

HC

Ecole Polytechnique
Laboratoire d'Hydrodynamique

THÈSE

présentée pour obtenir
le titre de Docteur de L'Ecole Polytechnique

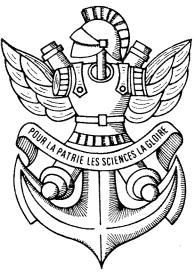
*Instabilités et solitons de phase à l'interface
de deux fluides non miscibles.*

par

Olivier POULIQUEN

Soutenue le 18 Juin 1993 devant le jury composé de :

J. M. Chomaz	
Y. Couder	
F. Dias	
E. Hopfinger	Rapporteur
P. Huerre	
P. Manneville	Rapporteur
R. Sadourny	
P. Tabeling	Président



Ecole Polytechnique
Laboratoire d'Hydrodynamique

THÈSE

présentée pour obtenir
le titre de Docteur de L'Ecole Polytechnique

*Instabilités et solitons de phase à l'interface
de deux fluides non miscibles.*

par

Olivier POULIQUEN

Soutenue le 18 Juin 1993 devant le jury composé de :

J. M. Chomaz	
Y. Couder	
F. Dias	
E. Hopfinger	Rapporteur
P. Huerre	
P. Manneville	Rapporteur
R. Sadourny	Président
P. Tabeling	

Remerciements

Cette thèse s'est déroulée dans le tout jeune laboratoire d'Hydrodynamique de l'Ecole Polytechnique, le LadHyX. Depuis les débuts où nous n'étions que quatre, jusqu'à aujourd'hui, l'ambiance a été des plus chaleureuse, et a contribué pour beaucoup au plaisir que j'ai pris à effectuer ce travail.

Patrick Huerre qui a encadré cette thèse, a su me faire partager son expérience de chercheur et m'a guidé avec le dynamisme qui le caractérise, m'encourageant dans les moments difficiles. Jean-Marc Chomaz a beaucoup participé à ce travail, me faisant profiter de ses conseils et de son enthousiasme. Tout deux m'ont fait découvrir avec passion et non sans une dose d'humour le monde de la recherche, et je ne sais comment leur exprimer ma reconnaissance.

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans la gentillesse et la vitalité d'Antoine Garcia qui s'est pleinement investi dans la réalisation des expériences, et de Thérèse Lescuyer qui en plus du travail de secrétariat que suppose l'installation d'un nouveau laboratoire, trouvait le temps de cuisiner des gâteaux. Je voudrais qu'ils trouvent dans ces quelques lignes l'expression de ma profonde amitié.

Je salue ici Stéphane Le Dizès, avec qui je partage un bureau et la condition de thésard, et qui a été tout au long de cette thèse un interlocuteur privilégié, tant pour des discussions scientifiques que pour parler "vacances".

Je remercie Pascal Voury pour ces coups de mains informatiques, ainsi que Pierre Branchet, Hervé Willaime, Antoine Sellier, et les stagiaires et visiteurs qui sont passés au LadHyX, qui ont donné vie au laboratoire.

Je dois un grand merci à Yves Lebras et René Cailleux de l'atelier du LMS ainsi qu'à Marc Dao pour leur aide technique, et à Vincent De Greef et Ali Bozetine qui m'ont aidé lors de mon arrivée à l'Ecole Polytechnique.

Je n'oublie pas que l'expérience a débuté au Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure dans l'équipe de Patrick Tabeling. Je le remercie ici d'autant plus qu'il est le premier à m'avoir donné envie d'étudier la mécanique des fluides. Virginie Emsellem, Olivier Cardoso, Jean Maurer ainsi que les membres de l'équipe d'Yves Couder m'ont accordé avec gentillesse un peu de leur temps chaque fois que je leur demandais conseil, moi qui étais "exilé sur le plateau" selon leur expression.

Je remercie tout particulièrement Stéphane Zalesky de m'avoir prêté son code numérique d'écoulement diphasique, et d'avoir consacré du temps à me l'expliquer.

Sommaire

Avant-Propos.....	1
Chapitre I: Introduction.....	3
Ecoulements ouverts, Ecoulements fermés	
Chapitre II: Dispositif expérimental.....	27
Chapitre III: Etude expérimentale d'une couche de mélange temporelle forcée.....	37
Introduction.....	39
" <i>Wave-number Selection and Phase Solitons in Spatially Forced Temporal Mixing Layers</i> ".	
(Publié dans Phys. Rev. Lett.).....	45
Commentaires.....	49
Chapitre IV: Analyse faiblement non linéaire de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz forcée.....	51
Introduction.....	53
" <i>Propagative Sine-Gordon solitons in the spatially forced Kelvin-Helmholtz instability</i> "	
(Préparé pour Physica D).....	59
Chapitre V: Ondes propagatives de Holmboe.....	109
Introduction.....	111
" <i>Propagating Holmboe waves at the interface between two immiscible fluids</i> "	
(Soumis à J. Fluid Mech.).....	113
Commentaires.....	155
Chapitre VI: Conclusions.....	161

Yves Couder, Frédéric Dias, Emil Hopfinger, Paul Manneville, Robert Sadourny et Patrick Tabeling ont bien voulu faire partie du jury de cette thèse, Emil Hopfinger et Paul Manneville ayant accepté d'en être les rapporteurs. Je les en remercie.

Enfin je voudrais lancer un clin d'oeil aux amis et proches que j'ai côtoyés aux cours de ces années et qui ont entendu parler plus d'une fois de l'avancement de cette thèse!

Avant-Propos

En 1883, Osborne Reynolds dans un article publié dans la revue "*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*" présente une expérience constituée d'un tube coudé aux deux extrémités et rempli de deux fluides non miscibles (Figure 1). Lorsqu'il incline ce tube par rapport à l'horizontale, les deux couches de fluide se mettent en mouvement en sens opposés et l'interface se déforme pour former des tourbillons que Reynolds décrit ainsi:

XXIX. *An Experimental Investigation of the Circumstances which determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels.*

By OSBORNE REYNOLDS, F.R.S.

Received and Read March 15, 1883.

Fig. 6.



Fig. 7.



Figure 1: Extraits de l'article original de O. Reynolds, 1883.

"...When one end was raised quickly by a definite amount, the opposite velocities of the two liquids, which were greatest in the middle of the tube, attained a certain maximum value, depending on the inclination given to the tube. When this was small no signs of eddies or sinuosities showed themselves; but, at a certain definite inclination, waves (nearly stationary) showed themselves, presenting all the appearance of wind waves. These waves first made their appearance as very small waves of equal lengths, the length being comparable to the diameter of the tube. When by increasing the rise the velocities of flow were increased, the waves kept the same length but became higher, and when the rise was sufficient the waves would curl and break, the one fluid winding itself into the other in regular eddies...".

L'apparition de ces tourbillons ou "sinuosités" caractérise d'après Reynolds, une transition d'un écoulement "direct" à un écoulement "sinueux". Son but dans cet article célèbre était d'étudier l'influence des différents paramètres physiques de l'écoulement sur cette transition, et de montrer qu'ils interviennent par l'intermédiaire d'un seul nombre qui porte maintenant son nom: le nombre de Reynolds.

Depuis 1883, la recherche a beaucoup progressé dans la compréhension des écoulements de fluides. De nombreux problèmes restent cependant encore ouverts, notamment concernant la transition vers la turbulence que Reynolds nommait transition "direct-sinueux". C'est dans cette problématique que se situe le travail présenté dans cette thèse, qui repose essentiellement sur une expérience de réservoir basculant similaire à celle de Reynolds. Un long réservoir rempli de deux fluides non miscibles est incliné par rapport à l'horizontale. Sous l'effet des forces de gravité le fluide le plus lourd descend, le léger monte créant un écoulement cisaillé qui se déstabilise et forme des tourbillons à l'interface entre les deux fluides. Près d'un siècle plus tard, cette expérience s'est avérée encore riche en phénomènes nouveaux, et elle nous a permis d'observer et d'étudier certains comportements des tourbillons générés par l'écoulement.

Chapitre I:

Introduction.



Figure I-1: Image satellite de l'océan Arctique. 27 Mars 1985 (d'après Tritton 1988)

Les écoulements turbulents, omniprésents dans la vie quotidienne, mobilisent de nombreux chercheurs depuis plusieurs décennies. L'importance des enjeux industriels, mais aussi l'extraordinaire richesse et beauté de ces écoulements expliquent le dynamisme des recherches effectuées dans ce domaine. La figure I-1 est une photo de l'atmosphère prise de satellite qui illustre parfaitement les problèmes fondamentaux posés par les écoulements turbulents. Ils sont le siège d'un désordre spatial où des tourbillons de toutes tailles coexistent et où les vitesses du fluide fluctuent considérablement d'un point à un autre, mais aussi d'un désordre temporel caractérisé par des modifications importantes de la structure de l'écoulement au cours du temps. Les études sur la turbulence s'attachent à essayer d'expliquer l'apparition d'une telle complexité et à la décrire.

On peut aborder l'étude des écoulements turbulents à l'aide de méthodes statistiques, en considérant les valeurs moyennes des vitesses et pressions, et leurs moments d'ordre supérieurs (Monin & Yaglom 1971, 1975). Ces études concernent essentiellement la *turbulence homogène et isotrope* pour laquelle les propriétés statistiques de l'écoulement sont identiques en tout point et dans toutes les directions. La principale difficulté rencontrée dans cette approche, est l'impossibilité d'établir à partir des équations de Navier-Stokes un jeu d'équations fermées régissant l'évolution des grandeurs statistiques: en effet l'équation du moment d'ordre n de la vitesse fait intervenir le moment d'ordre $n+1$. Seule l'introduction d'une hypothèse supplémentaire empirique permet de résoudre ce problème de fermeture.

En revanche des résultats importants ont pu être obtenus dès 1941 par Kolmogorov au moyen d'une approche *spectrale*. Des arguments dimensionnels permettent en effet de décrire le spectre d'énergie d'un écoulement turbulent tridimensionnel, et de prévoir ainsi la répartition de l'énergie aux différentes échelles. Le scénario suivant, aujourd'hui appelé cascade de Kolmogorov, peut être proposé: l'énergie est injectée aux petits nombres d'onde (gros tourbillons) puis transférée vers les petites échelles selon un spectre en $k^{-5/3}$, pour finalement être dissipée aux grands nombres d'onde

(petits tourbillons), à une échelle où la dissipation visqueuse devient prépondérante (Figure I-2).

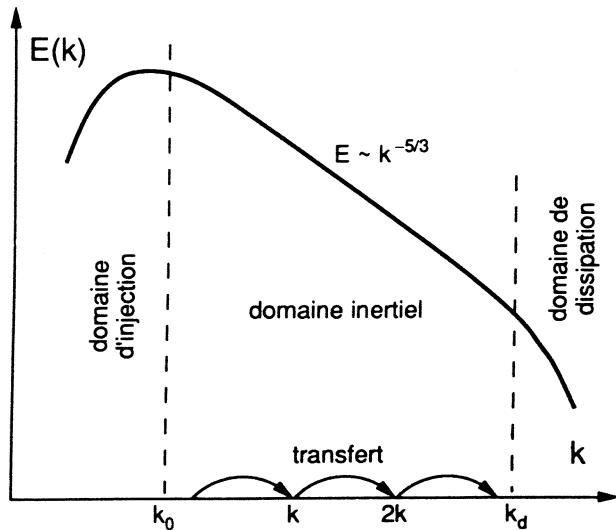


Figure I-2: Schéma de la cascade de Kolmogorov (d'après Manneville 1991).

Ces prédictions ont été confirmées dans de nombreuses expériences, notamment lors d'une campagne de mesures effectuée dans le canal "Discovery" sur la côte ouest du Canada où la loi en $k^{-5/3}$ a été vérifiée sur plusieurs décades (Grant *et al.* 1962). L'interprétation dans l'espace physique de la théorie spectrale de Kolmogorov reste cependant délicate, aucune information n'ayant été obtenue sur la présence ou la localisation de tourbillons. Cette lacune apparaît notamment dans certains écoulements cisaillés qui donnent naissance à des structures organisées restant cohérentes jusqu'à des taux de turbulence extrêmement élevés. Une théorie statistique ne peut alors suffire à décrire la dynamique des écoulements. Citons enfin pour montrer les limites de la théorie de Kolmogorov, une expérience récente de turbulence entre deux disques en rotation (Douady *et al.* 1992), dans laquelle la formation spontanée de filaments de vorticité très fins et très intenses a été observée. Ces résultats remettent en cause

l'image traditionnellement évoquée concernant la cascade en $k^{-5/3}$ de gros tourbillons se scindant en structures de plus en plus petites jusqu'à l'échelle visqueuse.

Dans l'espoir de comprendre la structure spatiale des écoulements turbulents, des recherches sur la *transition vers la turbulence* ont été développées abandonnant les hypothèse d'homogénéité et d'isotropie. Il s'agit alors de comprendre dans des configurations moins complexes les mécanismes de formation des structures tourbillonnaires, ainsi que l'apparition du désordre spatial et temporel. C'est dans ce cadre que se situe notre étude de l'expérience du réservoir basculant de Reynolds, grâce à laquelle l'apparition et la dynamique des tourbillons dans un écoulement cisaillé simple peuvent être étudiés.

De nombreuses recherches ont été réalisées sur la transition vers la turbulence, dont le principe consiste à soumettre un système en équilibre, par exemple une certaine quantité de fluide au repos, à une contrainte extérieure continue, par exemple un gradient de température ou un gradient de pression. Le système recevant continuellement de l'énergie de l'extérieur n'est plus isolé, et peut être maintenu dans un état hors équilibre. Si la contrainte est suffisamment forte, une forme de turbulence est alors observable. De tels systèmes permettent donc en augmentant graduellement la contrainte extérieure d'étudier la transition entre l'état d'équilibre et l'état turbulent, et notamment d'analyser les mécanismes responsables de l'apparition des structures tourbillonnaires. Dans notre expérience la contrainte est réalisée par la gravité qui, lorsque le tube est incliné, induit un gradient de pression et met les fluides en mouvement. Dans l'étude des systèmes hors équilibre, le concept d'*instabilité* s'est avéré fondamental (Drazin & Reid 1981). En effet lorsque la contrainte extérieure augmente à partir de zéro, l'état qui serait le prolongement continu de l'état d'équilibre n'est pas toujours observé bien qu'il soit une solution des équations du mouvement. Cet état s'avère être instable, c'est à dire non robuste à de petites perturbations, et le système peut alors bifurquer vers de nouveaux états stables qui brisent les symétries de l'écoulement initial en formant des structures tourbillonnaires.

Deux grandes classes de systèmes hors équilibre sont étudiées: les *systèmes fermés* et les *systèmes ouverts*. Les premiers se composent d'une quantité finie de fluide

contenue dans une boîte fermée et soumise à une contrainte extérieure. C'est le cas de la convection de Rayleigh-Bénard ou de l'expérience de Taylor-Couette. Dans ces systèmes les mécanismes d'instabilité qui donnent naissance aux structures dissipatives importent généralement peu. C'est essentiellement la désorganisation des structures, qu'elle soit issue d'une instabilité centrifuge ou de convection, qui est au centre des études sur les systèmes fermés. La motivation principale est de mettre en évidence différents scénarios menant au désordre temporel et spatial. L'approche est quelque peu différente dans l'étude des systèmes ouverts, qui sont les écoulements échangeant de la matière avec l'extérieur. Les particules de fluide pénètrent alors continuellement en amont du volume d'étude et en ressortent en aval sans être réinjectées. La contrainte extérieure prend généralement la forme d'un gradient de pression. Ces écoulements parmi lesquels on trouve les jets, les sillages, les couches de mélange, se rencontrent dans de nombreux processus industriels ainsi que dans des systèmes géophysiques et n'ont donc pas été étudiés dans l'unique but de comprendre l'apparition du désordre. Ce lien plus direct avec des écoulements réels explique en partie pourquoi les travaux effectués sur les systèmes ouverts s'attachent souvent plus que les études sur les systèmes fermés, à comprendre les mécanismes de formation des tourbillons en tenant compte de la structure particulière des écoulements.

Nous présentons succinctement dans la suite certains résultats obtenus pour chacune de ces deux classes d'écoulements, avant de décrire plus en détail les études effectuées dans notre expérience de réservoir basculant qui se situe à la frontière entre ces deux types de systèmes. Nous avons successivement abordé le problème par une approche de style "systèmes fermés" en nous intéressant à l'organisation des structures, et de style "systèmes ouverts" en étudiant le mécanisme de formation des tourbillons.

Systèmes fermés

Les deux systèmes fermés les plus étudiés sont certainement la convection de Rayleigh-Bénard et l'écoulement de Taylor-Couette. Dans le premier cas, du fluide contenu dans une boîte est chauffé par la paroi inférieure et refroidi par la paroi



supérieure. Dans la seconde expérience, le fluide prisonnier entre deux cylindres coaxiaux est soumis à un cisaillement réalisé par la rotation du cylindre intérieur. Dans les deux systèmes, l'augmentation de la contrainte extérieure conduit à une instabilité primaire qui se développe et sature sous l'effet des non-linéarités, donnant lieu à la formation de structures organisées (Figure I-3a,b). En convection thermique, lorsque le gradient de température imposé est suffisant, l'état conductif sans mouvement de fluide devient instable, et un état convectif formé d'un ensemble périodique de rouleaux apparaît (Figure I-3a). Dans le dispositif de Taylor-Couette, l'instabilité se manifeste par la création de tourbillons en forme de tores régulièrement disposés suivant l'axe des cylindres (Figure I-3b).

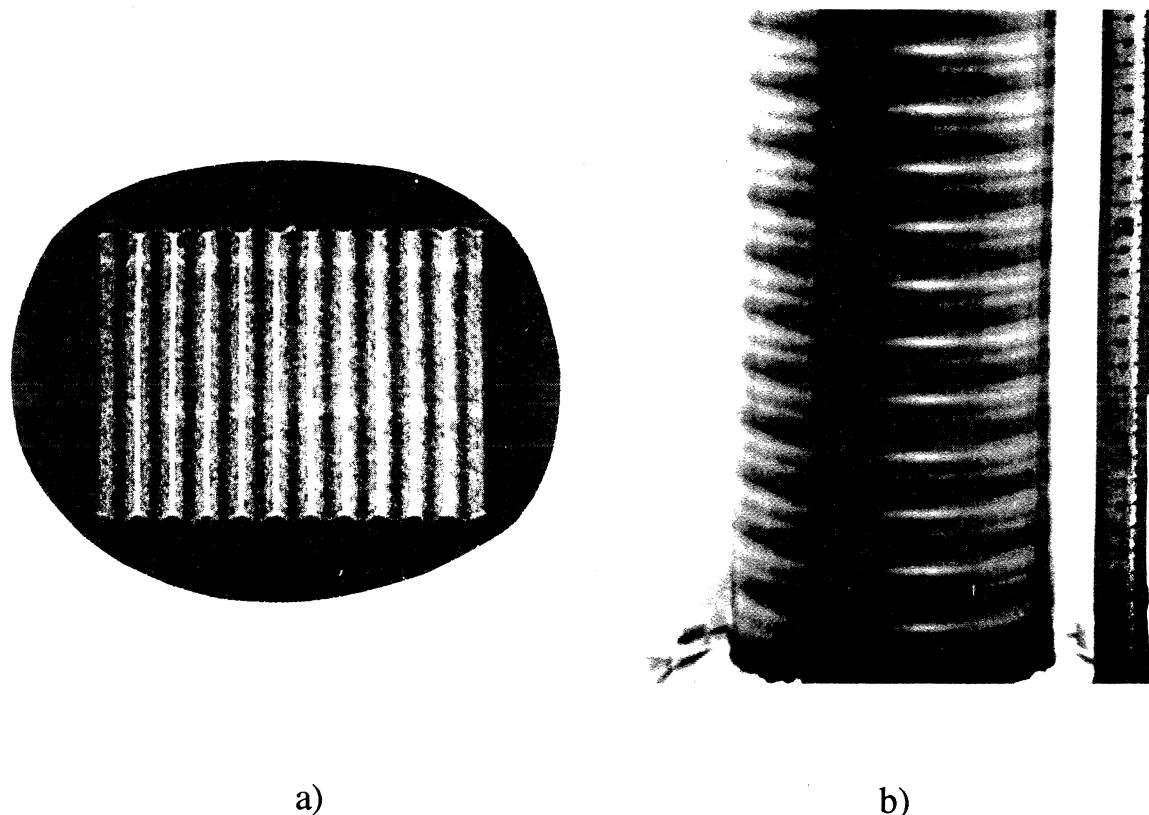


Figure I-3: a) Rouleaux convectifs de Rayleigh-Bénard dans de l'argon (Photo V. Croquette);
b) Rouleaux de Taylor-Couette (d'après Van Dyke, An Album of Fluid Motion 1982).

Les structures organisées observées ci-dessus sont souvent appelées structures dissipatives (Prigogine 1967), car elles résultent de l'équilibre entre l'énergie injectée et l'énergie perdue par dissipation visqueuse. Si l'on accroît encore la contrainte extérieure la dynamique du système devient de plus en plus complexe et désordonnée (Manneville 1991).

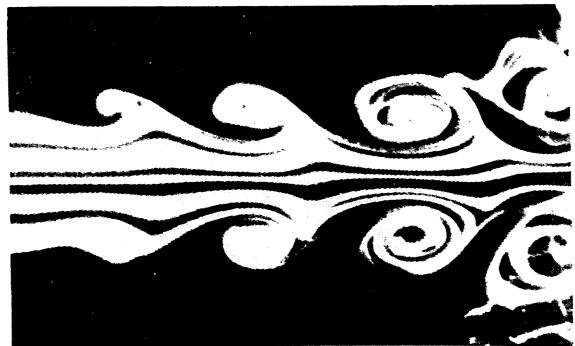
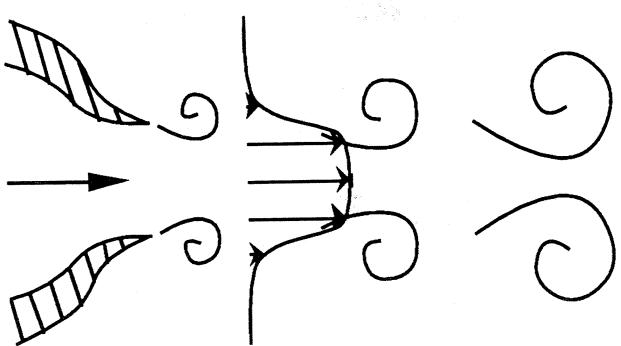
Des études ont tout d'abord été menées dans des systèmes confinés, afin de s'affranchir du désordre spatial et d'analyser les mécanismes d'apparition du désordre temporel. Des expériences de convection thermique ont par exemple été réalisées dans des petites boîtes ne contenant qu'une paire de rouleaux de convection (Libchaber & Maurer 1980). Les degrés de liberté spatiaux sont alors gelés par le confinement, et l'étude de l'évolution temporelle d'une donnée locale, par exemple la vitesse du fluide en un point, renseigne sur la dynamique temporelle du système entier. Des comportements chaotiques ont ainsi été mis en évidence lorsque la contrainte imposée au système était assez forte, et différentes routes vers le chaos ont été décrites (Bergé *et al.* 1984). Parmi celles-ci on peut citer le phénomène de doublement de période, caractérisé par l'apparition de sous-harmoniques de plus en plus nombreuses conduisant au chaos, ou bien l'intermittence temporelle pour laquelle le désordre apparaît par bouffées de plus en plus fréquentes lorsqu'on augmente la contrainte. Tous ces résultats ont apporté un support expérimental aux théories de "chaos déterministe" développées dans l'étude mathématique des systèmes dynamiques.

L'étape suivante a consisté à libérer une ou deux dimensions d'espace en considérant des boîtes beaucoup plus grandes que la taille caractéristique des structures dans une ou deux directions, rendant ainsi accessible l'étude de l'apparition du désordre spatial. Lorsque l'on augmente progressivement la contrainte extérieure, on observe tout d'abord un arrangement périodique des structures dissipatives (les rouleaux de convection par exemple) dû à l'instabilité primaire. Cet arrangement se désorganise ensuite sous l'effet d'instabilités secondaires, et le système devient finalement de plus en plus complexe donnant lieu à une dynamique des structures compliquée à la fois dans le temps et dans l'espace. On découvre alors une richesse de comportements impressionnante et une grande variété de motifs parmi lesquels des

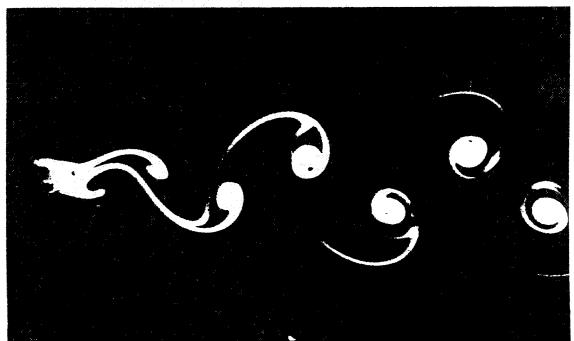
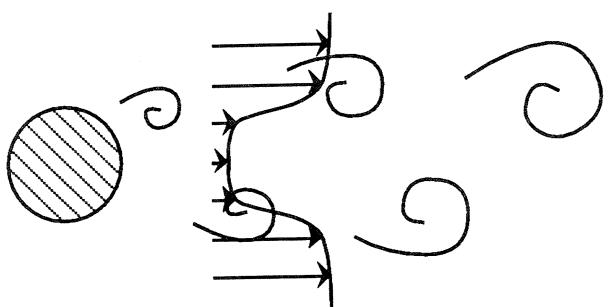
spirales, des solitons, des dislocations, des sources, des puits, dont la dynamique est essentiellement gouvernée par des effets non-linéaires. L'étude de cette perte de cohérence spatiale occupe depuis une dizaine d'années tout un pan de la Physique non-linéaire, motivée de plus par le caractère universel que semblent posséder ces motifs. Ils apparaissent en effet dans des domaines aussi variés que l'hydrodynamique, l'optique non linéaire ou la chimie. L'universalité des comportements non-linéaires a encouragé le développement de modèles théoriques macroscopiques faisant abstraction de la structure microscopique et se basant principalement sur les symétries du système concerné (Newell *et al.* 1992). Le jeu consiste à réduire les dimensions du problème à un ou plusieurs paramètres d'ordre et à écrire les équations non linéaires qui régissent leur évolution, équations dont la forme ne dépend que des symétries du système. Une telle réduction n'est toutefois valable que lorsque la contrainte imposée n'est pas trop importante. Dans le cas de la convection, le paramètre d'ordre est l'amplitude des rouleaux et l'équation d'amplitude associée est l'équation de Ginzburg-Landau. Ces modèles ont rendu compte de nombreuses observations expérimentales mais demeurent des théories faiblement non-linéaires.

Systèmes ouverts

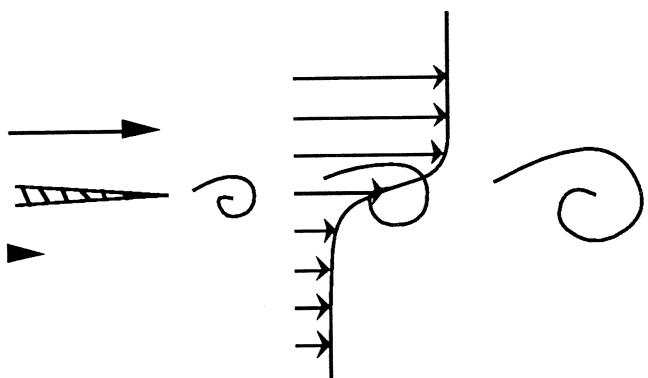
Les systèmes ouverts caractérisés par un échange de matière avec l'extérieur sont des écoulements plus spécifiquement hydrodynamiques. La figure I-4 illustre trois systèmes ouverts très étudiés: le jet (Figure I-4a) obtenu en injectant un fluide au sein d'un milieu au repos, le sillage (Figure I-4b) réalisé en disposant un obstacle immobile dans un écoulement uniforme, et enfin la couche de mélange (Figure I-4c) obtenue en injectant de part et d'autre d'une plaque plane semi-infinie deux fluides animés de vitesses différentes. Un point commun aux trois écoulements est la présence de cisaillement, c'est à dire de variations verticales de la vitesse longitudinale. Un cisaillement est généralement source d'instabilités et donne naissance à de gros tourbillons qui jouent un rôle important dans la dynamique des écoulements ouverts turbulents comme le montre la figure I-5 dont les photos 5a et 5b sont obtenues pour une couche de mélange à faible et grand nombre de Reynolds. Le résultat remarquable



a)



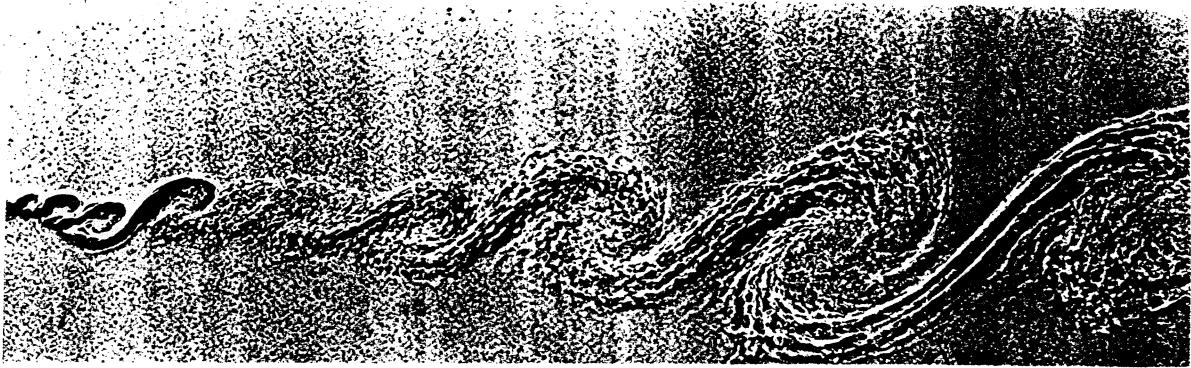
b)



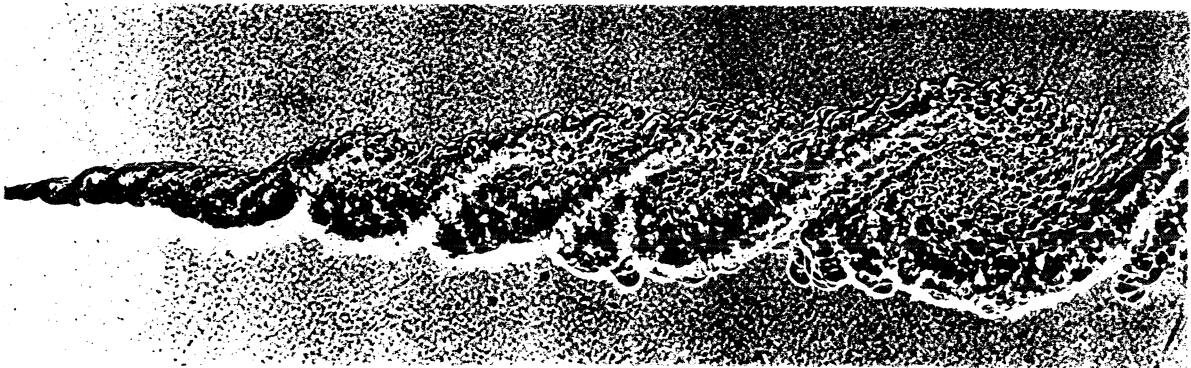
c)

Figure I-4: Exemples d'écoulements ouverts. a) Jet; b) Sillage derrière un cylindre; c) Couche de mélange.
(Photos d'après Van Dyke, An Album of Fluid Motion, 1982).





a)



b)

Figure I-5: Couche de mélange spatiale. Entre la photo a) et b) le Reynolds a doublé. (d'après Brown & Roshko 1974).

illustré par ces visualisations, est la similitude de la structure à grande échelle de l'écoulement à faible et fort taux de turbulence. Seule l'étendue du spectre des petites échelles diffère entre les deux photos, la figure 5b présentant une gamme de petites structures plus importante. Un découplage semble donc se produire entre les petites et grandes échelles, ces dernières restant cohérentes et bien définies dans un écoulement turbulent. Cette propriété remarquable est à l'origine du nom de "structures cohérentes" donné aux tourbillons observés dans les écoulements ouverts. Elle permet de plus d'envisager une approche déterministe de la turbulence, basée sur la description de l'évolution des structures tourbillonnaires. L'importance de l'enjeu a motivé de

nombreux travaux s'attachant à mieux comprendre la dynamique des structures cohérentes.

Afin de mieux saisir le mécanisme d'instabilité qui les génère, considérons le cas d'école illustré sur la figure I-6 d'une couche de mélange constituée de deux couches de fluide glissant l'une sur l'autre à des vitesses différentes mais uniformes dans chacune des couches. Une petite perturbation de l'interface induit une contraction des lignes de courant au-dessus des crêtes et une dilatation en dessous. Au niveau du sommet, le fluide supérieur est accéléré et le fluide inférieur ralenti, ce qui correspond d'après le théorème de Bernoulli à une baisse de pression au-dessus et une augmentation en dessous. La différence de pression induite par la perturbation tend donc à accentuer la déformation. L'écoulement est instable et la perturbation va croître pour former des tourbillons. Cette instabilité est associée au nom de Kelvin et Helmholtz, la première observation étant due à Helmholtz (1868) et la première description à Lord Kelvin (1871).

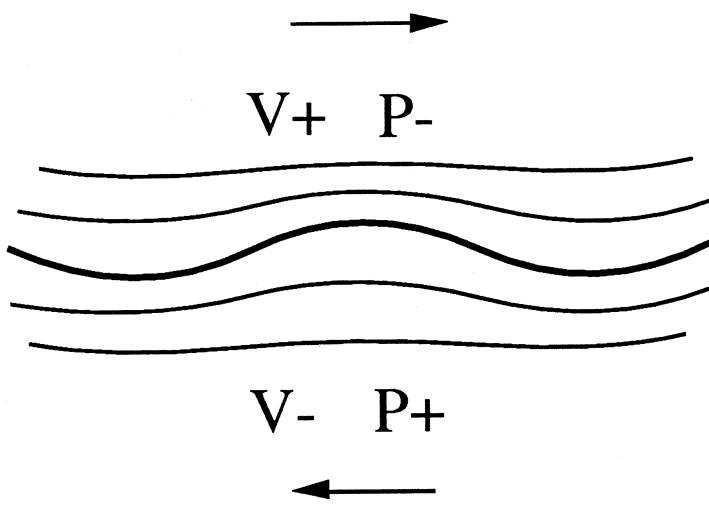


Figure I-6: Principe de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

Les structures observées dans un jet et un sillage résultent d'un mécanisme d'instabilité semblable. De nombreuses études à la fois analytiques et numériques s'intéressent à la stabilité des profils de vitesses réalistes indiqués sur la figure I-4, afin de décrire les mécanismes de croissance et de saturation des tourbillons dans les

différentes configurations de jets (Michalke 1984, Martin & Meiburg 1991), de sillages (Mattingly & Crimale 1972, Hannemann & Oertel 1989) et de couches de mélange (Ho & Huerre 1984). Notons que l'instabilité de Kelvin-Helmholtz n'est pas le seul mécanisme de formation de structures dans les systèmes ouverts. Dans des écoulements de couche limite ou de Poiseuille, l'instabilité n'est plus engendrée par des effets inertIELS comme la pression mais paradoxalement par la viscosité, ce qui rend ces écoulements plus délicats à étudier.

Lors de l'étude des instabilités d'écoulements ouverts, l'existence de conditions d'entrée s'est avérée importante pour la dynamique globale du système. Les perturbations inévitablement créées dans les installations expérimentales, sont en effet transportées et amplifiées par l'écoulement jusqu'au volume d'étude, pouvant ainsi fortement influencer l'évolution spatio-temporelle de l'écoulement. Les systèmes ouverts, contrairement aux systèmes fermés, sont souvent des problèmes aux conditions aux limites inconnues. C'est pour mieux appréhender le rôle de ces conditions aux limites que les notions d'instabilité convective et absolue ont été développées (Huerre & Monkewitz 1990). Lorsque l'on perturbe ponctuellement un écoulement, la perturbation peut soit décroître, le système est alors stable, soit croître mais être emportée par l'écoulement, le système est dit "convectivement instable", soit croître et se maintenir voir même remonter le courant, l'écoulement est alors "absolument instable". Si l'instabilité est convective, le système se comporte comme un amplificateur de bruit et les structures cohérentes observées résultent alors de la croissance des perturbations provenant de l'amont. Le jet homogène et la couche de mélange appartiennent à cette classe d'écoulement. Leur structure dépend du bruit d'entrée, et la fréquence de formation des tourbillons n'est pas précisément sélectionnée. Par contre si l'instabilité est absolue, les perturbations remontent le courant influençant ainsi les conditions d'entrée. Un phénomène de résonance peut alors être observé si la zone absolue est suffisamment étendue, et l'évolution de l'écoulement devient indépendant du bruit d'entrée. Un exemple de dynamique intrinsèque est observé dans le sillage d'un cylindre où des tourbillons alternés se détachent pour former une allée de von-Kàrmàn très régulière. Le système se comporte

alors comme un oscillateur possédant une fréquence propre bien déterminée. Les tentatives de description théorique de ces phénomènes (Huerre & Monkevitz 1990) ont fait apparaître le rôle fondamental joué par la dépendance spatiale des écoulements ouverts. La variation du profil de vitesse le long de l'écoulement due à la dissipation visqueuse est à l'origine des mécanismes de sélection de fréquence. Ce non-parallélisme des écoulements ouverts constitue une différence essentielle avec les systèmes fermés.

La frontière entre les deux classes d'écoulements devient moins marquée lorsque l'on considère des écoulements ouverts parallèles. Comme l'a montré pour la première fois Stuart (1960), une description en terme d'équation d'amplitude est alors possible, le paramètre d'ordre étant l'amplitude des tourbillons. Plus récemment des études ont porté sur la description de motifs observés dans l'organisation des structures cohérentes qui ne sont pas sans rappeler des travaux effectués sur l'arrangement des structures dissipatives dans les systèmes fermés. Ainsi les motifs en chevrons dans le sillage d'un cylindre de longueur finie ont pu être reproduits avec succès à l'aide d'équation d'amplitude de type Ginzburg-Landau (Park & Redekopp 1992, Albarède & Monkevitz 1992). D'autres observations, comme le déclenchement du phénomène d'appariement des tourbillons par la présence de dislocations (Yang *et al* 1993), ont montré la pertinence de la formulation en terme d'équation d'amplitude dans les écoulements ouverts.

L'expérience du réservoir basculant: un écoulement ouvert dans une géométrie fermée.

L'expérience du réservoir basculant se situe à la frontière de ces deux classes de systèmes. Elle réalise un écoulement cisaillé de type couche de mélange, dans lequel les particules de fluide ne traversent qu'une seule fois le volume d'étude, à condition de restreindre celui-ci à la région centrale de tube avant l'apparition des effets de bords. Cette propriété la relie à la classe des écoulements ouverts. Cependant la couche de mélange ainsi créée est "temporelle" par opposition aux couches de mélange "spatiales" obtenues en injectant deux fluides de part et d'autre d'une plaque plane. La

terminologie se rapporte à l'évolution de l'épaisseur δ de la couche de mélange, définie comme la largeur de la zone occupée par les structures cohérentes. Pour la couche de mélange classique dessinée Figure I-7b, l'épaisseur $\delta(x)$ est une fonction de la distance au bord de la plaque et ne dépend pas du temps. Dans le cas du réservoir basculant, toutes les structures ont, à un instant donné, approximativement la même taille. Dans la partie centrale du réservoir, l'épaisseur $\delta(t)$ est donc une fonction du temps uniforme dans l'espace (Figure I-7a) et le profil de vitesse est identique le long de l'écoulement. Dans l'expérience du réservoir basculant, on s'affranchit des problèmes spécifiques des écoulements ouverts liés au non-parallélisme, et on réalise un système invariant par translation dans l'espace, se rapprochant ainsi des études sur les systèmes fermés.

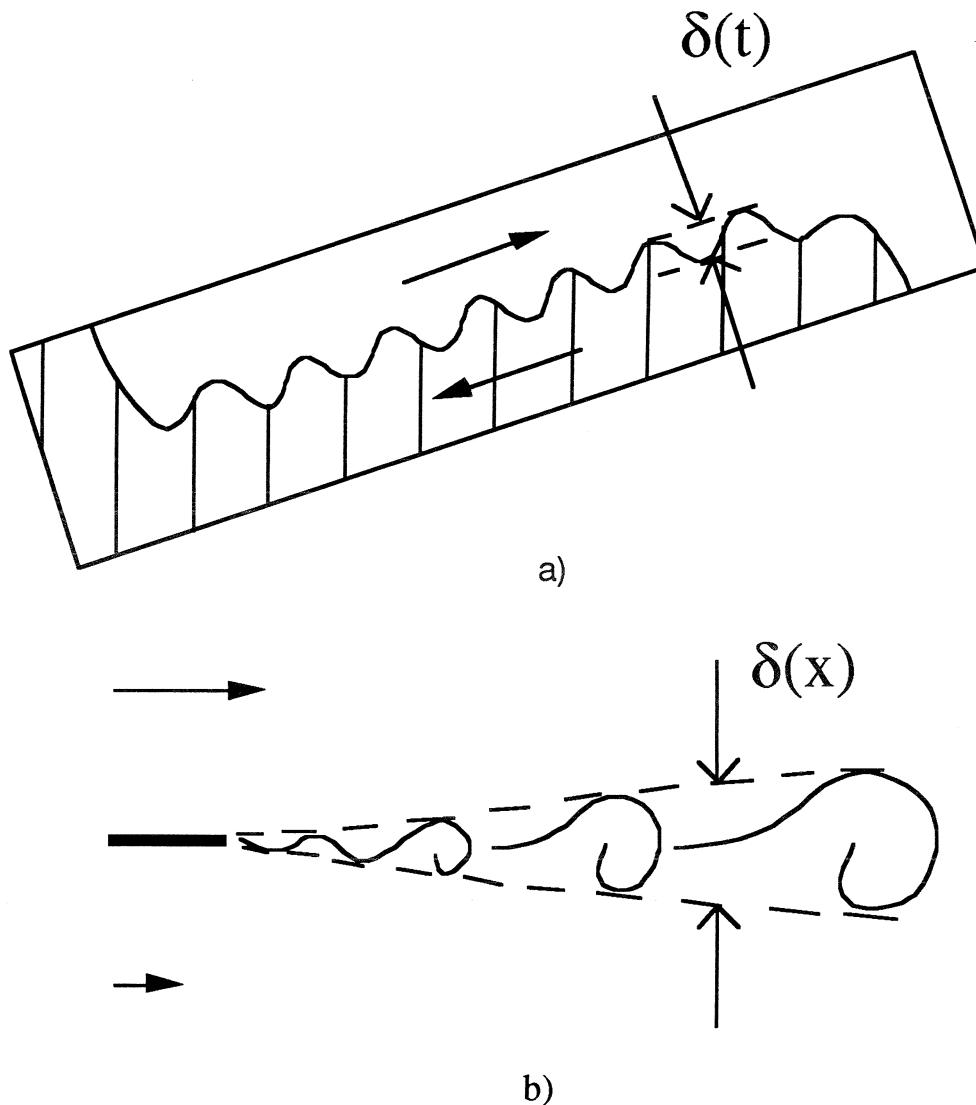


Figure I-7: a) Couche de mélange temporelle; b) Couche de mélange spatiale.

La contrepartie de cette double appartenance est le caractère transitoire de l'écoulement. Créer un écoulement ouvert dans une géométrie fermée implique nécessairement un temps de manipulation limité. L'écoulement parallèle est un état "fugace" du système, et l'expérience se termine à l'arrivée des ressauts hydrauliques provenant des extrémités du réservoir. Contrairement aux expériences de couches de mélange spatiales ou de convection, des mesures en continu sont donc impossibles. Le temps d'observation disponible s'est toutefois avéré suffisant pour mettre en évidence des phénomènes nouveaux.

Il convient de souligner que les couches de mélange temporelles ne sont pas uniquement un artifice de laboratoire, mais qu'elles se rencontrent dans de nombreuses situations géophysiques. Les mouvements mis en jeu dans l'océan et l'atmosphère s'effectuent sur des échelles de longueur telles que les écoulements peuvent localement être considérés comme parallèles. Des configurations de couche de mélange temporelle se rencontrent alors lorsque deux couches de fluides, généralement de densités différentes, glissent l'une sur l'autre. En océanographie par exemple, différentes mesures et observations ont montré que la turbulence apparaissait par bouffée provenant de la formation de tourbillons. La thermocline peut ainsi présenter des rangées régulières de structures spiralées (Figure I-8, Wood 1968).

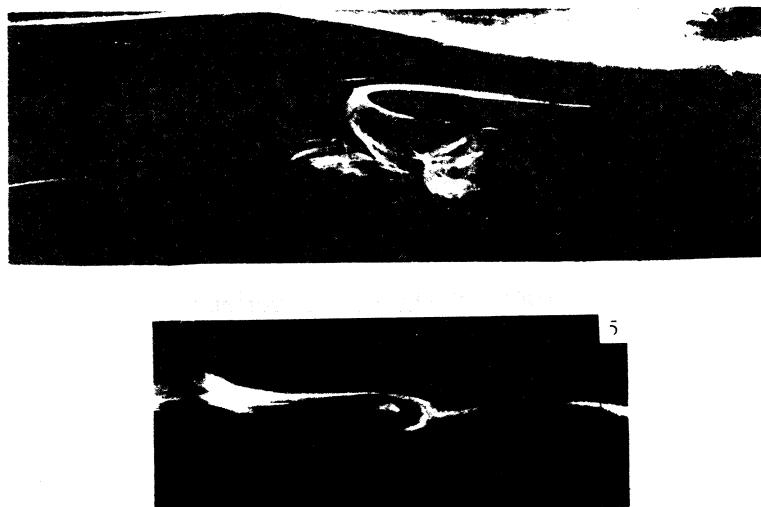


Figure I-8: Rouleaux observés dans la thermocline d'été en Méditerranée près de Malte par injection de colorant (d'après Wood 1968).



Figure I-9: Rouleaux de nuages près de Denver au Colorado. (d'après Drazin & Reid 1981)

Dans l'atmosphère, la jonction de couches d'air de températures et vitesses différentes, peut donner lieu à des phénomènes semblables visualisés sur la Figure I-9 par la présence de nuages. Les tourbillons présents dans les écoulements géophysiques contribuent de façon significative au transport de quantité de mouvement, de température ou de polluants, ce qui a motivé de nombreuses études sur les couches de mélanges stratifiées.

Dans cet esprit, Thorpe en 1968 a "exhumé" l'expérience de Reynolds, et a proposé le montage du réservoir basculant pour étudier la formation des tourbillons dans un fluide stratifié cisaillé. Exception faite de son article de 1969, il utilisa deux fluides miscibles: de l'eau et de l'eau salée. Thorpe dans un premier temps a effectué grâce à ce dispositif des mesures du seuil et des taux de croissance de l'instabilité (Thorpe 1971). Il s'est ensuite intéressé à la saturation non-linéaire des rouleaux et à l'apparition de la

turbulence à deux dimensions (Thorpe 1973), et à trois dimensions dans un réservoir plus large (Thorpe 1985).

Des études théoriques ont été menées sur la stabilité des couches de mélange temporelle stratifiées (Holmboe 1962, Hazel 1972, Maslowe 1973) documentées par des simulations numériques nombreuses s'attachant à comprendre la saturation en amplitude des rouleaux (Peltier *et al.* 1977, Klassen & Peltier 1985, Smyth *et al.* 1988) et l'évolution non-linéaire qui en découle (Collins & Maslowe 1988, Klassen & Peltier 1991).

Toutes les recherches à caractère géophysique concernent des fluides continûment stratifiés. L'objet de cette thèse est l'étude d'une couche de mélange temporelle entre deux fluides non miscibles. Le profil de densité est discontinu et la tension d'interface présente entre les deux fluides joue un rôle déterminant dans le processus d'instabilité. Le dispositif expérimental est décrit dans le chapitre II.

Dans un premier temps, nous avons adopté une approche "systèmes fermés" en nous intéressant à l'organisation spatiale des structures qui apparaissent à l'interface des deux fluides, et plus précisément en étudiant les mécanismes de sélection de nombre d'onde. Nous avons notamment soumis la couche de mélange temporelle à une perturbation extérieure périodique réalisée en déformant régulièrement une des parois du réservoir. Cette étude est présentée dans le chapitre III où l'on montre que la compétition entre le nombre d'onde naturel de l'instabilité, et le nombre d'onde de forçage imposé par la perturbation, induit des phénomènes non linéaires intéressants. En particulier des solitons de phase dans l'organisation des structures ont été mis en évidence, phénomène qui n'avait, à notre connaissance, jamais été observé dans un écoulement cisallé.

Parallèlement à l'expérience, nous avons développé une théorie faiblement non linéaire de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz en présence d'un forçage, qui est décrite dans le chapitre IV. Les équations régissant l'évolution de l'amplitude de la déformation de l'interface y sont calculées et une analyse de la dynamique de phase du système est présentée, qui permet de démontrer l'existence de solitons de phase propagatifs résultant de la compétition de nombres d'onde.



Dans le chapitre V nous avons adopté une démarche plus proche des études précédemment effectuées dans les couches de mélange stratifiées. Nous nous sommes attachés à comprendre la formation d'ondes propagatives qui apparaissent à l'interface des deux liquides lorsque le tube est rabaisé à l'horizontale après inclinaison. Cette manœuvre permet de réaliser un cisaillement constant entre les deux fluides, alors qu'il augmentait avec le temps lorsque le réservoir était maintenu incliné. Dans ce chapitre, nous montrons à l'aide d'une étude linéaire sur un profil en lignes brisées que ces ondes proviennent de la présence de couches limites de part et d'autre de l'interface qui recule le seuil de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, et fait apparaître une instabilité propagative de Holmboe (1962). Un tel comportement propagatif avait été prévu et observé dans les couches de mélange continûment stratifiées entre deux fluides miscibles. Les résultats nouveaux présentés dans cette partie sont, d'une part l'étude théorique de l'influence de la tension d'interface qui a permis de mettre en lumière la continuité de la transition instabilité de Kelvin-Helmholtz - instabilité de Holmboe, et d'autre part des comparaisons quantitatives entre le modèle et l'expérience, rendues possibles grâce à l'homogénéité spatiale de l'écoulement créé dans le réservoir basculant.

Pour finir, le chapitre VI conclue cette thèse et présente des extensions possibles de ce travail.

Références

- ALBARÈDE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1992 A model for the formation of oblique shedding patterns and "chevrons" in cylinder wakes. *Phys. Fluids A* **4**, 744.
- BERGÉ, P. , POMEAU, Y. & VIDAL, C. 1984 *L'ordre dans le chaos, vers une approche déterministe de la turbulence*. Hermann, Paris.
- BROWN, G. L. & ROSHKO, A. 1974 On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.* **64**, 775.

- COLLINS, D. A. & MASLOWE, S. A. 1987 Vortex pairing and resonant wave interactions in a stratified free shear layer. *J. Fluid Mech.* **64**, 775.
- DOUADY, S., COUDER, Y. & BRACHET, M. E. 1992 Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 983.
- DRAZIN, P. G. & REID, W. H. 1981 *Hydrodynamic Stability*. Cambridge Univ. Press.
- GRANT, H. L., STEWART, R. W. & MOILLIET, A. 1962 Turbulence spectra from a tidal channel. *J. Fluid Mech.* **12**, 241.
- HANNEMANN, K. & OERTEL, H. Jr. 1989 Numerical simulation of the absolutely and convectively unstable wake. *J. Fluid Mech.* **199**, 55.
- HAZEL, P. 1972 Numerical studies of the stability of inviscid parallel shear flows. *J. Fluid Mech.* **51**, 39.
- HELMHOLTZ, H. VON 1868 Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. *Monats. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, **23**, 215.
- HO, C. M. & HUERRE, P. 1984 Perturbed free shear layers. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **16**, 365.
- HOLMBOE, J. 1962 On the behavior of symmetric waves in stratified shear layers. *Geophys. Publ.* **24**, 67.
- HOWARD, L. N., MASLOWE, S. A. 1973 Stability of stratified shear flows. *Boundary layer Met.* **4**, 511.
- HUERRE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473.
- KELVIN, LORD 1871 Hydrokinetic solutions and observation. *Phil. Mag.* **42**, 362.
- KLAASSEN, G. P. & PELTIER, W. R. 1985 The evolution of finite amplitude Kelvin-Helmholtz billows in two spatial dimensions. *J. Atmos. Sci.* **42**, 1321.
- KLAASSEN, G. P. & PELTIER, W. R. 1990 The influence of stratification on secondary instability in free shear layers. *J. Fluid Mech.* **227**, 71.

- LIBCHABER, A. & MAURER, J. 1980 Une expérience de Rayleigh-Bénard en géométrie réduite; multiplication, accrochage et démultiplication de fréquences. *J. Phys. Coll.* **41**, 241.
- MANNEVILLE, P. 1991 *Structures dissipatives, chaos et turbulence*. Aléa-Saclay, Gif-sur-Yvette.
- MARTIN, J. E. & MEIBURG, E. 1991 Numerical investigation of three-dimensionally evolving jets subject to axisymmetric and azimuthal perturbations. *J. Fluid Mech.* **230**, 271.
- MATTINGLY, G. E. & CRIMINAL, W. O. 1972 The stability of an incompressible two-dimensional wake. *J. Fluid Mech.* **51**, 233.
- MICHALKE, A. 1984 Survey on jet instability theory, *Prog. Aerospace Sci.* **21**, 159.
- MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. 1975 *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, Vol I. M.I.T. Press, Cambridge, Mass.
- MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. 1975 *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*, Vol II. M.I.T. Press, Cambridge, Mass.
- NEWELL, A. C., PASSOT, T. & LEGA, J. 1993 Order Parameter Equations for Patterns, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **25**, 399.
- PARK, D. S. & REDEKOPP, L. G. 1992 A model for pattern selection in wake flows. *Phys. Fluids A* **4**, 1.
- PELTIER, W. R., HALLE, J. & CLARK, T. L. 1977 The Evolution of Finite Amplitude Kelvin-Helmholtz Billows. *Geophys. Astrophys. Fluid dyn.* **10**, 53.
- PRIGOGINE, I. 1967 *Introduction to thermodynamics of irreversible processes*. Wiley, New-York.
- REYNOLDS, O. 1883 An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the Law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **174**, 935.
- SMYTH, W. D., KLAASSEN, G. P. & PELTIER, W. R. 1988 Finite amplitude Holmboe waves. *Geophys. Astrophys. Fluid dyn.* **10**, 53.

- STUART, J. T. 1960 On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part I. The basic behaviour in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **9**, 353.
- THORPE, S. A. 1968 A method of producing a shear flow in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **32**, 693.
- THORPE, S. A. 1969 Experiments on the instability of stratified shear flows: immiscible fluids. *J. Fluid Mech.* **39**, 25.
- THORPE, S. A. 1971 Experiments on the instability of stratified shear flows: miscible fluids. *J. Fluid Mech.* **46**, 299.
- THORPE, S. A. 1973a Turbulence in stably stratified fluids: a review of laboratory experiments. *Boundary Layer Met.* **5**, 95.
- THORPE, S. A. 1973b Experiments on instability and turbulence in a stratified shear flow. *J. Fluid Mech.* **61**, 731.
- THORPE, S. A. 1985 Laboratory observations of secondary structures in Kelvin-Helmholtz billows and consequences for ocean mixing. *Geophys. Astrophys. Fluid dyn.* **14**, 175.
- TRITTON, D. J. 1988 *Physical Fluid Dynamics*. 2nd edition, Clarendon Press, Oxford.
- VAN DYKE, M. 1982 *An Album of Fluid Motion*. Parabolic Press, Stanford.
- WOODS, J. D. 1968 Wave-induced shear instability in the summer thermocline. *J. Fluid Mech.* **32**, 791.
- YANG, R., BROWAND, F. K., COULLET, P. & HUERRE, P. 1993 A model of defect-induced pairing in mixing layers. *J. Fluid Mech.* **248**, 403.

Chapitre II:

Dispositif expérimental.



Le montage expérimental inspiré des expériences de Thorpe (1968) est représenté sur la figure II-1.

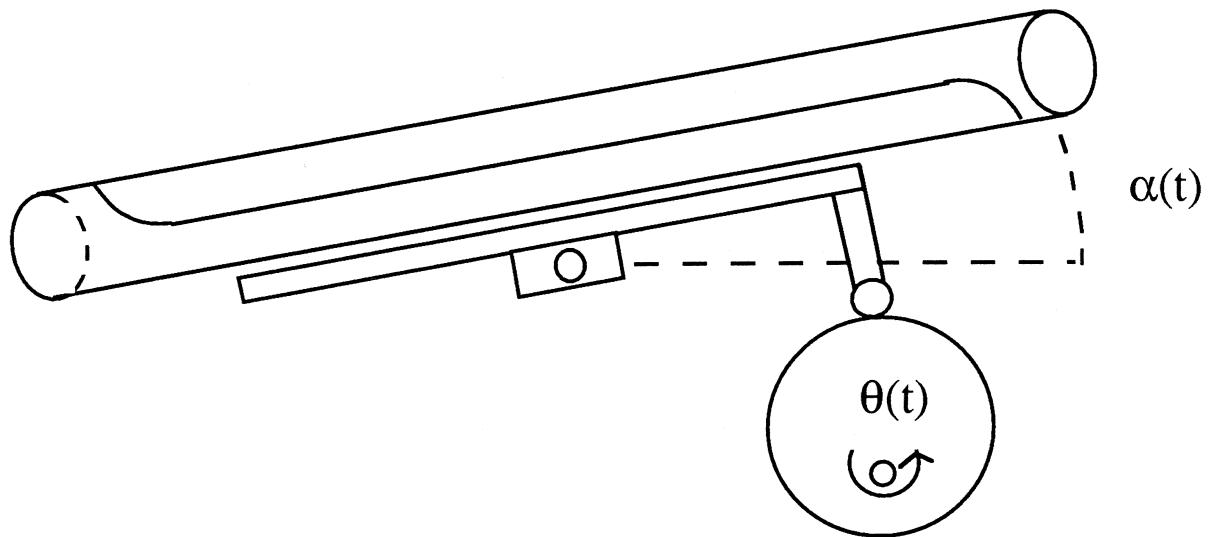


Figure II-1: Schéma du montage expérimental.

Il s'agit d'un tube cylindrique en verre de 2 m de long et 6 cm de diamètre, monté sur un axe de rotation et rempli en quantités égales de deux fluides non miscibles. Le réservoir a été choisi assez long (2 m) afin de retarder, lors de l'inclinaison, l'arrivée des ressauts hydrauliques provenant des extrémités, et ainsi obtenir un écoulement parallèle dans la partie centrale du réservoir pendant un temps suffisamment long pour permettre à l'instabilité de se développer.

Le choix d'un tube de section circulaire a été motivé par des raisons de commodité expérimentale. Un tube rond est non seulement plus facile à se procurer, mais permet surtout d'éviter l'utilisation de colles dans le montage expérimental. On s'affranchit ainsi des problèmes de compatibilité chimique entre la colle et les fluides, que nous aurions dû affronter dans la réalisation d'une cuve parallélépipédique. Les problèmes de pollution de l'interface se trouvent du même coup diminués, le nombre de produits chimiques en présence étant réduit au minimum.

Expérimentalement, les variations transverses de l'épaisseur des fluides dues à la section circulaire n'ont pas semblé influencer la dynamique des instabilités. Aucun effet tridimensionnel n'a été observé, et un bon accord entre les mesures expérimentales et une théorie bidimensionnelle basée sur des fluides d'épaisseur infinie a été trouvé comme nous le verrons dans le chapitre V. Cette relative robustesse des phénomènes à la forme du tube s'explique par le fait que l'influence des parois diminue exponentiellement avec l'épaisseur des fluides. Ainsi dans le tube de section circulaire, les effets des bords deviennent importants uniquement au voisinage de la ligne de contact entre l'interface et le tube, là où les deux couches de fluides sont les moins épaisses. Or en ces points la paroi du tube peut être considérée comme pratiquement verticale et joue alors le rôle d'une paroi latérale. Le choix d'un tube circulaire n'a donc pas représenté un obstacle à notre étude des instabilités de cisaillement entre deux fluides non miscibles.

Le choix des liquides a été un problème délicat, la difficulté provenant des nombreuses contraintes que nous imposait l'expérience. La première et non la moindre était que les fluides devaient être non miscibles. La seconde contrainte concernait la différence de densité entre les liquides. Elle devait être suffisamment faible afin de ralentir le mouvement relatif des deux couches lors de l'inclinaison, et pouvoir ainsi observer et étudier la dynamique des instabilités à l'aide de matériel vidéo classique. Elle ne devait cependant pas être trop faible, au risque de rencontrer d'importants problèmes de mouillage sur les parois. En effet lorsque les densités des deux fluides sont trop voisines, les effets de tension superficielle deviennent prépondérants, et le mouillage avec la paroi du tube au niveau de l'interface n'est plus régulier. L'interface au repos n'est alors plus plane, ce qui perturbe considérablement le développement de l'instabilité lors de l'inclinaison. Une troisième contrainte était de choisir des fluides peu visqueux, notre but étant d'étudier l'instabilité en régime de fluide parfait. Enfin nous devions tenir compte de la toxicité des produits, de leur caractère volatile et de leur compatibilité chimique avec les matériaux présents et notamment les joints.

Nous avons retenu principalement deux couples de fluides: Le premier est composé de tétrahydro 1-2-3-4 naphtalène pour le fluide léger, et d'eau salée pour le fluide dense.

Le second est constitué de kérosène, et d'un mélange d'alcool (80%) et d'eau (20%). Au cours des différentes études, de l'huile Silicone V100 est parfois mélangée en petite proportion au kérosène afin de changer la viscosité. Les différentes valeurs des propriétés physiques de ces fluides sont indiquées dans le tableau II-1. Nous avons utilisé le premier couple de fluide dans l'étude du chapitre III et le second dans les expériences du chapitre V. La principale différence réside dans la tension d'interface qui est beaucoup plus faible entre le mélange eau -alcool et le kérosène. Une faible tension d'interface nous a permis d'obtenir expérimentalement un régime d'instabilité permettant des comparaisons quantitatives avec les prédictions théoriques (Cf. chap. V).

	eau salée	Tetrahydro 1-2-3-4 naphtalène	80% alcool 20% eau	Kérosène
densité g/cm ³	1.018	0.97	0.848	0.78
viscosité cp	?	2.3	2.1	1.4
tension d'interface mN/m	37		5.2	

Tableau II-1: Propriétés physiques des liquides utilisés.

Les mesures de densité du tableau II-1 sont effectuées à l'aide d'un densimètre. Les viscosités ont été mesurées au moyen d'un viscosimètre à chute de bille. Ces dernières mesures se sont trouvées être très sensibles aux variations de température. Le laboratoire n'étant pas (encore) climatisé, nous effectuons les mesures de viscosité et les expériences dans le même après-midi, après avoir laissé les fluides adopter la température ambiante pendant la matinée. Durant les manipulations la température du laboratoire variait de moins de 1°C. Les mesures de tensions d'interface ont été réalisées au laboratoire par la méthode de goutte tombante qui consiste à mesurer le poids de la goutte qui tombe et à écrire qu'il est compensé par les forces de tension d'interface au moment du décrochement (Davies & Rideal p. 45). Cette méthode assez grossière donne toutefois une bonne idée de la tension superficielle. Pour des mesures plus fines nous

avons bénéficié de l'aide de François Sicoli du Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure, grâce à qui il a été possible de mesurer la tension d'interface par une méthode de goutte pendante consistant à interpoler la forme de la goutte. Bien évidemment ces mesures ne sont valables que pour une interface propre. Malgré les précautions que nous prenions pour nettoyer le tube, des impuretés apparaissaient assez vite. Nous changions donc les liquides avant chaque série d'expériences.

Deux types d'expériences ont été réalisés à l'aide de ce montage expérimental, dont les résultats seront présentés au chapitre III et chapitre V.

Dans les études du chapitre III, le tube initialement horizontal, est subitement incliné manuellement contre une butée préalablement réglée à la hauteur correspondant à l'inclinaison désirée. Il est maintenu dans cette position durant toute la durée de l'expérience (quelques secondes). L'écoulement obtenu est alors un écoulement cisaillé uniformément accéléré et la différence de vitesse ΔU entre les deux couches de fluides est une fonction du temps et peut s'écrire:

$$\Delta U = 2 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} g \sin(\alpha) t,$$

où ρ_1 (resp. ρ_2) représente la densité du fluide dense (resp. léger), g la gravité, α l'angle d'inclinaison et t le temps. L'angle α est typiquement compris au cours de ces manipulations entre 10° et 20° . Les vitesses atteintes par les fluides en fin d'expérience sont bien supérieures à la vitesse critique du seuil de l'instabilité (typiquement $\Delta U_c = 0.25$ m/s pour un angle de 15° au bout de 2s alors que $\Delta U_c = 0.13$ m/s). Les amplitudes de déformation de l'interface sont donc importantes ce qui nous a permis d'adopter une visualisation très simple par ombroscopie. Le tube est éclairé par derrière par un néon, et l'évolution de l'interface est filmée à l'aide d'une caméra CCD et enregistrée sur un magnétoscope sVHS. Les structures créées à l'interface apparaissent clairement du fait de la différence d'indice de réfraction des deux fluides.

Les expériences présentées dans le chapitre V sont réalisées en rabaisant le tube à l'horizontal après inclinaison afin d'obtenir un cisaillement constant entre les deux fluides. Un unique mouvement de va-et-vient est transmis au réservoir par l'intermédiaire d'une came décentrée mise en rotation par un moteur à courant continu asservi en vitesse (Fig. 1). La came n'effectue qu'un seul tour au cours d'une expérience. Les deux fluides, initialement au repos, accélèrent quand le tube s'incline, puis gardent une vitesse constante lorsque la came revient à sa position initiale. Le cisaillement final entre les deux couches est alors inversement proportionnel à la vitesse de rotation ω de la came:

$$\Delta U = 2 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} g \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin(\alpha(\theta)) d\theta .$$

Avec ce dispositif il est possible, en contrôlant précisément la vitesse de rotation du moteur, de réaliser des écoulements à faible cisaillement et d'étudier la dynamique au voisinage du seuil de l'instabilité.

Les déformations de l'interface sont alors faibles et une visualisation plus précise qu'une simple ombroscopie est nécessaire. Nous avons donc coloré le fluide le plus dense à l'aide de fluoresceine et éclairé le tube avec une nappe laser coupant le réservoir dans sa longueur (Fig. II-2). Sur l'image que l'on obtient, l'interface apparaît clairement comme la frontière entre la zone lumineuse correspondant au fluide dense, et la zone sombre correspondant au fluide léger. L'évolution spatio-temporelle de la déformation de l'interface observée est enregistrée par caméra CCD sur magnétoscope. Tout le traitement est ensuite réalisé sur les bandes enregistrées et consiste essentiellement en traitement d'images. Nous utilisons pour cela un Macintosh IIci équipé d'une carte d'acquisition Quickcapture de Datatranslation, et du logiciel Image [©]. Les sources de ce logiciel extrêmement puissant et convivial sont disponibles, ce qui nous a permis de développer nos propres fonctions, notamment pour extraire des images la forme de l'interface, et calculer les taux de croissances et vitesses de phase comme nous le verrons au chapitre V.



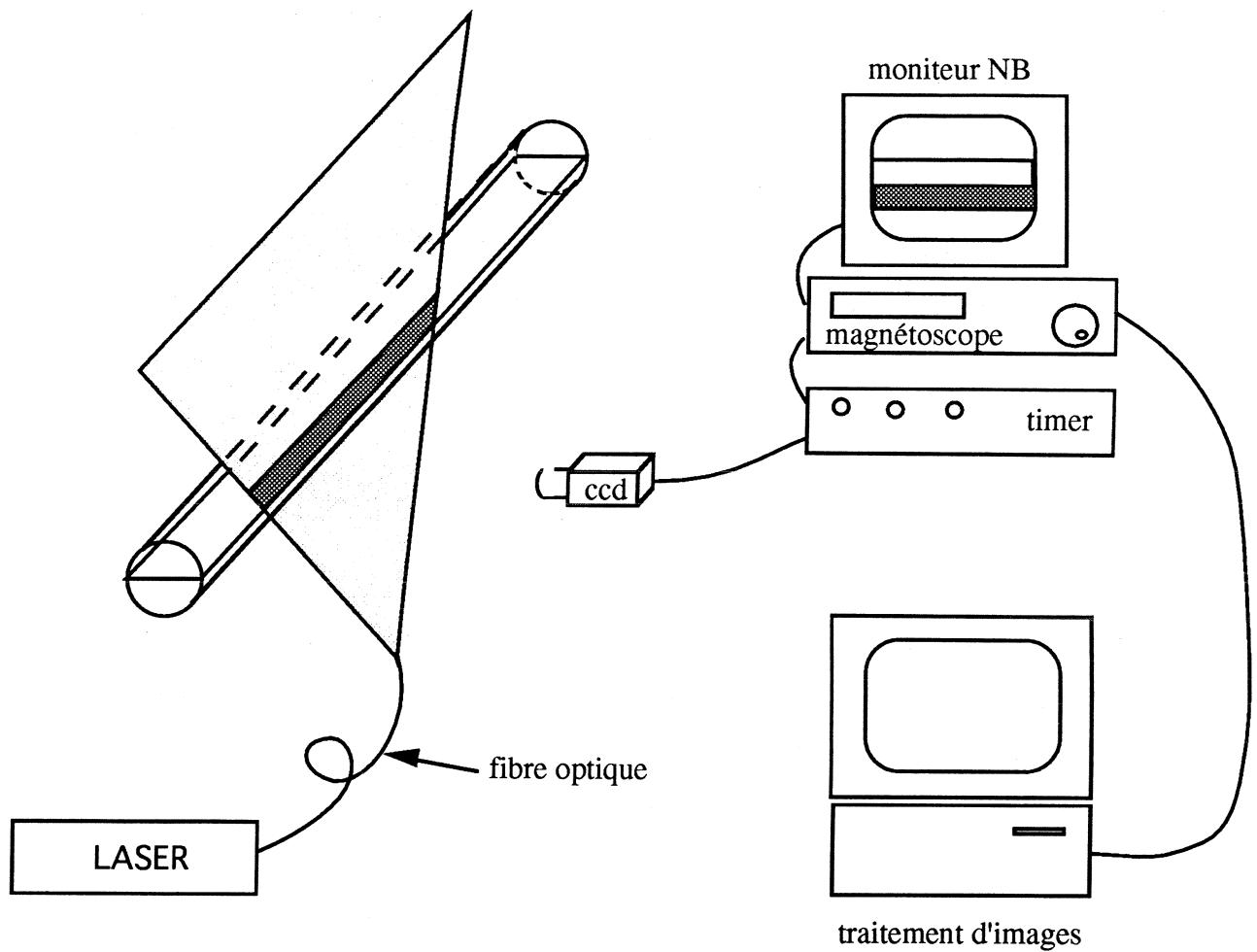


Figure II-2: Schéma de la visualisation et de la chaîne de traitement des données.

Outre les mesures de déformation de l'interface, la visualisation par fluoresceine nous a aussi permis d'avoir accès aux vitesses des liquides et aux épaisseurs de couches limites. Pour ce faire un trait vertical de colorant est tracé dans le fluide dense avant inclinaison. Lors de l'expérience, le trait est emporté par le fluide et se déforme du fait de la croissance des couches limites, ce qui permet de mesurer le cisaillement et l'épaisseur des couches diffusives (Cf. Chap.V).

Dans les deux types d'expériences d'écoulement cisailé accéléré ou non, nous nous sommes servis de petits obstacles métalliques pour imposer une perturbation périodique au système. Ils étaient disposés régulièrement le long de la paroi supérieure à l'intérieur du tube et maintenus de l'extérieur par des aimants. La longueur d'onde de forçage peut ainsi être aisément modifiée sans vider le tube. Ces picots étaient des quarts d'anneaux profilés de 3 mm d'épaisseur et c'est uniquement pour qu'ils trempent dans le liquide inorganique et ne rouillent pas que nous avons choisi de les placer au sommet du tube plutôt que sur la paroi inférieure.

Références

- DAVIES, J. T. & RIDEAL, E. K. 1963 *Interfacial Phenomena*, 2nd ed. Academic, New York.
- THORPE, S. A. 1968 A method of producing a shear flow in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **32**, 693.



Chapitre III:

Etude expérimentale d'une
couche de mélange
temporelle forcée.



Un problème important et encore mal compris dans l'étude des systèmes hors équilibre, concerne la sélection des motifs dessinés par les structures. En convection thermique par exemple, la question se pose de savoir comment, à la suite de l'instabilité primaire, les rouleaux s'organisent suivant un motif régulier à une longueur d'onde bien définie. Un moyen d'examiner cette sélection consiste à imposer au système une perturbation extérieure périodique. L'écoulement possède alors deux longueurs caractéristiques: la longueur d'onde naturelle et intrinsèque de l'instabilité primaire, et la longueur d'onde de forçage imposée par la perturbation. La dynamique résulte de la compétition entre les deux périodicités.

L'objet de ce chapitre est l'étude de la sélection de longueur d'onde dans la couche de mélange temporelle réalisée dans le réservoir basculant. En l'absence de forçage, une périodicité naturelle est mesurée pour la déformation de l'interface. L'existence d'une longueur caractéristique pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz peut se comprendre en analysant les facteurs stabilisants de l'écoulement. Le premier est la différence de densité entre les deux fluides qui stabilise les grandes échelles, une déformation de l'interface sur une grande longueur représentant une augmentation d'énergie potentielle importante. Le second est la tension d'interface qui empêche la formation de petites structures, dont la présence augmenterait considérablement l'énergie interfaciale. Il existe donc une longueur caractéristique de l'écoulement, la longueur capillaire, pour laquelle l'influence de ces deux effets stabilisants conjugués est minimum, et qui correspond à la longueur d'onde la plus instable de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz entre deux fluides non miscibles. Pour étudier plus en détail le mécanisme de sélection, nous avons introduit un forçage réalisé au moyen de petits obstacles régulièrement disposés le long de la paroi supérieure du réservoir. Ces derniers modifient légèrement les conditions aux limites de l'écoulement du fluide le long de la paroi, et réalisent une perturbation périodique dans l'espace. La périodicité



du forçage est aisément modifiée en déplaçant les obstacles. La lettre qui suit décrit différents comportements non-linéaires résultant de la compétition de nombres d'onde dans la couche de mélange temporelle forcée ainsi obtenue.

L'étude des couches de mélange forcées s'était limitée jusqu'alors aux couches de mélanges spatiales. Ho & Huang (1982) ont notamment essayé de contrôler la fréquence de formation des tourbillons au bord de fuite de la plaque à l'aide d'un forçage extérieur. La perturbation était réalisée en modulant périodiquement dans le temps le débit des fluides injectés en amont de la plaque de séparation. Il s'agit donc d'un forçage *temporel*, à la différence de notre expérience où le forçage est périodique dans l'espace. La couche de mélange spatiale est alors le siège d'une compétition entre la fréquence naturelle de détachement des tourbillons au bord de la plaque et la fréquence de forçage. Lorsque cette dernière f_f est voisine de la fréquence naturelle f_n , Ho & Huang ont montré que la formation des structures tourbillonnaires est entièrement contrôlée par la perturbation imposée, même lorsque son amplitude est faible. Cette efficacité du forçage s'explique par le caractère convectif de l'instabilité de la couche de mélange spatiale (Huerre & Monkewitz, 1985). Les tourbillons proviennent de l'amplification du bruit d'entrée et sont donc très sensibles à une modulation périodique effectuée en amont. Mais Ho & Huang dans leur article démontrent que cette méthode de forçage affecte aussi considérablement l'évolution de l'écoulement lorsque la fréquence imposée est inférieure à f_n . Par exemple lorsque f_f est voisin de $f_n/2$, la fréquence mesurée au bord de fuite de la plaque est égale à $2f_f$. L'écoulement adopte la fréquence multiple entier de la fréquence de forçage qui se rapproche le plus de la fréquence naturelle de l'instabilité. Ho & Huang résument le phénomène d'accrochage harmonique sur un diagramme de mode (Figure III-1). Ce diagramme représente le rapport f_r/f_f de la fréquence de réponse du système mesurée en bout de plaque, sur la fréquence de forçage, en fonction du rapport f_f/f_n . Quatre marches sont observées correspondant chacune à un mode d'accrochage. La réponse du système se résume par la formule $f_r = m f_f$ où m est un entier égal à la partie entière $E(f_n/f_f)$.

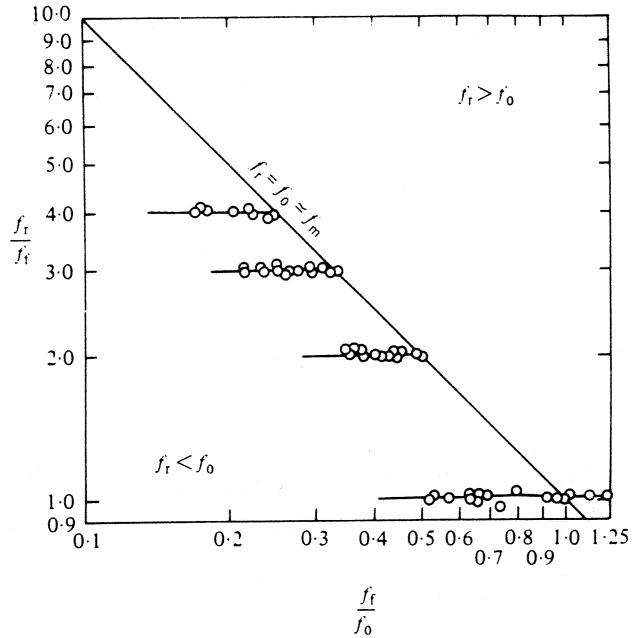


Figure III-1: Diagramme de mode d'une couche de mélange spatiale forcée temporellement.

(d'après Ho & Huang 1982)

L'autre résultat remarquable révélé par l'expérience de Ho & Huang est l'influence importante du forçage sur l'évolution non-linéaire de la couche de mélange loin de la plaque de séparation. La modulation périodique imposée en amont n'affecte pas seulement le développement initial des tourbillons, mais la dynamique globale de la couche de mélange comme l'illustre la figure III-2. La séquence de photographies est obtenue pour une fréquence imposée $f_f = f_n/3$, et elle montre comment la présence dans le forçage du sous harmonique 1/3 de la fréquence naturelle engendre la fusion de trois structures entre elles. De même, pour un mode d'accrochage deux, le forçage conduit à l'appariement des tourbillons. Ho & Huang observent ce phénomène de fusion à toute fréquence de forçage, le nombre de structures participant à l'interaction dépendant du mode d'accrochage. Notre expérience de réservoir basculant apparaît comme l'équivalent spatial de cette étude. L'écoulement subit une compétition de nombres d'onde au lieu de fréquences. Il n'est donc pas étonnant que de fortes analogies aient été trouvées entre ces deux expériences comme le rapporte la lettre qui suit.



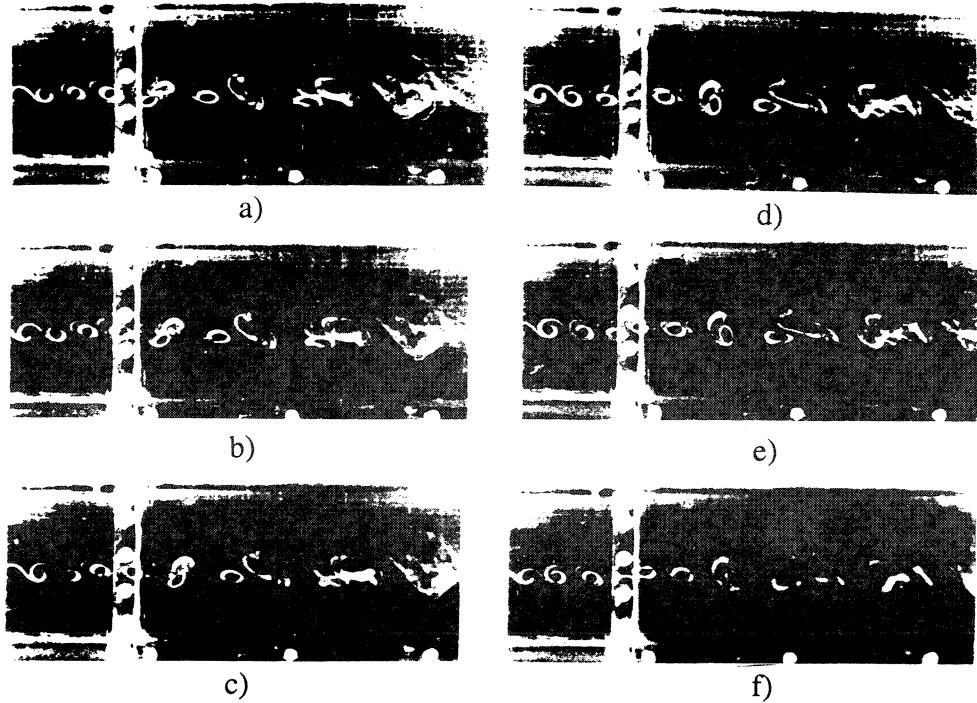


Figure III-2: Couche de mélange forcée au mode III. (d'après Ho & Huang, 1982)

Notons que l'écoulement créé dans le réservoir basculant est invariant par translation contrairement à la couche de mélange de Ho & Huang, ce qui suggère des analogies avec les expériences effectuées dans des systèmes fermés, et notamment avec les études de convection dans les couches de nématique forcées spatialement effectuées par Lowe & Gollub (1984). Leur montage expérimental se compose d'une couche de cristaux liquides nématiques confinée entre deux plaques, et soumise à un champ électrique normal au plan de la couche. Sous l'effet des forces électromagnétiques, une instabilité se développe, caractérisée par la formation de rouleaux de convection bien réguliers. La longueur d'onde naturelle λ_n sélectionnée est environ égale au double de l'épaisseur de la couche de fluide. Lowe & Gollub ont réalisé un forçage spatial en superposant au champ électrique uniforme un faible champ périodique dans l'espace de longueur d'onde λ_f (Lowe *et al.* 1983). En faisant varier l'épaisseur de la couche de fluide, ils ont exploré les différentes réponses du système lorsque le rapport des deux longueurs caractéristiques λ_f / λ_n varie.

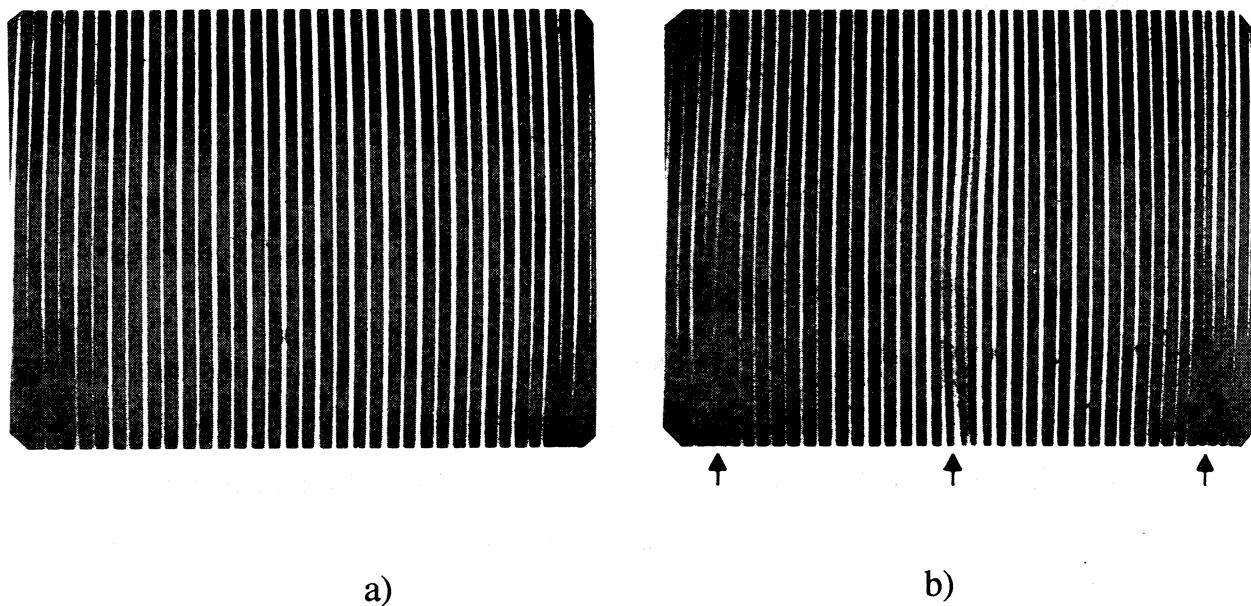


Figure III-3: rouleaux de convection nématique.a) état commensurable $\lambda_f/\lambda_n=0.941$; b) état incommensurable $\lambda_f/\lambda_n=0.866$. (d'après Lowe & Gollub, 1985).

Ces expériences ont démontré l'existence d'une transition commensurable-incommensurable lorsque la quantité λ_f/λ_n diminue. Lorsque ce rapport est proche de 1, le système est accroché, et Lowe & Gollub observent un état commensurable où le motif formé par les rouleaux est parfaitement régulier et suit la périodicité imposée (Figure III-3a). Lorsque λ_f/λ_n diminue, un motif quasi périodique apparaît, composé d'une série de contractions localisées (Figure III-3b). Cet état incommensurable peut être décrit comme une succession de solitons de phase formant un "escalier du diable" par analogie avec les problèmes d'absorption d'atomes sur une surface, étudiés en physique de la matière condensée (Bak 1980).

Dans l'expérience du réservoir basculant un lien a été établi entre ces résultats obtenus pour un système fermé, et les observations effectuées dans le système ouvert constitué par la couche de mélange spatiale de Ho & Huang.



Références

- BAK, P. 1982 Commensurate phases, incommensurate phases and the devil's staircase. *Rep. Prog. Phys.* **45**, 587.
- HO, C. M. & HUANG, L. S. 1982 Subharmonics and vortex merging in mixing layers. *J. Fluid Mech.* **119**, 443.
- LOWE, M. & GOLLUB, J. P. 1985 Solitons and the commensurate-incommensurate transition in a convecting nematic fluid. *Phys. Rev. A* **31**, 3893.
- LOWE, M., GOLLUB, J. P. & LUBENSKY, T. C. 1983 Commensurate and incommensurate structures in a nonequilibrium system. *Phys. Rev. Lett.* **51**, 787.

Wave-Number Selection and Phase Solitons in Spatially Forced Temporal Mixing Layers

O. Pouliquen, J. M. Chomaz, and P. Huerre

LADHYX, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

P. Tabeling

Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris CEDEX 05, France

(Received 15 November 1991)

The temporally growing shear layer produced by tilting a tube filled with two immiscible fluids of different density is spatially forced via modulations of one of the lateral boundaries. The competition between the forcing wave number k_f and the intrinsic wave number k_n leads to a mode diagram that is compatible with corresponding observations of spatial mixing layers. As the detuning is gradually increased, the interface displays stationary phase solitons that are indicative of the existence of incommensurate states.

PACS numbers: 47.20.Ft, 47.25.Ae, 47.25.Gk

In order to study pattern selection in unstable flows it is often convenient to examine the response of the system to an imposed perturbation. The effects of *spatial* forcing at a given wavelength have been investigated in the context of convective instabilities in nematic fluids by Lowe and Gollub [1]. The competition between the natural wavelength of the system and the externally applied wavelength then leads to a commensurate-incommensurate transition which is signaled by the appearance of phase solitons as shown by Coullet [2]. By contrast, in spatially developing open flows, *temporal* forcing is found to be very effective in controlling the downstream evolution of the vortical structures. For instance, spatially developing mixing layers formed by the merging of two streams of different velocity on either side of a splitter plate are extremely sensitive to an imposed temporally periodic excitation, as first demonstrated by Ho and Huang [3,4]. In this case, variations in the applied frequency give rise to frequency-locked regimes whereby the initial response frequency of the shear layer becomes an integer multiple of the forcing frequency. Furthermore, very low excitation levels can dramatically alter the downstream development of Kelvin-Helmholtz vortices and the spreading rate of the entire flow.

In the present investigation, we choose instead to examine the dynamics of *temporally evolving* mixing layers subjected to a *spatially periodic* excitation. In other words, the geometry is closed, as in convection experiments, and the instability mechanism is shear induced as in conventional spatial mixing layers. The basic experimental setup is the same as in the earlier studies of Thorpe [5,6]: A long tank filled with two immiscible fluids of different density is tilted at a finite angle from its initially horizontal position. A spatially uniform shear is produced under the action of gravity, which leads to the formation of Kelvin-Helmholtz billows. In our case, the flow is forced by periodically modulating the lateral boundaries along the stream. The main goal of the study is then to determine the response of the flow resulting from the competition between the natural wavelength as-

sociated with the Kelvin-Helmholtz instability and the externally imposed wavelength. The present observations indicate that the mode diagram of the flow exhibits the same locked regimes (commensurate states) as in spatial mixing layers. However, a closer investigation reveals the existence of incommensurate states characterized by the presence of phase solitons when the forcing wave number is slightly above the natural wave number. To our knowledge, these features extending over several characteristic wavelengths had not previously been observed in unstable shear flows.

The experimental setup is sketched in Fig. 1. A cylindrical glass tube 1.5 m long and 6 cm in diameter is filled with two immiscible fluids: salt water of density $\rho_1 = 1.018 \text{ g/cm}^3$ and 1,2,3,4-tetrahydronaphthalene of density $\rho_2 = 0.97 \text{ g/cm}^3$, the surface tension between the two fluids being 37 mN/m. Both fluid layers are chosen to be of equal depth in order to obtain stationary instability waves. When the tube is suddenly tilted at an angle α , typically less than 20°, an accelerating shear flow is created in the center of the apparatus, with the following density and streamwise velocity distributions:

$$\rho = \rho_1, \quad \mathbf{V}_1 = U(t)\mathbf{e}_x, \quad z < 0,$$

$$\rho = \rho_2, \quad \mathbf{V}_2 = -U(t)\mathbf{e}_x, \quad z > 0,$$

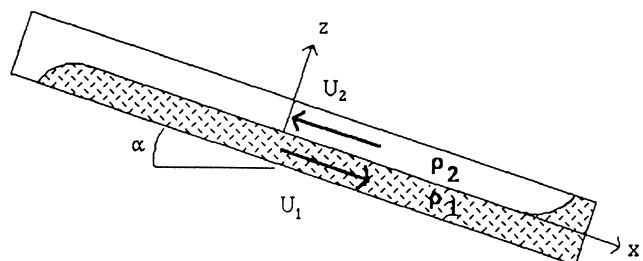


FIG. 1. Thorpe's experiment: A tank is filled with two fluids of density ρ_1 and ρ_2 and is inclined at an angle α to produce an accelerating shear flow in the center of the tube.



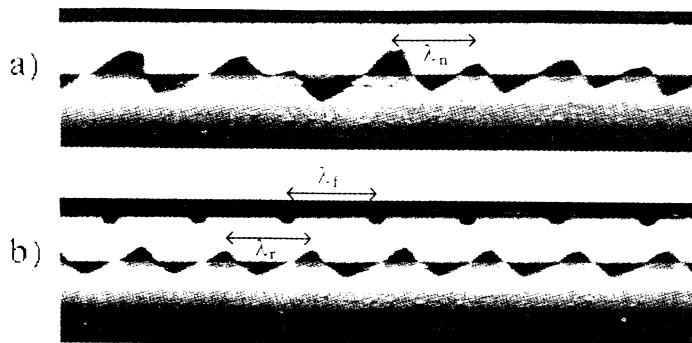


FIG. 2. Interface deformation 0.3 sec after the onset of instability, $\alpha=12.5^\circ$, $\lambda_n=4$ cm. (a) Unforced configuration. (b) Forced configuration $\lambda_f=\lambda_n=\lambda_r$; note the presence of a modulated top boundary.

where

$$U(t) \equiv \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} g \sin \alpha t.$$

The velocity difference $V_1 - V_2 = 2U(t)$ must exceed the critical value $\Delta U_c = 0.13$ m/s for the basic flow to become unstable. One then observes growing waves on the interface, of characteristic wavelength λ_n , which can be visualized by lighting the system from behind with a neon light (Fig. 2). The evolution of the interface deformation is recorded and the images are digitized in order to interpret the data. Periodic spatial forcing of wavelength λ_f may be applied by regularly placing 3-mm-high obstacles on the upper wall and maintaining them with magnets. The duration of the experiment is typically 1.5 sec for an angle $\alpha=10^\circ$. It is limited by the fact that hydraulic jumps move from the ends of the tank toward the center, as soon as the tube is tilted. It is also important to bear in mind that the evolution of the observed structures takes place over inertial time scales associated with the growth of the instability that are much shorter than viscous diffusion time scales. The flow can therefore be considered as purely inviscid in character, in contrast with convection experiments where dissipation is essential.

One of the obvious effects of spatial forcing is illustrated in Fig. 2. When the flow is unforced [Fig. 2(a)], the observed structures are irregularly spaced and of irregular height. If one neglects end effects, the system is invariant under continuous translations $x \rightarrow x + \text{const}$. There is no phase reference, and the development of the instability leads to the formation of a nearly periodic pattern. A natural wavelength λ_n can be defined as the average distance between neighboring wave crests over the extent of the apparatus. In the forced case [Fig. 2(b)], the flow is invariant under discrete translations $x \rightarrow x + n\lambda_f$, where λ_f is the forcing wavelength. By analogy with the work of Ho and Huang [3], one can define the response wavelength λ_r as the wavelength *initially observed* immediately following the onset of the instability. If λ_f is sufficiently close to λ_n , the system is spatially locked and one observes a perfectly regular pattern of wavelength

$$\lambda_r = \lambda_f.$$

The initial response characteristics of the interface are summarized in the mode diagram of Fig. 3. We have adopted the same format as Ho and Huang [3]: The ratio of response wave number k_r to forcing wave number k_f is plotted as a function of the ratio of forcing wave number k_f to natural wave number k_n . The symbols refer to different inclination angles as indicated. It should be emphasized that this diagram only determines the initial spatial periodicity of the interface immediately beyond the time of onset. When the external wave number is sufficiently close to the natural wave number one obtains a locked configuration at $k_r=k_f$ as previously discussed. Below a critical value of k_f/k_n , the response wave number k_r jumps discontinuously to $2k_f$ and remains fixed at this value for a finite range of forcing wave number k_f . Additional integer step increases in k_r/k_f are observed at lower values of k_f . Thus, the flow response near onset can be summarized by the single relation $k_r = mk_f$, where $m=1, 2, 3, 4$ is an integer that depends on the forcing wave number k_f . The diagonal line $k_r=k_n$

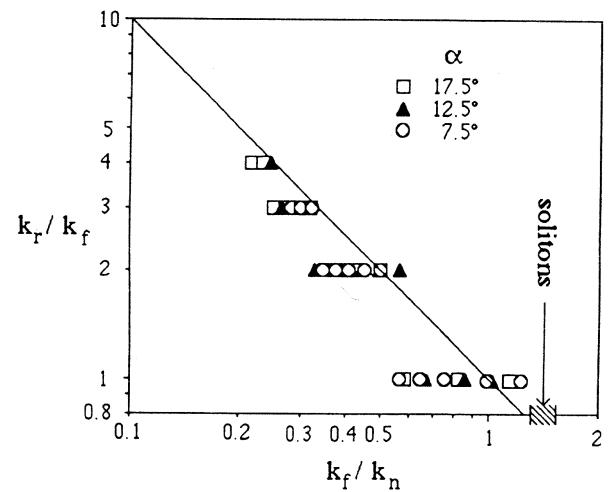


FIG. 3. Mode diagram of accelerating shear layer under forced conditions. See text for definitions of k_n , k_f , k_r . The diagonal line corresponds to $k_r=k_n$. Phase solitons are observed in the hatched region.

has also been drawn in Fig. 3. Note that the interface tends to select an integer multiple of k_f which is sufficiently close to k_n . It is also of interest to notice that the steplike nature of the response wave number curve is observed for all tilting angles, i.e., for all accelerations. However, the values of k_f at which steplike changes in k_r take place do depend on the particular angle α . This is to be expected since the natural wave number k_n decreases with increasing α . In order to take these variations into account the wave number k_f has been scaled with respect to k_n . The mode diagram of Fig. 3 is therefore valid for all angles α . It is the counterpart of the mode diagram in frequency space obtained by Ho and Huang [3] for spatially evolving mixing layers. One only needs to substitute the wave numbers k_r , k_n , and k_f for the frequencies f_r , f_n , and f_f .

The temporal development of the spatial pattern beyond onset is strongly affected, in modes $m=2, 3, 4$, by the presence of the subharmonic component $k_f = k_r/m$. As shown in Fig. 4, the initially periodic interface of wave number k_r exhibits at a very early stage in its evolution strong amplitude modulations at the forcing wave number k_f : The structures are stronger below the obstacles than at other streamwise locations [Figs. 4(b)–4(d)]. As in spatial mixing layers [3], this amplitude modulation ultimately leads to the formation of structures at the subharmonic wave number k_f . For instance when $m=3$, one observes the temporal evolution displayed in Figs. 5(a)–5(c): Three wave crests ultimately merge to form an arrangement of periodically distributed large structures at the subharmonic wave number $k_f = k_r/3$. When

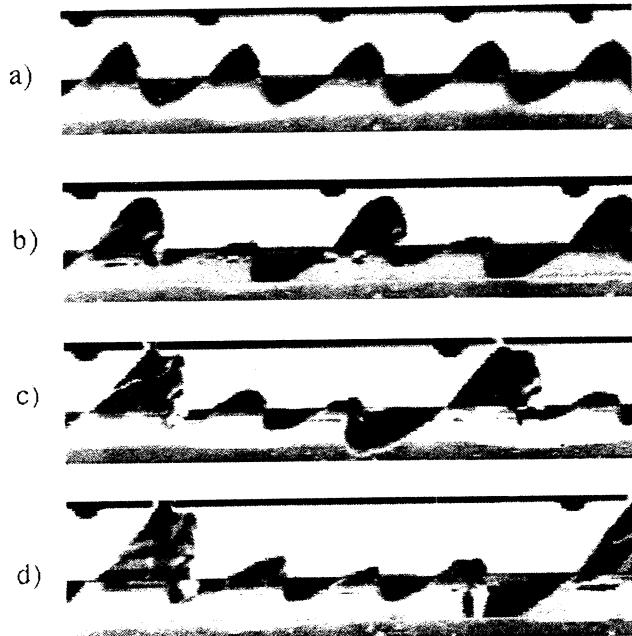


FIG. 4. Interface deformation 0.3 sec after onset of instability. $\alpha = 12.5^\circ$, $\lambda_n = 4$ cm. (a) $\lambda_f = \lambda_n$. (b) $\lambda_f = 2\lambda_n$. (c) $\lambda_f = 3\lambda_n$. (d) $\lambda_f = 4\lambda_n$.

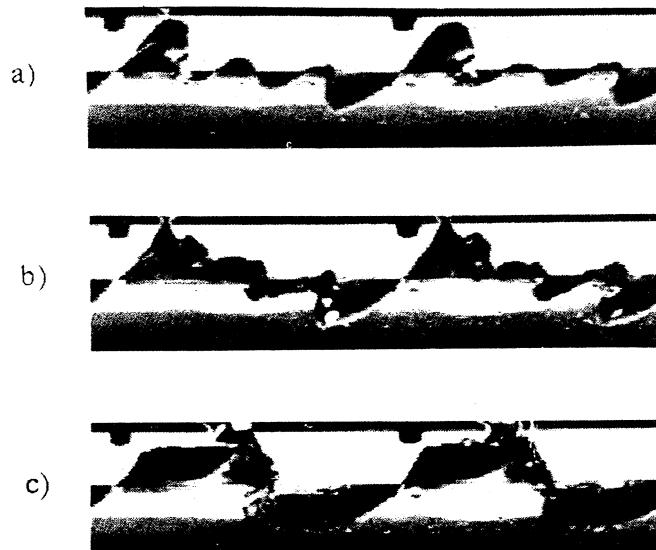


FIG. 5. Temporal evolution of interface. $\alpha = 12.5^\circ$, $\lambda_f = 3\lambda_n$. (a) $t = 0.36$ sec. (b) $t = 0.52$ sec. (c) $t = 0.76$ sec. The reference time $t = 0$ is the onset of instability.

$m=1$, no subharmonic modulations are present and a locked periodic stationary pattern is obtained. The merging of more than four waves ($m > 4$) is only observed in strongly accelerating flow for $\alpha > 10^\circ$. The forcing wave number k_f is then much lower than k_n , and it is only weakly unstable according to linear theory [7]. High forcing levels are therefore necessary to trigger its growth. In the present configuration, such high levels are achieved only for high accelerations where large velocities are induced above the obstacles. Here again the resulting dynamics is analogous to spatial mixing layers: At low frequencies, sufficiently high forcing levels produce the merging of many individual vortices into a single larger structure, the phenomenon being known as "collective interaction" [3].

There remains to examine the nature of the response when the forcing wave number exceeds the natural wave number, i.e., in the domain $k_f/k_n > 1$ of the mode diagram (Fig. 3). If k_f is within the range $1 < k_f/k_n < 1.2$, the interface deformation is still locked in the first mode at $k_r/k_f = 1$. For larger values of k_f , however, the flow response becomes spatially disordered: The competition between the wave number k_f and k_n gives rise to irregularly spaced structures of varying sizes. We have found no evidence of locked modes in the vicinity of $k_f/k_n = 2$. In this particular accelerating flow configuration, it appears that locked regimes are only possible when $k_f/k_n < 1.2$. Nonetheless interesting patterns have been detected in the small transition region of forcing wave numbers (hatched region of Fig. 3) separating the locked range $k_r/k_f = 1$ from the disordered regime. Within this domain of parameter space, the flow response maintains a certain degree of order: It is characterized by large re-



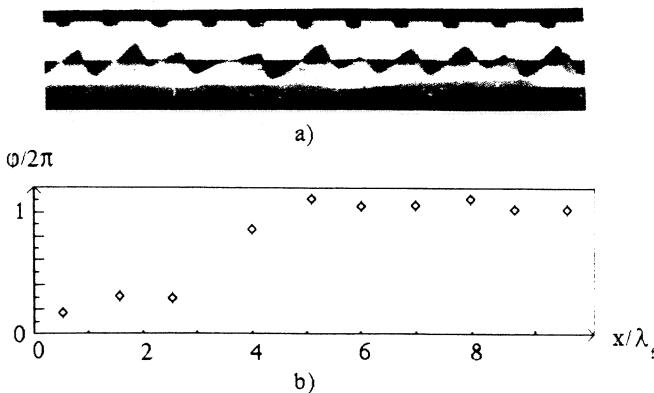


FIG. 6. Phase soliton, $\alpha = 12.5^\circ$, $k_f/k_n = 1.48$. (a) Interface deformation. (b) Phase $\phi/2\pi$ as a function of streamwise distance x .

gions of the commensurate state $k_r/k_f = 1$ that do not extend over the entire apparatus but are separated by zones of local expansion of the basic pattern. An example is given in Fig. 6(a): The interface follows the imposed spatial periodicity in the right and left areas of the image but a larger structure straddles two obstacles in the vicinity of $x/\lambda_f = 4$. The nature of this local imperfection can be ascertained by defining the phase function $\phi_n = 2\pi(x_n - n\lambda_f)/\lambda_f$ that specifies the location x_n of the n th wave crest with respect to the position $n\lambda_f$ of the n th obstacle. The variations of ϕ along the stream [Fig. 6(b)] reveal that the imperfection is associated with the existence of a 2π phase jump in the streamwise direction. As k_f is increased beyond $1.2k_n$, stationary solitonlike phase variations appear in a manner that is strongly reminiscent of the experimental observations in a convecting nematic fluid [1]. The existence of phase solitons has been shown to be a generic feature of commensurate-incommensurate transitions in variational continuous dissipative systems [2,8]. The theoretical formulation is based on a phase dynamics description of the evolution of the pattern: As the misfit between the forcing and natural wave numbers

is increased, a definite threshold exists beyond which the minimum of the potential energy no longer occurs at the commensurate state but at an incommensurate state composed of phase solitons. These theoretical results pertain to dissipative systems and are not applicable in the present context. We have argued that, in the tilting tank experiments, viscous dissipation is negligible over the time scales involved and the observed dynamics are essentially conservative. Yet no oscillatory regimes have been observed, as is usually the case in conservative systems. This is probably due to the fact that energy is being continuously injected into the disturbance field through the accelerating shear, thereby masking the conservative nature of the dynamics. The role played by acceleration has not been entirely elucidated and work is in progress to analyze the constant shear case in which the tank is brought back to its initial position.

The authors wish to thank Pierre Coullet and Buck Danny for initially introducing one of us (P.H.) to the world of phase dynamics. This work is supported by the Direction des Recherches, Etudes et Techniques (DRET), and by an award of the Stichting Fund of Schlumberger Industries.

- [1] M. Lowe and J. P. Gollub, Phys. Rev. A **31**, 3895 (1985).
- [2] P. Coullet, Phys. Rev. Lett. **56**, 724 (1986). For a review of commensurate-incommensurate transitions, see P. Bak, Rep. Prog. Phys. **45**, 597 (1982).
- [3] C. M. Ho and L. S. Huang, J. Fluid Mech. **119**, 443 (1982).
- [4] For a review of free shear layers, see C. M. Ho and P. Huerre, Annu. Rev. Fluid Mech. **16**, 365 (1984).
- [5] S. A. Thorpe, J. Fluid Mech. **32**, 693 (1968).
- [6] S. A. Thorpe, J. Fluid Mech. **39**, 25 (1969).
- [7] P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability* (Cambridge Univ. Press, New York, 1981).
- [8] P. Coullet and P. Huerre, Physica (Amsterdam) **23D**, 27 (1986).

Commentaires

L'expérience du réservoir basculant a permis de mettre en évidence la formation de solitons de phase lorsque le nombre d'onde de forçage est supérieur au nombre d'onde naturel. A la suite de ces observations, on peut légitimement se demander ce qu'il advient d'une couche de mélange spatiale lorsqu'elle est forcée à une fréquence supérieure à la fréquence naturelle de détachement des tourbillons. Dans leur article de 1981, Ho & Huang décrivent uniquement le comportement de l'écoulement soumis à un forçage sous-harmonique, c'est à dire pour une fréquence de forçage inférieure à la fréquence naturelle, et n'explorent pas l'autre côté du diagramme de mode. La compétition des fréquences dans cette région du paramètre du forçage pourrait donner lieu à des solitons de phase temporels, les tourbillons se détachant à la fréquence de forçage pendant un temps fini, se désynchronisant ensuite durant la formation de quelques structures, pour se raccrocher de nouveau sur la fréquence de la perturbation imposée.



Chapitre IV:

Analyse faiblement non linéaire de l'instabilité de Kelvin- Helmholtz forcée.



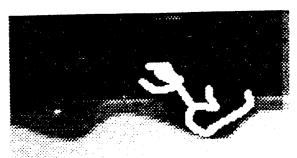
Les expériences décrites précédemment ont montré que la présence d'un forçage extérieur peut influencer considérablement la dynamique non-linéaire de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. L'objet de ce chapitre est de décrire et d'étudier le rôle de ce forçage au moyen d'une analyse faiblement non-linéaire.

Dans les systèmes hors équilibre, les structures résultant de l'instabilité ont une amplitude d'autant plus grande que l'énergie injectée dans le système est importante. Or aux amplitudes élevées, la dynamique est fortement non linéaire, et l'on ne sait pas dans l'état actuel des connaissances, décrire théoriquement l'évolution du système. Par contre, lorsque le paramètre de contrôle qui mesure la contrainte extérieure appliquée au système, est voisin de sa valeur critique au seuil d'apparition des structures tourbillonaires, les amplitudes de saturation sont faibles. La dynamique au seuil de l'instabilité est donc faiblement non linéaire, et une description théorique en terme d'équation d'amplitude est envisageable.

Prenons l'exemple de la convection de Rayleigh-Bénard. Dans ce système dissipatif, le paramètre de contrôle de l'instabilité est le nombre de Rayleigh R , proportionnel à la différence de température entre les deux plaques. Lorsqu'il devient supérieur à une valeur critique R_c , des rouleaux de convection apparaissent. Cette transition d'un état conductif à un état convectif peut se comprendre à l'aide d'une analyse linéaire en étudiant l'évolution d'une perturbation de la forme $e^{\sigma t + ikx}$. La relation de dispersion reliant le taux de croissance σ au nombre d'onde k s'écrit au voisinage du seuil de l'instabilité, sous la forme :

$$\sigma = \mu - (k - k_c)^2, \quad (1)$$

où $\mu = (R - R_c)$ mesure l'écart au seuil. Lorsque $\mu < 0$ le taux de croissance σ est négatif quel que soit le nombre d'onde, et l'écoulement est stable vis à vis de petites perturbations infinitésimales. Lorsque μ devient positif, un nombre d'onde critique k_c se déstabilise en premier, suivit d'une bande continue de nombres d'onde, d'autant plus large que l'on s'écarte du seuil, comme l'indique la figure III-1 qui représente la courbe neutre séparant dans le plan $k-\mu$ la région stable de la région instable. Les



perturbations croissent alors exponentiellement et finissent par saturer sous l'effet des non linéarités et finalement forment les rouleaux de convection.

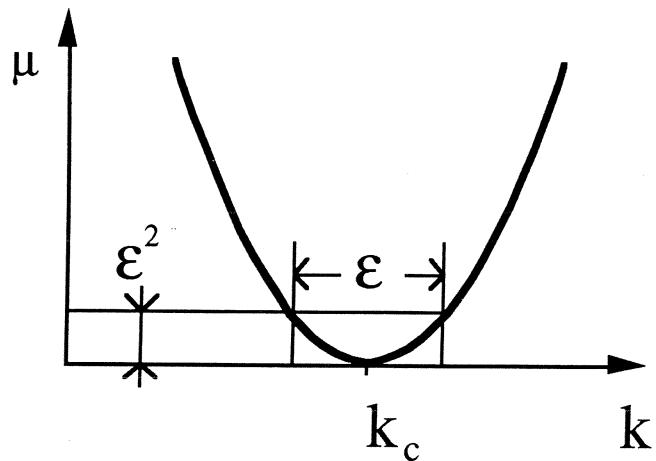


Figure III-1: Courbe neutre de l'instabilité de Rayleigh-Bénard au voisinage du seuil.

Lorsque l'écart au seuil est faible la bande de nombres d'onde instables est fine et centrée sur k_c . Les rouleaux vont donc apparaître avec une périodicité voisine de k_c . Plus précisément tout champ de l'écoulement, par exemple la vitesse vertical $u(x,t)$ au centre des deux plaques, va s'écrire sous la forme d'un paquet d'ondes centré sur k_c :

$$u(x,t) = A(x,t) e^{i k_c x} + \text{cc.}$$

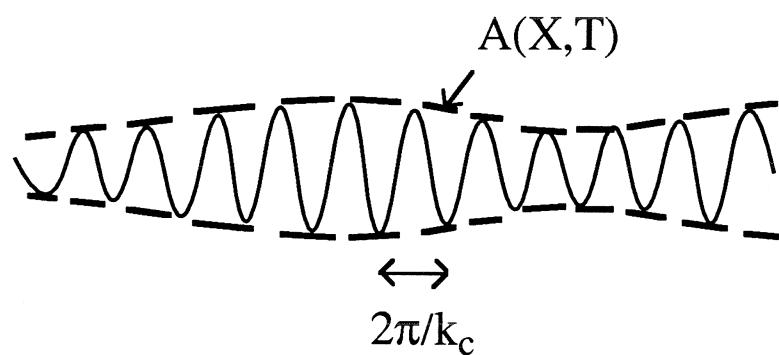


Figure III-2: Schéma du paquet d'ondes.

La fonction complexe $A(x,t)$ apparaît comme l'enveloppe du paquet d'ondes qui décrit l'amplitude des rouleaux de convection (Figure III-2) et varie lentement dans le temps et l'espace. En effet si l'écart au seuil est faible, les nombres d'onde instables présents dans le paquet sont voisins de k_c . Les variations spatiales de l'enveloppe, s'effectuant sur une échelle inversement proportionnelle à la largeur de la bande de nombres d'onde instables, sont donc lentes. Plus quantitativement, si μ est d'ordre ϵ^2 où $\epsilon \ll 1$, la largeur de la bande de nombres d'onde instables est d'ordre ϵ . Ceci indique que l'amplitude A varie sur une échelle lente en espace, que l'on peut caractériser par la variable lente $X=\epsilon x$. Un argument similaire permet d'affirmer que les variations temporelles de A s'effectuent sur une échelle de temps basée sur la variable $T=\epsilon^2 t$, le taux de croissance des ondes étant proportionnel à l'écart au seuil d'après la relation de dispersion (1). Ces raisonnements en échelles multiples (Nayfeh 1973) conduisent à un découplage entre l'échelle des modulations X et l'échelle x associée à la taille des rouleaux individuels. On peut alors considérer les variables x,t et X,T comme indépendantes ce qui revient à écrire le paquet d'ondes sous la forme

$$u = A(X,T) e^{ik_c x},$$

où $A(X,T)$ n'est fonction que des variables lentes. L'étude de la dynamique du système se réduit alors à la détermination de l'évolution spatio-temporelle d'un seul paramètre d'ordre qui est l'amplitude des rouleaux $A(X,T)$.

L'analyse faiblement non-linéaire des systèmes hors équilibre consiste à étudier la dynamique de cette amplitude, et notamment à trouver l'équation différentielle non linéaire qui la gouverne. On écrit aisément la partie linéaire de cette équation dite "d'enveloppe" à partir de la relation de dispersion (1) en effectuant la substitution $\sigma \rightarrow \partial/\partial T$ et $i(k-k_c) \rightarrow \partial/\partial X$. Cette substitution exprime simplement que l'équation d'enveloppe linéarisée doit fournir la relation de dispersion lorsque l'amplitude est choisie sous la forme d'un mode normal $e^{\sigma T + i(k-k_c)X}$. On obtient donc pour le problème de la convection de Rayleigh-Bénard, une équation pour $A(X,T)$ de la forme suivante:

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \mu A + \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + f(A).$$



où $f(A)$ est une fonction non linéaire.

Lorsque l'écart au seuil est faible ($\mu \sim \epsilon^2$), on s'attend à obtenir des amplitudes petites dont l'ordre de grandeur sera relié à ϵ ($A \sim \epsilon^\nu$ où ν est pour l'instant inconnu). On peut donc développer la fonction non-linéaire $f(A)$ en série entière et ne retenir que le terme d'ordre le plus bas. Des arguments de symétrie permettent de montrer que ce terme ne peut être carré. En effet l'état de base dans le problème de la convection est invariant par translation dans l'espace $x \rightarrow x + \text{const}$, ce qui correspond à une invariance par rotation pour l'amplitude. L'équation d'enveloppe doit rester inchangée par la transformation $A \rightarrow Ae^{i\phi}$, interdisant donc la présence de terme carré. Le terme non linéaire d'ordre le plus bas, compatible avec cette invariance est $|A|^2 A$. Pour qu'il intervienne au même ordre que les termes linéaires dans l'équation d'enveloppe il faut donc choisir l'ordre de grandeur de l'amplitude $A(X, T)$ proportionnelle à ϵ , ce qui revient à choisir $\nu = 1$. On obtient finalement pour la convection de Rayleigh-Bénard l'équation d'évolution suivante:

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \mu A + \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + N |A|^2 A .$$

Afin de trouver le coefficient du terme non linéaire N , un calcul complet est nécessaire, basé sur les développements asymptotiques en puissance de ϵ des équations de l'hydrodynamique. Ce calcul a été pour la première fois effectué pour le problème de la convection thermique à deux dimensions simultanément par Newell & Whitehead (1969) et Segel (1969).

Pour le problème de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, l'analyse faiblement non linéaire est possible et a été réalisée par Weissman (1979) dans le cas de deux couches de fluides infinies. La différence fondamentale avec la convection thermique décrite précédemment, est le caractère conservatif du système. Dans l'instabilité de Kelvin-Helmholtz la dissipation est absente, conduisant à une relation de dispersion au voisinage du seuil de l'instabilité de la forme:

$$\sigma^2 = \mu - (k - k_C)^2 .$$

où μ est maintenant proportionnel à $(\Delta U - \Delta U_c)$, ΔU étant le cisaillement entre les deux fluides. En dessous du seuil les modes ne sont pas atténués en raison de l'absence de dissipation mais restent neutres: σ est imaginaire pur. Lorsque μ traverse zéro, les deux modes à $k=k_c$, auparavant neutres, fusionnent pour donner lieu à un mode amplifié et un mode atténué comme l'indique la figure III-3.

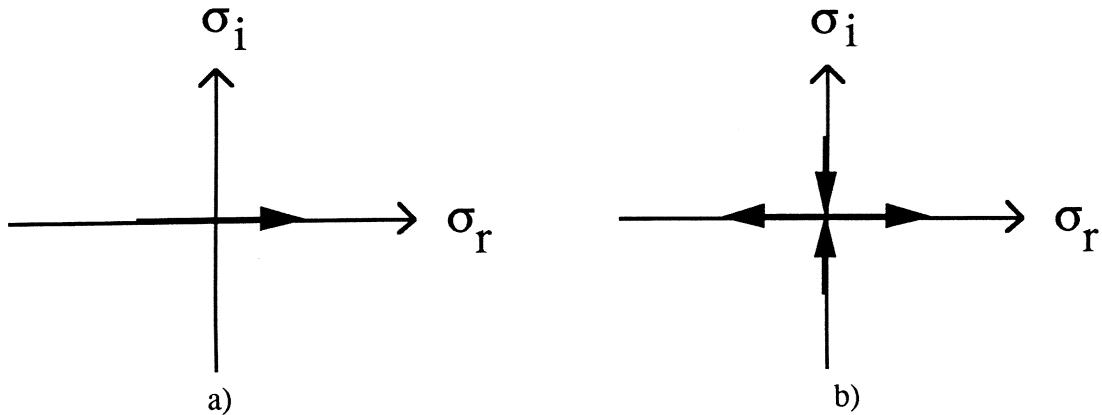


Figure III-3: Mouvement des valeurs propres σ à la traversée du seuil pour $k=k_c$. a) convection de Rayleigh-Bénard; b) instabilité de Kelvin-Helmholtz.

L'équation d'amplitude associée à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz est alors une équation de Klein-Gordon avec une dérivée temporelle du second ordre reflétant la symétrie $t \rightarrow -t$ due à la conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu A + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + N |A|^2 A .$$

Dans l'article qui suit, nous avons généralisé le calcul de Weissman au cas de deux couches de fluides d'épaisseur finie en présence d'un forçage extérieur. Nous montrons que l'équation de Klein-Gordon est toujours valable moyennant l'approximation de Boussinesq qui consiste à négliger la différence de densité entre les deux fluides excepté dans les effets de gravité. La présence d'une perturbation extérieure introduit cependant un terme de forçage et l'équation d'évolution s'écrit:



$$\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = \mu A + \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + N |A|^2 A + F e^{iqX},$$

où F mesure l'amplitude du forçage et q l'écart entre le nombre d'onde de forçage et le nombre d'onde critique k_C . Nous présentons dans l'article qui suit une analyse de la dynamique de phase de cette équation. Il s'agit d'étudier les modulations de phase engendrées par le forçage autour de solutions non linéaires en ondes planes de l'équation d'enveloppe non forcée. Comme nous l'avons souligné précédemment, en l'absence de perturbation extérieure, l'invariance par translation continue dans l'espace de l'écoulement de base implique une invariance de phase pour l'amplitude. L'introduction d'un forçage brise cette symétrie et va donc essentiellement affecter la dynamique de la phase de l'enveloppe $A(X,T)$ comme le montre l'étude suivante.

Références

- NAYFEH, A. H. 1973 *Perturbation methods*. Wiley, New-York.
- NEWELL, A. C. & WHITEHEAD, J. A. 1969 Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.* **38**, 279.
- SEGEL, L. A. 1969 Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection. *J. Fluid Mech.* **38**, 203.
- WEISSMAN, M. A. 1979 Nonlinear wave packets in Kelvin-Helmholtz instability. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **290**, 639.

Propagative Sine-Gordon solitons in the spatially forced Kelvin- Helmholtz instability

Olivier Pouliquen, Patrick Huerre and Jean-Marc Chomaz

Laboratoire d'Hydrodynamique (LadHyX)
Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France

Prepared for Submission to Physica D

Abstract

The spatio-temporal evolution of the vortex sheet separating two finite-depth layers of immiscible fluids is examined in the vicinity of threshold when spatially periodic forcing is imposed at the horizontal boundaries. As a result of the Galilean invariance of the problem, the interface deformation is shown to satisfy a coupled system of evolution equations involving not only the usual "short-wave" at the critical wavenumber but also a shallow-water "long-wave" associated with the mean elevation of the interface. The weakly nonlinear model is further studied in the Boussinesq approximation where it reduces to a forced Klein-Gordon equation. Thus, the secondary Benjamin-Feir instability of nonlinear Stokes wavetrains is analysed in the absence of forcing. When spatial forcing is reintroduced, the competition between the imposed external length scale and the natural length scale of the interface is shown analytically to give rise to one-dimensional propagating Sine-Gordon phase solitons. Numerical simulations of the Klein-Gordon evolution model fully confirm this prediction and also lead to the determination of the range of stability of phase solitons.



1 Introduction

In a wide class of *dissipative* systems, spatially-periodic structures arise as a result of a primary instability that develops above a critical value of a control parameter. Such fully nonlinear structures are themselves subjected to secondary instabilities which may take the form of phase modulations of the primary patterns, as documented both experimentally and theoretically [1-4]. In Rayleigh-Bénard convection for example, convective rolls can become unstable to longitudinal phase modulations in a certain range of roll wavelengths. This instability, associated with the name of Eckhaus [5], leads to the disappearance of a roll, an event which brings the periodic pattern back into a stable domain of parameter space [6, 7]. A similar evolution is also observed in Taylor-Couette flow between concentric cylinders [8, 9].

The same type of secondary instability takes place in *conservative* systems such as deep water-gravity waves, and it is then associated with the name of Benjamin and Feir [10]. In particular it has been shown that nonlinear plane wavetrains governed by the cubic nonlinear Schrödinger equation are also unstable to phase modulations. But in contrast to the case of dissipative systems, the subsequent nonlinear evolution does not result in an irreversible change to a new stationary stable pattern. Instead, one observes finite- amplitude modulations that arise from a periodic exchange of energy between a finite number of sideband modes of the primary wave [11]. This succession of modulation and demodulation cycles is commonly known as the Fermi-Pasta-Ulam (FPU) recurrence phenomenon [12] and it is made possible by the absence of viscous dissipation. As demonstrated by Stuart and Di Prima [13], the Benjamin-Feir and Eckhaus instabilities correspond to two limiting cases of a wider class of secondary phase instabilities that arise within the context of the one- dimensional Ginzburg-

Landau equation.

More fundamentally phase instabilities are intimately related to the continuous translational symmetry of the underlying basic system [2, 14]. The spatially periodic pattern naturally breaks this continuous symmetry, but the phase invariance associated with arbitrary displacements of the pattern is responsible for the existence of a long wavelength neutral phase mode that can become unstable under certain conditions.

Continuous translational invariance may also be broken externally by forcing the system in a spatially periodic fashion so as to strongly affect the development of the phase instabilities. This situation is tantamount to the study of the competition between an externally imposed length scale and the natural wavelength of the system. Convection experiments in nematics [15, 16] have indicated that spatially periodic forcing leads to a commensurate-incommensurate transition [17] signaled by the appearance of soliton-like phase envelopes. The phase dynamics analysis "à la Kuramoto" developed by Coullet and Huerre [18, 19] near the threshold of instability provides a satisfactory description of this transition and it manages to capture the soliton-like phase behavior in the case of Rayleigh- Bénard convection.

The present theoretical investigation was initially motivated by recent experimental results on the spatially forced Kelvin-Helmholtz instability performed in our laboratory [20]. The experiment consists in creating a uniformly accelerating shear flow by tilting a long tube filled with two immiscible fluids of different densities [21]. External forcing is produced by periodically modulating the upper or lower boundary of the tube with small obstacles. As in the convection experiments of Lowe and Gollub [15, 16], phase solitons are observed as a result of the competition between the natural wavelength of the interface and the imposed wavelength. Note, however, that the dynamics of the interface in the Kelvin- Helmholtz experiments are essentially *conservative* and that the *dissipative* model in [18, 19] is not applicable.



The aim of the present study is therefore to present a phase dynamics analysis of the effects of spatial forcing on the inviscid evolution of Kelvin-Helmholtz instability waves, and thereby to demonstrate that wavelength competition leads to the formation of Sine-Gordon phase solitons. We restrict our attention to the case of a vortex sheet separating two uniform streams of finite depth, a periodic modulation being applied to the lower boundary.

The one-dimensional amplitude equations governing the evolution of the interface near instability onset are outlined in section 2, detailed calculations being relegated to appendix A. The analysis is the extension of Weissman's study [22] to the case of finite fluid layers with periodic forcing. The presence of solid boundaries at a finite distance leads to long wave-short wave interactions, the amplitude of nearly neutral interfacial waves being coupled to three additional large-scale fields: the mean elevation of the interface and mean corrections to the basic horizontal velocity in each layer. However, under the Boussinesq approximation, the long wavelength fields become decoupled from the short wave amplitude and they can be set equal to zero. The amplitude evolution model is then reduced to a non linear Klein-Gordon equation which has been derived in other conservative problems such as the buckling of elastic shells [23], baroclinic instability waves [24], or instabilities in slender accretion disks [25]. The sensitivity of nonlinear plane wave solutions to disturbances of the Benjamin-Feir-Eckhaus type is examined in section 3. In the linear analysis, use is made of the general result obtained by Newton and Keller [26, 27] for a generic form of differential equations. The corresponding finite-amplitude régime is then determined by resorting to direct numerical simulations of the Klein-Gordon equation. Finally, in section 4 , it is demonstrated that the phase dynamics of nonlinear plane waves are governed by a Sine-Gordon equation admitting propagating soliton solutions when spatial forcing is applied. Detailed calculations pertaining to this analysis are given in Appendices B

and C. Final remarks and comparison with experiments are included in section 5.

2 Amplitude evolution equations

As first proposed by Lord Kelvin in 1871 [28], we consider the instability of the interface separating two streams of immiscible inviscid fluids in relative two-dimensional motion (fig. 1). All dimensional and nondimensional quantities are indicated by starred and unstarred variables respectively. The velocity and density of the basic flow are uniform in each layer and denoted by U_1^* , ρ_1^* in the lower layer and U_2^* , ρ_2^* in the upper layer, with $\rho_1^* \geq \rho_2^*$. Surface tension between the two fluids is equal to γ^* . The upper solid boundary at $y^* = h^*$ is kept plane and horizontal while the lower boundary is modulated and of the form $y^* = -h^* + 2f^* \cos(k_f^* x^*)$, where f^* and k_f^* characterize the forcing amplitude and wavenumber respectively. In the sequel, the forcing amplitude f^* will be assumed small so that, at leading order, the basic flow is indeed unidirectional as depicted in fig.1.

This configuration provides a simplified model of the set-up used in the spatially-forced temporal mixing layer experiments reported in [20]. As in Weissman [22], dimensionless variables are defined with respect to the density scale

$$\rho^* = \rho_1^* + \rho_2^* ,$$

the capillary length scale

$$L^* = \sqrt{\frac{\gamma^*}{g^*(\rho_1^* - \rho_2^*)}} ,$$

and the velocity scale

$$V^* = \left(\frac{\sqrt{\gamma^* g^* (\rho_1^* - \rho_2^*)}}{\rho_1^* + \rho_2^*} \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

where g^* denotes gravity. The flow is then governed by six dimensionless parameters: the density ratio $\rho_1 = \rho_1^*/\rho^*$, the dimensionless depth of the fluid layers $h = h^*/L^*$,



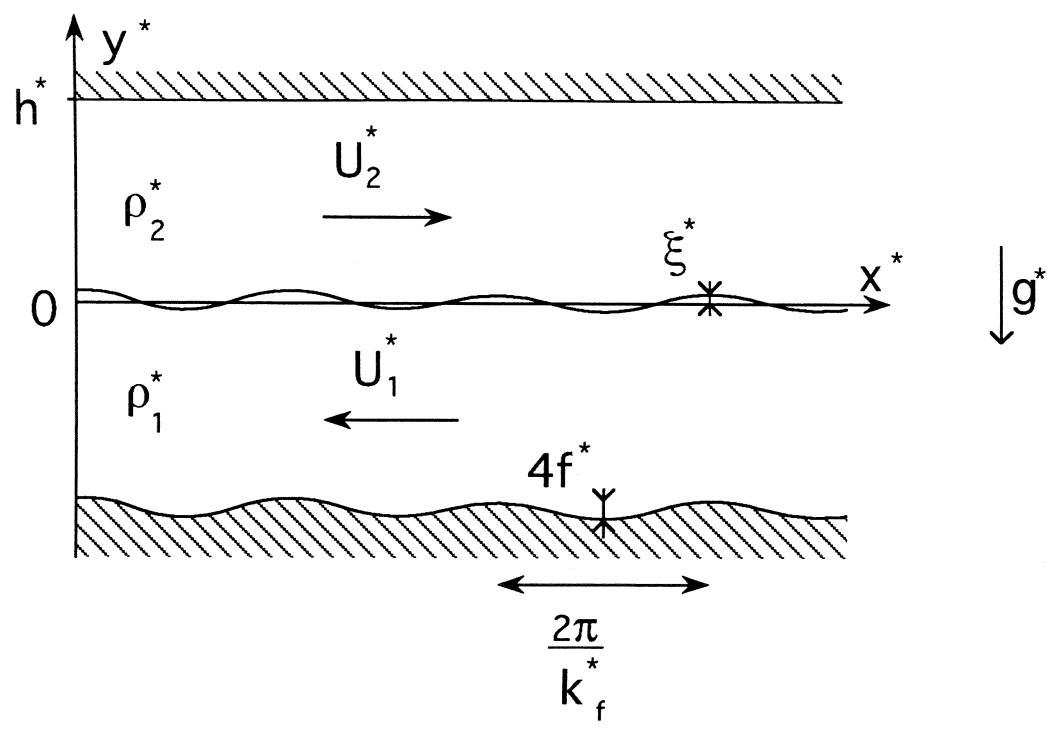


Fig.1. Sketch of basic flow.

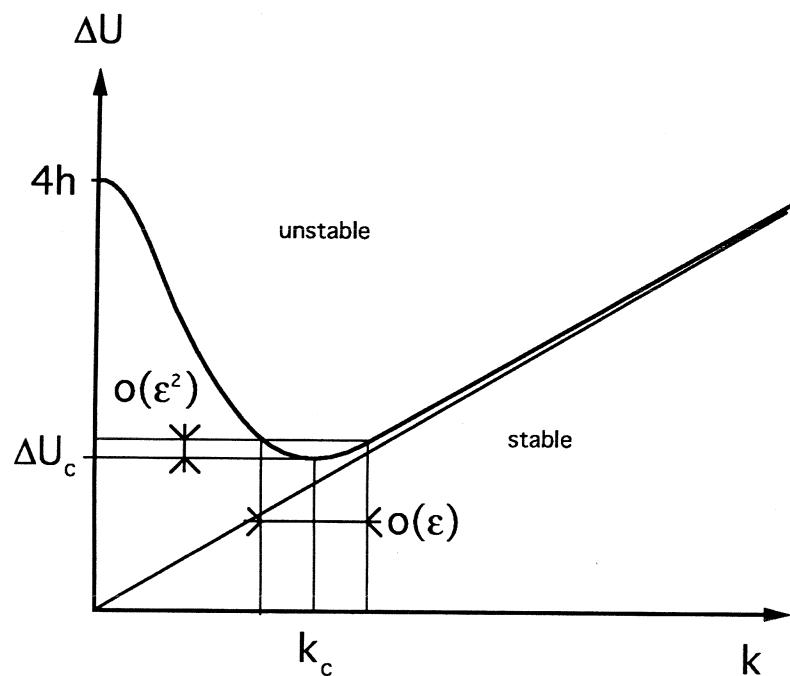


Fig.2. Neutral curve of the Kelvin-Helmholtz instability in the nondimensional wavenumber-velocity difference plane.

the scaled velocities in each layer $U_i = U_i^*/V^*$, $i = 1, 2$, the scaled forcing amplitude $f = f^*/L^*$ and wavenumber $k_f = k_f^*L^*$.

A straightforward linear stability analysis of the basic flow in the absence of forcing leads to the dispersion relation:

$$D(\sigma, k, U_1, U_2) \equiv -[\sigma + ik(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)]^2 + \rho_1 \rho_2 k^2 (\Delta U)^2 - (k + k^3) \tanh(kh) = 0 , \quad (1)$$

where σ is the complex temporal growth rate of interface deformations of the form $\xi \sim \exp(ikx + \sigma t)$, $k = k^*L^*$ being the dimensionless wavenumber and $\Delta U \equiv U_2 - U_1 = (U_2^* - U_1^*)/V^*$ the dimensionless velocity difference [29]. The neutral curve in the $k - \Delta U$ plane sketched on fig. 2 is defined by the condition $D_\sigma = 0$, where D_σ denotes the derivative of the dispersion relation with respect to σ . Its shape results from the combination of two stabilizing effects: the density difference at large wavelengths (small k) and surface tension at short wavelengths (large k). The onset of the Kelvin-Helmholtz instability is seen to take place at a well defined critical wavenumber k_c above a value ΔU_c of the scaled velocity difference. This critical point is defined by the relations

$$D_\sigma = D_k = 0 .$$

As shown in Appendix A, these relations yield a non-zero value of the critical wavenumber k_c as long as the scaled depth h is larger than $\sqrt{3}$. Under this assumption, which will be made throughout, σ takes the specific value

$$\sigma_c = -i(\rho_1 U_{1c} + \rho_2 U_{2c}) k_c ,$$

which corresponds to traveling waves of phase speed equal to $\rho_1 U_{1c} + \rho_2 U_{2c}$.

The objective of this section is to carry out a weakly nonlinear analysis in the vicinity of the neutral point k_c , ΔU_c when instability waves are forced by the stationary modulated lower boundary. Resonance between the neutral wave and the stationary



spatial perturbation can only occur if both disturbances have equal propagation velocities, i-e if the phase velocity at critical satisfies the condition:

$$\rho_1 U_{1c} + \rho_2 U_{2c} = 0 \quad . \quad (2)$$

Under this assumption, which will hold in the entire study, the dispersion relation depends only on the velocity difference ΔU and no longer on the individual velocities U_i so that one can express (1) in the form $D(\sigma, k, \Delta U) = 0$. A complete derivation of the system of amplitude equations is given in Appendix A.

Following Weissman [22], we introduce an $O(1)$ supercriticality parameter Δ such that

$$\Delta U = \Delta U_c + \Delta \varepsilon^2 \quad ,$$

where $\varepsilon \ll 1$ denotes the order of magnitude of the interface deformation $\xi(x, t)$. The interface elevation is then expanded in the form

$$\xi = \varepsilon \xi^{(1)} + \varepsilon^2 \xi^{(2)} + \varepsilon^3 \xi^{(3)} + \dots \quad ,$$

with

$$\xi^{(1)} = A(X, T) e^{i(k_c x)} + cc \quad .$$

The complex amplitude $A(X, T)$ is an unknown function of the slow space and time variables X and T defined by

$$(X, T) = \varepsilon(x, t) \quad ,$$

this particular choice being motivated by the fact that close to ΔU_c , the linear growth rate is proportional to $(\Delta U - \Delta U_c)^{1/2}$ and the width of the unstable band of wavenumbers is also of order $(\Delta U - \Delta U_c)^{1/2}$. Note that the amplitude evolution time scale is $O(\varepsilon^{-1})$ and not $O(\varepsilon^{-2})$ as in dissipative systems.

The spatially periodic modulation imposed to the lower boundary is assumed to be nearly resonant so that

$$k_f = k_c + q \varepsilon \quad ,$$

where the $O(1)$ parameter q is a measure of the detuning between k_f and k_c . Finally the strength of the small forcing amplitude f is chosen in such a way as to appear at the same order as the anticipated nonlinear term $|A|^2 A$ in the amplitude equation.

The shape of the lower boundary is therefore taken to be

$$y = -h + \varepsilon^3 F_0 e^{i(k_c + q\varepsilon)x} + cc ,$$

with F_0 and q being $O(1)$.

As outlined in Appendix A, in order to obtain a closed system of amplitude evolution equations one needs to solve the Laplace equation and associated boundary and interface conditions to order ε^3 included. In contrast to the infinite depth case studied by Weissman [22], the evolution of the carrier wave at k_c is found to be strongly coupled to two large-scale velocity fields $\mathcal{U}_1(X, T)$ and $\mathcal{U}_2(X, T)$ in each of the fluid layers and to the associated large-scale elevation of the interface $\mathcal{H}(X, T)$. These long wavelength fields are $O(\varepsilon^2)$ and compatibility conditions at $O(\varepsilon^2)$ and $O(\varepsilon^3)$ lead to the following coupled system:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{2c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \mathcal{H} - h \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial X} = 0 , \quad (3a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{1c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \mathcal{H} + h \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial X} = 0 , \quad (3b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} - \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{2c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \rho_2 \mathcal{U}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{1c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \rho_1 \mathcal{U}_1 = S \frac{\partial |A|^2}{\partial X} , \quad (3c)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} D_{\sigma\sigma} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{1}{2} D_{kk} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} &= \Delta D_{\Delta U} A + N |A|^2 A + F e^{iqX} \\ &+ 2k_c^2 (\rho_1 U_{1c} \mathcal{U}_1 + \rho_2 U_{2c} \mathcal{U}_2) A - R \mathcal{H} A . \end{aligned} \quad (3d)$$



The form of the linear operator appearing in (3d) reflects the nature of the dispersion relation (1) in the vicinity of critical. In fact, the constant coefficients $D_{\sigma\sigma}$, D_{kk} and $D_{\Delta U}$ multiplying the various linear terms of (3d) refer to the corresponding derivatives of the dispersion relation (1) evaluated at $k_c, \Delta U_c$. Expressions for the coefficients N, R and S of the various non-linear terms appearing in (3c) and (3d) and for the scaled forcing amplitude F are given in Appendix A [eqs. (A9), (A16)-(A18)].

The evolution of the large scale fields \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 and \mathcal{H} is primarily governed by eqs. (3a)- (3c) which can be recognized as a system of shallow-water wave equations linearised around the basic flow U_{1c} , U_{2c} . More specifically, (3a) and (3b) express mass conservation of the mean flow in each fluid layer whereas (3c) is a statement of conservation of momentum along the x-direction. According to the right-hand side of (3c), the large scale fields are induced by spatial inhomogeneities in the amplitude $|A(X, T)|$ of the Kelvin- Helmholtz wavetrain.

The evolution of the amplitude $A(X, T)$ associated with the carrier wavenumber k_c is primarily governed by the forced Klein- Gordon equation (3d). The effect of the prescribed spatially periodic modulation is contained in the driving term Fe^{iqX} . Finite values of the mean fields \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 and \mathcal{H} are seen to shift the effective value of the threshold of instability, as reflected by the coupling terms involving $\mathcal{H}A$, \mathcal{U}_1A and \mathcal{U}_2A on the right-hand side of (3d).

The simultaneous occurrence of a nearly neutral mode $A(X, T)$ of finite wavenumber k_c , and of nearly neutral modes $\mathcal{H}(X, T)$, $\mathcal{U}_1(X, T)$, $\mathcal{U}_2(X, T)$ at $k \sim 0$ is intimately related with the symmetry properties of the underlying system. More specifically, in the absence of forcing, the problem under consideration is not only invariant under arbitrary space translations $x \rightarrow x + const$, but also under Galilean transformations $x \rightarrow x - Ut$. Following the same arguments as in Coullet and Fauve [14], one may

therefore expect a constant velocity field in each layer to also be a neutral mode of the system. In the presence of a density interface, long wavelength variations $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ of this constant velocity field are likely to produce, by mass conservation, slight modulations \mathcal{H} of the surface elevation. Thus the dynamics near threshold involve coupling between a neutral mode of complex amplitude $A(X, T)$ at wavenumber k_c and two long wavelength neutral modes $\mathcal{U}_1(X, T)$ and $\mathcal{U}_2(X, T)$ at $k \sim 0$. The relationship between the nature of long wave-short wave interactions at a fluid interface and the invariance properties of the underlying system was initially identified by Chomaz et al. [30]. An evolution model closely related to system (3) has recently been obtained by Pavithran and Redekopp [31, 32] in the context of Rayleigh-Bénard convection in a horizontal fluid layer with a free interface. The finite wavenumber mode is then associated with the convective rolls near threshold whereas the large-scale field corresponds to "shallow-water" waves at the interface. In contrast with the case under consideration here, the dynamics are strongly dissipative and the time-reversible Klein-Gordon operator in (3d) is replaced by a first-order in time Ginzburg-Landau equation. For other examples of long wave-short wave interactions at an interface, the reader is referred to Davey and Stewartson [33], Djordjevic and Redekopp [34] and Ma and Redekopp [35] among others.

It should also be emphasized that system (3) is fully compatible with the result obtained by Weissman [22] in the case of infinitely deep fluid layers. If one lets h become infinite in (3) the coefficient S multiplying the coupling term $\frac{\partial|A|^2}{\partial X}$ in (3c) becomes zero as readily seen from eq.(A9) in Appendix A. Thus, the large-scale field is uncoupled from the evolution of A and one may assume, without loss of generality, that $\mathcal{U}_1(X, T) = \mathcal{U}_2(X, T) = \mathcal{H}(X, T) = 0$. Finally, the forcing coefficient F defined in (A17) also becomes zero in the limit $h \rightarrow \infty$ and system (3) then reduces to the nonlinear Klein-Gordon equation

$$-\frac{1}{2}D_{\sigma\sigma}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{1}{2}D_{kk}\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} = \Delta D_{\Delta U}A + N|A|^2A$$



analyzed by Weissman [22].

It is not the purpose of the present investigation to pursue in detail the study of the solutions of (3). Rather, we seek to isolate a subsystem of (3) which is valid under well-defined conditions and which is capable of describing, to leading-order, the competition between the imposed spatially periodic modulations and the "natural" instability of the interface. As in our previous work [36], we shall make the Boussinesq approximation. In the present situation, this assumption amounts to neglecting density variations except when they appear multiplying the gravity term. With the choice of nondimensional parameters adopted here, the Boussinesq approximation is equivalent to setting $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$. In such a case, the resonance condition (2) reduces to $U_{1c} = -U_{2c}$ and the coupling term S on the right-hand side of (3c) vanishes, as seen from eq. (A9) in Appendix A. As before, one may set, without loss of generality $\mathcal{H} = \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = 0$, but this time the forcing term remains finite. It can therefore be concluded that, *in the Boussinesq approximation*, the nonlinear evolution of wavepackets, in the presence of spatially periodic external modulations, is governed by the forced Klein-Gordon equation

$$-\frac{1}{2}D_{\sigma\sigma}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{1}{2}D_{kk}\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} = \Delta D_{\Delta U}A + N|A|^2A + Fe^{iqX} \quad , \quad (4)$$

where it is understood that all coefficients are evaluated at $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$ [cf. eqs. (A20)-(A21)]. In the rest of the paper we shall restrict our attention to the study of (4). As stated in the introduction, the Klein-Gordon equation arises in a wide variety of situations: buckling of elastic shells [23], baroclinic instability [24], instability of accretion disks [25], among other applications. In all the above examples, dissipation is neglected and the reversible nature of the dynamics is expressed by the invariance under time reflections $t \rightarrow -t$, thereby accounting for the presence of the second-order time derivative $\frac{\partial^2 A}{\partial T^2}$ in (4). Symmetry arguments are also helpful in justifying the form taken by the forcing term [18]. When external periodic modulations of wavenumber

k_f are introduced, the continuous translational invariance $x \rightarrow x + const$ is broken and replaced by the discrete translational symmetry $x \rightarrow x + \frac{2\pi n}{k_f}$, where n is an integer. For the complex amplitude $A(X, T)$, the latter is equivalent to the rotational symmetry $A \rightarrow Ae^{-2\pi i n q/k_c}$. The forcing term in (4) respects this symmetry property and it is identical to the corresponding term in forced thermal convection [19]. The nonlinear coefficient N depends on the properties of each basic stream. Under the conditions $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$ and $U_{1c} = -U_{2c}$, one finds $N < 0$ as shown in Appendix A and this assumption will be made in the remainder of the study. For simplicity, the following change of variables is introduced:

$$X \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}D_{kk}}}X \quad , \quad A \rightarrow \sqrt{-N}A \quad ,$$

$$q \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{2}D_{kk}}q \quad , \quad F \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-N}}F \quad ,$$

with $\mu = \Delta D_{\Delta U}$. In terms of these scaled quantities, evolution equation (4) reads:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} = \mu A - |A|^2 A + F e^{iqX} \quad , \quad (5)$$

where μ is the new supercriticality parameter and F and q denote the amplitude of the excitation and the wavenumber misfit respectively.

In order to explore the effect of forcing on the development of the instability and to illustrate some of the theoretical results to be presented in the following sections, the Klein-Gordon equation (5) is solved numerically in the case of periodic boundary conditions $A(X + L, T) = A(X, T)$ on an interval of length L . The spatial derivative is approximated by centered finite-differences, and the temporal evolution is incremented through a second-order predictor-corrector scheme of time step δt . A mesh of 80 equally spaced points is selected on the periodic interval, which corresponds to a spatial step $\delta x = L/80$. The accuracy of the numerical scheme and the amount of numerical



dissipation can be assessed by monitoring the temporal variations of the total energy

$$E = \int \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial A}{\partial T} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial A}{\partial X} \right|^2 - \frac{\mu}{2} |A|^2 + \frac{1}{2} |A|^4 - F \operatorname{Re} (A e^{-iqX}) \right] dX ,$$

over the interval L . The conservative Klein-Gordon equation (5) implies

$$\frac{dE}{dT} = 0 ,$$

so that $E(t)$ should be conserved. In all the simulations to be presented in the following sections, numerical dissipation defined as $\frac{\Delta E}{E(0)} = \frac{E(t) - E(0)}{E(0)}$ does not exceed 3% over the entire duration of a run. The results are usually displayed on spatio-temporal $X - T$ diagrams such as in fig. 4(b). The total normalized interface deformation is then reconstructed by reintroducing a carrier wave of wavenumber k_c . More specifically, level contours of the interface elevation $2\operatorname{Re} (A(X, T)e^{ik_c X})$ are represented on a gray scale in the $X - T$ plane, by arbitrarily setting $X = x$ and $\varepsilon = 1$.

3 Benjamin-Feir-Eckhaus instability of Stokes wavetrains

In this section the sideband instability of finite-amplitude wavetrain solutions of the Klein-Gordon equation (5) is examined in the absence of spatial forcing. The analysis is based on Benjamin and Feir's pioneering study of sideband instability in deep water gravity waves governed by the cubic nonlinear Schrödinger equation [10]. A similar formalism has been applied by Eckhaus [5] for dissipative systems such as convection rolls governed by the Newell-Whitehead equation [37]. We chose to follow here the methodology outlined by Newton and Keller [26, 27] for a generalized Klein-Gordon equation with arbitrary potential.

Finite-amplitude Stokes solutions of (5) with $F = 0$ are sought in the form

$$A(X, T) = Q e^{i(qX - \omega T)} , \quad (6)$$

where Q is a real amplitude, ω is the frequency and q is the wavenumber *not to be confused with the misfit parameter appearing in the forcing term of (5)*. By substituting (6) into (5), one is led to the nonlinear dispersion relation

$$\omega^2 - q^2 + \mu - Q^2 = 0 .$$

Non linear plane waves are seen to exist only if

$$\omega^2 - q^2 + \mu > 0 .$$

This inequality defines in the $q - \omega$ plane a domain of existence which is bounded by the hyperbola $\omega^2 - q^2 = -\mu$. As shown on figs. 3(a) and (b) for $\mu > 0$ and $\mu < 0$ respectively, no plane wave solutions can be found within the hatched areas.

Outside these regions, plane waves exist and their stability is examined by introducing sideband perturbations $\varphi(X, T)$ such that

$$A(X, T) = e^{i(qX - \omega T)} [Q + \varphi(X, T)] ,$$

with

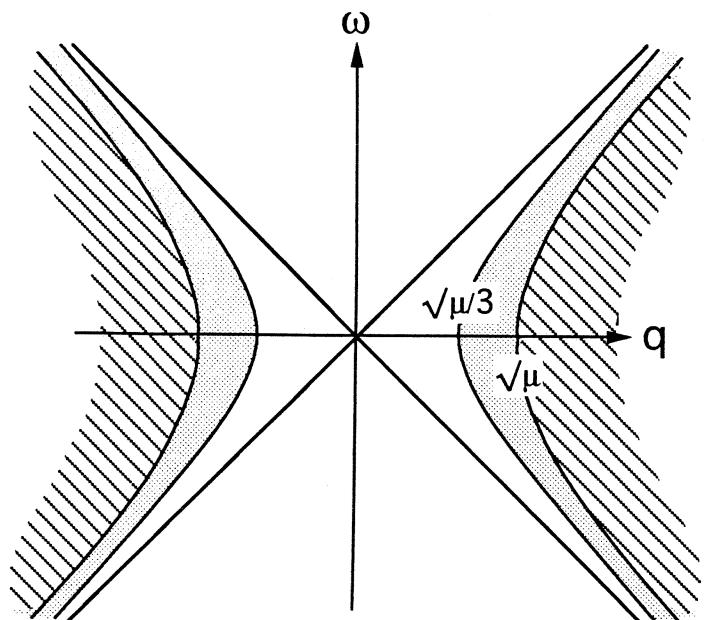
$$\varphi(X, T) = Be^{\sigma T + ilX} + Ce^{\bar{\sigma}T - ilX} ,$$

where a bar denotes the complex conjugate. Upon linearisation of eq. (5) around the Stokes solution, one obtains the dispersion relation between the complex growth rate σ and the wavenumber l of the sideband perturbations:

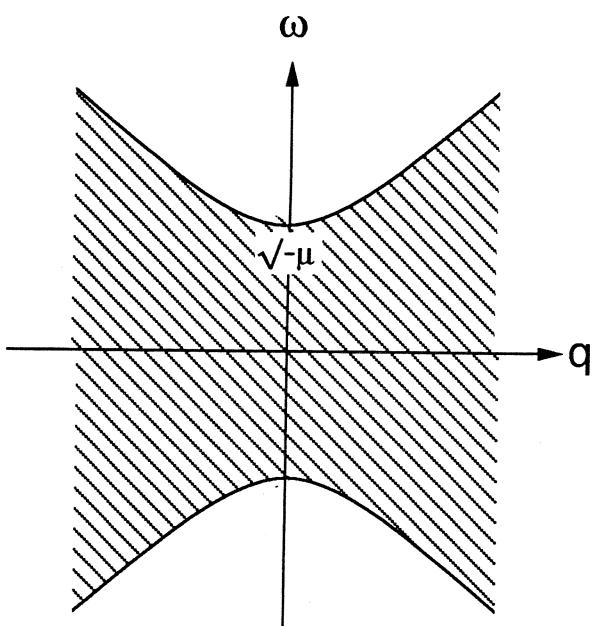
$$\sigma^4 + [2(l^2 + Q^2) + 4\omega^2] \sigma^2 + 8i\omega ql\sigma + l^4 + l^2(2Q^2 - 4q^2) = 0 . \quad (7)$$

The quantity σ appearing in (7) should not be mistaken for the growth rate σ of the primary instability introduced in the preceding section. The nonlinear Stokes wavetrain of amplitude Q , wavenumber q and frequency ω will be unstable if there exists a sideband wavenumber l with a complex growth rate σ of positive real part.





a)



b)

Fig.3. Stability diagram of plane-wave solutions of the Klein-Gordon equation in the wavenumber q -frequency ω plane. Clear regions: stable plane waves; shaded regions: unstable plane waves; hatched regions: no plane waves (a) $\mu > 0$; (b) $\mu < 0$.

Eq. (7) is solved numerically with respect to σ at each point of the $q - \omega$ plane, for all values of the perturbation wavenumber l . The results are summarized in figs. 3(a),(b): nonlinear plane waves are determined to be unstable within the dotted areas. It can be concluded that, below critical ($\mu < 0$), all existing plane waves are sideband stable [fig. 3(b)]. Above critical ($\mu > 0$), there are bands of unstable plane waves as indicated by the dotted zones in fig. 3(a). Eq. (7) may be solved analytically in certain cases. Thus, one finds that spatially uniform wavetrains $Qe^{-i\omega T}$ are always sideband stable. By contrast steady patterns Qe^{iqX} which may exist above critical ($\mu > 0$), are seen to be sideband stable only in the range of wavenumbers

$$|q| < \sqrt{\frac{\mu}{3}} \quad (8)$$

as indicated on fig. 3(a). When $|q| > \sqrt{\frac{\mu}{3}}$, sideband wavenumbers l such that

$$|l| < \sqrt{6q^2 - 2\mu} \quad (9)$$

grow exponentially. It is interesting to note that the stability condition (8) is formally identical to the Eckhaus stability criterion applicable to steady convection rolls near threshold: according to the dissipative Newell-Whitehead amplitude evolution model [37], stationary rolls of wavenumber $k_c + q$ are phase unstable when $|q| > \sqrt{\frac{\mu}{3}}$, if μ denotes the supercriticality parameter.

The finite-amplitude evolution of the secondary Benjamin-Feir instability may be investigated by introducing as initial conditions in the numerical simulations of eq. (5) a stationary Stokes wavetrain Qe^{iqX} that is slightly perturbed. More specifically, the initial state is selected to be

$$A(X, 0) = e^{iqX} \left[\sqrt{\mu - q^2} + \epsilon \varphi(X, 0) \right] ,$$

$$\frac{\partial A}{\partial T}(X, 0) = \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial T}(X, 0) e^{iqX} ,$$



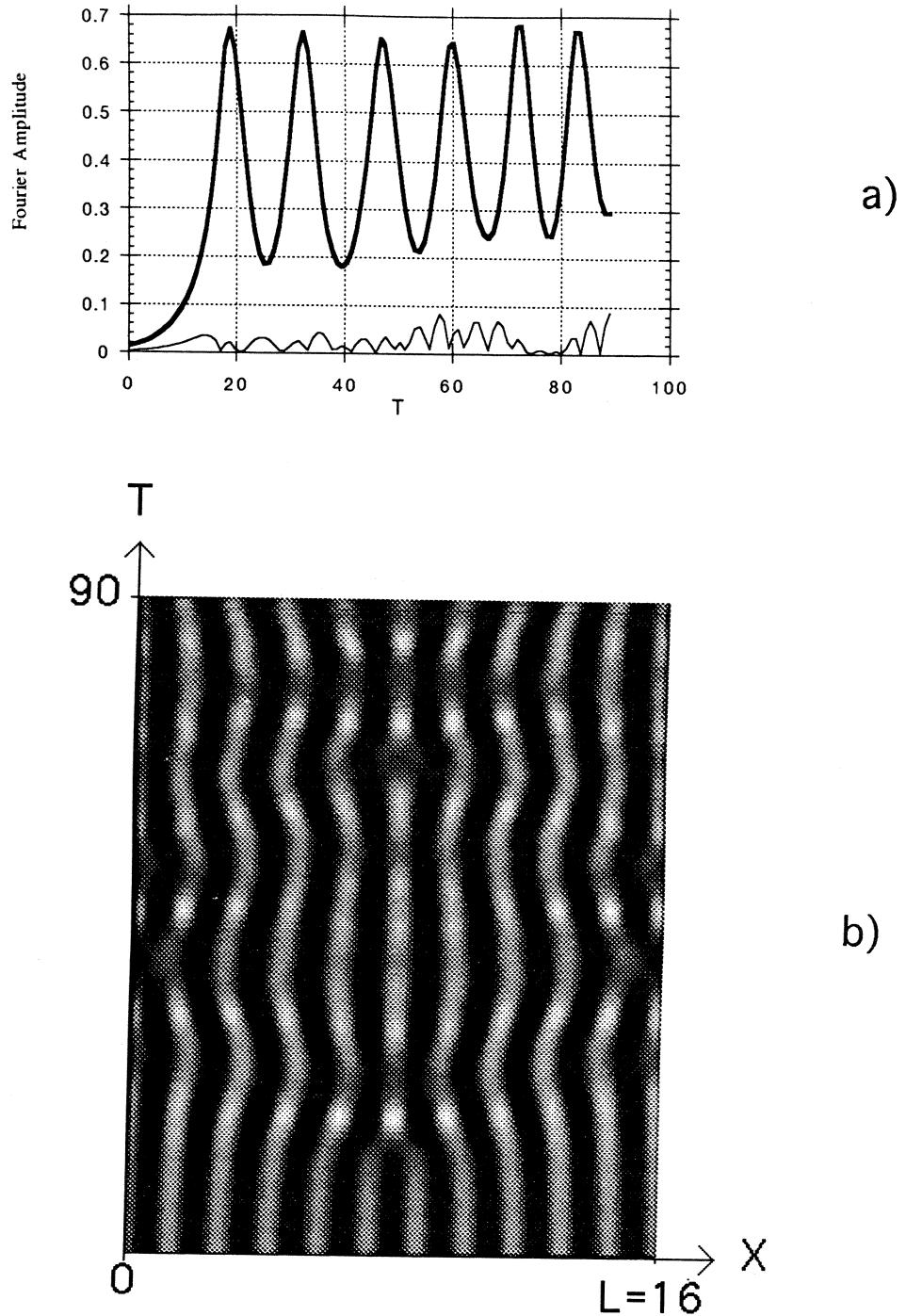


Fig.4. Fermi-Pasta-Ulam recurrence in the Klein-Gordon equation. See section 2 for the description of initial conditions. $\mu = 0.3$, $\delta x = 0.2$, $\delta t = 0.03$, $q = l = 2\pi/L$, $L = 16$. (a) Nonlinear time evolution of the amplitudes of the Benjamin-Feir unstable modes of respective wavenumber $q - l$ (bold line) and $q + l$ (thin line); (b) Spatio-temporal $X - T$ diagram of the elevation of the interface $\xi = 2\text{Re} [A(X, T)e^{ik_c X}]$ of carrier wavenumber $k_c = 12\pi/L$. Darker (lighter) regions indicate the crests (troughs).

where

$$\varphi(X, T) = e^{\bar{\sigma}t - ilX} + \frac{(\sigma^2 - 2kl + l^2 + \mu - q^2)}{\mu - q^2} e^{\sigma t + ilX}$$

is the linearised eigenfunction of sideband wavenumber l and complex growth rate σ given by dispersion relation (7). The perturbation level is chosen to be $\varepsilon = 10^{-2}$. When the wavenumber q is within the stable range $|q| < \sqrt{\frac{\mu}{3}}$, $\mu > 0$, perturbations remain negligibly small for all values of l , and a steady sinusoidal pattern Qe^{iqX} is observed. When the wavenumber q is in the unstable range $|q| > \sqrt{\frac{\mu}{3}}$, sideband modes of wavenumber $q + l$ and $q - l$ grow in time as shown by the thin and bold curves in fig. 4(a). In this particular example, $q = l = 2\pi/L$ and $L = 16$, $\mu = 0.3$, so that $\pm l$ are the only discrete unstable sideband wavenumbers satisfying inequality (9). All other harmonics are stable. As seen from fig. 4(a), both sidebands $q + l$ and $q - l$ initially increase exponentially according to linear theory. However, the $q - l$ mode rapidly dominates and undergoes nearly time-periodic oscillations. The corresponding spatio-temporal evolution of the interface elevation $\xi = 2Re(A(X, T)e^{ik_c X})$ is represented on fig. 4(b) with the value $k_c = 12\pi/L$ of the carrier wavenumber. In the transient regime, a spatio-temporal dislocation is seen to occur, which leads to the disappearance of a single wave trough and to an abrupt change of the mean wavenumber from $k_c + q$ to $k_c + q - l$. Beyond this initial phase, the energy content of all wavenumbers remains constant with the exception of $k_c + q$ and $k_c + q - l$ which experience a nearly periodic exchange of energy. In physical space (fig. 4(b)), this energy transfer takes the form of periodic contractions and dilatations of the spatial pattern. As discussed in the introduction, similar finite-amplitude periodic modulations have been observed in other conservative systems and they are usually referred to by the name "FPU recurrence phenomenon" after Fermi, Pasta and Ulam [12]. For instance, the long-time nonlinear evolution of deep-water gravity wavetrains has been shown to exhibit FPU recurrence within the context of the cubic nonlinear Schrödinger equation [38]. Such an evolution



equation is, incidentally, a pertinent finite-amplitude evolution model in the stable domain of the $k - \Delta U$ plane on fig. 2, as demonstrated by Weissman [22]. The present results indicate that FPU dynamics also prevail in the vicinity of the threshold of instability.

4 Phase dynamics analysis of the Klein-Gordon equation

The secondary Benjamin-Feir instability which has just been investigated both analytically and numerically falls within the general class of phase instabilities. As emphasized by several authors [2, 3, 14, 18], particularly in the case of dissipative systems, such instabilities are closely related to the translational symmetry $x \rightarrow x + const$ of the governing equation. As a result of this invariance, the complex amplitude is defined up to an arbitrary phase which can be interpreted as a neutral mode of the system. Slow spatio-temporal modulations of the neutral mode, i-e phase dynamics, are likely to be amenable to analytical treatment via the method of multiple scales. The objective of the present section is to present such an analysis for the specific case of the Klein-Gordon equation, both unforced and forced. Our primary interest is in the phase dynamics of stationary plane waves ($\omega = 0$) which have the same wavenumber q as the spatial forcing.

The complex amplitude is written in the form

$$A(X, T) = [Q + \rho(X, T)] e^{i(qX + \theta(X, T))} , \quad (10)$$

where $\rho(X, T)$ and $\theta(X, T)$ denote amplitude and phase perturbations of the steady pattern Qe^{iqX} of wavenumber q and amplitude $Q = \sqrt{\mu - q^2}$. Upon substituting (10) into the Klein-Gordon equation with forcing (5), the following system of coupled

equations is obtained for the dynamics of the perturbations $\rho(X, T)$ and $\theta(X, T)$:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} - (Q + \rho) \left(\frac{\partial \theta}{\partial T} \right)^2 = \mu(Q + \rho) + \frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} - (Q + \rho) \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} + q \right)^2 - (Q + \rho)^3 + F \cos(\theta) , \quad (11a)$$

$$(Q + \rho) \frac{\partial^2 \theta}{\partial T^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial T} \frac{\partial \rho}{\partial T} = (Q + \rho) \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} + q \right) - F \sin(\theta) . \quad (11b)$$

The cases $F = 0$ and $F \neq 0$ are successively examined in sections 4-1 and 4-2.

4.1 Free evolution

From the results of section 2, stationary patterns are subject to the Benjamin-Feir instability when their wavenumber q satisfies $|q| > \sqrt{\frac{\mu}{3}}$. A weakly-nonlinear phase dynamics analysis may be carried out in the vicinity of threshold $q_c = \sqrt{\mu/3}$. Let $\delta \equiv q^2 - \mu/3 \ll 1$ be the small supercriticality parameter and $\varepsilon \ll 1$ the order of magnitude of the phase perturbations¹. By exploiting the results of the linear analysis and the principle of the distinguished limit, one is led to adopt the following scaling relationships for δ , the slow time scale τ , the slow space scale η and the expansion of θ and ρ :

$$\delta = \varepsilon^2 \Delta , \quad \tau = \varepsilon^2 T , \quad \eta = \varepsilon , \quad (12a, b, c)$$

$$\theta = \varepsilon \Theta_1 + \varepsilon^2 \Theta_2 + \dots , \quad (12d)$$

$$\rho = \varepsilon^2 \rho_2 + \varepsilon^3 \rho_3 + \dots , \quad (12e)$$

where $\Delta, \Theta_1, \Theta_2, \rho_1, \rho_2, \dots$ are all $O(1)$ quantities.

¹The parameter $\varepsilon \ll 1$ introduced here should not be confused with the small parameter ε that defines the order of magnitude of the *primary* perturbations in section 2.



As shown in Appendix B, one is led, without difficulty from eqs. (11a,b) to the following Boussinesq equation for the dynamics of the phase function $\Theta_1(\eta, \tau)$:

$$\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \tau^2} = \frac{-3\Delta}{2q^2} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \eta^2} - \frac{1}{4q^2} \frac{\partial^4 \Theta_1}{\partial \eta^4} - \frac{3}{q} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \eta^2} .$$

The properties of this evolution equation will not be examined here.

4.2 Forced evolution

As shown in [18, 19], spatially-periodic forcing of *dissipative* systems supporting steady-periodic patterns may lead to the formation of stationary or propagating phase solitons. Such objects are produced in the vicinity of commensurate- incommensurate transitions [17] resulting from the competition between an externally imposed length scale and the intrinsic length scale of the system. The stationary soliton model [18] has been shown in particular to adequately describe forced convection experiments in nematics [15, 16]: phase solitons then correspond to a localized compression of the rolls.

The objective here is to show that phase solitons are also generated when a *conservative* system, namely the Klein-Gordon equation, is spatially-forced. Let $F \ll 1$ denote the weak forcing amplitude. We consider the case of a Benjamin-Feir stable stationary pattern $Q e^{iqX}$ of wavenumber such that $|q| < \sqrt{\frac{\mu}{3}}$. In contrast with the unforced case, there is no restriction imposed on the level of supercriticality. In order to "catch" the effect of forcing at the same order as the leading linear terms, the following scaling relations are introduced:

$$\tau = \varepsilon T , \quad \eta = \varepsilon X , \quad F = \varepsilon^2 \mathcal{F} , \quad (13a, b, c)$$

$$\theta = \Theta_0 + \varepsilon \Theta_1 + \dots , \quad (13d)$$

$$\rho = \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots , \quad (13e)$$

where \mathcal{F} , Θ_0 , Θ_1 , ρ_1 , ρ_2 are all of order unity. Note that phase perturbations are now $O(1)$. As outlined in Appendix C, system (11) leads to the following evolution equation for the phase:

$$\frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \eta^2} - \frac{\mathcal{F}}{Q} \sin(\Theta_0) \quad ,$$

where

$$c^2 = \frac{\mu - 3q^2}{\mu - q^2} \quad .$$

By rescaling the variables as follows

$$\tau \rightarrow \tau \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{Q}} \quad , \quad \eta \rightarrow \eta c \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{Q}} \quad , \quad (14)$$

the phase equation takes the standard form of the Sine-Gordon equation:

$$\frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \eta^2} - \sin(\Theta_0) \quad . \quad (15)$$

This equation is known to be integrable via the inverse scattering transform [39]. In the present context, it is sufficient to note that eq. (15) admits a one-parameter family of soliton solutions that may be written as follows:

$$\Theta_0(\eta, \tau; \beta) = \pm 4 \tan^{-1} \left[\exp \left(\frac{\eta - \beta \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right] \quad , \quad (16)$$

the parameter β being an arbitrary propagation velocity in the range $|\beta| \leq 1$. As shown in the sketches of fig. 5, such kink or antikink solutions correspond to $\pm 2\pi$ phase jumps which travel along the positive or negative η axis. If one reconstructs the total interface deformation by including the carrier wave of wavenumber q , the $\pm 2\pi$ phase solitons are seen to be associated with local contractions or dilatations of the primary periodic structures that propagate along the interface.

The existence of propagating phase solitons has only been demonstrated in the phase dynamics approximation based on the asymptotic scheme (13). To confirm that the same features prevail in the full amplitude equation, direct numerical simulations



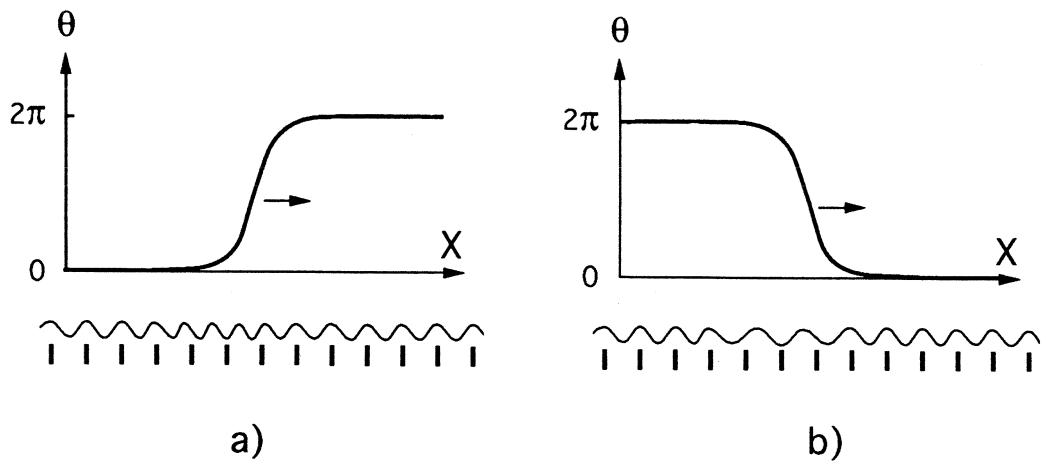


Fig.5. Sine-Gordon solitons and corresponding interface deformations. Black vertical segments indicate the periodicity of forcing. (a) $+2\pi$ soliton; (b) -2π soliton.

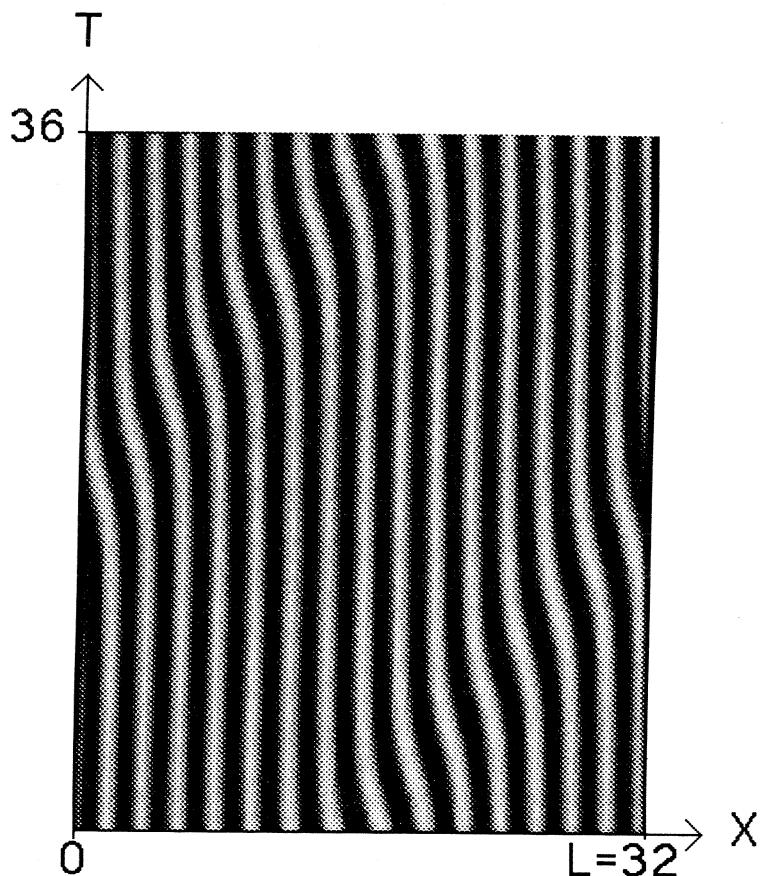


Fig.6. Spatio-temporal $X - T$ diagram of the elevation of the interface, calculated from a direct simulation of the Klein-Gordon equation, with a -2π Sine-Gordon soliton as initial condition (see section 3). $\mu = 3$, $\delta x = 0.4$, $\delta t = 0.012$, $q = 2\pi/L$, $L = 32$, $F = 0.03$, $\beta = 0.95$. The carrier wave at $k_c = 28\pi/L$ has been reintroduced to reconstruct the total elevation.

of the Klein-Gordon equation (5) have been carried out with the exact form (16) of the soliton chosen as initial phase distortion for the periodic pattern. As seen on the spatio-temporal diagram of the interface deformation on fig. 6, a dilatation soliton is produced and it travels along the X axis without any noticeable deformation. Thus the phase dynamics analysis is fully corroborated by direct integration of the Klein-Gordon evolution model.

There remains to determine whether the phase soliton solutions (16) are stable or unstable within the restricted one-dimensional setting adopted in the present investigation. In the notation of eq. (5) phase soliton solutions depend on all three parameters μ , q and F and on the velocity parameter β . In order to determine their stability numerical simulations of eq. (5) are undertaken at $\mu = 3$ and $\beta = 0.94$ for different pairs of values of q and F with the same type of soliton initial conditions as before. The stability properties of solitons with a -2π phase jump are summarized on fig. 7, the $-$ and $+$ symbols indicating stable and unstable solitons respectively. A soliton is said to be stable if numerical noise leaves the interface deformations unchanged over the time interval $T = 180$. It is not necessary to add any external noise and the results obtained in this manner are not modified if one increases the duration of the run above $T = 180$.

Negative phase jumps are seen to be all unstable for negative values of q . In such conditions, spatial forcing of wavenumber $k_c + q < k_c$ uniformly dilates the periodic pattern below its natural wavenumber k_c . The creation at time $t = 0$ of a -2π phase soliton produces an additional local enhancement of this dilatation which the system is incapable of accommodating. As shown on fig .8, a new structure is created which annihilates the initially imposed (-2π) phase jump. This nucleation process takes the form of a spatio-temporal dislocation in the $X - T$ plane. Such a behavior may be interpreted in terms of the primary instability mechanism : stable phase jumps are



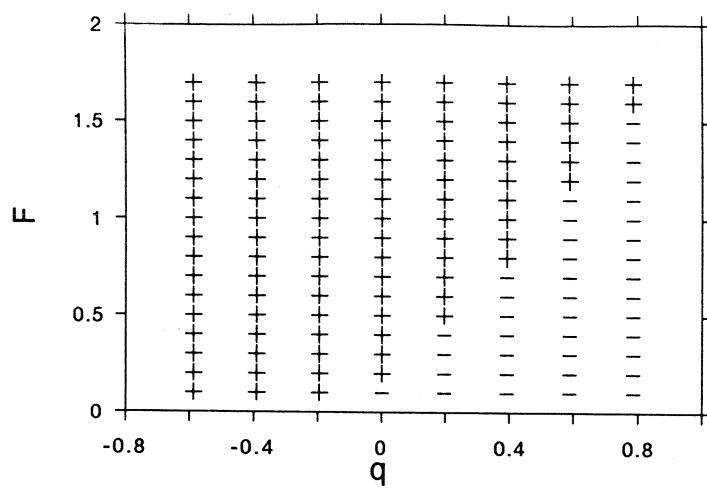


Fig.7. Stability diagram for a -2π Klein-Gordon soliton in the forcing wavenumber q -forcing amplitude F plane. $\mu = 3$, $\delta x = 0.4$, $\beta = 0.94$. —: stable solitons (no detectable deformation within the first 8000 time iterations); +: unstable solitons.

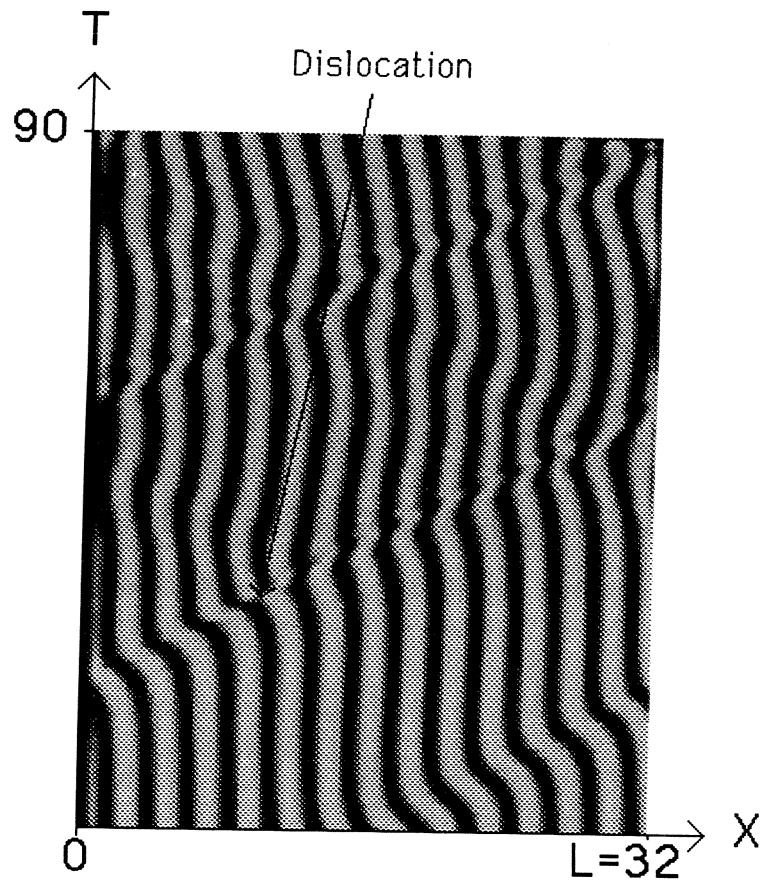


Fig.8. Spatio-temporal $X - T$ diagram of the elevation of the interface, calculated from a direct simulation of the Klein-Gordon equation, with a -2π unstable Sine-Gordon soliton as initial condition (see section 3). $\mu = 2.5$, $\delta x = 0.4$, $\delta t = 0.03$, $q = -2\pi/L$, $L = 32$, $F = 0.03$, $\beta = 0.95$. The carrier wave at $k_c = 28\pi/L$ has been reintroduced to reconstruct the total elevation.

those which tend to bring the periodic pattern closer to its "natural" periodicity k_c . By contrast, when $q > 0$, spatial forcing at $k_c + q$ compresses the structures above the wavenumber k_c . -2π dilatational phase jumps then have a stabilizing influence on the pattern since they locally decrease the wavenumber closer to k_c . However, not all -2π phase jumps are stable: when the forcing level F becomes too high, the interface is strongly constrained to follow the imposed wavenumber $k_c + q$ and again the phase jump is annihilated even though it produces a local dilatation.

The stability diagram of 2π compressive phase jumps is deduced from fig. 7 by a trivial reflection around the F axis and the same qualitative arguments are naturally applicable.

The above reasoning strongly indicates that propagative phase solitons result from the competition between the natural instability of wavenumber k_c and external spatial forcing of wavenumber $k_f = k_c + q$. When one mechanism dominates over the other, Sine-Gordon solitons become unstable.

5 Concluding remarks

The main conclusion of the present study can be stated as follows: when spatially periodic forcing is imposed to the vortex sheet separating two counter-moving streams of immiscible fluids, traveling phase solitons are produced along the interface in the form of local compressions or dilatations of the basic pattern. The propagative nature of the solitons is intimately related to the conservative character of the Kelvin-Helmholtz instability.

As stated in the introduction, phase solitons have also been observed in earlier spatially forced tilting tank experiments [20]: when the forcing wavenumber k_f slightly exceeds the natural wavenumber k_n of the Kelvin-Helmholtz instability, the interface experiences a transition to an incommensurate state which is first signaled by the



appearance of a single phase soliton, in qualitative agreement with the present theory. However, experimental observations differ from the predictions of the Sine-Gordon model in two important respects. First, the observed phase jumps are stationary over the duration of a run and it has not been possible to ascribe to them a finite propagation velocity with any reasonable degree of confidence. This discrepancy is likely to be due to the highly transient nature of the experiment which is too brief to capture the slow evolution times typical of phase dynamics. Secondly, -2π phase jumps are created when $k_f > k_n$ but we have not succeeded in producing $+2\pi$ phase jumps when $k_f < k_n$, although the theoretical model does not introduce any bias between $+2\pi$ and -2π solitons. Finally, it should be emphasized that the experiments are performed in the accelerating mode whereby the tube is kept tilted at a finite angle until the end of the run. The resulting basic flow is therefore accelerating with a velocity difference across the interface that increases linearly with time. Consequently, the experimentally generated basic flow does not remain in the vicinity of threshold, in a regime where the weakly nonlinear analysis developed here is likely to be directly applicable.

To overcome the latter difficulty, experiments have recently been undertaken [36] in the constant shear mode where the tank is returned to its horizontal position beyond an initial accelerating phase. The velocity difference is therefore approximately constant and it can be kept close to the threshold value over the duration of the run. It is then found that the presence of thin diffusive layers on either side of the interface drastically alters the nature of the *primary* instability. The stationary Kelvin-Helmholtz mode predicted by the vortex sheet model is replaced close to onset by traveling Holmboe instability waves. The vortex sheet analysis is consequently no longer valid as shown in [36].

Acknowledgements

We wish to thank S. Le Dizes for many helpful comments and discussions.

LadHyX is part of URA 317, Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS).

The financial support of the Direction des Recherches, Etudes et Techniques (DRET) of the French Ministry of Defense under Grant #90-040 and of the Direction des laboratoires (Ecole Polytechnique) is gratefully acknowledged.



Appendix A: Derivation of the Amplitude Evolution Equations.

The characteristics of the basic flow sketched on fig. 1 have been defined at the beginning of section 2. The perturbed inviscid two-dimensional flow is irrotational and the pressure field in each layer can be expressed as follows:

$$\vec{v}_i^* = U_i^* \vec{e}_x + \vec{\nabla} \phi_i^* ,$$

$$P_i^* = -\rho_i^* g^* y^* + p_i^* ,$$

where $i=1$ (resp. $i=2$) refer to the lower (resp. upper) layer, ϕ_i^* is the perturbation velocity potential, p_i^* the perturbation pressure and \vec{e}_x the unit vector along the streamwise direction.

All variables are made nondimensional with respect to the density scale $\rho_1^* + \rho_2^*$, the capillary length scale L^* and the velocity scale V^* introduced in section 2. In terms of nondimensional unstarred field quantities, Laplace's equation for the perturbation velocity potentials ϕ_i reads:

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} = 0 , \quad (A1a)$$

the velocity field and perturbation pressure being related to the perturbation potential through the expressions

$$\vec{v}_i = U_i \vec{e}_x + \vec{\nabla} \phi_i , \quad (A1b)$$

$$p_i = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \phi_i . \quad (A1c)$$

At the deformed interface $y = \xi(x, t)$, one must satisfy the continuity of particle displacement conditions

$$v_{iy} \Big|_{y=\xi} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \xi , \quad i = 1, 2 , \quad (A1d)$$

together with the pressure jump condition

$$\rho_2 p_2 \Big|_{y=\xi} - \rho_1 p_1 \Big|_{y=\xi} = -\xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Big|_{y=\xi} \left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{y=\xi} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} . \quad (A1e)$$

Finally, the impermeability conditions at the upper and lower boundaries take the form

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \Big|_{y=+h} = 0 \quad , \quad (A1f)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} \Big|_{y=-h+2f \cos(k_f x)} = 0 \quad , \quad (A1g)$$

where \vec{n} is the unit vector normal to the modulated lower wall.

Following classical weakly nonlinear analysis, system (A1) is solved in the vicinity of the threshold of instability defined by the critical velocities U_{i_c} , the critical wavenumber k_c and imaginary critical growth rate σ_c . Exact expressions for these quantities will be given later when we examine the first- order solutions. Supercriticality parameters Δ_i are introduced such that

$$U_i = U_{i_c} + \varepsilon^2 \Delta_i \quad ,$$

where $\varepsilon \ll 1$ is a small parameter. As discussed in section 2, slow space and time variables $(X, T) = \varepsilon(x, t)$ are defined and all dependent variables are expanded in the form

$$\{\phi_i, p_i, \xi\} = \varepsilon \left\{ \phi_i^{(1)}, p_i^{(1)}, \xi^{(1)} \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \phi_i^{(2)}, p_i^{(2)}, \xi^{(2)} \right\} + \varepsilon^3 \left\{ \phi_i^{(3)}, p_i^{(3)}, \xi^{(3)} \right\} + \dots \quad , \quad (A2)$$

where $\{\phi_i^{(j)}, p_i^{(j)}, \xi^{(j)}\}$ are all of order unity. Finally, the modulated lower wall forces the flow at a nearly resonant wavenumber $k_f = k_c + q\varepsilon$ with an $O(\varepsilon^3)$ amplitude so that its shape is given by

$$y = -h + 2\varepsilon^3 F_0 \cos((k_c + q\varepsilon)x) \quad .$$

The misfit parameter q and the normalized forcing amplitude F_0 are both $O(1)$.

By substituting expansion (A2) into the governing equations (A1) one obtains a sequence of perturbation problems as outlined below.



Order ε problem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial y^2} &= 0 \quad , \\ p_i^{(1)} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{i_c} \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_i^{(1)} &= 0 \quad , \\ \left. \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=0} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{i_c} \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi^{(1)} &= 0 \quad , \\ \rho_2 p_2^{(1)} \Big|_{y=0} - \rho_1 p_1^{(1)} \Big|_{y=0} + \xi^{(1)} - \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial x^2} &= 0 \quad , \\ \left. \frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=h} = \left. \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=-h} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Solutions of wavenumber k_c and imaginary growth rate σ_c are sought in the form:

$$\xi^{(1)} = A^{(1)}(X, T) \exp(\sigma_c t + i k_c x) + cc. \quad ,$$

$$\phi_i^{(1)} = (B_i^{(1)}(X, T) e^{-k_c y} + C_i^{(1)}(X, T) e^{k_c y}) \exp(\sigma_c t + i k_c x) + cc. \quad ,$$

where $A^{(1)}(X, T)$, $B_i^{(1)}(X, T)$ and $C_i^{(1)}(X, T)$ are, at this stage, unknown functions of the slow variables X and T.

By substitution of the assumed solutions into the interface and boundary conditions above, one is led to the following homogeneous linear system:

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{k_c} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{k_c h} & -e^{-k_c h} & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{k_c} & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-k_c h} & -e^{k_c h} \\ (1 + k_c^2) & -\rho_1 a_1 & -\rho_1 a_1 & \rho_2 a_2 & \rho_2 a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ B_1^{(1)} \\ C_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{pmatrix} \equiv M \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ B_1^{(1)} \\ C_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad (A3)$$

where $a_i = -(\sigma_c + ik_c U_{i_c})$. In order to obtain a non trivial solution, one must set the determinant of the matrix M equal to zero, which yields the dispersion relation:

$$D(\sigma_c, k_c, U_{1_c}, U_{2_c}) = 0 \quad ,$$

where

$$D(\sigma, k, U_1, U_2) \equiv -[\sigma + ik(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2)]^2 + \rho_1 \rho_2 k^2 (\Delta U)^2 - (k + k^3) \tanh(kh) \quad ,$$

with $\Delta U \equiv U_2 - U_1$. The interface response will resonate with the stationary boundary only if one imposes the zero critical phase velocity condition

$$-\sigma_c / ik_c \equiv \rho_1 U_{1_c} + \rho_2 U_{2_c} = 0 \quad . \quad (A4)$$

The other critical parameters U_{1_c} , U_{2_c} and k_c are then completely defined by the conditions

$$D_\sigma = D_k = 0 \quad , \quad (A5)$$

which yields the critical velocity difference

$$(\Delta U_c)^2 \equiv (U_{2_c} - U_{1_c})^2 = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \left(k_c + \frac{1}{k_c} \right) \tanh(k_c h) \quad ,$$

with k_c satisfying:

$$\frac{\partial}{\partial k} \left[\left(k + \frac{1}{k} \right) \tanh(kh) \right] \Big|_{k=k_c} = 0 \quad .$$

The above relation gives a non-zero value of k_c only if the scaled height h satisfies $h > \sqrt{3}$. This assumption is made in the sequel. Under these conditions, system (A3) may be solved for the functions $B_i^{(1)}(X, T)$ and $C_i^{(1)}(X, T)$ in terms of $A^{(1)}(X, T)$. One obtains:

$$B_1^{(1)}(X, T) = \frac{a_1 A^{(1)}(X, T)}{k_c(1 - e^{2k_c h})} \quad , \quad B_2^{(1)}(X, T) = \frac{a_2 A^{(1)}(X, T)}{k_c(1 - e^{-2k_c h})} \quad ,$$

$$C_1^{(1)}(X, T) = \frac{a_1 A^{(1)}(X, T)}{k_c(e^{-2k_c h} - 1)} \quad , \quad C_2^{(1)}(X, T) = \frac{a_2 A^{(1)}(X, T)}{k_c(e^{2k_c h} - 1)} \quad .$$



It should be emphasized that, in contrast to the case of infinitely deep fluid layers [22], the $O(\varepsilon)$ solution is not solely composed of a linearised neutral component of wave-number k_c . In order to satisfy all the compatibility conditions appearing in higher-order problems, it is necessary, at this stage, to add in each layer an arbitrary streamwise velocity in the form of unknown real amplitude potentials $\mathcal{M}_i^{(1)}(X, T)$, $i=1,2$. These complementary solutions of the linearised problem at *zero wavenumber* are related to the Galilean invariance of the problem, as discussed in section 2. Thus the total $O(\varepsilon)$ perturbation is taken to be:

$$\xi^{(1)} = A^{(1)}(X, T) \exp(\sigma_c t + ik_c x) + cc. ,$$

$$\phi_i^{(1)} = \mathcal{M}_i^{(1)}(X, T) + [(B_i^{(1)}(X, T)e^{-k_c y} + C_i^{(1)}(X, T)e^{k_c y}) \exp(\sigma_c t + ik_c x) + cc.] ,$$

$$p_i^{(1)} = -ik_c U_{i_c} (B_i^{(1)}(X, T)e^{-k_c y} + C_i^{(1)}(X, T)e^{k_c y}) \exp(\sigma_c t + ik_c x) + cc. ,$$

where $\mathcal{M}_i^{(1)}(X, T)$, $i=1,2$, are unknown mean potential functions in the lower and upper fluid respectively.

Order ε^2 problem:

$$\frac{\partial^2 \phi_i^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i^{(2)}}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial x \partial X} , \quad (A6)$$

$$p_i^{(2)} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{i_c} \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_i^{(2)} = - \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{i_c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \phi_i^{(1)} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial y} \right)^2 \right] ,$$

$$\frac{\partial \phi_i^{(2)}}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{i_c} \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi^{(2)} = \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{i_c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \xi^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\xi^{(1)} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial x} \Big|_{y=0} \right] ,$$

$$\begin{aligned} \rho_2 p_2^{(2)} \Big|_{y=0} - \rho_1 p_1^{(2)} \Big|_{y=0} + \xi^{(2)} - \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial x^2} &= -\xi^{(1)} \left(\rho_2 \frac{\partial p_2^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} - \rho_1 \frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial x \partial X} , \end{aligned} \quad (A7)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial y} \right|_{y=h} = 0 , \quad \left. \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial y} \right|_{y=-h} = 0 .$$

The forcing terms on the right-hand side of the above system generate mean, fundamental and second harmonic components. It is convenient to examine the fundamental contribution of wavenumber k_c separately and to seek a *partial* solution of the form

$$\xi^{(2)} = A^{(2)}(X, T) \exp(ik_c x) + cc. ,$$

$$\begin{aligned} \phi_i^{(2)} = & \left[\left(B_i^{(2)}(X, T) + F_i^{(2)}(X, T)y \right) e^{-k_c y} \right. \\ & \left. + \left(C_i^{(2)}(X, T) + H_i^{(2)}(X, T)y \right) e^{k_c y} \right] \exp(ik_c x) + cc. . \end{aligned}$$

The mass conservation equation (A6) implies the following relations

$$F_i^{(2)}(X, T) = i \frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial X}(X, T) , \quad H_i^{(2)}(X, T) = -i \frac{\partial C_i^{(1)}}{\partial X}(X, T) .$$

As a consequence of the interface and boundary conditions, the remaining unknown functions must then satisfy the linear system:

$$M \begin{pmatrix} A^{(2)} \\ B_1^{(2)} \\ C_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(2)} \\ z_2^{(2)} \\ z_3^{(2)} \\ z_4^{(2)} \\ z_5^{(2)} \end{pmatrix} ,$$

where

$$z_1^{(2)} = \frac{1}{k_c} \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{1c} \frac{\partial}{\partial X} \right) A^{(1)} - \frac{i}{k_c} \frac{\partial B_1^{(1)}}{\partial X} + \frac{i}{k_c} \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial X} ,$$

$$z_2^{(2)} = e^{k_c h} \left(k_c + \frac{1}{k_c} \right) i \frac{\partial B_1^{(1)}}{\partial X} + e^{-k_c h} \left(k_c - \frac{1}{k_c} \right) i \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial X} ,$$

$$z_3^{(2)} = \frac{1}{k_c} \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{2c} \frac{\partial}{\partial X} \right) A^{(1)} - \frac{i}{k_c} \frac{\partial B_2^{(1)}}{\partial X} + \frac{i}{k_c} \frac{\partial C_2^{(1)}}{\partial X} ,$$



$$z_4^{(2)} = e^{-k_c h} \left(\frac{1}{k_c} - k_c \right) i \frac{\partial B_2^{(1)}}{\partial X} - e^{k_c h} \left(k_c + \frac{1}{k_c} \right) i \frac{\partial C_2^{(1)}}{\partial X} ,$$

$$z_5^{(2)} = 2ik_c \frac{\partial A^{(1)}}{\partial X} + \rho_2 \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{2c} \frac{\partial}{\partial X} \right) (B_2^{(1)} + C_2^{(1)}) - \rho_1 \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{1c} \frac{\partial}{\partial X} \right) (B_1^{(1)} + C_1^{(1)}) .$$

In order for this system to admit a nontrivial solution, the vector $z^{(2)}$ must be orthogonal to the kernel of the adjoint matrix M generated by the vector K such that

$$K^\perp = \left(\frac{\rho_1 \bar{a}_1}{\tanh(k_c h)}, \frac{\rho_1 \bar{a}_1}{\sinh(k_c h)}, \frac{\rho_2 \bar{a}_2}{\tanh(k_c h)}, \frac{\rho_2 \bar{a}_2}{\sinh(k_c h)}, 1 \right) ,$$

where a bar denotes the complex conjugate. The orthogonality condition $\sum_{i=1}^5 \bar{K}_i z_i^{(2)} = 0$ then leads to the following amplitude equation for $A^{(1)}(X, T)$:

$$iD_\sigma \frac{\partial A^{(1)}}{\partial T} + D_k \frac{\partial A^{(1)}}{\partial X} = 0 .$$

The above equation reflects the local properties of the dispersion relation in the vicinity of the critical wavenumber k_c . According to the conditions (A5), the derivative coefficients D_σ and D_k vanish at critical. The orthogonality condition is therefore trivially satisfied at this order. Without loss of generality, the amplitude function $A^{(2)}$ may be set equal to zero.

The fundamental component at order ε^2 is denoted by the letter "f" and it is then found to take the final form:

$$f\xi^{(2)} = 0 ,$$

$$f\phi_i^{(2)} = [(B_i^{(2)} + F_i^{(2)}y) e^{-k_c y} + (C_i^{(2)} + H_i^{(2)}y) e^{k_c y}] \exp(ik_c x) + cc. ,$$

$$fp_i^{(2)} = -ik_c U_{i_c} \left[\left(B_i^{(2)} + F_i^{(2)}y - \frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial T} - U_{i_c} \frac{\partial B_i^{(1)}}{\partial X} \right) e^{-k_c y} \right. \\ \left. + \left(C_i^{(2)} + H_i^{(2)}y - \frac{\partial C_i^{(1)}}{\partial T} - U_{i_c} \frac{\partial C_i^{(1)}}{\partial X} \right) e^{k_c y} \right] \exp(ik_c x) + cc. ,$$

where

$$\begin{aligned} B_1^{(2)} &= \frac{\partial A^{(1)}}{\partial T} \left(\frac{e^{-k_c h}}{2k_c \sinh(k_c h)} \right) - \frac{\partial A^{(1)}}{\partial X} \left(\frac{U_{1c} h}{2 \sinh^2(k_c h)} \right) , \\ B_2^{(2)} &= -\frac{\partial A^{(1)}}{\partial T} \left(\frac{e^{k_c h}}{2k_c \sinh(k_c h)} \right) + \frac{\partial A^{(1)}}{\partial X} \left(\frac{U_{2c} h}{2 \sinh^2(k_c h)} \right) , \\ C_1^{(2)} &= \frac{\partial A^{(1)}}{\partial T} \left(\frac{e^{k_c h}}{2k_c \sinh(k_c h)} \right) - \frac{\partial A^{(1)}}{\partial X} \left(\frac{U_{1c} h}{2 \sinh^2(k_c h)} \right) , \\ C_2^{(2)} &= -\frac{\partial A^{(1)}}{\partial T} \left(\frac{e^{-k_c h}}{2k_c \sinh(k_c h)} \right) + \frac{\partial A^{(1)}}{\partial X} \left(\frac{U_{2c} h}{2 \sinh^2(k_c h)} \right) . \end{aligned}$$

The second harmonic component of wavenumber $2k_c$ identified by the letter "s" may be calculated without difficulty and it is found to be

$$\begin{aligned} s\xi^{(2)} &= sA^{(2)} \exp(2ik_c x) + cc. , \\ s\phi_i^{(2)} &= [sB_i^{(2)} e^{-2k_c y} + sC_i^{(2)} e^{2k_c y}] \exp(2ik_c x) + cc. , \\ sp_i^{(2)} &= -2ik_c U_{ic} (sB_i^{(2)} e^{-2k_c y} + sC_i^{(2)} e^{2k_c y}) \exp(2ik_c x) + cc. , \end{aligned}$$

where

$$sA^{(2)} = \Gamma(A^{(1)})^2 ,$$

$$\begin{aligned} sB_1^{(2)} &= -\frac{ik_c U_{1c} (A^{(1)})^2}{e^{4k_c h} - 1} \left(\frac{1}{\tanh(k_c h)} - \frac{\Gamma}{k_c} \right) , \\ sB_2^{(2)} &= \frac{ik_c U_{2c} (A^{(1)})^2}{e^{-4k_c h} - 1} \left(\frac{1}{\tanh(k_c h)} + \frac{\Gamma}{k_c} \right) , \\ sC_1^{(2)} &= \frac{ik_c U_{1c} (A^{(1)})^2}{e^{-4k_c h} - 1} \left(\frac{1}{\tanh(k_c h)} - \frac{\Gamma}{k_c} \right) , \\ sC_2^{(2)} &= -\frac{ik_c U_{2c} (A^{(1)})^2}{e^{4k_c h} - 1} \left(\frac{1}{\tanh(k_c h)} + \frac{\Gamma}{k_c} \right) . \end{aligned}$$

The constant Γ is defined as

$$\Gamma \equiv k_c^2 \left(1 - \frac{2}{\tanh(k_c h)} \right) \frac{\rho_2 U_{2c}^2 - \rho_1 U_{1c}^2}{(1 + k_c^2) \tanh^2(k_c h) - 3k_c^2} .$$



Finally the mean component identified by the letter "m" is given by

$$m\xi^{(2)} = \mathcal{H}^{(2)}(X, T) ,$$

$$m\phi_i^{(2)} = \mathcal{M}_i^{(2)}(X, T) ,$$

$$mp_i^{(2)} = - \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{i_c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \mathcal{M}_i^{(1)} - 2k_c^2 \left(|B_i^{(1)}|^2 e^{-2k_c y} + |C_i^{(1)}|^2 e^{2k_c y} \right) .$$

In the $O(\varepsilon^2)$ solution, the mean component at zero wavenumber is seen to involve three unknown real amplitude functions: the mean perturbation potentials in each layer $\mathcal{M}_i^{(2)}(X, T)$, $i=1,2$ and the mean elevation of the interface $\mathcal{H}^{(2)}(X, T)$. These functions are the counterparts of the mean components ² introduced at $O(\varepsilon)$. Upon enforcing the pressure jump condition (A7) at zero wavenumber one obtains the following evolution equation for the mean fields:

$$\mathcal{H}^{(2)} + \rho_1 \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{1_c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \mathcal{M}_1^{(1)} - \rho_2 \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{2_c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \mathcal{M}_2^{(1)} = S|A|^2 , \quad (A8)$$

with the real constant S given by

$$S = \frac{k_c^2 (\rho_2 U_{2_c}^2 - \rho_1 U_{1_c}^2)}{\sinh^2(k_c h)} . \quad (A9)$$

The total solution at $O(\varepsilon^2)$ is given by

$$\xi^{(2)} = m\xi^{(2)} + f\xi^{(2)} + s\xi^{(2)} ,$$

$$\phi_i^{(2)} = m\phi_i^{(2)} + f\phi_i^{(2)} + s\phi_i^{(2)} ,$$

$$p_i^{(2)} = mp_i^{(2)} + fp_i^{(2)} + sp_i^{(2)} .$$

Order ε^3 problem:

$$\frac{\partial^2 \phi_i^{(3)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i^{(3)}}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 \phi_i^{(2)}}{\partial x \partial X} - \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial X^2} ,$$

²Note, however that we had then omitted to include a mean elevation function $\mathcal{H}^{(1)}(X, T)$. If it had been introduced, we would have found from the $O(\varepsilon)$ pressure condition that $\mathcal{H}^{(1)}(X, T) \equiv 0$.

$$\begin{aligned}
& p_i^{(3)} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{i_c} \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_i^{(3)} = - \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{i_c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \phi_i^{(2)} - \vec{\nabla} \phi_i^{(1)} \cdot \vec{\nabla} \phi_i^{(2)} - \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial X} - \Delta_i \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial x} , \\
& \frac{\partial \phi_i^{(3)}}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{i_c} \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi^{(3)} = \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{i_c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \xi^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[(\xi^{(1)})^2 \frac{\partial^2 \phi_i^{(1)}}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0} \right] \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[\xi^{(1)} \frac{\partial \phi_i^{(2)}}{\partial x} \Big|_{y=0} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\xi^{(2)} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial x} \Big|_{y=0} \right] \quad (A10a, b) \\
& \quad + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial X} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial x} \Big|_{y=0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial X} \Big|_{y=0} + \Delta_i \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial x} , \\
& \rho_2 p_2^{(3)} \Big|_{y=0} - \rho_1 p_1^{(3)} \Big|_{y=0} + \xi^{(3)} - \frac{\partial^2 \xi^{(3)}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial x \partial X} + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial X^2} - \xi^{(1)} \left(\rho_2 \frac{\partial p_2^{(2)}}{\partial y} \Big|_{y=0} - \rho_1 \frac{\partial p_1^{(2)}}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) \\
& \quad - \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 - \xi^{(2)} \left(\rho_2 \frac{\partial p_2^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} - \rho_1 \frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) \\
& \quad - \frac{(\xi^{(1)})^2}{2} \left(\rho_2 \frac{\partial^2 p_2^{(1)}}{\partial y^2} \Big|_{y=0} - \rho_1 \frac{\partial^2 p_1^{(1)}}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right) ,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi_1^{(3)}}{\partial y} \Big|_{y=-h} = i U_1 F_0 k_c \exp(i(k_c x + qX)) + cc. , \quad (A11)$$

$$\frac{\partial \phi_2^{(3)}}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0 . \quad (A12)$$

It is only necessary to consider at this stage the mean and fundamental contributions.

The fundamental component at wavenumber k_c is of the form

$$\xi^{(3)} = A^{(3)} \exp(i k_c x) + cc. ,$$

$$\phi_i^{(3)} = \left[(B_i^{(3)} + F_i^{(3)} y + G_i^{(3)} y^2) e^{-k_c y} + (C_i^{(3)} + H_i^{(3)} y + I_i^{(3)} y^2) e^{k_c y} \right] \exp(i k_c x) + cc. ,$$



where

$$\begin{aligned} F_i^{(3)}(X, T) &= i \frac{\partial B_i^{(2)}}{\partial X}(X, T) , \quad G_i^{(3)}(X, T) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_i^{(1)}}{\partial X^2}(X, T) , \\ H_i^{(3)}(X, T) &= -i \frac{\partial C_i^{(2)}}{\partial X}(X, T) , \quad I_i^{(3)}(X, T) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_i^{(1)}}{\partial X^2}(X, T) . \end{aligned}$$

The remaining unknown functions satisfy the linear system

$$M \begin{pmatrix} A^{(3)} \\ B_1^{(3)} \\ C_1^{(3)} \\ B_2^{(3)} \\ C_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(3)} \\ z_2^{(3)} \\ z_3^{(3)} \\ z_4^{(3)} \\ z_5^{(3)} \end{pmatrix} ,$$

where the forcing terms are given by

$$\begin{aligned} z_1^{(3)} &= -\frac{i}{k_c} \frac{\partial B_1^{(2)}}{\partial X} + \frac{i}{k_c} \frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial X} + iA^{(1)}\Delta_1 - 2k_c \overline{A^{(1)}} (sB_1^{(2)} + sC_1^{(2)}) + k_c \Gamma A^{(1)2} \left(\overline{B_1^{(1)}} + \overline{C_1^{(1)}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} k_c^2 A^{(1)2} \left(-\overline{B_1^{(1)}} + \overline{C_1^{(1)}} \right) - k_c^2 |A^{(1)}|^2 (-B_1^{(1)} + C_1^{(1)}) + iA^{(1)} \frac{\partial \mathcal{M}_1^{(1)}}{\partial X} , \\ z_2^{(3)} &= iU_1 F_0 k_c e^{iqX} + e^{k_c h} \left[i \frac{\partial B_1^{(2)}}{\partial X} \left(\frac{1}{k_c} + h \right) + \frac{\partial^2 B_1^{(1)}}{\partial X^2} \left(\frac{h}{k_c} + \frac{h^2}{2} \right) \right] \\ &\quad + e^{-k_c h} \left[i \frac{\partial C_1^{(2)}}{\partial X} \left(-\frac{1}{k_c} + h \right) + \frac{\partial^2 C_1^{(1)}}{\partial X^2} \left(\frac{h}{k_c} - \frac{h^2}{2} \right) \right] , \\ z_3^{(3)} &= -\frac{i}{k_c} \frac{\partial B_2^{(2)}}{\partial X} + \frac{i}{k_c} \frac{\partial C_2^{(2)}}{\partial X} + iA^{(1)}\Delta_2 - 2k_c \overline{A^{(1)}} (sB_2^{(2)} + sC_2^{(2)}) + k_c \Gamma (A^{(1)})^2 \left(\overline{B_2^{(1)}} + \overline{C_2^{(1)}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} k_c^2 (A^{(1)})^2 \left(-\overline{B_2^{(1)}} + \overline{C_2^{(1)}} \right) - k_c^2 |A^{(1)}|^2 (-B_2^{(1)} + C_2^{(1)}) iA^{(1)} \frac{\partial \mathcal{M}_2^{(1)}}{\partial X} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_4^{(3)} &= e^{-k_c h} \left[i \frac{\partial B_2^{(2)}}{\partial X} \left(\frac{1}{k_c} - h \right) + \frac{\partial^2 B_2^{(1)}}{\partial X^2} \left(-\frac{h}{k_c} + \frac{h^2}{2} \right) \right] \\
&\quad + e^{k_c h} \left[-i \frac{\partial C_2^{(2)}}{\partial X} \left(\frac{1}{k_c} + h \right) - \frac{\partial^2 C_2^{(1)}}{\partial X^2} \left(\frac{h}{k_c} + \frac{h^2}{2} \right) \right] , \\
z_5^{(3)} &= \rho_2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{2c} \frac{\partial}{\partial X} \right) (B_2^{(2)} + C_2^{(2)}) + 4k_c^2 \left(\overline{B_2^{(1)}} s B_2^{(2)} + \overline{C_2^{(1)}} s C_2^{(2)} \right) \right] \\
&\quad - \rho_1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{1c} \frac{\partial}{\partial X} \right) (B_1^{(2)} + C_1^{(2)}) + 4k_c^2 \left(\overline{B_1^{(1)}} s B_1^{(2)} + \overline{C_1^{(1)}} s C_1^{(2)} \right) \right] \\
&\quad + 4ik_c^2 \overline{A^{(1)}} \left[\rho_2 U_{2c} (-s B_2^{(2)} + s C_2^{(2)}) - \rho_1 U_{1c} (-s B_1^{(2)} + s C_1^{(2)}) \right] \\
&\quad - 4k_c^3 A^{(1)} \left[\rho_2 \left(|B_2^{(1)}|^2 - |C_2^{(1)}|^2 \right) - \rho_1 \left(|B_1^{(1)}|^2 - |C_1^{(1)}|^2 \right) \right] \\
&\quad - ik_c^2 s A^{(2)} \left[\rho_2 U_{2c} \left(\overline{B_2^{(1)}} + \overline{C_2^{(1)}} \right) - \rho_1 U_{1c} \left(\overline{B_1^{(1)}} + \overline{C_1^{(1)}} \right) \right] \\
&\quad - ik_c^3 \frac{(A^{(1)})^2}{2} \left[\rho_2 U_{2c} (B_2^{(1)} + C_2^{(1)}) - \rho_1 U_{1c} (B_1^{(1)} + C_1^{(1)}) \right] \\
&\quad + i\rho_2 k_c \left(\Delta_2 + \frac{\partial \mathcal{M}_2^{(1)}}{\partial X} \right) (B_2^{(1)} + C_2^{(1)}) - i\rho_1 k_c \left(\Delta_1 + \frac{\partial \mathcal{M}_1^{(1)}}{\partial X} \right) (B_1^{(1)} + C_1^{(1)}) \\
&\quad - ik_c^2 \mathcal{H}^{(2)} \left[\rho_1 U_{1c} (-B_1^{(1)} + C_1^{(1)}) - \rho_2 U_{2c} (-B_2^{(1)} + C_2^{(1)}) \right] \\
&\quad + \frac{3}{2} k_c^4 |A^{(1)}|^2 A^{(1)} .
\end{aligned}$$

Upon enforcing the orthogonality condition $\sum_{i=1}^5 \overline{K_i} z_i^{(3)} = 0$, one is led to the amplitude equation

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} D_{\sigma\sigma} \frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial T^2} + \frac{1}{2} D_{kk} \frac{\partial^2 A^{(1)}}{\partial X^2} &= (\Delta_2 - \Delta_1) D_{\Delta U} A^{(1)} + N |A^{(1)}|^2 A^{(1)} + F e^{iqx} \\
&\quad + 2k_c^2 \left(\rho_1 U_{1c} \frac{\partial \mathcal{M}_1^{(1)}}{\partial X} + \rho_2 U_{2c} \frac{\partial \mathcal{M}_2^{(1)}}{\partial X} \right) A^{(1)} \quad (A13) \\
&\quad - R \mathcal{H}^{(2)} A^{(1)} .
\end{aligned}$$



where

$$D_{\sigma\sigma} = -2 \quad , \quad D_{\Delta U} = 2\rho_1\rho_2 k_c^2 \Delta U_c \quad , \quad (A14a, b)$$

$$D_{kk} = 2 \left(\frac{1}{k_c} - 2k_c \right) \tanh(k_c h) + \frac{-2h(1+3k_c^3) + 2h^2(k_c + k_c^3) \tanh(k_c h)}{\cosh^2(k_c h)} \quad , \quad (A15)$$

$$\begin{aligned} N &= (\rho_2 U_{2c}^2 - \rho_1 U_{1c}^2) (3 - \tanh^2(k_c h)^2) \frac{\Gamma k_c^3}{\tanh(k_c h)} \\ &\quad + (\rho_2 U_{2c}^2 + \rho_1 U_{1c}^2) (1 - 2 \tanh^2(k_c h)) \frac{2k_c^4}{\tanh^2(k_c h)} \\ &\quad - (\rho_2 U_{2c}^2 + \rho_1 U_{1c}^2) \frac{h^2 k_c^2}{\sinh^2(k_c h)} + \frac{3}{2} k_c^5 \tanh(k_c h) \quad , \end{aligned} \quad (A16)$$

$$F = \frac{\rho_1 U_{1c}^2 F_0}{\sinh(k_c h)} \quad , \quad (A17)$$

$$R = k_c^3 \tanh(k_c h) (\rho_2 U_{2c}^2 - \rho_1 U_{1c}^2) \quad . \quad (A18)$$

Finally the continuity of particle displacement conditions (A10a,b) and the boundary conditions (A11), (A12) for the mean fields at order ε^3 lead to the following set of evolution equations:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{2c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \mathcal{H}^{(2)} - h \frac{\partial^2 \mathcal{M}_2^{(1)}}{\partial X^2} = 0 \quad (A19a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{1c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \mathcal{H}^{(2)} + h \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1^{(1)}}{\partial X^2} = 0 \quad (A19b)$$

It is preferable to write the final results in terms of streamwise mean velocity fields $\mathcal{U}_i(X, T) \equiv \frac{\partial \mathcal{M}_i^{(1)}}{\partial X}$. In order to do so, eq. (A8) can simply be expressed in terms of $\mathcal{U}_i(X, T)$ by differentiating it once with respect to X , while trivial substitutions can be made to rewrite eqs. (A13), (A19a,b). With a change to the simplified notation

$\mathcal{H}^{(2)} \rightarrow \mathcal{H}$, $A^{(1)} \rightarrow A$, the evolution equations (A19a,b), (A8), (A13) can be cast into the final form:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{2c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \mathcal{H} - h \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial X} = 0 \quad , \\ & \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{1c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \mathcal{H} + h \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial X} = 0 \quad , \\ & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} - \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{2c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \rho_2 \mathcal{U}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial T} + U_{1c} \frac{\partial}{\partial X} \right) \rho_1 \mathcal{U}_1 = S \frac{\partial |A|^2}{\partial X}, \\ & -\frac{1}{2} D_{\sigma\sigma} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{1}{2} D_{kk} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} = \Delta D_{\Delta U} A + N |A|^2 A + F e^{iqX} \\ & \quad + 2k_c^2 (\rho_1 U_{1c} \mathcal{U}_1 + \rho_2 U_{2c} \mathcal{U}_2) A \\ & \quad - R \mathcal{H} A \quad . \end{aligned}$$

The coefficients $D_{\sigma\sigma}$, $D_{\Delta U}$ and D_{kk} of the linear terms are given by relations (A14a,b), (A15). The coefficients N , F , R and S of the various nonlinear terms are given by relations (A16), (A17), (A18) and (A9) respectively.

If one makes the *Boussinesq approximation* and sets $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$, the nonlinear coupling coefficients R and S vanish and one finds for the amplitude equation a forced Klein-Gordon equation as discussed in section 2. Under this assumption the two remaining nonlinear terms can be written

$$F = \frac{\Delta U_c^2 F_0}{4 \sinh(k_c h)} \quad , \quad (A20)$$

$$N = \frac{3}{2} k_c^5 \tanh(k_c h) + \frac{k_c^2 \Delta U_c^2}{4} \left(\frac{2k_c^2}{\tanh^2(k_c h)} - 4k_c^2 + \frac{h^2}{\sinh^2(k_c h)} \right) \quad . \quad (A21)$$

The critical conditions k_c , ΔU_c may be determined from (A5). By substitution into (A21), one readily verifies that the coefficient N of the cubic nonlinear term $|A|^2 A$



remains negative as long as $h > \sqrt{3}$. The variations of N with the scaled height h are represented on fig. 9.

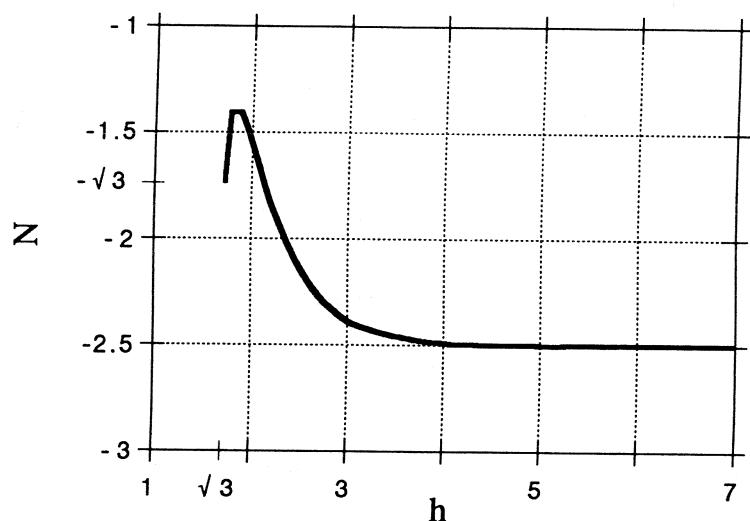


Fig.9. Variation of coefficient N of the cubic nonlinear term versus h in the Boussinesq approximation [eq. (A21)].

Appendix B: Derivation of the Boussinesq phase equation.

When the forcing amplitude is zero, the amplitude $\rho(X, T)$ and the phase $\theta(X, T)$ of the perturbations satisfy (11a,b) with $F = 0$.

If a small supercriticality parameter δ is introduced such that $\delta \equiv q^2 - \mu/3 = \Delta\varepsilon^2$, the amplitude Q of the stationary pattern can be written as follows:

$$Q = \sqrt{\mu - q^2} = \sqrt{2q^2 - 3\delta} = \sqrt{2}q \left(1 + 3\varepsilon^2 \frac{\Delta}{4q^2} \right) + O(\varepsilon^2) . \quad (B1)$$

Upon substituting the scaling relations and expansions (12a-e) as well as approximation (B1) into (11a,b) with $F = 0$, one obtains the sequence of problems defined below.

Order ε^2 :

$$\rho_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} . \quad (B2)$$

Order ε^3 :

$$\begin{aligned} \rho_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \eta} , \\ \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \eta^2} &= -\sqrt{2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \eta} . \end{aligned}$$

Order ε^4 :

$$\begin{aligned} -4q^2 \rho_4 - 6\Delta \rho_2 + \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial \eta^2} - 2\sqrt{2}q^2 \frac{\partial \Theta_3}{\partial \eta} - \sqrt{2}q \left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} \right)^2 - 3\sqrt{2}\rho_2^2 \\ + \left(\frac{3\Delta}{\sqrt{2}} - 2\rho_2 q \right) \frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} = 0 , \end{aligned} \quad (B3)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \eta^2} = -\sqrt{2} \frac{\partial \rho_3}{\partial \eta} .$$

Order ε^5 :

$$\begin{aligned} -4q^2 \rho_5 - 6\Delta \rho_3 + \frac{\partial^2 \rho_3}{\partial \eta^2} - 2\sqrt{2}q^2 \frac{\partial \Theta_4}{\partial \eta} - 2\rho_3 q \frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} + \left(\frac{3\Delta}{\sqrt{2}} - 2\rho_2 q \right) \frac{\partial \Theta_2}{\partial \eta} = 0 , \\ \sqrt{2}q \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \eta^2} = \sqrt{2}q \frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial \eta^2} + 2q \frac{\partial \rho_4}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} \frac{\partial \rho_2}{\partial \eta} + \left(\rho_2 - \frac{3\sqrt{2}\Delta}{4q} \right) \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \eta^2} . \end{aligned} \quad (B4)$$



In order to recast (B4) into a single phase equation for Θ_1 , ρ_2 is replaced by its expression (B2) and $\sqrt{2}q\frac{\partial^2\Theta_3}{\partial\eta^2}+2q\frac{\partial\rho_4}{\partial\eta}$ is extracted from eq. (B3). The phase equation then take the final form:

$$\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\tau^2} = \frac{-3\Delta}{2q^2}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\eta^2} - \frac{1}{4q^2}\frac{\partial^4\Theta_1}{\partial\eta^4} - \frac{3}{q}\frac{\partial\Theta_1}{\partial\eta}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\eta^2}$$

Appendix C: Derivation of the Sine-Gordon phase equation.

The amplitude and phase perturbations $\rho(X, T)$ and $\theta(X, T)$ are governed by equations (12a,b). The wavenumber q is assumed to be in the stable range $|q| < \sqrt{\mu/3}$ and scaling relations are defined as in (13a-e) in terms of the small amplitude parameter ε .

The following sequence of perturbation problems is then readily derived.

Order ε :

$$\rho_1 = -\frac{q}{Q} \frac{\partial \Theta_0}{\partial \eta} . \quad (C1)$$

Order ε^2 :

$$\begin{aligned} -2Q^2\rho_2 - 2Qq\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} &= -Q \left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial \tau} \right)^2 + Q \left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial \eta} \right)^2 + 2\rho_1 q \frac{\partial \Theta_0}{\partial \eta} + 3Q\rho_1^2 - \mathcal{F} \cos(\Theta_0) , \\ Q \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \tau^2} &= Q \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \eta^2} + 2q \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} - \mathcal{F} \sin(\Theta_0) . \end{aligned} \quad (C2)$$

The Sine-Gordon phase equation is obtained by substituting ρ_1 from (C1) into (C2). The final result is:

$$\frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \eta^2} - \frac{\mathcal{F}}{Q} \sin(\Theta_0) ,$$

where

$$c^2 = \frac{\mu - 3q^2}{\mu - q^2} .$$



References

- [1] Y. Pomeau and P. Manneville, *J. Phys. Lettres* 40 (1979) 609.
- [2] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer, Berlin, 1984).
- [3] P. Manneville, *Dissipative Structures and weak Turbulence* (Academic Press, Boston, 1990).
- [4] A. C. Newell, T. Passot, and J. Lega, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 25 (1993) 399.
- [5] W. Eckhaus, *Studies in Non Linear Stability Theory* (Springer, Berlin, 1965).
- [6] R. M. Clever and F. H. Busse, *J. Fluid Mech.* 65 (1974) 625.
- [7] A. Pocheau, V. Croquette, P. Legal and C. Poitour, *Europhys. Lett.* 3 (1987) 915.
- [8] H. Riecke and H. G. Paap, *Phys. Rev. A* 33 (1986) 547.
- [9] M. A. Dominguez-Lerma, D. S. Cannell and G. Ahlers, *Phys. Rev. A* 34 (1986) 4956.
- [10] T. B. Benjamin and J. E. Feir, *J. Fluid Mech.* 27 (1967) 417.
- [11] H. C. Yuen and B. M. Lake, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 12 (1980) 303.
- [12] E. Fermi, J. Pasta and S. Ulam, *Collected papers of Enrico Fermi*, ed. by E. Segre (University of Chicago, Chicago) 2 (1965) 978.
- [13] J. T. Stuart and R. C. Di Prima, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 362 (1978) 27.

- [14] P. Coullet and S. Fauve, Phys. Rev. Lett. 47 (1985) 2857.
- [15] M. Lowe, J. P. Gollub and T. C. Lubensky, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 786.
- [16] M. Lowe and J. P. Gollub, Phys. Rev. A 31 (1985) 3895.
- [17] P. Bak, Rep. Prog. Phys. 45 (1982) 587.
- [18] P. Coullet, Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 724.
- [19] P. Coullet and P. Huerre, Physica D 23 (1986) 27.
- [20] O. Pouliquen, J. M. Chomaz and P. Huerre, Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 2596.
- [21] S. A. Thorpe, J. Fluid Mech. 32 (1968) 693.
- [22] M. A. Weissman, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 290 (1979) 639.
- [23] C. G. Lange and A. C. Newell, SIAM J. Appl. Math. 21 (1971) 605.
- [24] J. Pedlosky, J. Atmos. Sci. 29 (1972) 53.
- [25] B. Dubrulle, J. M. Chomaz, S. Kumar and M. Rieutord, "Non Linear Stability of Slender Accretion Disks by Bifurcation Methods" to appear in Geophys. Astr. Fluid Dyn.
- [26] P. K. Newton and J. B. Keller, SIAM J. Appl. Math. 45 (1987) 959.
- [27] P. K. Newton and J. B. Keller, Wave Motion 10 (1988) 183.
- [28] Lord Kelvin , Phil. Mag. 42 (1871) 368.
- [29] P. G. Drazin and W. H. Reid, Hydrodynamic Stability (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981).
- [30] J. M Chomaz, P. Huerre and L. G. Redekopp, Bull. Am. Phys. Soc 31 (1986) 1696.



- [31] S. Pavithran, "Coupling of gravity waves and convection: a natural codimension three problem", Ph. D. dissertation, Department of Aerospace Engineering, University of Southern California, Los Angeles, U. S. A. (1991).
- [32] S. Pavithran and L. G. Redekopp, "The coupling of gravity waves and convection: amplitude equations and planform selection", Submitted to J. Fluid Mech. (1993).
- [33] A. Davey and K. Stewartson, Proc. R. Soc. A 388, (1974) 191.
- [34] V. D. Djordjevic and L. G. Redekopp, J. Fluid Mech. 79 (1977) 703.
- [35] Y. Ma and L. G. Redekopp, Phys. Fluids 22 (1979) 1872.
- [36] O. Pouliquen, J. M Chomaz and P. Huerre, "Propagative Holmboe waves at the interface between two immiscible fluids", submitted to J. Fluid Mech. (1993).
- [37] A. C. Newell and J. A. Whitehead, J. Fluid Mech. 38 (1969) 279.
- [38] H. C. Yuen and W. E. Ferguson Jr., Phys. Fluids 21 (1978) 1275.
- [39] G. L. Lamb, Elements of Soliton Theory (Wiley, New York, 1980).

Chapitre V:
Ondes propagatives de
Holmboe.



Ce chapitre présente des expériences réalisées en rabaissant le réservoir à l'horizontale après inclinaison, dans le but d'obtenir un cisaillement constant entre les deux fluides. Il est la suite naturelle des chapitres précédents qui présentaient des expériences de dynamique fortement non-linéaire dans des écoulements accélérés (Chap. III), ainsi qu'un modèle théorique faiblement non-linéaire (Chap. IV). Il manquait une analyse expérimentale de la dynamique faiblement non-linéaire de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz pour réaliser un lien entre les résultats théoriques et expérimentaux. Dans cette optique, nous avons réalisé des expériences en rabaissant le réservoir à l'horizontale afin de rester au voisinage du seuil.

Ce faisant, nous avons observé une nouvelle instabilité, révélée par la présence d'ondes propagatives à l'interface. Cette transition de l'instabilité stationnaire de Kelvin-Helmholtz à une instabilité propagative s'est avérée être due aux couches limites de part et d'autre de l'interface qui ne peuvent plus être négligées lorsque le cisaillement est faible. L'article qui suit présente une étude théorique et expérimentale de ces ondes propagatives.



Propagating Holmboe waves at the interface between two immiscible fluids.

O.Pouliquen, J.M Chomaz, P. Huerre
Laboratoire d'hydrodynamique (LadHyX*)
Ecole polytechnique
F-91128 PALAISEAU
FRANCE.

* LadHyX is part of CNRS/URA317.

Submitted for publication to
the Journal of Fluid Mechanics.



ABSTRACT

The instability of the surface of discontinuity separating two streams of immiscible constant density fluids is studied experimentally and theoretically near onset when surface tension effects are significant. Following Thorpe's original idea, a tube filled with two immiscible fluids is tilted at an angle and returned to its horizontal position to produce a constant velocity difference between both streams that can be varied continuously across threshold. In order to control the wavenumber near onset, the flow is spatially forced by periodically distributing small obstacles on the upper side of the tank. When the kinematic viscosities of each fluid are nearly equal, ones observes two counter-propagating waves of equal amplitude, which cannot be explained from a vortex sheet model. A linear stability analysis of a density discontinuity embedded within a piecewise linear velocity profile demonstrates that such waves are Holmboe modes associated with the diffusive layers above and below the interface. Good agreement is obtained between the measured and predicted values of the critical velocity difference, propagation velocity and growth factors of the waves. The instability analysis of the asymmetric velocity profile reveals that the breaking of reflectional symmetry gives rise to a single propagating wave near onset. When the kinematic viscosities of each fluid differ, the first destabilized wave is observed to propagate in the same direction as the less viscous fluid, in agreement with the theoretical results and the dominant direction of propagation can be manipulated by adjusting the viscosities accordingly.

I. INTRODUCTION.

In this combined analytical and experimental study, the onset of the first instability at the interface between two statically stable fluids in relative shearing motion is examined when surface tension effects are significant. A qualitative and quantitative comparison is presented between the predictions of linear stability theory and experimental observations in a tilting tank apparatus.

A shear layer is typically produced by bringing into contact two streams of the same constant-density fluid travelling at different streamwise velocities. In this simple configuration, the resulting velocity profile is known to be subjected to an inflectional instability mechanism, which gives rise to the formation of vortical structures or Kelvin-Helmholtz billows traveling approximately at the average velocity between the two streams [see Ho & Huerre (1984) for a review]. If a statically stable continuous stratification is introduced, either by varying the temperature or in the case of miscible fluids, the concentration of one of the constituents, two essentially different configurations must be distinguished. When the characteristic thicknesses of the density profile d_p^* and velocity profile d_u^* are of the same order of magnitude, the primary instability is the continuation of the Kelvin-Helmholtz instability so that above a critical value of the bulk Richardson number, the basic profile becomes stable [see, for instance, Maslowe & Kelly (1971), Maslowe & Thomson (1971), Hazel (1972)]. As first demonstrated by Holmboe (1962), the situation is somewhat more complex if the thicknesses d_p^* and d_u^* are such that $d_p^* \ll d_u^*$. When a density discontinuity is embedded within a piecewise linear velocity profile, there may exist an additional pair of unstable traveling waves or *Holmboe modes* which have equal and opposite propagation speeds in a frame of reference moving at the average velocity between the two streams. Whereas Kelvin-Helmholtz modes are stationary in the same frame and are only unstable at low values of the Richardson number, traveling modes persist above the neutral boundary of the Kelvin-Helmholtz modes for all values of the Richardson number. These results have subsequently been corroborated by several linear stability analyses of



continuous density and velocity profiles with sufficiently sharp density variations [Hazel (1972), Howard & Maslowe (1973), Smyth et al. (1988), Smyth & Peltier (1989,1990)]. The non linear two-dimensional development of Holmboe waves has also been investigated numerically by Smyth & Peltier (1988), and some of the three-dimensional linear instabilities which finite amplitude Holmboe waves might be subjected to, have recently been documented by Smyth & Peltier (1991).

Relatively few experimental investigations of the instabilities arising in stratified mixing layers have been undertaken [see, for instance, the survey of Maxworthy & Browand (1975)], and most of them pertain to spatially-evolving stratified shear layers generated downstream of a splitter plate. This configuration has been studied in particular by Scotti & Corcos (1972) and Delisi & Corcos (1973), in the case where d_p^* and d_u^* are of equal magnitude and the basic flow is only subjected to the Kelvin-Helmholtz instability. Experimental evidence for the existence of Holmboe waves was first reported in spatial mixing layers with $d_p^* \ll d_u^*$ by Browand & Winant (1973) and Koop & Browand (1979). The evolution of interfacial waves and their subsequent break-up at the crests were carefully documented. The present study very much follows the same spirit as the combined analytical and experimental investigation of Kelvin-Helmholtz and Holmboe waves by Lawrence et al. (1987, 1991). In these recent studies, the results derived from the temporal linear stability analysis of a broken line velocity profile presenting a density discontinuity were confronted with experimental observations in spatially-evolving stratified mixing layers. Striking visualizations of the transition between the Kelvin-Helmholtz and Holmboe regimes were obtained but, according to these authors, the initial profile asymmetry behind the splitter plate made it difficult to carry out a detailed quantitative analysis of the dynamics of counter-propagating Holmboe waves. Thorpe (1968) ingeniously devised a temporal mixing layer configuration by tilting at an angle a tank filled with either two immiscible fluids [Thorpe (1969)], or a stably stratified fluid mixture [Thorpe (1973 a, b)]. For the most part attention was focused on the evolution of Kelvin-Helmholtz billows in the case of continuous stratification with $d_p^* \approx d_u^*$.

In the present investigation, we adopt the same experimental set-up as in Thorpe (1968), but we choose to concentrate exclusively on the spatio-temporal dynamics of the interface separating two immiscible fluids. Thus, in contrast with spatially-developing mixing layers, the basic flow is uniform in the streamwise direction. Furthermore we only examine the initiation of unstable motion close to onset. As opposed to the earlier study of Pouliquen et al. (1992), the tilting tank is returned to its horizontal position to produce, beyond an initial accelerating phase, a constant velocity difference across the interface which can be varied continuously above and below threshold. In this flow regime, surface tension effects play a crucial role in determining the critical value of the velocity difference and they have to be included in any model of the resulting instability. The basic flow close to threshold is unstable to a continuous band of wavenumbers that may lead, in such a spatially extended system, to complex spatio-temporal regimes. A unique feature of the present experimental setup is the presence of periodic spatial forcing in the form of small obstacles distributed along one of the walls of the tube. As demonstrated in Pouliquen et al.(1992), this technique is very effective in locking the interface deformation to a particular wavenumber. In this manner, the response of the flow to a well-defined wavenumber can be analysed. Finally, the aspect ratio of the tube is chosen large enough that the instability is primarily two-dimensional, i-e the interface elevation does not vary appreciably in the cross-stream direction and the three dimensional instabilities described by Smyth & Peltier (1990, 1991) are quenched. As in Lawrence et al. (1991), the experimental observations and measurements are confronted to the predictions of linear temporal instability analysis applied to a broken line profile containing a sharp density interface. But, in contrast with this earlier investigation, surface tension effects are necessarily included. It should be emphasized that the slope discontinuities appearing in the piecewise linear velocity profile do not lead to spurious instability characteristics when compared to continuous velocity distributions, as convincingly shown by Balsa (1987).

The paper is organized as follows. The experimental set-up and procedure are briefly presented in section 2 and preliminary observations in section 3. The combined



theoretical-numerical study is described in detail in section 4. For ease of presentation, the properties and predictions of the symmetric model (§ 4.1 and § 4.2) and asymmetric model (§4.3 and § 4.4) are examined separately. Finally, the main results of the study are summarized in section 5.

In the sequel starred and unstarred quantities denote dimensional and nondimensional variables respectively.

II. EXPERIMENTAL SET-UP AND PROCEDURE.

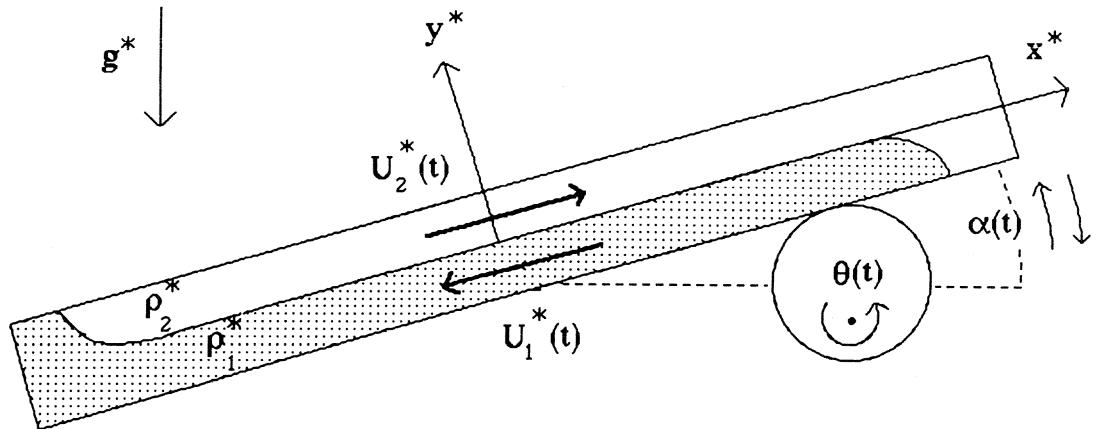


FIGURE 1. Experimental set-up: a tank filled with two fluids of density ρ_1^* and ρ_2^* is inclined at an angle α_m and brought back to its horizontal position in a single rotation of the cam $0 < \theta \leq 2\pi$.

The experimental configuration of Thorpe (1968, 1969, 1973 a,b) has been chosen in order to generate a shear that is spatially uniform in the streamwise direction (Figure 1). As in Pouliquen et al. (1992), a cylindrical glass tube of circular cross section which is 2 m long and 6 cm in diameter is filled with two immiscible fluids with respective viscosity μ_1^* and μ_2^* , and respective density ρ_1^* and ρ_2^* with $\rho_1^* > \rho_2^*$. When the tank is tilted at an angle $\alpha(t^*)$ from its initially horizontal position, the two fluid layers move in opposite directions with respective velocities $U_1^*(t^*)$ and $U_2^*(t^*)$. In the present

experiments different sets of fluids have been used. Set #1 is made up of water and of an equal mixture of silicon oil (47V2) and 1-2-3-4 tetrahydronaphthalene. Sets #2 and #3 are made up of a mixture of kerosene and silicone oil V100, and a mixture of 80% alcohol and 20% water. The physical properties of these fluid pairs are summarized in Table 1. Viscosities are measured using a falling ball type viscosimeter, and surface tension is determined by the pendant drop method. In order to generate a shear layer with equal and opposite free stream velocities $U_2^*(t^*) = -U_1^*(t^*) \equiv U^*(t^*)$, both fluid layers are chosen to be of equal depth throughout the investigation.

In the study reported by Pouliquen et al. (1992), the inclination angle α was maintained at a constant value α_m in order to create a uniformly accelerating shear. The resulting basic flow then became unstable at the critical time when the instantaneous velocity difference $\Delta U^*(t^*) \equiv U_2^*(t^*) - U_1^*(t^*)$ exceeded a critical value ΔU_c^* . The rapid increase of $\Delta U^*(t^*)$ beyond the threshold value ΔU_c^* subsequently resulted in large interfacial deformations. In the present experiment, one seeks to produce a basic flow where the velocity difference can be conveniently maintained at a constant value ΔU_m^* close to onset. Accordingly, the tube is initially tilted at an angle α_m during an accelerating phase, to create a chosen velocity difference ΔU_m^* , and it is then returned to its horizontal position $\alpha=0$ to keep ΔU^* constant and equal to ΔU_m^* . In this mode of operation, there is a clearly identifiable control parameter namely ΔU_m^* , and it can be varied continuously across the threshold value ΔU_c^* .

The time history $\alpha(t^*)$ of the inclination angle is specified by means of a motor of angular velocity ω^* , which drives an eccentric cam as sketched in Figure 1. With a full rotation of the cam, the angle α increases from zero, reaches its maximum value α_m and then returns to zero. The corresponding velocity in each fluid layer is given by

$$U_2^*(t^*) = -U_1^*(t^*) = U^*(t^*) = \int_0^{t^*} \frac{\rho_1^* - \rho_2^*}{\rho_1^* + \rho_2^*} g^* \sin(\alpha(t^*)) dt^* ,$$

where g^* denotes gravity. Noting that α is in fact a function of the rotation angle of the



cam θ which varies in the range $0 < \theta \leq 2\pi$, one may write for the final velocity U_m^* :

$$U_m^* = \frac{1}{\omega^*} \frac{\rho_1^* - \rho_2^*}{\rho_1^* + \rho_2^*} g^* \int_0^{2\pi} \sin(\alpha(\theta)) d\theta .$$

Thus, one is able to control the final velocity difference $\Delta U_m^* = 2U_m^*$ between the fluid layers simply by varying the rotation rate of the motor ω^* . A typical experimental run lasts 3 to 4 seconds. The duration of the experiment is limited by the hydraulic jumps which propagate towards the center of the tube from the ends.

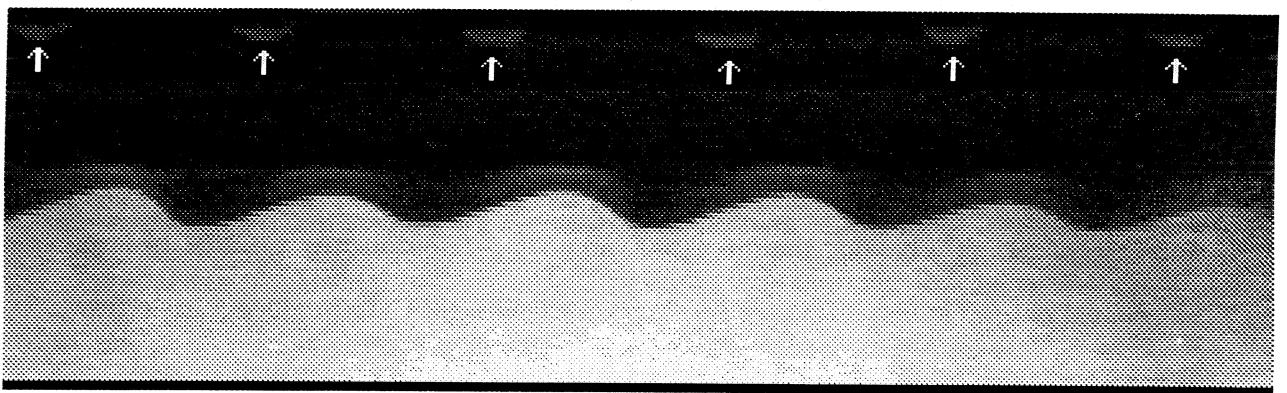


FIGURE 2. Interface deformation 2 sec after the onset of instability. Fluid set #2, $\Delta U_m^* = 16$ cm/s, $\lambda_f^* = 3.7$ cm; note the location of the periodically distributed obstacles at the top boundary as indicated by the arrows.

To visualize the interface, fluorescein dye is mixed with the heavier fluid and a laser sheet is created in the vertical plane containing the axis of the tube. The resulting pictures are recorded on film with a CCD movie camera. A typical photograph is shown on Figure 2, where the interface appears as the boundary between the illuminated heavier fluid in the bottom part of the tube and the dark lighter fluid in the upper part. The interface elevation is easily determined by making use of image processing software on a Macintosh. It is accurately located as the point of maximum gradient on the gray scale. The interface deformation can then be recorded and images are digitized in order to measure its position. The spatio-temporal dynamics of the interface can be summarized on an $x^* - t^*$ diagram as shown on Figure 3. At each time step, the interface has been

represented by a line along the x axis, the grey level at each point being related to the corresponding elevation of the interface (white in a trough, black on a crest). The propagative nature of the interface deformation is clearly apparent, as discussed in the next section.

As in Pouliquen et al. (1992) the flow is spatially forced at a specific wavelength by periodically placing 3mm high metallic obstacles on the upper wall of the tube (Figure 2). These are maintained in position with movable magnets distributed along the outer wall of the tube. Pouliquen et al. have established that when the forcing wavelength stays close to the natural wavelength of the instability, the interface response is locked, i-e it is perfectly periodic at the forcing wavelength. In the present context this property of the flow is essential: a single wavelength can be isolated and its temporal dynamics observed close to onset. By forcing the flow at a fixed wavelength a more complex spatio-temporal behavior is completely inhibited.

III. PRELIMINARY EXPERIMENTAL OBSERVATIONS.

The initial experiments were conducted with the first set of fluids (Table 1). A typical spatio-temporal $x^* - t^*$ diagram for the elevation of the interface is displayed on Figure 3 when the velocity difference ΔU_m^* is close to ΔU_c^* . The interface which is flat at $t^* = 0$ s is initially deformed into a *stationary* sinusoidal pattern at the forcing wavelength. This stationary growth process terminates around $t^* = 1.4$ s and it is followed by a propagating regime where the interface sustains traveling waves which predominantly move to the left in the same direction as the lower fluid. The fundamental wavelength does not seem to be affected by the propagation. However, significant changes are noticeable in the amplitude variations. The black pulses appearing on Figure 3 for $t^* > 1.4$ s seem to indicate temporally periodic amplitude modulations. A closer examination reveals that such modulations are due to the presence of a counter-propagating wave of smaller amplitude moving to the right in the same direction as the upper fluid layer.



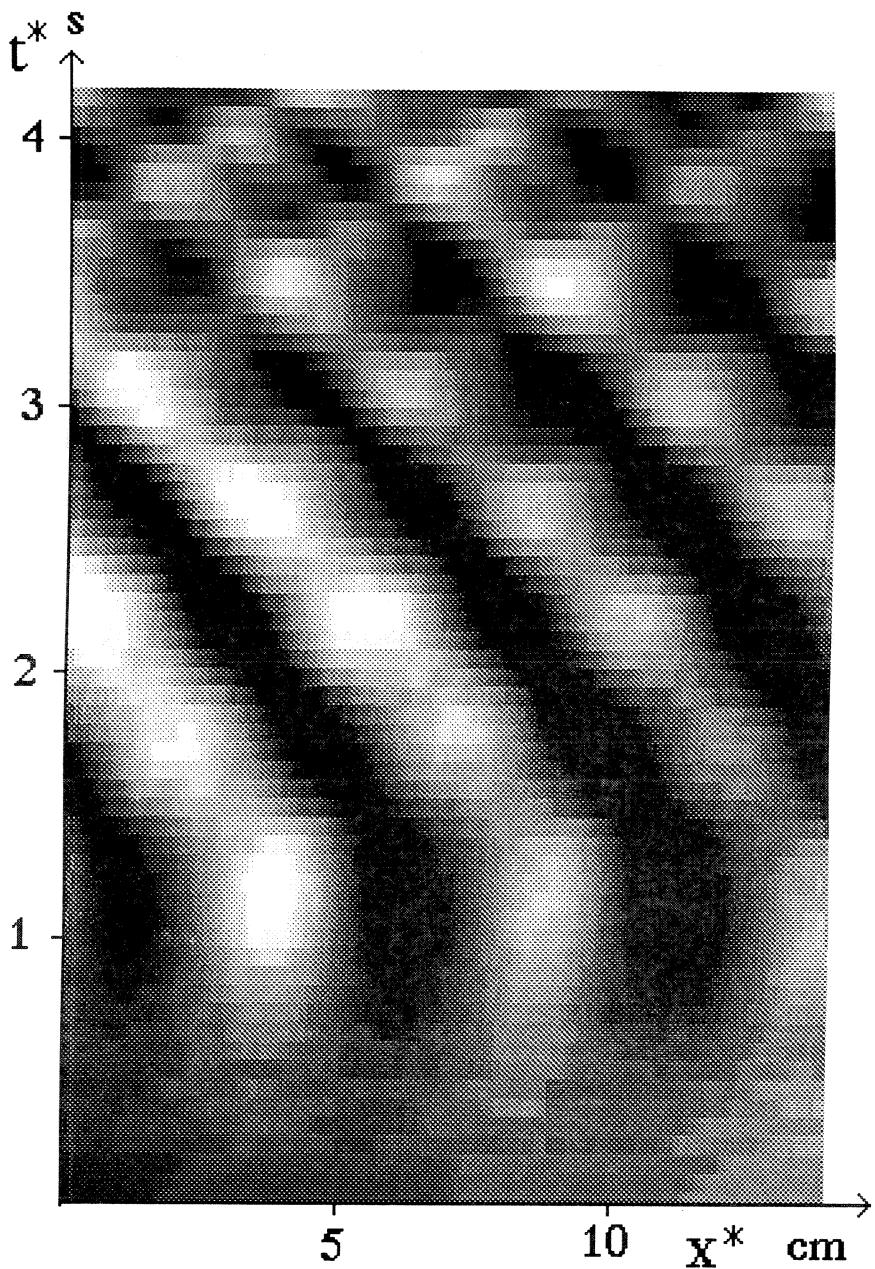


FIGURE 3. Spatio-temporal x^* - t^* diagram of interface deformation. Fluid set#1, $\Delta U_m^* = 24 \text{ cm/s}$, $\lambda_f^* = 5 \text{ cm}$; darker (lighter) regions indicate the crest (troughs) of the interface deformation. The tube is brought back to its horizontal position at $t^* = 1 \text{ sec}$.

The simplest theoretical model one can think of to describe the initial evolution of the interface is the classical vortex sheet [Drazin & Reid (1981)] separating two immiscible fluids of respective density ρ_1^* and ρ_2^* with $\rho_1^* > \rho_2^*$, moving at constant and opposite speeds, the velocity in each fluid being uniform. In the presence of surface tension, the sheet is found to be unstable to stationary disturbances above a critical value

$$\Delta U_c^* = \left(2 \frac{\rho_1^* + \rho_2^*}{\rho_1^* \rho_2^*} \sqrt{(\rho_1^* - \rho_2^*) g^* \gamma^*} \right)^{1/2},$$

where γ^* is the surface tension coefficient. Thorpe (1969) obtained good quantitative agreement between experimental observations in accelerated flow and theoretical predictions for the threshold value ΔU_c^* and the initial growth rate σ^* of the perturbations. In the present constant ΔU^* case, the theoretical value $\Delta U_c^* = 0.185$ m/s for the set of fluids #1 compares favorably with the experimental one $\Delta U_c^* = 0.195$ m/s, but the measured growth rate $\sigma^* = 3.1$ s⁻¹ is far below the theoretical value $\sigma^* = 15.6$ s⁻¹. More crucially, the linear stability analysis of the vortex sheet completely fails to account for the observed propagative features. Paradoxically, the model seems to correlate more closely with the measurements in the accelerating flow configuration than those at a constant value ΔU^* close to threshold.

IV. LINEAR STABILITY ANALYSES. COMPARISON WITH EXPERIMENTS.

To solve this paradox, it appears that the vortex sheet analysis must be abandoned in favour of a continuous velocity model where the diffusive layers on either side of the interface are explicitly taken into account. Following Lawrence et al. (1991), one introduces the basic flow sketched on Figure 4.

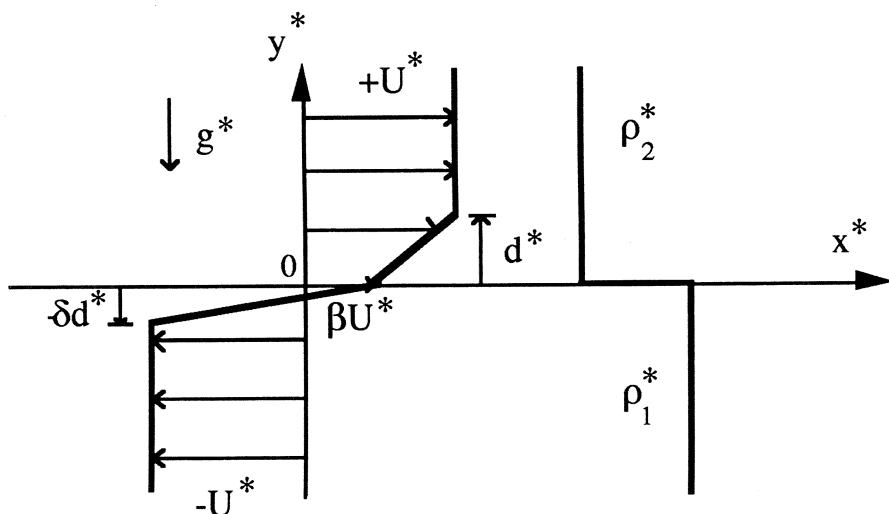


FIGURE 4. Sketch of basic flow for the linear stability analysis of section 4.



Two streams of infinite height and respective density ρ_1^* and ρ_2^* ($\rho_1^* > \rho_2^*$) and velocity $-U^*$ and U^* are separated at $y^*=0$ by a density interface with surface tension γ^* . The diffusive layers of respective thickness d^* and δd^* in the upper and lower fluids are modelled by a piecewise linear velocity profile. The fluid velocity at the interface is continuous and taken to be equal to a fraction βU^* of the free stream velocity U^* . The dimensionless parameters δ and β provide a measure of the asymmetry of the velocity profile. They can be related to the properties of each fluid by the following reasoning. If one assumes that the velocity profile is created through viscous diffusion by setting the two fluids into motion at time $t^*=0$, the characteristic thickness of the diffusive layers evolves according to the laws $d^* \sim \sqrt{\nu_2^* t^*}$ and $\delta d^* \sim \sqrt{\nu_1^* t^*}$ respectively, where ν_1^* and ν_2^* denote the kinematic viscosities. Thus, δ is simply given by:

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu_1^*}{\nu_2^*}} .$$

Furthermore, imposing that the shear stress be continuous at the interface $y^*=0$ provides the following relation between δ and β :

$$\beta = \frac{1 - \delta \rho_1^*/\rho_2^*}{1 + \delta \rho_1^*/\rho_2^*} . \quad (1)$$

The linear stability analysis is performed under the assumption that the basic flow is quasi-steady, i.e. it evolves on a diffusive time scale which is much longer than the characteristic time scale of the instability. Furthermore viscous effects are included to properly define the velocity profile, as discussed above, but they are ignored in the perturbation analysis. In other words, one only considers the inviscid stability of the flow defined in Figure 4. Dimensionless unstarred variables are introduced based on the free stream velocity U^* , the capillary length $L^* = \sqrt{\gamma^*/[g^*(\rho_1^* - \rho_2^*)]}$ and the density scale $\rho_1^* + \rho_2^*$. The linear stability properties are then a function of 4 dimensionless parameters:

- the dimensionless thickness of the upper diffusion layer $d=d^*/L^*$,
- the asymmetry parameter β ,
- the density ratio $\rho_1 = \rho_1^*/(\rho_1^* + \rho_2^*)$,

- the bulk Richardson number $J = \frac{\rho_1^* - \rho_2^*}{\rho_1^* + \rho_2^*} \frac{g^* L^*}{U^*}$, which is the primary

control parameter of the instability. Recall that the asymmetry parameter δ is directly related to β through (1).

Small two-dimensional perturbations of the form $\Phi(y) \exp [ik(x-ct)]$ are governed by the Rayleigh equation

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} - k^2\Phi - \frac{d^2U}{dy^2} \frac{1}{U-c} \Phi = 0 ,$$

where k is the real wavenumber and c the complex phase velocity. The unknown eigenfunction Φ is subjected to the usual continuity of displacement conditions at $y=d$, $y=0$ and $y=-\delta d$, namely,

$$\left[\frac{\Phi}{U(y)-c} \right]_{y=0^-}^{y=0+} = \left[\frac{\Phi}{U(y)-c} \right]_{y=d^-}^{y=d+} = \left[\frac{\Phi}{U(y)-c} \right]_{y=-\delta d^-}^{y=-\delta d+} = 0 .$$

Continuity of pressure at $y=d$ and $y=-\delta d$, and the jump in pressure due to surface tension acting on the interface $y=0$ provide the additional conditions:

$$\begin{aligned} & \left[(U(y)-c) \frac{d\Phi}{dy} - \frac{dU}{dy} \Phi \right]_{y=d^-}^{y=d+} = 0 , \\ & \left[(U(y)-c) \frac{d\Phi}{dy} - \frac{dU}{dy} \Phi \right]_{y=-\delta d^-}^{y=-\delta d+} = 0 , \\ & \left[\rho(y) ((U(y)-c) \frac{d\Phi}{dy} - \frac{dU}{dy} \Phi) \right]_{y=0^-}^{y=0+} = J \left[\frac{\Phi}{U-c} \right]_{y=0} (1+k^2) . \end{aligned} \quad (2)$$

In the sequel, we shall make the Boussinesq approximation: density variations will only be considered in the buoyancy term involving J on the right-hand side of (2). In all remaining terms, we shall set $\rho_1^* = \rho_2^*$ so that $\rho(y) = 1/2$ on the left-hand side of (2). This assumption amounts to choosing $\rho_1 = 1/2$ for the dimensionless density ratio. Note also that relation (1) between β and δ then reduces to

$$\delta = \frac{1-\beta}{1+\beta} . \quad (3)$$



Solving the Rayleigh equation and imposing all jump conditions above and the usual exponential decays at $y=\pm\infty$ then leads to the dispersion relation :

$$c^4 + n_3 c^3 + n_2 c^2 + n_1 c + n_0 = 0 \quad , \quad (4)$$

where

$$n_3 = -2\beta \quad ,$$

$$\begin{aligned} n_2 &= - \left(J \frac{1+k^2}{k} + \frac{2\beta^2}{(1-\beta)kd} \right) + \frac{2\beta}{(1-\beta)kd} \left(\frac{1+e}{f} + \frac{1+g}{h} \right) \\ &\quad - \frac{1-eg}{hf} - 2\beta \left(\frac{e}{f} + \frac{g}{h} \right) + \beta^2 \quad , \\ n_1 &= - \left(J \frac{1+k^2}{k} + \frac{2\beta^2}{(1-\beta)kd} \right) \left(\frac{1+e}{f} + \frac{1+g}{h} \right) + \frac{2\beta}{(1-\beta)kd} \frac{(1+e)(1+g)}{hf} \\ &\quad + \frac{2\beta(1-eg)}{hf} + \beta^2 \left(\frac{e}{f} + \frac{g}{h} \right) \quad , \\ n_0 &= - \left(J \frac{1+k^2}{k} + \frac{2\beta^2}{(1-\beta)kd} \right) \frac{(1+e)(1+g)}{hf} - \frac{\beta^2(1+eg)}{hf} \quad , \end{aligned}$$

the expressions e, f, g and h denoting the following quantities:

$$e = \left(\frac{2(1-\beta)kd}{(1+\beta)^2} - 1 \right) \exp \left(2 \frac{1-\beta}{1+\beta} kd \right) \quad ,$$

$$f = \frac{2(1-\beta)kd}{(1+\beta)^2} \exp \left(2 \frac{1-\beta}{1+\beta} kd \right) \quad ,$$

$$g = \left(\frac{2kd}{1-\beta} - 1 \right) \exp(2kd) \quad ,$$

$$h = - \frac{2kd}{1-\beta} \exp(2kd) \quad .$$

The dispersion relation is a fourth order polynomial in c , with coefficients depending on k and the control parameters d, β , and J . In the following subsections, the cases of symmetric and asymmetric velocity profiles are separately examined.

IV-1. Symmetric velocity profile: theoretical results.

When $\beta=0$, the fluid velocity at the interface is zero and, according to (3), $\delta=1$. In this situation, both fluids have identical kinematic viscosities and the velocity profile sketched on Figure 4 is odd, with the same thickness for the diffusive layers in each fluid. The dispersion relation (4) then reduces to the equation

$$c^4 + n_2 c^2 + n_0 = 0 \quad , \quad (5)$$

with

$$n_2 = -J \frac{1+k^2}{k} + \frac{e^{-4kd} - (2kd-1)^2}{4k^2d^2} \quad ,$$

$$n_0 = J \frac{1+k^2}{k} \frac{(e^{-2kd} + 2kd-1)^2}{4k^2d^2} \quad .$$

As in all purely inviscid stability analyses, the eigenvalues appear in complex conjugate pairs and the flow becomes unstable if one of the roots of (5) is complex. Furthermore, if c is a solution, $-c$ is also a solution, as a result of the symmetry of the velocity profile. The temporal stability properties of the basic flow (k real, c complex) are summarized on Figures 5, 6 and 7, as a function of the two remaining dimensionless parameters, namely the scaled thickness d and the Richardson number J . For specific values of d , the various domains of instability are indicated by dotted and shaded regions in the $k-J$ plane on Figure 5. The upper curve is the marginal stability boundary between the neutrally stable clear region where all four eigenvalues are real, and the unstable regions where all four eigenvalues are complex. In the dotted areas, the eigenvalues are all purely imaginary and correspond to *stationary* modes, whereas, in the shaded areas, they are complex with non-zero real parts and correspond to *propagating* modes. When a particular path is followed in the $k-J$ plane as specified on Figure 5, the eigenvalues move along curves in the complex c_r-c_i plane as depicted on Figure 6. Finally, the value of the critical Richardson number J_c at the maximum of the marginal stability curve is plotted against the thickness parameter d on Figure 7.



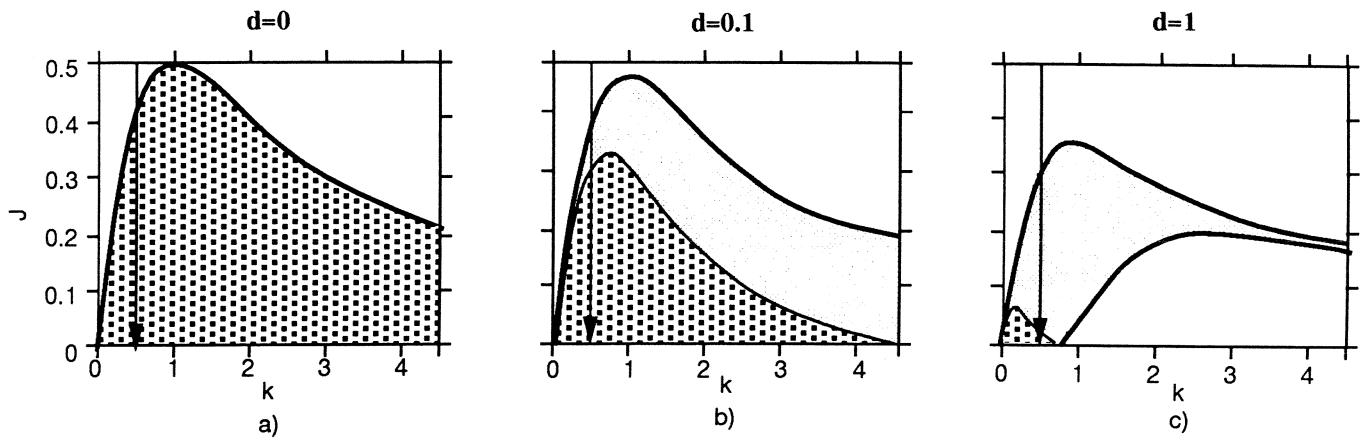


FIGURE 5. Stability diagram of piecewise linear model in the wavenumber k - Richardson number J plane for different values of the thickness parameter d . Asymmetry parameter β is set equal to zero. Clear region: neutrally stable modes ($c_r \neq 0; c_i = 0$); dotted regions: stationary unstable Kelvin-Helmholtz modes ($c_r = 0; c_i > 0$); shaded regions: counter-propagating unstable Holmboe modes ($c_r \neq 0; c_i > 0$); Thicker curve: marginal stability boundary. (a): $d=0$; (b): $d=0.1$; (c): $d=1$.

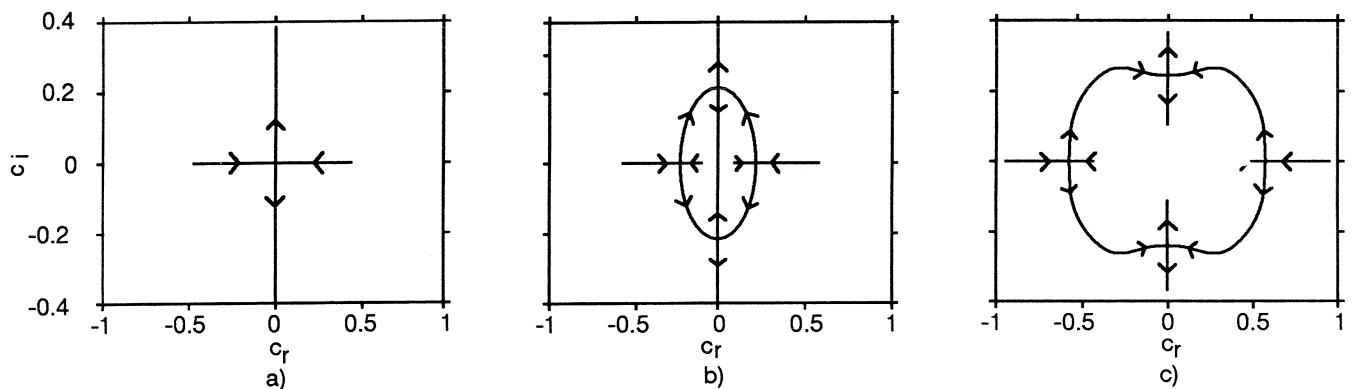


FIGURE 6. Loci of eigenvalues in complex $c_r - c_i$ plane as Richardson number J is decreased along vertical path indicated on Figure 5, for different values of thickness parameter d . (a): $d=0$; (b): $d=0.1$; (c): $d=1$. Arrows indicate the direction of migration of the eigenvalues as J is lowered.

The case $d=0$ corresponds to the classical Kelvin-Helmholtz instability of the vortex sheet separating two uniform streams in the presence of surface tension [Drazin & Reid (1981)]. According to Figure 5(a), the flow is neutrally stable when $J>0.5$ and unstable when $J<0.5$. Furthermore, all growing perturbations are *stationary Kelvin-Helmholtz modes* with $c_r=0$. When a diffusive layer of scaled thickness $d=0.1$ is introduced, as in Figure 5 (b), the first instability that appears at onset is no longer stationary but propagative with $c_r\neq0$. In continuously stratified shear flows where the density layer is much thinner than the velocity layer, such propagating disturbances have been well-documented [Holmboe (1962), Hazel (1972), Browand & Winant (1973), Howard & Maslowe (1973), Smyth et al. (1988), Smyth & Peltier (1989,1990,1991), Lawrence & al. (1991)]. Following these authors, propagating perturbations of the interface are also referred to, in the present case, as *Holmboe modes*. It should be noted, however, that significant differences exist between the properties of Holmboe waves in each situation. In a continuously stratified flow, Holmboe modes exist in a tongue-shaped region that extends to infinity in the wavenumber-Richardson number plane and the critical value of the Richardson number is pushed to infinity. In the case of immiscible fluids that is of interest here, surface tension acts to dampen large wavenumbers and there is a well-defined value of the threshold J_c . In both instances, stationary Kelvin-Helmholtz modes appear at small Richardson numbers (Figure 6(b)).

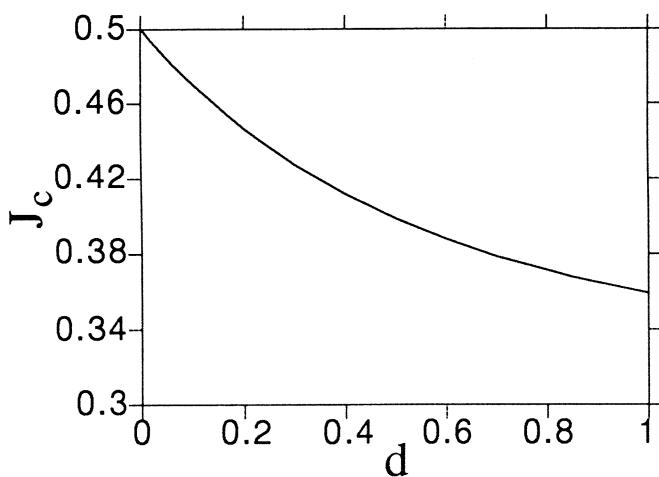


FIGURE 7. Critical Richardson number J_c as a function of thickness parameter d .



The transition between these two distinct modes of instability can be understood by following the migration of eigenvalues in the complex c_r - c_i plane as the Richardson number J decreases from infinity along the vertical line $k=0.5$ (Figure 6(b)). For large J , all four eigenvalues lie on the real c_r axis. As the marginal stability boundary in Figure 5(b) is crossed, they collide two by two at a finite value of c_r on the real axis to produce two complex conjugate pairs of counter-propagating amplified and decaying Holmboe waves. Finally, as J crosses into the Kelvin-Helmholtz domain on Figure 5(b), the four eigenvalues experience paired collisions again, but on the imaginary axis, to give rise to two sets of stationary amplified and decaying Kelvin-Helmholtz modes. The eigenvalues remain on the imaginary axis as J is further decreased to zero.

The transition to the classical Kelvin-Helmholtz vortex sheet limit is made obvious by examining the qualitative changes taking place in the stability diagrams (Figures 5(c), (b), (a)) and eigenvalue plots (Figures 6 (c), (b), (a)) as d is decreased to zero. The Kelvin-Helmholtz domain is seen to gradually increase in extent at the expense of the Holmboe domain until the marginal stability boundary coincides with the limiting curve of the Kelvin-Helmholtz region when $d=0$ (Figure 5(a)). Simultaneously, the collision points on the eigenvalue plots approach the origin as d decreases to zero, until one obtains the limiting structure displayed on Figure 6(a), in agreement with existing weakly non linear analyses of vortex sheets [Weissman (1979)]. Finally, one notes that the finite thickness of the shear layer tends to decrease the critical value of the Richardson number as shown on Figure 7.

The main conclusion of the present analysis is that the presence of diffusive layers drastically changes the qualitative nature of the instability.

IV-2. Comparison with experiments.

The experimental observations can be interpreted in light of the previous theoretical results. In order to obtain a complete set of data, two experimental runs are carried out for each value of the velocity difference ΔU_m^* . In the first run, fluorescein dye is mixed in

the bulk of the lower fluid to accurately record and measure the elevation of the interface. In the second run, a vertical line of fluorescein dye is produced in the lower fluid immediately before tilting the tube. From the subsequent deformation of the line during the course of the experiment, one can retrieve the instantaneous velocity $-U^*(t)$ of the lower stream and the instantaneous thickness $\delta d^*(t)$ of the corresponding velocity profile as illustrated on Figure 8.

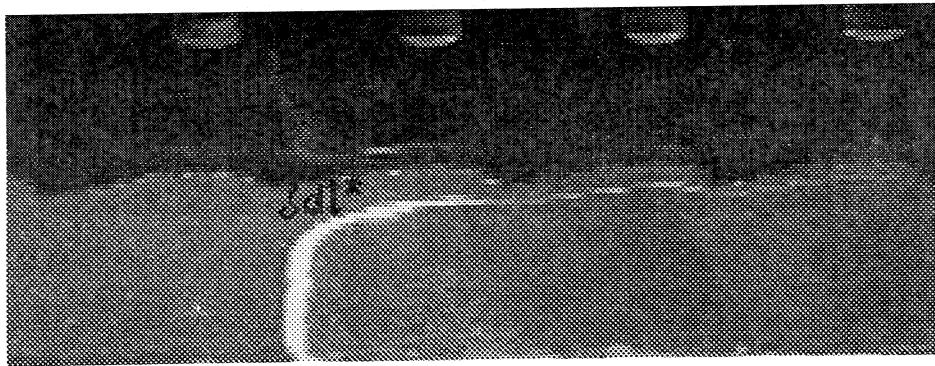


FIGURE 8. Visualization of velocity profile in lower fluid. A vertical dye line is deposited immediately before tilting the tank and its subsequent deformation is recorded. The thickness $d^*(t^*)$ is determined as the maximum slope thickness of the retrieved profile. Fluid set#2,
 $\Delta U_m^* = 14 \text{ cm/s}$, $\lambda_f^* = 3 \text{ cm}$, $t^* = 2.5 \text{ sec}$.

Since the flow is spatially forced, the wavenumber k is kept constant and each experimental run is represented by a specific path in the d - J plane as shown on Figure 9. The dotted (shaded) areas on the Figure identify regions of stationary (propagating) modes at a fixed value of k , as obtained from the stability analysis in the previous section. In the experimental run performed with fluid set #1 and corresponding to the x^* - t^* plot of Figure 3, the flow evolves along the curve marked with triangular symbols on Figure 9(a). As the tube is tilted at an angle α_m and brought back to its horizontal position, the velocity difference ΔU^* initially increases during an accelerating phase from zero to its nominal value $\Delta U_m^* = 2 U_m^*$ and subsequently remains constant in time. Correspondingly, the instantaneous Richardson number J rapidly decreases from infinity to its nominal value $J_m = \frac{\rho_1^* - \rho_2^*}{\rho_1^* + \rho_2^*} \frac{g^* L^*}{U_m^{*2}}$ and remains constant thereafter.



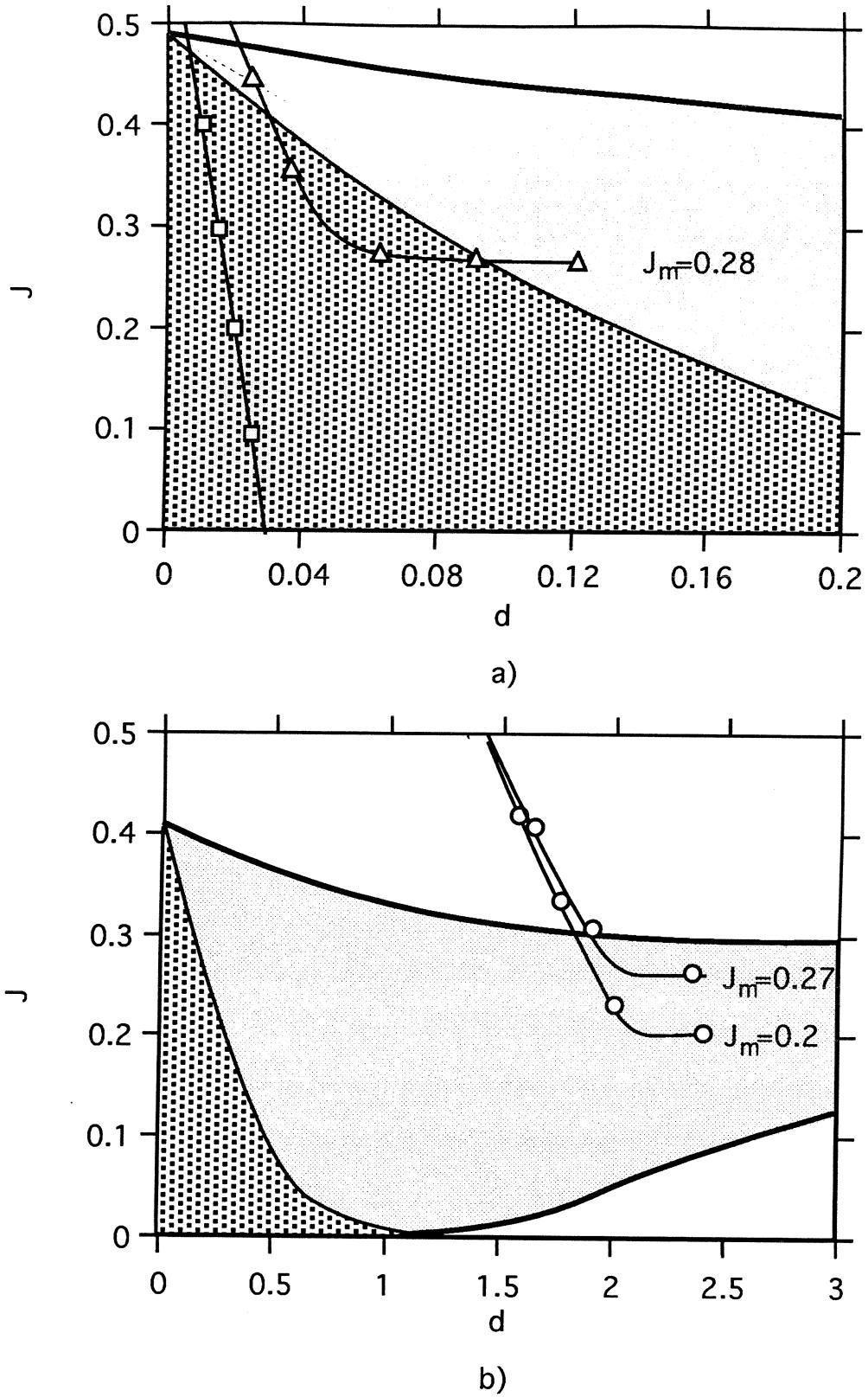


FIGURE 9. Stability diagram of piecewise linear model in the thickness d - Richardson number J plane at a fixed value of the dimensionless wavenumber k . The clear and shaded regions are defined as in Figure 5.
(a): $k=1.3$. \square : accelerating shear experiment, fluid set# 1, $\alpha_m=15^\circ$; Δ : constant shear experiment, fluid set#1, $\Delta U_m^*=24\text{cm/s}$ ($J_m=0.28$), $\lambda_f^*=5\text{cm}$; (b): $k=0.54$. \circ : constant shear experiment, fluid set#2, $\Delta U_m^*=14\text{cm/s}$ ($J_m=0.27$), $\Delta U_m^*=12\text{cm/s}$ ($J_m=0.2$), $\lambda_f^*=3.7\text{cm}$.

During this process, diffusive layers are produced on either side of the interface that slowly grow in time. Thus the basic flow may be considered as quasi-steady beyond the initial accelerating phase. The wavenumber k and the Richardson number J are then constant and d is the only slowly time-varying parameter. As d becomes sufficiently large a switch from stationary Kelvin-Helmholtz modes to propagating Holmboe modes should be observed. As seen on Figure 9(a), the characteristics of the basic velocity profile represented by triangles initially lie in the Kelvin-Helmholtz domain and stationary perturbations are indeed observed on Figure 3 in the early portion of the run. At the critical time $t^*=1.4$ sec, the basic flow crosses into the Holmboe region on Figure 9(a) and this is associated with a sudden bending of the rays on Figure 3 giving rise to propagating Holmboe waves. A typical path followed in the accelerating shear case where the tube is kept tilted [Thorpe (1969), Pouliquen et al.(1992)] is indicated by square symbols on Figure 9(a). The accelerating flow leads to a very rapid decrease in J and relatively slow increase of the scaled thickness d . In contrast with the previous case, the flow therefore remains in the Kelvin-Helmholtz domain for the entire duration of the experiment. Stationary Kelvin-Helmholtz billows are then observed which can be very well described by a linear stability analysis of the temporally evolving vortex sheet ($d=0$) as demonstrated by Thorpe (1969).

A physical interpretation of the transition between Kelvin-Helmholtz and Holmboe modes has been proposed by Lawrence et al.(1991) in terms of vorticity dynamics. When $d \neq 0$, the shear layers in each fluid give rise to two horizontal trains of co-rotating vortices above and below the interface. If J is sufficiently small, i-e for strong shear or weak density differences, vortices on each side of the interface merge in pairs to form a stationary Kelvin-Helmholtz vortex. If J is too large however, the density discontinuity acts as a barrier to prevent merging and both vortex arrays keep their identity, travelling at the local speed of the basic flow in each fluid. Two trains of counter-propagating Holmboe waves are then obtained as sketched on Figure 10. The existence of vortical structures within each fluid can be verified experimentally by dropping fluorescein dye on the interface before tilting the tube (Figure 11). As waves begin to propagate on the



interface, dye is collected into "beautiful" vortices in the lower fluid, which travel at the same speed as one of the interfacial waves. A parallel array of vortices moving in the opposite direction also exists in this case in the upper layer, but it cannot be visualized with this technique since fluorescein dye does not mix with the upper fluid.

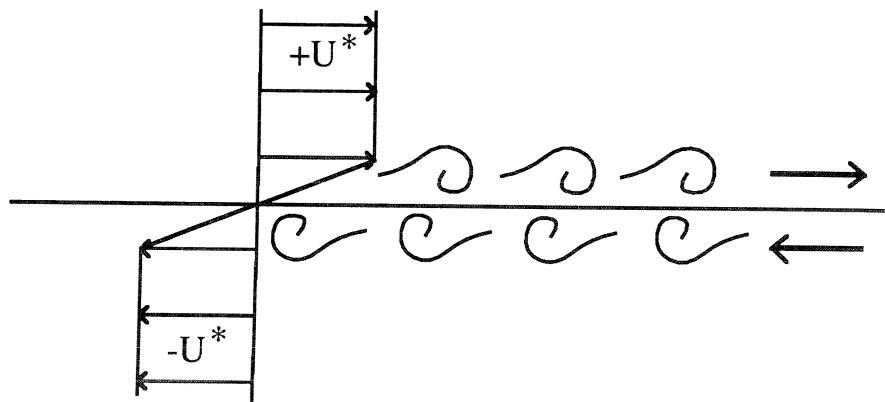


FIGURE 10. Sketch of counter-propagating Holmboe waves and associated vortices.

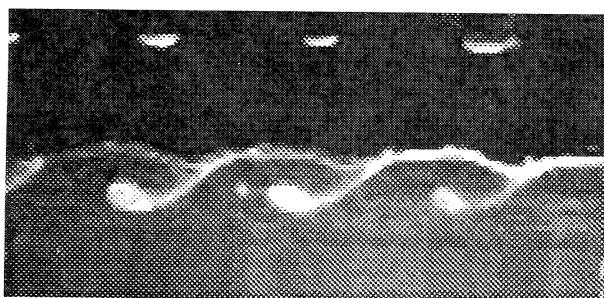


FIGURE 11. Flow visualization of vortex train in lower fluid obtained by dropping fluorescein dye on the interface prior to tilting the tank. Holmboe wave regime. Fluid set#2, $\Delta U_m^* = 12 \text{ cm/s}$, $\lambda_f^* = 3 \text{ cm}$, $t^* = 2 \text{ sec}$.

In order to quantitatively compare the dynamics of the observed Holmboe waves with the results of the linear instability analysis presented in section IV-1, it is first necessary to choose an appropriate pair of working fluids. As shown on Figure 9(a), a typical run with fluid set#1 leads to relatively rapid variations of the scaled thickness d and to an undesirable transition from the Kelvin-Helmholtz regime into the Holmboe regime. The properties of fluid set#2 were "taylored" to proceed directly from the stable domain into

the Holmboe domain and to minimize variations of the scaled thickness d . As indicated in Table 1, the viscosities of fluid set #2 are of the same order of magnitude as those of fluid set #1 but the surface tension and asymmetry parameter β are much smaller. The capillary length scale L^* is therefore smaller and the dimensionless thickness $d=d^*/L^*$ larger. As seen from the curves marked with circles on Figure 9(b), a typical run exhibits a direct transition to the Holmboe instability. Furthermore, the larger values of d lead to a lower value of J_c (see Figure 7) and consequently to a higher critical velocity difference ΔU_c^* . The first observable deformation of the interface therefor appears at a later stage in the experiment, when the thickness $d^* \sim \sqrt{v_2^* t^*}$ experiences only mild variations. The quasi-steady approximation may then be expected to hold. Finally one notes from Table 1 that fluid set#2 yields a very small value of the asymmetry parameter β so that the theoretical analysis of section IV-1 is indeed relevant.

As seen from Figure 12, the resulting spatio-temporal diagram displays a striking chessboard pattern formed by the superposition of two counter propagating Holmboe waves of equal amplitude. In contrast with the corresponding plot pertaining to fluid set #1 (Figure 3), propagating disturbances prevail right at the onset of the instability.

In order to compare the experimental results with the linear instability analysis, a particular value of the slowly-varying parameter d must be selected. In a typical experimental run with fluid set#2, d varies by less than 20% between the appearance of the first deformation and the end of the experiment., In the linear range, one may therefore consider d as approximately constant and equal to the value d_c at the onset when the experimental path crosses the marginal stability curve in the $d-J$ plane on Figure 9(b). But , as seen from Figure 9(b), d_c also changes from experimental run to experimental run as the nominal value of the Richardson number J_m is varied. In the range of Richardson numbers that has been explored $0.2 \leq J_m \leq 0.4$, the maximum excursions of d_c do not exceed 10%. For simplicity, d_c^* was therefore kept constant in the stability calculations, at the mean value $d_c^*=0.6$ cm, which corresponds to a scaled thickness of the diffusion layer $d_c=1.9$. Linear theory then gives a threshold value $J_c=0.355$ and a threshold wavenumber $k_c = 0.895$. Comparison of these predictions with



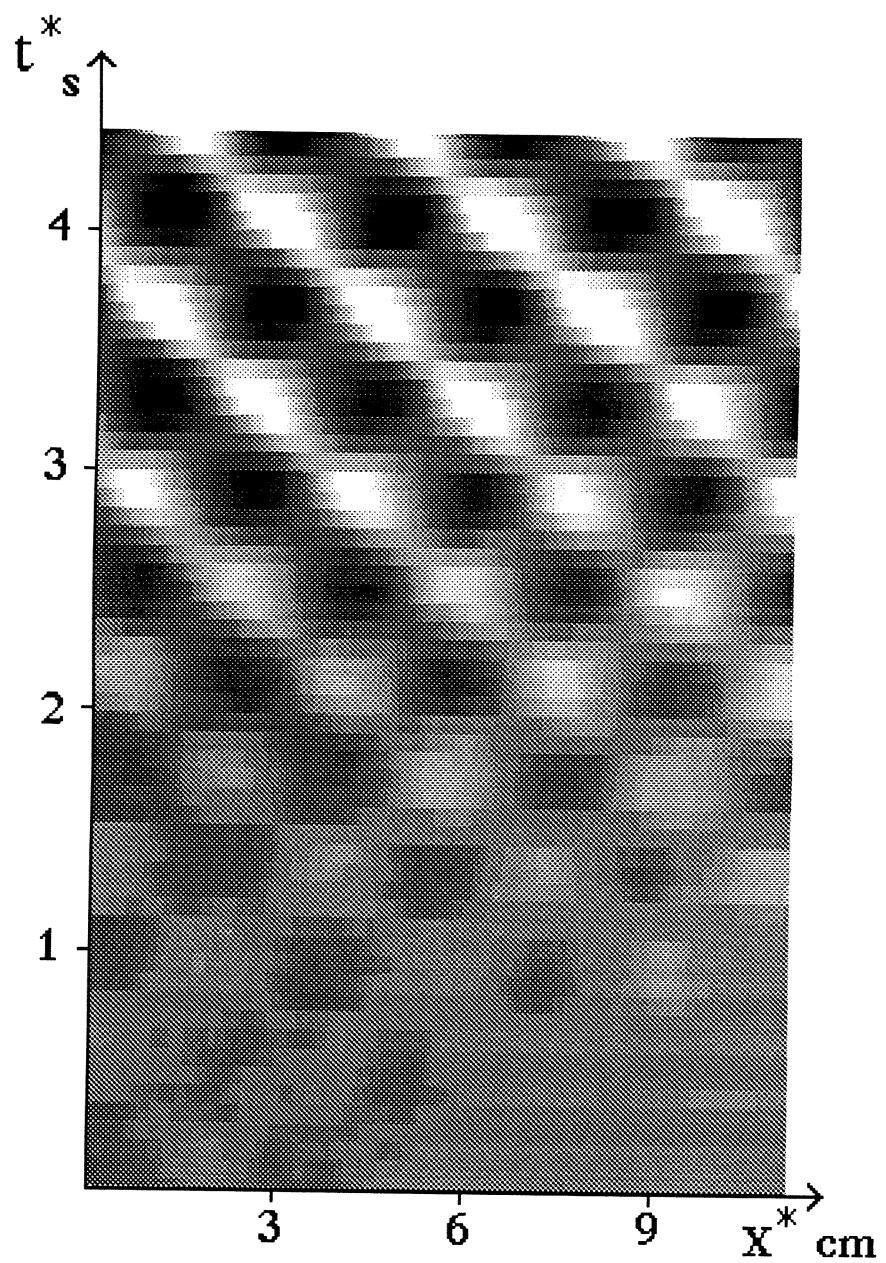


FIGURE 12. Spatio-temporal x^* - t^* diagram of the interface deformation. Fluid set#2, $\Delta U_m^* = 14 \text{ cm/s}$, $\lambda_f^* = 3.7 \text{ cm}$. The tube is brought back to its horizontal position at $t^* = 0.72 \text{ sec}$.

unforced experiments turns out to be difficult. Large fluctuations in the measured critical wavenumber k_c and critical Richardson number J_c are observed. The wavenumber k_c appears to fluctuate between 0.5 and 1 when J_c varies from an experiment to another from 0.3 to 0.37. These fluctuations can be understood by following in the k - J plane the path of the most amplified mode according to linear theory. Figure 13 reveals that, in the range of Richardson numbers that has been explored ($0.2 < J < 0.4$), the most amplified wavenumber k_{ma} experiences wide variations, moving rapidly away from the critical value k_c when J decreases from its threshold value. This rapid shift of k_{ma} away from k_c explains the lack of a sharp natural wavelength selection mechanism to create a perfectly periodic deformation of the interface. Spatial forcing then appears to be essential in order to experimentally produce a periodic pattern, and to make quantitative comparisons with linear theory. In all the experimental runs with fluid set #2 to be reported below, the flow is spatially forced at the wavelength $\lambda_f^* = 3.7$ cm that corresponds to a dimensionless wavenumber $k_f = 0.54$.

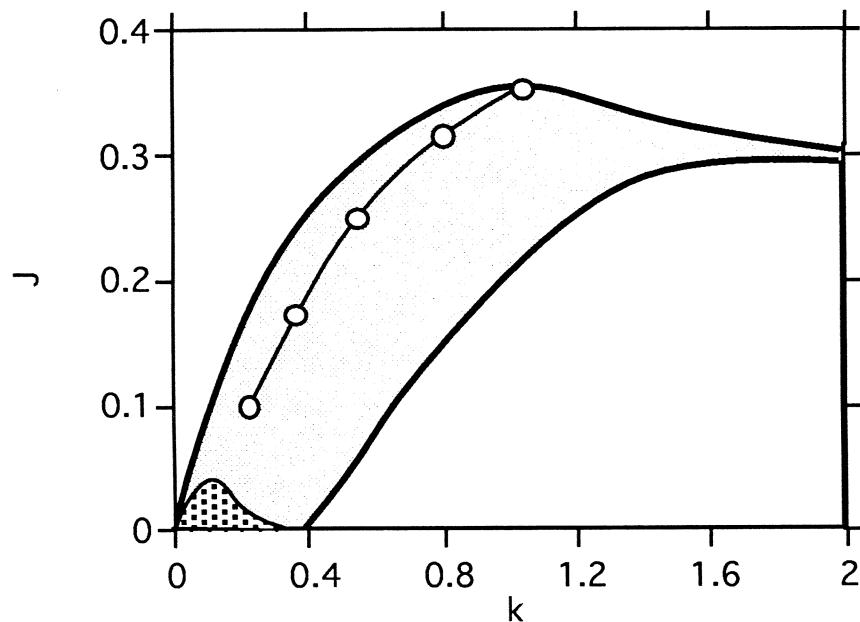
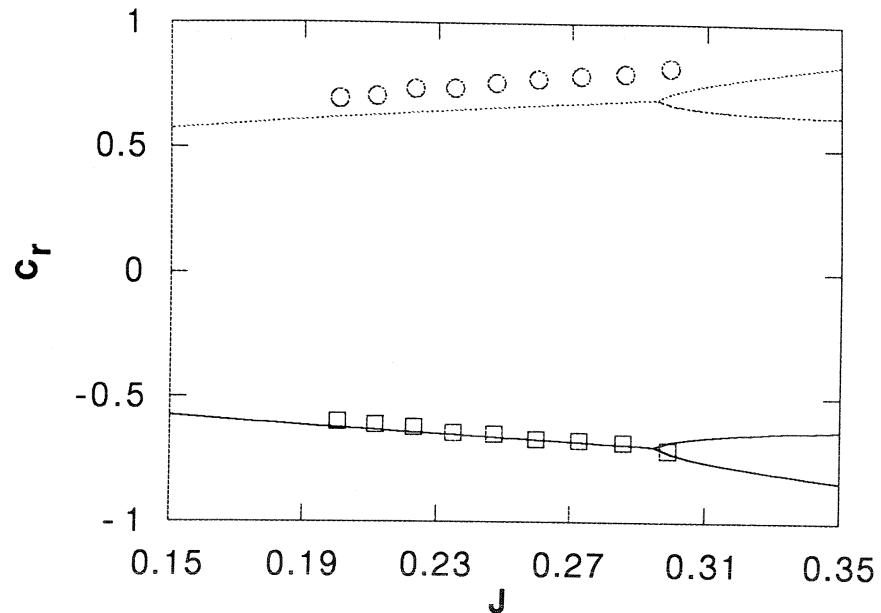
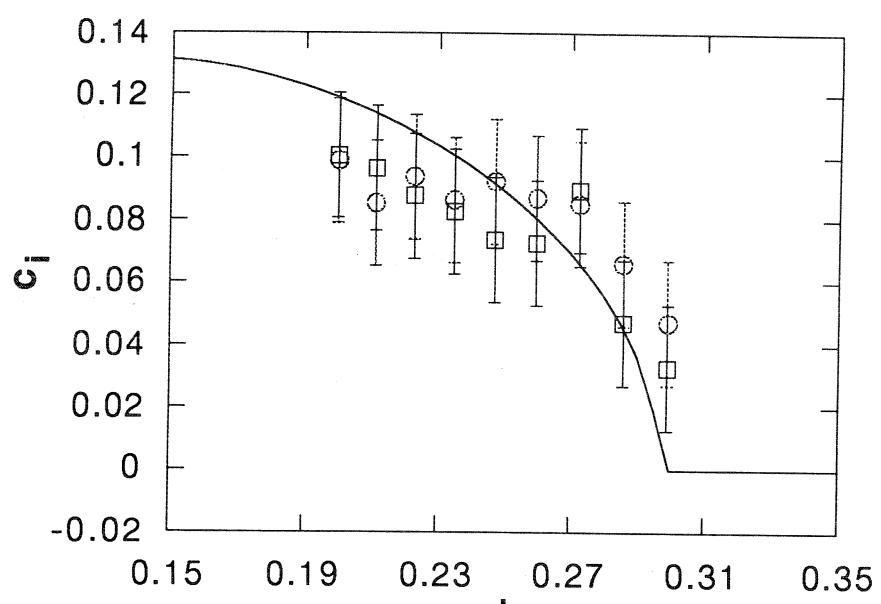


FIGURE 13. o: Locus of the most amplified wavenumber k_{ma} in the k - J plane. $d=1.9$. The clear, shaded and dotted regions are defined as in Figure 5.





a)



b)

FIGURE 14. Variations of the real part c_r (a) and imaginary part c_i (b) of the complex phase velocity as a function of the Richardson number J for symmetric velocity profile. The wavenumber is fixed at the value $k=0.54$. Continuous curves: theoretical predictions. o: experimental data points for right-moving wave. □: experimental data points for left-moving wave. Fluid set #2, $d=1.9$, $\beta=0$.

Theoretical predictions of the variations of the real and imaginary parts c_r and c_i of the complex phase velocity are shown on Figure 14 (a), (b) as a function of Richardson number J . The corresponding experimental points indicated by circles are obtained in the following manner. A spatial Fourier transform is first applied to the interface elevation at each time step, every 0.08 second, and the time history of the complex Fourier amplitude $A(t)$ at the forcing wavenumber is extracted. The temporal variations of the amplitude $|A|$ and phase φ of the forcing wavenumber component $A(t)$ are then obtained, as illustrated on Figure 15(a). This procedure is equivalent to performing a sinusoidal fit of the interface deformation at the forcing wavenumber, $|A|(t)$ representing the amplitude of the sine function and $\varphi(t)$ its phase. The temporal Fourier transform of the complex amplitude $A(t)$ is then found to present well-defined peaks at the frequencies ω and $-\omega$ of each propagating wave. Half of the frequency spectrum is used to reconstruct the temporal signal of a single propagating wave as illustrated on Figures 15(b)(c). The slope of the phase then yields the phase velocity c_r whereas the evolution of the amplitude provides a measure of the corresponding temporal growth rate from which the amplification factor c_i may be extracted. Thus one is able to separate right and left-running waves from the original signal.

Satisfactory agreement is obtained between theory and experiment for the phase velocity and growth rate variations with J as shown on Figure 14(a) and (b). Experimental points corresponding to right-moving (respectively left-moving) waves are indicated by circles (respectively squares). Error bars on the growth rate factor are essentially due to the image sampling frequency that is slightly too small compared to the characteristic evolution time of the instability. The small asymmetry observed between right and left-propagating waves most likely arises from non Boussinesq effects. Given all these uncertainties, the present results demonstrate that a simple theoretical analysis is capable of predicting the onset and the growth of the instability, as well as its propagative nature.



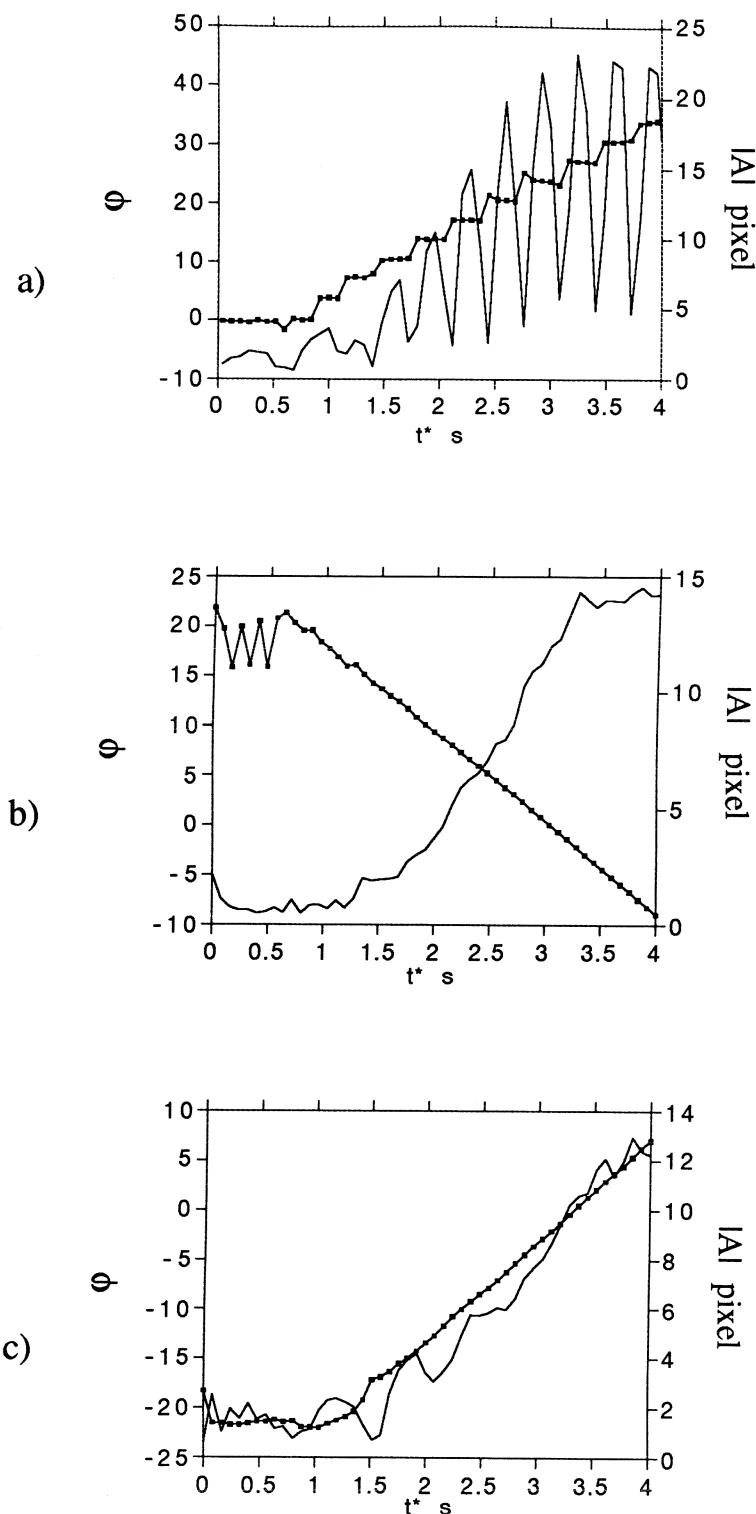


FIGURE 15. Illustration of the procedure used to extract the phase velocity c_r and growth factor c_i from the complex amplitude $A(t)$ at the forcing wavenumber. Fluid set#2, $\Delta U_m^* = 14 \text{ cm/s}$, $\lambda_f^* = 3.7 \text{ cm}$. —: amplitude $|A|(t)$; - - : phase $\phi(t)$. (a): amplitude and phase variations of total forcing wavenumber component; (b): amplitude and phase variations of left-running wave; (c): amplitude and phase variations of right-running wave.

IV-3. Asymmetric velocity profile: theoretical results.

When the kinematic viscosities of each fluid are not the same ($\delta \neq 1$), the asymmetry parameter β is not zero and the velocity profile loses its symmetry.

Odd powers of c in the dispersion relation (4) are no longer identically zero. Consequently, if c is a solution, $-c$ is not a solution although eigenvalues still appear as complex conjugate pairs in the complex $c_r - c_i$ plane. This partial breaking of symmetry implies that the properties of right and left-running waves are no longer identical. The effect of β on the mode diagram in the $k-J$ plane is illustrated on Figure 16 for a finite value of d . Corresponding loci of the roots of (4) as J gradually decreases to zero on the vertical line $k=1$ are displayed on Figure 17. The most noteworthy difference between the symmetric profile $\beta = 0$ (Figures 16(a) and 17(a)) and the asymmetric profile, for instance $\beta = 0.03$ (Figures 16(b) and 17(b)), is the emergence of a domain with a single unstable propagating mode as indicated by the hatched regions on Figures 16(b), (c). As the marginal stability boundary is crossed from above, a single propagating mode becomes unstable when $\beta \neq 0$ (hatched band on Figure 16(b)), whereas two counter-propagating Holmboe waves simultaneously become unstable when $\beta = 0$ (shaded region on Figure 16(a)). As seen from Figure 17(b), the propagation velocity c_r of the first appearing unstable wave is negative, i.e. opposite to the fluid velocity β at the interface. According to (3), the interface velocity β is in the same direction as the fluid velocity of the more viscous fluid (see also Figure 4). We can therefore conclude that *the first destabilized wave moves in the same direction as the less viscous fluid, where the diffusion layer is thinner.*

As the Richardson number J is gradually decreased at a finite value of β (Figures 17(b), (c)), a single collision of the real eigenvalues first takes place on the negative real axis which signals the appearance of a single unstable left-running wave. When J crosses into the shaded domain, the right-running wave also becomes unstable as two real eigenvalues collide on the positive real axis. In this range of Richardson numbers, there exists a pair of counter-propagating waves with unequal velocities c_r^+ and c_r^- .



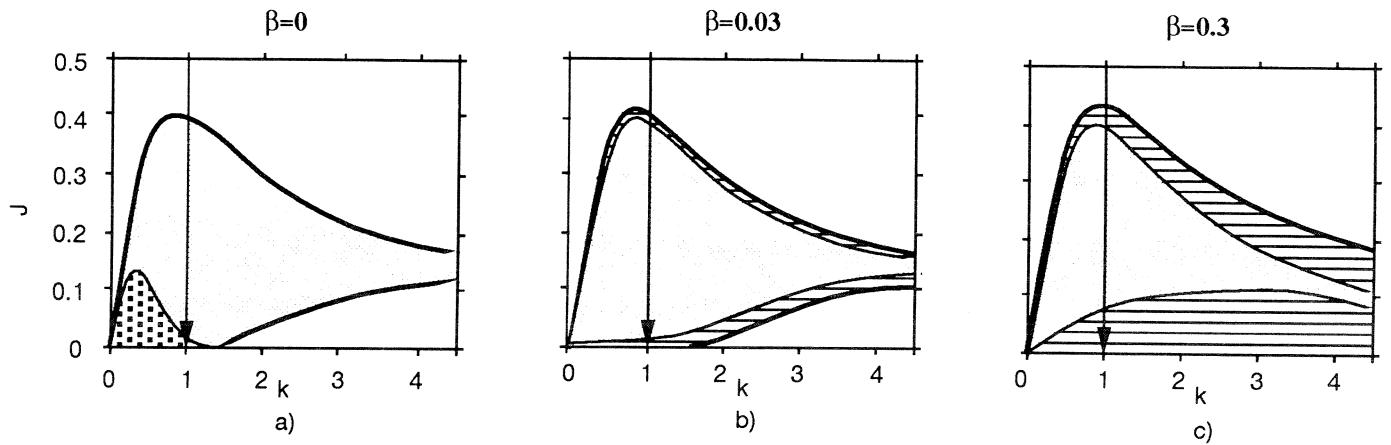


FIGURE 16. Stability diagram of piecewise linear model in the wavenumber k - Richardson number J plane for different values of the asymmetry parameter β . $d=0.5$. clear regions: neutrally stable modes ($c_r \neq 0; c_i = 0$); dotted regions: stationary unstable Kelvin-Helmholtz modes ($c_r = 0; c_i > 0$); shaded regions: pair of counter-propagating unstable modes ($c_r \neq 0; c_i > 0$) ; hatched regions: single propagating unstable mode ($c_r \neq 0; c_i > 0$). Thicker curve: marginal stability boundary. (a): $\beta=0$; (b): $\beta=0.03$; (c): $\beta=0.3$.

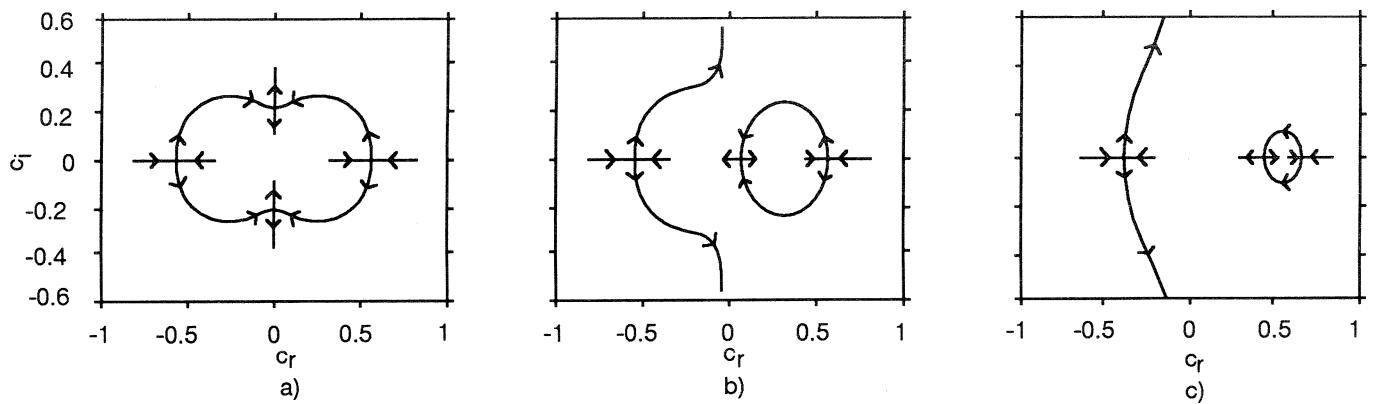


FIGURE 17. Loci of eigenvalues in complex c_r - c_i plane as Richardson number J is decreased along vertical path indicated on Figure 16, for different values of the asymmetry parameter β . (a): $\beta=0$; (b): $\beta=0.03$; (c): $\beta=0.3$. Arrows indicate the direction of migration of the eigenvalues as J is lowered.

According to (4), both velocities are related by

$$c_r^+ + c_r^- = \frac{n_3}{2} = -\beta .$$

For lower values of J , the right-running wave is stabilized as the corresponding complex conjugate pair of eigenvalues experiences a final embrace on the real axis. Increasing the asymmetry parameter β is seen to reduce the range of Richardson numbers in which the right-running wave is unstable. Thus, waves moving in the direction of the more viscous fluid are gradually stabilized as its viscosity is enhanced. Finally we note that left-running waves travelling in the same direction as the less viscous fluid are more and more unstable (larger c_i) when J approaches zero, but their propagation velocity c_r gradually decreases to zero.

In the symmetric case (section 4.1), one could distinguish unambiguously between Kelvin-Helmholtz modes defined by the stationary condition $c_r=0$ and Holmboe modes defined by the propagating condition $c_r \neq 0$. Such a sharp distinction is no longer tenable when the symmetry of the basic velocity profile is broken ($\beta \neq 0$). A small non zero value of β (Figure 17(b)) is seen to eliminate the two collisions of eigenvalues taking place on the imaginary axis for $\beta=0$ (Figure 17(a)). As a result the Kelvin-Helmholtz domain (dotted area in Figure 16(a)), in which the eigenvalues are purely imaginary, disappears in Figure 16(b). In the strict sense, stationary waves are then obtained only in the limit $J=0$. It can be concluded that the slightest asymmetry blurs the boundary between the Kelvin-Helmholtz and Holmboe regimes. We have therefore avoided the use of this terminology in this section.

IV-4. Comparison with experiments.

The theoretical considerations outlined above indicate that small differences in the kinematic viscosities of the two fluids have subtle effects on the nature of the instability close to onset. In particular, the observed asymmetry between right and left-running waves on the spatio-temporal diagram of Figure 3 can now be understood. The properties of fluid set #1 listed in Table 1 yield the value $\beta = 0.20$ of the asymmetry parameter and



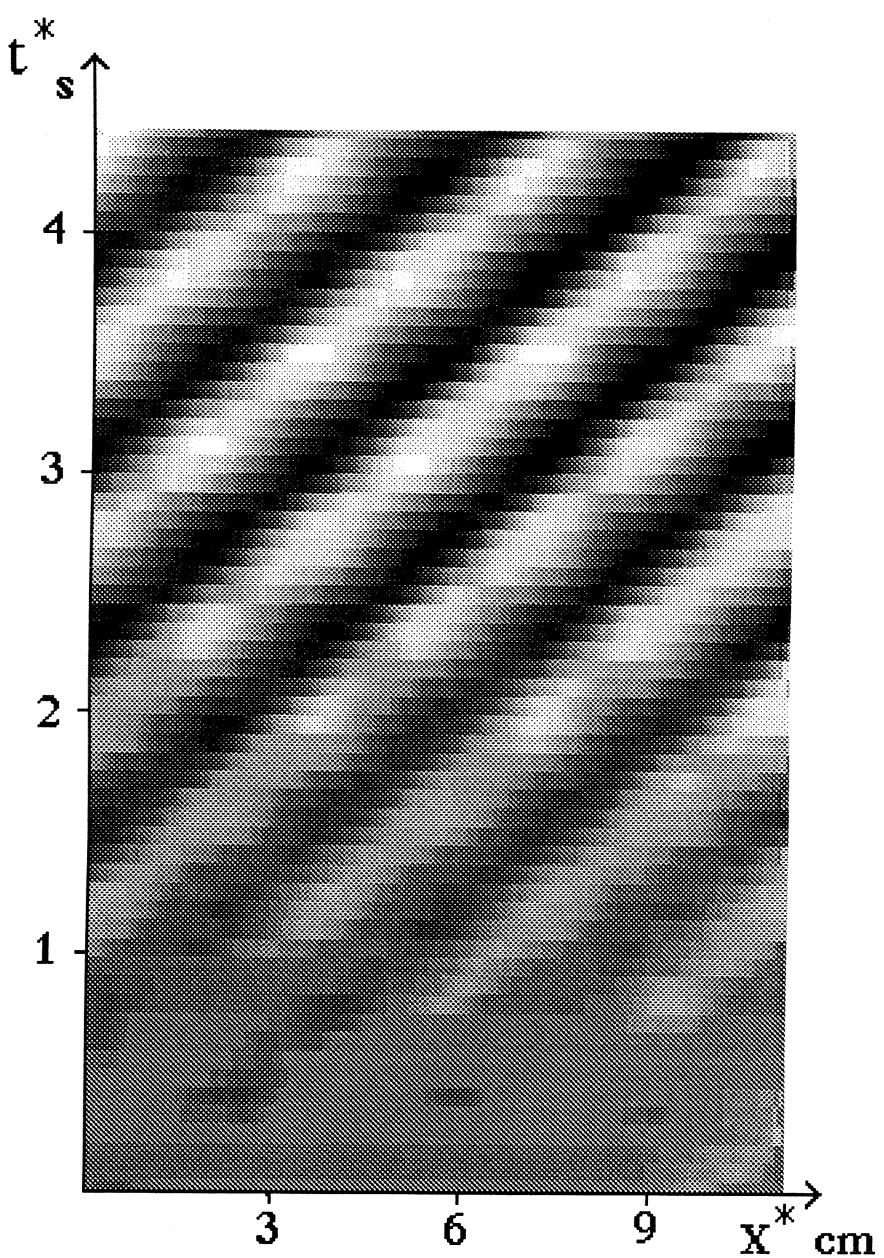


FIGURE 18 a)

FIGURE 18. Spatio-temporal x^*-t^* diagram of interface elevation. $\Delta U_m^* = 12 \text{ cm/s}$, $\lambda_f^* = 3.7 \text{ cm}$. (a) $\beta = -0.09$, (b) $\beta = 0.007$, (c) $\beta = 0.14$. The tube is brought back to its horizontal position at $t^* = 0.5 \text{ sec}$.

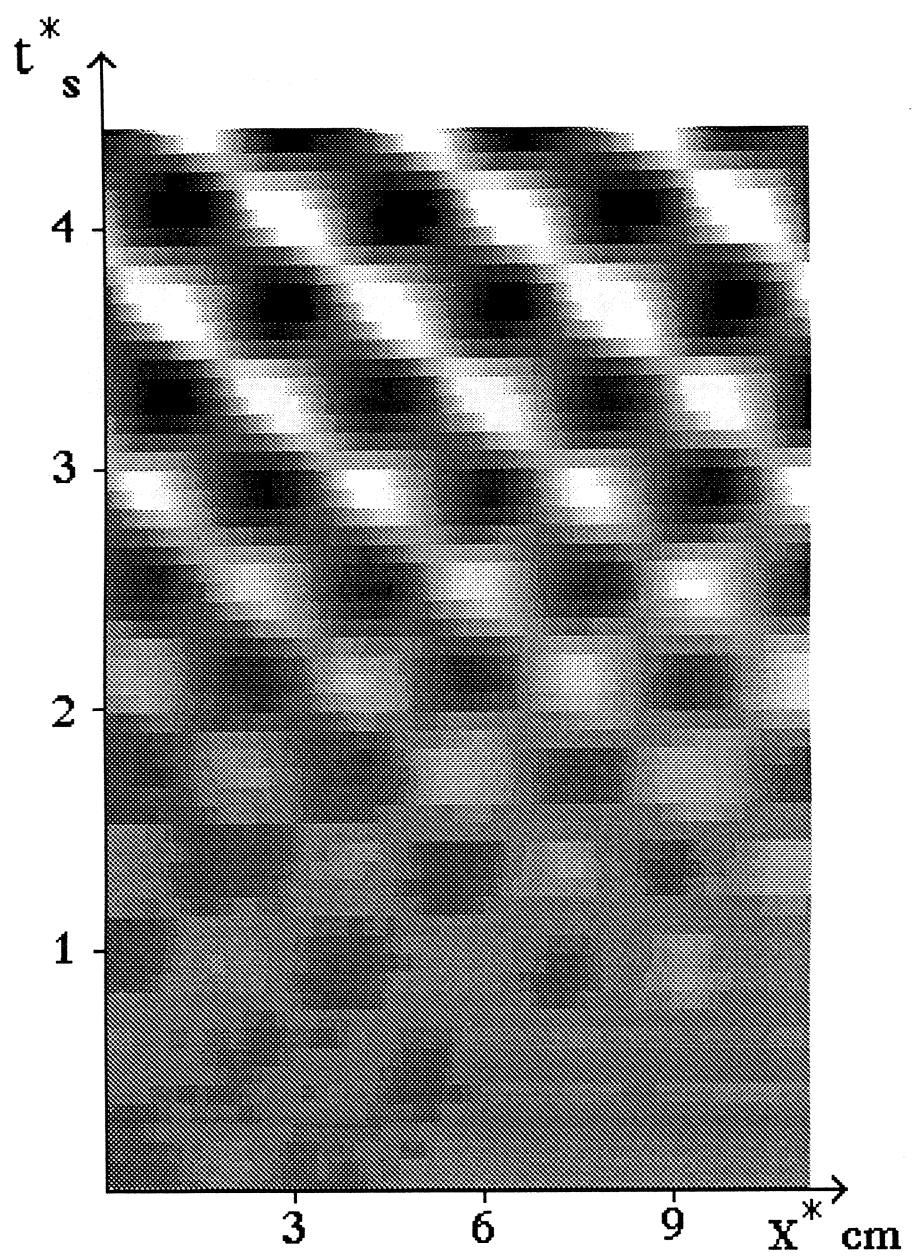


FIGURE 18 b)

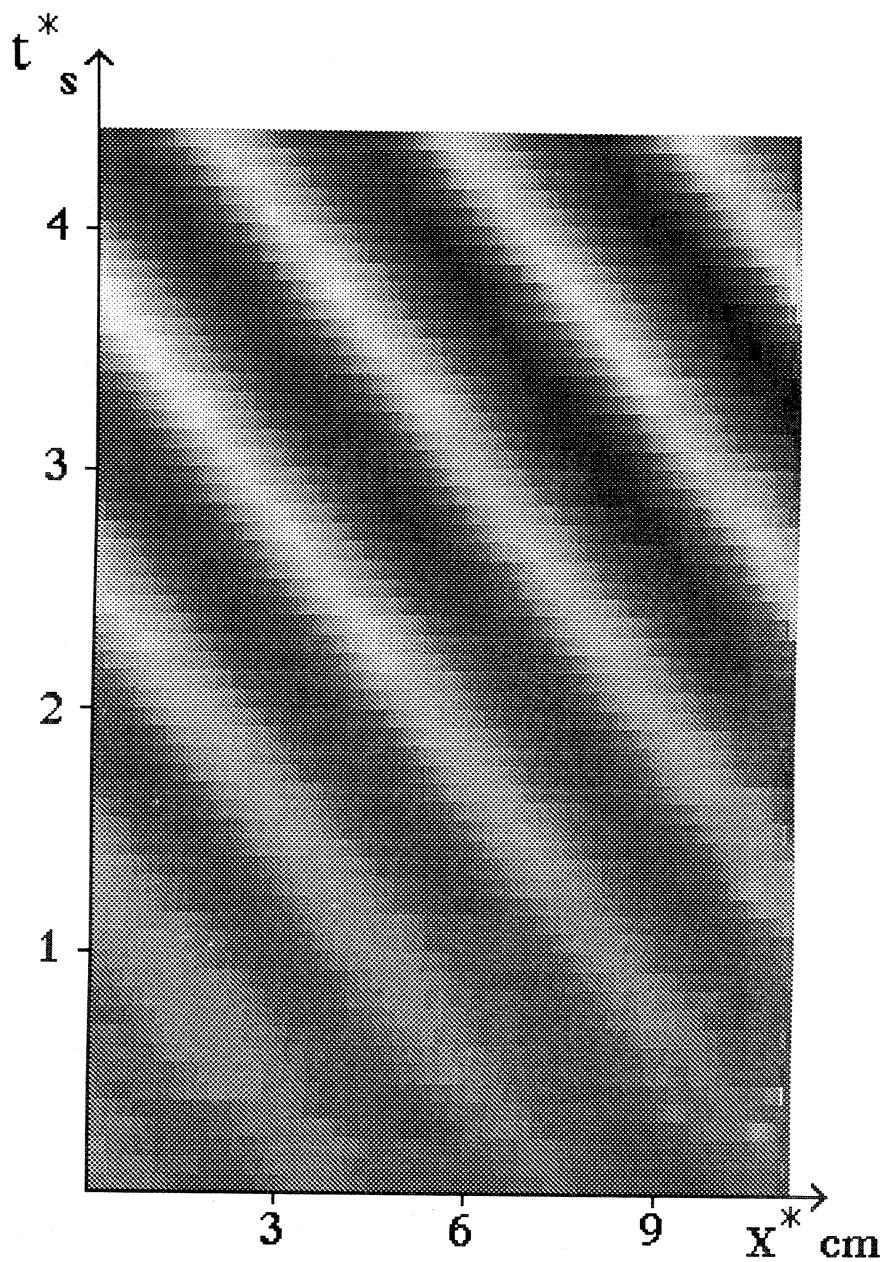
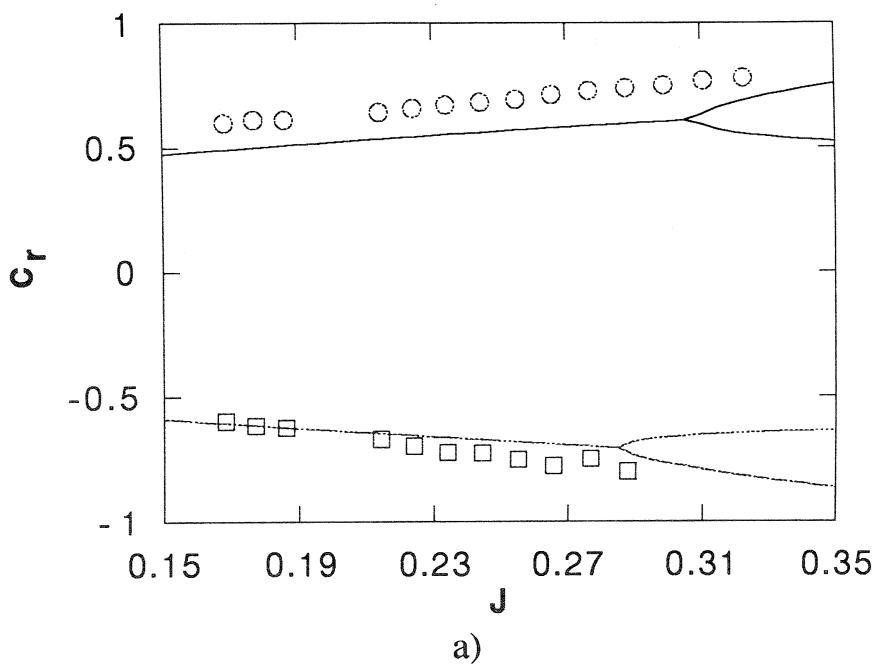
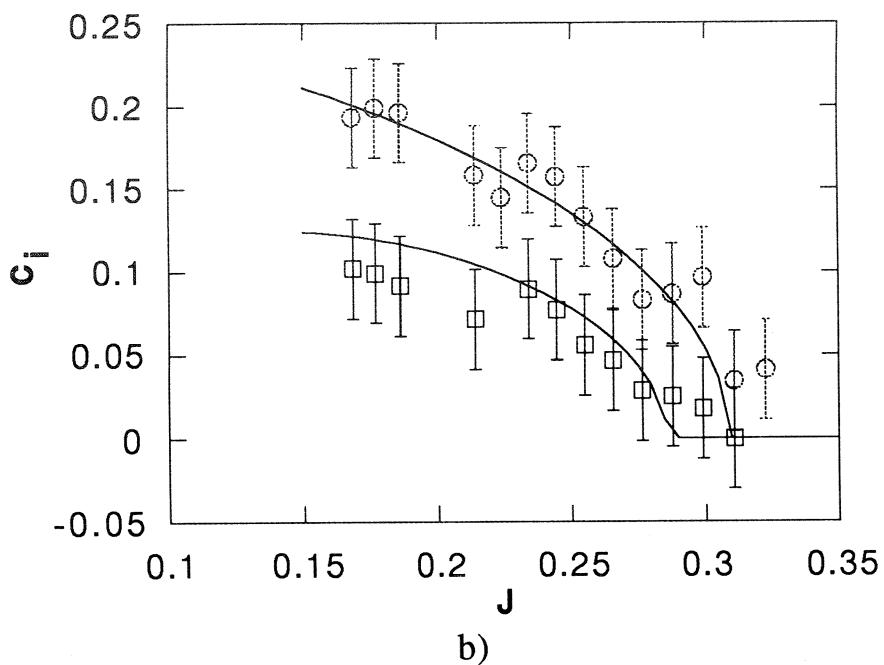


FIGURE 18 c)



a)



b)

FIGURE 19. Variations of the real part c_r (a) and imaginary part c_i (b) of the complex phase velocity as a function of the Richardson number J for asymmetric velocity profile. The wavenumber is fixed at the value $k=0.51$. Continuous curves: theoretical predictions. o: experimental data points for right-moving wave. □: experimental data points for left-moving wave. Fluid set #3, $d=1.4$, $\beta=-0.09$.

one should expect predominantly left-running waves moving in the same direction as the less viscous water, in qualitative agreement with observations.

The asymmetry parameter β of fluid set#2 can be controlled by adjusting the viscosity of the upper fluid through variations in the concentration of silicone oil V100 in the mixture. Different x^*-t^* diagrams are then obtained as illustrated on Figure 18. Figure 18(a) corresponds to a mixture of 7% silicone oil and 93% kerosene (fluid set #3) so that $\beta=-0.09$ and predominant right-moving waves are observed. When $\beta=0.007$, with a mixture of 12% silicone oil and 88% kerosene (fluid set #2), two counter-propagating waves of equal amplitude are generated (Figure 18(b)). Finally, when the upper fluid is made of 20% silicone oil and 80% kerosene, $\beta=0.14$ and left-running waves are the only ones observed (Figure 18(c)). Thus, in agreement with the theoretical results of section 4.3, the instability mechanism selects propagating waves moving in the same direction as the less viscous fluid. Measured values of the phase velocity and growth factor for fluid set #3 and $\beta=-0.09$ are compared with the predictions of linear theory on Figures 19(a), (b). As in the symmetric case, satisfactory agreement is obtained between the theory and the experiments, thereby demonstrating that the effects of asymmetry are also well described by a simple theoretical model based on a piecewise linear profile.

V. CONCLUSIONS.

The interface separating two streams of immiscible fluids has been shown, from a linear stability analysis, to become unstable below a well-defined value of the Richardson number when surface tension effects are included. If the velocity profile is odd with respect to the location of the density discontinuity and the evolution of the perturbation is strictly inviscid, the problem is invariant under both space and time reflections, $x \rightarrow -x$ and $t \rightarrow -t$. In this situation, as the Richardson number crosses through the threshold value from above, the onset of instability is signaled by one of two possible scenarii in the c_r - c_i plane of the complex phase velocity c . If the thickness of the velocity profile is zero, i-e in the vortex sheet limit, two real values of c collide at the origin to give rise to a

single pair of stationary amplified and decaying Kelvin-Helmholtz modes. As soon as the thickness of the velocity profile becomes non-zero, this scenario becomes invalid. Instead, two sets of real values of c collide at finite and opposite values of the propagation velocity to give rise to two pairs of counter-propagating amplified and decaying Holmboe modes. Amplified and decaying stationary Kelvin-Helmholtz modes are only recovered at lower Richardson numbers. Experimental observations and measurements in a tilting tank apparatus with two fluids of approximately equal kinematic viscosities have shown that the threshold values of the velocity difference and wavenumber are reasonably well predicted by the model. Furthermore, the onset of instability is characterized by the appearance of counter-propagating Holmboe waves with phase speeds and growth factors as predicted by the finite thickness analysis. Thus, the generation of diffusive layers on either side of the interface drastically alters the qualitative nature of the instability. It is only in the accelerating shear flow configuration (constant values of the tilting angle), that one may hope to remain in a domain with negligible diffusive layer thicknesses and to observe stationary Kelvin-Helmholtz perturbations. It is worth mentioning that counter-propagating waves have also been encountered near onset in other fluid systems displaying the reflectional symmetry $x \rightarrow -x$, for instance convecting layers of binary fluid mixtures [Kolodner et al.(1986), Surko & Kolodner (1987)]. In the latter case the disturbance field is strongly dissipative with no invariance under time reflections so that instability arises by simple crossing of two eigenvalue branches into the upper half plane $c_i > 0$ at symmetrically located points on the c_r axis.

When the velocity profile displays some asymmetry, the reflectional invariance $x \rightarrow -x$ is broken and the linear stability results indicate that only a single propagating wave appears at the critical value of the Richardson number. The unambiguous distinction between Kelvin-Helmholtz and Holmboe modes is then lost and, at very low Richardson numbers, one gradually approaches the limit of stationary Kelvin-Helmholtz disturbances. Experiments carried out in sets of fluids with different kinematic viscosities fully confirm these predictions qualitatively and quantitatively: the first destabilized wave

moves in the same direction as the stream of less viscous fluid. The dominant propagation direction or lack thereof can be manipulated by altering the respective fluid viscosities. It can be concluded from this study and the earlier investigation of Pouliquen et al.(1992) that Thorpe's original setup can be used to advantage in a spatially-forced configuration to understand the spatio-temporal behavior of Holmboe waves at a density discontinuity.

Acknowledgements.

The authors have benefitted from fruitful and stimulating discussions with Hugues Chaté, Stéphane Douady, Vincent Hakim, Greg Lawrence, Paul Manneville, Larry Redekopp, Maurice Rossi, Patrick Tabeling, and Stéphane Zaleski. The experimental portion of this study would not have been possible without the technical assistance and joie de vivre of Antoine Garcia. Special thanks go to Francois Sicoli for helping us in measuring the surface tension. Many long and spirited exchanges have also taken place with Buck Danny and his gang at Patuxent River Air Force Base, Alaska.

The financial support of the Direction des Recherches, Etudes et Techniques (DRET) of the French Ministry of Defense under Grant # 90-040 and of the Direction des laboratoires (Ecole Polytechnique) is gratefully acknowledged.

REFERENCES

- BALSA, T.F. 1987 On the spatial instability of piecewise linear free shear layers. *J.Fluid.Mech.* **174**, 553-563.
- BROWAND, F.K. & WINANT, C.D. 1973 Laboratory observations of shear layer instability in a stratified fluid. *Boundary Layer Met.* **5**, 67-77.
- DELISI, D. & CORCOS, G.M. 1973 A study of internal waves in a wind tunnel. *Boundary Layer Met.* **5**, 121-137.
- DRAZIN, P.G. & HOWARD, L.N. 1966 Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluids. *Adv.Appl.Mech.* **9**, 1-89.
- DRAZIN, P.G. & REID, W.H. 1981 *Hydrodynamic Stability*. Cambridge Univ.Press.
- HAZEL, P. 1972 Numerical studies of the stability of inviscid parallel shear flows. *J.Fluid Mech.* **51**, 39-62.
- HO, C.M. & HUERRE, P. 1984 Perturbed free shear layers. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **16**, 365-424.
- HOLMBOE, J. 1962 On the behavior of symmetric waves in stratified shear layers. *Geophys. Publ.* **24**, 67-113.
- HOWARD, L.N. & MASLOWE, S.A. 1973 Stability of stratified shear flows. *Boundary Layer Met.* **4**, 511-523.
- KOLODNER, P., PASSNER, A., SURKO, C.M. & WALDEN, R.W. 1986 Onset of oscillatory convection in a binary fluid mixture. *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2661-2624.
- KOOP, C.G. & BROWAND, F.K. 1979 Instability and turbulence in a stratified fluid with shear. *J.Fluid Mech.* **93**, 135-159.
- LAWRENCE, G.A., BROWAND, F.K. & REDEKOPP, L.G. 1991 The stability of a sheared density interface. *Phys. Fluids A.* **3**, 2360-2370.
- LAWRENCE, G.A., LASHERAS, J.C. & BROWAND, F.K. 1987 Shear instabilities in stratified flow. *Proc. of the Third Int. Symp. on Stratified Flows*. February 2-5, 1987, Pasadena, California.

- MASLOWE, S.A. & KELLY, R.E. 1971 Inviscid instability of an unbounded heterogeneous shear layer. *J.Fluid Mech.* **48**, 405-415.
- MASLOWE, S.A. & THOMPSON, J.M. 1971 Stability of a stratified free shear layer. *Phys. Fluids A* **14**, 453-458.
- MAXWORTHY, T. & BROWAND, F.K. 1975 Experiments in rotating and stratified flows: oceanographic applications. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **7**, 273-305.
- POULIQUEN, O., CHOMAZ, J.M., HUERRE, P. & TABELING, P. 1992 Wavenumber selection and phase solitons in spatially forced temporal mixing layers. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2596-2599.
- SCOTTI, R.S. & CORCOS, G.M. 1972 An experiment on the stability of small disturbances in a stratified shear layer. *J.Fluid Mech.* **52**, 499-528.
- SMYTH, W.D., KLAASEN, G.P. & PELTIER, W.R. 1988 Finite amplitude Holmboe waves. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **43**, 181-222.
- SMYTH, W.D. & PELTIER, W.R. 1989 The transition between Kelvin-Helmholtz and Holmboe instability: an investigation of the overreflection hypothesis. *J. Atmos. Sci.* **46**, 3698-3720.
- SMYTH, W.D. & PELTIER, W.R. 1990 Three-dimensional primary instabilities of a stratified dissipative, parallel flow. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **52**, 249-261.
- SMYTH, W.D. & PELTIER, W.R. 1991 Instability and transition in finite-amplitude Kelvin-Helmholtz and Holmboe waves. *J.Fluid Mech.* **228**, 387-415.
- SURKO, C.M. & KOLODNER, P. 1987 Oscillatory traveling-wave convection in a finite container. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2055-2058.
- THORPE, S.A. 1968 A method of producing a shear flow in a stratified fluid. *J.Fluid Mech.* **32**, 693-704.
- THORPE, S.A. 1969 Experiments on the instability of stratified shear flows: immiscible fluids. *J.Fluid Mech.* **39**, 25-48.
- THORPE, S.A. 1973a Turbulence in stably stratified fluids: a review of laboratory experiments. *Boundary Layer Met.* **5**, 95-119.

THORPE, S.A. 1973b Experiments on instability and turbulence in a stratified shear flow.

J.Fluid Mech. **61**, 731-751.

WEISSMAN, M.A. 1979 Non linear wave packets in the Kelvin-Helmholtz instability.

Phil. Trans. R. Soc. Lond. **A290**, 639-385.

	Fluid	density (g/cm ³)	viscosity (centipoise)	surface tension (mN/m)	β
Set #1	water	$\rho_1^* = 1.$	$\mu_1^* = 1.$	$\gamma^* = 80$	0.14
	equal mixture of silicone oil v2 and 1-2-3-4-tetrahydronaphthalene	$\rho_2^* = 0.92$	$\mu_2^* = 1.9$		
Set #2	mixture of 80% alcohol and 20% water	$\rho_1^* = 0.848$	$\mu_1^* = 2.1$	$\gamma^* = 5.2$	$7 \cdot 10^{-3}$
	mixture of 12% silicone oil v100 and 88% kerosene	$\rho_2^* = 0.796$	$\mu_2^* = 2.3$		
Set #3	mixture of 80% alcohol and 20% water	$\rho_1^* = 0.848$	$\mu_1^* = 2.1$	$\gamma^* = 5.3$	-0.09
	mixture of 7% silicone oil v100 and 93% kerosene	$\rho_2^* = 0.784$	$\mu_2^* = 1.6$		

Table 1.

Physical properties of the fluids used in the experiments.
The dimensionless asymmetry parameter β is defined by equation (1).

Commentaires

Parallèlement à cette étude théorique et expérimentale des ondes propagatives de Holmboe à l'interface entre deux fluides non miscibles, nous avons effectué quelques simulations numériques directes. Les résultats préliminaires que nous présentons ne forment en aucun cas une étude numérique complète et approfondie de l'instabilité de couche de mélange temporelle. Notre but était de comparer qualitativement des simulations numériques bidimensionnelles avec les observations expérimentales afin de juger de l'importance ou non des effets tridimensionnels dans l'expérience. Ces simulations ont été réalisées à l'aide d'un code numérique traitant les écoulements diphasiques développé par Stéphane Zaleski. Nous avons adapté ce programme en lui ajoutant l'effet de la gravité afin de simuler l'écoulement créé dans le réservoir basculant. L'algorithme du calcul de l'évolution de chacun des fluides se décompose à chaque pas de temps en trois étapes.

La première est une étape purement hydrodynamique, où le code calcule les champs de vitesses à partir des contraintes appliquées aux fluides. L'algorithme de calcul utilise des différences finies calculées sur deux réseaux de discréétisation décalés, l'un pour les vitesses, l'autre pour les pressions (Peyret & Taylor 1983).

La deuxième étape consiste à calculer la nouvelle position de l'interface à partir des champs de vitesses précédemment trouvés. Ce suivi de l'interface est le point délicat des simulations d'écoulements diphasiques. Afin de caractériser les deux phases, un champ $C(x,y,t)$ est défini tel que $C=1$ dans le fluide dense et $C=0$ dans le fluide léger. Suivre la déformation de l'interface revient à résoudre:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C = 0 .$$

La méthode utilisée dans le code est inspirée de la méthode VOF (Volume of fluid) (Hirt & Nicholls 1981). Celle-ci consiste à balayer verticalement et horizontalement le volume de simulation et à considérer en chaque lien du réseau les

deux cellules adjacentes. Il faut alors se donner une règle qui, à partir des fractions de fluide dense dans chacune des cellules C_1 et C_2 , ainsi que de la composante de vitesse normale au lien, donne le flux de C d'une cellule à l'autre. Différentes règles existent qui, à cause des erreurs de discréétisation, ont soit tendance à raidir l'interface (on parle alors d'algorithmes anti-diffusifs) soit à la faire s'étaler (il s'agit d'algorithmes diffusifs). L'option choisie par Stéphane Zaleski consiste à appliquer localement une méthode tantôt diffusive, tantôt anti-diffusive, selon la valeur du gradient de concentration C . Lorsque celui-ci est supérieur (resp. inférieur) à un seuil, l'algorithme diffusif (resp. anti-diffusif) est choisi .

La dernière étape est le calcul de la contribution de la tension interfaciale aux contraintes que subissent les fluides. A partir de la position de l'interface calculée précédemment il est possible d'évaluer la pression de Laplace. La méthode utilisée dans le code pour cette estimation repose sur un calcul de transfert d'impulsion relié au gradient de concentration C . Cette méthode apparaît plus performante que les algorithmes classiques basés sur le calcul de la courbure de l'interface, car elle diminue les erreurs de discréétisation, et surtout conserve exactement l'impulsion. Les contraintes ainsi calculées servent à trouver le champ de vitesses au pas de temps suivant.

Ce programme s'est avéré être un outil très performant et remarquablement bien adapté à notre problème. Nous avons effectué les simulations sur une Silicon Graphics Iris 4D 310 VGX. Le domaine de calcul est une boîte carrée de 66 mailles de côté. Nous avons imposé des conditions aux limites périodiques aux bords verticaux de la boîte (le fluide qui sort à droite, rentre à gauche), et des conditions de vitesse normale nulle aux parois supérieure et inférieure. Dans toutes les simulations que nous avons effectuées, l'écoulement initial à $t=0$ possède la configuration de nappe de vorticité. Le fluide dense occupe la moitié inférieure de la boîte et s'écoule vers la gauche avec une vitesse uniforme $-\Delta U/2$, tandis que le fluide léger occupe la moitié supérieure et s'écoule à la vitesse $\Delta U/2$. Les paramètres sans dimensions qui définissent entièrement cet écoulement sont :

le nombre de Richardson modifié: $J = \frac{\rho_1^* - \rho_2^*}{\rho_1^* + \rho_2^*} \frac{g^* L^*}{U^{*2}}$,

la densité du fluide dense adimensionnée: $\rho_1 = \rho_1^*/(\rho_1^* + \rho_2^*)$,

la hauteur des couches de fluides: h^*/L^* ,

où $L^* = \sqrt{\gamma^*/[g^*(\rho_1^* - \rho_2^*)]}$ est la longueur capillaire.

Le code étant un code visqueux nous devons ajouter:

le nombre de Reynolds dans chaque couche $Re_i = \Delta U^*/h^* v_i^*$,

v_i^* étant la viscosité cinématique des fluides.

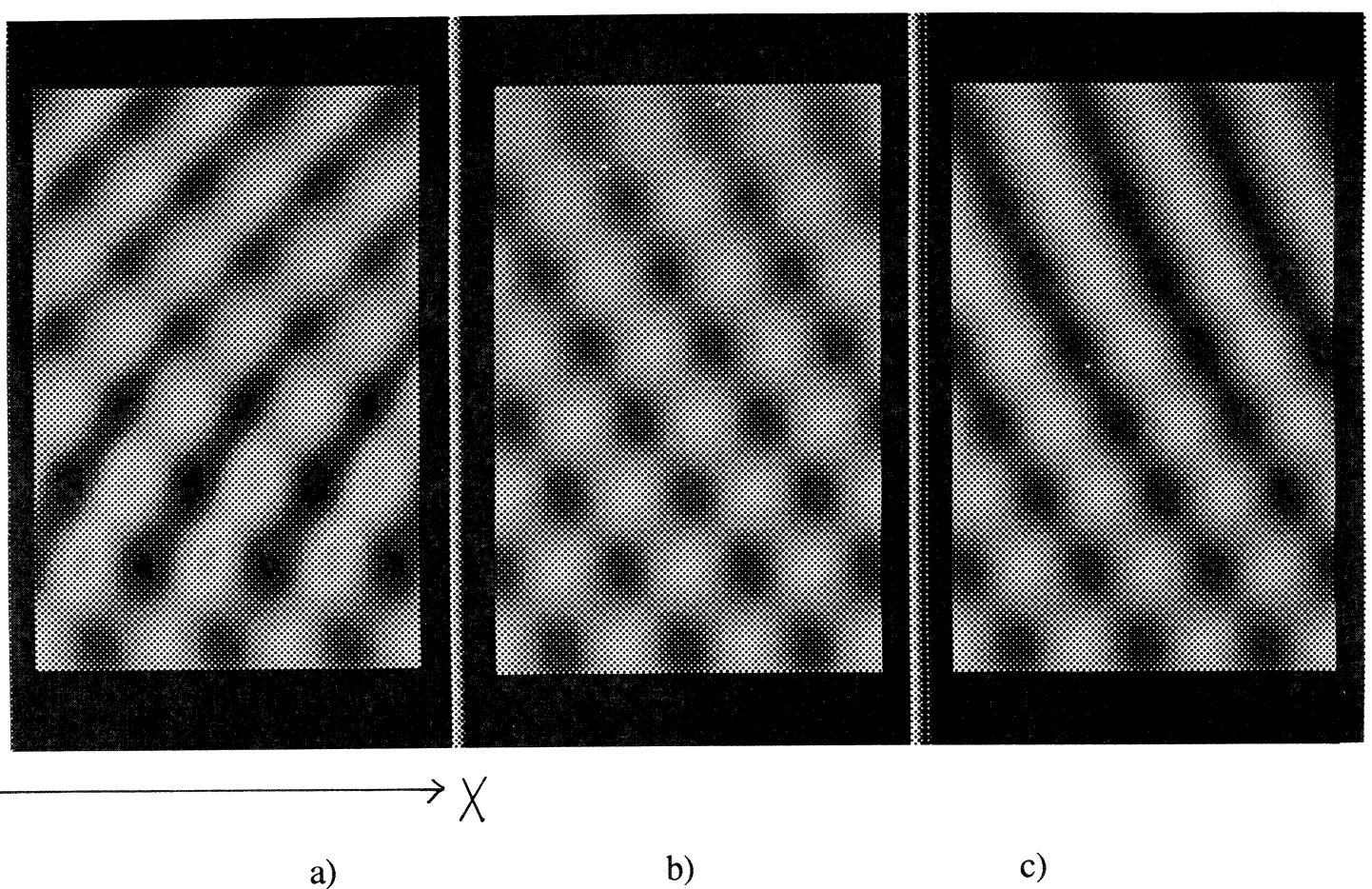


Figure V-1: Diagramme spatio-temporel de $C(x, 0, t)$; $J=0.312$, $\rho_1=0.526$, $h=18.85$; a) $Re_1=500$,

$Re_2=3000$; b) $Re_1=800$, $Re_2=1200$; c) $Re_1=1200$, $Re_2=800$.

A l'écoulement de base, nous avons superposé une petite perturbation en onde plane que nous avons calculée à partir de la théorie linéaire de l'instabilité d'une nappe de vorticité. Cette perturbation initiale est choisie égale au vecteur propre associé au nombre d'onde critique donné par la théorie linéaire. Lorsque le nombre de Richardson modifié J est inférieur à 0.5, la perturbation introduite à $t=0$ se propage sans croître et finit par se dissiper sous l'action de la viscosité. Par contre lorsque $J < 0.5$ la déformation de l'interface introduite initialement s'accentue puis sature. On observe alors l'évolution présentée sur les figure V-1a, b, c. Elles représentent en niveau de gris l'évolution spatio-temporelle de la fraction de fluide dense C à l'altitude $y=0$ qui correspond à la position de l'interface de l'écoulement de base. Une crête (resp. un creux) dans la déformation de l'interface apparaît en clair (resp. foncé) (Figure V-2). Ce mode de représentation est très similaire aux diagrammes spatio-temporels obtenus dans les expériences du chapitre V, et donnent des renseignements identiques concernant la déformation de l'interface.

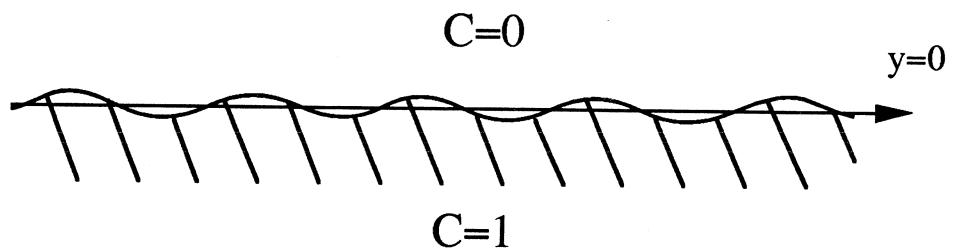


Figure V-2: Coupe effectuée pour dessiner les diagrammes spatio-temporels.

Dans les simulations numériques directes, comme dans l'expérience du réservoir basculant, l'écoulement de base varie dans le temps en raison de la croissance des couches limites qui se développent de part et d'autre de l'interface. La différence majeure réside cependant dans le fait que les couches limites au commencement de l'instabilité, sont exactement nulles dans les simulations. L'instabilité initiale sera

donc toujours strictement de type Kelvin-Helmholtz. La perturbation commence donc à croître de façon stationnaire. Mais rapidement, une dynamique propagative se met en place, due à la croissance des couches limites. Comme dans l'expérience, l'onde droite ou l'onde gauche peut être sélectionnée en changeant les viscosités des fluides.

Ces résultats numériques d'écoulements bidimensionnels concordent parfaitement avec les observations expérimentales, prouvant que la section circulaire du tube utilisé dans l'expérience n'a pas d'influence dramatique sur la dynamique de l'instabilité. Bien évidemment ces résultats numériques préliminaires appellent une étude plus approfondie et plus quantitative. En particulier cet outil numérique devrait permettre d'étudier la dynamique de l'instabilité de Holmboe pour un profil de vitesse constant dans le temps. Cette stationnarité, qui affranchit l'étude de l'instabilité de la croissance des couches limites, pourrait éventuellement être obtenue en introduisant une force de volume artificielle compensant exactement la dissipation visqueuse du profil de base.

Références

- PEYRET, R. & TAYLOR, T. D. 1983 *Computational methods for fluid flow*. Springer.
HIRT, C. W. & NICHOLLS, B. D. 1981 Volume of fluid (VOF) method fot the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.* **39**, 201.

Chapitre VI:

Conclusions.

L'expérience du réservoir basculant proposée pour la première fois par O. Reynolds, abondamment développée ensuite dans les années 70 par S. A. Thorpe, s'est avérée d'une fécondité étonnante. L'homogénéité spatiale de l'écoulement qu'elle crée, en fait un moyen d'investigation expérimental approprié pour l'étude des instabilités de cisaillement dans les fluides stratifiés. Le but de ce travail a été d'analyser à l'aide de ce dispositif, l'instabilité se développant à l'interface de deux fluides non miscibles, pour laquelle les effets de tension d'interface sont prédominants. La possibilité d'imposer à l'écoulement une perturbation extérieure périodique dans l'espace en déformant régulièrement la paroi du réservoir, a été un atout majeur dans l'étude des mécanismes d'instabilités.

Lorsque le tube était maintenu incliné, le cisaillement entre les deux couches de fluides était accéléré, et les tourbillons créés à l'interface se développaient sans se propager le long du tube, résultant d'une instabilité de Kelvin-Helmholtz. Nous avons montré que l'interaction entre le forçage, lui aussi fixe dans le temps, et les structures tourbillonnaires, donnait lieu à une compétition de nombres d'onde. Des phénomènes d'accrochage sous-harmoniques similaires à ceux observés dans les couches de mélange spatiales ont été observés, ainsi que la présence de solitons de phase dans l'organisation des structures lorsque le nombre d'onde de la perturbation était supérieur au nombre d'onde naturel de l'instabilité. L'existence d'états incommensurables dans un écoulement cisillé représente un résultat nouveau, qui apparaît comme l'équivalent conservatif des expériences de convection nématique forcée réalisées par Lowe & Gollub (1985).

Un modèle théorique en terme d'équation d'amplitude, basé sur une étude faiblement non linéaire d'une nappe de vorticité, nous a permis de mieux comprendre l'influence du forçage. La présence de parois à distance finie de l'interface a conduit à un ensemble d'équations d'évolution couplant l'amplitude de la déformation à $k=k_c$ aux champs moyens de vitesses et d'élevation de l'interface à $k=0$. Sous

l'approximation de Boussinesq, ce système s'est réduit à une équation de Klein-Gordon forcée, dont la dynamique de phase a révélé l'existence de solitons de phase propagatifs de type Sine-Gordon résultant d'un équilibre entre la perturbation imposée et l'instabilité primaire.

Nous avons toutefois été dans l'impossibilité de mettre en évidence expérimentalement de tels solitons propagatifs, la présence de couches limites de part et d'autre de l'interface modifiant la nature de l'instabilité au voisinage du seuil. Lorsque le tube était ramené à l'horizontale afin de stopper l'accélération des fluides, l'instabilité stationnaire de Kelvin-Helmholtz n'était plus observée, mais des ondes propagatives de Holmboe apparaissaient. Une analyse de la stabilité linéaire de l'écoulement idéalisé par un profil de vitesse en ligne brisée, nous a permis d'étudier la transition entre ces deux types d'instabilités. Dans l'étude des ondes de Holmboe à l'interface de deux fluides non miscibles, la modulation périodique de la paroi n'a plus joué le rôle d'un forçage, une résonance ne pouvant plus exister entre la perturbation stationnaire et les modes propagatifs. Nous l'avons cependant mis à profit pour contrôler proprement les conditions initiales, et sélectionner une seule longueur d'onde pour la déformation de l'interface. La qualité du signal alors obtenu nous a permis d'effectuer des mesures quantitatives de taux de croissance et de vitesses de phase, et un bon accord avec la théorie linéaire a été observé.

L'étape suivante consistera à développer une analyse faiblement non linéaire de l'instabilité de Holmboe. Se pose alors la question de savoir si la dynamique non linéaire observée expérimentalement est conservative ou dissipative. Dans le premier cas, l'évolution des deux ondes au voisinage du seuil seraient gouvernée par un système de deux équations de Klein-Gordon couplées, alors que dans le cas dissipatif, il s'agirait de deux équations de Ginzburg-Landau. Seule une estimation expérimentale des taux d'atténuation des ondes au dessous du seuil de l'instabilité pourra nous aiguiller.

Une autre extension naturelle de ce travail, actuellement en cours de réalisation, consistera à incliner un réservoir de rapport d'aspect plus élevé, afin d'étudier

l'évolution tridimensionnelle d'une couche de mélange temporelle. En augmentant progressivement la largeur de la cuve, il devrait être possible d'étudier la transition continue de la dynamique bidimensionnelle décrite dans cette thèse, à une dynamique tridimensionnelle, et d'analyser l'apparition de modulations transverses. La possibilité de contrôler le développement initial des ondes de Holmboe à l'aide d'une modulation des parois périodique dans l'espace, nous sera sans aucun doute d'une grande utilité dans l'étude des instabilités secondaires tridimensionnelles.

Instabilités et solitons de phase à l'interface de deux fluides non miscibles

Olivier Pouliquen

Cette thèse est consacrée à l'étude expérimentale et théorique des instabilités dans les couches de mélange temporelles. L'écoulement de base est généré en inclinant un long tube rempli de deux fluides non miscibles de densités différentes. Lorsque l'écoulement est accéléré et qu'un forçage périodique dans l'espace est imposé, on observe des états accrochés ainsi que des solitons de phase (états incommensurables). Dans le régime faiblement non linéaire, nous montrons à l'aide d'une analyse de la dynamique de phase "à la Kuramoto" que des solitons propagatifs solutions d'une équation de Sine-Gordon existent. Ces résultats ne décrivent cependant que qualitativement les observations expérimentales, l'écoulement étant accéléré et la théorie valable uniquement au voisinage du seuil de l'instabilité. Lorsque le tube est rabaissé à l'horizontale afin d'obtenir un cisaillement constant, l'instabilité change de nature et des ondes propagatives de Holmboe sont produites avec des vitesses de phases et taux de croissance en bon accord avec la théorie linéaire.

Mots clefs: Instabilités, couche de mélange, solitons, interface, équations d'amplitude.

Instabilities and phase solitons at the interface between two immiscible fluids.

This dissertation is concerned with the experimental and theoretical study of instability waves growing on a temporal mixing layer. The basic flow is generated by tilting a tube filled with two immiscible liquids of different density. Under spatially periodic forcing, locked states and phase solitons (incommensurable states) have been observed in accelerating flow conditions. In the weakly nonlinear range close to the threshold of instability, we have shown from a phase dynamics analysis à la Kuramoto that propagating solitons exist which are governed by the Sine-Gordon equation. These results only qualitatively describe the experimental observations carried out in the accelerating flow configuration. When the shear is maintained constant by putting the tube back to its horizontal position after tilting, the nature of the instability changes, and travelling Holmboe waves are produced with propagation speeds and growth rates that are in good agreement with linear stability theory.