

Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

spécialité : Mécanique

par

Pierre BRANCHER

---

*Etude numérique des instabilités  
secondaires de jets*

---

soutenue le 29 mars 1996 devant le jury composé de :

M. D. VANDROMME	Président	(Professeur INSA, Rouen)
M. M. MENEGUZZI	Rapporteur	(Directeur de Recherche, ASCI, Orsay)
M. P. A. MONKEWITZ	Rapporteur	(Professeur IMHEF-EPFL, Lausanne)
M. M. P. CHAUVE	Examineur	(Directeur de Recherche, IRPHE, Marseille)
M. J. M. CHOMAZ	Examineur	(Chargé de Recherche, LadHyX, Palaiseau)
M. P. HUERRE	Examineur	(Directeur de Recherche, LadHyX, Palaiseau)
M. J. C. LASHERAS	Examineur	(Professeur UCSD, San Diego)



## Avant-propos :

Cette thèse a été effectuée au sein du LadHyX (Laboratoire d'Hydrodynamique de l'Ecole Polytechnique) sous la direction de Jean-Marc CHOMAZ. Le travail présenté dans ce mémoire doit naturellement beaucoup à son encadrement "éclairé". Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour son dynamisme et sa disponibilité.

Patrick HUERRE, directeur du LadHyX, m'a accueilli dans son équipe alors que le laboratoire n'était encore qu'une poignée d'irréductibles. Je tiens à le remercier vivement pour cette marque de confiance et le soutien qu'il m'a apporté tout au long de ma thèse.

Maurice MENEGUZZI, directeur de recherche à l'ASCI (Orsay), et Peter MONKEWITZ, professeur à l'EPFL-IMHEF (Lausanne), m'ont fait l'honneur de rapporter sur ce travail. Je leur suis extrêmement reconnaissant pour leur lecture attentive du manuscrit et les remarques et suggestions qu'ils ont formulées.

Mes remerciements les plus respectueux à Dany VANDROMME, professeur à l'INSA (Rouen), qui m'a fait l'honneur de présider le jury, à Maric-Pierre CHAUVE, directeur de recherche à l'IRPHE (Marseille) et à Juan LASHERAS, professeur à UCSD (San Diego), pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je ne peux conclure ces quelques lignes sans adresser mes remerciements les plus chaleureux à tous les membres du laboratoire, permanents ou de passage, qui ont rendu mon séjour au LadHyX aussi agréable que passionnant. Une pensée particulière pour Thérèse, *of course*, et pour le reste des Bad Boys, qui m'ont supporté, dans tous les sens du terme, au cours des derniers mois de la thèse.

Enfin, et parce que malgré tout "il n'y a pas que la mécanique des fluides dans la vie", merci à Carole pour ses encouragements et sa patience.

Cette étude a bénéficié de l'aide financière de la Direction des Etudes, Recherches et Techniques (contrats DRET 92-1543 et 93-1376) ainsi que de diverses allocations de temps de calcul sur les machines Cray du CCVR et de l'IDRIS.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Méthodes numériques.</b>	<b>11</b>
2.1	Méthodes spectrales. . . . .	11
2.1.1	Introduction. . . . .	11
2.1.2	Méthode spectrale de Galerkin. . . . .	11
2.1.3	Méthode pseudo-spectrale de Galerkin-collocation. . . . .	13
2.1.4	Les erreurs de repliement et leur correction. . . . .	14
2.1.5	Représentation de Fourier. . . . .	16
2.2	Résolution des équations de Navier-Stokes. . . . .	18
2.2.1	Equations de base. . . . .	18
2.2.2	Schéma temporel. . . . .	19
2.3	Analyse de stabilité linéaire d'un jet cylindrique. . . . .	19
2.3.1	Formulation du problème linéarisé. . . . .	19
2.3.2	Méthode de résolution. . . . .	22
2.3.3	Résultats numériques. . . . .	22
<b>3</b>	<b>Induction tourbillonnaire dans les jets cylindriques.</b>	<b>25</b>
3.1	Conditions initiales. . . . .	25
3.2	Réorientation de la vorticité initiale. . . . .	27
3.2.1	Dans la région des anneaux. . . . .	29
3.2.2	Dans la région de la tresse. . . . .	30
3.3	Tourbillons longitudinaux et jets latéraux. . . . .	31
3.4	Influence du forçage azimuthal. . . . .	34
3.5	Discussion. . . . .	36
<b>4</b>	<b>Brisure d'axisymétrie dans les jets cylindriques.</b>	<b>37</b>
4.1	Influence de la corrugation sur l'instabilité primaire. . . . .	37
4.1.1	Position du problème. . . . .	39
4.1.2	Résultats numériques. . . . .	41
4.2	Instabilité secondaire 3D : régime linéaire. . . . .	43
4.2.1	Etude paramétrique. . . . .	43
4.2.2	Résultats numériques. . . . .	45
4.2.3	Discussion. . . . .	50
4.3	Instabilité secondaire 3D : régime non-linéaire. . . . .	55
4.3.1	Dynamique des modes harmoniques. . . . .	55
4.3.2	Formation des tourbillons longitudinaux. . . . .	56
<b>5</b>	<b>Nature convective ou absolue des instabilités secondaires.</b>	<b>59</b>
5.1	Introduction. . . . .	59
5.2	Méthodologie. . . . .	60
5.2.1	Notion d'instabilité convective ou absolue. . . . .	60
5.2.2	Ecoulement de base. . . . .	61

---

5.2.3	Analyse du paquet d'ondes. . . . .	63
5.2.4	Caractérisation des modes spatio-temporels. . . . .	63
5.2.5	Critère absolu/convectif. . . . .	64
5.2.6	Méthode numérique. . . . .	64
5.3	Instabilité primaire. . . . .	64
5.3.1	Stabilité temporelle. . . . .	65
5.3.2	Nature convective ou absolu. . . . .	67
5.4	Instabilité secondaire 2D. . . . .	69
5.4.1	Etude analytique d'un cas limite. . . . .	69
5.4.2	Résultats numériques. . . . .	70
5.5	Instabilité secondaire 3D : résultats préliminaires. . . . .	73
<b>6</b>	<b>Conclusions.</b>	<b>77</b>

# Chapitre 1

## Introduction.

*Without jets, life as we know it would be unimaginable.*

Fernando F. GRINSTEIN in *Fluid vortices* (éditeur S.I. Green, 1995)

Sans se rallier inconditionnellement à cette déclaration emphatique, force est de constater que les jets sont des écoulements qui se rencontrent communément dans la nature. Ainsi le simple fait d'expirer ou de faire des ronds de fumée amène tout un chacun (au moins les fumeurs...) à faire l'expérience de ce type d'écoulement. Moins trivialement, les applications des jets sont multiples dans l'industrie. La connaissance des propriétés de transport et de mélange de ces écoulements est essentielle notamment dans la conception de chambres de combustion ou de réacteurs chimiques, pour lesquels il est impératif d'optimiser le mélange. D'un point de vue plus fondamental, les jets constituent par ailleurs un prototype d'écoulement cisailé dont l'étude rentre dans le cadre général de la compréhension de la transition vers la turbulence.

Un jet est obtenu lorsqu'un fluide en mouvement émerge à travers une ouverture (*buse*) dans un fluide ambiant, généralement au repos. Dans la suite, on ne considérera que des fluides de même phase (jet liquide-liquide ou gaz-gaz) et miscibles. La dynamique des jets est dominée, dans une large gamme de nombres de Reynolds, par la présence de structures cohérentes en forme d'anneaux tourbillonnaires. Schématiquement, ces structures tourbillonnaires apparaissent dans une région de transition séparant une région laminaire, près de la buse, où l'écoulement est axisymétrique et uniforme, et une région turbulente, où des structures à petite et grande échelles interagissent dans un écoulement fortement tridimensionnel (**3D**), irrégulier dans l'espace et le temps.

### Instabilité primaire.

La formation de ces tourbillons dans la région de transition est due à l'instabilité de *Kelvin-Helmholtz* de la couche de cisaillement du jet à la sortie de la buse. Cette instabilité non-visqueuse est liée à la présence d'un point d'inflexion sur le profil de vitesse (Rayleigh, 1892; Drazin & Reid, 1981) et résulte en la migration de la vorticité azimutale initiale qui se regroupe et s'enroule pour former une allée d'anneaux tourbillonnaires. Le mécanisme est analogue à celui de l'instabilité des couches de mélange bidimensionnelles (**2D**) séparant deux courants parallèles de vitesses différentes mis en contact au bord de fuite d'une plaque plane. Des ondes axisymétriques partent de la buse, croissent puis saturent. Visuellement, la crête de l'onde, en contact avec le fluide ambiant au repos, ralentit puis se rabat dans le creux voisin en amont (Fig. 1.1). On obtient alors le coeur d'un anneau tourbillonnaire qui est advect  en aval.

Comme pour les couches de mélange planes, la dynamique de ces structures tourbillonnaires, mises en évidence dans de nombreuses études expérimentales (Becker & Massaro, 1968; Beavers & Wilson, 1970), et qui persistent même aux grands nombres de Reynolds (Crow & Champagne, 1971), peut être

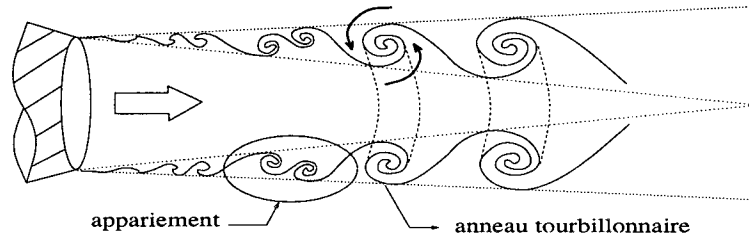


Figure 1.1: Evolution spatiale schématique d'un jet cylindrique : des ondes d'instabilité croissent à partir de la buse puis s'enroulent sous la forme d'anneaux tourbillonnaires qui sont advectés en aval.

décrite par une analyse de stabilité linéaire (Drazin & Reid, 1981). Depuis l'étude en fluide non visqueux de Batchelor & Gill (1962), de nombreux travaux théoriques prenant en compte la viscosité (Lessen & Singh, 1974; Morris, 1976) ou les variations spatiales de l'écoulement de base (Mattingly & Chang, 1974; Crighton & Gaster, 1976) ont permis d'avoir une vision globale cohérente de l'instabilité primaire des jets cylindriques (cf la revue de Michalke, 1984) :

Les profils de vitesse axiale  $U(r)$  des écoulements de base considérés dans les études de stabilité linéaire sont caractérisés par le rapport entre le rayon  $R$  du jet et l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche cisailée

$$\theta = \int_0^\infty \frac{U(r)}{U(0)} \left[ 1 - \frac{U(r)}{U(0)} \right] dr \quad (1.1)$$

Pour un jet se développant spatialement, ce paramètre sans dimension  $R/\theta$  décroît le long de l'écoulement du fait de la diffusion visqueuse. Pour les grandes valeurs de  $R/\theta$ , typiques de l'écoulement moyen à la sortie de la buse, le jet peut être considéré comme une couche de mélange axisymétrique (Abid *et al.*, 1994) et l'on retrouve au premier ordre les résultats obtenus pour l'instabilité des couches de mélange planes (cf la revue de Ho & Huerre, 1984). En particulier, le mode propre le plus instable est axisymétrique (donnant ainsi lieu à une allée d'anneaux tourbillonnaires), de nombre d'onde et de taux de croissance contrôlés par la longueur caractéristique  $\theta$ . D'autres modes instables existent. Ces modes non-axisymétriques (hélicoïdaux) sont tous d'autant moins instables qu'ils ont un nombre d'onde azimutal élevé. Pour les petites valeurs de  $R/\theta$ , c'est-à-dire un écoulement de base caractéristique de l'écoulement moyen loin de la buse, le mode axisymétrique se restabilise et seul le mode hélicoïdal simple ( $m = \pm 1$ ) est instable (Batchelor & Gill, 1962). Il est à remarquer que les résultats de stabilité linéaire présentent un bon accord, tant qualitatif que quantitatif, avec les observations expérimentales (Mattingly & Chang, 1974; Crighton & Gaster, 1976).

### Instabilité secondaire axisymétrique.

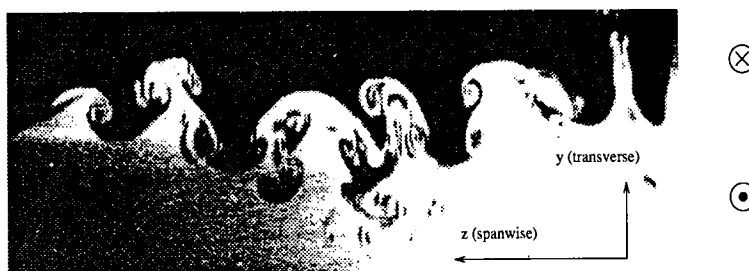
Les anneaux tourbillonnaires résultant de l'instabilité primaire du jet croissent par accumulation progressive de vorticité, interagissent entre eux et peuvent s'apparier à la manière des tourbillons primaires des couches de mélange planes (Winant & Browand, 1974). Cette instabilité secondaire du jet conduit ainsi à un doublement de la longueur d'onde initiale par fusion d'une paire de tourbillons (cf Fig. 1.1). Pour certaines valeurs du nombre de Reynolds et de l'épaisseur de la couche limite   la sortie de la buse, Reynolds & Bouchard (1981) ont pu observer jusqu'à trois zones d'appariement, dans lesquelles le spectre montre une réduction de moitié de la fréquence la plus énergétique, correspondant à la fréquence de passage des anneaux tourbillonnaires<sup>1</sup>. Par ce phénomène d'appariement (instabilité sous-harmonique, axisymétrique), la taille des anneaux et leur distance relative augmentent lorsque l'on s'éloigne de la buse.

L'appariement des tourbillons est un mécanisme par lequel la structure du jet tend à "oublier" les conditions à la buse. Ainsi, les expériences de Crow & Champagne (1971) ont montré que loin en aval de la buse le nombre de Strouhal mesuré ( $St = fD/U_j$  où  $f$  est la fréquence des tourbillons,  $D$  le diamètre

<sup>1</sup>Mankbadi (1992) présente une revue détaillée sur la dynamique et le contrôle des structures cohérentes dans les jets cylindriques.



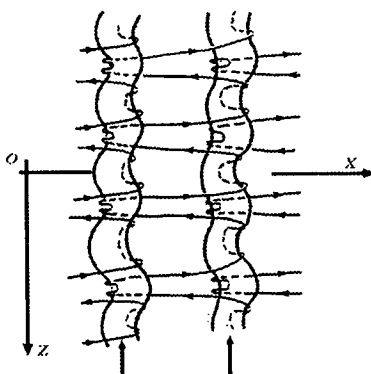
de la buse et  $U_j$  la vitesse du jet sur l'axe) devient largement indépendant du nombre de Reynolds et de l'épaisseur de la couche de cisaillement initiale et se stabilise autour de 0.3, "mode préféré" du jet. D'autres expériences ont confirmé cette propriété des jets cylindriques (Ho & Huerre, 1984) : le nombre de Strouhal du mode préféré varie sensiblement suivant les conditions expérimentales mais reste proche de 0.4 pour toutes les expériences. Cette valeur particulière du nombre de Strouhal trouve une interprétation théorique dans le cadre des instabilités des écoulements ouverts (Huerre & Monkewitz, 1990). Elle correspond en effet à la fréquence du mode global le moins stable de l'écoulement de jet : un jet homogène étant marginalement globalement stable se comporte comme un oscillateur très peu atténué qui, soumis à une excitation même de faible amplitude (de l'ordre du taux d'atténuation), est susceptible de fournir une réponse optimale autour de cette fréquence de résonance.



**Figure 1.2:** Expérience de couche de mélange plane : coupe transversale entre deux tourbillons de Kelvin-Helmholtz (l'écoulement est perpendiculaire au plan de la page). Cette région de l'écoulement située entre les tourbillons primaires, la tresse (*braid* en anglais), présente un comportement fortement 3D qui se manifeste par la présence de tourbillons longitudinaux. D'après Bernal & Roshko (1986).

### Instabilités secondaires 3D.

Dans les couches de mélange planes, de nombreuses expériences (Browand & Troutt, 1980; Breidenthal, 1981; Jimenez, 1983; Bernal & Roshko, 1986) ont montré que la transition vers la turbulence était précédée d'une tridimensionnalisation de l'écoulement attribuée à une instabilité secondaire 3D de la couche de mélange (Fig. 1.2). Ces effets 3D sont principalement liés à la formation de paires de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs reliant deux tourbillons de Kelvin-Helmholtz consécutifs (Fig. 1.3).

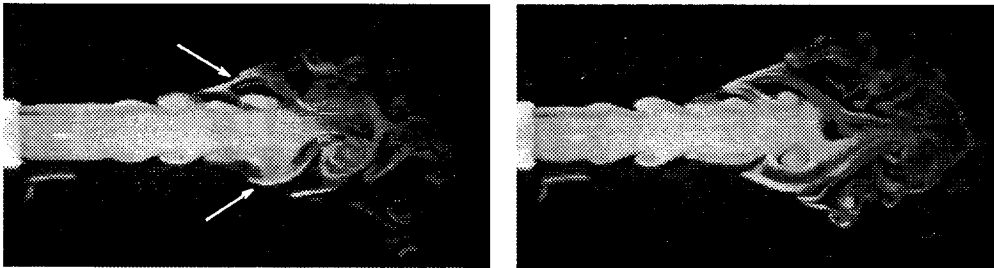


**Figure 1.3:** Structure du champ de vorticité entre deux tourbillons de Kelvin-Helmholtz consécutifs d'une couche de mélange plane. D'après Lasheras & Choi (1988).

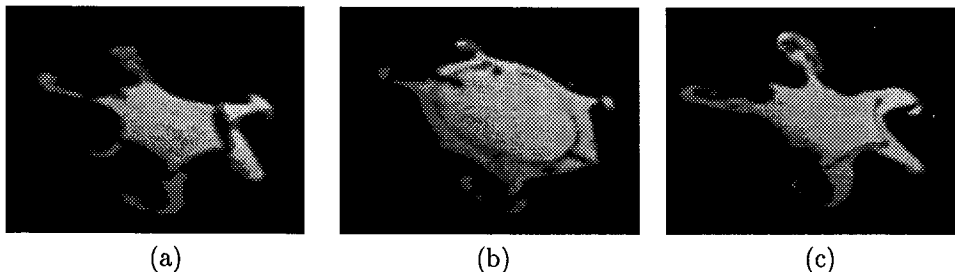
Bernal & Roshko (1986) ont suggéré qu'il s'agissait d'une instabilité de l'allée des tourbillons primaires. Leurs mesures indiquent que la longueur d'onde latérale du mode 3D dominant est de l'ordre des  $2/3$  de la longueur d'onde (longitudinale) des tourbillons de Kelvin-Helmholtz. Cette observation expérimentale est en bon accord avec les prédictions théoriques concernant l'instabilité *translative* d'une allée périodique de

tourbillons de Stuart (1967) mise en évidence par Pierrehumbert & Widnall (1982). Lasheras *et al.* (1986) ont pu observer la formation de tourbillons longitudinaux précoces, juste en aval du bord de fuite de la plaque plane, concluant que ces structures secondaires étaient fortement dépendantes des perturbations 3D provenant des conditions expérimentales amont. Un forçage par déformation latérale sinusoïdale de la couche de mélange au bord de fuite de la plaque (Lasheras & Choi, 1988) montre par ailleurs que ce type de perturbation n'affecte pas notablement l'instabilité primaire. Une fois les tourbillons de Kelvin-Helmholtz apparus, ces auteurs observent la formation des tourbillons longitudinaux sur l'écoulement constitué de l'allée de tourbillons primaires qui restent essentiellement 2D, suggérant que l'instabilité primaire (Kelvin-Helmholtz, 2D) et l'instabilité secondaire 3D sont découplées. Dans le régime non-linéaire, les tourbillons longitudinaux déforment les tourbillons primaires avec la même longueur d'onde que le forçage, cette déformation étant en opposition de phase avec la perturbation initiale. Lorsque l'on fait varier le nombre d'onde latéral du forçage, les mesures n'indiquent pas de maximum d'amplification : l'instabilité secondaire 3D agit comme un amplificateur à large bande pour lequel tous les modes ont un taux de croissance similaire (Nygaard & Glezer, 1990). Ces derniers résultats tendent à favoriser l'instabilité translatrice de Pierrehumbert & Widnall (1982), très peu sélective, comme candidat probable pour cette instabilité 3D.

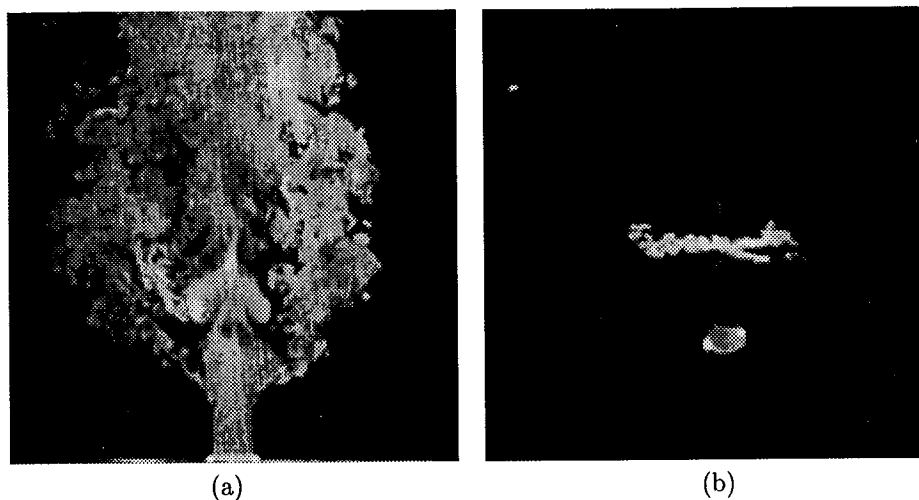
Une tridimensionnalisation de l'écoulement est aussi mise en évidence dans les expériences de jets cylindriques où des effets 3D ont tout d'abord été observés sous la forme d'une ondulation azimutale des anneaux tourbillonnaires (Yule, 1978). Un autre phénomène témoigne de la brisure de la symétrie de rotation dans les jets cylindriques. Une expérience de jet menée au laboratoire (Garcia *et al.*, 1995) montre une augmentation significative du mélange en amont de la zone turbulente (flèches de la figure 1.4). Des coupes perpendiculaires à l'axe du jet indiquent que ce mélange ne s'effectue pas de manière axisymétrique mais sous la forme d'une éjection radiale du fluide du jet en plusieurs jets latéraux secondaires (Fig. 1.5). Ces jets secondaires persistent au passage des anneaux tourbillonnaires et ont une durée de vie de plusieurs fois la période de passage des anneaux tourbillonnaires.



**Figure 1.4:** Coupes longitudinales d'une expérience de jet cylindrique liquide-liquide. Le nombre de Reynolds basé sur le rayon est d'environ 500. De la fluorescéine est mélangée au fluide du jet en amont de la buse. La visualisation est ensuite obtenue par fluorescence induite par une nappe laser positionnée dans le plan vertical contenant l'axe du jet.

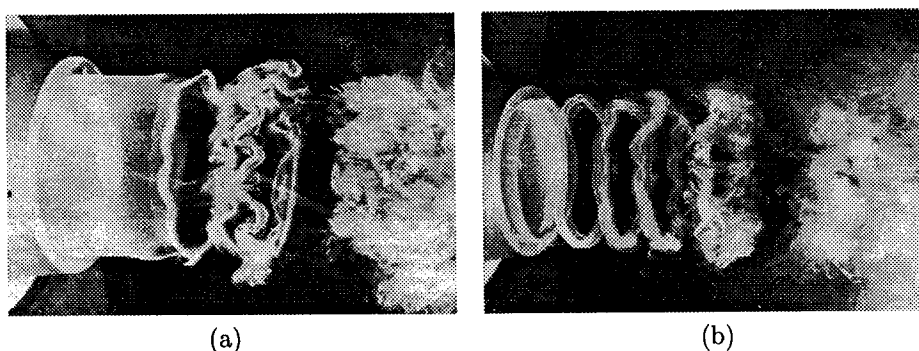


**Figure 1.5:** Coupes transversales d'une expérience de jet cylindrique (conditions identiques à la figure précédente) : entre deux anneaux tourbillonnaires (a), au passage d'un anneau (b), après le passage de deux anneaux (c). La distance aval est  $x/R \sim 8$ . La nappe laser est positionnée dans le plan perpendiculaire à l'axe du jet, au niveau des flèches de la figure 1.4.



**Figure 1.6:** Expérience de jet chaud résonnant (gaz-gaz) : coupes longitudinale (a) et transversale (b). Un jet de fluide suffisamment léger par rapport au fluide ambiant présente un mode global oscillant auto-entretenu qui se manifeste par une allée très régulière d'anneaux tourbillonnaires synchronisés avec la fréquence du mode. Cette configuration est particulièrement propice à une forte tridimensionnalisation de l'écoulement sous la forme de jets latéraux intenses. D'après Monkewitz *et al.* (1990).

Des expériences antérieures (Monkewitz *et al.*, 1989 et 1990) ont relié l'intensité de ce phénomène à la synchronisation des anneaux tourbillonnaires. Cette synchronisation peut être obtenue par forçage acoustique (jet de gaz) ou mécanique (jet liquide) à une fréquence donnée dans le cas d'un jet homogène ou par apparition d'un mode auto-entretenu (mode global oscillant, cf Huerre & Monkewitz, 1990) dans le cas d'un jet de fluide suffisamment léger par rapport au fluide ambiant au repos (Monkewitz & Sohn, 1988; Monkewitz *et al.*, 1989; Kyle & Sreenivasan, 1989). L'instabilité de la couche de mélange du jet résulte alors en l'enroulement axisymétrique de la nappe de vorticité azimutale initiale en une allée très régulière d'anneaux tourbillonnaires, en phase avec le forçage ou les oscillations globales. Dans les deux cas (excitation forcée ou auto-entretenu), les jets latéraux observés sont beaucoup plus intenses que dans le cas naturel et provoquent une ouverture spectaculaire du jet principal, avec des demi-angles d'ouverture supérieurs à 45 degrés (Fig. 1.6).



**Figure 1.7:** Expériences de jet (gaz-gaz) libre (a) et forcé (b). Seule la couche de mélange du jet est initialement visualisée : le traceur est alors piégé dans les anneaux tourbillonnaires, ce qui ne permet pas de visualiser d'effets 3D autres que l'ondulation des anneaux, comme par exemple l'éjection radiale de fluide du jet en jets latéraux (cf figures précédentes). D'après Wille & Michalke (*in* Van Dyke, 1982).

Une première conjecture a relié l'origine de ces jets latéraux à une instabilité des anneaux tourbillonnaires de type instabilité de Widnall (Widnall *et al.*, 1974). Cette instabilité azimutale donne naissance à une ondulation des anneaux analogue de celle que l'on peut observer dans les expériences de jets cylin-

driques (Fig. 1.7). Les jets latéraux étaient supposés correspondre à l'éjection radiale de fluide du jet induite par les anneaux ainsi déformés (Monkewitz *et al.*, 1989 et 1990).

Cependant, une première étude numérique (Martin & Meiburg, 1991) basée sur la déformation de filaments de vorticité, ainsi que des études expérimentales plus quantitatives (Monkewitz & Pfizenmaier, 1991; Liepmann & Gharib, 1992) ont indiqué que le phénomène de jets latéraux devait mettre en jeu des paires de tourbillons longitudinaux présents dans la tresse entre deux anneaux consécutifs, structures similaires à celles observées dans les couches de mélange planes.

## Objectif de la thèse.

Il reste pourtant que l'origine même de ces structures tourbillonnaires secondaires et les mécanismes physiques responsables de la sélection du nombre d'onde azimutal observé lors de la transition 3D des jets cylindriques sont encore mal compris. En outre, il n'existe pas d'étude systématique de l'influence des paramètres de l'écoulement à la sortie de la buse sur la dynamique globale des jets cylindriques et leurs propriétés de mélange (tridimensionnalisation de l'écoulement, génération de jets latéraux...).

Dans ce contexte, l'objectif de la thèse est d'étudier les mécanismes d'instabilités secondaires présents dans les jets cylindriques. Les résultats issus de simulations numériques directes des équations de Navier-Stokes sont interprétés dans le cadre de la théorie de l'instabilité hydrodynamique.

## Simulation numérique spatiale ou temporelle ?

Dans les expériences, l'écoulement de jet est obtenu en injectant à travers une buse un fluide en mouvement dans un fluide au repos. L'écoulement évolue ensuite spatialement à partir de la buse en se développant dans la direction aval. Les simulations numériques ne peuvent naturellement pas reproduire la totalité de l'expérience, c'est-à-dire le cycle complet des particules fluides impliquées dans l'écoulement. De plus, on ne s'intéresse en général qu'au développement du jet de la sortie de la buse jusqu'à une distance aval de l'ordre de quelques diamètres.

Une solution consiste à ne simuler numériquement que la région proche de la buse : il faut alors se donner des conditions limites en entrée (amont) et en sortie (aval) du domaine de calcul. Le problème rencontré avec ces simulations *spatiales* réside dans la définition de ces conditions aux limites ouvertes. Elles doivent en effet modéliser le comportement du fluide à l'extérieur du domaine d'étude, ce qui n'est pas immédiat car il s'agit d'une information impossible à obtenir rigoureusement. En outre, le choix de ces conditions n'est pas sans conséquence : il y a en effet le risque de générer une rétroaction parasite susceptible de contaminer la simulation et de dénaturer la dynamique intrinsèque de l'écoulement<sup>2</sup>. Pour ces raisons, la simulation numérique de l'évolution spatiale de l'écoulement, bien que proche des conditions de l'expérience, reste une approximation, qui peut être lourde à mettre en œuvre et entachée d'un certain degré d'erreur que l'on commence néanmoins à mieux contrôler (Astruc, 1993; Grinstein *et al.*, 1991; Buell & Huerre, 1988; Normand *et al.*, 1988).

Une autre méthode, beaucoup plus simple à implémenter, a été retenue pour la présente étude. Elle consiste à étudier un écoulement homogène ou périodique en espace qui évolue au cours du temps. Une telle simulation *temporelle* est obtenue en appliquant des conditions aux limites périodiques dans la direction de l'écoulement. On s'affranchit de la sorte des conditions aux limites ouvertes, mais au prix de quelques approximations : l'écoulement de jet temporel ainsi simulé est dans une certaine mesure une modélisation du jet spatial, dans laquelle on se place dans un référentiel se déplaçant à la vitesse des anneaux tourbillonnaires. Plus précisément, on suit l'évolution en temps d'une tranche de fluide (le fluide contenu initialement dans le domaine de calcul) au cours de son advection en négligeant localement les variations spatiales de l'écoulement moyen. En outre, on suppose que les  v nements qui ont lieu en aval n'influencent pas l'écoulement en amont. En d'autres termes, le modèle du jet temporel ne peut reproduire une éventuelle remontée d'information de l'aval vers l'amont (rétroaction) qui pourrait se produire naturellement. On fait ainsi l'hypothèse que les instabilités étudiées sont de nature *convective*,

<sup>2</sup>Pour une discussion complète et éclairée de ces problèmes liés aux conditions aux limites ouvertes, se reporter à la thèse de D. Astruc (1993).

à savoir que l'énergie de toute perturbation est bien advectée vers l'aval par le courant moyen (par opposition à *absolue* où des perturbations peuvent se propager vers l'amont et contaminer la totalité de l'écoulement, cf Huerre & Monkewitz, 1990). Cette hypothèse d'écoulement convectif est effectivement vérifiée pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (Huerre & Monkewitz, 1985 et 1990; Monkewitz & Sohn, 1988; Monkewitz *et al.*, 1990; Jendoubi & Strykowski, 1994). Sous cette hypothèse, le temps (étude temporelle) et la distance aval correspondante (étude spatiale) sont reliés via la vitesse d'advection des anneaux tourbillonnaires.

Ces limitations mises à part, la donnée de conditions limites périodiques permet une meilleure résolution en espace, par l'utilisation de méthodes spectrales. On peut ainsi atteindre des nombres de Reynolds plus importants et mieux reproduire la dynamique des petites échelles de l'écoulement. Les études numériques antérieures montrent en outre que les simulations temporelles arrivent à capturer les caractéristiques principales de la dynamique des écoulements cisailés. Ainsi les simulations numériques temporelles de couches de mélange 2D reproduisent de manière identique à l'expérience l'enroulement de la couche de mélange en tourbillons de Kelvin-Helmholtz, tout en permettant d'étudier quantitativement le phénomène d'appariement, l'évolution du champ de déformation et le transport d'un scalaire passif (Riley & Metcalfe, 1980; Corcos & Sherman, 1984). De manière plus significative, les simulations temporelles de couches de mélange 3D complètent utilement les expériences quant à la dynamique des instabilités secondaires 3D. En particulier, les simulations numériques directes de Corcos & Lin (1984) et de Metcalfe *et al.* (1987) ont montré que le développement de perturbations 3D n'altérerait pas la cohérence des tourbillons de Kelvin-Helmholtz et que l'appariement de ces tourbillons inhibait par contre la croissance des instabilités 3D. Ces simulations ont par ailleurs confirmé la présence de tourbillons longitudinaux, seulement mis en évidence dans les expériences par leur effet de transport de colorant. De la même manière, l'association des simulations temporelles de Ashurst & Meiburg (1988), basées sur une méthode de dynamique tourbillonnaire, avec les expériences de couches de mélange forcées de Lasheras & Choi (1988) a permis d'étudier en détail la formation des tourbillons longitudinaux et l'instabilité des tourbillons primaires, et de décrire la topologie du champ de vorticité. Des études plus récentes ont analysé la transition vers la turbulence dans les couches de mélange planes (Comte & Lesieur, 1990; Rogers & Moser, 1992; Moser & Rogers, 1993) et, en liaison avec les expériences (Jimenez, 1983; Huang & Ho, 1990), ont permis d'évaluer l'influence de l'appariement sur la sélection de la longueur d'onde latérale des instabilités 3D, ceci sans être gêné par le bruit inhérent aux expériences (Rogers & Moser, 1993).

## Organisation du mémoire.

Le chapitre 2 expose la méthode numérique retenue pour la présente étude. Après une introduction synthétique aux méthodes spectrales, on décrit le code numérique intégrant les équations de Navier-Stokes 3D instationnaires dans un domaine périodique dans les trois directions. Une première validation de la méthode numérique, basée sur des résultats théoriques de stabilité linéaire, clôt ce chapitre.

L'évolution temporelle d'un jet cylindrique homogène soumis à des perturbations longitudinales et azimutales contrôlées est étudiée qualitativement dans le chapitre 3. L'analyse des résultats numériques obtenus permet de décrire en détail la dynamique de l'écoulement. On propose alors un scénario complet pour l'évolution du jet, en mettant l'accent sur les mécanismes d'induction tourbillonnaire actifs dans l'écoulement. En particulier sont mises en évidence les structures tourbillonnaires responsables des jets latéraux.

Les résultats du chapitre 3 révèlent l'existence d'une instabilité secondaire 3D prenant naissance sur la rangée régulière d'anneaux tourbillonnaires générés par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz de la couche de mélange du jet. Une étude paramétrique systématique est menée au chapitre 4 en vue de caractériser cette instabilité en fonction des différents paramètres de l'écoulement à la sortie de la buse. On montre que l'instabilité secondaire 3D est principalement contrôlée par le nombre de Strouhal basé sur la longueur d'onde de l'instabilité primaire. L'analyse des courbes de stabilité et des modes propres issus des simulations numériques directes permet de rapprocher cette instabilité secondaire de l'instabilité translative des couches de mélange planes. Le régime non-linéaire est ensuite abordé, et l'on décrit la dynamique des modes azimutaux harmoniques au moyen d'équations d'amplitude, ainsi que la formation des tourbillons longitudinaux dans la tresse.

Le chapitre 5 traite de la nature convective ou absolue des instabilités secondaires des couches de mélange planes. Le cas de l'instabilité secondaire 2D (appariement) est étudié en détail et, au vu des résultats obtenus, une interprétation est proposée pour la résonance sous-harmonique observée dans des expériences récentes d'écoulements forcés en aval d'une marche descendante. Il est montré en particulier qu'il existe des configurations d'écoulements pour lesquelles l'appariement est absolu alors que l'instabilité primaire est convective. Des résultats préliminaires concernant les instabilités secondaires 3D sont présentés en fin de chapitre.

Le chapitre 6 fait la synthèse des principaux résultats obtenus et expose les prolongements possibles de ce travail.

## Chapitre 2

# Méthodes numériques.

### 2.1 Méthodes spectrales.

#### 2.1.1 Introduction.

Les méthodes spectrales connaissent depuis plusieurs années un développement croissant au sein de la communauté scientifique et offrent aujourd'hui une alternative séduisante pour la résolution des équations aux dérivées partielles. L'émergence de ces méthodes est due en partie à l'augmentation des capacités des machines de calcul mais surtout au développement d'algorithmes de transformation plus efficaces comme la Transformée de Fourier Rapide (Cooley & Tuckey, 1965), qui facilitent l'implémentation des équations spectrales et le passage rapide entre espaces physique et spectral.

Le principe fondamental consiste à chercher la solution sous la forme d'une série tronquée de fonctions de base régulières connues, dont le choix dépend très largement du type de conditions limites étudié. On réduit ainsi le système d'équations aux dérivées partielles initial en un ensemble d'équations différentielles ordinaires qui peuvent alors être résolues par des techniques directes. Outre cette simplification de résolution, le principal intérêt des méthodes spectrales réside dans leur précision : sous réserve de consistance, on peut en effet espérer une convergence exponentielle vers la solution exacte, à comparer avec une convergence simplement algébrique pour les différences finies.

Appliquées à la mécanique des fluides, il apparaît que les méthodes spectrales sont bien adaptées à l'étude des instabilités hydrodynamiques et de la turbulence pour les écoulements visqueux incompressibles 2D et 3D. Ces méthodes sont particulièrement faciles à mettre en œuvre pour des géométries d'écoulements et des conditions limites simples. A titre d'exemples, on peut citer les travaux de Metcalfe *et al.* (1987), Roger & Mosers (1992, 1993) sur la transition vers la turbulence dans les couches de mélange planes, Vincent & Meneguzzi (1991) pour l'étude de la turbulence homogène isotrope. Dans ce type de problèmes, la résolution des équations de Navier-Stokes dans l'espace spectral de Fourier par exemple permet une interprétation directe en terme d'ondes d'instabilité ou une caractérisation simple des échelles de la turbulence. Il existe ainsi une correspondance naturelle entre la méthode numérique employée et le cadre théorique du problème étudié (théorie de l'instabilité hydrodynamique, modèles de turbulence...)

Il n'est évidemment pas question de faire ici une description exhaustive et une théorie complète des méthodes spectrales. Une étude détaillée ainsi que des résultats sur la stabilité et la convergence de ces méthodes sont présentés par Gottlieb & Orszag (1977) et Canuto *et al.* (1986). Dans cette partie, on se propose de présenter brièvement le principe général sur l'exemple de la méthode de Galerkin (§2.1.2) et de décrire la méthode de Galerkin-collocation qui a été utilisée au cours de cette thèse (§2.1.3). On traitera ainsi des erreurs de repliement (§2.1.4) et on rappellera quelques définitions et résultats classiques relatifs à la représentation en Fourier, qui a été retenue pour le présent travail (§2.1.5).

#### 2.1.2 Méthode spectrale de Galerkin.

Suivant la nomenclature de Peyret & Taylor (1982), on différenciera les méthodes *spectrales* proprement dites, qui résolvent le problème entièrement dans l'espace spectral, les méthodes de *collocation*, qui

travaillent uniquement sur des points de maillage dans l'espace physique, et les méthodes *pseudo-spectrales* qui sont une combinaison des deux méthodes précédentes.

La méthode de Galerkin fait partie de la première catégorie. Elle est particulièrement adaptée aux conditions limites homogènes ou périodiques. Les méthodes permettant de résoudre d'autres types de conditions limites (Tau, Tau-collocation, ...) ne seront pas exposées ici. On consultera plutôt Canuto *et al.* (1988).

On cherche à résoudre le problème d'évolution suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = F[u](x, t) + f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

associé aux conditions limites, ici homogènes :

$$\gamma[u](x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \quad (2.2)$$

et aux conditions initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (2.3)$$

$\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}$ , de frontière  $\partial\Omega$ .  $u, f$  sont des fonctions de  $\mathcal{H}$ , espace de Hilbert muni de son produit scalaire.  $F$  est un opérateur de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$  et  $\gamma$  un opérateur de trace déterminant les conditions aux limites (omis si les conditions limites sont périodiques).

Soit  $\Gamma = \{v \in \mathcal{H} / \gamma[v] = 0\}$  le sous-espace des fonctions de  $\mathcal{H}$  vérifiant les conditions aux limites, ici homogènes. Soit  $\{\varphi_k; k = 1, \infty\}$  une base orthonormée de  $\Gamma$ .

La dépendance spatiale est résolue en cherchant une approximation de la solution exacte  $u$  de (2.1)

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k(t) \varphi_k(x) \in \Gamma \quad (2.4)$$

sous la forme d'une série tronquée aux  $N$  premiers termes :

$$u^N(x, t) = \sum_{k=1}^N \hat{u}_k^N(t) \varphi_k(x) \quad (2.5)$$

élément de  $\Gamma^N$ , sous-espace de  $\Gamma$  engendré par  $\{\varphi_k; k = 1, N\}$ .  $u^N$  ainsi défini vérifie naturellement les conditions limites.

L'ensemble des valeurs  $\{\hat{u}_k; k = 1, \infty\}$  constitue le *spectre* de  $u$  et définit l'espace *spectral*, par opposition à l'espace *physique* dans lequel  $u$  prend ses valeurs.

L'erreur d'approximation est :

$$R[u^N] = \frac{\partial u^N}{\partial t} - F[u^N] - f \in \mathcal{H} \quad (2.6)$$

$R[u^N]$ , encore appelé *résidu*, est évidemment nul si  $u^N$  est solution. Soit  $P_{\perp}^N$  la projection orthogonale de  $\mathcal{H}$  sur  $\Gamma^N$ . La méthode spectrale de Galerkin consiste à chercher l'élément  $u^N$  de  $\Gamma^N$  approchant au mieux la solution exacte dans l'espace spectral, c'est-à-dire tel que l'erreur d'approximation soit nulle en projection orthogonale sur  $\Gamma^N$  :

$$P_{\perp}^N [R[u^N]] = 0 \quad (2.7)$$

ou encore

$$(R[u^N], \varphi_k) = 0, \quad k = 1, N \quad (2.8)$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire de  $\mathcal{H}$ .



On obtient alors  $N$  équations différentielles ordinaires en temps (*équations de Galerkin*) dont les inconnues sont les coefficients spectraux  $\hat{u}_k^N(t)$  :

$$\frac{d\hat{u}_k^N}{dt} = \left( F \left[ \sum_{k=1}^N \hat{u}_k^N \varphi_k \right], \varphi_k \right) + f_k, \quad k = 1, N \quad (2.9)$$

où  $f_k = (f, \varphi_k)$ .

La dépendance en temps est en général résolue au moyen de différences finies.

**Remarques :**

- Si  $F$  est un opérateur linéaire, à coefficients constants, alors on montre que  $u^N = P_{\perp}^N[u]$  où  $u$  est la solution exacte, c'est-à-dire  $\hat{u}_k^N = \hat{u}_k$ ,  $k = 1, N$ . Ce résultat n'est plus valable pour  $F$  quelconque.
- De plus, si les  $\{\varphi_k; k = 1, \infty\}$  sont vecteurs propres de  $F$  ( $F[\varphi_k] = \lambda_k \varphi_k$ ), les équations de Galerkin s'écrivent :

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt} = \lambda_k \hat{u}_k + f_k, \quad k = 1, N \quad (2.10)$$

La méthode de Galerkin résout entièrement le problème dans l'espace spectral, ce qui conduit au calcul de produits de convolution dans le cas où  $F$  contient des termes "multiplicatifs" (non-linéarités ou multiplications par des coefficients variables). On préfère alors utiliser une méthode pseudo-spectrale dérivée : la méthode de Galerkin-collocation.

### 2.1.3 Méthode pseudo-spectrale de Galerkin-collocation.

Comme la méthode de Galerkin, la méthode de Galerkin-collocation est bien adaptée aux conditions aux limites périodiques ou homogènes. Son intérêt réside principalement dans le traitement des termes multiplicatifs éventuels de  $F$ .

En plus d'une base  $\{\varphi_k; k = 1, \infty\}$  de  $\Gamma$ , espace des fonctions de  $\mathcal{H}$  vérifiant les conditions limites, on se donne  $N$  points  $x_1, \dots, x_N$  intérieurs au domaine  $\Omega$ , dits points de collocation, tels que la matrice  $[T_{jk}] = [\varphi_k(x_j)]$ , pour  $j, k = 1 \dots N$ , soit inversible.

On définit d'autre part la projection de collocation :

$$P_c^N[v] = \sum_{k=1}^N \hat{v}_k^N \varphi_k, \quad v \in \mathcal{H} \quad (2.11)$$

tel que les coefficients spectraux  $\hat{v}_k^N$  vérifient :

$$v(x_j) = \sum_{k=1}^N \hat{v}_k^N \varphi_k(x_j) = \sum_{k=1}^N T_{jk} \hat{v}_k^N, \quad j = 1, N \quad (2.12)$$

La méthode de Galerkin-collocation consiste à chercher l'élément  $u^N$  de  $\Gamma^N$  tel que l'erreur d'approximation soit nulle en projection de collocation sur  $\Gamma^N$  :

$$u^N = \sum_{k=1}^N \hat{u}_k^N \varphi_k \quad / \quad P_c^N [R[u^N]] = 0 \quad (2.13)$$

où  $R[u^N]$  est donné par (2.6), soit :

$$\frac{\partial u^N}{\partial t}(x_j, t) - F[u^N](x_j, t) - f(x_j, t) = 0, \quad j = 1, N \quad (2.14)$$

On impose donc que la forme discrète des équations soit vérifiée dans l'espace physique aux points de collocation.

Dans cette méthode la projection des termes multiplicatifs est particulièrement simple dans l'espace physique puisque  $P_c^N[u v](x_j) = u(x_j) v(x_j)$ .

On voit donc que pour résoudre le problème (2.1) par ce type de méthode, il faut disposer d'un algorithme efficace permettant de passer rapidement de l'espace spectral, où les dérivations spatiales sont directes (cf §2.1.5), vers l'espace physique, où sont évalués les termes multiplicatifs, et vice-versa.

En effet, le calcul des coefficients spectraux de la projection d'un terme du type  $uv$  nécessite deux multiplications par la matrice de transformation  $T$  et une par  $T^{-1}$  :

$$P_c^N [u^N v^N] = \sum_{k=1}^N \hat{w}_k \varphi_k \quad \text{tel que} \quad w(x_j) = (u^N v^N)(x_j) = u^N(x_j) v^N(x_j) \quad (2.15)$$

Soit

$$\begin{aligned} \hat{w}_k &= \sum_{j=1}^N T_{kj}^{-1} w(x_j) = \sum_{j=1}^N T_{kj}^{-1} [u^N(x_j) v^N(x_j)] \\ &= \sum_{j=1}^N T_{kj}^{-1} \left[ \left( \sum_{p=1}^N T_{jp} \hat{u}_p^N \right) \left( \sum_{q=1}^N T_{jq} \hat{v}_q^N \right) \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

De tels algorithmes de transformation existent (par exemple la Transformée de Fourier Rapide de Cooley & Tuckey, 1965), qui réduisent considérablement le nombre d'opérations à effectuer pour passer d'un espace à l'autre.

#### 2.1.4 Les erreurs de repliement et leur correction.

Si le calcul des termes multiplicatifs est simplifié avec une méthode pseudo-spectrale, il faut cependant noter que l'opération de projection introduit des termes parasites.

Considérons par exemple des conditions limites  $2\pi$ -périodiques.  $\{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$  est une base de  $\Gamma$  et on définit  $N$  points de collocation  $x_j = 2j\pi/N$  ( $j = 1, N$ ). La solution exacte est de la forme  $u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{ikx}$ . Sans nuire à la généralité du propos, on supposera  $N = 2K + 1$ .

Dans ces conditions, la projection de collocation s'écrit :

$$P_c^N [u](x) = \sum_{k=-K}^K \hat{u}_k^N e^{ikx} \quad \text{tel que} \quad P_c^N [u](x_j) = u(x_j), \quad j = 1, N \quad (2.17)$$

soit

$$\sum_{k=-K}^K \hat{u}_k^N e^{\frac{2i\pi}{N}kj} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{\frac{2i\pi}{N}kj} = \sum_{k=-K}^K \left( \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{u}_{k+pN} \right) e^{\frac{2i\pi}{N}kj}$$

D'où :

$$\hat{u}_k^N = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{u}_{k+pN}, \quad |k| \leq K \quad (2.18)$$

La méthode de collocation a donc le défaut de confondre toutes les "octaves<sup>1</sup>" d'un même nombre d'onde  $k$  (erreur de repliement ou *aliasing*). Ceci pose problème dès que la fonction à projeter contient des modes non nuls pour  $|k| \geq K$ .

<sup>1</sup>par analogie avec la musique, bien que  $N$  ne soit pas forcément égal à 8 ...

C'est ce qui arrive lorsque l'on projette par exemple des termes non-linéaires :

Si  $u^N = \sum_{p=-K}^K \hat{u}_p^N e^{ipx}$  alors

$$(u^N)^2 = \sum_{p,q=-K}^K \hat{u}_p^N \hat{u}_q^N e^{i(p+q)x} = \sum_{k=-2K}^{2K} \left( \sum_{(p,q) \in D_k} \hat{u}_p^N \hat{u}_q^N \right) e^{ikx} \in \Gamma^{2N} \quad (2.19)$$

où l'on définit le segment  $D_k = \{(p, q) / p + q = k; |p|, |q| \leq K\}$ .

La projection orthogonale sur  $\Gamma^N$  donne :

$$P_{\perp}^N [(u^N)^2] (x) = \sum_{k=-K}^K \left( \sum_{D_k} \hat{u}_p^N \hat{u}_q^N \right) e^{ikx} \quad (2.20)$$

soit

$$[(\widehat{u^N})^2]_k = \sum_{D_k} \hat{u}_p^N \hat{u}_q^N \quad (2.21)$$

Alors que la projection de collocation donne :

$$P_c^N [(u^N)^2] (x) = \sum_{k=-K}^K \hat{w}_k e^{ikx} \quad (2.22)$$

tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-K}^K \hat{w}_k e^{ikx_j} &= \sum_{k=-2K}^{2K} \left( \sum_{D_k} \hat{u}_p^N \hat{u}_q^N \right) e^{ikx_j} \\ &= \sum_{k=-K}^K \left( \sum_{D_k} \hat{u}_p^N \hat{u}_q^N \right) e^{ikx_j} + \sum_{k=-2K}^{-K-1} \left( \sum_{D_k} \hat{u}_p^N \hat{u}_q^N \right) e^{i(k+N)x_j} + \sum_{k=K+1}^{2K} \left( \sum_{D_k} \hat{u}_p^N \hat{u}_q^N \right) e^{i(k-N)x_j} \\ &= \underbrace{\sum_{k=-K}^K \left( \sum_{D_k} \hat{u}_p^N \hat{u}_q^N \right) e^{ikx_j}}_{\text{terme exact}} + \underbrace{\sum_{k=1}^K \left( \sum_{D_{k-N}} \hat{u}_p^N \hat{u}_q^N \right) e^{ikx_j} + \sum_{k=-K}^{-1} \left( \sum_{D_{k+N}} \hat{u}_p^N \hat{u}_q^N \right) e^{ikx_j}}_{\text{termes repliés parasites}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

où

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j \Rightarrow e^{ikx_j} = e^{i(k \pm N)x_j}$$

De manière synthétique, on a :

$$\hat{w}_k = [(\widehat{u^N})^2]_k + \sum_{p+q=k \pm N} \hat{u}_p^N \hat{u}_q^N \quad (2.24)$$

Le deuxième terme de la somme de droite représente les termes parasites (Fig. 2.1). En général ces termes repliés ne sont pas importants si le spectre de la fonction à projeter décroît rapidement près de la coupure  $k_c = K$ . Ils peuvent de toute façon être éliminés en augmentant à  $M > N$  le nombre de points de collocation pour le même  $k_c = K$ . Reprenons le calcul des coefficients spectraux du terme non-linéaire  $(u^N)^2$  avec cette fois la projection de collocation  $P_c^M$  où  $M > N$ . On obtient immédiatement :

$$\hat{w}_k = [(\widehat{u^M})^2]_k + \underbrace{\sum_{p+q=k \pm M} \hat{u}_p^M \hat{u}_q^M}_{A} = [(\widehat{u^M})^2]_k + \sum_{p+q=k \pm M} \hat{u}_p^M \hat{u}_q^M \quad (2.25)$$

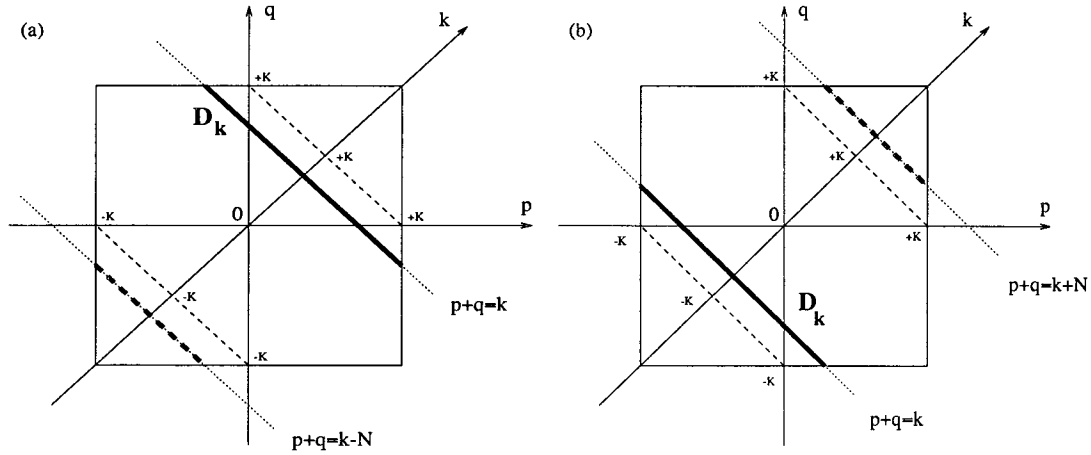


Figure 2.1: Erreurs de repliement (*aliasing*) : modes repliés (---) pour  $k > 0$  (a) et  $k < 0$  (b).

où

$$u^M = \sum_{p=-K}^K \hat{u}_p^M e^{ipx} \quad (2.26)$$

ceci pour  $|p|, |q|$  et  $|k| \leq K$ , soit  $-3K \leq p + q - k \leq 3K$ . On remarque alors facilement que la somme  $\mathcal{A}$  ne contient aucun terme dès que  $M > 3K$ , soit  $M \geq \frac{3}{2}N$ . L'erreur de repliement est ainsi corrigée : c'est la règle des 2/3.

### 2.1.5 Représentation de Fourier.

Pour un problème aux conditions limites  $2\pi$ -périodiques, la base de fonctions naturelle est  $\{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Définitions.**

- Soit  $u$  une fonction  $2\pi$ -périodique au moins continue par morceaux. On appelle *coefficients de Fourier* de  $u$  :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.27)$$

- On définit la *série de Fourier*  $u^N$  de  $u$  :

$$u^N(x) = \sum_{k=-N}^N \hat{u}_k e^{ikx}, \quad x \in [0, 2\pi] \quad (2.28)$$

- Pour une fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier, non nécessairement périodique, sa *transformée de Fourier* est donnée par :

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{R} \quad (2.29)$$

et la *transformée inverse* par :

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{ikx} dk, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.30)$$

Ces définitions s'étendent immédiatement au cas d'un espace à plusieurs dimensions.

Pour  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  :

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.31)$$

et

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.32)$$

### Convergence.

- Si  $u$  est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $[0, 2\pi]$  (i.e. continue par morceaux et de dérivée continue par morceaux), alors  $u^N(x)$  converge vers  $\frac{1}{2}[u(x^+) + u(x^-)]$  et  $u^N$  est  $2\pi$ -périodique.  $u(x^+)$  - resp.  $u(x^-)$  - désigne la valeur de  $u$  évaluée à droite - resp. à gauche - de  $x$ .
- Si  $u$  est continue, alors  $u^N$  converge uniformément vers  $u$ .
- Si  $u$  est discontinue, on perd la convergence uniforme et on montre que :

$$u^N \left( x_0 + \frac{\xi}{N+1/2} \right) \sim \frac{1}{2} [u(x_0^+) + u(x_0^-)] + \frac{1}{\pi} [u(x_0^+) - u(x_0^-)] Si(\xi) \quad (2.33)$$

$$\text{où} \quad Si(\xi) = \int_0^\xi \frac{\sin t}{t} dt \quad (2.34)$$

La fonction ainsi approchée présente des oscillations autour de la discontinuité : c'est le phénomène de Gibbs (Fig. 2.2).

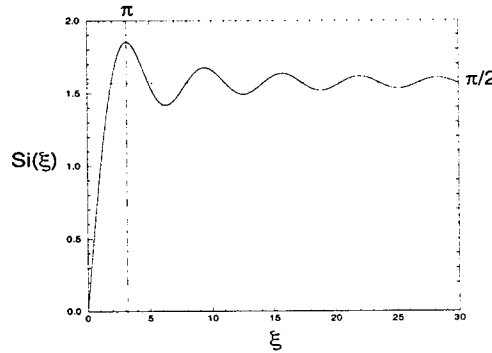


Figure 2.2: Fonction  $Si(\xi)$ .

- Si  $u$  est  $2\pi$ -périodique, de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  et  $u^{(n)}$  intégrable, alors :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi(ik)^n} \int_0^{2\pi} u^{(n)}(x) e^{-ikx} dx \quad (2.35)$$

par intégrations par parties. Soit :

$$|\hat{u}_k| < \frac{A}{k^n} \Rightarrow u^N(x) - u(x) = o\left(\frac{1}{N^n}\right) \quad (2.36)$$

Si  $u$  est indéfiniment dérivable, alors  $u^N$  tend vers  $u$  plus vite que toute puissance de  $1/N$  ("convergence exponentielle"). Pour  $u$  quelconque, ce résultat n'est malheureusement plus vrai, et il existe des exemples (Gottlieb & Orszag, 1977) où cette convergence est seulement algébrique, voire même n'existe pas.

### Dérivation.

- Si  $u$  est continue, de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, alors le coefficient de Fourier de la fonction dérivée est donné par :

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_k = ik \hat{u}_k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.37)$$

- De même, la transformée de Fourier de la fonction dérivée est de la forme :

$$\left[ \widehat{\frac{\partial u}{\partial x}} \right](k) = ik\hat{u}(k), \quad k \in \mathbb{R} \quad (2.38)$$

## 2.2 Résolution des équations de Navier-Stokes.

### 2.2.1 Equations de base.

Le code numérique utilisé a été écrit à l'origine par Vincent & Meneguzzi (1991) pour l'étude de la turbulence homogène isotrope. Ce code intègre les équations de Navier-Stokes 3D instationnaires pour un fluide de densité uniforme en écoulement incompressible :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (2.39a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.39b)$$

où  $\mathbf{u}(\mathbf{x}; t)$  représente le champ de vitesse,  $p(\mathbf{x}; t)$  la pression,  $\rho$  et  $\nu$  la masse volumique, constante, et la viscosité cinématique du fluide.

L'équation (2.39a) s'écrit encore :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (2.40)$$

où l'on a fait apparaître le champ de vortacité  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{u})$ ,  $\times$  représentant le produit vectoriel.

Le domaine d'intégration de ces équations aux dérivées partielles est un parallélépipède de taille  $(L_x, L_y, L_z)$  discrétisé sur un maillage cartésien régulier de pas  $\delta x$  identique dans chacune des directions  $(x, y, z)$ . Les conditions aux limites sont des conditions périodiques dans les trois directions :

$$[\mathbf{u}, p](x + L_x, y, z; t) = [\mathbf{u}, p](x, y + L_y, z; t) = [\mathbf{u}, p](x, y, z + L_z; t) = [\mathbf{u}, p](x, y, z; t) \quad (2.41)$$

A ces conditions limites viennent s'ajouter des conditions initiales pour la simulation temporelle :  $\mathbf{u}(\mathbf{x}; t = 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x})$  et  $p(\mathbf{x}; t = 0) = p^0(\mathbf{x})$ .

Les transformées de Fourier spatiales des équations (2.39) donnent :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\widehat{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}}) = -ik \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) - \nu k^2 \hat{\mathbf{u}} \quad (2.42a)$$

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.42b)$$

où  $\hat{f}(\mathbf{k})$  désigne la transformée de Fourier de la fonction  $f(\mathbf{x})$  (cf §2.1.5).

La condition d'incompressibilité (2.42b) indique que la solution en vitesse se trouve sur le plan orthogonal à  $\mathbf{k}$ , plan des fonctions à divergence nulle.

Soit  $\mathbf{P}$  la projection sur ce plan suivant  $\mathbf{k}$  :

$$P_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2 \quad (2.43)$$

En appliquant  $\mathbf{P}$  à (2.42), le terme en pression disparaît. Il reste :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbf{P}[\widehat{\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}}] - \nu k^2 \hat{\mathbf{u}} \quad (2.44)$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\mathbf{u}} e^{\nu k^2 t}) = \mathbf{P}[\widehat{\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}}] e^{\nu k^2 t} \quad (2.45)$$

en intégrant exactement le terme de diffusion visqueuse. Le terme de droite est résolu à chaque instant par une méthode pseudo-spectrale : à partir de  $\hat{\mathbf{u}}$ , on calcule  $\hat{\boldsymbol{\omega}} = i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}}$  dans l'espace spectral. Par transformation de Fourier inverse, on revient à  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  dans l'espace physique où l'on calcule le terme non-linéaire  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ . On retourne ensuite dans l'espace spectral pour calculer la projection de  $\widehat{\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}}$  sur le plan des fonctions à divergence nulle. On peut alors procéder à l'avance en temps. Les transformées de Fourier directe et inverse sont en pratique calculées au moyen des routines de Transformée de Fourier Rapide de la bibliothèque scientifique de Cray (csfft3d et scfft3d).

Dans la plupart des simulations, l'erreur de repliement n'est pas corrigée et on effectue seulement une troncature sphérique dans l'espace spectral à  $|\mathbf{k}| > r k_{\max}$  avec pour rayon de troncature  $r = 1$  ( $k_{\max} = \pi/\delta x$  correspond ici au nombre d'onde maximal dans chacune des directions de l'espace spectral). Ce choix est justifié a priori par les tests antérieurs effectués par Vincent & Meneguzzi (1991) qui montrent que la correction des erreurs de repliement n'entraîne pas de différence notable dans leurs simulations numériques directes de la turbulence homogène. A posteriori, on a pris soin de vérifier sur des simulations tests que ces erreurs ne dénaturaient pas la dynamique des écoulements étudiés. Cependant certaines simulations "sensibles" concernant notamment le régime non-linéaire des instabilités secondaires (chapitre 4) et l'évolution spatio-temporelle d'un paquet d'ondes (chapitre 5) ont systématiquement été corrigées en appliquant la règle des 2/3 (rayon de troncature  $r = 2/3$ , cf §2.1.4).

## 2.2.2 Schéma temporel.

Le schéma d'intégration temporelle est de type différences finies : il s'agit d'un schéma Adams-Bashforth du second ordre :

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^n e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t} + \frac{3}{2} \delta t \mathbf{F}^n e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t} - \frac{1}{2} \delta t \mathbf{F}^{n-1} e^{-2\nu \mathbf{k}^2 \delta t} \quad (2.46)$$

où  $\mathbf{F}^n = \mathbf{P}[\mathbf{u}^n \times \widehat{\boldsymbol{\omega}}^n]$  et  $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}(\mathbf{x}; n \delta t)$ ,  $\delta t$  étant le pas de temps.

Ce schéma est conditionnellement stable pour  $\delta t = \mathcal{O}[(\delta x/U)^{4/3}]$ , où  $\delta x$  désigne le pas en espace et  $U$  une échelle de vitesse caractéristique de l'écoulement. Ce critère est plus strict que la condition de Courant-Friedrichs-Levy classique (Canuto *et al.*, 1988).

Le premier pas de temps s'effectue par un schéma de Runge-Kutta du second ordre :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}^{1/2} &= \hat{\mathbf{u}}^0 e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t/2} + \left( \frac{1 - e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t/2}}{\nu \mathbf{k}^2} \right) \mathbf{F}^0 \\ \hat{\mathbf{u}}^1 &= \hat{\mathbf{u}}^0 e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t} + \left( \frac{1 - e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t}}{\nu \mathbf{k}^2} \right) \mathbf{F}^{1/2} \end{cases} \quad (2.47)$$

## 2.3 Analyse de stabilité linéaire d'un jet cylindrique.

La dynamique des jets est dominée initialement par la croissance d'ondes prenant naissance dans la couche de mélange du jet. L'évolution de ces ondes peut être décrite par une analyse de *stabilité linéaire*, où l'on considère le développement de perturbations infinitésimales sur un écoulement de base donné. Les modes instables issus de cette analyse seront utilisés par la suite comme conditions initiales pour les simulations numériques directes.

Le §2.3.1 présente la mise en équation du problème aux perturbations pour un fluide non visqueux. La résolution de l'équation ainsi dérivée est exposée au §2.3.2 et une validation du code pseudo-spectral présenté précédemment est proposée, en comparant l'évolution des modes instables calculée par simulation numérique directe aux prédictions de l'analyse de stabilité linéaire (§2.3.3).

### 2.3.1 Formulation du problème linéarisé.

L'écoulement incompressible d'un fluide non visqueux est gouverné par les équations d'Euler :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) \quad (2.48a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.48b)$$

où  $\mathbf{u}(\mathbf{x}; t) = (u_x, u_r, u_\varphi)$  et  $\mathbf{x} = (x, r, \varphi)$  en géométrie cylindrique.

Le champ de vitesse total  $\mathbf{u}$  est décomposé en la somme d'un écoulement de base axisymétrique, parallèle,  $\mathbf{U} = U(r) \mathbf{e}_x$ , et d'un champ de perturbation infinitésimale  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}; t)$  avec  $|\mathbf{u}'| \ll |U|$ .

Cette décomposition est injectée dans les équations d'Euler (2.48) qui sont ensuite linéarisées en négligeant les termes quadratiques en  $\mathbf{u}'$ . Il vient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\nabla \left( \frac{p'}{\rho} \right) \quad (2.49a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (2.49b)$$

où  $p'$  désigne le champ de pression associé à  $\mathbf{u}'$ .

Dans cette étude, on considère l'écoulement de base défini par :

$$U(r) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left[ \frac{R}{4\theta} \left( \frac{1}{r} - r \right) \right] \right\} \quad (2.50)$$

où la vitesse et la coordonnée radiale sont respectivement adimensionnées par la vitesse du jet sur l'axe et le rayon  $R$  du jet. Cet écoulement de base est caractérisé par le paramètre sans dimension  $R/\theta$  où  $\theta$  est l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche de mélange du jet (Fig. 2.3).

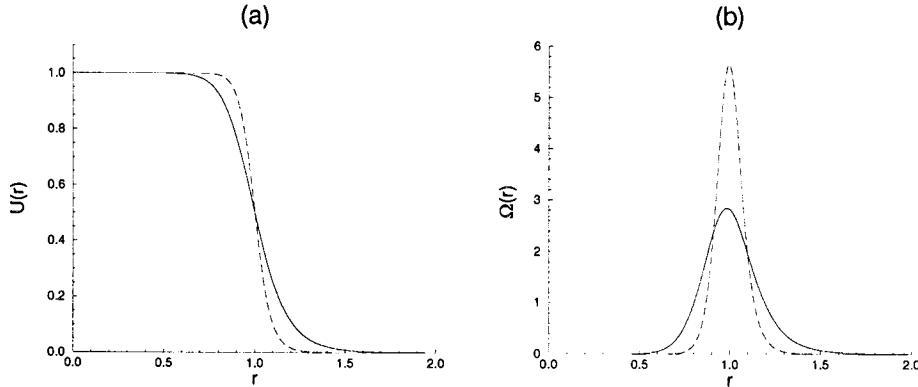


Figure 2.3: Profils de vitesse (a) et de vorticité (b) de l'écoulement de base considéré dans l'analyse de stabilité linéaire pour  $R/\theta = 11.3$  (trait continu) et  $R/\theta = 22.6$  (trait discontinu).

Etant donné cet écoulement de base, la solution du système linéarisé (2.49) peut être recherchée sous la forme d'une combinaison de *modes normaux* :

$$\begin{bmatrix} u'_x \\ u'_r \\ u'_\varphi \\ p'/\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(r) \\ iG(r) \\ H(r) \\ P(r) \end{bmatrix} \exp[i(kx - \omega t + m\varphi)] + cc \quad (2.51)$$

où  $k$ ,  $m$  et  $\omega = kc$  correspondent respectivement aux nombres d'onde longitudinal et azimutal (entier) et à la pulsation du mode considéré, de vitesse de phase  $c$ .  $cc$  désigne le complexe conjugué.

L'injection de ce type de solution dans les équations d'Euler linéarisées, associée à la donnée de conditions limites, conduit à un problème aux valeurs propres pour lequel il n'existe de solution que si  $k$ ,  $m$  et  $\omega$  vérifient une relation dite de *dispersion* :

$$D[k, \omega; m] = 0 \quad (2.52)$$



Classiquement, deux approches sont alors possibles. Une analyse de stabilité *spatiale* recherche les branches  $k(\omega; m)$  complexes comme fonctions de la pulsation  $\omega$  réelle. Les modes *temporels* sont eux donnés par les branches  $\omega(k; m)$ , où la pulsation complexe  $\omega$  est considérée comme une fonction du nombre d'onde axial  $k$  réel.

Bien que le cas spatial se compare plus facilement avec les expériences pour les écoulements ouverts, on choisit de faire ici une étude de stabilité temporelle. Ce choix est dicté par le fait que les simulations numériques utilisées par la suite pour décrire l'évolution non-linéaire du jet sont de nature temporelle (cf chapitre 1). Pour une étude de stabilité spatiale du profil de vitesse (2.50), on se reportera à la revue de Michalke (1984).

Pour  $k$  réel et  $m$  entier donnés, on cherche donc à calculer la pulsation complexe  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  correspondante (ou de manière équivalente la vitesse de phase complexe  $c = \omega/k$ ) vérifiant la relation de dispersion. Le mode propre associé sera alors stable si  $\omega_i < 0$  ( $c_i < 0$ , décroissance exponentielle), neutre si  $\omega_i = 0$  ( $c_i = 0$ ) et instable pour  $\omega_i > 0$  ( $c_i > 0$ , croissance exponentielle). On décrit ainsi l'évolution temporelle d'une perturbation initiale de faible amplitude, de nombre d'onde  $k$  donné.

Les équations pour les amplitudes complexes des différents modes propres s'obtiennent en injectant la décomposition (2.51) dans les équations d'Euler linéarisées (2.49) :

$$k(U - c)F + U'G + kP = 0 \quad (2.53a)$$

$$k(U - c)G - P' = 0 \quad (2.53b)$$

$$k(U - c)H + imP/r = 0 \quad (2.53c)$$

$$kF + G' + G/r + mH/r = 0 \quad (2.53d)$$

où ' désigne la dérivée suivant  $r$ .

A ce système d'équations différentielles ordinaires viennent s'ajouter des conditions limites, liées à la contrainte que le champ de perturbation doit rester fini en  $r = 0$  et décroître vers 0 en  $r = \infty$ . Ces conditions dépendent de la valeur du nombre d'onde azimutal  $m$  :

$$m = 0 : H \equiv 0, \quad G(0) = 0; \quad P(0) \text{ et } F(0) \text{ finis} \quad (2.54a)$$

$$m = \pm 1 : G(0) \pm H(0) = 0; \quad P(0) = F(0) = 0 \quad (2.54b)$$

$$|m| > 1 : F(0) = G(0) = H(0) = P(0) = 0 \quad (2.54c)$$

$$\forall m : F(\infty) = G(\infty) = H(\infty) = P(\infty) = 0 \quad (2.54d)$$

Les trois composantes de vitesse peuvent s'exprimer en fonction de la pression :

$$F = -\frac{U'P'}{k^2(U - c)^2} - \frac{P}{U - c} \quad (2.55a)$$

$$G = \frac{P'}{k(U - c)} \quad (2.55b)$$

$$H = -\frac{mP}{kr(U - c)} \quad (2.55c)$$

On obtient alors une équation différentielle ordinaire du second ordre pour la seule pression, de type équation de Rayleigh :

$$P'' + P' \left( \frac{1}{r} - \frac{2U'}{U - c} \right) - P \left( k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) = 0 \quad (2.56)$$

associée aux conditions aux limites (2.54).

On est donc amené à résoudre un problème aux valeurs propres pour la pression. La relation de dispersion  $\omega(k; m)$  associée peut être calculée explicitement pour des écoulements de base simples (cf Batchelor & Gill, 1962). Ce n'est pas le cas pour le profil (2.50) et il faut avoir recours à une intégration numérique.

L'équation différentielle (2.56) possède une singularité dans le plan  $r$  complexe, définie par  $U(r_c) = c$ . L'existence de ce *point critique*, liée à l'hypothèse de fluide non-visqueux, demande quelques précautions quant à l'intégration de (2.56) pour les modes stables ( $c_i < 0$ ) ou neutres ( $c_i = 0$ ). Mais on montre que pour  $c_i > 0$  l'équation est non-singulière sur l'axe  $r$  réel et fournit bien les solutions non-visqueuses physiquement pertinentes (Lin, 1955). On ne s'intéressera par la suite qu'à ces modes instables.

### 2.3.2 Méthode de résolution.

La résolution numérique du problème aux valeurs propres (2.56) est effectuée au moyen d'une méthode de tir (Abid *et al.*, 1994).

L'équation différentielle du second ordre (2.56) est réécrite sous la forme d'un système de deux équations différentielles du premier ordre pour les fonctions complexes  $P_1(r)$  et  $P_2(r)$  :

$$\begin{cases} P_1' &= P_2 \\ P_2' &= \frac{2U'}{U-c}P_2 + \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)P_1 \end{cases} \quad (2.57)$$

auxquelles viennent s'ajouter les conditions limites en pression correspondantes (2.54).

La méthode de résolution est la suivante : à  $k$  et  $m$  fixés, et pour une valeur donnée de  $\omega$  complexe, le système (2.57) est intégré pour  $r$  variant de 0 à 1, puis pour  $r$  variant de  $r_{\max} \gg 1$  à 1. La position radiale  $r = 1$ , correspondant au rayon adimensionné du jet, est ici choisie comme point de raccordement. L'intégration du système (2.57) est effectuée par la routine *ivpag* de la bibliothèque IMSL, avec une méthode de Gear. On peut ensuite évaluer le *wronskien*, a priori complexe, au point de raccord :

$$W(\omega) = \frac{P_2(1^-)}{P_1(1^-)} - \frac{P_2(1^+)}{P_1(1^+)} \quad (2.58)$$

où les signes + et - désignent respectivement les valeurs obtenues en intégrant à droite et à gauche du point de raccord.

La pulsation  $\omega$  est effectivement une valeur propre si  $W$  est nul. On a ainsi à résoudre un système de deux équations non-linéaires pour les deux inconnues  $\omega_r$  et  $\omega_i$  :

$$\begin{cases} W_r(\omega_r, \omega_i) &= 0 \\ W_i(\omega_r, \omega_i) &= 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

où  $W = W_r + iW_i$ . Les racines de ce système sont calculées par la routine *neqnf* d'IMSL.

Le résultat final de cette procédure est la valeur propre complexe  $\omega(k; m)$ . La fonction propre  $P(r)$  correspondante est obtenue par intégration finale de (2.57) de  $r = 0$  à  $r_{\max}$  pour la valeur convergée de  $\omega$ . Les composantes du champ de vitesse associé sont dérivées de (2.55). On rappelle que les résultats ainsi obtenus n'ont une signification physique que si  $\omega_i > 0$  (mode instable).

Les résultats sont présentés dans la section suivante, en parallèle avec les résultats issus de simulations numériques directes.

### 2.3.3 Résultats numériques.

Le code pseudo-spectral présenté au §2.2 résout les équations 3D complètes de Navier-Stokes. Une validation du code consiste à simuler numériquement l'évolution temporelle d'un ou plusieurs modes propres instables obtenus par résolution de l'équation de Rayleigh (2.56) et à comparer les résultats obtenus avec les prédictions de l'analyse de stabilité linéaire. En particulier, si l'amplitude initiale des modes est suffisamment faible, on doit alors observer pour chacun des modes une croissance exponentielle dont le taux de croissance est prédit par l'analyse de stabilité linéaire. De plus, la forme des modes doit rester constante, au facteur d'amplification près.

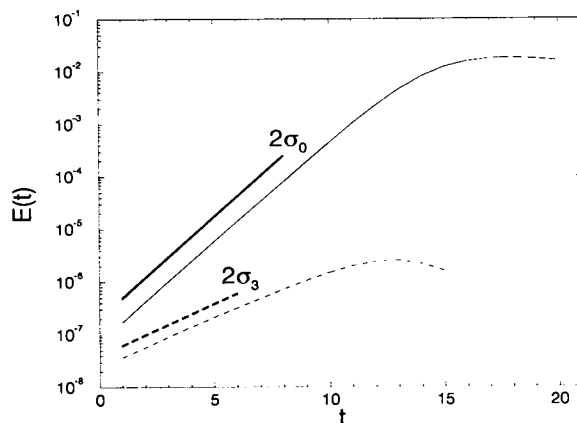
Une première simulation numérique directe est initialisée à  $t = 0$  par l'écoulement de base (2.50) avec  $R/\theta = 11.3$ , perturbé par le mode propre axisymétrique ( $m = 0$ ) et le mode hélicoïdal  $m = 3$  de

nombre d'onde axial  $k\theta = 0.225$ . Ces modes sont instables et le champ de perturbation associé, obtenu par intégration de l'équation de Rayleigh (2.56), est injecté initialement dans la simulation avec une amplitude maximale de l'ordre de 0.1% de la vitesse du jet sur l'axe.

Une seule longueur d'onde axiale est résolue numériquement, sur un domaine d'intégration parallélépipédique discrétisé par  $32 \times 64^2$  points de collocation. Le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement du jet est  $Re_\theta = \theta\Delta U/\nu = 100$ .

L'écoulement de base (2.50) ne vérifie pas les équations de Navier-Stokes, mais seulement les équations d'Euler. Pour compenser la diffusion visqueuse de l'écoulement de base, on introduit classiquement un terme anti-diffusif ( $-\nu\delta U$ ) dans les équations de Navier-Stokes (2.39), où  $\Delta U$  désigne ici le laplacien du profil de base. Le profil  $U(r)$  donné par (2.50) est alors maintenu au cours du temps, ce qui permet de comparer les résultats de la simulation avec l'étude de stabilité linéaire, effectuée dans l'hypothèse d'un écoulement de base *parallèle*. Cet artifice est légitime si le temps de diffusion visqueuse  $\theta^2/\nu$  est effectivement beaucoup plus grand que le temps caractéristique d'évolution des ondes d'instabilité  $\theta/\Delta U$ , ce qui est bien vérifié pour  $Re_\theta \gg 1$ .

L'évolution temporelle de l'énergie des modes  $m = 0$  et  $m = 3$  obtenue par simulation numérique directe est reproduite sur la figure 2.4. Dans les deux cas, la simulation reproduit bien un régime de croissance exponentielle (taux de croissance  $\sigma_0$  et  $\sigma_3$ ) avant que les non-linéarités ne viennent faire saturer l'amplitude des modes.



**Figure 2.4:** Simulation numérique directe de l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante des modes  $m = 0$  (trait continu) et  $m = 3$  (trait discontinu) à  $k\theta = 0.225$  pour l'écoulement de base  $R/\theta = 11.3$ .

Le même type de simulation est effectué pour d'autres valeurs de  $k\theta$  ( $k\theta = 0.1125$  et  $0.3375$ ). Les taux de croissance mesurés sont reportés sur la figure 2.5 et comparés aux prédictions théoriques. Ces taux de croissance sont en bon accord avec les résultats issus du problème aux valeurs propres, si l'on considère que ces derniers sont obtenus dans le cadre d'un fluide non-visqueux. L'effet stabilisant de la viscosité se fait sentir dans la simulation à nombre de Reynolds fini et conduit à une correction du taux de croissance (Morris, 1976).

Les modes propres issus de l'étude non-visqueuse introduits initialement dans les simulations numériques subissent de la même façon une correction visqueuse. Les amplitudes théoriques (fluide non-visqueux) des composantes de vitesse de ces modes propres sont représentées sur les figures 2.6(a) et 2.7(a) et comparées à celles des mêmes modes propres obtenus par simulation numérique à nombre de Reynolds fini [Figs. 2.6(b) et 2.7(b)]. Il apparaît clairement que la viscosité a tendance à atténuer les forts gradients. Les distributions radiales des différentes composantes des modes mesurés dans la simulation numérique sont toutefois très similaires à celles correspondant aux modes propres théoriques et pendant le régime de croissance exponentielle leur structure spatiale reste identique au facteur d'amplification près, une fois terminé un court régime transitoire de correction visqueuse des modes injectés initialement.

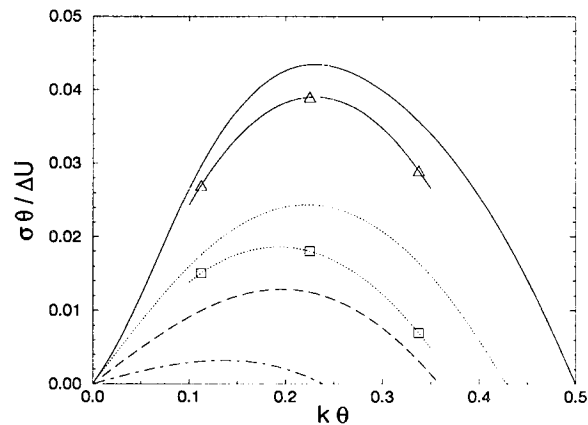


Figure 2.5: Comparaison entre taux de croissance temporels théoriques, non visqueux, et numériques, visqueux ( $Re_\theta = 100$ ) :  $R/\theta = 11.3$ , modes  $m = 0$  (trait continu : théorie,  $\Delta$  : numérique),  $m = 3$  (pointillés : théorie,  $\square$  : numérique). Les courbes en traits discontinu et mixte correspondent respectivement aux taux de croissance théoriques pour  $m = 4$  et  $m = 5$  (à noter la forte stabilisation des modes lorsque le nombre d'onde azimutal augmente). Nombre d'onde et taux de croissance sont adimensionnés par l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$ .  $\Delta U$  désigne le saut de vitesse à travers la couche de mélange du jet.

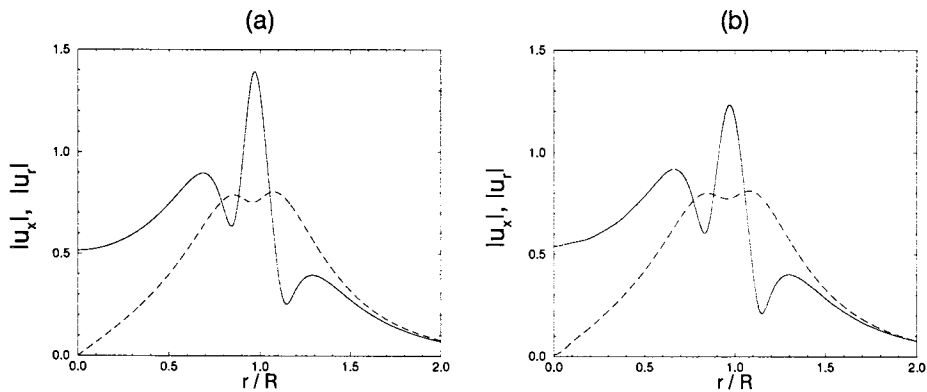


Figure 2.6: Mode propre axisymétrique ( $m = 0$ ) du jet  $R/\theta = 11.3$ ,  $k\theta = 0.225$  : amplitudes de vitesse axiale (trait continu) et radiale (trait discontinu), prédiction théorique en non visqueux (a) et résultats numériques en visqueux (b).

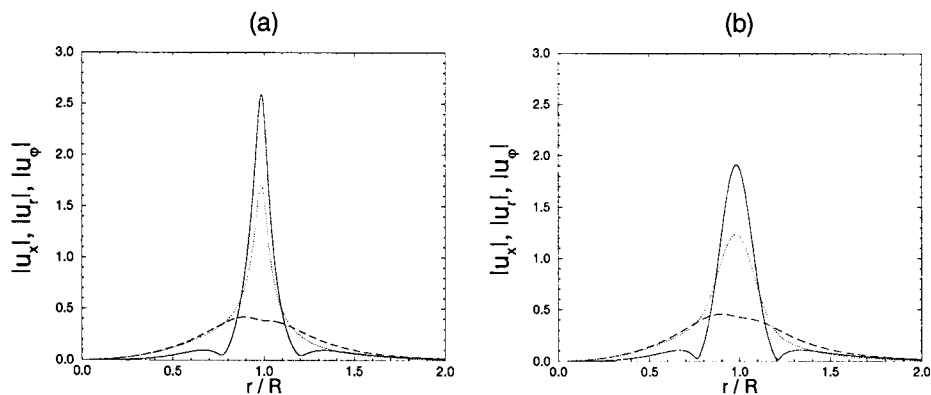


Figure 2.7: Mode propre hélicoïdal ( $m = 3$ ) du jet  $R/\theta = 11.3$ ,  $k\theta = 0.225$  : amplitudes de vitesse axiale (trait continu), radiale (trait discontinu) et azimutale (pointillés), prédiction théorique en non visqueux (a) et résultats numériques en visqueux (b).

## Chapitre 3

# Mécanismes d'induction tourbillonnaire dans les jets cylindriques.

Ce chapitre présente et analyse qualitativement la dynamique tridimensionnelle d'un jet cylindrique soumis à des perturbations longitudinales et azimutales (Brancher *et al.*, 1994). L'évolution temporelle d'un tel écoulement est obtenue au moyen de simulations numériques directes dont les conditions initiales sont décrites au §3.1. Les résultats numériques mettent en évidence différents mécanismes d'induction tourbillonnaire consistant en :

- la réorientation de la vorticité azimutale initiale du jet, à la fois dans et entre les anneaux tourbillonnaires (§3.2),
- l'éjection radiale de fluide du jet sous l'action de paires de tourbillons longitudinaux contrarotatifs (§3.3).

En outre, les simulations numériques directes confirment l'existence d'une instabilité secondaire 3D liée à une destabilisation de la rangée d'anneaux tourbillonnaires par des perturbations non-axisymétriques.

### 3.1 Conditions initiales.

** coulement de base.** Il s'agit d'étudier l'évolution temporelle d'un jet cylindrique soumis à des perturbations axiales et azimutales. L'écoulement de base considéré est donné par le profil de vitesse axiale axisymétrique étudié au chapitre 2 :

$$\mathbf{U} = U(r) \mathbf{e}_x \quad \text{avec} \quad U(r) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left[ \frac{R}{4\theta} \left( \frac{1}{r} - r \right) \right] \right\} \quad (3.1)$$

où la distance radiale  $r$  et la vitesse axiale  $U$  ont été adimensionnées respectivement par le rayon du jet  $R$  et la vitesse du jet sur l'axe  $U_j$ . Le temps  $t$  est alors adimensionné par  $R/U_j$ . Ce profil de vitesse dépend du paramètre sans dimension  $R/\theta$  où  $\theta$  est l'épaisseur de la quantité de mouvement de la couche de mélange du jet.

**Perturbation axiale.** Une analyse de stabilité linéaire temporelle de ce profil de vitesse est menée numériquement : une méthode de tir est utilisée pour intégrer l'équation de Rayleigh en coordonnées cylindriques (cf §2.3) afin de générer les modes linéaires instables de l'écoulement de base (3.1). Chacun de ces modes est caractérisé par un nombre d'onde azimutal  $m$  et un nombre de Strouhal  $St = R/\lambda$  où  $\lambda = 2\pi/k$  correspond à la longueur d'onde axiale du mode<sup>1</sup> et  $k$  son nombre d'onde axial .

<sup>1</sup>Classiquement le nombre de Strouhal est défini par  $St = fD/U_j$  où  $D$  est le diamètre du jet,  $U_j$  la vitesse du jet sur l'axe. La fréquence  $f$  est reliée à la longueur d'onde  $\lambda$  via la relation  $f = c_r/\lambda$ , où la vitesse de phase  $c_r$  est de l'ordre de  $U_j/2$ . D'où la définition retenue :  $St = R/\lambda$ .

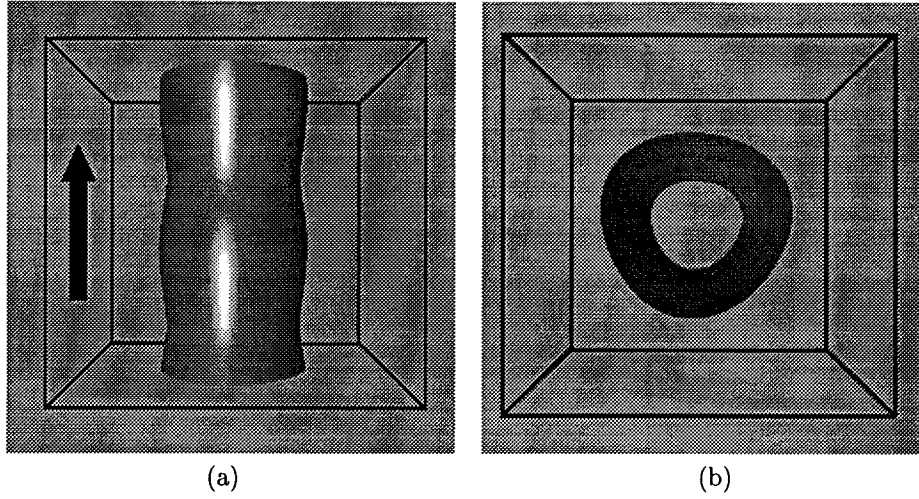


Figure 3.1: Conditions initiales : perturbation longitudinale correspondant au mode le plus instable du profil de base (a) et modulation azimuthale sous la forme d'une corrugation de l'écoulement de base à  $n = 3$  (b).

L'écoulement de base considéré dans ce chapitre correspond à  $R/\theta = 11.3$ . Pour ce profil, le mode linéaire le plus instable, et par conséquent celui le plus susceptible d'apparaître naturellement, est axisymétrique ( $m = 0$ ) et correspond à un nombre de Strouhal  $St = 0.4$ , donc proche du mode "préféré" du jet observé expérimentalement. Pour toutes les simulations numériques étudiées dans cette partie, le profil de base à  $R/\theta = 11.3$  est perturbé à  $t = 0$  par ce mode linéaire avec une amplitude maximale  $\eta \sim 3\%$  [Fig. 3.1(a)].

Par l'introduction d'une telle perturbation initiale, on induit un développement cohérent de l'instabilité *primaire* du jet (instabilité de Kelvin-Helmholtz) qui conduit à la formation d'une allée périodique régulière d'anneaux tourbillonnaires, analogue de la synchronisation en fréquence obtenue expérimentalement par forçage du jet.

**Perturbation azimuthale.** Le développement d'éventuelles instabilités *secondaires* tridimensionnelles est contrôlé en ajoutant aux conditions initiales précédentes une perturbation azimuthale bien définie de l'écoulement de base. Plus précisément, un léger déplacement radial est appliqué à  $t = 0$  au point d'inflexion du profil de base, qui s'écrit alors :

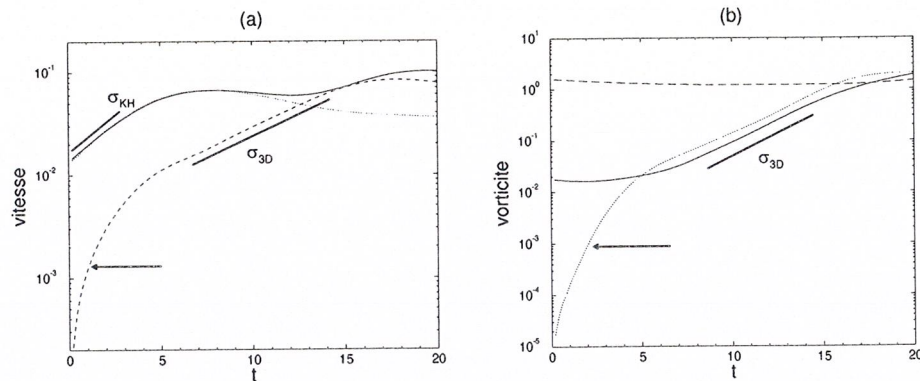
$$U(r, \varphi) = U \{r [1 + \varepsilon \cos(n\varphi + \delta)]\} \quad (3.2)$$

où  $\varphi$  est la coordonnée azimuthale,  $\delta$  une référence pour la phase azimuthale,  $n$  le nombre d'onde azimuthal de la perturbation et  $\varepsilon$  l'amplitude de la déformation. Une telle modulation, déjà utilisée numériquement par Martin & Meiburg (1991), correspond à une sortie de jet ondulée (*corrugated nozzle*<sup>2</sup>) comme celle employée dans les expériences (Lasheras *et al.*, 1992). Un contrôle passif du même genre a aussi été utilisé dans les expériences de Monkewitz & Pfizenmaier (1991) pour essayer de fixer la position azimuthale des jets latéraux. L'amplitude de perturbation retenue pour les simulations est  $\varepsilon = 5\%$  et le nombre d'onde azimuthal  $n$  est choisi égal à 3 [Fig. 3.1(b)]. Ce choix, a priori arbitraire, est justifié a posteriori par le fait qu'il apparaît "naturellement" dans les simulations où la corrugation de l'écoulement de base est remplacée par un fort bruit blanc (cf §3.4).

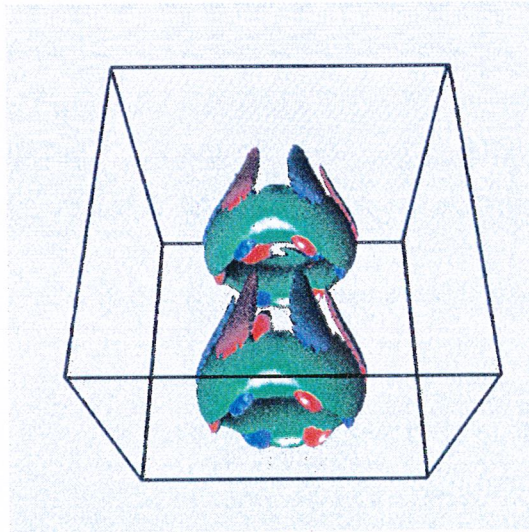
Pour cette première étude, qualitative, de la dynamique des jets cylindriques, les simulations sont effectuées à relativement basse résolution ( $64^3$ ). Le domaine d'intégration s'étend sur deux longueurs d'onde axiales dans le sens de l'écoulement [cf Fig. 3.1(a)]. Le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement est de 70.

<sup>2</sup>Par abus de langage on parlera alors de "corrugation" et de jet "corrugué".

### 3.2 Réorientation de la vorticité initiale.



**Figure 3.2:** (a) Evolution temporelle de la vitesse quadratique moyenne radiale (trait continu), azimutale (trait discontinu) pour le jet corrugué à  $n = 3$ . Les traits pointillés correspondent à l'évolution temporelle de la vitesse radiale pour un jet purement axisymétrique. (b) Evolution temporelle de la vorticité quadratique moyenne longitudinale (pointillés), radiale (trait continu) et azimutale (trait discontinu).



**Figure 3.3:** Saturation de l'instabilité primaire sous forme de deux anneaux tourbillonnaires concentrant la plus grande partie de la vorticité azimutale initiale (isosurfaces en vert) et apparition de régions de vorticité longitudinale positive (bleu) et négative (rouge) dans la tresse et les anneaux. Les isosurfaces représentées correspondent à un seuil de 40% environ du maximum du champ considéré.

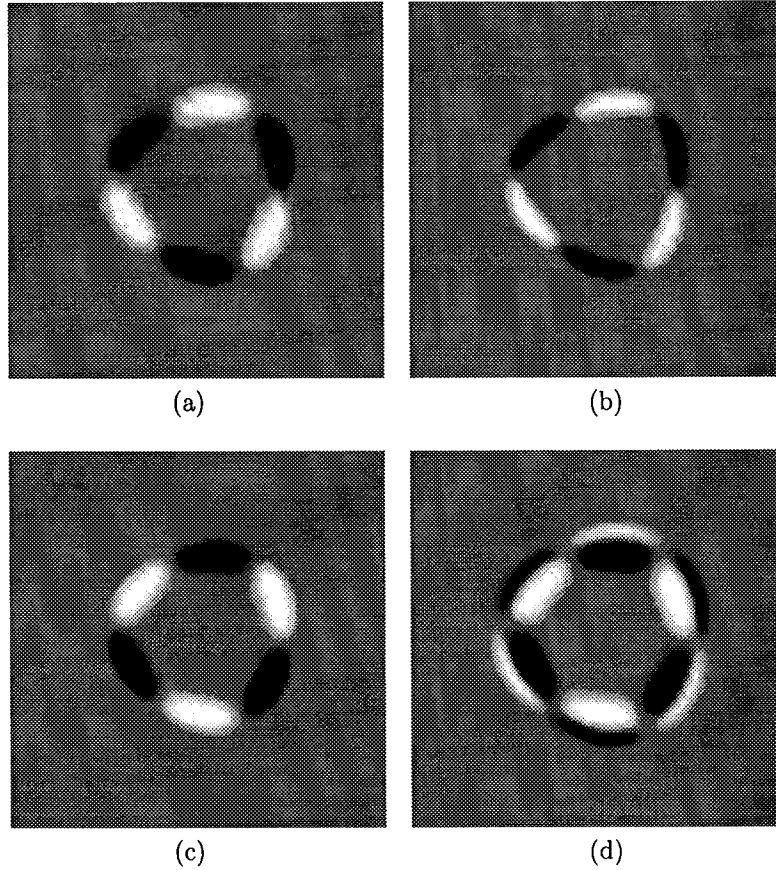
La figure 3.2(a) présente l'évolution temporelle de l'énergie moyenne contenue dans les composantes radiales et azimutales de la vitesse pour le jet corrugué décrit dans la section précédente. La vitesse radiale, associée à l'instabilité primaire du jet (Kelvin-Helmholtz) et à la formation des anneaux tourbillonnaires croît exponentiellement pendant les premiers instants avec un taux de croissance en bon accord avec les prédictions de la théorie linéaire (cf §2.3). La saturation apparaît vers  $t = 6$ , correspondant à la formation d'anneaux tourbillonnaires cohérents (Fig. 3.3).

Alors que l'instabilité primaire croît puis sature au début de la simulation, la corrugation imposée à l'écoulement de jet à  $t = 0$  conduit à la réorientation de la vorticité, initialement azimutale et radiale. Ainsi, il a été remarqué que très tôt dans la simulation des régions de vorticité longitudinale de faible intensité apparaissent dans l'écoulement, à la fois dans l'anneau et dans la région connectant deux anneaux voisins, la tresse (*braid*) (Fig. 3.3). Cette réorientation est responsable de la croissance de la vitesse





azimutale et de la vorticité longitudinale (flèches de la figure 3.2) et correspond à une tridimensionnalisation du jet, qui apparaît avant la saturation de l'instabilité primaire, suggérant une perte d'axisymétrie des anneaux mêmes.



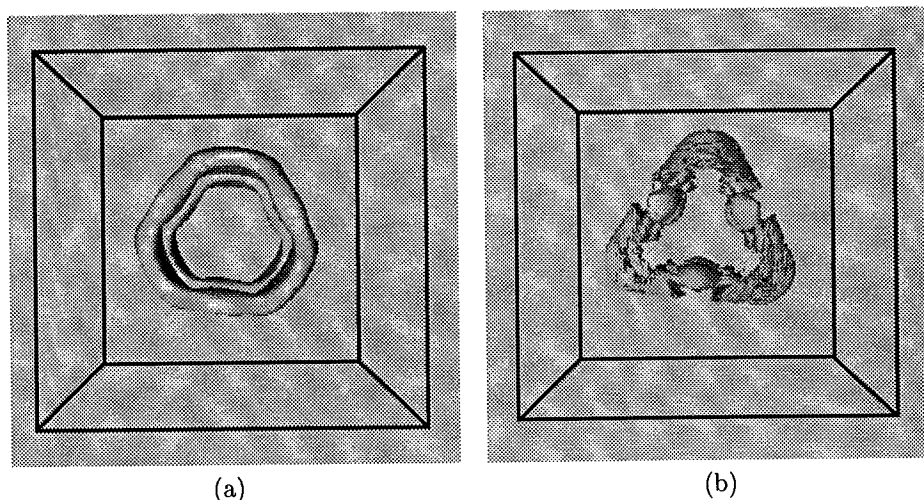
**Figure 3.4:** Coupes transversales du champ de vorticité longitudinale dans la tresse : (a)  $t = 1$ , (b)  $t = 2$  ; dans l'anneau : (c)  $t = 1$ , (d)  $t = 2$ . L'échelle de gris varie de  $-0,06$  (noir) à  $0,06$  (blanc) à  $t = 1$  (a, c) et de  $-0,13$  (noir) à  $0,13$  (blanc) à  $t = 2$  (b, d).

La figure 3.4(a) reproduit une section transversale du champ de vorticité longitudinale dans la tresse au début de la simulation ( $t = 1$ ). On observe une distribution azimutale de la vorticité longitudinale synchronisée avec la corrugation initiale sous la forme de nappes tourbillonnaires de valeurs alternativement positives (blanc) et négatives (noir). A un instant ultérieur [ $t = 2$ , Fig. 3.4(b)], la région de la tresse présente une distribution plus concentrée et une déformation azimutale sensiblement amplifiée comparé avec l'ondulation initiale. Par contraste, la vorticité dans la région de l'anneau à  $t = 1$  [Fig. 3.4(c)] est distribuée en opposition de phase avec la configuration correspondante dans la tresse [cf Fig. 3.4(a)]. Ainsi, à un même emplacement azimutal, le signe de la vorticité longitudinale est inversé entre les anneaux et la tresse. Finalement, à  $t = 2$ , une nouvelle distribution de vorticité longitudinale vient se placer à la périphérie extérieure [Fig. 3.4(d)]. Une visualisation 3D du champ de vorticité (Fig. 3.3) révèle que cette vorticité provient de la tresse située juste en aval, qui commence à s'enrouler autour des anneaux.

De plus, si on observe les isosurfaces de la vorticité azimutale, on s'aperçoit sur une vue de face [Fig. 3.5(a), à comparer avec la figure 3.1(b)] que les anneaux ont une déformation azimutale en opposition de phase avec la corrugation initiale. Une fois cette configuration prise, on n'observe pas par la suite de changement, et on la retrouve en fin de simulation [Fig. 3.5(b)].

En vue d'expliquer cet arrangement des structures tourbillonnaires au début de la simulation, important car il conditionne la topologie future de l'écoulement, des arguments d'induction tourbillonnaire sont proposés ci-après.

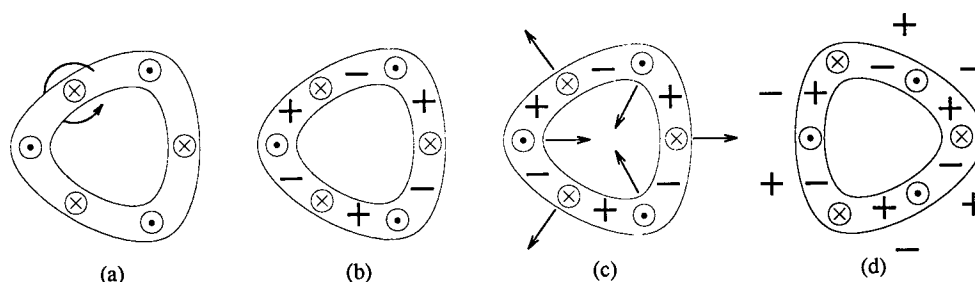




**Figure 3.5:** Déformation azimutale des anneaux : vue de face des isosurfaces du champ de vorticité azimutale à  $t = 3$  (a) et  $t = 16$  (b). Seuil à 40 % du maximum. A noter le changement d'orientation par rapport à la déformation initiale [Fig. 3.1(b)].

### 3.2.1 Dans la région des anneaux.

Les schémas de la figure 3.6 résument le mécanisme d'induction tourbillonnaire prenant place dans la région des anneaux. Chacun des diagrammes fournit une interprétation des distributions de vorticité longitudinale correspondantes de la figure 3.4.



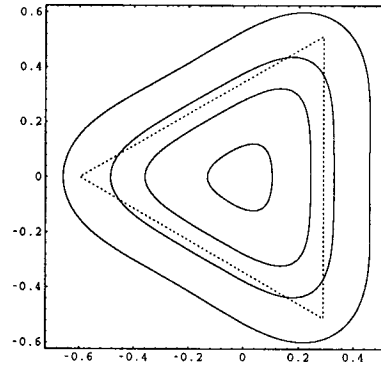
**Figure 3.6:** Décomposition du mécanisme d'induction tourbillonnaire dans la région des anneaux. Les mouvements relatifs sont représentés par les flèches, les croix et les points cerclés alors que les signes + et - font référence au signe de la vorticité longitudinale locale, le signe + correspondant à la vorticité dirigée vers l'aval (la vorticité azimutale initiale est dirigée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).

A cause de leur courbure plus importante (Batchelor, 1967), les lobes externes des anneaux tourbillonnaires déformés par la corrugation initiale tendent par auto-induction à voyager plus vite [points cerclés, Fig. 3.6(a)] alors que les creux internes voyagent plus lentement (croix cercl es). Le mouvement relatif qui s'ensuit crée une distribution de vorticité longitudinale de signe alterné + et - [Fig. 3.6(b), à comparer avec les résultats numériques de la figure 3.4(c)]. A son tour, la vorticité longitudinale des anneaux induit un mouvement radial indiqué par les flèches de la figure 3.6(c) qui,   un instant ultérieur, tend à transformer les creux initiaux en lobes externes à la traîne de l'anneau et les lobes initiaux en creux en aval de l'anneau comme le montre la figure 3.6(d). Cette étape dans l'évolution est typique des anneaux tourbillonnaires non-circulaires isolés comme décrit par exemple par Liu *et al.* (1986) pour des filaments tourbillonnaires elliptiques. Cette permutation d'axe (*axis switching*) se retrouve ainsi systématiquement dans les expériences de jets elliptiques (Ho & Gutmark, 1987) ou rectangulaires (Grinstein, 1995). Finalement, la configuration de la figure 3.6(d) est maintenue en quasi-équilibre par l'apparition d'une couche externe de vorticité longitudinale provenant de la région de la tresse située juste en aval : l'effet d'induction tourbillonnaire associé à cette couche externe contrebalance les vitesses produites par la vor-

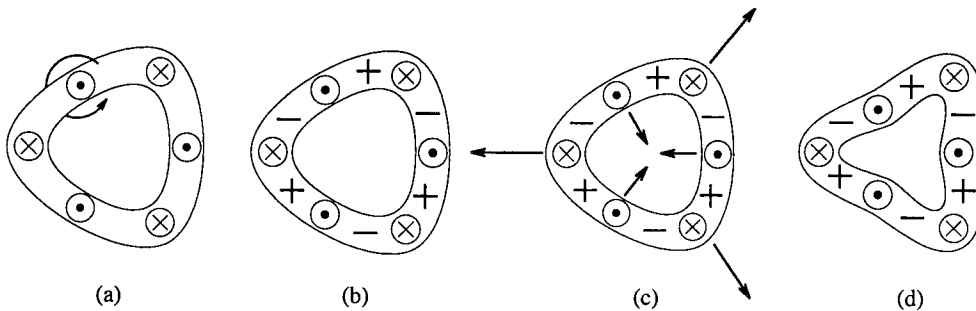
tivité longitudinale des anneaux [cf Fig. 3.4(d)]. A ce stade, les anneaux présentent des lobes externes qui sont en opposition de phase avec l'ondulation initiale. Cette configuration finale semble être assez générale pour les écoulements cisailés avec corrugation, puisqu'on retrouve ce même type d'arrangement dans les expériences de couches de mélange planes corruguées de Lasher & Choi (1988).

### 3.2.2 Dans la région de la tresse.

Un raisonnement similaire, basé cette fois sur des arguments d'induction globale, peut être appliqué à la région de la tresse.



**Figure 3.7:** Isolignes du champ de vitesse axiale généré dans la tresse par une allée de tourbillons triangulaires. En pointillés, position de la couche de mélange du jet corrugué dans la région de la tresse. Les vitesses axiales les plus importantes se trouvent au centre du jet.



**Figure 3.8:** Décomposition du mécanisme d'induction tourbillonnaire dans la région de la tresse. Même légende que pour la figure 3.6.

La figure 3.7 illustre qualitativement cet effet global pour le cas d'un jet triangulaire. Le champ de vitesse généré dans la tresse par la rangée d'anneaux tourbillonnaires triangulaires induit un mouvement relatif et donc une réorientation de la vorticité contenue dans la couche de mélange de la tresse. Ainsi l'induction globale par l'allée d'anneaux tourbillonnaires déformés sur le champ de vorticité azimutale légèrement ondulé de la tresse tend à faire voyager plus vite [points cerclés de la figure 3.8(a)] les parties internes, plus proches de l'axe du jet, et moins vite (croix cercl es) les parties externes. Ce mécanisme donne naissance à une distribution azimutale de vorticité longitudinale avec des sens de rotation indiqués par les signes + et - de la figure 3.8(b), qui présente un déphasage de  $\pi$  avec la distribution correspondante dans la région de l'anneau [Fig. 3.6(b)]. Une telle configuration est qualitativement similaire aux résultats numériques obtenus [Fig. 3.4(a)]. Ensuite, le champ de vitesse [flèches de la figure 3.8(c)] induit par cette vorticité longitudinale nouvellement crée tend à augmenter la déformation initiale comme le montre la figure 3.8(d) [  comparer avec la figure 3.4(b)].

En outre, comme dans l'étude de Martin & Meiburg (1991), nous avons pu noter, pendant cette première phase de la simulation, que la vorticité longitudinale dans la tresse était beaucoup plus intense juste en aval des anneaux.

### 3.3 Tourbillons longitudinaux et jets latéraux.

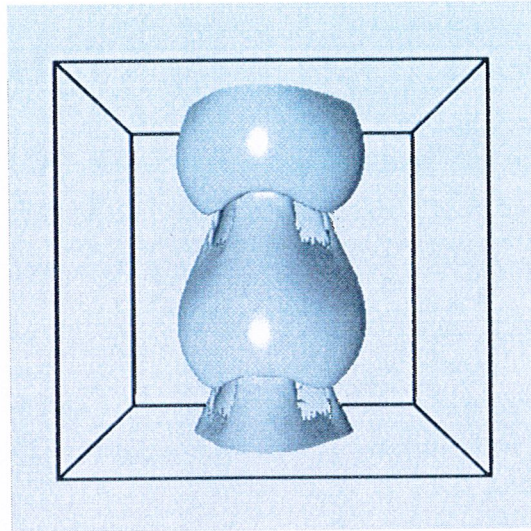


Figure 3.9: Champ de vorticité azimuthale en forme de cône ( $t = 6$ ). Seuil à 40% du maximum.

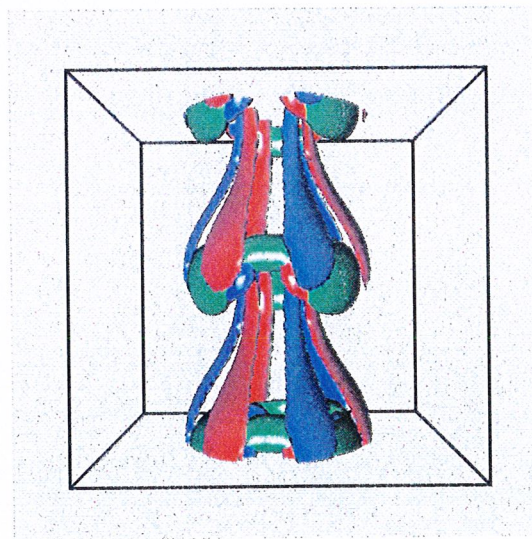
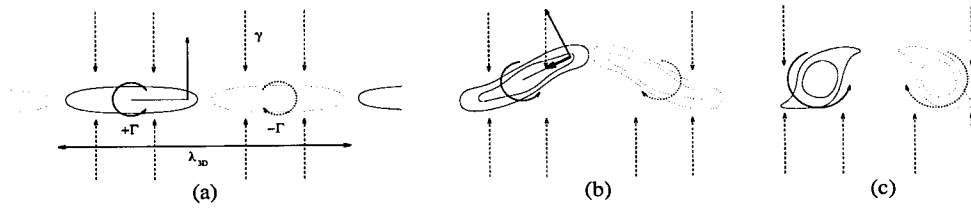


Figure 3.10: Etirement et enroulement des nappes de vorticité longitudinale de la tresse autour des anneaux tourbillonnaires ( $t = 8$ ). Seuil à 40% du maximum.

L'analyse des visualisations 3D des champs de vitesse et de vorticité obtenus par simulations numériques permet de proposer le scénario suivant pour la production de jets latéraux :

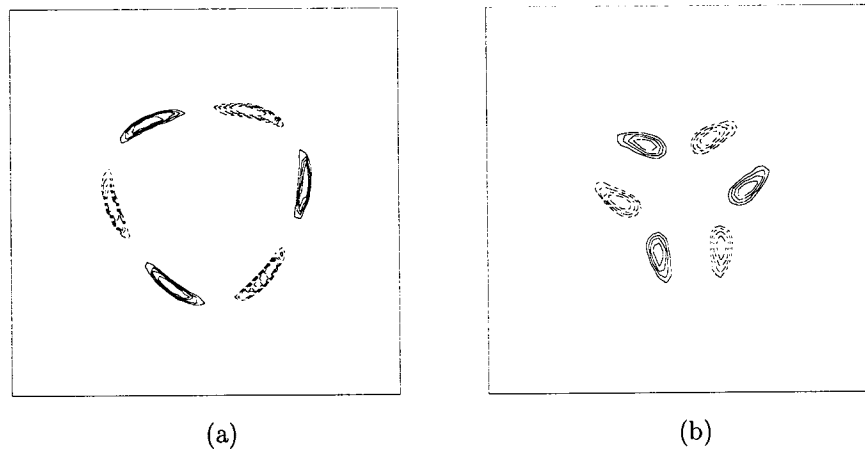
Jusqu'à  $t = 6$ , la vorticité azimuthale initiale de l'écoulement de base migre vers la région des anneaux et délaisse la région intermédiaire (la tresse). Comme observé expérimentalement (Raghu *et al.*, 1991), la totalité du champ de vorticité azimuthale est en forme de cône avec l'axe aligné avec l'écoulement et la pointe vers l'aval (Fig. 3.9). A  $t = 6$ , l'instabilité primaire vient de saturer sous la forme d'anneaux tourbillonnaires cohérents. La position aval correspondante est  $x/R = 2$     $3$  si on relie la distance aval au temps via la partie réelle de la vitesse de phase du mode instable de la théorie linéaire, en supposant que le profil de vitesse à la sortie du jet est donné par l'écoulement de base  $R/\theta = 11.3$ .





**Figure 3.11:** Focalisation de la vorticité longitudinale dans la tresse pour une couche de mélange plane. Les nappes tourbillonnaires se déforiment par auto-induction (a). La résultante nette de la vitesse auto-induite et de la compression due au champ d'étirement tend à ramener la vorticité vers le centre de la nappe (b), pour finalement former des tourbillons longitudinaux concentrés (c). D'après Lin & Corcos (1984).

Lorsque l'instabilité primaire a saturé, ces feuilletts de vorticité longitudinale dans la tresse, initialement de faible intensité, sont intensifiés sous l'effet d'une instabilité secondaire 3D (régime de croissance exponentielle  $\sigma_{3D}$  sur la figure 3.2). Ils sont de plus étirés par le champ de déformation dû aux anneaux tourbillonnaires et commencent à s'enrouler autour des anneaux (Fig. 3.10). Ce mécanisme d'étirement est similaire à celui décrit par Lin & Corcos (1984) et Neu (1984) dans le cas des couches de mélange planes. Plus particulièrement, ces auteurs ont montré qu'une allée de nappes de vorticité longitudinale de signe alterné suffisamment intenses dégénéraient sous l'effet d'un étirement dans la direction longitudinale en paires de tourbillons circulaires contrarotatifs concentrés (Fig. 3.11). On retrouve ce même mécanisme dans les jets cylindriques (Fig. 3.12<sup>3</sup>).



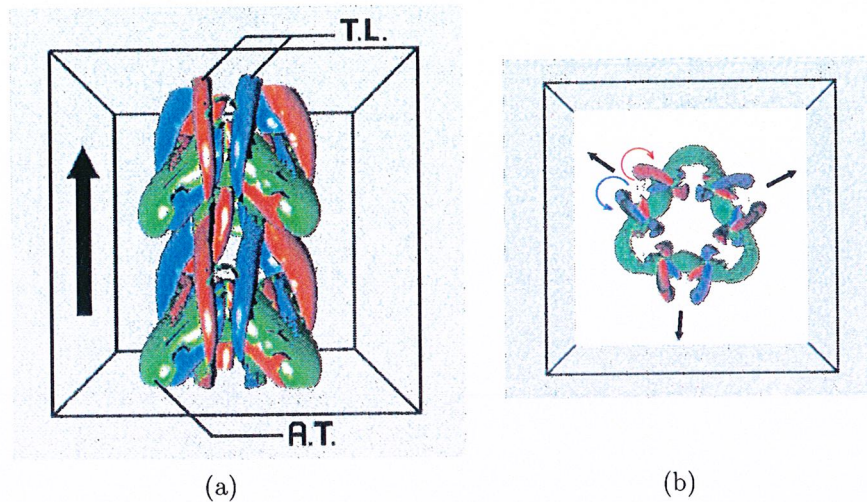
**Figure 3.12:** Focalisation de la vorticité longitudinale dans la tresse du jet cylindrique : isocontours à 30, 40, 50 et 60% du maximum pour la vorticité longitudinale positive (traits pleins) et négative (pointillés) pour  $t = 8$  (a) et  $t = 16$  (b).

Ainsi, à  $t = 16$  [Fig. 3.13(a)], toute la vorticité longitudinale de la tresse est effectivement concentrée en trois paires de tourbillons longitudinaux, qui "tricotent" alternativement entre les structures primaires amont et aval et sont alignés avec la déformation azimutale des anneaux. L'étude de leur signe indique leur regroupement par paires de tourbillons contrarotatifs qui viennent se loger dans les creux des anneaux tourbillonnaires [Fig. 3.13(b)]. Les anneaux tourbillonnaires primaires, concentrant la quasi-totalité de la vorticité azimutale, sont toujours cohérents bien que fortement déformés azimutalement et longitudinalement, comme le révèle la présence de vorticité longitudinale au niveau des anneaux. On peut clairement observer les lobes externes à la traîne des anneaux tourbillonnaires, comme dans toute expérience avec production de jets latéraux d'après Raghu *et al.* (1991). Il est à noter que ces lobes ne correspondent pas à la perturbation azimutale initiale de l'écoulement de base, mais sont en opposition de phase avec elle, comme expliqué au §3.2.1.

<sup>3</sup>Les tourbillons longitudinaux ne sont pas exactement perpendiculaires au plan de coupe, ce qui explique l'ellipticité des isocontours (b).

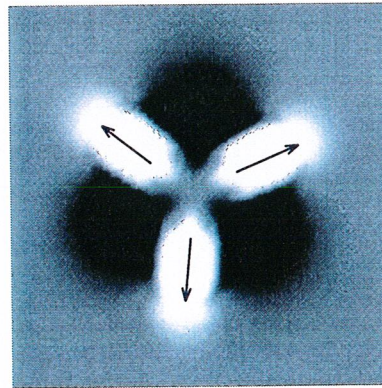






**Figure 3.13:** Structures tourbillonnaires générées par les instabilités hydrodynamiques dans un écoulement de jet cylindrique. Vue de profil de l'écoulement (a) : isosurfaces de la vorticité azimutale (en vert) concentrée sous la forme de deux anneaux tourbillonnaires (AT); isosurfaces de la vorticité axiale (positive en bleu, négative en rouge) concentrée sous la forme de trois paires de tourbillons longitudinaux contrarotatifs (TL). Vue de face de l'écoulement (b) : induction tourbillonnaire dans le voisinage des tourbillons longitudinaux, à l'origine de l'éjection radiale du fluide du jet en trois jets latéraux.

Les tourbillons longitudinaux sont initialement ramenés vers l'intérieur du jet par l'entraînement des anneaux tourbillonnaires primaires. Mais l'influence des anneaux est progressivement contrebalancée par l'auto-induction croissante des paires de tourbillons, qui tend à les expulser radialement. Cette auto-induction peut être reliée au régime de croissance exponentielle de la courbe  $u_\varphi$  au-delà de  $t = 5$  sur la figure 3.2. A  $t = 16$ , l'énergie contenue dans la composante azimutale de la vitesse atteint le même ordre de grandeur que celle de la vitesse radiale : les structures longitudinales sont devenues suffisamment cohérentes et robustes vis-à-vis des structures primaires pour se libérer de leur influence.

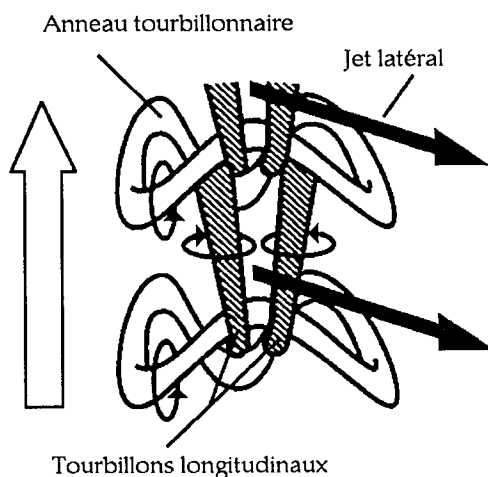


**Figure 3.14:** Coupe transversale du champ de vitesse radiale dans la tresse. Les zones claires indiquent des vitesses radiales positives. L'échelle de gris s'étend de -0.29 (noir) à +0.37 (blanc).

Par induction tourbillonnaire [flèches de la figure. 3.13(b)], les tourbillons longitudinaux, regroupés par paire dans les creux des anneaux, tendent alors à expulser du fluide du jet vers l'extérieur. La vitesse induite par ce mécanisme peut être observée sur une section transversale du champ de vitesse radiale dans la tresse (Fig. 3.14). Des sections similaires effectuées à différentes positions le long de l'axe du jet suggèrent que ce champ de vitesse radiale correspond à l'éjection de fluide en jets plans latéraux cohérents. Ces jets secondaires se situent, au niveau des structures primaires, dans les creux des anneaux déformés, en parfait accord avec les résultats expérimentaux de Liepmann & Gharib (1992). Les tourbillons longitudinaux induisent des vitesses radiales intenses vers l'extérieur dans les creux (régions en blanc de la figure 3.14) et des vitesses opposées (en noir) plus faibles dans les lobes. Un tel champ



de vitesse tend à rabattre les lobes externes à la traîne des anneaux vers l'axe du jet et correspond à l'engouffrement de fluide externe entre les jets latéraux, comme observé expérimentalement. Cette éjection radiale de fluide du jet est cohérente avec la remontée du niveau de vitesse radiale mesurée sur la figure 3.2. L'intensité de ce phénomène d'éjection peut être évaluée en comparant les courbes de vitesse radiale des cas corrugué et axisymétrique de la figure 3.2 après  $t = 15$ . Si la partie réelle de la vitesse de phase est utilisée pour convertir le temps en distance aval, cette production de jets latéraux devrait avoir lieu, dans un jet se développant spatialement, à une distance de la buse d'environ  $x/R = 6$ , en accord avec les observations expérimentales (Raghu *et al.*, 1991).



**Figure 3.15:** Structures tourbillonnaires impliquées dans le processus de génération des jets latéraux. Par souci de clarté, seule une paire de tourbillons longitudinaux est représentée.

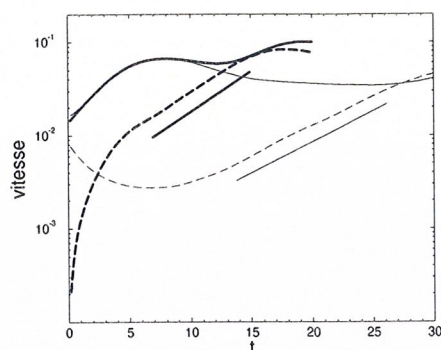
La figure 3.15, adaptée d'un schéma de Monkewitz & Pfizenmaier (1991), résume la configuration finale des différentes structures tourbillonnaires impliquées dans le processus de génération de jets latéraux. À l'inverse de la suggestion de Monkewitz & Pfizenmaier, les jets latéraux correspondent à une éjection de fluide hors des creux des anneaux déformés et non hors de leurs lobes externes. Ainsi la déformation azimutale des anneaux ne favorise pas l'éjection de fluide vers l'extérieur mais s'y oppose.

### 3.4 Influence du forçage azimutal.

Pour étudier l'influence du forçage azimutal sur la dynamique de l'écoulement, nous avons effectué une simulation numérique identique à celle décrite au §3.1 (i.e.  $R/\theta = 11.3$  et  $St = 0.4$ ) mais où la perturbation azimutale monomode initiale est remplacée par un fort bruit blanc d'amplitude maximale  $\varepsilon \sim 5\%$ . Ce bruit blanc joue le rôle des fluctuations aléatoires présentes dans les expériences. Par ce type de conditions initiales, on espère reproduire la dynamique intrinsèque de l'écoulement, dans le sens où aucun forçage azimutal ne vient contrôler son évolution tridimensionnelle.

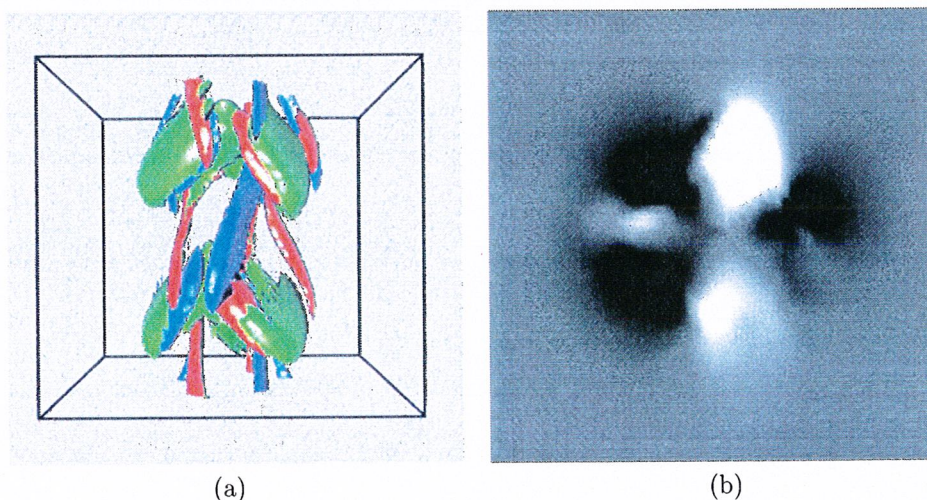
L'évolution temporelle de l'énergie moyenne contenue dans les composantes radiale et azimutale de la vitesse pour cette simulation est comparée aux mêmes mesures pour la simulation de jet corrugué à  $n = 3$  (Fig. 3.16). Dans les deux cas, la composante radiale croît exponentiellement aux premiers instants correspondant à la croissance de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz de la couche de mélange du jet. La saturation apparaît autour de  $t = 6$  : on observe alors pour les deux simulations la formation d'anneaux tourbillonnaires cohérents. Dans la simulation avec bruit blanc, l'énergie contenue dans la composante azimutale décroît initialement. Cette phase transitoire correspond à la stabilisation des modes à petite échelle contenus dans le bruit blanc injecté initialement. Après cette phase d'ajustement, on observe un régime de croissance exponentielle pour cette composante, alors que les anneaux tourbillonnaires sont apparus. Ce résultat est similaire à celui obtenu pour le cas corrugué, avec une légère correction sur le taux de croissance. Ce régime est le signe d'une instabilité secondaire prenant naissance sur la rangée d'anneaux issus de l'instabilité primaire qui a saturé. Autour de  $t = 25$ , les énergies des composantes de





**Figure 3.16:** Evolution temporelle de la vitesse quadratique moyenne radiale (trait continu), azimuthale (trait discontinu) pour le jet corrugué à  $n = 3$  (traits gras) et pour le jet avec bruit blanc (traits fins). On notera dans les deux cas la croissance exponentielle de la vitesse azimuthale, mesure de l'énergie des perturbations 3D, dès lors que les anneaux tourbillonnaires sont apparus ( $t \sim 5$ ).

vitesse radiale et azimuthale sont du même ordre de grandeur. La structure spatiale du champ de vortacité correspondant est reproduite sur la figure 3.17(a).



**Figure 3.17:** Simulation avec bruit blanc : champ de vortacité (a), même légende que pour la figure 3.13; (b) coupe transversale du champ de vitesse radiale dans la région de la tresse. Les zones claires indiquent des vitesses radiales positives.

On retrouve qualitativement les mêmes caractéristiques que dans le cas du jet forcé azimuthalement, à savoir la présence de deux anneaux tourbillonnaires cohérents concentrant la majeure partie de la vortacité azimuthale. Ces anneaux sont déformés azimuthalement et sont reliés entre eux par des structures tourbillonnaires secondaires en forme de paires de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs qui viennent se loger dans les creux des anneaux déformés. Bien que moins cohérents spatialement que dans le cas corrugué, ces tourbillons induisent aussi des jets latéraux secondaires, sous la forme de zones concentrées de vitesse radiale positive [Fig.3.17(b)]. Il est à noter que l'écoulement tend à sélectionner un nombre d'onde azimuthal proche de 3. Ce résultat justifie a posteriori le choix du nombre d'onde du forçage azimuthal décrit au §3.3. De plus cette modulation azimuthale est différente d'une symétrie 4 qui serait générée par le maillage cartésien ou un effet des conditions limites latérales périodiques du domaine d'intégration cubique, ce qui permet de supposer que la résolution spatiale et les dimensions latérales du domaine sont suffisantes pour bien reproduire la dynamique intrinsèque de l'écoulement<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>La simulation avec bruit blanc a en outre permis de vérifier qu'aucun appariement n'avait lieu, en accord avec l'existence d'un mode préféré pour le jet autour de  $St = 0.4$ .



### 3.5 Discussion.

Le bon accord obtenu à la fois avec les résultats théoriques et expérimentaux suggère que les simulations temporelles d'écoulements de jets corrugués azimutalement et soumis à une perturbation longitudinale initiale reproduisent les caractéristiques essentielles de la dynamique des jets cylindriques. Cette étude a permis de fournir un scénario complet du développement de tels écoulements susceptibles de conduire à la production de jets latéraux.

L'exploitation des résultats issus des simulations numériques directes révèle que le forçage azimutal par corrugation conduit à une réorientation de la vorticité initiale alors que croît en parallèle l'instabilité de Kelvin-Helmholtz de la couche de mélange du jet. Les mécanismes physiques à l'origine de cette réorientation ont été isolés et analysés qualitativement en termes d'induction tourbillonnaire, en accord avec les observations numériques.

Cette phase de réorientation laisse place à un régime de croissance exponentielle relié à une instabilité de la rangée d'anneaux tourbillonnaires générés par la saturation non-linéaire de l'instabilité *primaire* du jet (Kelvin-Helmholtz). Cette instabilité *secondaire* est tridimensionnelle et se manifeste en particulier par la croissance de la vorticité longitudinale, distribuée dans la tresse en nappes de vorticité longitudinale de signe alterné suivant l'azimut. Des visualisations du champ de vorticité indiquent que ces nappes sont étirées par le champ de vitesse induit par les anneaux et se focalisent en paires de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs concentrés, suivant un mécanisme similaire à celui étudié dans le cas plan (Neu, 1984; Lin & Corcos, 1984).

L'analyse récente de Monkewitz & Pfizenmaier (1991) est confirmée dans le sens où l'éjection radiale intense de fluide n'est pas directement reliée à la déformation des anneaux tourbillonnaires mais plutôt à l'apparition de ces paires de tourbillons longitudinaux. On présente alors une description qualitative du mécanisme de production de jets latéraux, avec une configuration finale différente de celle suggérée par les études antérieures. Notamment, la position relative des paires de tourbillons longitudinaux par rapport à la déformation des anneaux a pu être définie précisément (cf Fig. 3.15).

Ces premiers résultats confirment l'importance de la composante longitudinale de la vorticité dans l'étude du phénomène de jets latéraux. C'est effectivement la structure de ce champ de vorticité longitudinale, dégénérant par la suite en tourbillons longitudinaux, qui va sélectionner le nombre de jets latéraux, leur intensité et leur position relative par rapport aux anneaux tourbillonnaires primaires.

Dans le cas d'une sortie de jet corruguée (perturbation azimutale initiale contrôlée), l'origine et l'évolution de cette vorticité longitudinale sont maintenant mieux comprises. Pour cette raison, l'étude présentée dans ce chapitre constitue un premier pas vers la compréhension globale de la tridimensionnalisation des jets et du phénomène des jets latéraux dans le cas "naturel", i.e. sans perturbation azimutale initiale (expériences de Monkewitz *et al.*, 1990; Liepmann & Gharib, 1992; simulation avec bruit blanc).

En particulier, les similitudes entre les simulations "naturelle" (avec bruit blanc) et forcée (avec corrugation azimutale de l'écoulement de base) montrent que ce dernier type de simulation reproduit bien la dynamique 3D intrinsèque de l'écoulement. Il apparaît ainsi que le forçage azimutal sous la forme d'une corrugation est un moyen légitime et efficace de contrôler la cohérence spatiale de l'écoulement sans en dénaturer la dynamique, et d'initier ainsi les instabilités secondaires 3D susceptibles d'apparaître naturellement. En outre, ce type de forçage se transpose directement à l'expérience moyennant l'utilisation d'une buse corruguée. A ce stade de l'étude, si l'on a bien mis en évidence les mécanismes d'induction et les structures tourbillonnaires contrôlant la dynamique du jet, il reste à décrire plus précisément l'instabilité secondaire 3D observée dans les simulations présentées dans ce chapitre.





## Chapitre 4

# Brisure d'axisymétrie dans les jets cylindriques.

L'étude présentée au chapitre 3 montre que les jets axisymétriques sont l'objet d'une instabilité secondaire qui brise leur symétrie de rotation. En vue de caractériser en détail cette instabilité, diverses simulations numériques directes de jets cylindriques soumis à des fluctuations longitudinales et azimutales contrôlées sont effectuées dans le cadre d'une étude paramétrique systématique. Les paramètres pris en compte sont  $R/\theta$  ( $R$  est le rayon du jet et  $\theta$  l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche de mélange du jet), le nombre de Strouhal de la modulation longitudinale  $St = R/\lambda$  ( $\lambda$  est la longueur d'onde longitudinale de la perturbation), le nombre d'onde azimutal de la corrugation  $n$  et le nombre de Reynolds  $Re = U_j R/\nu$  ( $U_j$  est la vitesse du jet sur l'axe et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide).

La section 4.1 discute de l'effet d'une faible corrugation de l'écoulement de base sur l'instabilité primaire du jet (Kelvin-Helmholtz). On montre en particulier que la dynamique de l'instabilité n'est pas affectée à l'ordre principal<sup>1</sup>. On observe alors la croissance de l'instabilité primaire qui sature sous la forme d'anneaux tourbillonnaires légèrement modulés azimutalement.

L'allée périodique d'anneaux tourbillonnaires ainsi obtenue est instable vis-à-vis de cette perturbation 3D. Le régime linéaire de cette instabilité secondaire du jet est analysé au §4.2, où l'étude de l'influence respective des différents paramètres de l'écoulement montre que le développement de l'instabilité secondaire est principalement contrôlé par le nombre de Strouhal de l'instabilité primaire. Au terme de cette étude paramétrique, l'instabilité secondaire du jet est comparée à l'instabilité translatrice mise en évidence pour les couches de mélange planes (Pierrehumbert & Widnall, 1982). Une discussion sur la prédiction du nombre d'onde azimutal susceptible d'apparaître dans les jets cylindriques clôt cette section.

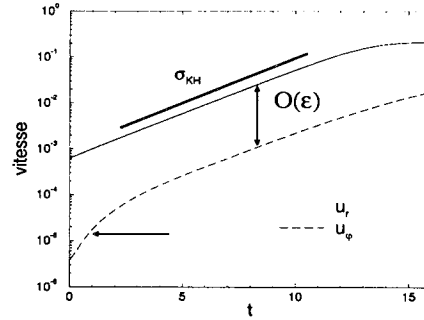
La section 4.3 illustre sur un exemple le régime non-linéaire de l'instabilité secondaire. La corrugation initiale de l'écoulement de base génère des modes azimutaux harmoniques dont l'évolution temporelle est examinée au moyen d'équations d'amplitude. L'émergence de ces modes harmoniques est en particulier reliée à la focalisation de la vorticité longitudinale, générée dans la tresse par l'instabilité secondaire, en tourbillons longitudinaux contra-rotatifs via un mécanisme similaire à celui étudié par Neu (1984) et Lin & Corcos (1984) pour les couches de mélange planes.

### 4.1 Influence de la corrugation sur l'instabilité primaire.

Les résultats issus des simulations numériques directes suggèrent que le forçage azimutal par corrugation du jet est un moyen efficace de forcer l'instabilité secondaire mise en évidence au chapitre 3. Ce type de forçage conduit à une réorientation de la vorticité initiale et les mécanismes physiques à l'origine de cette réorganisation du champ de vorticité ont été isolés (cf §3.2).

---

<sup>1</sup>Ce résultat théorique est effectivement cohérent avec les observations expérimentales (cf les expériences de couches de mélange planes corruguées de Lasheras & Choi, 1988).



**Figure 4.1:** Evolution temporelle des valeurs quadratiques moyennes des composantes radiale et azimutale de la vitesse. Conditions initiales identiques à la figure 3.2 ( $R/\theta = 11.3$ ,  $St = 0.4$ ) mais avec une amplitude plus faible pour la perturbation longitudinale ( $\eta = 0.01\%$ ). L'amplitude de la corrugation est de 1%.

On peut interpréter ce phénomène comme un ajustement du mode instable injecté initialement (axisymétrique) avec la corrugation de l'écoulement de base. Pour illustrer ce point de vue, une simulation numérique a été effectuée avec comme conditions initiales une perturbation longitudinale de très faible amplitude ( $\eta = 0.01\%$ ) pour une amplitude de corrugation azimutale de l'écoulement de base  $\varepsilon = 1\%$ . La figure 4.1 représente l'évolution temporelle des composantes de la vitesse, à comparer avec la figure 3.2 du chapitre 3. On observe dans les deux cas une phase d'ajustement, liée à la croissance rapide de la composante azimutale (flèches des figures 4.1 et 3.2). Mais dans la présente simulation ce régime se raccorde à une croissance exponentielle, de pente identique à celle suivie par la composante radiale, ceci bien avant que n'ait saturé l'instabilité primaire (vers  $t = 15$ ).

On montre (§4.1.2) que le champ de vitesse obtenu à la suite de cet ajustement (à partir de  $t = 5$  environ) correspond essentiellement au mode axisymétrique du jet non-corrugué. Ce mode sature ensuite sous la forme d'anneaux tourbillonnaires présentant une faible modulation azimutale, d'amplitude  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  (Fig. 4.1). La détermination des caractéristiques de l'instabilité secondaire est alors basée sur l'évolution de cet état axisymétrique saturé légèrement perturbé azimutalement.

Le forçage par corrugation conduit à une dynamique de l'instabilité primaire identique au premier ordre à celle d'un jet purement axisymétrique : il permet non pas d'agir sur l'instabilité primaire du jet mais de contrôler efficacement l'amplitude et le nombre d'onde azimutal de la perturbation appliquée à la rangée d'anneaux tourbillonnaires une fois que ceux-ci ont saturé. Ce forçage est en outre identique à celui que l'on obtient expérimentalement au moyen d'une buse ondulée (Lasheras *et al.*, 1991).

Il eût été possible de réaliser une étude en forçant initialement le jet non-corrugué par un ou plusieurs modes hélicoïdaux de l'instabilité primaire (cf §2.3), comme le font classiquement plusieurs auteurs (Metcalfé *et al.*, 1987; Abid & Brachet, 1993; Schoppa *et al.*, 1995). Dans ce cas, le nombre des paramètres à définir est plus important. Schoppa *et al.* ont ainsi montré pour la dynamique d'une couche de mélange plane que la phase entre les modes hélicoïdaux et le mode 2D affectait notablement la dynamique de l'écoulement après saturation des tourbillons primaires en favorisant des instabilités secondaires de natures différentes. De plus, la croissance de différents modes de l'instabilité primaire et leur compétition complique l'analyse des résultats. Il est à noter enfin que les taux de croissance des modes hélicoïdaux décroissent très rapidement avec le nombre d'onde azimutal (cf Fig. 2.4 du chapitre 2). En particulier, les modes hélicoïdaux de nombre d'onde azimutal élevé sont stables. Cette disparité rend délicat l'emploi de ces modes pour forcer l'instabilité secondaire du jet et ce moyen a été finalement abandonné au profit d'une corrugation de l'écoulement de base.

En vue de s'affranchir de la phase transitoire d'ajustement du mode injecté initialement, phase qui n'intervient que durant la croissance de l'instabilité primaire et qui n'a aucune implication fondamentale pour l'étude de l'instabilité secondaire 3D, une analyse de stabilité linéaire d'un jet avec faible corrugation est présentée dans cette section. Il est montré via une étude asymptotique qu'une légère corrugation ne modifie pas à l'ordre principal la dynamique des modes propres du jet et n'apporte une modulation

azimutale de leur structure spatiale qu'à des ordres supérieurs. Les résultats numériques de cette étude seront utilisés pour initialiser directement les simulations ultérieures par le mode propre prenant en compte la corrugation du jet. Cette procédure permet de gagner du temps sur la phase de croissance de l'instabilité primaire et de contrôler exactement le niveau de perturbation azimutale que l'on injecte à l'allée d'anneaux tourbillonnaires.

#### 4.1.1 Position du problème.

**Equation aux perturbations.** Soit  $\mathbf{U}(r, \varphi) = U(r, \varphi) \mathbf{e}_x$  un écoulement de jet de section quelconque, où  $(x, r, \varphi)$  correspond au système des coordonnées cylindriques. L'analyse de stabilité linéaire d'un tel profil de base supposé parallèle consiste à considérer l'évolution de perturbations infinitésimales. L'écoulement total se décompose alors sous la forme :

$$\mathbf{u} = U(r, \varphi) \mathbf{e}_x + \mathbf{u}' \quad \text{où } |\mathbf{u}'| \ll |U| \quad (4.1)$$

Cette décomposition est injectée dans les équations d'Euler (analyse de stabilité non visqueuse) pour un fluide incompressible, qui sont ensuite linéarisées autour de l'écoulement de base  $U$ . L'abandon des termes non-linéaires en  $\mathbf{u}'$  permet de rechercher la solution de ce système d'équations sous la forme d'une combinaison de modes normaux :

$$\begin{bmatrix} u'_x \\ u'_r \\ u'_\varphi \\ p'/\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(r, \varphi) \\ iG(r, \varphi) \\ H(r, \varphi) \\ P(r, \varphi) \end{bmatrix} \exp[i(kx - \omega t + m\varphi)] + cc \quad (4.2)$$

où  $k$ ,  $m$  et  $\omega$  correspondent respectivement aux nombres d'onde longitudinal et azimutal et à la pulsation du mode considéré.  $cc$  désigne le complexe conjugué.

L'élimination des trois composantes de vitesse dans les équations d'Euler linéarisées permet d'obtenir une équation aux dérivées partielles pour la seule pression, de type équation de Rayleigh :

$$\begin{aligned} -r^2(U - c)P_{rr} + [2U_r r^2 - r(U - c)]P_r + (k^2 r^2 + m^2)(U - c)P \\ - (U - c)P_{\varphi\varphi} + 2[U_\varphi - im(U - c)]P_\varphi + 2imU_\varphi P = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $c = \omega/k$  est la vitesse de phase.

La première ligne de l'équation (4.3) correspond exactement à l'équation de Rayleigh obtenue dans le cas d'un écoulement de base axisymétrique (cf §2.3.1). La deuxième ligne regroupe les corrections dues à la modulation azimutale introduite par la corrugation.

La prise en compte des conditions limites pour la pression conduit à un problème aux valeurs propres pour lequel il existe une solution seulement si  $k$ ,  $m$  et  $\omega$  vérifient une relation de dispersion  $D[k, \omega; m] = 0$ .

Koshigoe & Tubis (1986) ont présenté une méthode de tir généralisée pour résoudre ce problème. Ils peuvent alors analyser la stabilité linéaire de jets de section quelconque pour lesquels ils proposent une classification des modes propres obtenus en fonction de leurs symétries.

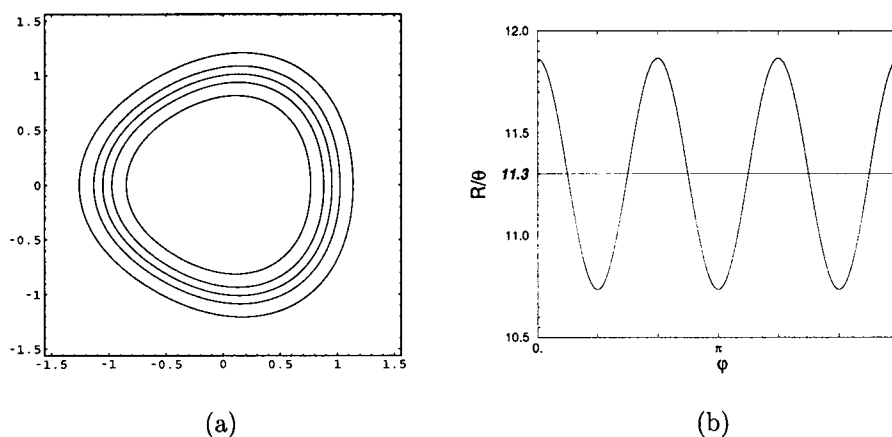
**Cas des jets cylindriques faiblement corrugués.** On se propose de restreindre la présente étude à l'écoulement de base faiblement corrugué utilisé précédemment pour initialiser les simulations numériques (cf §3.1). Cet écoulement a pour expression :

$$U(r, \varphi) = U_0 \{r [1 + \varepsilon \cos(n\varphi)]\} \quad (4.4)$$

où

$$U_0(r) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left[ \frac{R}{4\theta} \left( \frac{1}{r} - r \right) \right] \right\} \quad (4.5)$$

est le profil de vitesse axisymétrique dont l'analyse de stabilité temporelle a été effectuée au chapitre 2.  $n$  est le nombre d'onde azimutal de la corrugation et  $\varepsilon \ll 1$  son amplitude. La déformation des isolignes



**Figure 4.2:** (a) isocontours de la vitesse axiale de l'écoulement de base corrugué ( $R/\theta = 11.3$ ,  $n = 3$ ,  $\varepsilon = 5\%$ ) et (b) variation azimutale de  $R/\theta$ .

de ce profil due à la corrugation est représentée sur la figure 4.2(a) pour  $\varepsilon = 5\%$ . Il est à remarquer que ce type de corrugation se caractérise en outre par une modulation azimutale de l'épaisseur de quantité de mouvement [Fig. 4.2(b)].

L'écoulement de base peut alors se décomposer sous la forme d'un développement asymptotique en  $\varepsilon$  :  $U(r, \varphi) = U_0(r) + \varepsilon U_1(r)e^{in\varphi} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + cc$ . Le premier ordre  $U_0$  correspond à l'écoulement de base axisymétrique. On peut alors rechercher la solution du problème aux valeurs propres sous la forme :

$$P(r, \varphi) = P_0(r) + \varepsilon P_1(r)e^{in\varphi} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + cc \quad (4.6)$$

$$c = c_0 + \varepsilon c_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.7)$$

En injectant ce type de solution dans l'équation (4.3), on retrouve à l'ordre principal l'équation de Rayleigh établie au chapitre 2 pour l'écoulement de base axisymétrique, la correction due à la corrugation n'intervenant qu'à l'ordre d'après. Les solutions à ce problème de jet faiblement corrugué seront donc identiques au premier ordre à celles obtenues pour l'équation de Rayleigh avec juste une correction d'ordre  $\varepsilon$ . Le mode propre le plus instable pour l'écoulement de base axisymétrique correspond au mode axisymétrique ( $m = 0$ ). On s'attend alors à obtenir comme mode le plus instable du problème faiblement corrugué ce même mode corrigé par une modulation azimutale de nombre d'onde  $n$  d'ordre  $\varepsilon$ .

**Méthode de résolution.** La détermination de ce mode est effectuée au moyen d'une version linéarisée du code pseudo-spectral décrit au §2.2. Les équations de Navier-Stokes sont linéarisées autour du profil de vitesse  $\mathbf{U} = U(r, \varphi)\mathbf{e}_x$ . Si  $\boldsymbol{\Omega}(r, \varphi)$  est la vorticité de base correspondante et  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}$  les vitesse et vorticité du champ de perturbation, le problème à résoudre s'écrit alors dans l'espace spectral :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbf{P}[\mathbf{u} \times \widehat{\boldsymbol{\Omega}} + \widehat{\mathbf{U}} \times \boldsymbol{\omega}] - \nu \mathbf{k}^2 \hat{\mathbf{u}} \quad (4.8)$$

ce qui peut s'écrire sous la forme synthétique du système linéaire suivant :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = A_U \cdot \hat{\mathbf{u}}, \quad (4.9)$$

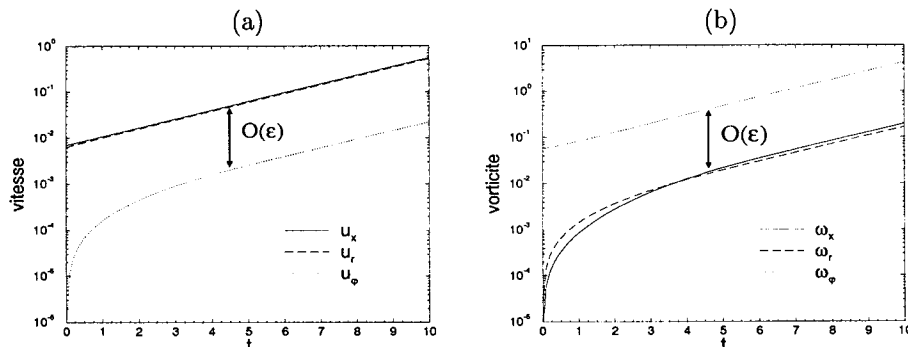
$A_U$  correspondant formellement au Jacobien du système des équations de Navier-Stokes. La solution de ce système est  $\exp(t A_U) \cdot \hat{\mathbf{u}}_0$ , qui est dominée aux temps longs par la valeur propre de  $A_U$  de partie réelle la plus grande. On a ainsi accès au mode propre le plus instable de l'écoulement de base  $U$  (Tuckerman, 1995).

La méthode consiste alors à intégrer le système (4.9) à partir de n'importe quel champ initial  $\mathbf{u}_0$  pendant un temps suffisamment long, le temps que deviennent négligeables les modes amortis ou moins

instables introduits par la condition initiale. Il est à noter que cette méthode, basée sur la résolution des équations de Navier-Stokes, permet d'obtenir les modes *visqueux*.

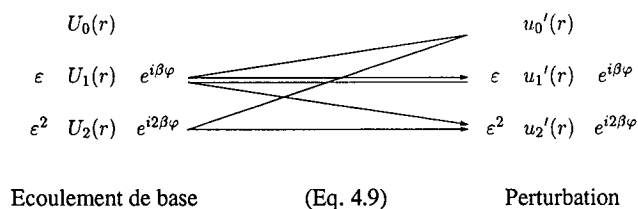
Le code pseudo-spectral décrit au chapitre 2 est utilisé pour résoudre le problème d'évolution (4.9). Le terme de droite est calculé par une méthode pseudo-spectrale et l'avance en temps est effectuée par un schéma d'Adams-Bashforth du second ordre. Sachant que le mode le plus instable de l'écoulement avec corrugation est une correction du mode axisymétrique de l'équation de Rayleigh, la méthode est initialisée par ce mode particulier, en vue d'accélérer la convergence.

#### 4.1.2 Résultats numériques.



**Figure 4.3:** Evolution temporelle de la valeur quadratique moyenne des composantes de vitesse (a) et de vorticité (b) pour une perturbation initiale à  $St = 0.4$ ,  $m = 0$  de l'écoulement de base  $R/\theta = 11.3$ ,  $n = 3$ ,  $\epsilon = 1\%$ .

Pour illustrer l'influence de la corrugation sur les caractéristiques des modes propres du jet, sont présentés en détail les résultats obtenus pour l'écoulement de base à  $R/\theta = 11.3$  soumis à une corrugation à  $n = 3$  avec une amplitude  $\epsilon = 1\%$ . On suit en particulier l'ajustement du mode axisymétrique ( $m = 0$ ) à  $St = 0.4$  injecté comme condition initiale de la méthode décrite précédemment. L'évolution temporelle de la vitesse et de la vorticité est représentée sur la figure 4.3. Cette évolution est à comparer avec celle observée pour la simulation de jet corrugué étudiée au chapitre 3. Dans les deux cas, on observe une réorientation de la vorticité azimutale initiale, qui conduit en particulier à la génération de vorticité longitudinale. Cette réorientation, analysée au chapitre 3 en termes d'induction tourbillonnaire, s'interprète ici comme l'ajustement du mode propre (axisymétrique) de l'écoulement de base sans corrugation injecté initialement vers le mode propre de l'écoulement de base avec corrugation. La phase d'ajustement est terminée vers  $t = 5$ , instant à partir duquel on observe une croissance exponentielle identique pour toutes les composantes de vitesse et de vorticité de la perturbation. La méthode a ainsi convergé vers le mode le plus instable à  $St = 0.4$  de l'écoulement de base avec corrugation, mode qui est donné par le champ de perturbation obtenu à partir de  $t = 5$ .

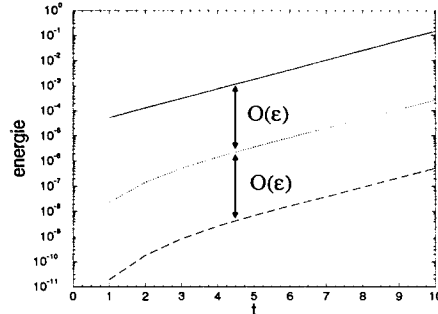


**Figure 4.4:** Interactions entre l'écoulement de base avec corrugation et le mode propre.

La phase d'ajustement des premiers instants se fait via des interactions à différents ordres entre le mode propre linéaire et la corrugation de l'écoulement de base, à travers l'équation (4.9). La figure 4.4 illustre quelques-unes de ces interactions<sup>2</sup>. Ces interactions, outre une correction à nombre d'onde azimutal

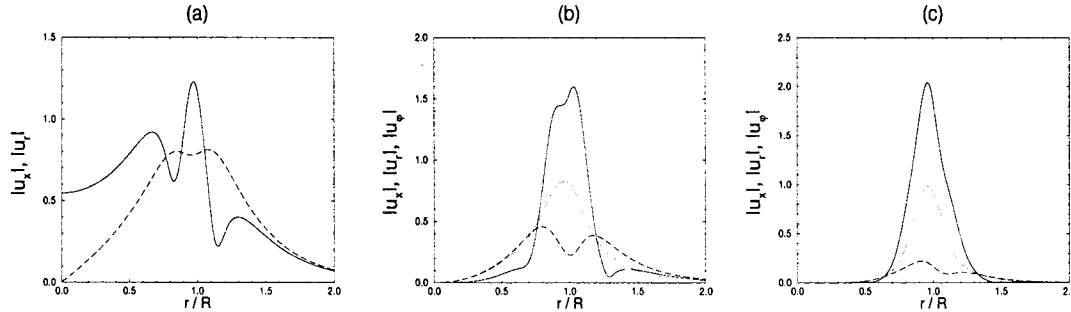
<sup>2</sup>En toute rigueur, il faudrait a priori imposer  $\eta \ll \epsilon^2$  pour que les termes retenus pour la perturbation sur la figure 4.4 correspondent bien aux termes dominants du développement asymptotique. L'étude complète montre cependant qu'il s'agit effectivement des termes dominants pour chaque nombre d'onde azimutal.

$m = n$  du mode propre à l'ordre  $\varepsilon$ , génèrent des corrections en harmoniques ( $m = 2n, 3n, \dots$ ) hiérarchisées en énergie (Fig. 4.5).



**Figure 4.5:** Evolution temporelle de l'énergie contenue dans les modes azimuthaux  $m = 0$  (trait continu),  $m = n$  (pointillés) et  $m = 2n$  (trait discontinu) pour le jet corrugué à  $n = 3$ ,  $\varepsilon = 1\%$  ( $R/\theta = 11.3$ ,  $St = 0.4$ ).

La distribution radiale du mode propre obtenu est représentée sur la figure 4.6 pour la composante axisymétrique, la composante fondamentale (à  $m = n$ ) et le premier harmonique (à  $m = 2n$ ). Les amplitudes ont été renormalisées séparément pour chaque composante azimutale du mode propre. Comme prévu par l'étude asymptotique, la composante axisymétrique correspond bien au mode propre de l'écoulement de base sans corrugation calculé au chapitre 2<sup>3</sup> (cf Fig. 2.6). Les composantes non-axisymétriques ( $m = 3$  et 6) sont plus concentrées dans la région de la couche de mélange du jet que la composante axisymétrique. On peut remarquer que ces composantes ont une structure radiale sensiblement différente des modes hélicoïdaux de l'écoulement de base sans corrugation (cf Fig. 2.7).



**Figure 4.6:** Mode propre du jet corrugué à  $n = 3$  : amplitude renormalisée de la composante à  $m = 0$  (a),  $m = 3$  (b),  $m = 6$  (c) pour les vitesses axiale (trait continu), radiale (trait discontinu) et azimutale (pointillés).

La vorticité longitudinale correspondant au mode propre est représentée sur la figure 4.7. La partie réelle du mode en vorticité longitudinale dans le plan  $(r, \varphi)$  perpendiculaire à l'axe du jet montre une distribution azimutale en bon accord avec les résultats issus des simulations de jets corrugués (cf Fig. 3.4).

L'influence de l'amplitude de la corrugation sur le mode propre de l'instabilité primaire est illustrée sur la figure 4.8. Deux simulations ont été effectuées pour deux amplitudes de corrugation  $\varepsilon_1 = 1\%$  et  $\varepsilon_2 = 5\%$ . On vérifie bien que la correction du mode (mesurée par l'amplitude relative de la vitesse azimutale par rapport à la composante radiale ou axiale) est proportionnelle à l'amplitude de corrugation, en accord avec l'étude asymptotique.

Dans le cadre de l'étude de l'instabilité secondaire 3D mise en évidence au chapitre 3, l'initialisation des simulations de jets avec corrugation par les modes issus de cette étude linéaire permet ainsi de contrôler efficacement le nombre d'onde et l'amplitude de la perturbation azimutale que l'on veut imposer à l'allée d'anneaux tourbillonnaires.

<sup>3</sup>En fait, l'étude asymptotique complète montre qu'il y a une correction d'ordre  $\varepsilon^2$ .

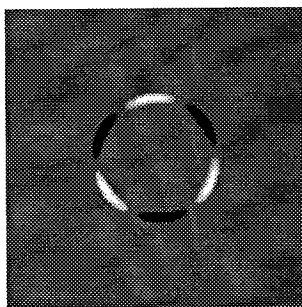


Figure 4.7: Partie réelle du mode propre en vorticité axiale pour le jet corrugué à  $n = 3$  ( $R/\theta = 11.3$ ,  $St = 0.4$ ).

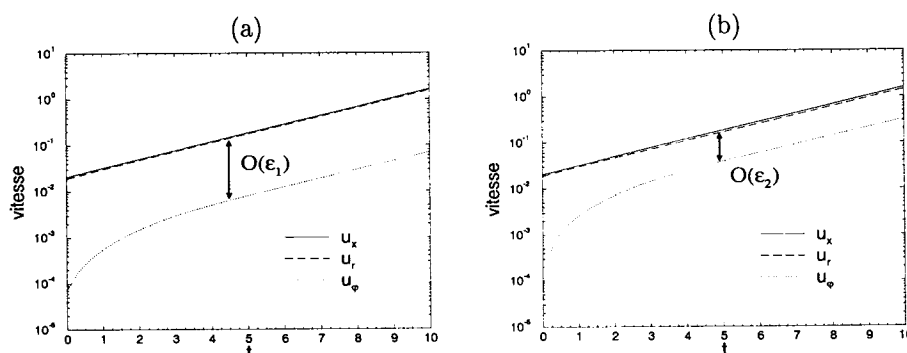


Figure 4.8: Evolution temporelle de la valeur quadratique moyenne des composantes de vitesse pour la perturbation du jet corrugué à  $n = 5$  ( $R/\theta = 11.3$ ,  $St = 0.4$ ) avec une amplitude  $\epsilon_1 = 1\%$  (a) et  $\epsilon_2 = 5\%$  (b).

## 4.2 Instabilité secondaire 3D : régime linéaire.

### 4.2.1 Etude paramétrique.

Une étude paramétrique a été menée dans le but de déterminer l'influence des divers paramètres du jet à la sortie de la buse sur l'instabilité secondaire 3D de l'écoulement. Un jet temporel forcé spatialement comme ceux simulés numériquement dans cette étude est caractérisé par trois échelles de longueur indépendantes : le rayon  $R$  du jet, l'épaisseur de la couche de mélange du jet  $\theta$  et la longueur d'onde  $\lambda$  de l'instabilité primaire qui induit l'apparition des anneaux tourbillonnaires. En prenant en compte la vitesse  $U_j$  du jet sur l'axe et la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide, on définit classiquement les trois paramètres sans dimension suivants :

- un nombre de Reynolds basé sur le rayon du jet  $Re_R = U_j R / \nu$  ou sur l'épaisseur de la couche de mélange  $Re_\theta = U_j \theta / \nu$ ,
- un paramètre de cisaillement  $R/\theta$  caractéristique du profil de vitesse de l'écoulement de base,
- un nombre de Strouhal  $St = R/\lambda$  caractérisant la perturbation longitudinale initiant l'instabilité primaire du jet.

L'influence de la courbure de la couche de mélange du jet sera importante pour les petites valeurs de ces deux derniers paramètres. Pour les grandes valeurs, la courbure sera au contraire négligeable et la configuration étudiée sera proche de celle correspondant à une couche de mélange plane (Abid *et al.*, 1993).

Trois autres paramètres caractérisent l'écoulement : l'amplitude maximale de la perturbation longitudinale  $\eta$ , de l'ordre de 1% pour toutes les simulations, le nombre d'onde azimutal  $n$  de la corrugation et son amplitude  $\epsilon$ .

L'objectif de cette étude est de déterminer numériquement le taux de croissance de l'instabilité secondaire du jet comme fonction de  $n$ . Pour cette analyse de stabilité *linéaire*, il convient de choisir une amplitude pour la modulation azimutale suffisamment petite pour obtenir un régime de croissance exponentielle. Le niveau de corrugation a donc été fixé à 1% pour toutes les simulations. Des simulations tests ont été effectuées pour des amplitudes variant de 0.5 à 5% sans que les caractéristiques de l'instabilité secondaire ne soient modifiées.

L'instabilité primaire du jet est principalement une instabilité non visqueuse de sa couche de mélange (de type Kelvin-Helmholtz), dont les caractéristiques sont directement reliées à l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$ . Le nombre de Reynolds  $Re_\theta$  a été choisi de l'ordre de 100, valeur identique pour toutes les simulations sauf indication contraire. Cette valeur correspond à un compromis entre une diffusion visqueuse trop importante et des nombres de Reynolds plus grands qui exigeraient des résolutions numériques trop coûteuses pour cette étude paramétrique. Une étude de l'influence du nombre de Reynolds sur les caractéristiques de l'instabilité secondaire est présentée dans la section suivante.

Trois grandes classes de simulations ont été étudiées. Les simulations des classes I et II sont initialisées par un écoulement de base de jet cylindrique (§4.1.1) avec respectivement  $R/\theta = 22.6$  (I) et  $R/\theta = 11.3$  (II), perturbé à  $t = 0$  par un mode instable proche du mode le plus instable des deux profils respectifs. Ce mode correspond à  $k\theta = 0.225$ , soit des nombres de Strouhal  $St = R/\lambda$  respectifs de 0.8 (I) et 0.4 (II), où  $k$  et  $\lambda = 2\pi/k$  désignent le nombre d'onde axial et la longueur d'onde du mode. Une troisième classe de simulations considère un profil de base à  $R/\theta = 22.6$  et une perturbation longitudinale à  $St = 0.4$ . Il s'agit de simulations "mixtes", dont l'écoulement de base est identique aux simulations de la classe I, mais perturbé par un mode moins instable, à plus grande longueur d'onde, correspondant à un nombre de Strouhal identique à celui injecté dans les simulations de la classe II. Chaque simulation est effectuée pour une valeur donnée du nombre d'onde azimutal  $n$  de la corrugation de l'écoulement de base. Une pré-simulation linéaire permet d'obtenir le mode le plus instable du profil de base corrugué correspondant, suivant la méthode présentée au §4.1. Ce mode est ensuite utilisé pour initialiser la simulation numérique de l'évolution temporelle du jet.

Le choix pour les valeurs de  $R/\theta$  correspond à celui retenu par Martin & Meiburg (1991), ce qui permet des rapprochements avec leurs résultats, bien que ceux-ci soient issus d'un modèle non-visqueux. Par ailleurs, ces valeurs représentent de manière réaliste le profil de vitesse moyenne du jet à la sortie de la buse observé dans les expériences pour la gamme de nombres de Reynolds étudiée ici. Quant aux nombres de Strouhal choisis, ils sont typiques de ceux mesurés dans les expériences de jets cylindriques (cf par exemple Crow & Champagne, 1971). La valeur  $St = 0.4$  est en outre proche de celle du mode "préféré" des jets cylindriques mis en évidence par Crow & Champagne (1971). Pour des nombres de Reynolds de l'ordre de ceux étudiés dans le présent travail, ces auteurs observent une succession d'appariements donnant finalement lieu à une allée d'anneaux tourbillonnaires dont le nombre de Strouhal moyen tourne autour de 0.3, valeur largement indépendante du nombre de Reynolds. En particulier, cette rangée d'anneaux ne présente pas d'appariement, résultat confirmé par l'étude expérimentale de Reynolds & Bouchard (1981) où le forçage du jet à  $St = 0.34$  supprime l'appariement. Cette valeur particulière du nombre de Strouhal se retrouve dans les expériences de jets chauds, pour lesquels la résonance se manifeste par un mode global oscillant à  $St \sim 0.4$  (Monkewitz *et al.*, 1990). On observe alors une allée régulière d'anneaux tourbillonnaires pour laquelle l'appariement est inhibé.

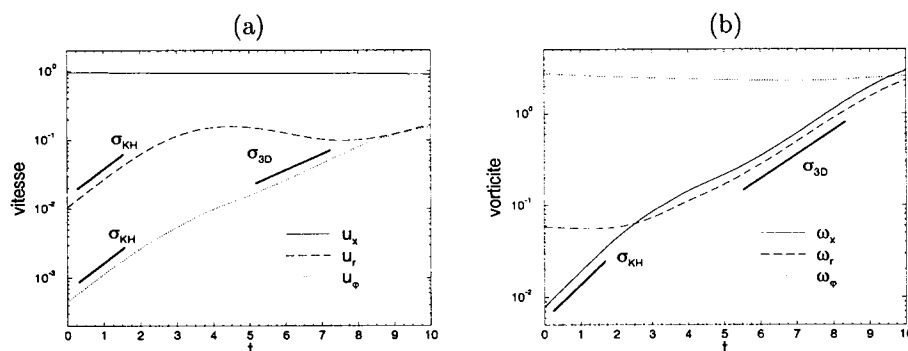
Les simulations présentées dans cette partie reproduisent l'évolution temporelle de l'écoulement pour une longueur d'onde de l'instabilité primaire. Dans la direction axiale  $x$  de l'écoulement, la résolution varie de  $N = 32$  à 64 points de collocation. Le rayon du jet et sa vitesse sur l'axe sont fixés à 1. Le pas de discrétisation spatiale est identique dans les trois directions cartésiennes  $\delta x = \lambda/N$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'instabilité primaire. Latéralement sont utilisés entre 72 et 256 points de collocation afin de minimiser les effets des conditions limites latérales périodiques. Ces effets sont quantifiés pour chaque simulation en mesurant l'énergie contenue dans le mode azimutal  $m = 4$  généré par les parois latérales périodiques. En surveillant que cette énergie ne soit pas plus importante que le bruit numérique ou ne croisse pas de manière non physique, on s'assure que la dynamique de l'écoulement n'est pas perturbée par la périodicité latérale. De plus certaines simulations à faible résolution (par exemple  $32 \times 72^2$  pour un jet à  $R/\theta = 11.3$ ,  $St = 0.4$  et  $n = 3$ ) ont été reprises à plus haute résolution ( $64 \times 256^2$ ). Les résultats obtenus ne sont pas modifiés, au moins dans les régimes linéaire et faiblement non-linéaire de l'instabilité secondaire 3D.



A partir des conditions initiales décrites précédemment, on laisse évoluer l'écoulement sur un intervalle de temps 4 à 6 fois supérieur au temps de saturation de l'instabilité primaire, ce qui permet d'explorer des régimes fortement non-linéaires et de décrire la dynamique de l'instabilité secondaire. Pour une évolution temporelle typique sur 5 temps de saturation, à haute résolution ( $64 \times 256^2$ ), le temps CPU monoprocasseur requis par la simulation est de 8 h. sur un Cray C90. La puissance du code varie entre 400 et 500 MFlops, pour des longueurs de vectorisation de 90 à 127.

### 4.2.2 Résultats numériques.

Chaque simulation numérique directe est effectuée pour une valeur définie de la corrugation  $n$ . Les conditions initiales consistent alors en un écoulement de base corrugué à un nombre d'onde azimutal  $n$  (Eq. 4.5) perturbé par le mode propre instable correspondant obtenu par pré-simulation linéaire (cf §4.1).



**Figure 4.9:** Evolution temporelle de la valeur quadratique moyenne des composantes de vitesse (a) et de vortacité (b) pour  $R/\theta = 22.6$ ,  $St = 0.8$  (classe I) et  $n = 6$ .

Les évolutions temporelles typiques de la vitesse et de la vortacité pour un tel écoulement sont représentées sur la figure 4.9 pour une simulation de classe I ( $R/\theta = 22.6$ ,  $St = 0.8$ ) avec une corrugation  $n = 6$ . L'initialisation de la simulation par le mode propre exact de l'écoulement de base avec corrugation supprime la phase d'ajustement observée dans les premiers instants des simulations précédentes (cf chapitre 3), qui nuirait à la mesure et à l'interprétation des résultats. On observe alors une croissance exponentielle ( $\sigma_{KH}$ ) pour les composantes de vitesse azimutale et de vortacité longitudinale identique à celle de la vitesse radiale, correspondant à la croissance de l'instabilité primaire du jet, de type Kelvin-Helmholtz. Quant à la vortacité radiale, qui à  $t = 0$  contient principalement la perturbation en vortacité radiale d'ordre  $\varepsilon$  introduite par la corrugation de l'écoulement de base, elle présente un plateau en début de simulation, résultant d'une combinaison entre la décroissance de la vortacité radiale de l'écoulement de base corrugué due à la viscosité et la croissance exponentielle de la composante en vortacité radiale du mode propre.

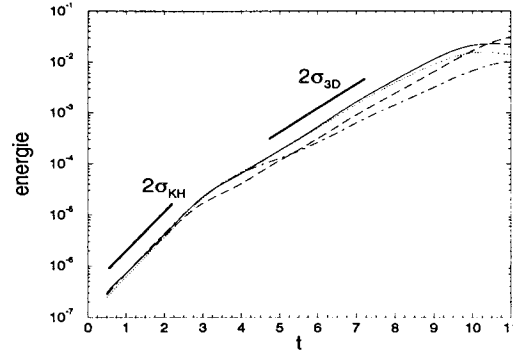
Rapidement les non-linéarités font saturer l'instabilité primaire (vers  $t = 5$ ), saturation que l'on peut observer sur la composante radiale de la vitesse et qui se traduit par la formation d'une allée d'anneaux tourbillonnaires. Du fait de la corrugation initiale, les anneaux générés par l'instabilité primaire présentent une modulation azimutale d'amplitude proportionnelle au niveau de corrugation.

L'écoulement constitué de cette rangée d'anneaux est linéairement instable vis-à-vis de cette perturbation non-axisymétrique. Cette instabilité tridimensionnelle se manifeste par la croissance exponentielle des composantes de vitesse azimutale et de vortacité radiale et longitudinale, avec un taux de croissance  $\sigma_{3D}$  différent de celui de l'instabilité primaire.

Pour mesurer avec précision le taux de croissance linéaire de cette instabilité, on décompose l'écoulement en modes azimutaux de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(x, r, \varphi; t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{u}_m(x, r; t) e^{im\varphi} + cc \quad (4.10)$$

où  $\mathbf{u}_m(x, r; t)$  correspond à la distribution spatiale du mode azimutal  $m$ . L'énergie moyenne contenue



**Figure 4.10:** Evolution temporelle de l'énergie du mode azimutal fondamental  $m = n$  pour  $R/\theta = 22.6$ ,  $St = 0.8$  (classe I) et  $n = 3$  (trait mixte),  $n = 6$  (trait continu),  $n = 9$  (pointillés) et  $n = 12$  (trait discontinu).

dans ce mode  $m$  est donnée par :

$$E_m(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \int_0^\infty r dr |\mathbf{u}_m(x, r; t)|^2 \quad (4.11)$$

où  $\lambda$  désigne la longueur d'onde de l'instabilité primaire. Cette décomposition en modes azimutaux et la mesure des énergies correspondantes se fait à intervalles de temps réguliers au cours de la simulation.

L'instabilité secondaire 3D étant forcée à un nombre d'onde azimutal  $n$  fixé, on étudie le taux de croissance du mode azimutal fondamental  $m = n$ . L'évolution temporelle de l'énergie du mode fondamental est représentée sur la figure 4.10 pour quatre simulations différentes de la classe I ( $n = 3, 6, 9$  et  $12$ ). Durant les premiers instants, on observe une croissance exponentielle identique pour les quatre cas, qui correspond à la croissance de l'instabilité primaire. Ce résultat est cohérent avec l'étude asymptotique (§4.1) qui montre qu'à l'ordre principal la croissance de l'instabilité primaire est indépendante du nombre d'onde azimutal de la corrugation. Ce régime de croissance exponentielle se connecte, alors que les anneaux ont saturé vers  $t = 5$ , à une autre phase de croissance exponentielle, celle-ci étant sensiblement dépendante de  $n$ . La mesure de ces taux de croissance  $\sigma_{3D}(n)$  est effectuée pour les simulations des trois classes et permet d'obtenir les courbes de stabilité présentées ci-après.

**Influence du nombre de Reynolds.** Dans un premier temps, les simulations de la classe I ont été utilisées pour étudier l'influence du nombre de Reynolds sur les taux de croissance de l'instabilité secondaire. Des simulations à  $R/\theta = 22.6$  et  $St = 0.8$  ont donc été menées pour différentes valeurs de corrugation  $n$ , à trois nombres de Reynolds :  $Re_\theta = 50, 100$  et  $200$ .

Les taux de croissance mesurés sont reproduits sur la figure 4.11(a). Pour les trois cas, le taux de croissance augmente avec  $n$  ( $n = 0$  correspond à un mode neutre) pour atteindre un maximum peu marqué autour de  $n = 6$  quelle que soit la valeur de  $Re_\theta$ . La décroissance du taux de croissance pour  $n$  plus grand est ensuite très progressive. Pour ces simulations à  $R/\theta$  et  $St$  constants, une augmentation du nombre de Reynolds induit une augmentation du taux de croissance de chaque mode azimutal, du fait de la diminution de la dissipation visqueuse. Les courbes tendent vers une courbe asymptotique qui est pratiquement atteinte pour  $Re_\theta = 100$ . Pour cette raison, cette valeur du nombre de Reynolds a été retenue pour toutes les simulations présentées par la suite.

**Influence de  $R/\theta$  et  $St$ .** Les simulations des classes I, II et III effectuées à  $Re_\theta$  constant ( $Re_\theta = 100$ ) permettent de mettre en évidence les influences respectives du paramètre de cisaillement  $R/\theta$  et du nombre de Strouhal  $St$  [Fig. 4.11(b)].

A nombre de Strouhal constant ( $St = 0.4$ ), les caractéristiques de l'instabilité secondaire sont peu sensibles au cisaillement. Ainsi une variation de  $R/\theta$  d'un facteur deux n'entraîne qu'une modification de quelques pour-cents des taux de croissance des modes azimutaux et les courbes de stabilités sont comparables : elles atteignent un maximum vers  $n = 3$  pour un taux de croissance de l'ordre de 0.3. Pour les nombres d'onde azimutaux supérieurs à 3, on observe comme précédemment un plateau, légèrement

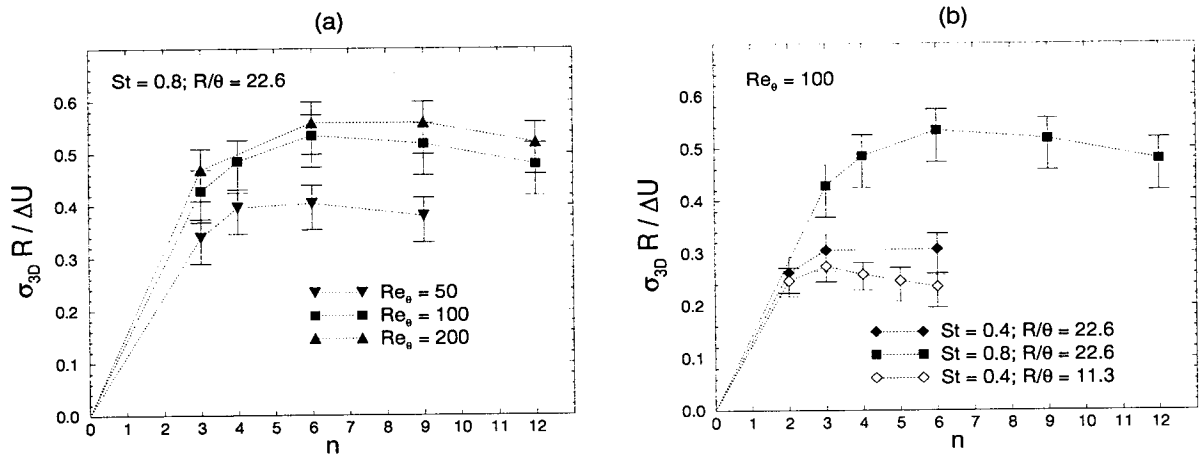


Figure 4.11: Taux de croissance de l'instabilité secondaire 3D du jet cylindrique : influence du nombre de Reynolds (a), de  $R/\theta$  et  $St$  (b).  $\Delta U$  désigne la différence de vitesse entre le jet et le fluide ambiant.

plus franc pour  $R/\theta = 22.6$  que pour  $R/\theta = 11.3$ , où le taux de croissance a tendance à décroître sensiblement avec  $n$ .

A  $R/\theta$  constant ( $R/\theta = 22.6$ ), l'effet du nombre de Strouhal est au contraire beaucoup plus radical. A  $St = 0.4$ , le plateau est atteint dès  $n = 3$ , pour un taux de croissance d'environ 0.3 alors qu'à  $St = 0.8$ , il faut attendre  $n = 6$  pour obtenir un taux de croissance quasiment constant autour de 0.5.

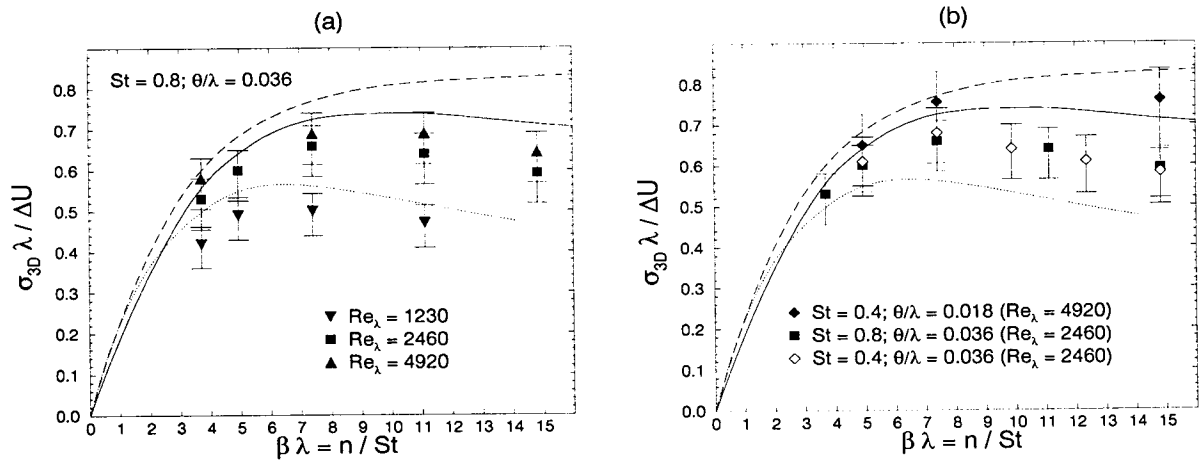


Figure 4.12: Taux de croissance renormalisés par  $St$  de l'instabilité secondaire 3D du jet cylindrique : influence du nombre de Reynolds (a), de  $\theta/\lambda$  et  $St$  (b). Les courbes représentent les prédictions théoriques de Pierrehumbert & Widnall (1982) concernant l'instabilité translatrice des couches de mélange planes pour des valeurs typiques de la concentration  $\rho$  des tourbillons primaires :  $\rho = 0.1$  (pointillés),  $\rho = 0.25$  (trait plein) et  $\rho = 0.4$  (trait discontinu).

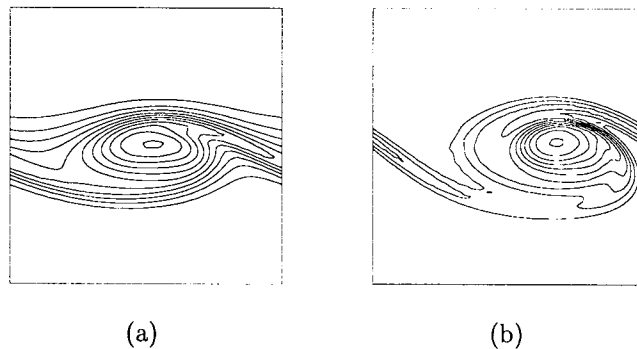
A la lumière de ces résultats, il apparaît clairement que la dynamique de l'instabilité secondaire 3D du jet est principalement contrôlée par le nombre de Strouhal de l'instabilité primaire. La figure 4.12 synthétise cette dépendance de l'instabilité secondaire vis-à-vis de  $St$ . Les courbes de la figure 4.11 ont été réadimensionnées afin de prendre  $\lambda$  comme longueur caractéristique en divisant nombre d'onde azimutal et taux de croissance par  $St = R/\lambda$ . Le taux de croissance adimensionné est alors  $\sigma_{3D} \lambda / \Delta U$  et le nombre d'onde adimensionné de l'instabilité secondaire est  $\beta \lambda$  avec  $\beta = n/R = 2\pi/\lambda_{3D}$  où  $\lambda_{3D}$  est la longueur d'onde azimutale de l'instabilité secondaire. L'échelle de longueur pertinente pour l'étude de l'instabilité secondaire étant la longueur d'onde de l'instabilité primaire  $\lambda$ , toutes les quantités ont été réévaluées avec ce dimensionnement. Les paramètres sans dimension du problème sont alors le nombre

de Strouhal  $St = R/\lambda$ , le nombre de Reynolds  $Re_\lambda = \Delta U \lambda / \nu$  et  $\theta/\lambda$ , ce dernier paramètre mesurant la concentration initiale de la vorticité azimutale, dont l'enroulement produit les anneaux tourbillonnaires.

Les résultats obtenus peuvent alors être réinterprétés en fonction de ces nouveaux paramètres.

A  $St$  et  $\theta/\lambda$  constants, une diminution de  $Re_\lambda$  tend à restabiliser les modes azimutaux [Fig. 4.12(a)]. Avec le choix de  $\lambda$  comme échelle de longueur caractéristique pour l'instabilité, tous les points de mesure de la figure 4.11(b) se regroupent sur une seule et même courbe [Fig. 4.12(b)]. En particulier, à  $\theta/\lambda$  et  $Re_\lambda$  constants ( gaux respectivement   0.036 et 2460), les taux de croissance ainsi adimensionnés n'indiquent aucune influence marquée de la courbure, même lorsque celle-ci est grande (pour les petites valeurs de  $n$  et de  $St = R/\lambda$ ).

Au vu de ce résultat et du fait que l'instabilité secondaire est contrôlée par la longueur d'onde  $\lambda$  des anneaux tourbillonnaires, les courbes de stabilité obtenues ont été comparées à celle de l'instabilité *translative* d'une allée périodique plane de tourbillons de Stuart mise en évidence par Pierrehumbert & Widnall (1982). Les prédictions théoriques de Pierrehumbert & Widnall sont reproduites sur la figure 4.12 pour différentes valeurs de la concentration des tourbillons.

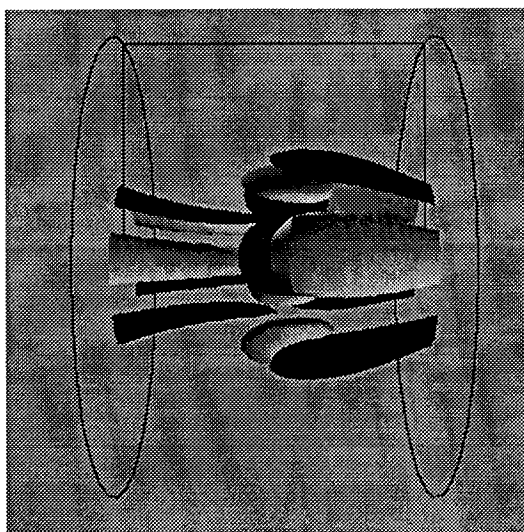


**Figure 4.13:** Isocontours de la vorticité azimutale concentrée en anneau tourbillonnaire dans les jets cylindriques pour  $St = 0.4$  et (a)  $\theta/\lambda = 0.036$ ,  $Re_\lambda = 2460$  ou (b)  $\theta/\lambda = 0.018$ ,  $Re_\lambda = 4920$ . L'influence combinée de  $\theta/\lambda$  et  $Re_\lambda$  conduit à des tourbillons sensiblement plus concentres en (b) qu'en (a). Incrément à 10% du maximum du champ.

La variation du taux de croissance en fonction de  $Re_\lambda$  et  $\theta/\lambda$  observée sur la figure 4.12(b) pour l'instabilité secondaire du jet cylindrique s'interprète alors en termes de modification de la concentration des tourbillons primaires :  $\theta/\lambda = 0.018$  correspond à une couche de vorticité azimutale initiale plus concentree et donc susceptible de s'enrouler en un anneau tourbillonnaire plus concentree que dans le cas  $\theta/\lambda = 0.036$ . Un nombre de Reynolds plus important ( $Re_\lambda = 4920$  au lieu de 2460) limite par ailleurs la diffusion du tourbillon, conduisant à une concentration plus importante (Fig. 4.13). Les taux de croissance mesurés pour le jet avec  $\theta/\lambda = 0.018$  sont alors en bon accord avec les résultats de Pierrehumbert & Widnall, qui prévoient des taux de croissance légèrement plus élevés pour les tourbillons primaires plus concentres (courbes de la figure 4.12).

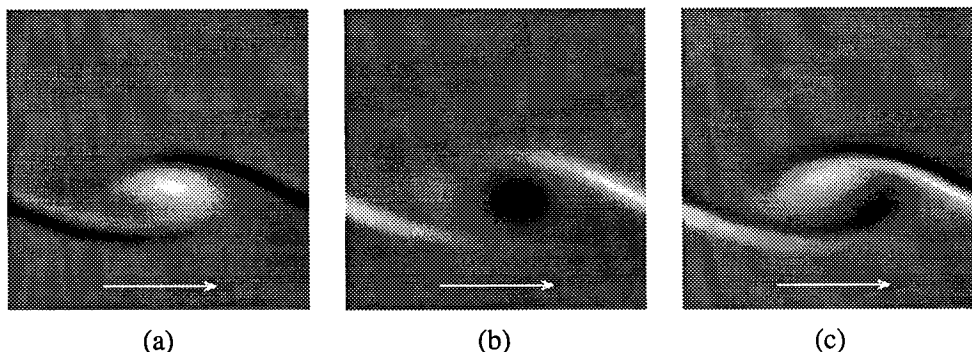
Les courbes de stabilité obtenues pour l'instabilité secondaire 3D du jet cylindrique se comparent bien avec celles de l'instabilité translative des couches de mélange planes mise en évidence théoriquement par Pierrehumbert & Widnall (1982, Fig. 4.12). Ces similitudes entre les deux instabilités suggèrent que l'instabilité secondaire observée dans les jets cylindriques pourrait être de même nature que l'instabilité translative. Ce point de vue est discuté au  4.2.3.

**Modes propres.** La structure tridimensionnelle des modes propres de l'instabilité secondaire du jet est illustrée sur la figure 4.14. Le champ de vorticité longitudinale du mode propre pour un jet de classe II à  $n = 3$  est représenté sous forme d'isosurfaces. Les structures claires et sombres correspondent respectivement à des régions de vorticité longitudinale positive et négative. D'après les courbes de stabilité [Fig. 4.12(b)], ce mode correspond au mode le plus instable de l'instabilité secondaire pour ce type de jet.



**Figure 4.14:** Structure spatiale du champ de vorticité longitudinale positive (zones claires) et négative (zones sombres) du mode propre à  $n = 3$  d'un jet de classe I. Les isosurfaces correspondent à un seuil de 40% du maximum. L'anneau tourbillonnaire se trouve au centre du domaine. L'écoulement va de la gauche vers la droite.

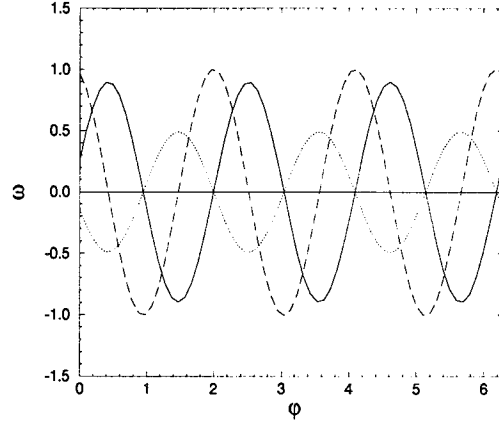
On observe la présence de vorticité longitudinale à la fois dans le cœur de l'anneau tourbillonnaire (au centre) et dans la tresse, où la vorticité longitudinale est concentrée en nappes de signes alternés suivant l'angle azimutal  $\varphi$ , en opposition de phase avec la vorticité présente dans le cœur de l'anneau. Ces nappes sont en outre beaucoup plus larges juste en aval de l'anneau.



**Figure 4.15:** Coupes azimutales  $(x, r)$  du champ de vorticité du mode propre de la figure 4.13 en niveau de gris, les régions claires et sombres correspondant respectivement à des valeurs positives et négatives : (a) vorticité longitudinale en  $\varphi_0$ ; (b) vorticité radiale en  $\varphi_0$ ; (c) vorticité azimutale en  $\varphi_0 + \pi/6$ .

Des coupes du champ de vorticité dans des plans  $(x, r)$    différentes valeurs de l'azimut  $\varphi$  révèlent la distribution spatiale du mode propre. La figure 4.15(a) représente une coupe de la vorticité longitudinale, où l'on retrouve le déphasage de  $\pi$  entre la vorticité longitudinale présente dans le cœur et celle de la tresse. Bien que plus concentrée dans le cœur de l'anneau, la distribution de la vorticité radiale du mode propre est sensiblement identique, au signe près [Fig. 4.15(b)]. Il est à noter que les champs de vorticité longitudinale et radiale sont grossièrement symétriques par rapport au centre de l'anneau. Ce n'est pas le cas pour le champ de vorticité azimutale, qui est plutôt antisymétrique [Fig. 4.15(c)]. A cause de la courbure, les champs ne sont en fait pas exactement (anti-)symétriques par rapport au cœur du tourbillon, comme ce serait le cas pour une couche de mélange plane : pour les trois composantes, l'amplitude du mode propre dans la tresse est plus importante juste en aval de l'anneau.

De plus, on observe que les champs de vorticité longitudinale et radiale sont en opposition de phase, et



**Figure 4.16:** Distribution azimuthale des composantes longitudinale (trait plein), radiale (pointillés) et azimuthale (trait discontinu) de la vorticité du mode propre de la figure 4.13 autour de leurs maximums respectifs dans le cœur de l'anneau.

que le champ de vorticité azimuthale est en quadrature de phase avec les deux autres champs. Ce résultat est illustré par la figure 4.16, où est représentée la distribution azimuthale des composantes de la vorticité du mode propre dans le cœur de l'anneau : le mode propre de cette instabilité secondaire correspond donc à une distorsion azimuthale de l'anneau tourbillonnaire, avec des lobes extérieurs et des creux intérieurs décalés respectivement vers l'amont et vers l'aval (cf Fig. 3.12 du chapitre 3).

### 4.2.3 Discussion.

La comparaison directe des courbes de stabilité obtenue pour l'instabilité secondaire 3D des jets cylindriques avec les pr dictiones théoriques de Pierrehumbert & Widnall (1982) pour l'instabilité translativ  d'une allée périodique de tourbillons de Stuart montre un bon accord à la fois qualitatif et quantitatif. Cette section a pour objectif de définir plus en détail l'instabilité secondaire des jets par rapport à l'instabilité translativ .

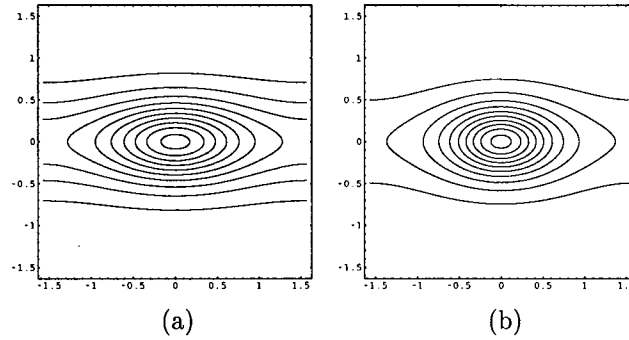
**Tourbillons de Stuart.** Dans le but d'étudier les instabilités secondaires 2D et 3D des couches de mélange planes, Pierrehumbert & Widnall ont analysé la stabilité temporelle d'une allée de tourbillons de Stuart (1967). Ces tourbillons constituent une famille de solutions stationnaires des équations d'Euler incompressibles, dont la fonction de courant est donnée par :

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2} \ln [\cosh(2y) - \rho \cos(2x)] \quad (4.12)$$

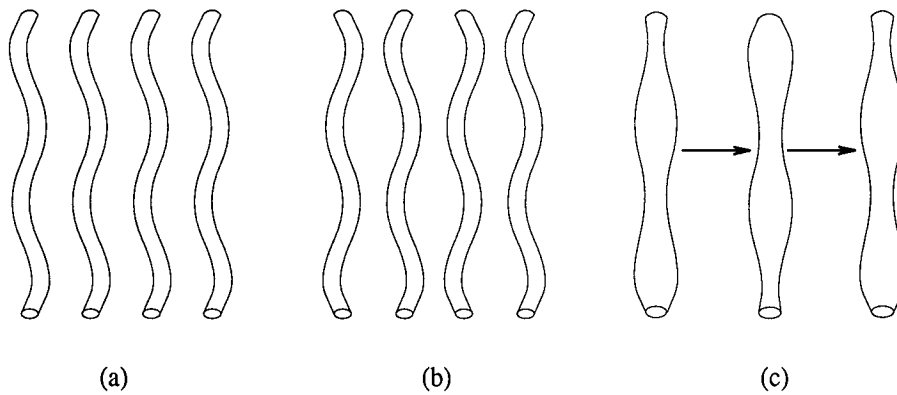
Ces solutions correspondent à une rangée périodique de tourbillons distants de  $\pi$ , séparant deux courants opposés  $u_x(y = \pm\infty) = \pm 1$ . Cette famille de solutions est paramétrée par  $\rho \in [0, 1]$  qui mesure la concentration des tourbillons de Stuart. Ainsi  $\rho = 0$  correspond au profil de vitesse en tangente hyperbolique classique  $u_x(y) = \tanh(2y)$  (tourbillons infiniment peu concentrés) et la solution à  $\rho = 1$  consiste en une allée périodique de tourbillons ponctuels (tourbillons infiniment concentrés). Les valeurs intermédiaires de  $\rho$  donnent des tourbillons de section elliptique (Fig. 4.17).

Si le cœur des tourbillons de Kelvin-Helmholtz est à peu près bien représenté par la solution de Stuart, cette dernière ne présente cependant pas de tresse à proprement parler mais plutôt une vorticité résiduelle diffuse, d'autant moins importante que le tourbillon est concentré.

Ce dernier point, ainsi que la courbure des anneaux tourbillonnaires, montre qu'il est délicat d'essayer de déterminer rigoureusement la valeur de  $\rho$  de la solution de Stuart modélisant le mieux les tourbillons primaires. La rangée d'anneaux tourbillonnaires issue des simulations de classe I et II ( $\theta/\lambda = 0.036$  et  $Re_\lambda = 2460$ ) est relativement bien représentée par la solution de Stuart à  $\rho = 0.25$  alors que les anneaux tourbillonnaires des simulations de classe III ( $\theta/\lambda = 0.018$ ,  $Re_\lambda = 4920$ ), plus concentrés, correspondent à une valeur de  $\rho$  plus élevée, proche de 0.4 (comparer les figures 4.13 et 4.17).



**Figure 4.17:** Isocontours de vorticité pour les tourbillons de Stuart de concentration  $\rho = 0.25$  (a) et  $\rho = 0.4$  (b). Incrément à 10% du maximum du champ.



**Figure 4.18:** Instabilités des tourbillons de Stuart : instabilité translatrice (a), appariement hélicoïdal (b) et instabilité variqueuse (c).

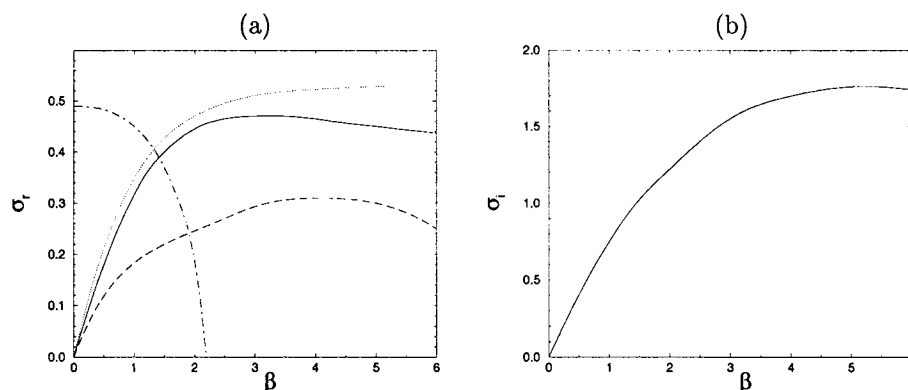
**Stabilité des tourbillons de Stuart.** Pierrehumbert & Widnall ont analysé la stabilité temporelle de l'écoulement de base (4.12) vis-à-vis de perturbations 3D. Ces perturbations se décomposent en modes de la forme :

$$A(x, y)e^{i(kx + \beta z - \omega t)} + cc \quad (4.13)$$

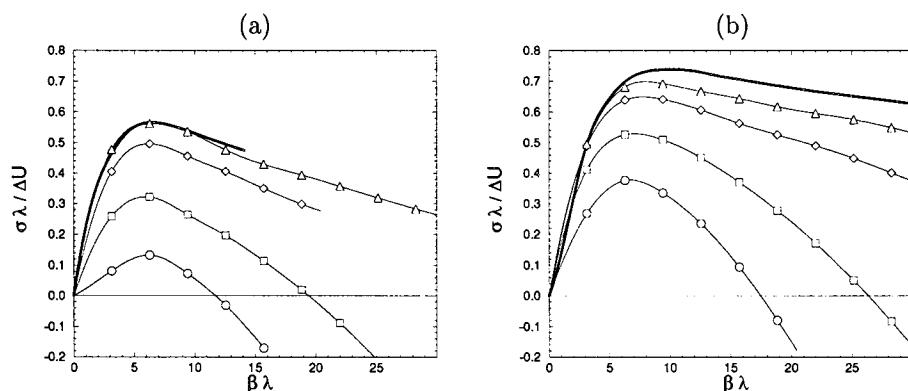
où  $A$  est périodique dans la direction axiale  $x$ , de même période ( $\lambda = \pi$ ) que l'écoulement de base.  $\beta$  représente le nombre d'onde latéral du mode dans la direction  $z$ .

L'étude met en évidence différents types d'instabilité :

- une instabilité fondamentale (à  $k = 0$ ), l'instabilité translatrice (*translative instability*), qui préserve la périodicité de l'écoulement de base : les tourbillons sont alors tous déformés en phase, comme indiqué sur la figure 4.18(a). Cette instabilité est stationnaire et ne présente pas de maximum d'amplification marqué [Fig. 4.19(a)]. En particulier le taux de croissance tend vers une constante pour les grandes valeurs de  $\beta$ . Ce comportement asymptotique, lié à l'ellipticité du cœur des tourbillons, est connu sous le nom d'instabilité elliptique (Bayly, 1986; Pierrehumbert, 1986). Pour les valeurs finies de  $\beta$ , correspondant à des longueurs d'onde latérales de la taille du cœur des tourbillons, l'instabilité translatrice peut être interprétée comme l'instabilité 3D d'un tourbillon placé dans un champ d'étirement, ici le champ d'étirement généré par les tourbillons voisins (cf Saffman, 1992). L'instabilité translatrice est ainsi une instabilité de cœur des tourbillons.
- une instabilité sous-harmonique (pour  $k = 1$ ), l'appariement hélicoïdal (*helical pairing*), qui se manifeste par une ondulation latérale des tourbillons en opposition de phase pour deux tourbillons voisins [Fig. 4.18(b)]. Cette instabilité stationnaire a un taux de croissance maximum pour les



**Figure 4.19:** Taux de croissance (a) de l'appariement hélicoïdal pour  $\rho = 0.25$  (trait mixte), de l'instabilité translatrice pour  $\rho = 0.25$  (trait continu) et  $\rho = 0.4$  (pointillés), de l'instabilité variqueuse pour  $\rho = 0.4$  (trait discontinu). Fréquence d'oscillation de l'instabilité variqueuse pour  $\rho = 0.4$  (b). D'après Pierrehumbert & Widnall (1982) et Schoppa *et al.* (1995).



**Figure 4.20:** Taux de croissance visqueux de l'instabilité translatrice pour  $\rho = 0.1$  (a) et  $0.25$  (b).  $\circ$  :  $Re_\lambda = 630$ ,  $\square$  :  $Re_\lambda = 1570$ ,  $\diamond$  :  $Re_\lambda = 3140$ ,  $\Delta$  :  $Re_\lambda = 6280$ . Les courbes en trait gras correspondent aux prédictions numériques de Pierrehumbert & Widnall en fluide non visqueux.

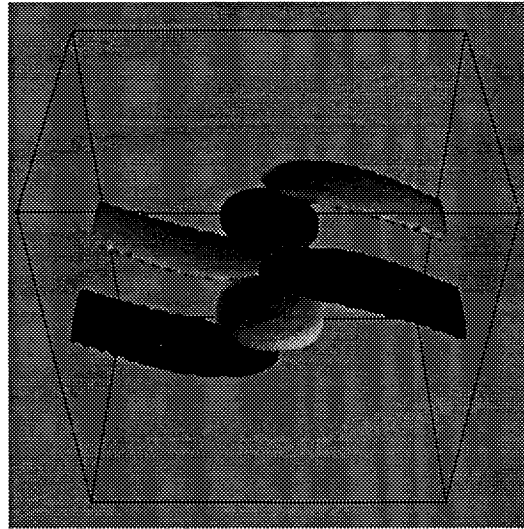
modes 2D ( $\beta = 0$ ) et correspond alors à l'appariement 2D classique. La courbe de stabilité de cette instabilité [Fig. 4.19(a)] est caractérisée par l'existence d'un nombre d'onde latéral de coupure. En particulier, l'appariement hélicoïdal est stable pour  $\beta > 3$  quel que soit  $\rho$ .

Un autre type d'instabilité fondamentale, de type variqueux [*bulging instability*, Fig. 4.18(c)], a été étudié en détail par Schoppa *et al.* (1995). Cette instabilité présente des taux de croissance plus faibles que ceux de l'instabilité translatrice [Fig. 4.19(a)] et se distingue par son caractère oscillant [Fig. 4.19(b)].

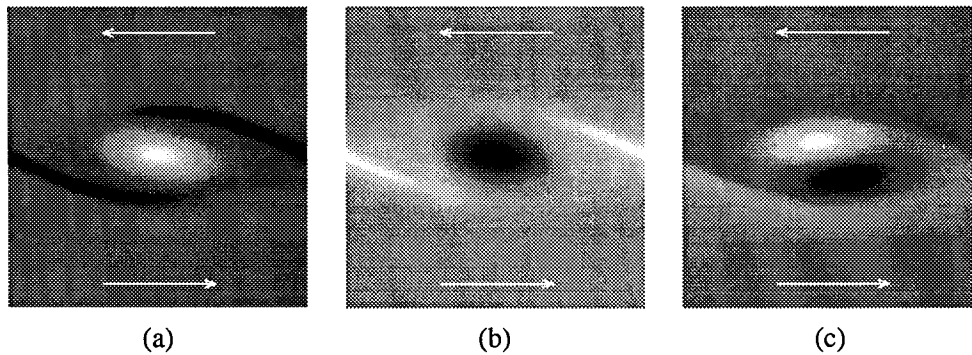
**Instabilité translatrice.** Les caractéristiques de l'instabilité translatrice ont été recalculées en prenant en compte une viscosité finie, au moyen de simulations numériques directes. La méthode est identique à celle exposée au §4.1.1 : la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour de l'écoulement de base constitué des tourbillons de Stuart (Eq. 4.12) à partir d'une condition initiale de nombre d'onde latéral donné permet de remonter au taux de croissance et au mode propre associé. On s'affranchit des modes d'appariement hélicoïdaux, sous-harmoniques, en ne simulant qu'une période spatiale de l'écoulement de base. Les modes translatifs étant plus instables que les modes variqueux sont susceptibles de dominer l'écoulement aux temps longs. On s'en assure a posteriori en vérifiant que le mode instable obtenu par intégration des équations linéarisées n'est pas oscillant.

Les taux de croissance des modes ainsi obtenus numériquement sont représentés sur la figure 4.20 pour deux valeurs caractéristiques de  $\rho$ . L'influence de la viscosité tend clairement à restabiliser les grands





**Figure 4.21:** Structure spatiale du champ de vorticité longitudinale positive (zones claires) et négative (zones sombres) du mode propre de l'instabilité translatrice pour  $\rho = 0.25$ ,  $\beta = 3$  et  $Re_\lambda = 3140$ . Les isosurfaces correspondent à un seuil de 40% du maximum. Le tourbillon de Stuart se trouve au centre du domaine.



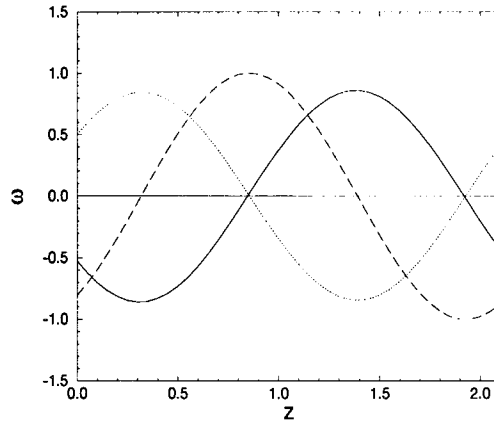
**Figure 4.22:** Coupes latérales  $(x, y)$  du champ de vorticité du mode propre de la figure 4.21 en niveau de gris, les régions claires et sombres correspondant respectivement à des valeurs positives et négatives : (a) vorticité longitudinale en  $z_0$  ; (b) vorticité transversale en  $z_0$  ; (c) vorticité latérale en  $z_0 + \pi/6$ .

nombres d'onde latéraux, ce qui rend l'instabilité translatrice sensiblement plus sélective. Ainsi la prise en compte de la viscosité conduit à l'apparition d'un nombre d'onde latéral de coupure, d'autant plus petit que la viscosité est importante et la concentration des tourbillons faible.

La structure spatiale des modes propres de l'instabilité translatrice est illustrée sur la figure 4.21 pour  $\rho = 0.25$ ,  $Re_\lambda = 3140$  et  $\beta = 3$ . L'instabilité translatrice prend naissance dans le cœur des tourbillons et il est naturel que le champ de vorticité associé au mode propre présente des zones de vorticité longitudinale dans le tourbillon. Mais il se trouve que cette instabilité de cœur induit manifestement une réorientation de la vorticité résiduelle présente à l'extérieur des tourbillons, ce qui conduit à l'apparition de nappes de vorticité longitudinale, de signes alternés, entre les tourbillons. Ainsi l'instabilité translatrice est susceptible de générer de la vorticité longitudinale entre les tourbillons de Kelvin-Helmholtz en réorientant la vorticité présente dans la tresse. Cette remarque permet d'expliquer l'origine des structures tourbillonnaires longitudinales observées expérimentalement dans la tresse.

Des coupes du champ de vorticité dans différents plans verticaux  $(x, y)$  révèlent une structure spatiale du mode propre très similaire à celle du mode propre de l'instabilité secondaire 3D des jets cylindriques.

Les différentes composantes de la vorticité exhibent ainsi les mêmes symétries par rapport au centre du tourbillon (Fig. 4.22).



**Figure 4.23:** Distribution latérale des composantes longitudinale  $\omega_x$  (trait plein), transversale  $\omega_y$  (pointillés) et latérale  $\omega_z$  (trait discontinu) de la vorticité du mode propre de la figure 4.18 autour de leurs maximums respectifs dans le cœur du tourbillon de Stuart.

La similitude entre les deux modes est confirmée avec la figure 4.23, qui représente la distribution suivant  $z$  des composantes de la vorticité du mode propre dans le tourbillon : comme pour le cas du jet cylindrique, les champs de vorticité longitudinale  $\omega_x$  et transversale  $\omega_y$  sont en opposition de phase, alors que la composante latérale  $\omega_z$  est en quadrature de phase à la fois avec  $\omega_x$  et  $\omega_y$ .

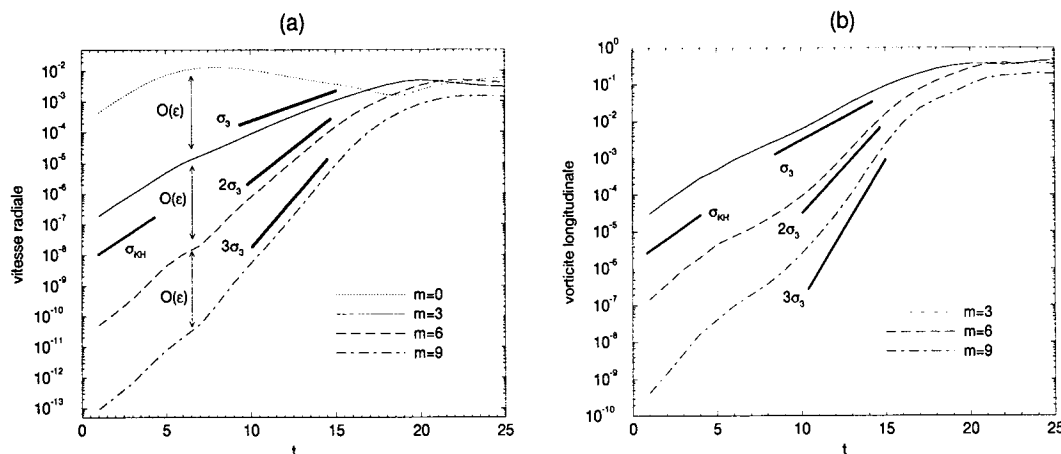
**Une conjecture ?** L'ensemble de ces résultats comparatifs confirme que l'instabilité secondaire 3D mise en évidence dans les jets cylindriques est de même nature que l'instabilité translative des couches de mélange planes. Il ressort en outre de la présente étude que cette instabilité est susceptible de réorienter la vorticité de la tresse pour donner naissance à des nappes de vorticité longitudinale de signes alternés entre les tourbillons primaires.

Quant à la sélection d'un nombre d'onde azimutal par l'écoulement de jet cylindrique, l'étude paramétrique a montré qu'elle était principalement contrôlée par le nombre de Strouhal de la rangée des anneaux tourbillonnaires issus de l'instabilité primaire. Cette sélection n'est pas très marquée et plusieurs modes sont susceptibles d'apparaître, même si, du fait de la géométrie cylindrique, le spectre des nombres d'onde azimutaux est discrétisé. Dans ces conditions, la prédiction d'un nombre d'onde azimutal dominant est délicate. Schématiquement l'instabilité secondaire 3D joue le rôle de filtre passe-haut, contrôlé par le nombre de Strouhal  $St$  de l'instabilité primaire. De son côté la viscosité, en stabilisant les grands nombres d'onde, correspond à un filtre passe-bas. Grossièrement, au vu des courbes de stabilité, et pour la gamme de nombres de Reynolds étudiés, l'ordre de grandeur du nombre d'onde azimutal le plus susceptible de dominer la dynamique 3D du jet cylindrique est  $n \sim 9 St$ .

Pour des nombres de Strouhal à la sortie de la buse supérieurs au nombre de Strouhal du mode préféré du jet ( $St \sim 0.4$ ), des appariements successifs vont jalonner le développement spatial du jet. Le nombre de Strouhal mesuré le long de l'écoulement décroît ainsi de moitié par paliers, jusqu'à atteindre une valeur proche de 0.4. L'instabilité 3D a un taux de croissance au moins comparable à celui de l'appariement [cf Fig. 4.19(a)] : le mode 3D dominant à la sortie de la buse a donc le temps de se développer et d'imposer son nombre d'onde azimutal à la nouvelle rangée d'anneaux tourbillonnaires résultant du premier appariement. L'instabilité 3D étant très peu sélective, ce mode azimutal est susceptible de rester le mode dominant. Le nombre d'onde azimutal sélectionné le long de l'écoulement est alors directement relié au nombre de Strouhal à la sortie de la buse, au moins pour des nombres de Reynolds dans la gamme de ceux étudiés ici. Cette conjecture suppose néanmoins que le nombre d'appariements successifs reste faible (cf les expériences de couches de mélange planes de Huang & Ho, 1990), ce qui est en général le cas (Crow & Champagne, 1971).

### 4.3 Instabilité secondaire 3D : régime non-linéaire.

#### 4.3.1 Dynamique des modes harmoniques.



**Figure 4.24:** Evolution temporelle de l'énergie contenue dans les composantes de vitesse radiale (a) et de vorticité longitudinale (b) des modes azimutaux harmoniques pour un jet de classe II corrugué à  $n = 3$ .

L'étude du régime linéaire de l'instabilité secondaire 3D des jets cylindriques s'intéresse principalement à l'évolution du mode azimutal fondamental  $m = n$  introduit par la corrugation  $n$  initiale. Au-delà du régime linéaire, les non-linéarités du système sont susceptibles de générer des modes azimutaux harmoniques du mode fondamental de corrugation. Dans le cas d'un jet modulé azimutalement par corrugation, la section 4.1 a montré que ces harmoniques sont présents dans l'écoulement, du fait de la corrugation imposée initialement, avec des amplitudes relatives  $A_{(p+1)n}/A_{pn} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ , où  $A_{pn}$  est l'amplitude du mode azimutal  $m = pn$ ,  $n$  le nombre d'onde azimutal de la corrugation et  $\varepsilon$  son amplitude,  $p = 1$  correspondant au mode azimutal fondamental,  $p = 2$  au premier harmonique, etc...

L'évolution temporelle des composantes de vitesse radiale et de vorticité longitudinale pour ces différents modes azimutaux est représentée sur la figure 4.24 pour un jet de classe II ( $R/\theta = 11.3$ ,  $St = 0.4$ ) avec une corrugation  $n = 3$ . Alors que croît l'instabilité primaire du jet (jusqu'à  $t = 5$  environ), le mode azimutal fondamental ainsi que ses harmoniques présentent une croissance exponentielle identique à celle du mode axisymétrique, comme prédit par l'analyse asymptotique de la section 4.1. L'instabilité primaire sature autour de  $t = 5$  et les fluctuations azimutales présentes à cet instant (le mode azimutal fondamental  $m = 3$  et les modes azimutaux harmoniques correspondants) évoluent alors sur un écoulement de base constitué de l'allée périodique d'anneaux tourbillonnaires générés par l'instabilité primaire du jet. Cet écoulement est linéairement instable vis-à-vis de perturbations azimutales et on observe alors une croissance exponentielle du mode fondamental avec un taux de croissance  $\sigma_3$  en accord avec les résultats de stabilité linéaire de la section 4.2.

L'évolution des modes harmoniques est radicalement différente. Si l'on observe une croissance exponentielle pour le premier et le second harmonique [Fig. 4.24(a)], les taux de croissance mesurés ne correspondent pas à ceux obtenus lorsque ces modes sont les perturbations azimutales dominantes. En effet, l'étude linéaire de la section précédente a mis en évidence pour ce type de jet un taux de croissance maximum pour le mode  $m = 3$  et une croissance sensiblement plus faible pour les modes azimutaux de nombre d'onde supérieur. La dynamique des modes azimutaux harmoniques ne peut manifestement pas être décrite par une analyse linéaire et les interactions non-linéaires doivent être prises en compte.

L'instabilité secondaire du jet a été mise en évidence dans la section 4.2 comme une instabilité translatrice de l'écoulement de base axisymétrique constitué d'une rangée périodique d'anneaux tourbillonnaires qui, dans le référentiel se déplaçant à la vitesse des anneaux, s'écrit  $\mathbf{U}(x, r)$ , avec  $\mathbf{U}(x + \lambda, r) = \mathbf{U}(x, r)$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'instabilité primaire. Dans ce référentiel, les modes propres de l'instabilité

translative sont stationnaires, de la forme :

$$A_p^0 \mathbf{u}_p(x, r) e^{ip\varphi} e^{\sigma_p t} = A_p(t) \mathbf{X}_p, \quad \mathbf{X}_p = \mathbf{u}_p(x, r) e^{ip\varphi} \quad (4.14)$$

où  $\mathbf{u}_p$  est la distribution spatiale du mode propre  $p$ ,  $A_p^0$  son amplitude initiale et  $\sigma_p$  son taux de croissance linéaire.

Le spectre des valeurs propres  $\{\sigma_p\}$  est réel et discret et si l'on définit le produit scalaire :

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int_0^\infty r dr \int_0^\lambda dx \int_0^{2\pi} d\varphi \quad \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \quad (4.15)$$

alors on montre que  $\{\mathbf{X}_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$  est une base orthogonale pour le problème linéarisé.

L'évolution linéaire de ces modes propres est donnée par :

$$\frac{dA_p}{dt} = \sigma_p A_p, \quad A_p(0) = A_p^0 \quad (4.16)$$

De manière générale, toute perturbation  $\mathbf{u}$  peut s'écrire sous la forme  $\mathbf{u} = \sum_m A_m(t) \mathbf{X}_m + cc$ . En injectant cette décomposition dans les équations non-linéaires et en effectuant le produit scalaire par  $\mathbf{X}_p = \mathbf{u}_p e^{ip\varphi}$ , on obtient une équation pour l'amplitude  $A_p$ , extension de (4.16) prenant en compte les interactions non-linéaires (Manneville, 1991).

Les non-linéarités des équations de Navier-Stokes provenant d'une forme bilinéaire, l'équation pour  $A_p$  s'écrit formellement :

$$\frac{dA_p}{dt} = \sigma_p A_p + \sum_{q+r=p} a_{p,qr} A_q A_r \quad (4.17)$$

avec la convention  $A_{-p} = A_p^*$ , où \* désigne le complexe conjugué.

Les perturbations azimutales introduites par la corrugation sont de la forme :

$$\mathbf{u} = \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^p A_{pn}(t) \mathbf{u}_{pn}(x, r) e^{ipm\varphi} + cc \quad (4.18)$$

où  $A_{pn} = \mathcal{O}(1)$  et  $\varepsilon \ll 1$  est l'amplitude de la corrugation  $n$ . Les équations dérivées pour l'amplitude du mode azimutal fondamental  $A_n$  et des deux premiers harmoniques  $A_{2n}$  et  $A_{3n}$  sont :

$$\frac{dA_n}{dt} = \sigma_n A_n + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.19)$$

$$\frac{dA_{2n}}{dt} = \sigma_{2n} A_{2n} + a A_n^2 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.20)$$

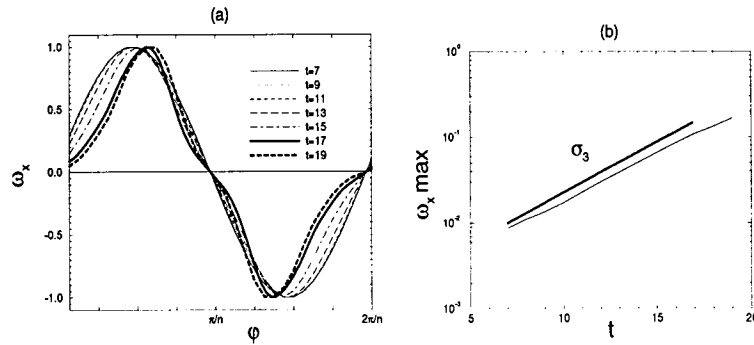
$$\frac{dA_{3n}}{dt} = \sigma_{3n} A_{3n} + b A_n A_{2n} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.21)$$

A l'ordre principal, on obtient immédiatement  $A_n(t) = a e^{\sigma_n t}$  pour le fondamental, où l'on retrouve le résultat de l'analyse linéaire. L'amplitude du premier harmonique, solution de (4.20), est donnée alors par  $A_{2n}(t) = b e^{2\sigma_n t} + c e^{\sigma_{2n} t}$ . Dès que  $2\sigma_n > \sigma_{2n}$ , le terme dominant est  $e^{2\sigma_n t}$  et le premier harmonique a un taux de croissance effectif proche de  $2\sigma_n$  (Fig. 4.24). De la même manière, on montre que si  $3\sigma_n > \sigma_{3n}$ , alors l'évolution du second harmonique est contrôlée par un terme de la forme  $e^{3\sigma_n t}$  (Fig. 4.24), et ainsi de suite pour les modes harmoniques suivants.

La dynamique de l'écoulement est ainsi dominée par les termes non-linéaires de transfert d'énergie du mode azimutal fondamental vers ses harmoniques. Ces contributions du mode fondamental sont effectivement dominantes sur les mesures en vitesse radiale. Leur influence est plus progressive sur les mesures en vorticité longitudinale.

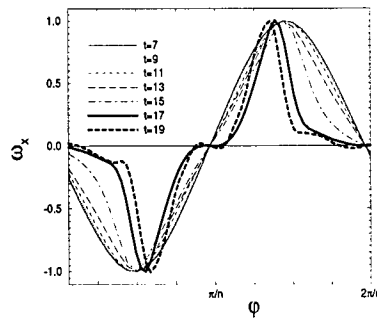
### 4.3.2 Formation des tourbillons longitudinaux.

En vue de caractériser dans l'espace physique cette croissance des modes azimutaux harmoniques, le signal en vorticité longitudinale mesuré dans la tresse et le cœur des anneaux tourbillonnaires en  $r = R$  est analysé au cours du temps (Figs. 4.25 et 4.26)



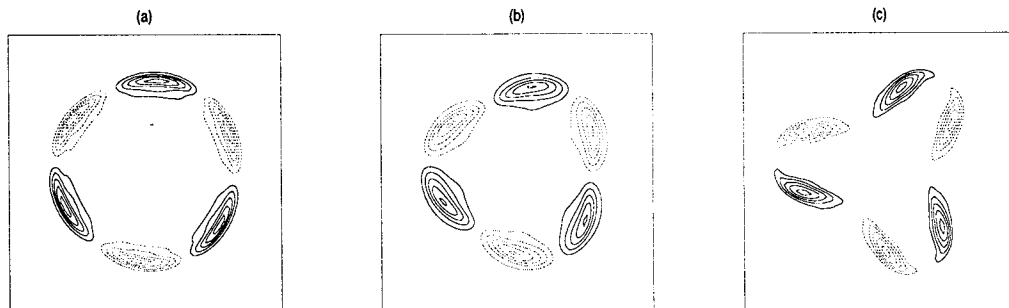
**Figure 4.25:** Distribution azimuthale de la vorticité longitudinale  $\omega_x$  en  $r = R$  dans le cœur de l'anneau (a). Une seule longueur d'onde azimutale est représentée. Les amplitudes sont renormalisées à chaque instant par le maximum du signal. Evolution temporelle du maximum de  $\omega_x$  en  $r = R$  dans le cœur de l'anneau (b).  $\sigma_3$  correspond au taux de croissance du régime linéaire étudié en 4.2.

Dans les premiers instants de croissance de l'instabilité secondaire 3D, le signal obtenu dans l'anneau reste sinusoïdal et croît exponentiellement avec un taux de croissance en bon accord avec les résultats de stabilité linéaire (Fig. 4.25). L'influence croissante des harmoniques se fait sentir progressivement et se manifeste par une déformation du signal, qui s'écarte de la sinusoïde initiale.



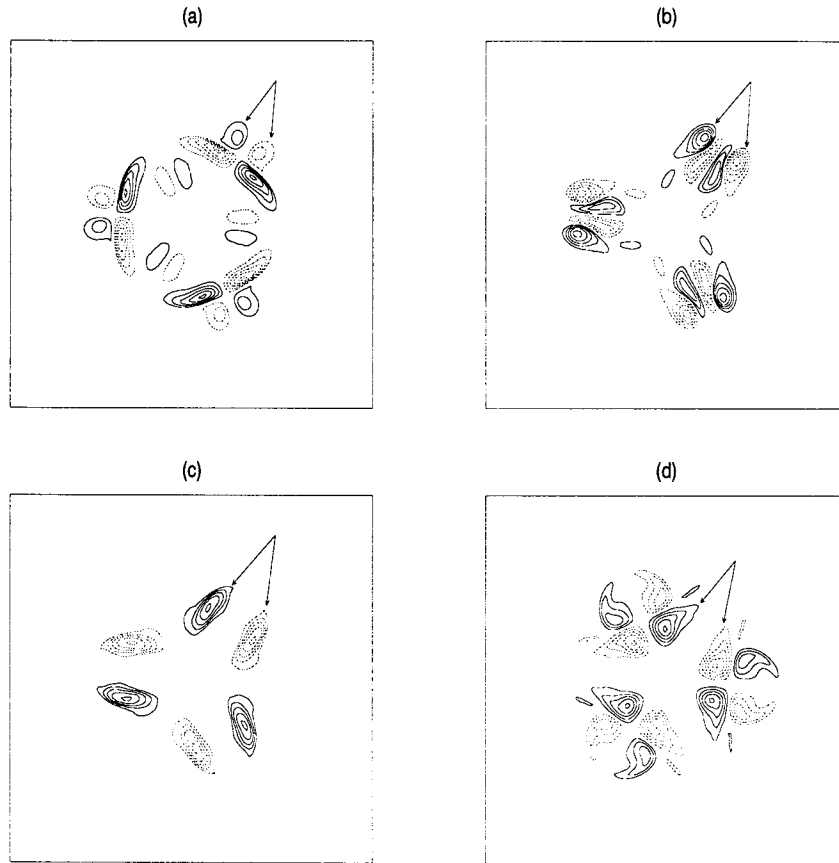
**Figure 4.26:** Distribution azimuthale de la vorticité longitudinale  $\omega_x$  en  $r = R$  dans la tresse. Une seule longueur d'onde azimutale est représentée. Les amplitudes sont renormalisées à chaque instant par le maximum du signal.

Dans la tresse l'influence des harmoniques est plus marquante et conduit à une concentration azimuthale de la vorticité (Fig. 4.26). Cette focalisation résulte de l'action combinée de l'étirement induit par les anneaux tourbillonnaires et de l'auto-induction de la vorticité longitudinale initiale [termes non-linéaires des équations (4.20) et (4.21)]. Ce phénomène rappelle celui étudié par Lin & Corcos (1984) et Neu (1984) dans leur modèle de couche de mélange plane (cf Fig. 3.11 du chapitre 3).



**Figure 4.27:** Evolution de la vorticité longitudinale dans la tresse à  $t=10$  (a),  $t=14$  (b) et  $t=18$  (c). Mêmes légende et remarque que pour la figure 3.12.

On observe alors une réorganisation de la vorticité longitudinale dans la tresse (Fig. 4.27) qui donne naissance à des paires de tourbillons longitudinaux contrarotatifs qui relient les anneaux tourbillonnaires (Fig. 4.28).



**Figure 4.28:** Formation de paires de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs le long de l'écoulement : dans l'anneau (a), juste en aval de l'anneau (b), au centre de la tresse (c) et juste en amont de l'anneau (d). Coupes perpendiculaires à l'axe du jet, incrément des isocontours à 20% du maximum du champ de vorticité longitudinale. Les flèches indiquent la position d'une même paire de tourbillons longitudinaux contrarotatifs le long du jet.

## Chapitre 5

# Nature convective ou absolue des instabilités secondaires des couches de mélange.

### 5.1 Introduction.

La dynamique des couches de mélange, obtenues lorsque deux écoulements de vitesses différentes se rejoignent au bord de fuite d'une plaque plane, est caractérisée par une succession de bifurcations qui jalonnent le développement *spatial* de l'écoulement : au bord de fuite de la plaque, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz de la couche de cisaillement conduit, en saturant, à la formation d'une allée de tourbillons 2D; plus en aval, cette rangée de tourbillons primaires est soumise à son tour à des instabilités secondaires 2D et 3D.

Cette suite de bifurcations, générale aux écoulements cisailés ouverts, est bien reproduite dans les simulations numériques de couches de mélange (Corcos & Lin, 1984; Metcalfe *et al.*, 1987; Moser & Rogers, 1992) ou de jets (Martin & Meiburg, 1991; cf chapitre 4) évoluant *temporellement*. En parallèle, des études théoriques ont permis de calculer les caractéristiques temporelles des instabilités secondaires 2D et 3D des couches de mélange (Pierrehumbert & Widnall, 1982). Cependant, la transposition de ces résultats de stabilité temporelle aux écoulements évoluant spatialement n'est valable que si les instabilités sont de nature *convective*. Physiquement, ceci revient à dire que la dynamique d'une couche de mélange temporelle (pour laquelle le futur n'influe pas sur le passé !) n'est équivalente à celle d'une couche de mélange spatiale que si le développement des instabilités en aval n'influencent pas la dynamique de l'écoulement en amont. Dans le cas contraire (on parle alors d'instabilité *absolue*), l'existence de cette boucle de rétroaction fait entrer en résonance la couche de mélange spatiale qui présente alors un comportement global (Chomaz *et al.*, 1988).

L'importance de ces concepts d'instabilité convective/absolue et leurs implications sur la prédiction de la dynamique des écoulements ouverts et leur contrôle sont maintenant largement reconnues (Huerre & Monkewitz, 1985 et 1990; Monkewitz, 1991). Pour les couches de mélange et autres écoulements cisailés ouverts (jets, sillages, ...), ces notions n'ont été appliquées qu'à la description de l'instabilité primaire et on ignore tout des propriétés spatio-temporelles des instabilités secondaires : en particulier la nature convective ou absolue de l'instabilité primaire ne dicte en rien la nature des instabilités secondaires (Huerre, 1987). Dans ce contexte, il est intéressant de connaître ces propriétés : un changement de nature convective/absolue pour les instabilités secondaires pourrait par exemple jouer un rôle déterminant sur la dynamique de la couche de mélange en induisant une transition turbulente énergétique. En outre une instabilité secondaire absolue est susceptible de sélectionner des modes radicalement différents de ceux prédits par une analyse de stabilité temporelle.

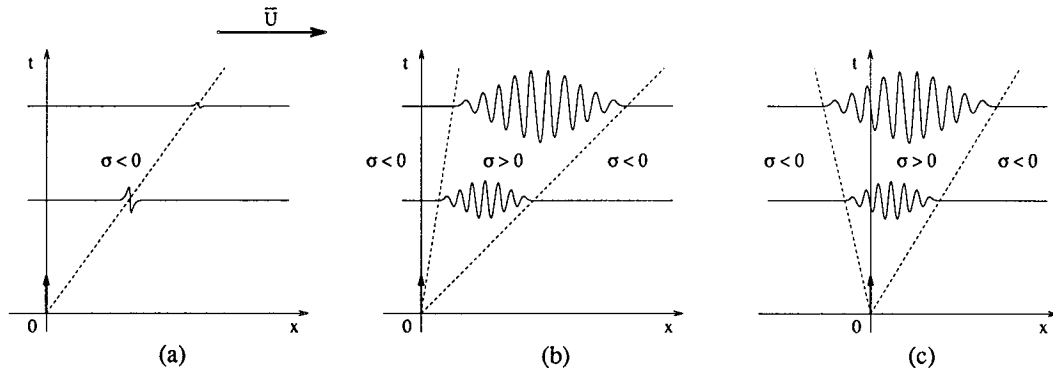


Figure 5.1: Écoulement stable (a), instable convectif (b), instable absolu (c).

Le travail présenté dans ce chapitre concerne la détermination de la nature convective ou absolue des instabilités secondaires des couches de mélange planes, qui peut être obtenue en analysant la réponse impulsionnelle du système aux temps longs (Huerre & Monkewitz, 1985 et 1990). On se propose d'étudier cette réponse en simulant numériquement l'évolution du paquet d'ondes généré par une perturbation initiale localisée (cf Delbende *et al.*, 1996). Reprenant le modèle de tourbillons de Stuart (1967) déjà utilisé dans l'étude temporelle de Pierrehumbert & Widnall (1982), on analyse les propriétés spatio-temporelles des instabilités 2D et 3D de l'allée de tourbillons issus de l'instabilité primaire.

Le §5.2 rappelle brièvement quelques concepts et résultats fondamentaux ainsi que les méthodes utilisées pour la présente étude. La méthode numérique est validée en comparant les résultats obtenus pour l'étude temporelle et spatio-temporelle de l'instabilité primaire avec les prédictions théoriques disponibles dans la littérature (§5.3). Le §5.4 traite de l'instabilité secondaire 2D de la couche de mélange, qui correspond à l'appariement des tourbillons primaires. Une analyse théorique complète peut être menée pour le cas de tourbillons infiniment concentrés (§5.4.1). La nature convective ou absolue de l'appariement de tourbillons à concentration finie est ensuite déterminée numériquement (§5.4.2). Enfin les premiers résultats obtenus pour l'instabilité secondaire 3D (instabilité translatrice) sont présentés au §5.5.

## 5.2 Méthodologie.

### 5.2.1 Notion d'instabilité convective ou absolue.

On distingue classiquement en hydrodynamique deux types d'écoulements : les écoulements *fermés*, pour lesquels les particules fluides restent dans le domaine d'étude (expériences de Rayleigh-Bénard, Taylor-Couette,...), et les écoulements *ouverts*, pour lesquels les particules fluides sont advectées hors du domaine par un courant moyen  $\bar{U}$ . C'est le cas par exemple des couches de mélange, des jets ou des sillages.

Cette distinction purement cinématique ne rend cependant pas compte de la dynamique de l'écoulement : des études théoriques récentes sur la stabilité des écoulements ouverts (cf la revue de Huerre & Monkewitz, 1990) ont permis de définir deux comportements distincts pour les écoulements ouverts instables, caractérisés par la réponse de ces écoulements à une perturbation localisée (*réponse impulsionnelle*) :

- si l'énergie du paquet d'ondes d'instabilité généré par l'impulsion initiale est amplifiée mais advectée en aval de la source, l'écoulement est dit *convectivement* instable [Fig. 5.1(b)]. Un tel écoulement se comporte comme un amplificateur de bruit qui, en l'absence de perturbation, retourne à son état de base. On parle alors de dynamique extrinsèque.
- si au contraire l'énergie de la perturbation croît au cours du temps et se propage de part et d'autre de la source en contaminant tout l'écoulement, alors ce dernier est *absolument* instable [Fig. 5.1(c)]. Dans ce cas l'écoulement se comporte comme un oscillateur et présente une dynamique intrinsèque, indépendante de la nature de l'impulsion initiale et peu sensible à un forçage extérieur de faible amplitude.



Pour les écoulements parallèles, la réponse impulsionnelle aux temps longs est entièrement déterminée si l'on connaît la relation de dispersion  $D[\omega, k] = 0$  du système, décrivant l'évolution linéaire des modes d'instabilité de la forme :

$$A(y)e^{i(kx - \omega t)} \quad (5.1)$$

où  $k$  et  $\omega$  sont respectivement le nombre d'onde axial et la pulsation complexes du mode.

On montre (Briggs, 1964; Bers, 1983; Huerre & Monkewitz, 1985) que la réponse est dominée sur chaque rayon spatio-temporel  $x/t$  par le mode le plus instable de vitesse de groupe réelle  $v = x/t$ . Le nombre d'onde complexe  $k(v)$  de ce mode est donnée par :

$$\frac{d\omega}{dk}[k(v)] = v \quad (5.2)$$

Ces notions s'appliquent a priori dans l'hypothèse d'un écoulement de base parallèle. Une étude récente (Brevdo & Bridges, 1996) montre, à l'aide de la théorie de Floquet, que l'on peut étendre directement les résultats obtenus pour un écoulement parallèle au cas d'un écoulement de base périodique.  $k$  correspond alors à l'exposant de Floquet des modes d'instabilité de l'écoulement de base périodique, de la forme :

$$A(x, y)e^{i(kx - \omega t)} \quad (5.3)$$

avec  $A$  fonction périodique en  $x$  de même période que l'écoulement de base.  $k$  est alors compris dans la bande  $[0, k_b]$  où  $k_b$  est le nombre d'onde axial de l'écoulement de base.

### 5.2.2 Ecoulement de base.

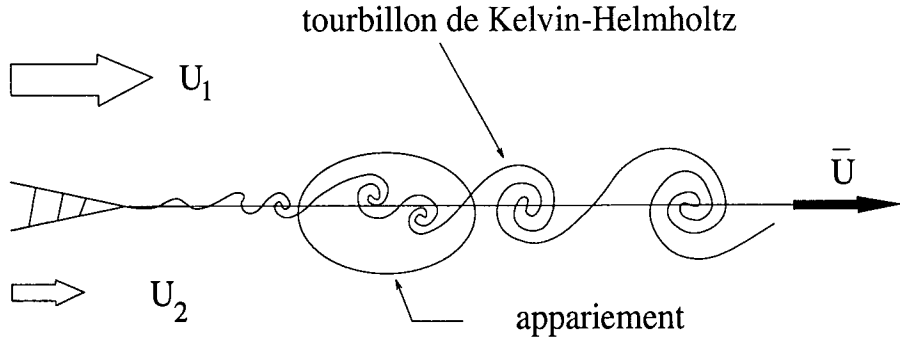


Figure 5.2: Evolution spatiale d'un écoulement de couche de mélange plane.

On se propose dans la présente étude de simuler numériquement la réponse impulsionnelle de l'écoulement de base périodique correspondant aux tourbillons de Stuart (1967). Cette famille de tourbillons constitue une solution exacte des équations d'Euler 2D et fournit une bonne approximation de l'allée des tourbillons issus de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz d'une couche de mélange plane (Fig. 5.2, cf §4.2.3).

La fonction de courant associée est donnée par :

$$\psi(x, y; t) = \bar{U} \left( y + \frac{R\lambda}{2\pi} \ln \left\{ \cosh\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right) - \rho \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(x - \bar{U}t) \right] \right\} \right) \quad (5.4)$$

Les champs de vorticité et de vitesse sont alors :

$$\omega_z(x, y; t) = \frac{-2\pi\bar{U}R(\rho^2 - 1)}{\lambda \left\{ \cosh\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right) - \rho \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(x - \bar{U}t) \right] \right\}^2} \quad (5.5a)$$

$$u_x(x, y; t) = \bar{U} \left\{ 1 + \frac{R \sinh\left(\frac{2\pi}{\lambda} y\right)}{\cosh\left(\frac{2\pi}{\lambda} y\right) - \rho \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - \bar{U}t)\right]} \right\} \quad (5.5b)$$

$$u_y(x, y; t) = \frac{-\bar{U} R \rho \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - \bar{U}t)\right]}{\cosh\left(\frac{2\pi}{\lambda} y\right) - \rho \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - \bar{U}t)\right]} \quad (5.5c)$$

où  $\lambda$  est la distance entre deux tourbillons consécutifs et  $\rho \in [0, 1]$  désigne un paramètre sans dimension mesurant la concentration des tourbillons. Cette solution correspond à une rangée périodique de tourbillons d'une couche de mélange séparant deux écoulements uniformes de vitesses  $U_1$  et  $U_2$  ( $U_1 > U_2$ ) caractérisée par la moyenne des vitesses  $\bar{U} = (U_1 + U_2)/2$  et le rapport sans dimension

$$R = \frac{\Delta U}{2\bar{U}} \quad (5.6)$$

où  $\Delta U = U_1 - U_2$ . Les tourbillons sont advectés à la vitesse moyenne  $\bar{U}$ .

Suivant l'adimensionnement de Pierrehumbert & Widnall (1982), on choisit comme échelles de longueur et de vitesse  $\lambda = \pi$  et  $\Delta U/2 = 1$ . Le profil de vitesse de l'écoulement de base ainsi adimensionné s'écrit alors :

$$u_x(x, y; t) = U + \frac{\sinh(2y)}{\cosh(2y) - \rho \cos[2(x - Ut)]} \quad (5.7a)$$

$$u_y(x, y; t) = \frac{-\rho \sin[2(x - Ut)]}{\cosh(2y) - \rho \cos[2(x - Ut)]} \quad (5.7b)$$

Cette solution permet de représenter différentes configurations de couches de mélange planes, paramétrées par la concentration  $\rho$  des tourbillons et la vitesse d'advection adimensionnée  $U = 1/R$  : le cas  $U < 1$  ( $R > 1$ ) correspond à des couches de mélange avec contre-courant ( $U_2 < 0$ ) et le cas  $U > 1$  ( $R < 1$ ) à des couches de mélange avec co-courant ( $U_2 > 0$ ). la configuration  $U = 1$  ( $R = 1$ ) décrit une couche de mélange de type "jet", pour laquelle  $U_2 = 0$ .

La valeur particulière  $\rho = 0$  désigne des tourbillons infiniment peu concentrés. On retrouve alors le profil en tangente hyperbolique modélisant le profil de vitesse au bord de fuite de la plaque plane :  $u_x(y) = U + \tanh(2y)$ ,  $u_y \equiv 0$ . L'épaisseur de quantité de mouvement de ce profil est  $\theta = 1/4$ . Pour  $\rho > 0$ , la solution représente une allée périodique de tourbillons, de circulation  $2\pi$ , advectés à la vitesse  $U$ . La solution correspondant à  $\rho = 1$  (tourbillons infiniment concentrés) consiste en une rangée périodique de tourbillons ponctuels.

On choisit de se placer dans le référentiel lié à la vitesse d'advection  $U$ . L'écoulement de base s'écrit alors :

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2} \ln[\cosh(2y) - \rho \cos(2x)] \quad (5.8a)$$

$$u_x(x, y) = \frac{\sinh(2y)}{\cosh(2y) - \rho \cos(2x)} \quad (5.8b)$$

$$u_y(x, y) = \frac{-\rho \sin(2x)}{\cosh(2y) - \rho \cos(2x)} \quad (5.8c)$$

$$\omega_z(x, y) = \frac{-2(\rho^2 - 1)}{[\cosh(2y) - \rho \cos(2x)]^2} \quad (5.8d)$$

### 5.2.3 Analyse du paquet d'ondes.

La détermination des caractéristiques spatio-temporelles des instabilités de l'écoulement de base (5.8) est effectuée en analysant l'évolution linéaire du paquet d'ondes généré par une perturbation localisée en  $x = x_0$  à  $t = 0$ .

Pour isoler l'amplitude et la phase du paquet d'ondes, on recompose le signal analytique associé au signal mesuré au moyen de la Transformée de Hilbert (Melville, 1983).

Pour une fonction réelle  $u(x)$  définie pour  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction analytique associée est donnée par :

$$\bar{u}(x) = \left[ \delta(x) + \frac{i}{\pi x} \right] * u(x) \quad (5.9)$$

où  $*$  est le produit de convolution et  $\frac{i}{\pi x} * u(x)$  désigne la Transformée de Hilbert du signal  $u$ .  $\delta$  est la distribution de Dirac.

La reconstruction du signal analytique est directe dans l'espace de Fourier : elle est obtenue en annulant tous les modes de Fourier de  $u$  de nombre d'onde négatif. L'efficacité et la précision de cette méthode sont liées à l'existence d'une porteuse à, mettons,  $k_0$  dans le signal mesuré :

$$\bar{u}(x) = A(x)e^{-ik_0x} \quad (5.10)$$

et à la condition que la largeur de bande du spectre de  $A$  soit inférieure ou égale à  $2k_0$  (Melville, 1983).

### 5.2.4 Caractérisation des modes spatio-temporels.

La caractérisation des modes spatio-temporels de l'instabilité de l'écoulement de base (5.8) est obtenue en analysant le paquet d'ondes suivant chaque rayon spatio-temporel  $x = v.t$ , sur lequel se développent les modes de vitesse de groupe  $v$ . Aux temps longs, le mode le plus instable correspondant à cette vitesse de groupe va dominer et le paquet d'ondes s'écrit alors, en fonction de  $v$  (par exemple pour la composante axiale de la vitesse) :

$$u_x(v, y; t) = \mathcal{A}(v, y)e^{i[k(v)v - \omega(v)]t} \quad (5.11)$$

où  $\mathcal{A}$  est l'amplitude complexe du mode le plus instable de vitesse de groupe  $v$ ,  $k = k_r + ik_i$  et  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  étant respectivement le nombre d'onde axial et la pulsation complexes du mode.

Si  $\sigma(v)$  désigne le taux de croissance de ce mode, mesuré le long du rayon  $x/t = v$ , l'expression (5.11) prend la forme :

$$u_x(v, y; t) = |\mathcal{A}(v, y)|e^{i\phi(v, y; t)}e^{\sigma(v)t} \quad (5.12)$$

où la phase réelle  $\phi$  est donnée par :

$$\phi(v, y; t) = \arg[\mathcal{A}(v, y)] + [k_r(v)v - \omega_r(v)]t \quad (5.13)$$

En pratique, le taux de croissance du mode de vitesse de groupe  $v$  est déterminé en considérant à chaque instant l'énergie moyenne :

$$A(v, t) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{u}_x(v, y; t)|^2 dy \right]^{1/2} \quad (5.14)$$

Où  $\bar{u}_x$  est le signal analytique associé à  $u_x$  (5.9). On a alors :

$$\sigma(v) = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} \quad (5.15)$$

La mesure de la phase en  $y = y_0$ ,  $\phi_0(v; t) = \phi(v, y_0; t)$ , permet d'obtenir d'autres informations sur le mode de vitesse de groupe  $v$ . Le nombre d'onde axial du mode est ainsi donné par :

$$k_r(v) = \frac{1}{t} \frac{\partial \phi_0}{\partial v}, \quad k_i(v) = -\frac{\partial \sigma}{\partial v} \quad (5.16)$$

et la pulsation complexe par :

$$\omega_r(v) = -\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + k_r v = -\left( \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right)_{x=Cte}, \quad \omega_i(v) = \sigma(v) + k_i v \quad (5.17)$$

On obtient de cette manière la caractérisation complète du mode spatio-temporel dominant se développant sur chaque rayon  $x = v.t$ .

### 5.2.5 Critère absolu/convectif.

L'étude de la réponse impulsionnelle de l'écoulement de base (5.8) permet de déterminer la nature convective ou absolue des instabilités pour n'importe quelle configuration de couche de mélange (caractérisée par la valeur de la vitesse d'advection  $U$ , ou, de manière équivalente, du rapport des vitesses  $R = 1/U$ ). En effet, l'écoulement de base (5.8) ne dépend pas de  $U$ , et les caractéristiques des modes spatio-temporels pour une couche de mélange à  $U > 0$  donné se déduisent de celles obtenues pour l'écoulement de base (5.8) moyennant un changement de référentiel à la vitesse  $U$ .

Déterminer la stabilité convective ou absolue d'une configuration de couche de mélange à  $U$  fixé revient alors à étudier le taux de croissance  $\sigma(U)$  du mode spatio-temporel se développant sur le rayon  $x = U.t$ , obtenu par analyse de la réponse impulsionnelle de l'écoulement de base (5.8).

Si  $\sigma(U)$  est positif, alors la couche de mélange définie par  $U$  est *absolument instable*. Au contraire, si  $\sigma(U)$  est négatif, la couche de mélange correspondante est *convectivement instable*.

Pour les valeurs de  $U$  où l'instabilité est absolue, la dynamique de la couche de mélange correspondante est dominée par le mode de vitesse de groupe nulle dans le référentiel lié à la couche de mélange. Les caractéristiques de ce mode se déduisent de celles du mode de vitesse de groupe  $U$  se développant sur l'écoulement de base (5.8), via un changement de référentiel. On s'attachera donc dans la présente étude à déterminer, outre le taux de croissance des modes spatio-temporels, leur nombre d'onde axial  $k_r$ .

### 5.2.6 Méthode numérique.

Pour calculer la réponse impulsionnelle linéaire de l'écoulement de base (5.8), l'évolution spatio-temporelle du paquet d'ondes est simulée numériquement : les équations de Navier-Stokes 2D linéarisées autour de cet écoulement de base sont résolues au moyen d'une version 2D du code pseudo-spectral décrit au chapitre 2.

Le domaine d'intégration est un rectangle périodique dans les deux directions. En vue de minimiser les effets des conditions limites périodiques, le domaine considéré est très étendu dans la direction axiale  $x$  et représente 32 périodes de l'écoulement de base. De même, il s'étend sur 8 périodes dans la direction transverse  $y$ . La discrétisation spatiale comprend  $1024 \times 256$  points de collocation répartis sur un maillage cartésien régulier. Sur le cas test du profil en tangente hyperbolique ( $\rho = 0$ ), la taille du domaine a été doublée sans entraîner de changement significatif. De la même façon une résolution deux fois plus importante en espace laisse invariants les résultats obtenus, suggérant que les valeurs retenues pour ces paramètres numériques sont suffisantes.

L'analyse des caractéristiques spatio-temporelles de l'écoulement requiert des mesures fines dans l'espace physique et des précautions ont été prises quant à la résolution spectrale. En particulier les erreurs de repliement (*aliasing*) ont été systématiquement corrigées par troncature aux  $2/3$  dans l'espace spectral. Chaque simulation est initialisée par une perturbation localisée en espace, sous la forme d'une gaussienne. La taille de la perturbation initiale est choisie suffisamment large pour être bien représentée dans le domaine spectral tronqué, ceci pour éviter tout phénomène de Gibbs qui nuirait aux mesures, particulièrement sensibles à une redistribution d'énergie sur l'ensemble du domaine physique.

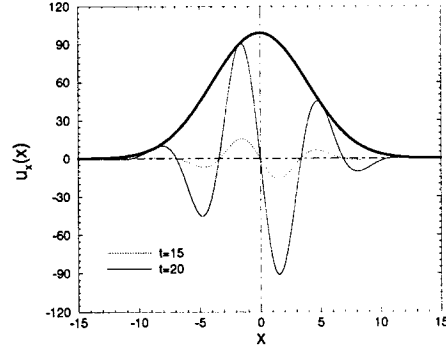
Le nombre de Reynolds basé sur la distance entre tourbillons de Stuart consécutifs est de 3000 pour toutes les simulations. Les simulations sont effectuées sur un intervalle de temps suffisamment long pour que le régime asymptotique soit atteint. En particulier, on attend que les taux de croissance mesurés se soient stabilisés. La durée de la simulation est limitée par la taille finie du domaine de calcul et les conditions limites périodiques : l'avance en temps est ainsi stoppée dès que la largeur du paquet d'ondes dépasse la moitié de la taille du domaine.

La méthode numérique est validée en comparant les résultats obtenus pour l'instabilité primaire avec les prédictions théoriques dans la section suivante.

## 5.3 Instabilité primaire.

Pour étudier les caractéristiques spatio-temporelles de l'instabilité primaire de la couche de mélange (instabilité de Kelvin-Helmholtz), on considère comme écoulement de base la solution de Stuart à  $\rho = 0$  :

$$u_x(y) = \tanh(2y), \quad u_y \equiv 0 \quad (5.18)$$

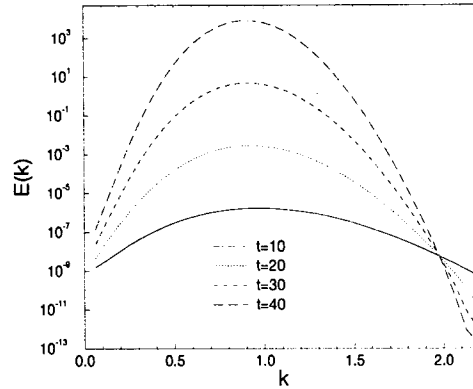


**Figure 5.3:** Evolution du paquet d'ondes généré par une perturbation localisée en  $x_0 = 0$  (écoulement de base en  $\tanh$ ). La courbe en trait gras représente l'enveloppe du signal à  $t = 20$  obtenue par Transformation de Hilbert du signal.

Cette solution correspond à un profil de vitesse d'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta = 1/4$ .

À  $t = 0$ , une perturbation localisée au voisinage de  $x_0 = 0$  génère un paquet d'ondes d'instabilité qui croît et se propage de part et d'autre de  $x_0$  (Fig. 5.3).

### 5.3.1 Stabilité temporelle.



**Figure 5.4:** Evolution temporelle du spectre d'énergie du paquet d'ondes en fonction du nombre d'onde axial  $k$ .

Une première validation de la méthode numérique concerne l'étude de stabilité temporelle de l'écoulement de base (5.18). L'analyse de l'évolution de la perturbation initiale dans l'espace de Fourier permet en effet d'obtenir immédiatement les caractéristiques *temporelles* de l'instabilité primaire. Les modes temporels sont de la forme :

$$A(y)e^{i(kx - \omega t)} + cc \quad (5.19)$$

où  $k$  est le nombre d'onde axial, réel, du mode et  $\omega$  sa pulsation complexe.  $A(y)$  correspond à l'amplitude, complexe, du mode propre.  $cc$  désigne le complexe conjugué.

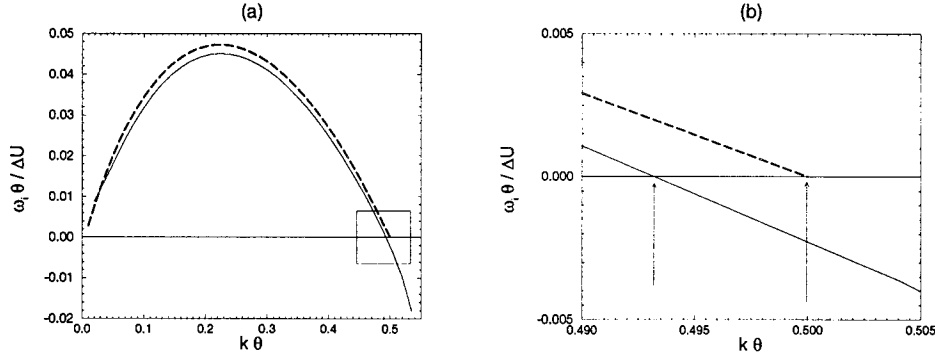
La figure 5.4 présente l'évolution temporelle du spectre d'énergie fonction du nombre d'onde  $k$ , défini par :

$$E(k; t) = \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_k(y; t)|^2 dy \quad (5.20)$$

où  $\hat{u}_k$  représente la transformée de Fourier de la vitesse  $u$  suivant la direction axiale  $x$ .

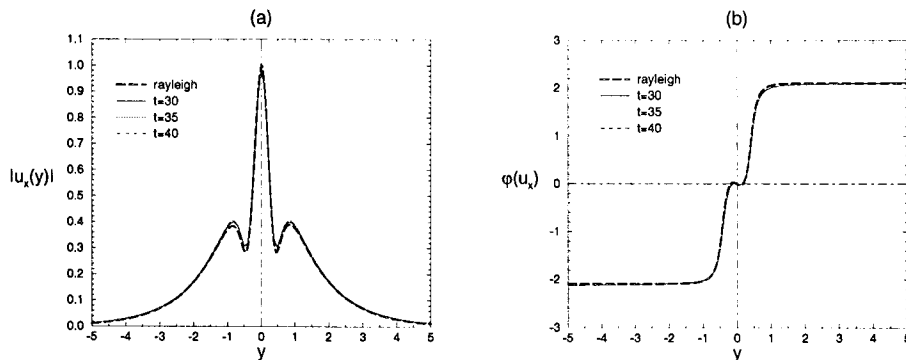
Ces mesures permettent de remonter directement à la courbe de stabilité temporelle donnant le taux de croissance des modes en fonction de  $k$  [Fig. 5.5(a)]. Les résultats issus de la simulation numérique sont

en bon accord avec les prédictions en fluide non-visqueux obtenues en résolvant le problème aux valeurs propres de Rayleigh pour le profil (5.18) (cf chapitre 2).



**Figure 5.5:** (a) Taux de croissance des modes temporels de l'instabilité primaire (Kelvin-Helmholtz). (b) Zoom sur le nombre d'onde de coupure  $k_c$ .

Le très léger écart observé pour les petites valeurs de  $k \theta$  (grandes longueurs d'onde) est dû à la largeur finie du domaine de calcul dans la direction transverse  $y$  (effet de confinement). Par ailleurs les taux de croissance mesurés sont sensiblement inférieurs à leurs homologues dérivés de l'équation de Rayleigh à cause de l'effet stabilisant de la viscosité. Cet effet peut être mesuré précisément sur la valeur du nombre d'onde de coupure  $k_c \theta$  [Fig. 5.5(b)]. Si la théorie pour un fluide non-visqueux prédit un nombre d'onde de coupure égal à 0.5, la prise en compte de la viscosité amène une correction fonction du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche de mélange :  $k_c \theta = 0.5 - \pi / Re_\theta$  (Djordjevic & Redekopp, 1990). Ce nombre de Reynolds est de 500 pour la présente simulation numérique. La correction théorique prédit alors pour cette valeur un nombre d'onde de coupure égal à 0.4937, à comparer avec la valeur obtenue numériquement (0.493).



**Figure 5.6:** Amplitude (a) et phase (b) de la vitesse axiale du mode propre temporel le plus instable de l'instabilité primaire.

La décomposition de la perturbations en modes de Fourier fournit en outre la forme exacte des modes propres temporels. Les figures 5.6 et 5.7 reproduisent l'amplitude et la phase normalisées du mode propre le plus instable ( $k \theta = 0.223$ ) obtenu par résolution de l'équation de Rayleigh et par analyse spectrale des résultats issus de la simulation numérique, à différents instants au cours de la simulation, pour les composantes axiale et transversale du champ de vitesse. Conformément à la théorie linéaire, la forme de ce mode est invariante au cours du temps et les courbes sont quasiment confondues. De nouveau, l'accord avec les prédictions théoriques (modes propres de l'équation de Rayleigh) est bien vérifié.

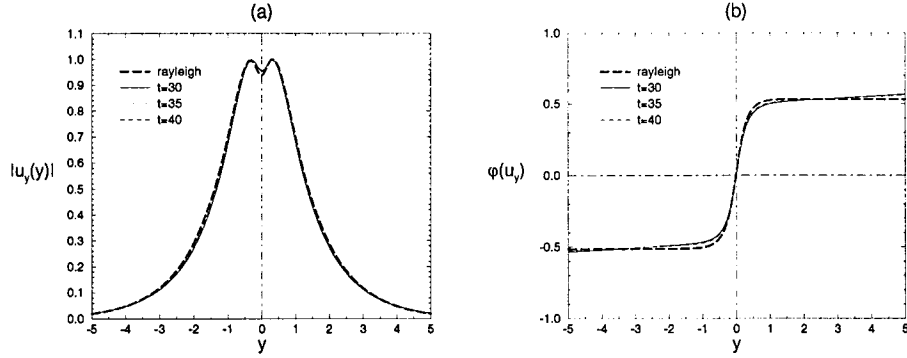


Figure 5.7: Amplitude (a) et phase (b) de la vitesse transversale du mode propre temporel le plus instable de l'instabilité primaire.

### 5.3.2 Nature convective ou absolue.

L'évolution du paquet d'ondes dans l'espace physique est analysée au moyen de la Transformation de Hilbert (Fig. 5.3). On a ainsi accès à chaque instant à l'enveloppe du paquet d'ondes, qui peut ensuite s'exprimer comme une fonction de  $v = x/t$ . La figure 5.8 montre l'évolution au cours du temps de l'amplitude du paquet d'ondes sur chaque rayon spatio-temporel  $x/t$ .

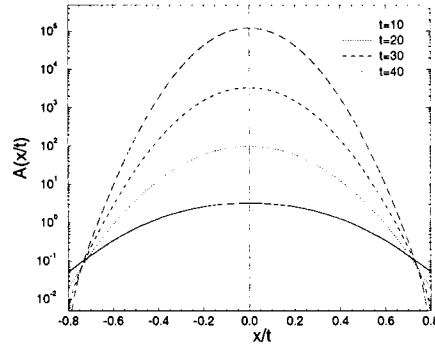


Figure 5.8: Evolution temporelle de l'amplitude du paquet d'ondes sur chaque rayon spatio-temporel  $x/t$ .

Il apparaît clairement que l'amplitude du paquet d'ondes croît entre deux rayons particuliers de taux de croissance nul,  $x = \pm v_f t$ , qui définissent les vitesses de propagation des fronts amont ( $-v_f$ ) et aval ( $+v_f$ ) du paquet d'ondes. Les taux de croissance des modes se développant sur chaque rayon spatio-temporels  $x/t$  sont représentés sur la figure 5.9(a). La vitesse de propagation des fronts mesurée est  $v_f = 0.73 \pm 0.02$ . La Transformation de Hilbert fournit aussi la phase du paquet d'ondes, à partir de laquelle on peut déterminer via la relation (5.16) le nombre d'onde axial  $k_r$  des modes se développant sur chaque rayon spatio-temporel  $x/t$  [Fig. 5.9(b)].

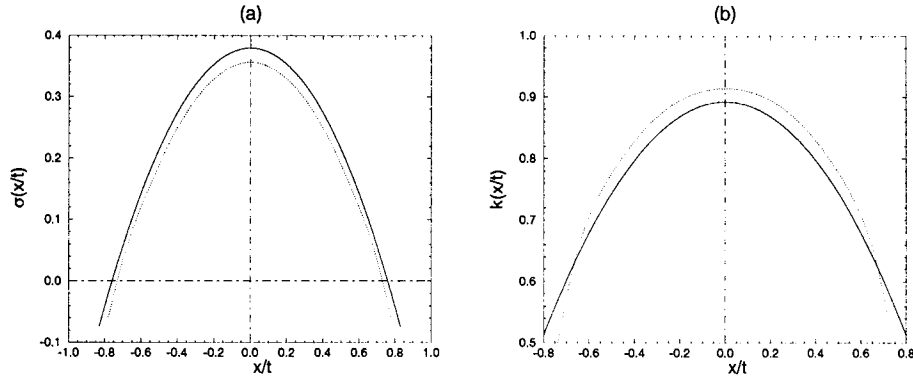
Suivant le développement asymptotique de Huerre & Monkewitz (1985), on peut estimer analytiquement les caractéristiques des modes spatio-temporels se développant sur l'écoulement de base (5.18).

Si  $\omega(k)$  désigne la relation de dispersion pour le profil (5.18), le mode spatio-temporel se développant sur le rayon  $x = v.t$  est défini par le nombre d'onde complexe  $k(v)$  donné par :

$$\frac{d\omega}{dk} [k(v)] = v \quad (5.21)$$

Pour les très faibles valeurs de  $v$ , on peut envisager un développement asymptotique de la forme :

$$k(v) = k_0 + vk_1 + v^2k_2 + \mathcal{O}(v^3) \quad (5.22)$$



**Figure 5.9:** Taux de croissance du paquet d'ondes sur chaque rayon  $x/t$  (a). Nombre d'onde  $k_r$  du mode d'instabilité correspondant (b). Les pointillés correspondent aux simulations numériques et le trait continu au développement asymptotique de Huerre & Monkewitz (1985).

Ce développement conduit à<sup>1</sup> :

$$k(v) = k_{\max} - iv \left[ \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_r^2}(k_{\max}) \right]^{-1} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^3 \omega_i}{\partial k_r^3}(k_{\max}) \left[ \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_r^2}(k_{\max}) \right]^{-3} \quad (5.23)$$

où  $k_{\max}$  désigne le nombre d'onde, réel, du mode temporel le plus instable.  $\omega_i(k)$ , pour  $k$  réel, correspond au taux de croissance temporel du mode de Fourier de nombre d'onde  $k$ .

En particulier :

$$k_r(v) = k_{\max} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^3 \omega_i}{\partial k_r^3}(k_{\max}) \left[ \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_r^2}(k_{\max}) \right]^{-3} \quad (5.24)$$

On déduit alors le taux de croissance du mode se développant sur le rayon  $x/t = v$  d'après la relation (5.17) :

$$\sigma(v) = \omega_i(k_{\max}) + \frac{1}{2} v^2 \left[ \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_r^2}(k_{\max}) \right]^{-1} \quad (5.25)$$

La vitesse de propagation des fronts du paquet d'ondes est définie par  $\sigma(v_f) = 0$  :

$$v_f = \sqrt{-2\omega_i(k_{\max}) \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k_r^2}(k_{\max})} \quad (5.26)$$

$k_{\max}$ ,  $\omega_i(k_{\max})$ , ..., peuvent être évalués soit à partir du problème aux valeurs propres de Rayleigh soit directement à partir de résultats de stabilité temporelle issus de la simulation numérique [cf Fig. 5.5(a)]. La relation (5.26) donne alors  $v_f = 0.76 \pm 0.01$ .

La réponse impulsionnelle aux temps longs de l'écoulement de base (5.18) peut être obtenue par ailleurs en recherchant les "bons" points-selle de la relation de dispersion complexe (Huerre & Monkewitz, 1985). Le formalisme employé est technique mais fournit une procédure systématique pour déterminer les propriétés de stabilité spatio-temporelle de l'écoulement.

Il se trouve que pour le profil en tangente hyperbolique les résultats obtenus par cette méthode sont extrêmement bien reproduits par l'étude asymptotique présentée précédemment, même pour des valeurs finies de  $v$  : les variations de  $k_r(v)$  et  $\sigma(v)$  déterminées par les deux méthodes coïncident ainsi exactement au moins jusque pour  $v = v_f$  (cf Figs 5 et 6 de Huerre & Monkewitz, 1985). Les expressions analytiques (5.24) pour  $k_r(v)$  et (5.25) pour  $\sigma(v)$  sont représentées sur la figure 5.9.

<sup>1</sup>Ce résultat est simplement une réécriture du développement asymptotique de Huerre & Monkewitz (1985).



L'accord des résultats numériques avec les prédictions théoriques est particulièrement bon pour les taux de croissance si l'on excepte le léger décalage dû à la viscosité. En particulier, l'évaluation numérique de la vitesse de propagation du front du paquet d'ondes ( $v_f = 0.73 \pm 0.02$ ) est cohérent avec la prédiction théorique ( $v_f = 0.76$ ) qui concerne un fluide non-visqueux.

La mesure de  $k_r(v)$  à partir de la simulation numérique est plus délicate, car elle implique l'évaluation de la phase du paquet d'ondes et de son gradient, mais les résultats numériques sont satisfaisants et reproduisent bien les prédictions théoriques.

On vérifie aussi que le mode spatio-temporel le plus instable (i.e. celui qui a le taux de croissance  $\sigma(v)$  maximum, ici  $\sigma(0)$ ) correspond bien au mode temporel le plus instable. Ce point est bien vérifié à la fois sur le taux de croissance et le nombre d'onde axial de ce mode (cf Fig. 5.5).

Au vu de ces résultats, on retrouve les conclusions de Huerre & Monkewitz (1985). Suivant le critère exposé au §5.2.5, on peut définir deux familles de couches de mélange : si  $U > 0.76$  ( $R < 1.315$ ), la couche de mélange correspondante est convectivement instable vis-à-vis de l'instabilité primaire; au contraire, pour  $U < 0.76$  ( $R > 1.315$ ), la couche de mélange correspondante est absolument instable.

Physiquement ce résultat indique qu'il faut appliquer un contre-courant ( $U_2 < 0$ ) suffisant, d'amplitude au moins égale à 13.6% du courant principal  $U_1$  pour que l'instabilité primaire de la couche de mélange soit absolue.

## 5.4 Instabilité secondaire 2D.

L'instabilité primaire (Kelvin-Helmholtz), dont les propriétés spatio-temporelles ont été étudiées en §5.3, sature sous la forme d'une allée régulière de tourbillons. Cet écoulement est à son tour instable pour des perturbations 2D : on observe alors l'appariement des tourbillons de Kelvin-Helmholtz.

La rangée de tourbillons primaires est modélisée par la solution de Stuart pour  $\rho > 0$ . La stabilité temporelle de cet écoulement de base vis-à-vis de l'appariement des tourbillons a été étudiée par Pierrehumbert & Widnall (1982). On se propose dans cette section de reprendre la procédure utilisée au §5.3 afin de déterminer la nature convective ou absolue de cette instabilité secondaire de la couche de mélange en fonction des paramètres de l'écoulement, à savoir la concentration  $\rho$  des tourbillons et le rapport des vitesses  $R$  de la couche de mélange.

### 5.4.1 Etude analytique d'un cas limite.

Une détermination analytique complète des propriétés spatio-temporelles de l'appariement peut être menée pour le cas particulier des tourbillons infiniment concentrés ( $\rho = 1$ ). L'écoulement de base consiste alors en une rangée périodique de tourbillons ponctuels distants de  $\pi$  et de circulation  $2\pi$ . La stabilité temporelle de cet écoulement de base a été étudiée par Von Karmàn (cf Saffman, 1992). La relation de dispersion associée à cet écoulement pour des perturbations 2D est donnée par :

$$\omega(k) = \frac{ik}{2}(2 - k) \quad (5.27)$$

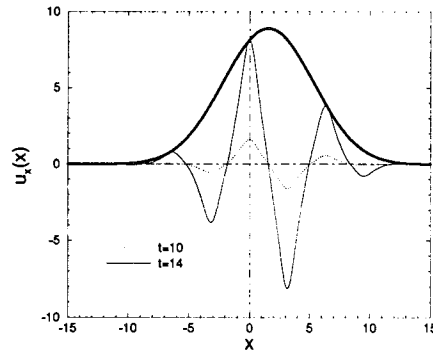
Cette relation permet d'interpréter l'appariement des tourbillons en termes d'instabilité sous-harmonique : le mode temporel le plus instable correspond effectivement au nombre d'onde  $k = 1$ , soit une longueur d'onde de  $2\pi$ , double de la distance initiale entre tourbillons voisins.

Aux temps longs, la réponse impulsionnelle de la rangée de tourbillons points est dominée sur chaque rayon  $x/t$  par le mode le plus instable de vitesse de groupe réelle  $v = x/t$ . Le nombre d'onde complexe  $k(v)$  correspondant à ce mode satisfait donc la relation :

$$\frac{d\omega}{dk} [k(v)] = v \quad (5.28)$$

Cette relation s'inverse immédiatement à partir de (5.27) :

$$k(v) = 1 + iv \quad (5.29)$$



**Figure 5.10:** Evolution du paquet d'ondes généré par une perturbation localisée en  $x_0 = \pi/2$  sur l'écoulement de base constitué de la rangée de tourbillons de Stuart de concentration  $\rho = 0.25$ . La courbe en trait gras représente l'enveloppe du signal à  $t = 14$  obtenue par Transformation de Hilbert du signal.

et on note en particulier que  $k_r(v) = 1$  quelle que soit le rayon sur lequel on se déplace. Cela signifie que le mode sélectionné sur tous les rayons est le mode d'appariement qui double la longueur d'onde de l'allée tourbillonnaire.

Le taux de croissance associé est donné par :

$$\sigma(v) = \text{Im}[\omega[k(v)] - vk(v)] = \frac{1}{2}(1 - v^2) \quad (5.30)$$

où  $\text{Im}$  désigne la partie imaginaire.

$\sigma(v) = 0$  pour  $v = 1$  : la vitesse de propagation du front du paquet d'ondes est donc égale à 1, et les taux de croissance sont positifs pour  $|v| < 1$ .

Pour cette valeur particulière de  $\rho$ , on peut alors conclure sur la nature convective ou absolue de l'appariement pour différentes configurations de couches de mélange : si  $U > 1$  ( $R < 1$ ) alors l'appariement est de nature convective. En revanche les couches de mélange correspondant à  $U < 1$  ( $R > 1$ ) sont absolument instables vis-à-vis de cette instabilité secondaire. Il est à noter que l'appariement devient absolu dès que l'on applique un contre-courant, aussi faible soit-il.

#### 5.4.2 Résultats numériques.

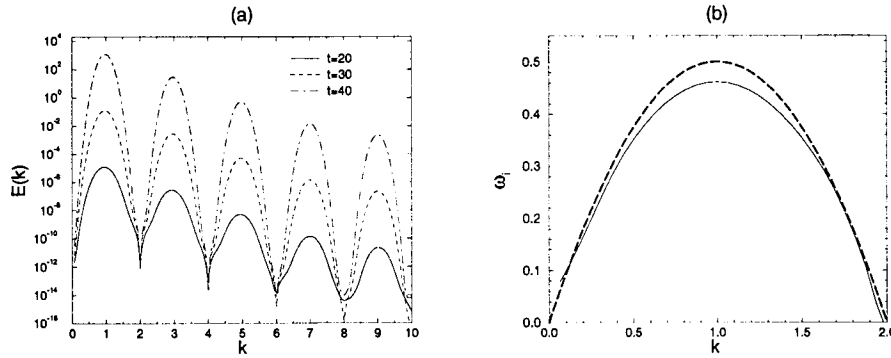
Pour des valeurs finies de la concentration des tourbillons, il faut avoir recours aux simulations numériques pour connaître la réponse impulsionnelle de la rangée de tourbillons de Stuart.

Chaque simulation est effectuée pour une valeur donnée de  $\rho$ . Une perturbation initiale localisée en espace génère un paquet d'ondes d'instabilité qui croît et se propage dans l'espace physique (Fig. 5.10).

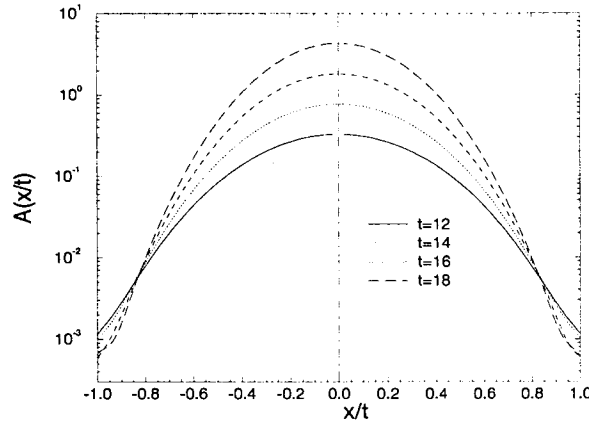
De même que pour l'instabilité primaire, une analyse en modes de Fourier permet d'obtenir les caractéristiques temporelles de l'instabilité. L'évolution temporelle du spectre du signal en fonction du nombre d'onde axial réel  $k$  est présentée sur la figure 5.11(a), pour des tourbillons de Stuart de concentration  $\rho = 0.25$ . La forme particulière du spectre est due à la périodicité de l'écoulement de base, correspondant à un nombre d'onde  $k_b = 2$ . La mesure du taux de croissance du spectre fournit la courbe de stabilité temporelle de la figure 5.11(b) qui reste très proche de celle prédite par l'expression (5.27) pour des tourbillons ponctuels.

L'étude du paquet d'ondes se développant sur un écoulement de base périodique requiert a priori une analyse en modes de Floquet (Brevdo & Bridges, 1996). Cependant, plutôt que de calculer les exposants de Floquet sur chaque rayon spatio-temporel  $x/t$ , on choisit de filtrer le signal mesuré en tronquant les composantes spectrales de nombre d'onde axial supérieur au nombre d'onde de l'écoulement de base ( $k_b = 2$ ).

Le signal présentant manifestement une porteuse à  $k_0 = 1$  et un spectre de largeur de bande égale à  $2k_0$ , la reconstruction du signal analytique par Transformée de Hilbert permet de remonter à l'enveloppe et la phase du paquet d'ondes (cf Fig. 5.10).



**Figure 5.11:** Evolution temporelle du spectre de Fourier du paquet d'ondes (a). Taux de croissance des modes temporels (b) : la courbe en trait continu correspond à la simulation numérique pour des tourbillons de Stuart de concentration  $\rho = 0.25$  et en trait discontinu est représenté le taux de croissance théorique obtenu pour une rangée de tourbillons ponctuels ( $\rho = 1$ ).



**Figure 5.12:** Evolution temporelle de l'amplitude du paquet d'ondes sur chaque rayon spatio-temporel  $x/t$  pour des tourbillons de Stuart de concentration  $\rho = 0.25$ .

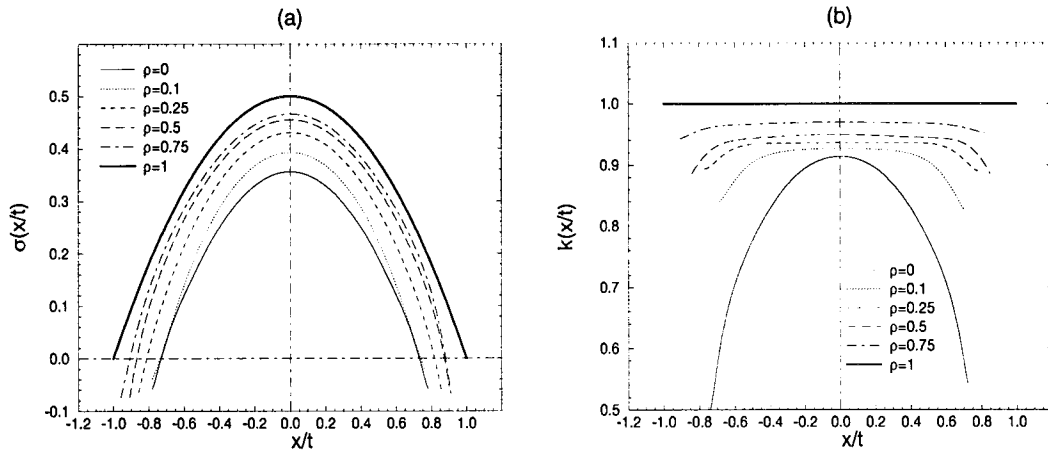
L'évolution au cours du temps de l'amplitude du paquet d'ondes en fonction du rayon  $x/t$  est présentée sur la figure 5.12 pour  $\rho = 0.25$ . Le filtrage à  $k > k_b$  permet effectivement de s'affranchir d'une analyse de Floquet, et le signal reconstitué ne présente pas de variation synchronisée avec l'écoulement de base. On peut ainsi calculer directement le taux de croissance des modes se développant sur chaque rayon  $x/t$ , ceci pour différentes simulations correspondant à différentes valeurs du paramètre de concentration  $\rho$  [Fig. 5.13(a)]. La mesure de la phase permet par ailleurs de remonter au nombre d'onde axial  $k_r$  des différents modes [Fig. 5.13(b)].

Sont aussi reproduits sur ces figures les résultats numériques obtenus pour l'instabilité primaire ( $\rho = 0$ ) et les résultats théoriques concernant l'appariement des tourbillons ponctuels ( $\rho = 1$ ) étudié au §5.4.1.

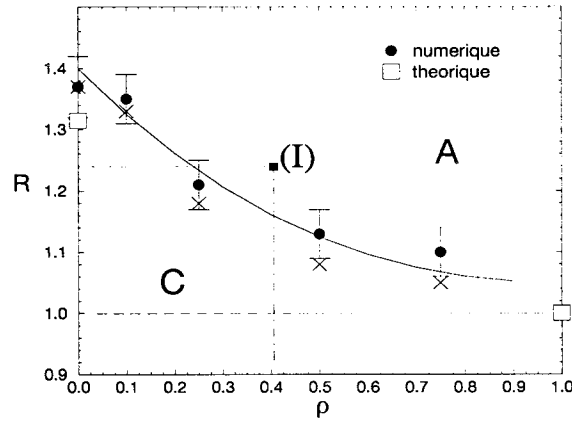
L'étude des taux de croissance montre que le paquet d'ondes se propage d'autant plus vite que les tourbillons de Stuart sont concentrés [Fig. 5.13(a)]. La vitesse de propagation du front  $v_f(\rho)$  passe ainsi continûment de 0.73 ( $\rho = 0$ ) à 1 ( $\rho = 1$ ).

Les variations de  $\rho$  conduisent à des changements radicaux sur le nombre d'onde des modes spatio-temporels [Fig. 5.13(b)] : même pour de très faibles concentrations, les courbes s'écartent très rapidement de la forme quasi parabolique observée à  $\rho = 0$  pour tendre vers une constante  $k_r(v) = 1$ . La même longueur d'onde est alors sélectionnée sur la quasi totalité des rayons  $x/t$  instables et correspond au doublement de la période de l'écoulement de base (appariement).

Pour chaque valeur de  $\rho$ , on définit le rapport des vitesses critique  $R_c(\rho) = 1/v_f(\rho)$ , qui permet de déterminer la nature convective ou absolue de l'appariement pour les différentes configurations de couches



**Figure 5.13:** Taux de croissance du paquet d'ondes sur chaque rayon  $x/t$  (a) et nombre d'onde  $k_r$  des modes correspondants (b) pour différentes valeurs de la concentration des tourbillons de Stuart. Les courbes en trait gras correspondent aux résultats théoriques obtenus au §5.4.1 pour  $\rho = 1$ .



**Figure 5.14:** Régions d'instabilité secondaire 2D convective (C) ou absolue (A) en fonction du rapport des vitesses  $R$  et de la concentration  $\rho$  des tourbillons primaires. Le point (I) correspond au cas d'une couche de mélange dont l'instabilité primaire est convective mais pour laquelle l'appariement est de nature absolue. Les croix correspondent aux rapports des vitesses critiques obtenus par approximation quadratique des courbes de la figure 5.13(a).

de mélange, caractérisées par la donnée du rapport de vitesse  $R$  et de la concentration  $\rho$  des tourbillons primaires générés par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz : si  $R > R_c(\rho)$  [ $U < v_f(\rho)$ ], alors l'instabilité secondaire 2D (appariement) de la couche de mélange correspondante est absolue; si  $R < R_c(\rho)$  [ $U > v_f(\rho)$ ], la couche de mélange est convectivement instable vis-à-vis de l'appariement. Ce résultat est illustré sur la figure 5.14 où est indiquée dans le plan  $(R, \rho)$  la nature convective ou absolue de l'appariement.

Il a été observé que la convolution du signal réel par  $ix/\pi$  dans la transformation de Hilbert avait tendance à contaminer le front du paquet d'ondes par une décroissance spatiale algébrique. Pour cette raison l'amplitude du signal analytique a systématiquement été comparée au signal réel initial afin d'estimer cette déformation du bord du paquet d'ondes. Cette estimation conduit aux barres d'erreur de la figure 5.14.

Les taux de croissance des modes spatio-temporels en fonction de  $v$  étant donnés par une courbe parabolique dans les cas limites  $\rho = 0$  et  $\rho = 1$ , on a calculé les valeurs du rapport de vitesses critique  $R_c(\rho) = 1/v_f(\rho)$  obtenues par approximation quadratique des taux de croissance  $\sigma(v)$  de la figure 5.13(a) pour les valeurs intermédiaires de  $\rho$  (croix de la figure 5.14).

Il apparaît clairement que le taux de contre-courant à appliquer pour obtenir une instabilité secondaire absolue est d'autant plus faible que les tourbillons primaires sont concentrés. En particulier, il existe des configurations de couche de mélange pour lesquelles l'instabilité primaire est convective, alors que l'instabilité secondaire est absolue [point (I) de la figure 5.14].

Au vu de ces résultats, deux scénarios peuvent être envisagés :

- quand l'instabilité primaire est rendue absolue en appliquant un contre-courant suffisant, comme dans les expériences de Jendoubi & Strykowski (1994), l'instabilité secondaire 2D est déjà absolue et on devrait observer des appariements cohérents, associés à une composante sous-harmonique énergétique bien définie dans le spectre du signal.
- le même phénomène est susceptible de se produire si un contre-courant plus faible, voire presque nul, est appliqué (de telle sorte que l'instabilité primaire soit convective), et si l'instabilité primaire est forcée régulièrement : une résonance sous-harmonique, due au mécanisme linéaire proposé dans la présente étude, devrait apparaître sous la forme d'un mode global sous-harmonique auto-entretenu.

Bien qu'attribuée initialement à une rétroaction acoustique, une telle résonance a effectivement été observée dans des expériences récentes d'écoulements en aval d'une marche descendante (Narayanan & Hussain, 1996). La transition à une instabilité secondaire 2D absolue décrite dans cette section pourrait constituer une interprétation théorique de ce phénomène.

## 5.5 Instabilité secondaire 3D : résultats préliminaires.

On présente dans cette section quelques résultats préliminaires concernant la nature convective ou absolue de l'instabilité translative (cf §4.2.3), instabilité 3D des tourbillons de Stuart mise en évidence par Pierrehumbert & Widnall (1982).

Les modes propres de cette instabilité sont de la forme :

$$A(x, y)e^{i(kx + \beta z - \omega t)} + cc \quad (5.31)$$

où  $A$  est périodique dans la direction axiale  $x$ , de même période que l'écoulement de base.  $\beta$  représente le nombre d'onde latéral du mode. Afin de faciliter les mesures et l'interprétation des résultats, on choisit de ne simuler que l'évolution des modes à nombre d'onde latéral  $\beta$  fixé, dont le champ de vitesse peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(x, y, t)e^{i\beta z} + cc \quad (5.32)$$

où les composantes de  $\mathbf{u}$  sont a priori complexes. En injectant ce type de solution dans les équations de Navier-Stokes 3D, on dérive un système d'équations pour le seul vecteur  $\mathbf{u}(x, y, t)$ , ce qui permet de faire l'économie de la direction  $z$  dans les simulations numériques.

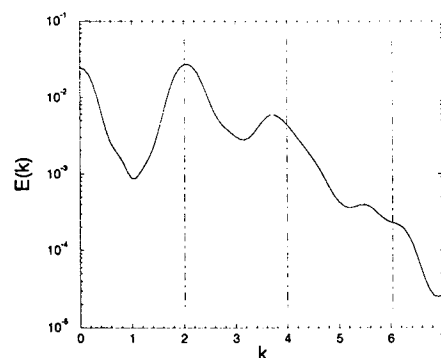
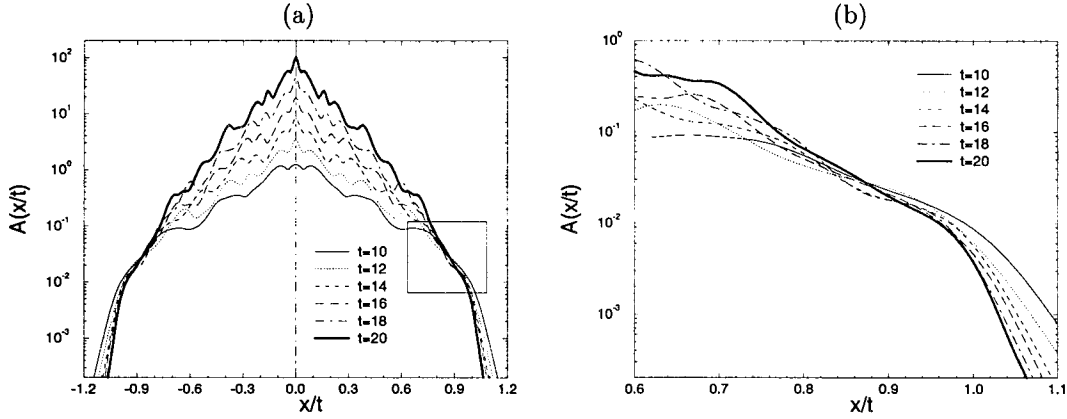


Figure 5.15: Spectre d'énergie du paquet d'ondes 3D à  $t = 15$  ( $\beta = 3$ ,  $\rho = 0.25$ ).

On se restreint dans la présente étude à  $\beta = 3$ , c'est-à-dire un nombre d'onde latéral proche de celui du mode temporel le plus instable de l'instabilité translative. On s'assure en faisant ce choix que les modes 3D correspondant à l'appariement hélicoïdal seront stables (cf §4.2.3). Les modes propres de l'instabilité variqueuse (cf §4.2.3) se caractérisent par une vorticité latérale  $\omega_z$  symétrique par rapport au centre du tourbillon (Schoppa *et al.*, 1995), au contraire des modes translatifs pour lesquels  $\omega_z$  est anti-symétrique.



**Figure 5.16:** Evolution temporelle de l'amplitude du paquet d'ondes 3D sur chaque rayon spatio-temporel  $x/t$  pour  $\beta = 3$ ,  $\rho = 0.25$  (a). Zoom autour du rayon  $x/t$  de croissance nulle (b).

Ainsi, pour éviter d'exciter des modes variqueux, on initialise les simulations avec une perturbation localisée en espace telle que  $\omega_z(t = 0)$  possède la symétrie des modes translatifs. Cette symétrie est conservée par les équations de Navier-Stokes linéarisées, ce qui garantit que les modes observés au cours de la simulation correspondront bien aux modes de l'instabilité translative.

Une première simulation est effectuée pour une concentration des tourbillons de Stuart  $\rho = 0.25$ . Une perturbation localisée génère un paquet d'ondes, dont le spectre en énergie est représenté figure 5.15. Le spectre est continu et l'énergie du signal pour  $k = 0, 2, 4, \dots$  croît au cours du temps, ce qui rend impossible toute troncature à  $k < 0$  (transformation de Hilbert) et à  $k > k_b = 2$  (filtrage utilisé au §5.4.2 comme alternative à une analyse de Floquet), où  $k_b$  correspond au nombre d'onde associé à l'écoulement de base périodique.

En particulier, on ne peut donc pas remonter à l'enveloppe du paquet d'ondes. On peut cependant évaluer l'évolution temporelle du paquet d'ondes sur chaque rayon  $x/t = v$  en considérant l'énergie moyenne du signal réel :

$$A(v; t) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x(v, y; t)|^2 dy \right]^{1/2} \quad (5.33)$$

Cette quantité est représentée à différents instants sur la figure 5.16(a). La mesure est très perturbée par les oscillations du signal et l'évaluation du rayon  $x/t$  de croissance nulle est particulièrement délicate. Il apparaît cependant clairement qu'un tel rayon existe, et qu'il est a priori inférieur à 1, l'amplitude du signal étant au-delà strictement décroissante au cours du temps [Fig. 5.16(b)].

Une évaluation de ce rayon particulier, correspondant à la vitesse de propagation du front du paquet d'ondes  $v_f$  peut se faire via une analyse de Floquet.

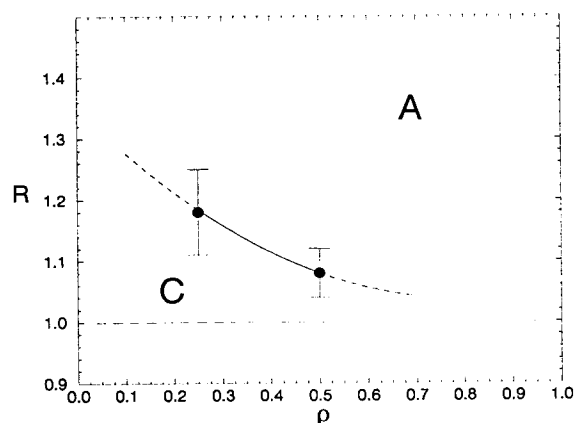
La méthode consiste à étudier les variations de l'amplitude du signal mesuré à  $x/t = v$  fixé entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ , où  $\Delta t$  est défini par :

$$\frac{x + \lambda}{t + \Delta t} = \frac{x}{t} \quad \text{soit} \quad \Delta t = \frac{\lambda}{x/t} \quad (5.34)$$

où  $\lambda = \pi$  correspond à la période de l'écoulement de base.

En comparant  $A(x/t; t)$  et  $A(x/t; t + \Delta t)$ , on détermine alors la croissance du mode de Floquet se développant sur le rayon  $x/t$ . On peut ainsi remonter au rayon de croissance nulle. La même procédure a été employée pour le cas de tourbillons de Stuart plus concentrés ( $\rho = 0.5$ ).

La mesure des vitesses de propagation des fronts  $v_f$  pour ces deux cas ( $\rho = 0.25$  et  $\rho = 0.5$ ) permet de prédire la nature convective ou absolue de l'instabilité translative, au moins pour les modes 3D de nombre d'onde  $\beta = 3$  (Fig. 5.17). On définit le rapport des vitesses critique  $R_c(\rho) = 1/v_f(\rho)$ . Pour les



**Figure 5.17:** Régions d'instabilité secondaire 3D (instabilité translatrice,  $\beta = 3$ ) convective (C) ou absolue (A) en fonction du rapport des vitesses  $R$  et de la concentration  $\rho$  des tourbillons primaires.

couches de mélange définies par le rapport des vitesses  $R$  et la concentration  $\rho$  des tourbillons primaires telles que  $R < R_c(\rho)$ , l'instabilité translatrice est convective. Si, au contraire,  $R > R_c(\rho)$ , alors l'instabilité translatrice est absolue.

Comme pour l'instabilité secondaire 2D (appariement), on remarque que l'instabilité translatrice devient absolue pour des contre-courants plus faibles que pour l'instabilité primaire et les conclusions que l'on peut avancer à l'issue de cette étude préliminaire sont similaires à celles formulées pour l'instabilité secondaire 2D. En particulier, il semblerait que l'instabilité translatrice soit bien de nature convective pour un contre-courant nul. Cette conjecture, extrapolée au cas du jet, permet de justifier a posteriori la transposition des résultats de l'analyse temporelle du chapitre 4 au cas "réel" des expériences de jets (évolution spatiale de l'écoulement).

Il reste cependant à caractériser plus en détail les propriétés spatio-temporelles de l'instabilité translatrice, d'abord pour d'autres valeurs de la concentration  $\rho$  et ensuite d'autres valeurs de  $\beta$ . Les autres types d'instabilités 3D (appariement hélicoïdal, instabilité varicueuse) devraient aussi être considérés. Comme suggéré par Brevdo & Bridges (1996), une analyse de Floquet complète et rigoureuse s'impose pour mener à bien cette étude.

La détermination des propriétés spatio-temporelles des instabilités secondaires est d'importance fondamentale. D'une part elle permet de vérifier la validité des résultats de stabilité temporelle transposés au cas spatial. D'autre part une transition à une instabilité secondaire 3D absolue pourrait être à l'origine d'une transition de mélange énergétique et constituer ainsi une route particulière vers la turbulence dans les écoulements cisailés.





# Chapitre 6

## Conclusions.

Le travail présenté dans ce mémoire est une contribution à l'étude de la transition vers la turbulence dans les écoulements cisailés ouverts. La démarche retenue a été d'analyser les résultats de simulations numériques directes de tels écoulements avec les outils issus de la théorie de l'instabilité hydrodynamique.

Cette étude s'est orientée autour de deux axes. Une première partie (chapitres 3 et 4) concerne la transition 3D des jets cylindriques. Plus précisément, des résultats à la fois qualitatifs et quantitatifs ont été obtenus sur les mécanismes d'instabilité responsables de la brisure d'axisymétrie de l'écoulement observée dans les expériences. La caractérisation de la nature convective ou absolue des instabilités secondaires des couches de mélange planes a été abordée dans une seconde partie (chapitre 5). Comme suggéré dans les travaux de Huerre (1988), il est montré que la transition à une instabilité secondaire absolue est indépendante de la nature convective ou absolue de l'instabilité primaire. En particulier, dans le cas 2D, il existe des valeurs des paramètres caractéristiques de l'écoulement pour lesquelles l'instabilité secondaire de la couche de mélange (appariement) est absolue alors que l'instabilité primaire (Kelvin-Helmholtz) est convective.

Les paragraphes suivants reprennent en détail les principaux résultats obtenus et discutent des extensions possibles de cette étude.

### Transition 3D des jets cylindriques.

Des simulations numériques directes 3D de jets cylindriques ont été effectuées en vue d'étudier l'évolution temporelle de ce type d'écoulement. L'instabilité primaire est forcée en injectant initialement une perturbation longitudinale de longueur d'onde (ou, de manière équivalente, de fréquence) donnée. La simulation temporelle de l'écoulement révèle alors la formation d'une allée régulière d'anneaux tourbillonnaires issus de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz de la couche de mélange du jet. Les taux de croissance et la structure spatiale des modes propres mesurés sont en bon accord avec les prédictions théoriques, ce qui permet de valider la méthode de résolution numérique (§2.3). L'évolution tridimensionnelle du jet est en outre contrôlée en imposant à l'écoulement de base une perturbation de nombre d'onde azimutal fixé, similaire à celle obtenue dans les expériences de jets émergeant de buses corruguées. L'évolution temporelle de l'écoulement se caractérise alors par une réorientation non axisymétrique de la vorticité initiale, donnant naissance à des régions de vorticité longitudinale de signe alterné suivant l'azimut, à la fois dans et entre les anneaux (§3.2). Des visualisations 3D ont permis d'analyser en détail la structure spatiale du champ de vorticité lors de la réorientation et montrent en particulier que la distribution de la vorticité longitudinale dans les anneaux est en opposition de phase avec celle dans la tresse. A ce stade, les anneaux tourbillonnaires présentent une déformation azimutale en opposition de phase avec la corrugation initiale (*axis switching*). Au vu des études antérieures (cf les expériences de couches de mélange de Lasheras & Choi, 1988) il semblerait que cette configuration soit générique des écoulements cisailés avec corrugation. Ce phénomène de réorientation, ainsi que la structure du champ de vorticité correspondant, s'explique de manière convaincante par des arguments d'induction tourbillonnaire (§3.2) mais peut aussi

s'interpréter comme la redistribution spatiale du mode propre axisymétrique injecté initialement vers le mode propre exact de l'écoulement de base corrugué (cf l'étude asymptotique du §4.1).

Après cette phase transitoire de réorientation et la saturation de l'instabilité primaire sous la forme d'anneaux tourbillonnaires, on observe une croissance exponentielle de l'énergie contenue dans le mode azimutal imposé par la corrugation initiale, signature d'une instabilité *secondaire* 3D : l'allée d'anneaux tourbillonnaires issue de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz de la couche de mélange du jet (instabilité primaire) est instable vis-à-vis de la perturbation azimutale introduite par la corrugation (instabilité secondaire). Une analyse systématique de l'influence des différents paramètres caractéristiques de l'écoulement a été menée (§4.2). Cette étude paramétrique montre que l'instabilité secondaire 3D est directement contrôlée dans le régime linéaire par le nombre de Strouhal  $St$  de l'instabilité primaire ( $St = R/\lambda$ , où  $R$  est le rayon du jet et  $\lambda$  la distance entre deux anneaux tourbillonnaires consécutifs). En particulier le taux de croissance et le nombre d'onde azimutal du mode le plus instable (donc le plus susceptible d'apparaître "naturellement") varient linéairement avec  $St$ . Ce résultat, complété par l'analyse de la structure spatiale des modes propres associés, permet de rapprocher cette instabilité de l'instabilité translative des couches de mélange planes étudiée par Pierrehumbert & Widnall (1982). Il est montré en outre que ces deux instabilités génèrent de la vorticité longitudinale dans la tresse, à l'origine des tourbillons longitudinaux observés expérimentalement. Dans un contexte expérimental où le nombre de Strouhal peut être imposé par forçage en fréquence à la buse, ces résultats suggèrent que plus cette fréquence est élevée, plus le nombre d'onde azimutal observé sera grand<sup>1</sup>. Il serait intéressant de confronter cette prédiction avec une campagne de mesures expérimentales, où  $St$  serait imposé à la buse et des visualisations par fluorescence induite permettraient d'obtenir le nombre d'onde azimutal sélectionné par l'écoulement. Il est conjecturé que l'appariement des anneaux tourbillonnaires n'a pas d'influence majeure sur cette sélection. Néanmoins, l'appariement pourrait déclencher d'autres types d'instabilités 3D comme l'instabilité variqueuse mise en évidence dans les couches de mélange planes (Schoppa *et al.*, 1995). Les taux de croissance des différentes instabilités secondaires étant du même ordre de grandeur, une étude systématique de l'influence de leur amplitude respective pourrait révéler une dynamique du jet plus complexe.

Le régime non linéaire de l'instabilité secondaire 3D a ensuite été abordé (§4.3). La corrugation imposée au jet génère des modes azimutaux harmoniques du mode de corrugation fondamental (§4.1). Durant le développement de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, ces modes restent de faible amplitude mais dans le régime non linéaire de l'instabilité secondaire 3D, il est observé numériquement que les harmoniques se mettent à croître avec des taux de croissance multiples de celui du mode azimutal fondamental. La dynamique de ces modes azimutaux est discutée à l'aide d'un système d'équations d'évolution non linéaires qui tiennent compte d'un forçage quadratique par le mode fondamental. On obtient ainsi au moyen de ces équations modèles une bonne prédiction des taux de croissance des différentes harmoniques du mode 3D fondamental. La croissance des harmoniques co incide avec l'étirement et la focalisation des nappes de vorticité longitudinale présentes entre les anneaux tourbillonnaires (§3.3 et §4.3). Ce mécanisme de focalisation, étudié par Neu (1984) et Lin & Corcos (1984) dans le cas des couches de mélange planes, donne naissance à des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs intenses dans la tresse qui, par induction tourbillonnaire, génèrent un champ de vitesse radiale sous la forme de jets latéraux similaires à ceux observés expérimentalement (Monkewitz *et al.*, 1989).

Les résultats présentés aux chapitres 3 et 4 concernent les jets soumis à de faibles perturbations. Pour des amplitudes de forçage longitudinal et azimutal à la buse plus importantes, des expériences récentes ont mis en évidence une dynamique du jet particulièrement intéressante, où les fortes déformations azimutales des anneaux tourbillonnaires conduisent à des phénomènes de reconnection (Lasheras, 1996). Des simulations numériques similaires à celles utilisées dans la présente étude permettraient d'étudier en détail ces régimes fortement non linéaires.

<sup>1</sup>Il est d'ailleurs surprenant que relativement peu d'études expérimentales sur la transition 3D des jets cylindriques tiennent compte du nombre de Strouhal comme paramètre de contrôle de l'écoulement (cf Liepmann & Gharib, 1992).

## Nature convective ou absolue des instabilités secondaires des couches de mélange.

Dans les couches de mélange, l'allée tourbillonnaire résultant de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (instabilité primaire) est soumise à son tour à des instabilités (secondaires) 2D et 3D dont les caractéristiques temporelles ont été étudiées par Pierrehumbert & Widnall (1982). L'objet de la seconde partie de la thèse concerne l'étude de la nature convective ou absolue de ces instabilités en fonction des paramètres caractéristiques de l'écoulement. La principale motivation de ce travail est qu'une transition convectif/absolu a des conséquences radicales sur la dynamique des écoulements ouverts. En particulier une instabilité de nature absolue peut faire entrer en résonance l'écoulement, qui se comporte alors comme un oscillateur et présente une dynamique globale intrinsèque, peu sensible à un forçage éventuel. Dans ce cas, les résultats de stabilité temporelle ne peuvent se transposer au cas spatial et une analyse de stabilité spatio-temporelle est nécessaire pour décrire la dynamique de l'écoulement. Ces notions n'avaient cependant été appliquées qu'à la description de l'instabilité primaire et le présent travail constitue une première tentative de déterminer la nature convective ou absolue d'une instabilité secondaire d'un mode primaire saturé périodique. Dans le cas des couches de mélange planes, ce mode primaire saturé, correspondant à la rangée régulière de tourbillons de Kelvin-Helmholtz, peut être modélisé par la solution périodique de tourbillons de Stuart (1967) dont les différents types d'instabilités (2D et 3D) ont été identifiés par Pierrehumbert & Widnall (1982).

L'étude présentée au chapitre 5 concerne la détermination de la nature convective ou absolue de l'instabilité 2D de la rangée de tourbillons, connue sous le nom d'instabilité sous-harmonique ou appariement (*pairing*). La méthode adoptée a été de simuler numériquement la réponse impulsionnelle de l'écoulement de base de Stuart en suivant l'évolution spatio-temporelle linéaire d'un paquet d'ondes d'instabilité généré par une perturbation initiale localisée. L'analyse de l'amplitude et de la phase du paquet d'ondes permet alors de remonter aux caractéristiques spatio-temporelles de l'instabilité. En particulier, il est montré que plus les tourbillons sont concentrés, plus le paquet d'ondes s'étend rapidement (§5.4). En pratique, ce résultat se traduit par le fait que l'instabilité devient absolue pour des contre-courants d'autant plus faibles que les tourbillons primaires sont concentrés. Tandis qu'un contre-courant relativement fort est nécessaire pour déclencher une instabilité primaire absolue (Huerre & Monkewitz, 1985), l'instabilité secondaire devient absolue pour un contre-courant quasi nul lorsque les tourbillons primaires saturés sont suffisamment concentrés. Dans ce cas, le nombre d'onde sélectionné au front du paquet d'ondes correspond à un doublement de période, signature d'une instabilité sous-harmonique.

Lorsque l'on considère l'évolution non linéaire d'un écoulement cisailé ouvert (couche de mélange, jet, écoulement en aval d'une marche descendante, ...), ces résultats prédisent que pour un contre-courant faible voire presque nul une résonance sous-harmonique, due à la présence d'une région d'instabilité absolue régnant sur la rangée de tourbillons de Kelvin-Helmholtz, devrait se manifester lorsque l'écoulement est forcé à une fréquence fondamentale donnée. Une cascade sous-harmonique pourrait alors apparaître car l'instabilité sous-harmonique, en saturant, va donner lieu à une rangée régulière de tourbillons séparés d'une distance double, qui elle-même est susceptible d'être absolument instable vis-à-vis de l'appariement. Ainsi, si l'on force le mode primaire d'une couche de mélange, on devrait observer une séquence cohérente d'appariements successifs, associés à l'émergence d'une composante sous-harmonique bien marquée dans le spectre d'énergie. Cette cascade, bien qu'attribuée à l'origine à une rétroaction acoustique, a été effectivement observée dans des expériences récentes de l'écoulement en aval d'une marche descendante forcé près de sa fréquence naturelle, pour lequel un doublement et un quadruplement de période sont naturellement présents et en phase (Narayanan & Hussain, 1996). Le mécanisme d'instabilité sous-harmonique absolue mis en évidence au chapitre 5 pourrait être à l'origine de ce phénomène. Dans ce contexte, il serait intéressant de faire de nouvelles simulations numériques où par exemple un contre-courant est appliqué autour du jet pour distinguer entre une explication basée sur une rétroaction acoustique ou sur une instabilité absolue. En outre, des simulations numériques spatiales permettraient d'étudier si, après son initiation, l'appariement va se produire indéfiniment à un endroit fixe en espace.

Une analyse similaire à celle effectuée pour l'appariement a été initiée pour l'étude des instabilités 3D du même écoulement de base (tourbillons de Stuart). Les résultats préliminaires pour l'instabilité translatrice sont similaires à ceux obtenus pour l'appariement, à savoir qu'il existe des valeurs de contre-courant

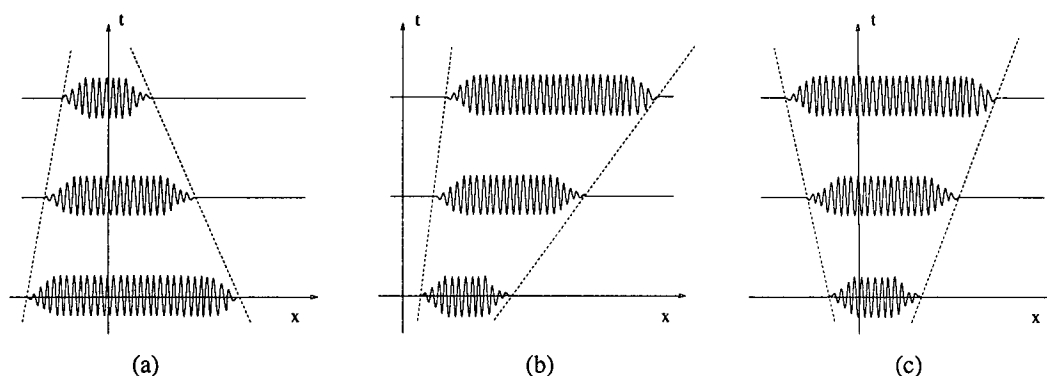


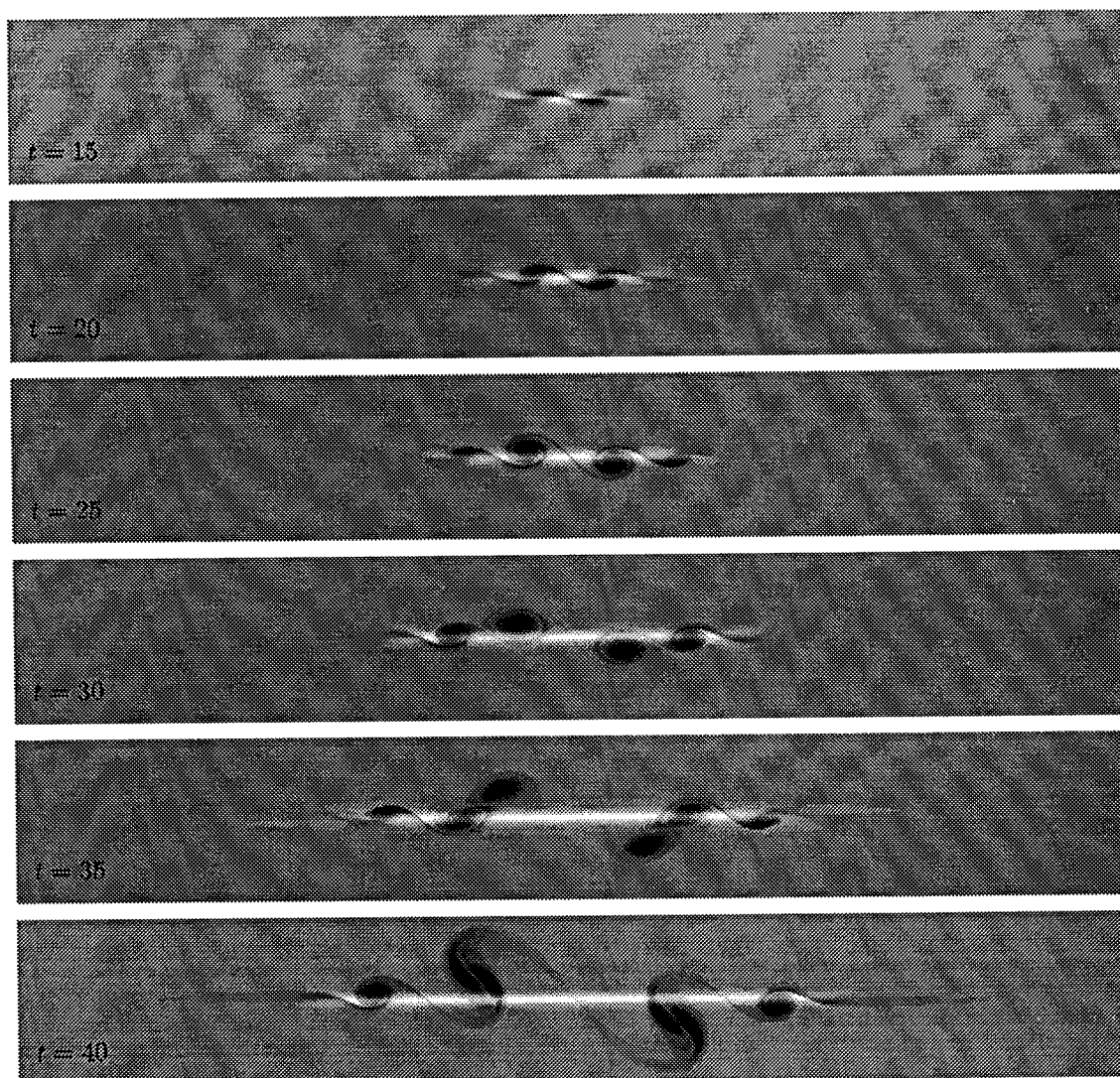
Figure 6.1: Écoulement stable (a), non-linéairement instable convectif (b), non-linéairement instable absolu (c).

pour lesquelles l'instabilité primaire est convective, mais l'instabilité secondaire 3D absolue. Néanmoins, en l'absence de contre-courant, l'instabilité est convective, ce qui permet de justifier a posteriori la transposition des résultats de stabilité issus de simulations temporelles (chapitres 3 et 4) aux cas réels expérimentaux (évolution spatiale de l'écoulement). Il faudrait poursuivre cette étude et l'étendre aux autres types d'instabilités 3D (appariement hélicoïdal, instabilité variqueuse). Il paraît alors nécessaire d'implémenter une analyse de Floquet rigoureuse. Une transition à une instabilité secondaire 3D absolue pourrait constituer une interprétation alternative à la transition de mélange et une route originale vers le chaos et la turbulence pour les écoulements cisailés ouverts (cf Morkovin, 1988).

De la même manière, les simulations numériques de la réponse impulsionnelle du sillage derrière un cylindre permettraient de comprendre la destabilisation de l'allée de Bénard-Karman par différents modes 3D, comme observé dans les expériences (Williamson, 1996). En particulier, on chercherait à isoler deux modes avec des symétries différentes et associés à des longueurs caractéristiques distinctes correspondant aux modes A et B mis en évidence expérimentalement.

Une autre application de la méthode numérique développée dans ce travail concerne les concepts d'instabilité convective ou absolue *non linéaire*, extension des concepts linéaires "classiques" (Fig. 6.1). L'idée est de suivre l'évolution non-linéaire du paquet d'ondes et étudier l'influence des non-linéarités sur la vitesse de propagation des fronts et donc sur les propriétés spatio-temporelles de l'instabilité (Chomaz, 1992; Couairon, 1996). Cette étude est délicate pour l'instabilité primaire des couches de mélange planes car le mode non-linéaire résultant (tourbillons de Kelvin-Helmholtz) est lui-même instable vis-à-vis de l'appariement (Fig. 6.2). Une solution, pour confronter la théorie, basée essentiellement sur des équations modèles, aux équations de Navier-Stokes complètes, pourrait être de considérer le développement d'un sillage conduisant à une allée de Bénard-Karman stable (cf Saffman, 1992, §7.6).

Les idées et techniques développées au chapitre 5 ne sont pas restreintes à la dynamique des écoulements ouverts, mais peuvent s'appliquer à tout système similaire supportant des ondes propagatives comme en chimie (Skinner & Swinney, 1991; Weber *et al.*, 1992), en optique non-linéaire (Couillet *et al.*, 1989), en convection de fluides binaires (Kolodner *et al.*, 1990) ou en théorie de la dynamo (Soward, 1992). Une route éventuelle vers le désordre impliquant une cascade d'instabilités absolues, intrinsèque, ou une réponse induite par le bruit, extrinsèque, devrait être explorée dans ces différents domaines. La technique numérique originale présentée au chapitre 5 fournit un outil pratique et général pour l'étude des instabilités convectives ou absolues et devrait être facilement transposable à n'importe lequel de ces problèmes.



**Figure 6.2:** Evolution spatio-temporelle non-linéaire d'un paquet d'ondes sur un écoulement de base en tanh. Le mode non-linéaire résultant de la saturation du paquet d'ondes est instable vis-à-vis de l'appariement (cf  $t = 35$  et  $40$ ).



# Bibliographie

- [1] ABID, M. & BRACHET, M.E. (1993) Numerical characterization of the dynamics of vortex filaments in round jets. *Phys. Fluids* **5** (11), 2582-4.
- [2] ABID, M., BRACHET, M.E. & HUERRE, P. (1993) Linear hydrodynamic instability of circular jets with thin shear layers. *Eur. J. Mech., B/Fluids* **12** (5), 683-93.
- [3] ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A. (1965) *Handbook of Mathematical functions*. Dover Publications Inc., New-York.
- [4] ASTRUC, D. (1993) Instabilité de Kelvin-Helmholtz en régime subsonique : développement spatial et conditions aux limites ouvertes. Thèse de l'Institut National Polytechnique de Toulouse.
- [5] ASHURST, W.T. & MEIBURG, E. (1988) Three-dimensional shear layers via vortex dynamics. *J. Fluid Mech.* **189**, 87-116.
- [6] BATCHELOR, G.K. (1967) *An introduction to fluid mechanics*. Cambridge University Press.
- [7] BATCHELOR, G.K. & GILL, A.E. (1962) Analysis of the stability of axisymmetric jets. *J. Fluid Mech.* **14**, 529-51.
- [8] BAYLY, B.J. (1986) Three-dimensional instability of elliptical flow. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2160.
- [9] BEAVERS, G.S. & WILSON, T.A. (1970) Vortex growth in jets. *J. Fluid Mech.* **44**, 97-112.
- [10] BECKER, H.A. & MASSARO, T.A. (1968) Vortex evolution in a round jet. *J. Fluid Mech.* **31**, 435-48.
- [11] BERNAL, L.P. & ROSHKO, A. (1986) Streamwise vortex structures in plane mixing layers. *J. Fluid Mech.* **170**, 499-525.
- [12] BERS, A (1983) Space-time evolution of plasma instabilities - absolute and convective. In *Handbook of Plasma Physics*, éd. M.N. Rosenbluth & R.Z. Sagdeev, Amsterdam.
- [13] BRANCHER, P. (1993) Etude numérique des instabilités secondaires de jets axisymétriques. Mémoire de DEA (ENSTA - Paris VI). Publié dans *Techniques Avancées* **24**, 2.
- [14] BRANCHER, P., CHOMAZ, J.M. & HUERRE, P. (1994) Direct numerical simulations of round jets : vortex induction and side-jets. *Phys. Fluids* **6** (5), 1768-74.
- [15] BREIDENTHAL, R. (1981) Structures in turbulent mixing layers and wakes using a chemical reaction. *J. Fluid Mech.* **109**, 1-24.
- [16] BREVDO, L. & BRIDGES, T.J. (1996) A paraître dans *Phil. Trans. R. Soc. London*.
- [17] BRIGGS, R.J. (1964) *Electron-Stream Interaction With Plasmas*. MIT Press.
- [18] BROWAND, F.K. & TROUTT, T.R. (1980) A note on spanwise structures in the two-dimensional mixing layer. *J. Fluid Mech.* **97**, 771-81.

- [19] BROWN, G.L. & ROSHKO, A. (1974) On density effects and large structures in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.* **64**, 775-816.
- [20] BUELL, J.C. & HUERRE, P. (1988) Inflow/outflow boundary conditions and global dynamics of spatial mixing layers. *Proc. NASA Ames-Stanford CTR Summer Program*. Rep. CTR-S88, 19-27.
- [21] CANUTO, C., HUSSAINI, M.Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T.A. (1988) *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin.
- [22] CHOMAZ, J.M. (1992) Absolute and convective instabilities in nonlinear systems. *Phys. Rev. Lett.* **69** (13), 1931-4.
- [23] CHOMAZ, J.M., HUERRE, P. & REDEKOPP, L.G. (1988) Bifurcations to local and global modes in spatially-developing flows. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 25-8.
- [24] COMTE, P. & LESIEUR, M. (1990) Large and small-scale stirring of vorticity and passive scalar in a 3D temporal mixing layer. IUTAM Symposium on *Fluid Mechanics of Stirring and Mixing*, La Jolla, California.
- [25] COOLEY, J.W. & TUCKEY, J.W. (1965) An algorithm for the machine computation of complex Fourier series. *Math. Comp.* **19**, 297.
- [26] CORCOS, G.M. & LIN, C.C. (1984) The mixing layer : deterministic models of a turbulent flow. Part 2. The origin of the three-dimensional motion. *J. Fluid Mech.* **139**, 67-95.
- [27] CORCOS, G.M. & SHERMAN, F.S. (1984) The mixing layer : deterministic models of a turbulent flow. Part 1. Introduction and the two-dimensional flow. *J. Fluid Mech.* **139**, 29-65.
- [28] COUAIRO, A. (1996) Thèse de l'Ecole Polytechnique, à paraître.
- [29] COULLET, P., GIL, L. & ROCCA, F. (1989) Optical vortices. *Opt. Commun.* **73** (5), 403-8.
- [30] CRIGHTON, D.G. & GASTER, M. (1976) Stability of slowly diverging jet flow *J. Fluid Mech.* **77**, 397-413.
- [31] CROW, S.C. & CHAMPAGNE, F.H. (1971) Orderly structure in jet turbulence. *J. Fluid Mech.* **48**, 547-91.
- [32] DELBENDE, I., CHOMAZ, J.M. & HUERRE, P. (1996) A paraître dans *J. Fluid Mech.*
- [33] DRAZIN, P.G. & REID, W.H. (1981) *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
- [34] GARCIA, A., BILLANT, P., DELBENDE, I., POULIQUEN, O., WILLAIME, H., WU, M.M., CHOMAZ, J.M., HUERRE, P. & BRANCHER, P. (1995) Communication privée.
- [35] GOTTLIEB, D. & ORSZAG, S.A. (1977) *Analysis of spectral methods : theory and applications*. SIAM.
- [36] GRINSTEIN, F.F., ORAN, E.S. & BORIS, J.P. (1991) Pressure field, feedback and global instabilities of subsonic spatially developing mixing layers. *Phys. Fluids A* **3** (10), 2401-9.
- [37] GRINSTEIN, F.F. (1995) Vorticity in jets. In *Fluid vortices*, éd. S.T. Green. Kluwer Academy, Netherlands.
- [38] HO, C.M. & GUTMARK, E. (1987) Vortex induction and mass entrainment in a small aspect-ratio elliptic jet. *J. Fluid Mech.* **179**, 383-405.
- [39] HO, C.M. & HUERRE, P. (1984) Perturbed free shear layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **16**, 365-424.
- [40] HUANG, L.S. & HO, C.H. (1990) Small-scale transition in a plane mixing layer. *J. Fluid Mech.* **210**, 475-500.



- [41] HUERRE, P. (1988) On the absolute/convective nature of primary and secondary instabilities. In *Propagation in systems far from equilibrium*, éds. J.E. Wesfreid, H.R. Brand, P. Manneville, G. Albinet & N. Boccara, Springer-Verlag, Berlin.
- [42] HUERRE, P. & MONKEWITZ, P.A. (1985) Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.* **159**, 151-68.
- [43] HUERRE, P. & MONKEWITZ, P.A. (1990) Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473-537.
- [44] JENDOUBI, S. & STRYKOWSKI, P.J. (1994) Absolute and convective instability of axisymmetric jets with external flow. *Phys. Fluids* **6** (9), 3000-9.
- [45] JIMENEZ, J. (1983) A spanwise structure in the plane shear layer. *J. Fluid Mech.* **132**, 319-36.
- [46] KOLODNER, P., GLAZIER, J.A. & WILLIAMS, H. (1990) Dispersive chaos in one-dimensional traveling-wave convection. *Phys. Rev. Lett.* **65** (13), 1579-82.
- [47] KOSHIGOE, S. & TUBIS, A. (1986) Wave structures in jets of arbitrary shape. I. Linear inviscid spatial instability analysis. *Phys. Fluids* **29** (12), 3982-92.
- [48] KOSHIGOE, S. & TUBIS, A. (1987) Wave structures in jets of arbitrary shape. II. Application of a generalized shooting method to linear instability analysis. *Phys. Fluids* **30** (6), 1715-23.
- [49] KOSHIGOE, S., GUTMARK, E., SCHADOW, K.C. & TUBIS, A. (1988) Wave structures in jets of arbitrary shape. III. Triangular jets. *Phys. Fluids* **31** (6), 1410-9.
- [50] LASHERAS, J.C. (1996) Communication privée.
- [51] LASHERAS, J.C., CHO, J.S. & MAXWORTHY, T. (1986) On the origin of streamwise vortical structures in a plane, free shear layer. *J. Fluid Mech.* **172**, 231-58.
- [52] LASHERAS, J.C. & CHOI, H. (1988) Three-dimensional instability of a plane free shear layer : an experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.* **189**, 53-86.
- [53] LASHERAS, J.C., LECUONA, A. & RODRIGUEZ, P. (1991) Three-dimensional structure of the vorticity field in the near region of laminar, co-flowing forced jets. In *The Global Geometry of Turbulence*, éd. J. Jimenez, Plenum Press, New-York.
- [54] LESSEN, M. & SINGH, P.J. (1973) The stability of axisymmetric free shear layers. *J. Fluid Mech.* **60**, 433-57.
- [55] LIEPMANN, D. & GHARIB, M. (1992) The role of streamwise vorticity in the near-field entrainment of round jets. *J. Fluid Mech.* **245**, 643-68.
- [56] LIN, C.C. (1955) *The theory of hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- [57] LIN, S.J. & CORCOS, G.M. (1984) The mixing layer : deterministic models of a turbulent flow. Part 3. The effect of plane strain on the dynamics of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.* **141**, 139-78.
- [58] LIU, C.H., TAVANTZIS, J. & TING, L. (1986) Numerical studies of motion and decay of vortex filaments. *AIAA J.* **24**, 1290-97.
- [59] MANKBADI, R.R. (1992) Dynamics and control of coherent structures in turbulent jets. *Applied Mech. Reviews* **45** (6), 219-47.
- [60] MANNEVILLE, P. (1990) *Dissipative structures and weak turbulence*. Academic Press.
- [61] MARTIN, J.E. & MEIBURG, E. (1991) Numerical investigation of three-dimensionally evolving jets subject to axisymmetric and azimuthal perturbations. *J. Fluid Mech.* **230**, 271-318.

- [62] MATTINGLY, G.E. & CHANG, C.C. (1974) Unstable waves on an axisymmetric jet column. *J. Fluid Mech.* **65**, 541-60.
- [63] MELVILLE, W.K. (1983) Wave modulation and breakdown. *J. Fluid Mech.* **128**, 489-506.
- [64] METCALFE, R.W., ORSZAG, S.A., BRACHET, M.E., MENON, S. & RILEY, J.J. (1987) Secondary instability of a temporally growing mixing layer. *J. Fluid Mech.* **184**, 207-43.
- [65] MICHALKE, A. (1964) On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile. *J. Fluid Mech.* **19**, 543-56.
- [66] MICHALKE, A. (1984) Survey on jet instability theory. *Prog. Aerospace Sci.* **21**, 159-99.
- [67] MONKEWITZ, P.A. & SOHN, K.D. (1988) Absolute instability in hot jets. *AIAA J.* **26**, 911-6.
- [68] MONKEWITZ, P.A., LEHMANN, B., BARSIKOW, B. & BECHERT, D.W. (1989) The spreading of self-excited hot jets by side-jets. *Phys. Fluids A*, **1**, 446-8.
- [69] MONKEWITZ, P.A., BECHERT, D.W., BARSIKOW, B. & LEHMANN, B. (1990) Self-excited oscillations and mixing in a heated round jet. *J. Fluid Mech.* **213**, 611-39.
- [70] MONKEWITZ, P.A. (1990) The role of absolute and convective instability in predicting the behavior of fluid systems. *Eur. J. Mech., B/Fluids* **9** (5), 395-413.
- [71] MONKEWITZ, P.A. & PFIZENMAIER, E. (1991) Mixing by side-jets in strongly forced and self-excited round jets. *Phys. Fluids A* **3**, 1356-61.
- [72] MORKOVIN, M.V. (1988) Recent insights into instability and transition to turbulence in open-flow systems. *AIAA Pap.* 88-3675.
- [73] MORRIS, P.J. (1976) The spatial viscous instability of axisymmetric jets. *J. Fluid Mech.* **77**, 511-29.
- [74] MOSER, R.D. & ROGERS, M.M. (1993) The three-dimensional evolution of a plane mixing layer : pairing and transition to turbulence. *J. Fluid Mech.* **247**, 275-320.
- [75] MULLER, H.W. & TVEITEREID, M. (1995) Absolute and convective nature of the Eckhaus and zigzag instability. *Phys. Rev. Lett.* **74** (9), 1582-5.
- [76] NARANAYAN, S. & HUSSAIN, F. (1996) A paraître dans *J. Fluid Mech.*
- [77] NEU, J.C. (1984) The dynamics of stretched vortices. *J. Fluid Mech.* **143**, 253-76.
- [78] NORMAND, X., COMTE, P. & LESIEUR, M. (1988) Numerical simulation of a spatially-growing mixing layer. *La Recherche Aéronautique* **6**, 45-52.
- [79] NYGAARD, K.J. & GLEZER, A. (1991) Evolution of streamwise vortices and generation of small-scale motion in a plane mixing layer. *J. Fluid Mech.* **231**, 257-301.
- [80] PEYRET, R. & TAYLOR, T.D. (1983) *Computational methods for fluid flows*. Springer-Verlag, Berlin.
- [81] PIERREHUMBERT, R.T. (1986) A universal short wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2157.
- [82] PIERREHUMBERT, R.T. & WIDNALL, S.E. (1982) The two- and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer. *J. Fluid Mech.* **114**, 59-82.
- [83] RAGHU, S., LEHMANN, B. & MONKEWITZ, P.A. (1991) On the mechanism of side-jet generation in periodically excited axisymmetric jets. in *Advances in Turbulence* **3**, eds. A.V. Johansson & P.H. Alfredsson, Springer-Verlag, Berlin.

- [84] RAYLEIGH, LORD (1892) *Scientific papers* **3**. Cambridge University Press.
- [85] RILEY, J.J. & METCALFE, R.W. (1980) Direct numerical simulation of a perturbed turbulent mixing layer. *AIAA Pap.* 080-0274.
- [86] ROGERS, M.M. & MOSER, R.D. (1992) The three-dimensional evolution of a plane mixing layer : the Kelvin-Helmholtz rollup. *J. Fluid Mech.* **243**, 183-226.
- [87] ROGERS, M.M. & MOSER, R.D. (1993) Spanwise scale selection in plane mixing layers. *J. Fluid Mech.* **247**, 321-37.
- [88] SAFFMAN, P.G. (1992) *Vortex Dynamics*. Cambridge Univ. Press.
- [89] SCHOPPA, W., HUSSAIN, F. & METCALFE, R.W. (1995) A new mechanism of small-scale transition in a plane mixing layer : core dynamics of spanwise vortices. *J. Fluid Mech.* **298**, 23-80.
- [90] SKINNER, G.S. & SWINNEY, H.L. (1991) Periodic to quasi-periodic transition of chemical spiral rotation. *Physica D* **48** (1), 1-16.
- [91] SOWARD, A.M. (1992) Thin disk kinematic alpha-omega-dynamo models. 1. Long length scale modes. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **64** (1-4), 163-99.
- [92] SOWARD, A.M. (1992) Thin disk kinematic alpha-omega-dynamo models. 2. Short length scale modes. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **64** (1-4), 201-25.
- [93] SREENIVASAN, K.R., RAGHU, S. & KYLE, D. (1989) Absolute instability in variable density round jets. *Exps. Fluids* **7**, 309-17.
- [94] STUART, J.T. (1967) On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers. *J. Fluid Mech.* **29**, 417-40.
- [95] TUCKERMAN, L. (1995) *Stabilité hydrodynamique et méthodes numériques adaptées*. Cours de l'Ecole de Printemps MFN, Carcans-Maubuisson.
- [96] VAN DYKE, M. (1982) *An album of fluid motion*. The Parabolic Press, Stanford, California.
- [97] VINCENT, A. & MENEGUZZI, M. (1991) The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.* **225**, 1-20.
- [98] WEBER, A., KRAMER, L., ARANSON, I.S. & ARANSON, L. (1992) Stability limits of traveling waves and the transition to spatiotemporal chaos in the complex Ginzburg-Landau equation. *Physica D* **61** (1-4), 279-83.
- [99] WIDNALL, S.E., BLISS, D.B. & TSAI, C.Y. (1974) The instability of short waves on a vortex ring. *J. Fluid Mech.* **66**, 35-47.
- [100] WILLIAMSON, C.H.K. (1996) Vortex dynamics in the cylinder wake. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **28**, 477.
- [101] WINANT, C.D. & BROWAND, F.K. (1974) Vortex pairing : the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **63**, 237-255.
- [102] YU, M.H. & MONKEWITZ, P.A. (1993) Oscillations in the near field of a heated two-dimensional jet. *J. Fluid Mech.* **255**, 323-47.
- [103] YULE, A.J. (1978) Large-scale structure in the mixing-layer of a round jet. *J. Fluid Mech.* **89**, 413-32.



## Résumé :

Le travail présenté dans ce mémoire est une contribution à l'étude de la transition vers la turbulence dans les écoulements cisailés ouverts. Les résultats issus de simulations numériques directes sont interprétés dans le cadre de la théorie de l'instabilité hydrodynamique.

Le premier chapitre est une introduction aux instabilités primaires et secondaires observées dans les jets et les couches de mélange. La méthode numérique retenue pour la présente étude est exposée dans le deuxième chapitre.

La dynamique d'un jet cylindrique homogène soumis à des perturbations longitudinales et azimutales est étudiée dans une troisième partie. On propose alors un scénario complet décrivant l'évolution du jet, en mettant l'accent sur les mécanismes d'induction tourbillonnaire actifs dans l'écoulement.

Dans le quatrième chapitre, une étude paramétrique met en évidence une instabilité secondaire tridimensionnelle du jet principalement contrôlée dans le régime linéaire par le nombre de Strouhal de l'instabilité primaire. Le régime non-linéaire de cette instabilité est ensuite abordé. On décrit alors la dynamique des modes azimutaux harmoniques au moyen d'équations d'amplitude, ainsi que la formation des tourbillons longitudinaux dans la tresse.

Le cinquième chapitre traite de la nature convective ou absolue des instabilités secondaires des couches de mélange planes. Il est montré qu'il existe des configurations d'écoulements pour lesquelles l'instabilité secondaire bidimensionnelle de la couche de mélange (appariement) est absolue alors que l'instabilité primaire (Kelvin-Helmholtz) est convective. Des résultats préliminaires concernant les instabilités secondaires tridimensionnelles sont présentés en fin de chapitre.

Le dernier chapitre fait la synthèse des résultats obtenus et expose les prolongements possibles de ce travail.

## Abstract :

The work presented in this dissertation is a contribution to the study of the transition to turbulence in open shear flows. Results from direct numerical simulations are interpreted within the framework of hydrodynamic stability theory.

The first chapter is an introduction to the primary and secondary instabilities observed in jets and mixing layers. The numerical method used in the present study is detailed in the second chapter.

The dynamics of homogeneous circular jets subjected to streamwise and azimuthal perturbations are investigated in the third chapter. A complete scenario describing the evolution of the jet is proposed with emphasis on the dynamics of vorticity within the flow.

In the fourth chapter a parametric study reveals a three-dimensional secondary instability mainly controlled in the linear regime by the Strouhal number of the primary instability. In the nonlinear regime the dynamics of the azimuthal harmonics are described by means of model equations and are linked to the formation of streamwise vortices in the braid.

The fifth chapter is dedicated to the convective or absolute nature of the secondary instabilities in plane shear layers. It is shown that there are flow configurations for which the two-dimensional secondary instability (pairing) is absolute even though the primary instability (Kelvin-Helmholtz) is convective. Some preliminary results concerning the three-dimensional secondary instabilities are presented at the end of this chapter.

The last chapter summarizes the main results and examines possible extensions of this work.

