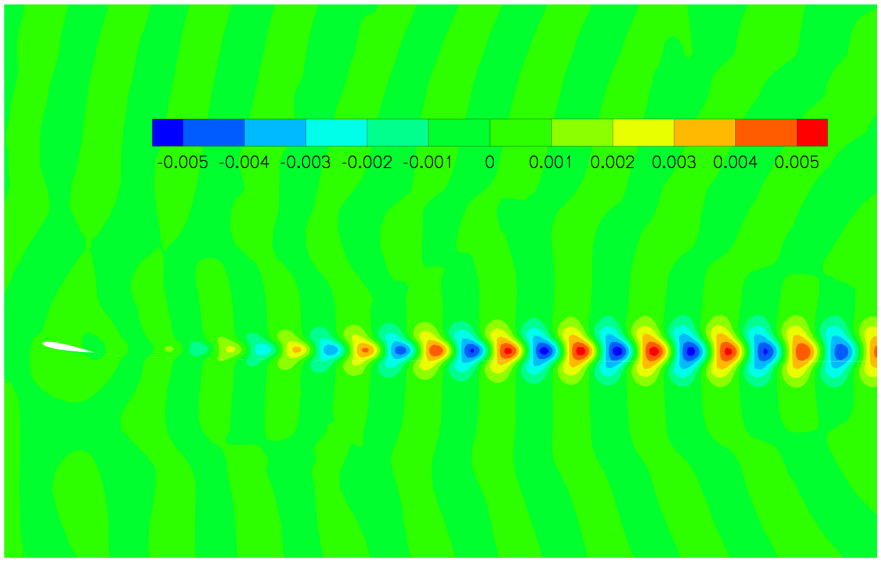


(a) Composante $\widehat{\rho}$

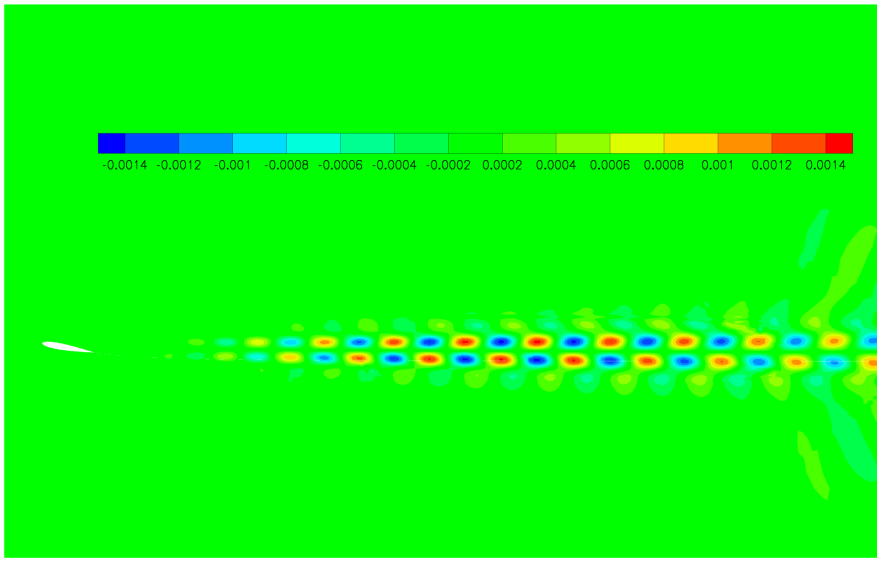


(b) Composante $\widehat{\rho u}$

FIGURE 8.9 – *Partie réelle des composantes de quantité de masse volumique et de la vitesse relatives au mode global instable σ_5, d'un écoulement laminaire compressible sur le maillage $Mesh_1$*

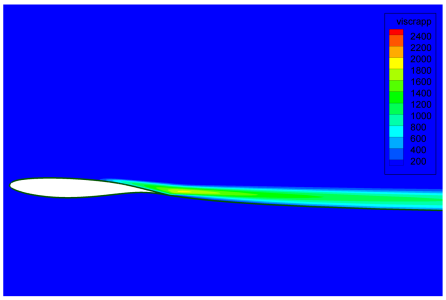


(a) Composante $\widehat{\rho w}$

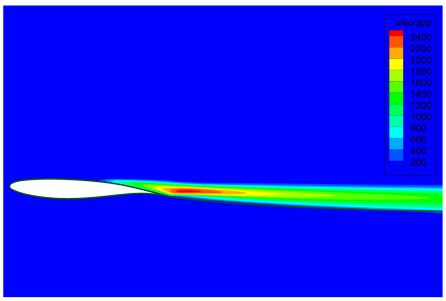


(b) Composante $\widehat{\rho E}$

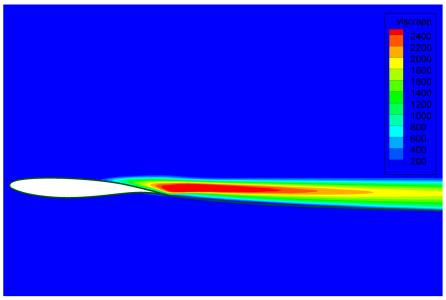
FIGURE 8.10 – *Parties réelles des composantes de vitesse longitudinale et la quantité d'énergie relatives au mode global instable σ_5 de l'écoulement laminaire compressible, sur le maillage $Mesh_1$*



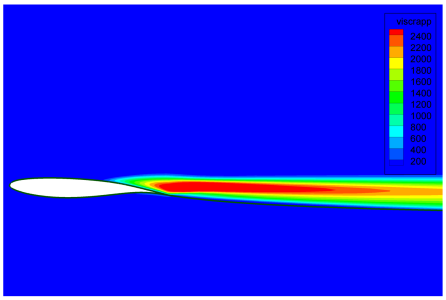
(a) $M = 0.73$



(b) $M = 0.75$

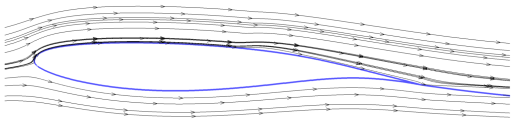


(c) $M = 0.78$

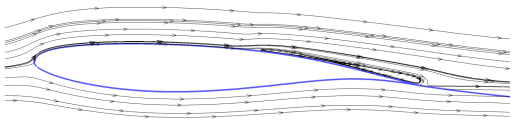


(d) $M = 0.80$

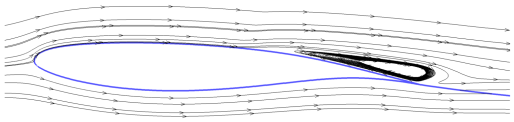
FIGURE 8.11 – *Les iso-valeurs du rapport de viscosité* $\frac{\mu_t}{\mu}$ *selon plusieurs valeurs de Mach pour un calcul RANS d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k - \omega)$ *de Wilcox sur un profil OAT*15*A, avec* $Re = 3.10^6$ *et* $\alpha = 3.5$



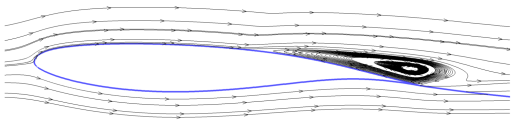
(a) $M = 0.73$



(b) $M = 0.75$



(c) $M = 0.78$

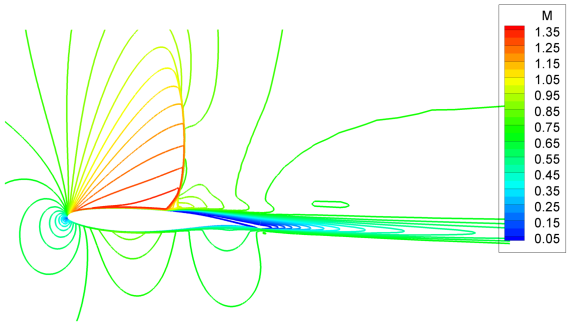


(d) $M = 0.80$

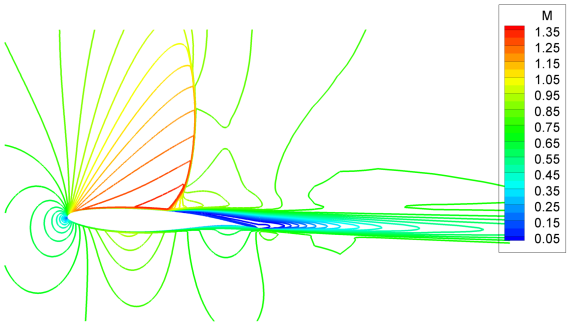
FIGURE 8.12 – *Les lignes de courant autour du profil OAT*15*A pour un calcul RANS d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k - \omega)$ *de Wilcox, avec* $Re = 3.10^6$ *et* $\alpha = 3.5$



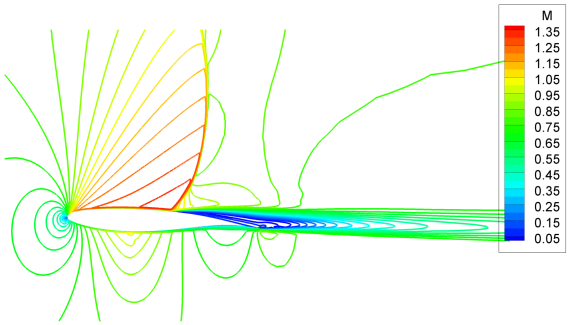
(a) $M = 0.73$



(b) $M = 0.75$

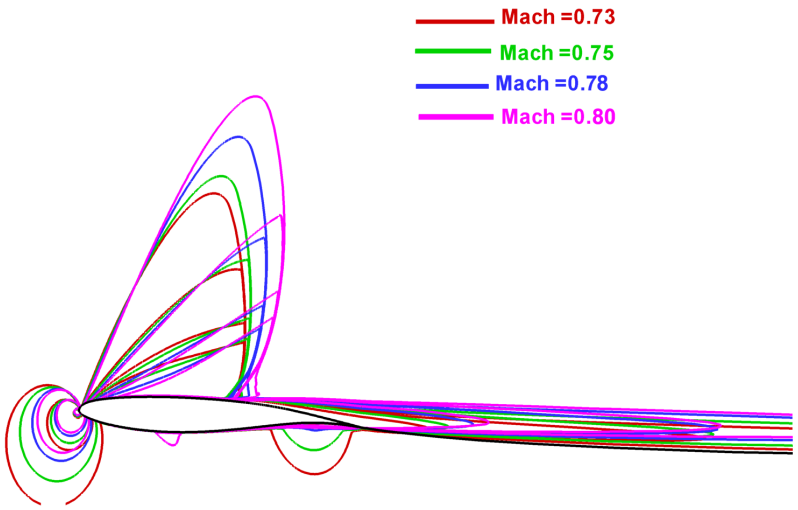


(c) $M = 0.78$



(d) $M = 0.80$

FIGURE 8.13 – *Les lignes des iso-valeurs des quatre nombres de Mach pour un calcul RANS d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox sur un profil* $OAT15A$*, avec* $3.Re = 10^6$ *et* $\alpha = 3.5$.



(a)

FIGURE 8.14 – *Les contours des nombres de Mach pour un calcul RANS d'un écoulement compressible avec modèle de turbulence* $(k-\omega)$ *de Wilcox sur un profil OAT*15*A, avec* $Re = 3.10^6$ *et* $\alpha = 3.5$.

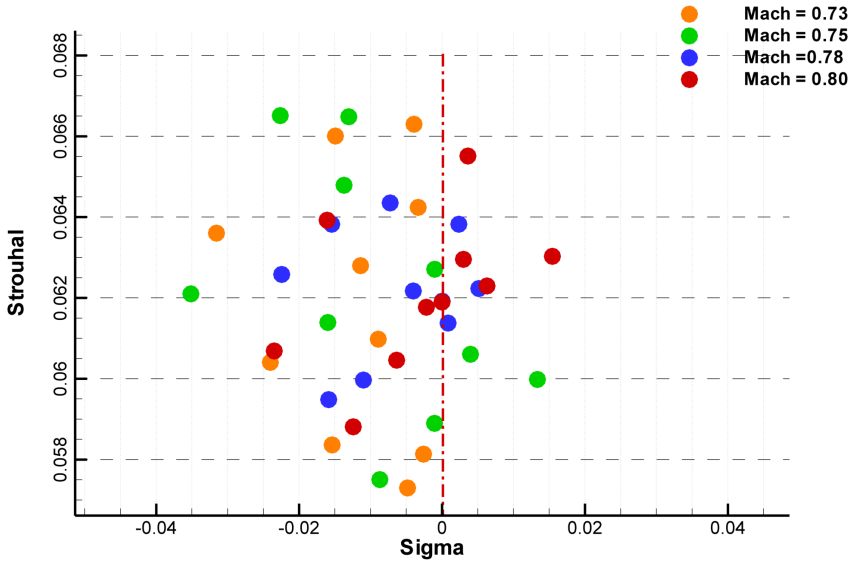
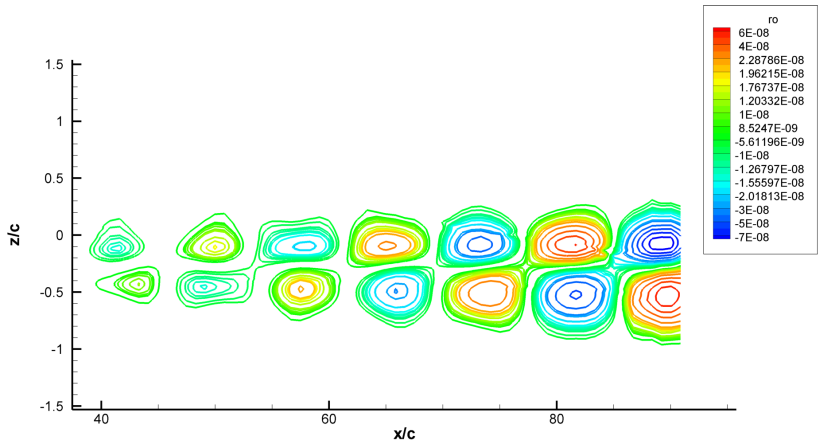
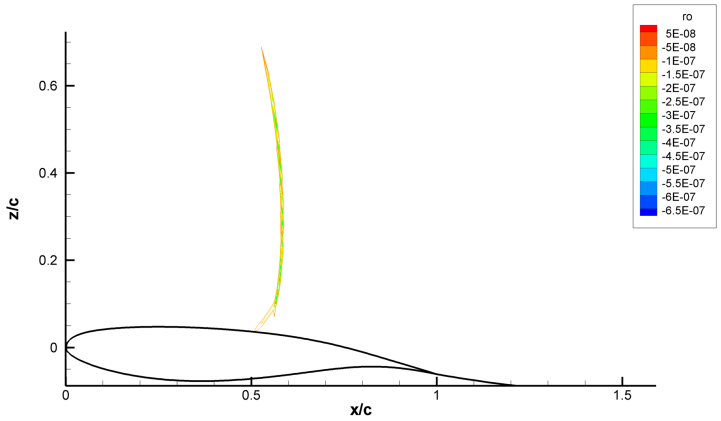


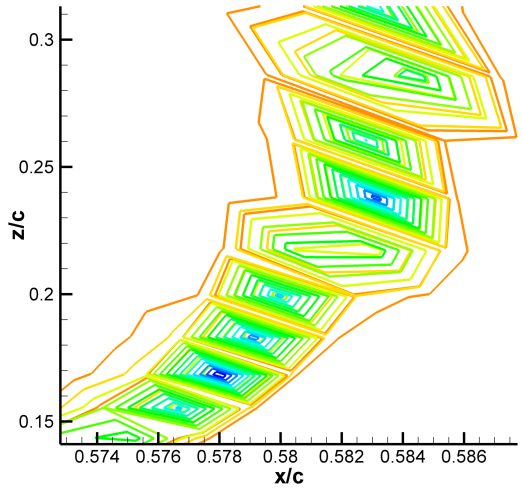
FIGURE 8.15 – *Spectre des Modes propres avec une approximation "*μ_t figé*" autour de* $\sigma_0 = (0, Str)$ *pour le profil OAT*15*A avec incidence* $\alpha = 3.5$ *et* $Re = 3.10^6$.



(a) $\widehat{\rho}$: sillage

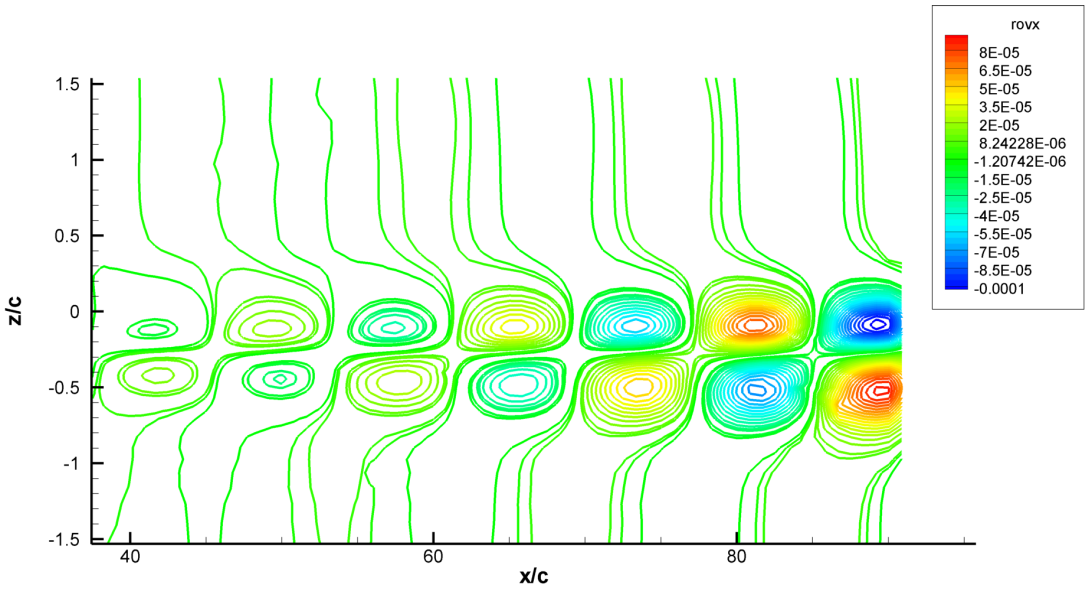


(b) $\widehat{\rho}$: vue globale du choc

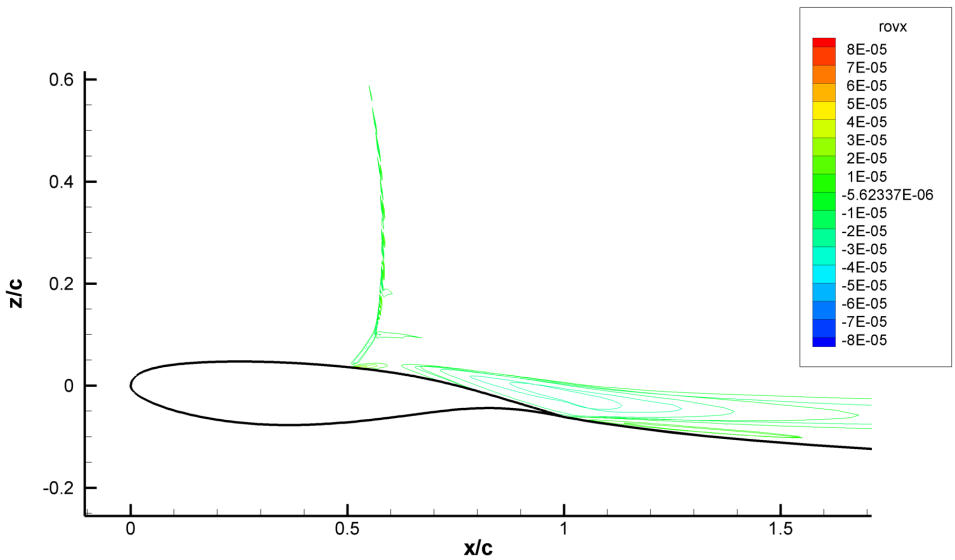


(c) $\widehat{\rho}$: vue partiel du choc

FIGURE 8.16 – *Approximation "μ_t figé" : Valeurs réelles des composantes* $(\widehat{\rho})$ *du vecteur propre associé à* $\sigma = (0.005149, 0.062233)$ *le mode propre le plus instable autour du profil* $OAT15A$*, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$.

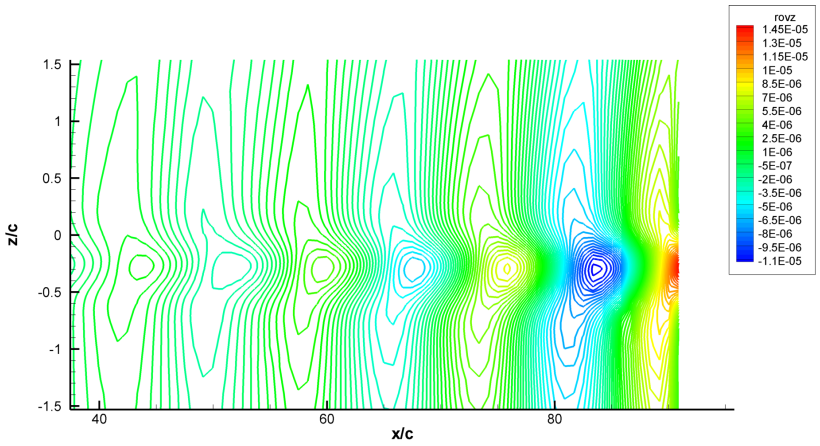


(a) $\widehat{\rho u}$: sillage

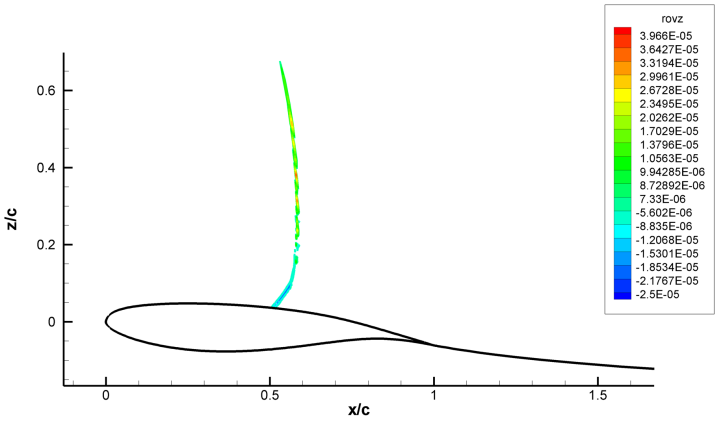


(b) $\widehat{\rho u}$: vue globale du choc

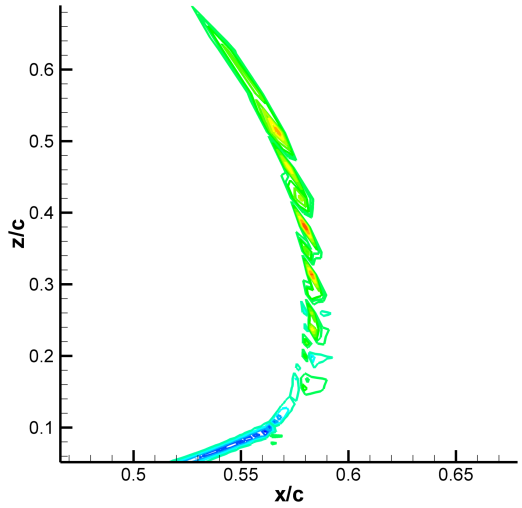
FIGURE 8.17 – *Approximation "μ_t figé" : Valeurs réelles des composantes* $(\widehat{\rho u})$ *du vecteur propre associé à* $\sigma = (0.005149, 0.062233)$ *le mode propre le plus instabe autour du profil* $OAT15A$*, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$.



(a) $\widehat{\rho w}$: sillage

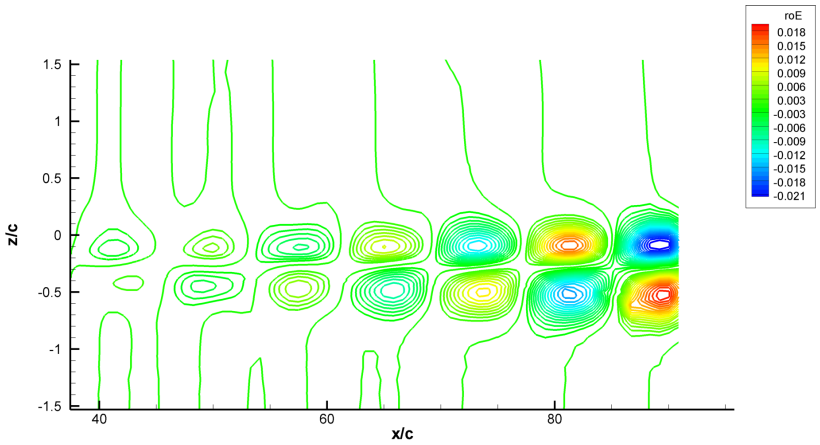


(b) $\widehat{\rho w}$: vue globale du choc

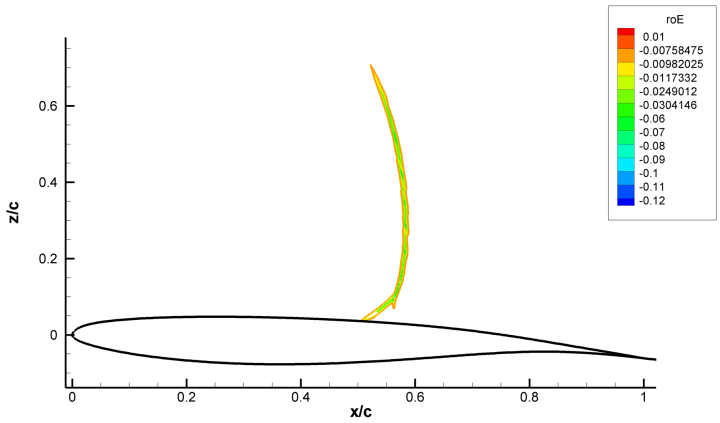


(c) $\widehat{\rho w}$: vue partiel du choc

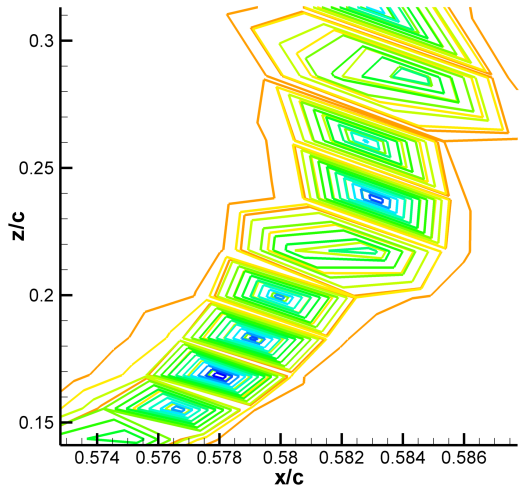
FIGURE 8.18 – *Approximation "μ_t figé" : Valeurs réelles des composantes* $(\widehat{\rho w})$ *du vecteur propre associé à* $\sigma = (0.005149, 0.062233)$ *le mode propre le plus instabe autour du profil* $OAT15A$*, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$.



(a) $\widehat{\rho E}$: sillage



(b) $\widehat{\rho E}$:vue globale du choc



(c) $\widehat{\rho E}$: vue partiel du choc

FIGURE 8.19 – *Approximation "μ_t figé" : Valeurs réelles des composantes* $(\widehat{\rho E})$ *du vecteur propre associé à* $\sigma = (0.005149, 0.062233)$ *le mode propre le plus instabe autour du profil* $OAT15A$*, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$.

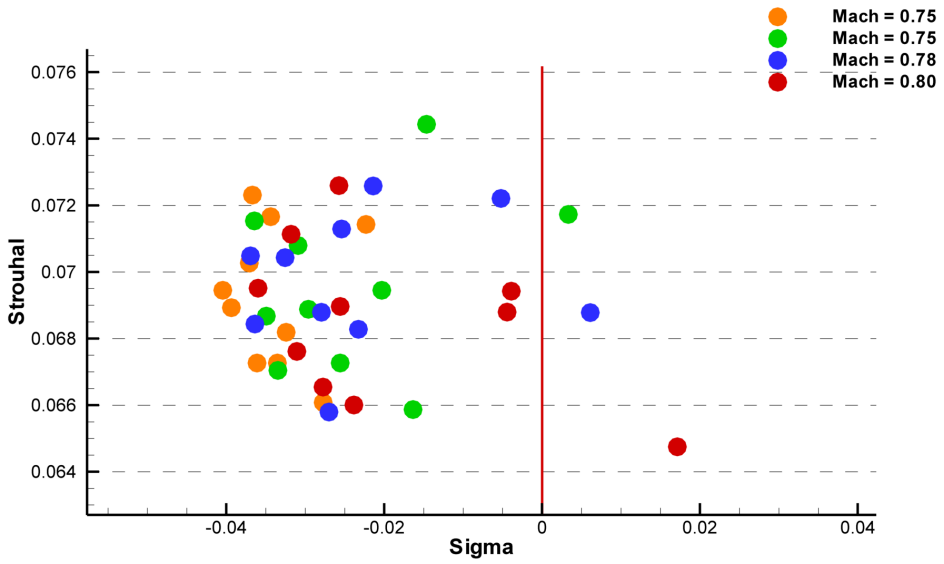
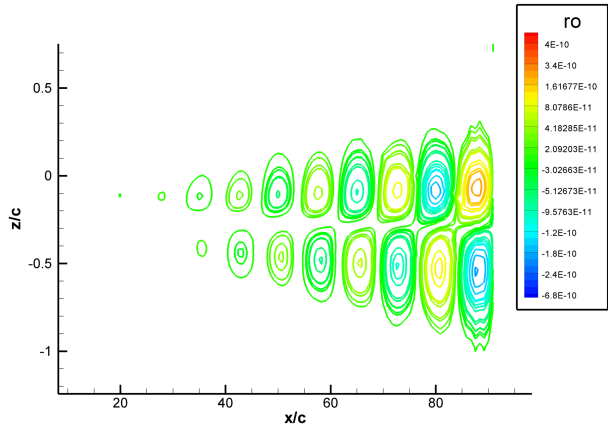
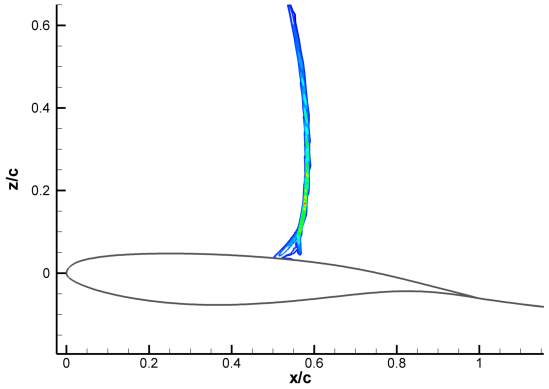


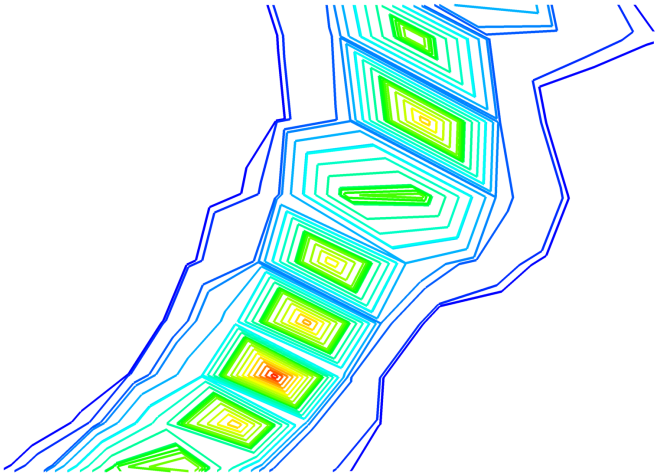
FIGURE 8.20 – *Spectre des Modes propres sans l'approximation "μ_t figé" autour de* $\sigma_0 = (0, Str)$ *pour le profil* $OAT15A$ *avec incidence* $\alpha = 3.5$ *et* $Re = 3.10^6$.



(a) $\widehat{\rho}$: sillage

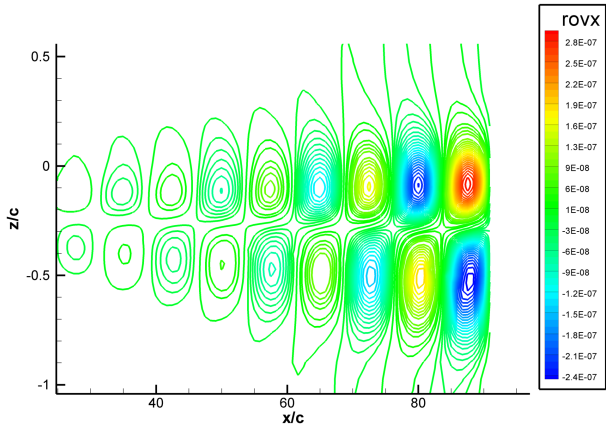


(b) $\widehat{\rho}$:vue globale du choc

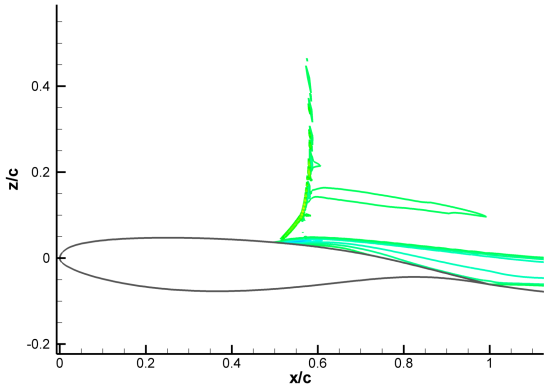


(c) $\widehat{\rho}$: vue partiel du choc

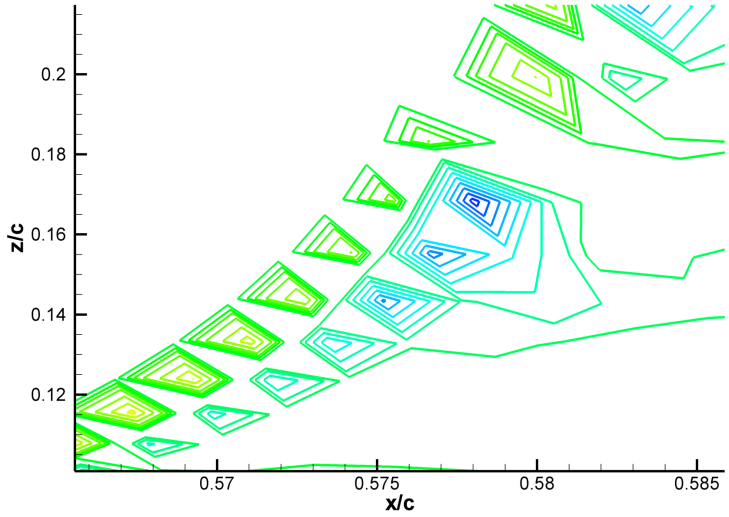
FIGURE 8.21 – *Approximation "μ_t figé" : Valeurs réelles des composantes de* $(\widehat{\rho})$ *associées à* $\sigma = (0.061144, 0.064749)$ *le mode propre le plus instable autour du profil* $OAT15A$*, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$.



(a) $\widehat{\rho u}$: sillage

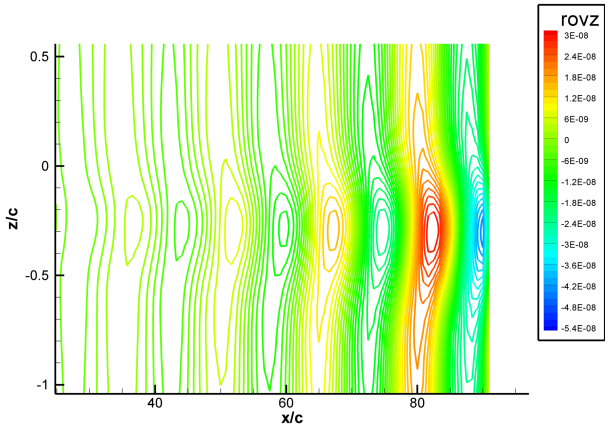


(b) $\widehat{\rho u}$:vue globale du choc

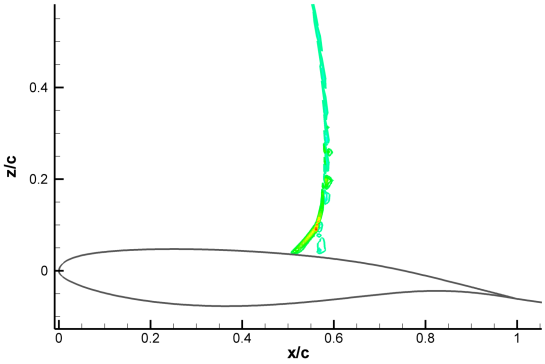


(c) $\widehat{\rho u}$: vue partiel du choc

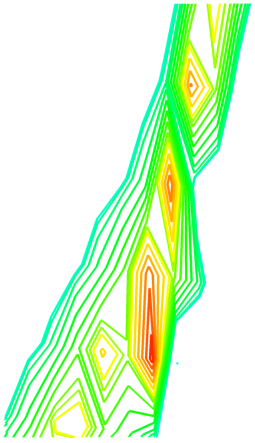
FIGURE 8.22 – *Approximation "μ_t figé" : Valeurs réelles des composantes de la vitesse* $(\widehat{\rho u})$ *associées à* $\sigma = (0.061144, 0.064749)$ *le mode propre le plus instabe autour du profil* $OAT15A$*, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$.



(a) $\widehat{\rho w}$: sillage

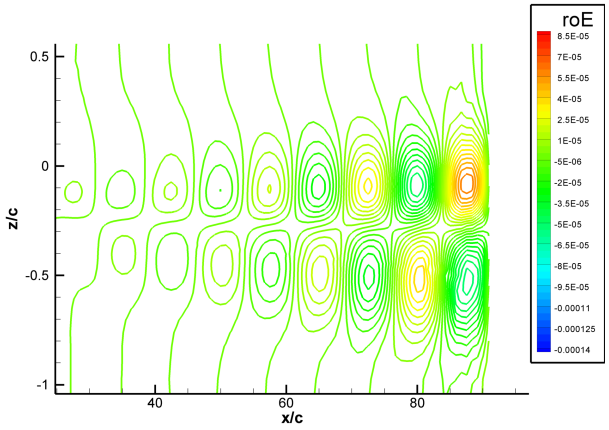


(b) $\widehat{\rho w}$:vue globale du choc

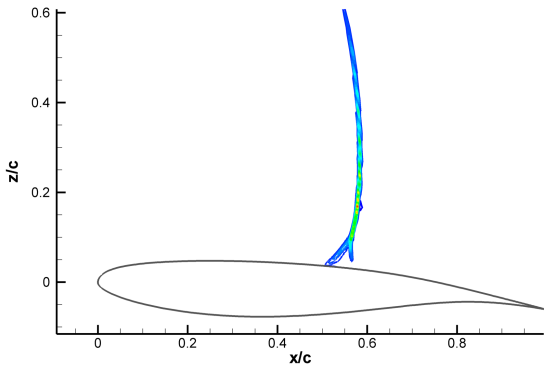


(c) $\widehat{\rho w}$: vue partiel du choc

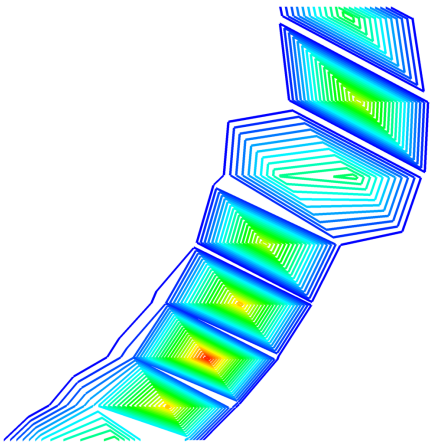
FIGURE 8.23 – *Approximation "μ_t figé" : Valeurs réelles des composantes de la vitesse longitudinale* ($\widehat{\rho w}$) *associées à* $\sigma = (0.061144, 0.064749)$ *le mode propre le plus instable autour du profil* $OAT15A$*, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$.



(a) $\widehat{\rho E}$: sillage

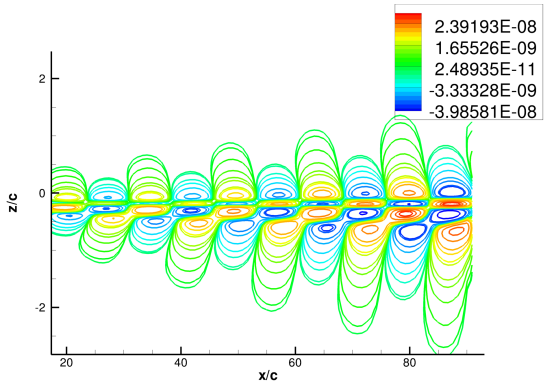


(b) $\widehat{\rho E}$:vue globale du choc

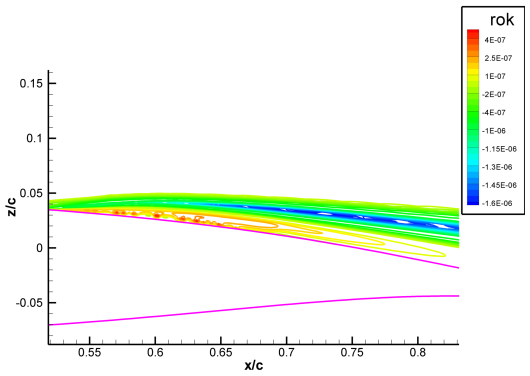


(c) $\widehat{\rho E}$: vue partiel du choc

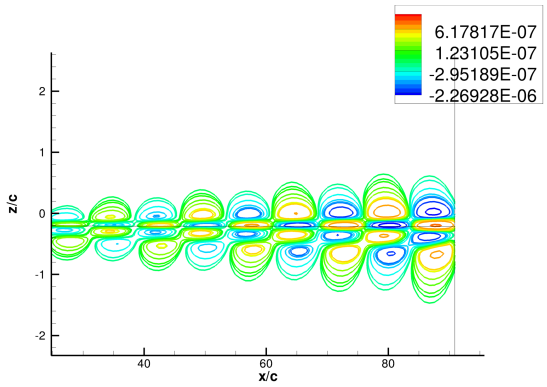
FIGURE 8.24 – *Approximation "μ_t figé" : Valeurs réelles des composantes de l'énergie* $(\widehat{\rho E})$ *associées à* $\sigma = (0.061144, 0.064749)$ *le mode propre le plus instable autour du profil* $OAT15A$*, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$.



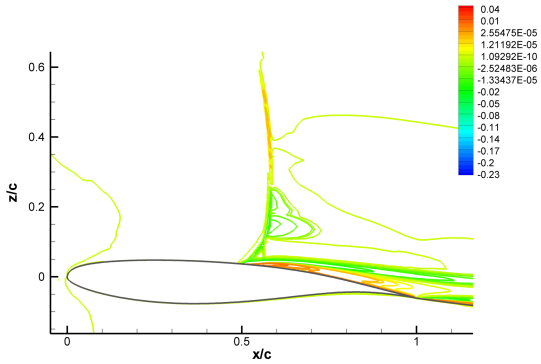
(a) $\widehat{\rho k}$: Sillage



(b) $\widehat{\rho k}$: paroi



(c) $\widehat{\rho\omega}$: Sillage



(d) $\widehat{\rho\omega}$: paroi

FIGURE 8.25 – *Sans l'approximation "μ_t figé" : Valeurs réelles des composantes turbulentes* $(\widehat{\rho k})$ *et* $(\widehat{\rho\omega})$ *associées à* $\sigma = (0.061144, 0.064749)$ *le mode propre le plus instable autour du profil OAT*15*A, avec* $M = 0.80$ *et* $Re = 3.10^6$.

Cinquième partie

Conclusion - Perspective

9 Conclusion - Perspective

Le travail effectué dans cette thèse est une contribution à l'étude de la dynamique des écoulements turbulents en régime transsonique. La dynamique de ces écoulements a été étudiée pour un régime compressible avec un modèle de turbulence $(k-\omega)$ de Wilcox. L'objectif de cette étude était de rechercher les modes instables responsables des instablitées dans les écoulements turbulents. Les différents chapitres de ce manuscrit ont apporté des éléments d'informations concernant la démarche suivie pour atteindre cet objectif. D'un côté, cette démarche consistait à analyser et mettre en oeuvre un code de calcul dans *elsA*, permettant d'obtenir explicitement la matrice jacobienne et de l'autre côté, à appliquer de la théorie de l'analyse de stabilité globale sur cette matrice.

Au cours de ce travail, un processus (figure (8.1)) d'obtention des modes globaux responsables des instabilités pour un écoulement transsonique soumis à un phénomène de tremblement sur une voilure, a été mis en oeuvre.
On distingue trois parties dans ce processus, il s'agit :

1. de trouver un modèle numérique pour simuler l'écoulement autour d'une voilure et calculer l'écoulement de base correspondant ;

2. de linéariser les équations de Navier-Stokes qui régissent le modèle et construire explicitement la matrice jacobienne correspondante ;

3. d'utiliser la théorie de l'analyse de stabilité globale sur le problème linéarisé, afin de d'obtenir le mode global ainsi que son vecteur propre associé.

Un résumé des principaux résultats obtenus au cours de chaque étape de ce travail est proposé.
La première partie de cette thèse a été dédiée à l'étude bibliographique du phénomène de tremblement. On a rappelé les résultats obtenus par Crouch [38], qui consistent à attribuer le phénomène de tremblement à l'extrados d'une voilure à la présence d'un mode global instable. La richesse des travaux expérimentaux et numériques ont formé une banque de données quantitatives et qualitatives, qui a servi à valider les choix des conditions aérodynamiques du modèle et des profils, retenue pour cette étude.
On a considéré l'approche linéarisée des équations de Navier-Stokes, cette approche linéaire permet d'utiliser les outils existants dans ce cadre. Ces derniers, sont puissants et fournissent un cadre mathématique rigoureux pour l'étude de la dynamique du système.
Il a fallu tout d'abord spécifier la formulation des équations de Navier-Stokes et leurs méthodes de résolution. Le chapitre 4 a fait l'objet de cela. A l'issue de celui-ci, un

modèle numérique permettant le calcul RANS ou URANS, d'un écoulement compressible turbulent autour d'une voilure, a été retenu. L'axe des spécifiés de ce modèle est l'utilisation d'un schéma de Roe à l'ordre 2 avec extension MUSCL et limiteur Van Leer-Albada, pour la discrétisation des flux convectifs. Comparé à d'autres modèles, dont la discrétisation s'appuie sur un schéma centré pour les flux convectifs, ce modèle devait être le mieux adapté, pour les méthodes de calcul de gradient au sein du logiciel *elsA* et il s'avère bien adapté pour gérer les discontinuités des oscillations du choc. Ceci représente une caractéristique importante pour l'utilisation de ce modèle dans le contexte du phénomène de tremblement.
Grâce à ce modèle numérique, dans le chapitre 5, on a utilisé ces outils pour effectuer des calculs RANS et URANS d'un écoulement transsonique soumis au phénomène de tremblement. Ces simulations ont été réalisées avec deux modèles de turbulences. Les oscillations du choc dûes au tremblement ont été mieux caractérisées par le modèle $(k-\omega)$ de Wilcox, que le modèle de Spalart-Allmaras. De plus, la linéarisation du modèle de turbulence de Spalart-Allamars n'était pas disponible dans le logiciel *elsA* ; pour ces raisons, ce modèle de turbulence n'a pas été retenu pour la suite de cette thèse.
Par ailleurs, le choix du maillage est très important pour bien mener les simulations. Dans le cadre de cette étude, le choix du maillage s'est porté sur le maillage de type C, dont on dispose le code analytique qui le génère. A partir de là, il devient possible d'envisager les développement des méthodes pour la linéarisation des équations afin d'obtenir la matrice jacobienne.
Pour cela, dans le chapitre 6, on a pensé à une technique qui permet d'extraire tous les éléments non nuls de la matrice jacobienne existante implicitement dans le logiciel *elsA*. Ce travail a été réalisé selon deux volets. Tout d'abord, on a implémenté au sein d'*elsA* dans le module *Opt*, les formulations nécessaires pour obtenir les valeurs des jacobiens pour toutes les cellules du domaine de calcul. Ensuite, avec un outil externe, on a rassemblé la matrice jacobienne. En ce qui concerne la construction des jacobiens, une attention particulière a été portée au traitement des conditions limites et raccord. Ces développements on été intégrés au code *elsA* dans la version 3.3. Une fois ces développements réalisés, une validation a été faite.
Le chapitre 7 propose une comparaison d'inversion de la matrice jacobienne afin de valider les développements. En effet, on a inversé cette matrice avec une méthode directe (MUMPS) et on a comparé le résultat obtenu avec celui obtenu par une méthode d'inversion itérative existante dans *elsA*. Cette comparaison a conduit à un résultat très satisfaisant, puisque la superposition des deux solutions est presque parfaite. Cette validation a fournit des preuves sur l'efficacité de l'outil numérique, ce qui a permis ensuite de se lancer dans la rechercher des spectres et vecteurs propres, en s'appuyant sur la théorie de l'analyse de stabilité.
La dernière partie, était consacrée aux calculs des modes et vecteurs propres. D'une part, on a étudié le cas d'un écoulement laminaire compressible, afin de valider notre démarche. On a trouvé le spectre des modes globaux et on a tracé le vecteur propre associé au mode le plus instable. On a constaté l'effet du maillage sur la capture des modes. D'autre part, l'étude d'un écoulement turbulent, a été effectué une fois avec l'approximation "μ_t *figé*" et une autre fois sans cette approximation. On a envisagé différents calculs en variant le nombre de Mach pour retrouver les champs moyens. A l'issue de ces simulations, on obtient les spectres et vecteurs propres correspondants. La capture des modes instables était plus large dans le cas où l'on tient compte de l'approximation "μ_t *figé*". Dans ARPACK, l'inversion de la matrice jacobienne est mieux convergente, en considérant l'approximation "μ_t *figé*". Les composantes du mode

le plus instable de chaque cas, ont été montré et on constate que la valeur Str du mode est assez comparable à celle trouvée par Crouch, dans une configuration semblable ; en plus les valeurs de ces composantes se situent au niveau du sillage et du choc.
Finalement, malgré que ces résultats ne soient pas assez significatives d'un point vue physique, la stratégie optée dans cette thèse pour capturer le mode instable, est bien réalisée avec succès.
Ce travail a donc permis de calculer les modes instables d'un écoulement compressible turbulent grâce à l'implémentation d'un module numérique au sein du logiciel *elsA*, en s'appuyant sur l'obtention explicite de la matrice jacobienne. Mais, il faut admettre qu'il reste encore plusieurs points à explorer et améliorer.

Plusieurs pistes peuvent être explorées pour améliorer l'efficacité de la stratégie, soit en optant pour d'autres méthodes de calcul pour trouver les champs de base turbulent, soit en utilisant d'autres modèles de turbulence, à condition qu'ils soient linéarisés dans *elsA*.On peut envisager un axe d'extension à cette étude, qui consiste à étudier un écoulement tridimensionnel. Cette extension prévoit un développement en $3D$ (ajout de la direction z), mais il faut prévoir les difficultés pour le calcul du champ de base et la dimension de la matrice jacobienne.
D'une manière générale, la continuité naturelle de cette étude, se repose sur la construction d'une boucle fermé pour un contrôle optimal et également les modèles réduits. On peut aussi l'appliquer à d'autre configurations : aérodynamique externe : cavité, marche descendante et aérodynamique interne : tuyère.

Sixième partie

Annexes

A Méthodes mathématiques

A.1 Algorithme de Newton

soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable sur I. On suppose que f admet un zéro isolé sur I (c-à-d $\exists\ x_\alpha, f(x_\alpha) = 0$ avec f strictement monotone sur I). Pour x_0 suffisamment proche de la solution x_α, la suite de réels construite de la manière suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} \tag{A.1}$$

converge de manière hyperexponentielle vers la solution x_α : en gros, le nombre de décimales double à chaque itération dans la limite de la précision de la machine.
Pour plus de renseignement, on pourra se référer à [52].

A.2 Principe de la détermination du pas de temps

La détermination du pas de temps nécessite l'analyse des schémas numériques utilisés pour la résolution des équations de conservations. L'analyse linéaire approchée des équations non linéaires de Navier-Stokes, utilise classiquement la méthode de Von Neumann. On considère séparément les opérateurs hyperboliques (non visqueux) et paraboliques (visqueux) des équations compressibles de Navier-Stokes instationnaires. Pour chacun des schémas résultent de la discrétisation des opérateurs convectif et diffusif, un critère reliant pas de temps local et pas d'espace définit la limite de stabilité du schéma, moyennant l'introduction d'un coefficient de sécurité.
Dans le cas pseudo-instationnaire, on cherche pour chaque schéma à obtenir la convergence vers l'état stationnaire le plus rapidement possible et pour cela, on peut utiliser un pas de temps local, c'est-à-dire différent d'une maille à l'autre. Le pas de temps local pour les équations de Navier-Stokes est alors calculé comme le minimum des deux pas de temps locaux associés aux opérateurs hyperbolique et parabolique. L'utilisation de ce pas de temps local permet souvent d'accélérer la convergence vers l'état stationnaire puisque pour chaque cellule, le pas de temps maximum autorisé est utilisé.
En instationnaire, on cherche un pas de temps global, valable pour tout l'écoulement. Le but est de minimiser le nombre de pas de temps, avec une contrainte supplémentaire la précision. En instationnaire explicite, on utilise un pas de temps global qu'on peut soit imposer, soit calculer en prenant le plus petit pas de temps local sur toutes les cellules du domaine de calcul [46].

A.3 Méthode d'Arnoldi

Dans le but de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de notre système, on utilise le code ARPACK basé sur la méhode dite "Implicitly Restarted Arnoldi Method". Vue la taille considérable des matrices, on est amené à utiliser la méthode itérative. En fait, on sait par la théorie de Galois (ou le théorème d'Abel) qu'il n'existe pas une formule explicite pour exprimer les racines d'un polynôme de degré ≥ 4 en fonction de ses coefficients. Cependant, pour chaque polynôme on peut construire une matrice, appelée matrice compagnon telle que ses valeurs propres coïncident avec les racines du polynôme. Dans ce cas, on appliquera la méthode itérative qui augmentera à chaque itération la précision du couple vecteur propre et valeur propre. La méhode la plus simple et la plus connue pour déterminer la valeur propre de plus grande amplitude et le vecteur propre associé est la méthode des puissances "Power méthode". Si l'on considère une matrice A donnée, on peut affirmer sans perdre de généralités que ses valeurs propres sont ordonnées comme $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ et que les vecteurs propres associés $x_1, x_2, \cdots, x_n$ forment une base de $\mathcal{C}^n$. Il vient que pour tout vecteur $v_0 \in \mathcal{C}^n$, il peut s'exprimer sous la forme :

$$v_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n. \tag{A.2}$$

Si on multiplie maintenant le vecteur par la matrice A, k-fois, on obtient :

$$\begin{aligned} A^k v_0 &= c_1 A^k x_1 + c_2 A^k x_2 + \cdots + c_n A^K x_n \\ &= c_1 \lambda_1^k x_1 + c_2 \lambda_2^k x_2 + \cdots + c_n \lambda_n^K x_n \\ &= \lambda_1^k (c_1 x_1 + c_2 (\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1})^k x_2 + \cdots + c_n (\tfrac{\lambda_n}{\lambda_1})^k x_n). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Si $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, on a alors

$$\lim_{k \to \infty} A^k v_0 = \alpha x_1 \tag{A.4}$$

et on peut donc utiliser le quotient de Rayleigh pour obtenir la valeur propre associée :

$$\lambda_1 = \frac{x_1^T A x_1}{x_1^T x_1}. \tag{A.5}$$

Il faut noter que si le rapport $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}$, la convergence sera par conséquent très lente. De plus, s'il n'existe pas de valeur propre dominante, la méthode pourra ne pas converger. A fin de trouver la valeur propre de plus petite magnitude, il suffit de suivre le même raisonnement que précédement mais cette fois-ci en l'appliquant à A^{-1}, l'inverse de la matrice A. En fait, si A^{-1} existe, on a

$$A^{-1}(A x_i) = A^{-1}(\lambda_i x) \quad \Rightarrow \quad A^{-1} x_i = \tfrac{1}{\lambda_i} x_i. \tag{A.6}$$

Si on considère maintenant la matrice $A - \sigma I$, on peut écrire

$$\begin{aligned} (A - \sigma I) x_i &= A x_i - \sigma x_i \\ &= (\lambda_i - \sigma) x_i \end{aligned} \tag{A.7}$$

En combinant la technique de décalage "shift" et celle de l'inversion, on peut chercher les valeurs propres les plus proches à n'importe quelle valeur donnée et ce en appliquant la méthode des puissances òu la matrice $(A - \sigma I)^{-1}$. Gràce à cette dernière matrice, on trouve le couple (λ', x). Ensuite, on applique la transformation $\lambda = \frac{1}{\lambda'} + \sigma$ pour obtenir enfin le couple (λ, x) recherche La méthode des puissances et ses variantes peuvent nous donner une information concernant seulement un seul couple de valeur propre et

vecteur propre. Cependant, si l'on veut obtenir simultanément plusieurs couples, il existe plusieurs techniques. Parmi ces techniques, citons la technique de déflation. Elle consiste en, une fois le couple (λ_1', x) est calculé, on applique une transformation qui porte la valeur propre λ_1' à l'intérieur du spectre afin de pouvoir calculer la seconde valeur propre de plus grande magnitude. On peut également réduire la matrice A sous la forme suivante

$$A = HAH = \begin{pmatrix} \lambda_1' & b^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{A.8}$$

où H est la matrice d'Householder telle que $Hx_1 = \alpha x_1$. Ensuite, on travaille sur la matrice A_2 qui a le même spectre que A à l'exception de la valeur propre λ_1'. Cependant, il est évident que par cette méthode, il n'est pas du tout efficace de trouver un seul couple à la fois. On peut alors appliquer la méthode des puissances à un ensemble de k vecteurs initiales : Si elle est traitée de façon indépendante, les itérations convergeront toutes aux mêmes valeurs. Si par contre on orthonormalise les k vecteurs à chaque itération, ils convergeront vers une base d'un sous-espace invariant de la matrice A correspondant aux k vecteurs propres dominants.

La méthode QR, est une technique qui permet de calculer toutes les valeurs/vecteurs propres d'une matrice. Elle consiste à faire une suite de transformations similaires $A_{i+1} = Q^T A_i Q$, òu Q est une matrice orthonormale et telle que à chaque itération, les éléments sous-diagonaux sont de plus en plus petits jusqu'à ce qu'ils deviennent négligeables et sur la diagonale de la matrice, on trouve les valeurs propres recherchées. La méthode consiste d'abord à effectuer une factorisation QR de la matrice $A_i = Q^i R^i$ et poser $A_{i+1} = R^i Q^i$. Chaque itération nécessite $\sim n^3$ opérations. Si on veut obtenir une forme plus efficace, on transforme d'abord A sous la forme d'Hessenberg avec un coût $\sim n^3$ opérations, puis on applique la méthode QR à cette dernière matrice avec un cot cette fois-ci de l'ordre de n^2. Il existe aussi d'autres versions avec shift pour la méthode QR qui permettent d'augmenter la vitesse de convergence et qui restent efficaces aussi quand les valeurs propres sont *clustered*. Dans la méthode QR, on remarque plusieurs inconvénients. En effet, elle ne conserve pas la nature de la matrice. Plus particuliérement, elle transforme une matrice creuse en une matrice dense. De plus, elle n'est pas efficace pour calculer seulement un certain nombre de valeurs propres mais pas en leur totalité.

On définit le sous-espace suivant, appelé k^{th} sous-espace de Krylov de A et v_0 :

$$\mathcal{K}_k(A, v_0) = Span(v_0, A^2 v_0, \cdots, A^{k-1} v_0) \tag{A.9}$$

et on cherche à construire des valeurs propres approchées dans ce sous-espace. On définit alors le couple de Ritz (λ, x) si il satisfait la condition suivante de Galerkin :

$$v^T(Ax_i - \lambda_i x_i) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}_k(A, v_0). \tag{A.10}$$

On demande au couple de Ritz de satisfaire la relation valeur propre-vecteur propre uniquement dans un sous-espace et on espère que sa composante orthogonale à ce sous-espace soit suffisamment petite pour que le couple soit une bonne approximation de la valeur propre. On est maintenant en mesure de définir la factorisation d'Arnoldi comme suit :

$$AV = VH + fe_k^T, \tag{A.11}$$

où $V \in \mathcal{C}^{n\times n}$ colonnes orthonormales, $V^H f = 0$ et H est une matrice d'Hessemberg. Si on considére le couple (y, θ) de H et on pose $x = Vy$, on trouve la relation :

$$\begin{array}{rcl} \|Ax - \theta x\| & = & \|AVy - Vy\theta\| \\ & = & \|(AV - VH)y\| \\ & = & \|fe_k^T y\| \\ & = & \beta\|e_k^T y\|, \end{array} \tag{A.12}$$

où $\beta = \|f\|$. En rappelant que $Vf = 0$, on déduit facilement que (θ, x) est le couple valeur propre-vecteur propre de **Ritz** de la matrice A. L'idée générale de la méthode est de calculer ces valeurs à partir de la matrice H, de dimension $K \ll n$, avec des techniques qu'on applique conventionnellement à une matrice dense. Ensuite, on cherche à faire converger la valeur $\|e_k^T y\| \to 0$, pour que le couple de Ritz (x, θ) soit une bonne approximation des valeurs propres de A. Contrairement au "power" méthode, la factorisation d'Arnoldi dépend du choix des vecteurs initiales v_0. En général, la convergence est d'autant plus rapide que le vecteur est plus riche dans l'espace construit par les vecteurs propres recherchés. En fait, on dispose d'une technique qui nous permet de réaliser ceci sans devoir recommencer la factorisation. Cette technique est connue sous le nom de "Implicitly restarted Arnoldi method" et elle est expliquée par exemple dans [58]. En résumé, si on veut appliquer un shift d'ordre p, on écrit la factorisation $(H - \sigma_i I) = Q_i R_i$ et on définit $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_p$. D alors, On peut se ramener au système :

$$AV_+ = V_+ H_+ + fe_k^T Q \tag{A.13}$$

qui a la même structure que la factorisation d'Arnoldi. Cette méthode à l'avantage d'avoir les colonnes de V_+ sous la forme $(A - \sigma_i I)v_i$ où v_i est la i-ème colonne de V. Dans le but de choisir un shift convenable, on utilise la méthode "Exact Shift Strategy" qui consiste à choisir comme shift la valeur propre de la matrice H_{k+p} la plus éloigné des valeurs propres recherchées. Si l'on veut augmenter la vitesse de convergence, on utilise la technique de l'accélération polynômiale décrite comme suit : On considére le polynôme matriciel suivant :

$$P = p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I. \tag{A.14}$$

On rappelle que les valeurs propres de A^k sont $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$ et les vecteurs propres sont les mêmes que ceux de A. On a alors

$$\begin{array}{rcl} Px_i & = & p(A)x_i \\ & = & a_n A^n x_i + a_{n-1} A^{n-1} x_i + \cdots + a_1 A x_i + a_0 x_i \\ & = & a_n \lambda_i^n x_i + a_{n-1} \lambda_i^{n-1} x_i + \cdots + a_1 \lambda_i x_i + a_0 x_i \\ & = & p(\lambda_i)x_i. \end{array} \tag{A.15}$$

Ce qui nous permet d'affirmer que les valeurs propres de $p(A)$ sont $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \cdots, p(\lambda_n)$ et les vecteurs propres sont encore les mêmes que ceux de A. Si on veut chercher des valeurs propres dans un certain intervalle $\mathcal{S}$, on peut prendre des polynmes qui prennent des valeurs très élevées dans cette intervalle et petites ailleurs. En appliquant la méthode d'Arnoldi à $P = p(A)$, on se raméne aux vraies valeurs propres via le quotient de Rayleigh. Parmi ces polynômes, on peut citer les célèbres polynômes de Chebyshef qui ont la particularité de module ≤ 1 dans l'intervalle $[-1, 1]$ et croître très rapidement à l'extérieur. On peut donc les utiliser pour mettre en évidence la zone recherchée par rapport à celle qui ne nous intéresse pas. De plus, elle nous permet de bien séparer les valeurs propres dans la zone recherchée.

Le problème aux valeurs propres généralisées $AX = \lambda Bx$ peut être approchée d'une façon très similaire aux cas que l'on vienne de traiter : si B est inversible, les méthodes de "shift" et "inverted method" consistent écrire

$$\begin{array}{c} Ax = \lambda Bx \\ (A - \sigma B)x = Ax - \sigma Bx = (\lambda - \sigma)Bx \\ B^{-1}(A - \sigma B)x = (\lambda - \sigma)x \\ (A - \sigma B)^{-1}Bx = \frac{1}{\lambda - \sigma}x. \end{array} \tag{A.16}$$

Il suffit alors d'appliquer la méthode d'Arnoldi à la matrice $C = (A - \sigma B)^{-1}B$ et retrouver ensuite les valeurs propres en appliquant la transformation standard $\lambda = \frac{1}{\lambda'} + \sigma$. Notons qu'en vérité la matrice C n'est jamais calculée explicitement car on a seulement besoin du produit $y = Cx$. Ce dernier produit peut être obtenu à partir de la factorisation $(A - \sigma B) = LU$ qui nous donne $u = Bx$. En résolvant le système linéaire $Ld = u$ puis $Uy = d$, on obtient le vecteur y.

A.4 Condition de convergence de l'algorithme itératif

On rappelle que l'algorithme de Newton pour la résolution d'une équation de type :

$$f(x) = 0, \tag{A.17}$$

avec f une fonction numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur un bon intervalle s'écrit :

$$f'(x^n)(x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -f(x^{(n)}). \tag{A.18}$$

A représente la matrice dans le système linéaire $AX = B$, X est l'inconnu et B un vecteur donné. Par analogie avec le cas scalaire, on peut écrire ce système sous cette forme :

$$\mathrm{F}(X) = 0 \text{ avec } \mathrm{F}(X) = AX + B \tag{A.19}$$

F étant alors une fonction à valeur vectorielle. On approche la différentielle de F par une approximation de A. On obtient la méthode de type Newton :

$$A^{(app)}\left((X)^{(l+1)} - (X)^{(l)}\right) = -\left(A^{(exa)}(X)^{(l)} + B\right). \tag{A.20}$$

À chaque pas de l'algorithme itératif l, on définit un système linéaire différent, mais on conserve la même matrice. Ce système est résolu en effectuant des pas de relaxation LU. On se restreint ici au cas d'un problème bidimensionnel. La matrice $A^{(app)}$ est creuse et pentadiagonale. On la décompose sous cette forme :

$$A^{(app)} = D + L + U \tag{A.21}$$

avec

$$\begin{array}{c} D \text{ matrice diagonale par bloc,} \\ U \text{ matrice triangulaire supérieure par blocs (correspond aux termes d'indices } (i+1,j) \text{ et } (i,j+1)), \\ L \text{ matrice triangulaire inférieur par blocs (correspond aux termes d'indices } (i-1,j) \text{ et } (i,j-1)). \end{array} \tag{A.22}$$

Pour résoudre le système (A.20) que l'on écrit d'une manière plus simple :

$$A^{(app)}X = B, \tag{A.23}$$

on effectue un nombre fini de cycle de type :

$$\begin{array}{c}(D+U)X^{(0)} = B\ ,\\ (D+L)X^{(1)} = B - UX^{(0)},\\ (D+U)X^{(2)} = B - LX^{(1)},\\ (D+L)X^{(3)} = B - UX^{(2)}.\end{array} \tag{A.24}$$

Dans cet exemple, c'est un cycle de quatre pas de relaxation.
On peut écrire :

$$\begin{array}{c}(D+L)X^{(n)} = B - UX^{(n-1)},\\ (D+U)X^{(n+1)} = B - LX^{(n)},\\ (D+L)X^{(n+2)} = B - UX^{(n+1)}.\end{array} \tag{A.25}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{c}\left(X^{(n+1)} - X^{(n-1)}\right) = -(D+U)^{-1}L(X^{(n)} - X^{(n-2)}),\\ \left(X^{(n+2)} - X^{(n)}\right) = -(D+L)^{-1}U(X^{(n+1)} - X^{(n-1)}).\end{array} \tag{A.26}$$

Soit

$$\left(X^{(n+2)} - X^{(n)}\right) = (D+L)^{-1}U(D+U)^{-1}L(X^{(n)} - X^{(n-2)}), \tag{A.27}$$

et

$$\left(X^{(n+1)} - X^{(n-1)}\right) = (D+U)^{-1}L(D+L)^{-1}U(X^{(n-1)} - X^{(n-3)}). \tag{A.28}$$

On obtient ainsi deux suites $\left(X^{(2p)}\right)$ et $\left(X^{(2p+1)}\right)$ qui sont des suites de Cauchy sous les conditions :

$$\parallel (D+L)^{-1}U(D+U)^{-1}L \parallel_\infty < 1 \text{ et } \parallel (D+U)^{-1}L(D+L)^{-1}U \parallel_\infty < 1. \tag{A.29}$$

Ces suites sont alors convergentes sous ces mêmes hypothèses. On pose l_1 et l_2 leurs limites respectives. On a alors :

$$(D+U)l_1 = B - Ll_2, \tag{A.30}$$

et

$$(D+L)l_2 = B - Ul_1. \tag{A.31}$$

On obtient ainsi, en soustrayant membre à membre, $l_1 = l_2$ sous l'hypothèse que D soit inversible.

B Dérivation du terme de production

B.1 Calcul de Φ

L'expression du coefficient de viscosité moléculaire μ_t est calculé par la loi de *Sutherland* :

$$\mu = \frac{\beta_s \sqrt{T}}{1 + \frac{C_s}{T}} \tag{B.1}$$

avec β_s et C_s sont deux constantes qui dépendent de la nature du gaz.
La viscosité μ dépend de la température T, sachant que T s'écrit :

$$T = \frac{\gamma - 1}{r_{gaz}} e = \frac{\gamma - 1}{r_{gaz}} \left(E - \frac{1}{2} U^2 \right) \tag{B.2}$$

D'après la loi des gaz parfaits :

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{r_{gaz} T}{\gamma - 1} \tag{B.3}$$

On a :

$$\Phi = \frac{\partial \mu_t}{\partial \rho E} = \frac{\partial \mu_t}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \rho E}.$$

Or,

$$\frac{\partial \mu}{\partial \rho E} = \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \rho E} = \frac{\mu}{\rho e} \left(\frac{1}{2} + \frac{C_s}{T + C_s} \right).$$

Donc

$$\Phi = \frac{\mu_t}{\mu} \left(\frac{\mu}{\rho e} \left(\frac{1}{2} + \frac{C_s}{T + C_s} \right) \right).$$

B.2 Calcul des dérivées de la production

[56] On pose :

$$\sigma_{11} = \mu_t \left(2u_{,x} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{U})\right) - \frac{2}{3}\rho k, \tag{B.4}$$

$$\sigma_{22} = \mu_t \left(2v_{,y} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{U})\right) - \frac{2}{3}\rho k, \tag{B.5}$$

$$\sigma_{33} = \mu_t \left(2w_{,z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{U})\right) - \frac{2}{3}\rho k, \tag{B.6}$$

$$\sigma_{12} = \mu_t \left(u_{,y} + v_{,x}\right), \tag{B.7}$$

$$\sigma_{13} = \mu_t \left(u_{,z} + w_{,x}\right), \tag{B.8}$$

$$\sigma_{23} = \mu_t \left(v_{,z} + w_{,y}\right), \tag{B.9}$$

on a alors :

$$\mathbf{P} = \mu_t \left(2u_{,x}^2 + 2v_{,y}^2 + 2w_{,z}^2 - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{U})^2 + (u_{,y} + v_{,x})^2 + (u_{,z} + w_{,x})^2 + (v_{,z} + w_{,y})^2\right) - \frac{2}{3}\rho k(\nabla \cdot \mathbf{U}) \tag{B.10}$$

$$= \mu_t \left(\nabla\mathbf{U} \cdot \nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U} \cdot \nabla\mathbf{U}^t - \frac{2}{3}(\nabla\mathbf{U})^2\right) - \frac{2}{3}\rho k(\nabla \cdot \mathbf{U}). \tag{B.11}$$

Pour le terme $Prod_6$, on note $\mathbf{W}_5 = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^t$, on a directement :

$$\frac{\partial Prod_6}{\partial \mu_t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t} = \nabla\mathbf{U} \cdot \nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U} \cdot \nabla\mathbf{U}^t - \frac{2}{3}(\nabla\mathbf{U})^2, \tag{B.12}$$

$$\left(\frac{\partial Prod_6}{\partial \mathbf{W}_5}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{W}_5}\right) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t}\frac{\partial \mu_t}{\partial \mathbf{W}_5}, \tag{B.13}$$

$$\frac{\partial Prod_6}{\partial \rho k} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho k} = -\frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{U}) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t}\frac{\partial \mu_t}{\partial \rho k} \tag{B.14}$$

$$\frac{\partial Prod_6}{\partial \rho \omega} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \rho \omega} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu_t}\frac{\partial \mu_t}{\partial \rho \omega}. \tag{B.15}$$

Pour les cellules adjacentes $(i+1, j)$, $(i-1, j)$, $(i, j+1)$ et $(i, j-1)$, on a :

$$\frac{\partial Prod_6}{\partial u_{cell}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u_{cell}} = \frac{(\sigma_{11} + \frac{\rho k}{3})\mathcal{S}^x_{cell/2} + \sigma_{12}\mathcal{S}^y_{cell/2} + \sigma_{13}\mathcal{S}^z_{cell/2}}{\mathcal{V}},$$

$$\frac{\partial Prod_6}{\partial v_{cell}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v_{cell}} = \frac{(\sigma_{22} + \frac{\rho k}{3})\mathcal{S}^y_{cell/2} + \sigma_{12}\mathcal{S}^x_{cell/2} + \sigma_{23}\mathcal{S}^z_{cell/2}}{\mathcal{V}},$$

$$\frac{\partial Prod_6}{\partial w_{cell}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial w_{cell}} = \frac{(\sigma_{33} + \frac{\rho k}{3})\mathcal{S}^z_{cell/2} + \sigma_{13}\mathcal{S}^z_{cell/2} + \sigma_{23}\mathcal{S}^y_{cell/2}}{\mathcal{V}},$$

sachant que pour $cell = (i+1, j)$ alors $\mathcal{S}^x_{cell/2} = \mathcal{S}^x_{i+\frac{1}{2},j}$. Alors, on a :

$$\frac{\partial Prod_6}{\partial \mathbf{W}_5} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\mathbf{W}_5} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho_{cell}}\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{u_{cell}}u_{cell} + \frac{\partial \mathbf{P}}{v_{cell}}v_{cell} + \frac{\partial \mathbf{P}}{w_{cell}}w_{cell}\right) \\ \frac{1}{\rho_{cell}}\frac{\partial \mathbf{P}}{u_{cell}}u_{cell} \\ \frac{1}{\rho_{cell}}\frac{\partial \mathbf{P}}{v_{cell}}v_{cell} \\ \frac{1}{\rho_{cell}}\frac{\partial \mathbf{P}}{w_{cell}}w_{cell} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{B.16}$$

Pour le terme de $Prod_7$, on a directement :

$$\frac{\partial Prod_7}{\partial \mathbf{W}_5} = \gamma \frac{\omega}{k} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{W}_5}, \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Prod_7}{\partial \rho k} &= \frac{\partial Prod_7}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \rho k} = \frac{\gamma}{k} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu} - \frac{1}{\mu} \right), \\ \frac{\partial Prod_7}{\partial \rho \omega} &= \frac{\partial Prod_7}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \rho \omega} = -\frac{\gamma}{\omega} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mu} - \frac{1}{\mu} \right). \end{aligned} \tag{B.18}$$

et pour $cell \in \{(i+1,j),(i-1,j),(i,j+1),(i,j-1)\}$, on a :

$$\frac{\partial Prod_7}{\partial \mathbf{W}_5} = \gamma \frac{\omega}{k} \frac{\partial \mathbf{P}}{\mathbf{W}_5} = \gamma \frac{\omega}{k} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho_{cell}} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{u_{cell}} u_{cell} + \frac{\partial \mathbf{P}}{v_{cell}} v_{cell} + \frac{\partial \mathbf{P}}{w_{cell}} w_{cell} \right) \\ \frac{1}{\rho_{cell}} \frac{\partial \mathbf{P}}{u_{cell}} u_{cell} \\ \frac{1}{\rho_{cell}} \frac{\partial \mathbf{P}}{v_{cell}} v_{cell} \\ \frac{1}{\rho_{cell}} \frac{\partial \mathbf{P}}{w_{cell}} w_{cell} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{B.19}$$

Bibliographie

[1] M. Mallet M.Ravachol et B. Stoufflet A. Dervieux, G. Vigo. Extension of methods based on the proper orthogonal decomposition to the simulation of unsteady compressible Navier-Stokes flows. In *Proc. of the Fourth ECCOMAS, Conf. 648-653.* Computational Fluid Dynamics 98, 1998.

[2] W. Schmidt et E. Turkel A. Jameson. Numerical solutions of the Euler equations by the finite volume method using Runge Kutta time-stepping schemes. *AIAA Paper*, 1259, 1983.

[3] D. Alfano. *Simulation numérique du tremblement transsonique et optimisation de forme* . PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Art et métiers., 2007.

[4] D. Barkley and R.D. Henderson. Three dimentional Floquet Analysis of the Wake of a Circular cylinder. *J.Fluid.Mech*, 322 :215–241, 1996.

[5] V. Brunet. Computational study of buffet phenomenon with unsteady RANS equations. In *in* 21*st AIAA applied Aerodynamics Conference.* AIAA, 2003.

[6] S. Candel. *Mécaniques des fluides ; cours.* DUNOD, 1995.

[7] B. Caruelle. *Simulation d'écoulements instationnaires turbulents en aérodynamique : application à la prédiction du phénomène de tremblement.* PhD thesis, Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse., 2000.

[8] Chassaing. Turbulence en mécanique des fluides : Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur. CEPADUES-Editions, 2000.

[9] Collercandy.R. An improved approach for the computation of transonis/supersonic flows with applications to aerospace configurations. In *in* 10*th AIAA applied Aerodynamics Conference.* AIAA, 1992.

[10] M.G. Gomes D. Barkley and R.D. Henderson. Three dimentional Instability in Flow Over a Backward-Facing Step. *J.Fluid.Mech*, 473 :167–190, 2002.

[11] S. Deck. Detached-eddy simulation of transonic buffet over a supercritical airfoil. In *in* 22*nd AIAA applied Aerodynamics Conference.* AIAA, 2004.

[12] S. Deck. Numerical simulation of transonic buffet over supercritical airfoil. *AIAA Journal*, 43 :1556–1566, 2005.

[13] J. Delery. *Traité d'aérodynamique compressible ; cours.* DUNOD, 2000.

[14] S. Yoon et A. Jameson. Lower-upper symmetric Gauss-Seidel method for the Euler and Navier-Stokes equations. *AIAA journal*, 9 :26, 1988.

[15] J.B. Mc Devitt et A.F. Okuno. Static and dynamic pressure measurments on a $NACA0012$ airfoil at ames high reynolds number facility . Technical report, NASA, technical paper 2485, 1985.

[16] W.P. Jones et B.E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *AIAA Paper*, 92 :0439, 1992.

[17] B.E. Launder et B.I.Sharma. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a sprinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1 :131–138, 1974.

[18] J. Peter et F. Drullion. Large stencil viscous flux linearization for the simulation of 3D compressible turbulent flows with backward-Euler schemes. *Computer and Fluids*, 36 :1005–1027, 2006.

[19] W. R. Briley et H. McDonald. An overview and generalization of implicit Navier-Stokes algorithms and approximate factorization. *Computers and Fluids*, 30 :807, 2001.

[20] B.S. Baldwin et H.Lomax. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA Paper*, 14 :78–257, 1978.

[21] J. Delery et J.G. Marvin. Shock-wave boundary layer interactions . Technical report, NATO,Rapport Technique AGARDograph N.280, 1986.

[22] A. Harten et J.M. Hyman. Self-adjusting grid methods for one-dimentional hyperbolic conservation laws. *Journal of computational Physics*, 50 :235–269, 1983.

[23] L. Jacquin et P. Molton. Étude de l'écoulement instationnaire autour du profil transsonique OAT15A . Technical report, Rapport Technique 187/05626, ONERA DAAP/DAFE, 2003, Avril.

[24] R. R. Beam et R.F. Warming. An implicit factored finite difference algorithm for hyperbolic systems in conservative law form. *Journal of Computational Physics*, 22 :87–109, 1976.

[25] P.R. Spalart et S.R. Allmaras. One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. *AIAA Paper*, 92 :0439, 1992.

[26] Th. Féraille. *Instabilités de l'écoulement interne des moteurs à propergol solide*. PhD thesis, SUPAERO de Toulouse., Octobre 2004.

[27] F. Furlano. *Comportement de modèle de turbulence pour les écoulements décollés en entrée de tremblement*. PhD thesis, Doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace., 2001.

[28] B. Van Leer et W.W. Roberts G.D. Van Albada. A Comparative Study of computational Methods in cosmic Gas Dynamics. *Astronomy and Astrophysics*, 108 : 76–84, 1982.

[29] C.F Van Loan G.H Glob. Matrix Computations (third edition). Technical report, The Johns Hopkins University Press, 1996.

[30] G.Meurant. Computer solution of large linear systems. Elsevier, 1999.

[31] E. Goncalvés. Introduction aux systèmes dynamiques et chaos. . Technical report, Institut National Polytechnique de Grenoble, Avril 2004.

[32] et D.M. Sykes H.Pearcey, K. Rao. The interaction between local effect at the shock and rear separation - a source of a significant scale effects in wind-tunnel tests on airfoils and wings . Technical report, AGARD, Rapport Technique CP35, 1968.

[33] R. Michel et C. Quémard J. Cousteix. Application d'un schéma amélioré de longueur de mélange à l'étude des couches limites turbulentes tridimentionnelles . Technical report, TP 985 ,AGARD, 1971.

[34] J. Peter. Discret adjoint in *elsA* part 1 : Method/theory. In *ONERA-DLR Aerospace symposium, Toulouse*, Oct 2006.

[35] F. Marques J. Sanchez and J.M. Lopez. A continuation and bifurcation technique for navier-stokes flows. *J. Comput.Phys.*, 180(1) :78–98, 2002.

[36] C.P. Jackson. A finite element Study of thr Onset of Vortex shedding in flow Past Variously Shaped Bodies. *J.Fluid .Mech*, 182 :23–45, 1987.

[37] J.C.Robinet. *Cours d'aérodynamique fondamentale.* ENSAM, Sinumef, 2007-2009.

[38] D.Magidov J.D. Crouch, A.Garbaruk. Predicting the onset of flow unsteadiness based on global instability. *Journal of Computational Physics*, 224 :924 – 940, 2007.

[39] J.D. Crouch, A. Garbaruk et V. Magidov. Predicting the onset of flow unsteadiness using global-stability theory. In *in 3rd Symposium in Global Flow Instablility and Control*, Crete 2006.

[40] P. Dupont et J.F.Debieve J.P. Dussauge. Unsteadiness in shock-wave boundary-layer interactions with separation. *Aerospace Science and Technology*, 10 :85–91, 2006.

[41] J.C. Kok. Resolving the Dependance on Freestream Values for the $k-\omega$ Turbulence Model. *AIAA Journal*, 38 :1292–1295, 2000.

[42] S. Deck B. Maury et D. Soulevant L. Jacquin, P. Molton. An experimental study of shock oscillation over a transonic supercritical profile. In *Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Toronto, Ontario, Canada.* AIAA, 2005, June 6-9.

[43] B.H.K. Lee. Self-sustained shock oscillations on airfoils at transonic speeds. *Progress in Aerospace Sciences*, 37 :147–196, 2001.

[44] B. Van Leer. Towards the Ultimate Conservative difference Scheme. *Journal of computational Physics*, 32 :101–136, 1979.

[45] R.S. Lin and M.R. Malik. On the stability of attachment-Line Boundary Layers. Part1. The incompressible Swept Hiemenz Flow. *J.Fluid Mech*, 311 :239–255, 1996.

[46] S.Heib M. Lazareff, L.Cambier. *Theoretical Manual* elsA. ONERA/ DSNA, 2010.

[47] M. Marquilie. *Simulation numérique et étude de la stabilité d'un écoulement d'une couche limite décollée* . PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis., 2003.

[48] P. Meliga. *A theoretical approach for the onset and control of unsteadiness in compressible afterbody flows* . PhD thesis, Doctorat de Polytechnique ., 2008.

[49] F.R. Menter. Improved two Equation $k-\omega$ turbulence Models for Aerodynamic Flows . Technical report, NASA, TM-10375, 1992.

[50] F.R. Menter. Zonal two Equation $k-\omega$ turbulence Models for Aerodynamic Flows. Technical report, AIAA, paper, 1993.

[51] X. Merle. *Résolution des équations de stabilité globale en régime incompressible et compressible avec une méthode aux différences finis avec haute précision.* PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et métiers., 2009.

[52] D. Monasse. *Mathématiques. Cours complet.* Vuibert, 1998.

[53] ; J.C. Le-Balleur P. Girodroux-Lavigne. Time-consistent computation of transonic buffet over airfoils. In *in 16th congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS), Jerusalem*, 1988.

[54] M. Rossi P. Huerre. Hydrodynamic Instablities in Open Flows, Hydrodynamics and nolinear Instablities . *Cambridge University Press*, 1 :81–294, 1998.

[55] S.V. Patankar. *Numerical Heat transfer and fluid flow.* HemispherePublishing Corporation, 1980.

[56] C-T. Pham. *Linéarisation du flux visqueux des équations de Navier-Stokes et de modèle de turbulence pour l'optimisation aérodynamique en turbomachines.* PhD thesis, Doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et métiers., 2006.

[57] C. Quémard et R. Durant R. Michel. Application d'un schéma de longueur de mélange à l'étude des couches limites turbulentes d'équilibre. Technical report, ONERA, note technique 154, 1969.

[58] R. Radke. *A matlab implementation of the implicitly restarded method for solving large scale eigenvalue problems* . PhD thesis, Master Thesis of Rice University., 1996.

[59] D.C. Sorensen et C. Yang R.B. Lehoucq. *ARPACK Users' Guide :Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods.* October 1997.

[60] et E. Turkel R.C. Swanson. On central-difference and upwind schemes. . *Journal of Compute Physic*, 101 :292–306, 1992.

[61] N. Reau and A. Tumin. On harmonic perturbations in a turbulent mixing layer. *J. Fluid.Mech.*, 21 :143–155, 2002.

[62] O. Reberga. *Etude expérimentale et numérique du phénomène de tremblement sur profil d'aile et de son contrôle en écoulement transsonique avec onde de choc,* . PhD thesis, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de l' Aéronautique et de l'Espace, 2000.

[63] T. Renaud. *Simulation numérique du tremblement autour de profils d'ailes en régime transsonique.* PhD thesis, Doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et métiers., 2001.

[64] J.C. Robinet. Bifurcations in shock wave/laminar boundary layer interaction : Global instability approach. *J. Fluid Mech.*, 578 :67–94, 2007.

[65] C. Robitaillié-Montané. *Une approche non locale pour l'étude des instabilités linéaires. Application à l'écoulement de couche limite compressible le long d'une ligne de partage.* PhD thesis, Doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace ., 2005.

[66] C. Robitaillie-Montané. *Une approche non locale pour l'étude des instabilités linéaires. Applications à l'écoulement de couche limite compressible le long d'une ligne de partage.* PhD thesis, SUPAERO de Toulouse., 2005.

[67] P.L. Roe. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes. *Journal of Computational Physics*, 43 :357–372, 1981.

[68] R.K. Cooper R.D. Mitchell et J.S. Cole S. Raghunathan, M.A. Gillan. Shock oscillations on biconvex airfoils. *Aerospace Science and Technology*, 1 :1–9, 1999.

[69] P. Sagaut. *Large eddy Simulation for incompressible flows : an intoduction.* Springer, 2005.

[70] Schiestel. *Les écoulements turbulents, modélisation et simulation.* Hermés, Science publications, 1998.

[71] S.Deck. Simulation numérique de type URANS/LES des instabilités aérodynamiques de profils en régime transsonique . Technical report, Rapport Technique 201/07381, ONERA/DAAP, 2003.

[72] Sipp.D and A Lebedev. global Stability of Base Ans Mean flows : A General Approach and its Application in cylinder and open Cavity Flows. *J.Fluid.Mech*, 593 : 333–358, 2007.

[73] site web : http ://graal.ens lyon.fr/MUMPS/. MUltifrontal Massively Parallel Solver. 209.

[74] T. Yoshimura T. Tatsumi. Stability of the laminar flow in a rectangulat duct. *J.Fluid.Mech*, 212 :437–449, 1990.

[75] T.A.Davis. Direct methods for sparse linear systems. SIAM, 2006.

[76] C.K.W. Tam and P.J. Morris. The radiation of sound by the instability waves of a compressible plane turbulent shear layer. *J. Fluid.Mech.*, 98 :349–381, 1980.

[77] V. Theofilis. Advances in global Linear Instability Analysis of Non-parallel and Three-Dimensional Flows,. *Progress Aerospace .Sciences*, 39 :249–315, 2003.

[78] V. Theofilis. Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 39 :249 315, 2005.

[79] V. Theofilis and T. T Colonius. Three-dimensional instabilities of compressible flow over open cavities : direct solution of the biglobal eigenvalue problem. In 34*th Fluid Dynamics Conference and Exhibit.* AIAA Paper 2004-2544, United States of America, June 28/July 1 2004. Portland/Oregon.

[80] J. Tijdeman. Investigations of the transonic flow around oscillating airfoils . Technical report, NLR, Rapport Technique NLR TR 77090 U, 1977.

[81] W. Tollmien. General instability criterion of laminar velocity distributions. Technical report, 792, NACA, 1935.

[82] A.K.M.F. Hussain W.C. Reynolds. The mechanics of in organized wave in turbulence shear flow . *J. Fluid.Mech.*, 54 :263–288, 1972.

[83] C. Weber. *Développement de méthodes implicites pour les équations de Navier-Stokes et la simulation des grandes échelles : application à l'aérodynamique externe*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1998.

[84] D.C. Wilcox. Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models. *AIAA Journal*, 26 :1299–1310, 1988.

[85] D.C. Wilcox. A Two-Equation Turbulence Model for Wall-Bounded and Free-Shear Flows. *AIAA Journal*, 93 :2905, 1993.

[86] booktitle = 37^{th} AIAA, Fluid Dynamics Confernce and Exhibit, San Antonio, USA year = 22-26 June 2009 X. Merle and J.C. Robinet, title = Global Stability in Curvilinear coordinats.

[87] Y.Saad. Iterative methods for sparse matrices. PWS-Editions, 2003.

[88] A. Zebib. Stability of a Viscous flow Past a Circular Cylinder. *J.Eng. Math*, 21 : 155–165, 1987.