



École Polytechnique  
Laboratoire d'Hydrodynamique

Thèse présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
Spécialité : Mécanique

par  
Olivier DOARÉ

---

INSTABILITÉS LOCALES ET GLOBALES EN  
INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

---

soutenue le 29 novembre 2001 devant le jury composé de :

M. José ANTUNES	examineur
M. Alain COMBESURE	rapporteur
M. Uwe EHRENSTEIN	rapporteur
M. Emmanuel de LANGRE	directeur de thèse
M. Nigel PEAKE	examineur
M. Eduardo WESFREID	examineur



# Merci,

L'ensemble de ce travail a été réalisé au LadHyX, d'octobre 1998 à octobre 2001. Sa réussite peut en grande partie être attribuée à l'ambiance stimulante qui y règne, où créativité et décontraction sont les maîtres mots.

J'exprime tout d'abord ma profonde gratitude envers Emmanuel, pour sa patience et sa disponibilité, son sens de l'analyse et sa grande lucidité. Chaque échange, réunion, ou discussion avec lui m'ont été bénéfiques et des plus encourageantes. Je souhaite à tout thésard d'avoir un tel directeur.

Je remercie l'ensemble des chercheurs du LadHyX, Patrick Huerre, Jean-Marc Chomaz, Carlo Cossu, Paul Manneville et Antoine Sellier pour leur enthousiasme scientifique et leur sens de l'humour. Merci à mon jury, José Antunes, Alain Combescure, Uwe Ehrenstein, Nigel Peake et José Eduardo Wesfreid pour tout l'intérêt qu'ils ont pu porter à mon travail et pour la réflexion que j'ai pu en tirer à posteriori. Je remercie aussi tous les professeurs de la filière de mécanique d'Orsay, et en particulier Claudine Dang Vu, Philippe Gondret, Jean-Pierre Hulin, Gérard Labrosse, Marc Rabaud, qui su me donner envie de me lancer dans la recherche.

Merci à Tonio de m'avoir épargné moult formations CNRS, et surtout de m'avoir légué "un peu" de son savoir faire, à Daniel pour les dizaines d'heures passées sur mes problèmes informatiques tordus et à mes camarades thésards et ex-thésards Benoît, Claudiu, François, Matteo, Paul, Ramiro et Stéphanie pour leur bonne humeur et leur constant soutien. Je remercie vivement Thérèse, sans qui la vie d'un thésard ne serait que troubles administratifs. Enfin je n'oublie pas de remercier vivement Sabine, à la fois joyeuse camarade de bureau et mentor quant à l'enseignement.

Et bon courage aux "suivants", Matteo, François et Ramiro.

Tout ce qui me reste de remerciements va à ma famille, mes amis et à Clothilde, pour tant de raisons que les cent pages qui suivent ne pourraient suffire à les énumérer...



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	Les interactions fluide-structure . . . . .	9
1.1.1	Le cas du tuyau avec écoulement interne . . . . .	9
1.1.2	Instabilités locales et globales d'un système unidimensionnel . . . . .	11
1.2	Equations du mouvement et conditions aux limites . . . . .	12
1.3	Instabilité locale . . . . .	14
1.3.1	Relation de dispersion . . . . .	14
1.3.2	Critère d'instabilité - Approche temporelle . . . . .	14
1.3.3	Réponse impulsionnelle - Concepts d'instabilités absolue et convective . . . . .	15
1.3.4	Réponse à un forçage harmonique . . . . .	18
1.4	Instabilité globale . . . . .	20
1.5	Précédents travaux confrontant les approches locale et globale . . . . .	23
1.6	Conclusion . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Instabilités locales et globales d'un tuyau simple</b>	<b>27</b>
2.1	Réponse à un forçage harmonique . . . . .	28
2.2	Bilan des propagations et réflexions d'onde . . . . .	32
2.2.1	Matrice de gain . . . . .	32
2.2.2	De la matrice de gain aux pulsations globales . . . . .	34
2.2.3	Propriétés de la matrice de gain et de ses valeurs propres . . . . .	35
2.2.4	Comparaison avec la méthode de Galerkin . . . . .	36
2.3	Contributions respectives du trajet des ondes et des réflexions d'ondes . . . . .	37
2.4	Conclusion . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Instabilités locales et globales d'un tuyau sur fondation élastique</b>	<b>45</b>
3.1	Instabilité globale . . . . .	46
3.1.1	Instabilité statique d'un tuyau sans extrémité libre . . . . .	46
3.1.2	Instabilité dynamique d'un tuyau encastré-libre . . . . .	47
3.2	Propriétés locales de stabilité . . . . .	48
3.2.1	Relation de dispersion . . . . .	48

3.2.2	Instabilité locale . . . . .	49
3.2.3	Instabilités absolue et convective . . . . .	50
3.2.4	Distinction entre neutralité et évanescence . . . . .	50
3.2.5	Bilan des critères locaux . . . . .	51
3.3	Confrontation des critères locaux et globaux . . . . .	52
3.3.1	Critères statiques . . . . .	53
3.3.2	Critères dynamiques . . . . .	53
3.3.3	Interprétation des résultats . . . . .	54
3.4	Effet de la dissipation . . . . .	56
3.4.1	Effet sur la stabilité locale . . . . .	57
3.4.2	Effet sur la stabilité globale . . . . .	58
3.5	Conclusion . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Instabilités locales et globales d'un tuyau suspendu</b>	<b>63</b>
4.1	Expériences d'instabilités globales . . . . .	64
4.1.1	Mesures de vitesses critiques . . . . .	64
4.1.2	Mesures des déformées du tuyau . . . . .	66
4.2	Propriétés locales . . . . .	71
4.2.1	Relation de dispersion . . . . .	71
4.2.2	Critère local de stabilité . . . . .	73
4.2.3	Critères locaux de transition . . . . .	74
4.3	Confrontation des critères locaux et des comportements globaux asymptotiques .	76
4.4	Modèles descriptifs des comportements asymptotiques . . . . .	80
4.4.1	Tuyau court . . . . .	80
4.4.2	Tuyau long, approche lentement variable . . . . .	80
4.4.3	Tuyau long, modèle du tuyau de longueur instable . . . . .	81
4.4.4	Comparaison modèles/essais . . . . .	82
4.5	Conclusion . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Équations du mouvement</b>	<b>93</b>
<b>B</b>	<b>Obtention des pulsations et modes propres</b>	<b>97</b>
B.1	La méthode exacte du déterminant . . . . .	97
B.2	La méthode de Galerkin . . . . .	98
B.3	Méthodes numériques utilisées . . . . .	99
<b>C</b>	<b>Données expérimentales</b>	<b>101</b>

**D Articles**

**107**

D.1 Local and global instability of fluid-conveying pipes on elastic foundations . . . . 107  
D.2 Force suiveuse critique sur une colonne pesante semi-infinie : modèles et expériences 107  
D.3 The flow-induced instability of long hanging pipes . . . . . 107



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Les interactions fluide-structure

L'interaction fluide-structure est une discipline de la mécanique englobant toute situation où un fluide interagit avec un solide environnant pour laquelle aucun des deux éléments, fluide ou solide, ne peut être négligé. Il est en effet courant en mécanique des fluides de considérer le solide environnant comme une simple frontière du milieu fluide étudié. La mécanique des solides quant à elle considère souvent que le fluide n'a que peu d'influence sur la dynamique du solide. De nombreux problèmes industriels nécessitent pourtant de prendre en compte les deux contributions pour être modélisés de façon satisfaisante.

Le travail présenté dans ce manuscrit vise en particulier à comprendre les interactions entre un écoulement et une paroi souple environnante. Ce type d'interaction intervient dans des systèmes physiques, pouvant ou non avoir un intérêt industriel, tels que le flottement des drapeaux et des ailes d'avion ou les vibrations des conduites avec un écoulement interne. Une multitude de travaux ont contribué à la compréhension de ce type d'interaction ces trente dernières années, certains du point de vue de la stabilité de l'écoulement, d'autres du point de vue de la stabilité de la paroi. Notre travail s'intéresse à la question de la stabilité de la paroi. Il s'agit donc plus d'un problème de mécanique des solides que de mécanique des fluides. La stabilité de ces parois est en effet primordiale car les vibrations peuvent entraîner leur rupture. De telles situations sont évidemment à éviter et il est nécessaire de connaître les critères d'instabilité.

#### 1.1.1 Le cas du tuyau avec écoulement interne

Nous allons nous intéresser en particulier au cas d'un tuyau avec écoulement interne. Ce système a été l'objet d'un grand nombre d'études, initiées par Benjamin [2] dans le cas d'un tuyau articulé et par Gregory et Paidoussis [25] dans le cas d'un tuyau souple continu. Les premiers travaux sur le sujet sont cependant ceux de Bourrières [7], qui a obtenu les équations linéaires du mouvement et effectué des observations expérimentales des oscillations d'un tuyau

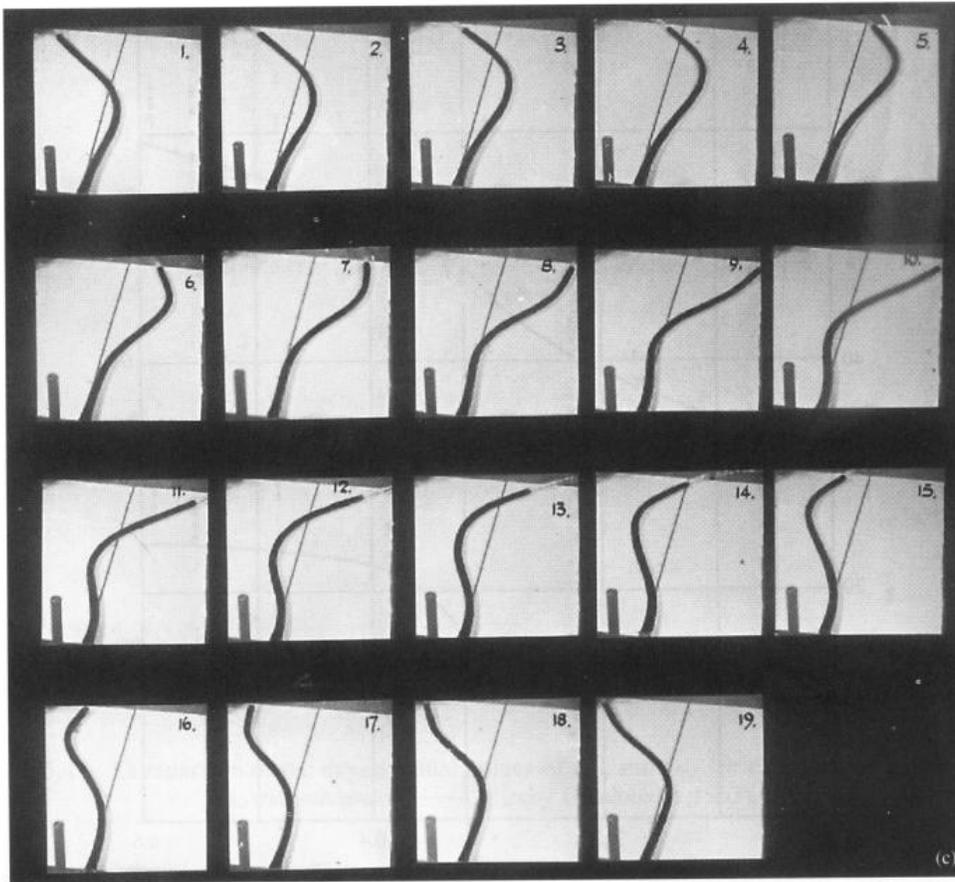


FIG. 1.1: Séquence d'images de la déformation d'un tuyau de longueur  $L = 724\text{mm}$  durant une période d'oscillation  $T = 0.55\text{s}$ . Le tuyau est encastré en bas de l'image et libre en haut, la fine ligne noire représente sa position au repos [26].

encastré à l'extrémité amont et libre à l'extrémité aval. Ces travaux ont été motivés à la fois par les problèmes industriels concrets (pipe-line, industrie nucléaire...) et par le fait qu'il s'agit d'une source de phénomènes physiques pertinents lorsque l'on s'intéresse aux vibrations induites par un écoulement dans des configurations plus complexes. La figure 1.1 présente les clichés expérimentaux du mouvement instable d'un tuyau encastré-libre obtenus par Gregory et Païdoussis [26].

La raison pour laquelle nous nous intéressons au cas du tuyau avec écoulement interne plutôt qu'à un autre système d'interaction entre un écoulement et une paroi est que celui-ci peut être modélisé de façon particulièrement simple et présente la plupart des ingrédients des interactions entre un fluide en écoulement et une paroi. Ces ingrédients sont le développement d'ondes instables, le flottement, le flambage. Il existe de nombreux types de fixations aux extrémités, et leurs propriétés peuvent jouer un rôle déterminant dans l'instabilité. Dans la suite, nous nous focaliserons sur trois types d'extrémités, l'encastrement, l'extrémité appuyée et l'extrémité libre. Sans écoulement, le tuyau se comporte comme une poutre et est stable. Avec écoulement, l'insta-

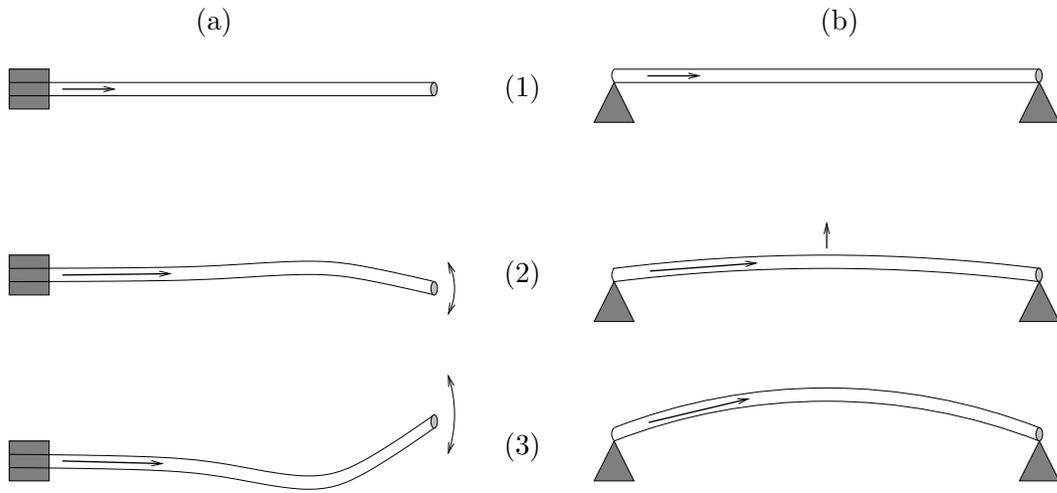


FIG. 1.2: Instabilités du tuyau ; (a), instabilité dynamique d'un tuyau encastré-libre (flottement) ; (b), instabilité statique d'un tuyau appuyé-appuyé (flambage) ; (1), position d'équilibre stable ou instable, selon la vitesse de l'écoulement ; (2), phase linéaire de croissance exponentielle du mode instable (dynamique ou statique) ; (3), saturation non-linéaire. Les flèches horizontales indiquent le sens de l'écoulement.

bilité apparaît lorsque la vitesse dépasse une valeur seuil, appelée vitesse critique. La figure 1.2 présente les deux cas typiques d'instabilités des tuyaux, une instabilité dynamique (flottement) et une instabilité statique (flambage) [42]. Le premier type d'instabilité est caractérisé par une ondulation du tuyau dont l'amplitude croît jusqu'à une saturation non-linéaire (fig. 1.2a3). Ce type d'instabilité est observé pour un tuyau encastré à l'extrémité amont et libre à l'extrémité aval, elle est caractérisée par une fréquence d'oscillation non-nulle. Il a été observé que les tuyaux dont les deux extrémités sont fixées par un appui simple ou un encastrement se déstabilisent par flambage. Dans ce cas le mode instable saturé est une déformation statique du tuyau ; la fréquence d'oscillation est nulle. Le travail présenté dans ce manuscrit, dans la mesure où il ne considère que les équations linéaires du système, n'est représentatif que des premiers instants de l'instabilité pendant lesquels les termes non-linéaires sont négligeables et le mode instable croît exponentiellement.

### 1.1.2 Instabilités locales et globales d'un système unidimensionnel

Nous allons distinguer tout au long de ce manuscrit les propriétés locales d'un système unidimensionnel, de ses propriétés globales. La différence entre une description locale et une description globale est illustrée et détaillée en figure 1.3. Une approche locale s'intéresse exclusivement aux équations constitutives du milieu, la longueur du système étant alors considérée infinie. L'approche locale étudie donc généralement le système en termes de propagations d'ondes ; l'analyse de stabilité s'effectue alors en identifiant des ondes instables. L'approche globale quant à elle considère à la fois les équations constitutives du milieu, sa longueur, et les propriétés de ses conditions aux limites. Les approches globales sont en général des analyses modales ; on identifie

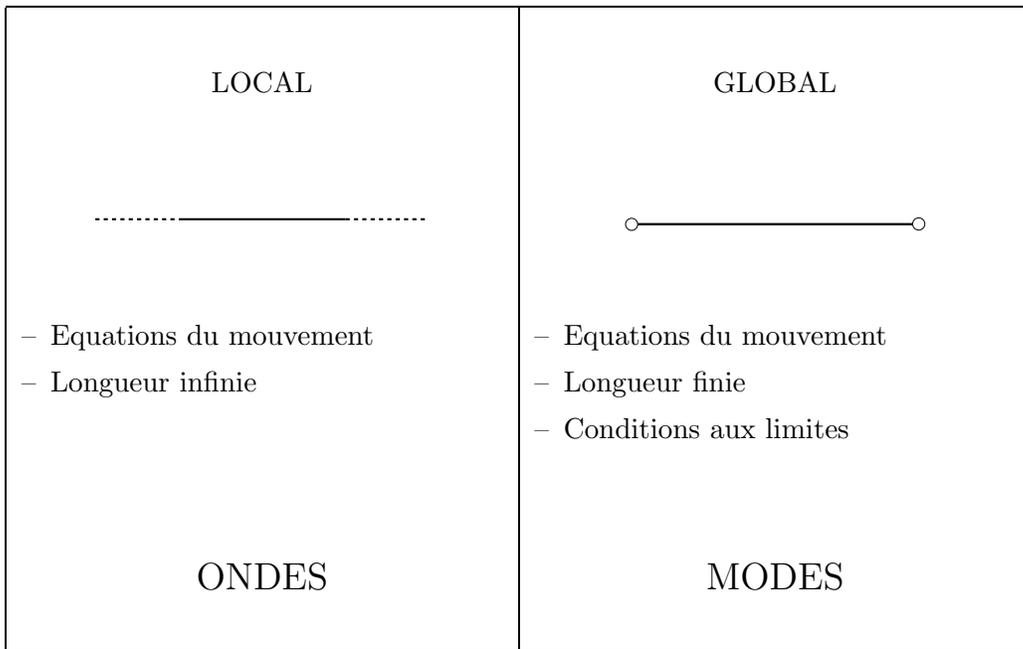


FIG. 1.3: Caractéristiques principales des approches locales et globales.

alors d'éventuels modes instables

## 1.2 Equations du mouvement et conditions aux limites

L'obtention des équations du mouvement dans un cas assez général est détaillée dans l'annexe A. Elles ont été initialement établies par Bourrières [7]. Ces équations ont été obtenues après avoir fait certaines hypothèses :

- Le tuyau peut être assimilé à une poutre de type Bernoulli-Euler, de flèche  $Y(X, T)$  petite.
- L'écoulement s'effectue selon l'axe du tuyau et est uniforme. Ce type d'écoulement est aussi appelé écoulement "bouchon".

Supposons le tuyau de masse linéique  $m$ , de rigidité en flexion  $EI$ , de longueur  $L$  reposant sur une fondation élastique de raideur  $S$  conduisant un fluide de masse linéique  $M$  à la vitesse  $U$ . Le tuyau est sujet à une tension globale  $\tau_e$  ainsi qu'aux frottements du tuyau avec le fluide externe, modélisé par un coefficient de frottement  $c$ . L'équation décrivant sa déformation latérale  $Y(X, T)$  est

$$\begin{aligned}
 & EI \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} + [MU^2 - \tau_e - (M + m)g(L - X)] \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \\
 & + 2MU \frac{\partial^2 Y}{\partial X \partial T} + (M + m)g \frac{\partial Y}{\partial X} + c \frac{\partial Y}{\partial T} + (m + M) \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + SY = 0,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Utilisons le même adimensionnement que dans [42],

$$\begin{aligned}
 x &= X/L, & y &= Y/L, & t &= (EI/(M + m))^{1/2} T/L^2, \\
 \beta &= \frac{M}{M + m}, & u &= UL \left( \frac{M}{EI} \right)^{1/2}, & s &= SL^4/EI, & \chi &= \frac{\tau_e L^2}{EI},
 \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{(M+m)gL^3}{EI}, \quad \alpha = \frac{cL^2}{[EI(M+m)]^{1/2}}, \quad (1.2)$$

où  $u$ ,  $s$ ,  $\chi$ ,  $\gamma$  et  $\alpha$  représentent respectivement la vitesse, la raideur élastique, la tension, la gravité et le coefficient de frottement adimensionnels. Le paramètre  $\beta$ , appelé rapport de masse, varie entre 0 et 1. Nous pouvons maintenant écrire l'équation sous forme adimensionnelle,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + [u^2 - \chi - \gamma(1-x)] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial y}{\partial x} + 2\sqrt{\beta}u \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + sy = 0, \quad (1.3)$$

avec  $x$  variant entre 0 et 1. Considérons maintenant les différentes conditions aux limites, dépendant du type d'extrémité. L'équation du mouvement nécessite quatre conditions de bord, deux pour chaque extrémité. On a, pour une extrémité encastree [25],

$$y = \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad (1.4)$$

pour une extrémité appuyée,

$$y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (1.5)$$

et pour une extrémité libre,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0. \quad (1.6)$$

Nous avons par exemple pour le cas générique d'une conduite encastree en  $x = 0$  et libre en  $x = 1$ ,

$$y|_{x=0} = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = 0. \quad (1.7)$$

L'équation du mouvement (1.3) est celle utilisée tout au long de ce manuscrit. Selon le cas particulier considéré, nous en retirerons certains termes. Le cas particulier qui servira à introduire tous les différents concepts est celui du "tuyau simple", pour lequel la tension, la fondation élastique, la gravité et la dissipation sont absentes. L'équation adimensionnelle de son mouvement se réduit à

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta}u \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (\chi = 0, s = 0, \gamma = 0, \alpha = 0). \quad (1.8)$$

Au chapitre 3, nous étudierons un tuyau sur fondation élastique. L'équation de son mouvement est donnée par

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta}u \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + sy = 0, \quad (\chi = 0, \gamma = 0, \alpha = 0). \quad (1.9)$$

Pour le cas du tuyau suspendu, étudié au chapitre 4, nous avons

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + [u^2 - \gamma(1-x)] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial y}{\partial x} + 2\sqrt{\beta}u \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (\chi = 0, s = 0, \alpha = 0). \quad (1.10)$$

### 1.3 Instabilité locale

L'approche locale ne s'intéresse qu'à l'équation locale du mouvement du tuyau, indépendamment des conditions aux limites et de la longueur du système, qui est considérée infinie. Dans ce cas il s'agit le plus souvent d'analyser les propriétés des ondes traversant le milieu et d'identifier d'éventuelles ondes instables. Tous les concepts introduits dans cette section sont illustrés dans le cas du tuyau simple dont l'équation du mouvement est donnée par (1.8). Il est préférable pour l'approche locale d'utiliser un adimensionnement qui ne fasse pas intervenir la longueur du système. Introduisons pour cela l'échelle de longueur  $\eta = \sqrt{EI/MU^2}$  que nous utilisons pour adimensionner les équations du mouvement de la même façon que dans (1.2). L'équation du mouvement est alors

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (1.11)$$

Elle est équivalente à l'équation (1.8), sauf que l'adimensionnement permet de s'affranchir du paramètre  $u$ .

#### 1.3.1 Relation de dispersion

Puisque l'équation (1.11) est linéaire, nous exprimons le déplacement du tuyau sous la forme

$$y(x, t) = \text{Re} \left[ A e^{i(kx - \omega t)} \right], \quad (1.12)$$

où  $k$  est le nombre d'onde et  $\omega$  la pulsation. L'introduction dans l'équation du mouvement de ce type de solution particulière donne la relation de dispersion, qui est à la base de l'analyse de stabilité locale. Pour le tuyau simple, la relation de dispersion associée à l'équation du mouvement (1.8) est

$$D(k, \omega; \beta) = k^4 - k^2 + 2\sqrt{\beta}k\omega - \omega^2 = 0. \quad (1.13)$$

#### 1.3.2 Critère d'instabilité - Approche temporelle

L'instabilité *temporelle* s'intéresse au développement *temporel* des ondes. Le nombre d'onde  $k$  est alors pris réel et l'on cherche les pulsations  $\omega$  complexes associées. La partie imaginaire de  $\omega$  est alors le taux de croissance temporel et caractérise l'évolution au cours du temps de l'amplitude des oscillations. S'il existe au moins un nombre d'onde pour lequel le taux de croissance est positif alors le système est instable, puisque son mouvement est amplifié exponentiellement dans le temps. Nous définissons alors le critère d'instabilité de la façon suivante : Soit,

$$\sigma_{max} = \max_{k \in \mathbb{R}} [\text{Im}(\omega)]. \quad (1.14)$$

Si  $\sigma_{max} > 0$ , le système est localement instable et si  $\sigma_{max} < 0$ , le système est localement stable.

Les zéros de la relation de dispersion (2.1) donnent

$$\omega_{\pm}(k; \beta) = k(\sqrt{\beta} \pm \sqrt{\beta + k^2 - 1}). \quad (1.15)$$

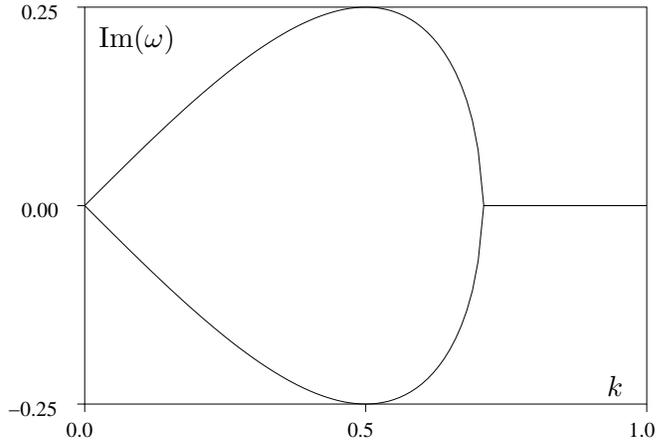


FIG. 1.4: Taux de croissance en fonction du nombre d'onde pour  $\beta = 0.5$ .

Nous déduisons de (1.15) que dans le cas particulier du tuyau,  $\omega$  a une partie imaginaire positive pour tout nombre d'onde  $k$  dont le module est inférieur à  $1 - \beta$ . Le système est donc localement instable quel que soit  $\beta \neq 1$ . La figure 1.4 illustre le taux de croissance en fonction de  $k$  pour  $\beta = 0.5$ . Seules les valeurs de  $k$  positives sont représentées sur cette figure, du fait des propriétés de symétrie particulières  $\omega(k) = -\omega(-k)$  et  $\omega(\bar{k}) = \omega(k)$ .

C'est à Roth [45] et Stein et Tobriner [46] que nous devons les premiers résultats sur les propriétés locales de stabilité du tuyau. Ceux-ci se sont intéressés en particulier au cas du tuyau sur fondation élastique et avec dissipation. Quant au tuyau sujet à une tension, ses propriétés locales de stabilité ont été établies par de Langre et Ouvrard [20]. Dans toutes ces études, les critères locaux de stabilité ont été établis de façon analytique. Ceux-ci seront introduits aux moments opportuns.

### 1.3.3 Réponse impulsionnelle - Concepts d'instabilités absolue et convective

L'approche locale s'est vue améliorée lorsque Briggs [9], puis Bers [3], en physique des plasmas, ont introduit les notions d'instabilités absolue et convective. Ces concepts ont ensuite été appliqués avec succès en mécanique des fluides [27]. Ils s'intéressent à la réponse impulsionnelle d'un système de longueur infinie. Il s'agit d'identifier la fonction de Green  $G(x, t)$ , réponse du système de longueur infinie au forçage impulsionnel

$$S(x, t) = \delta(x)\delta(t). \quad (1.16)$$

Nous distinguons plusieurs situations, en fonction des propriétés de  $G(x, t)$ ,

- Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty$  le long d'au moins un rayon  $x/t = cte$  alors le système est instable.
- Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0$  sur le rayon  $x/t = 0$ , l'instabilité est qualifiée de convective.

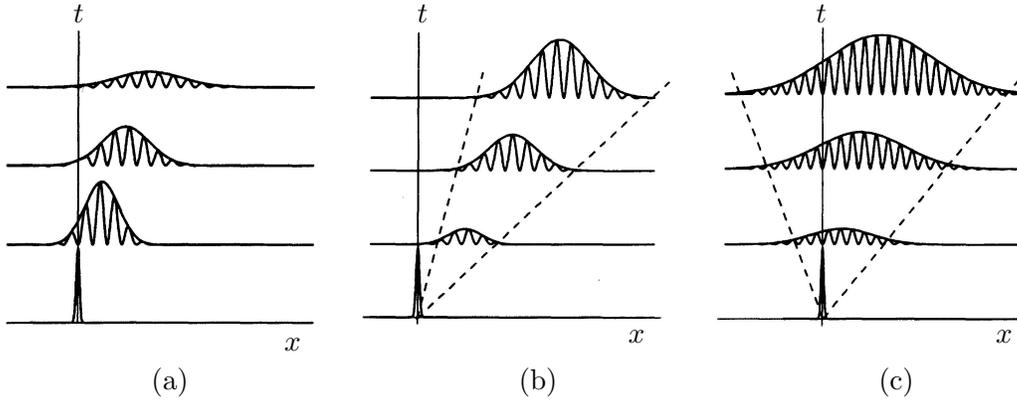


FIG. 1.5: Réponse impulsionnelle d'un système ouvert; (a), stable; (b), convectivement instable; (c), absolument instable. [15]

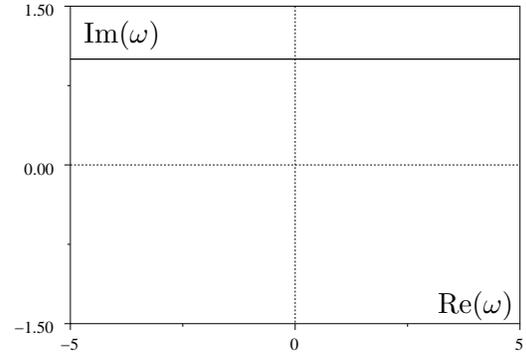
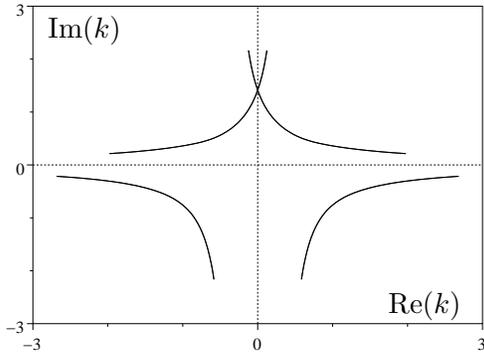
- Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty$  sur le rayon  $x/t = 0$ , l'instabilité est dite absolue et est dominée par la pulsation complexe  $\omega_0$ , avec  $\text{Im}(\omega_0) > 0$ .

La figure 1.5 illustre les trois cas possibles pour la réponse impulsionnelle du système.

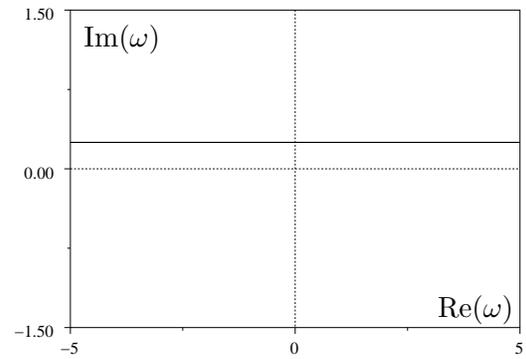
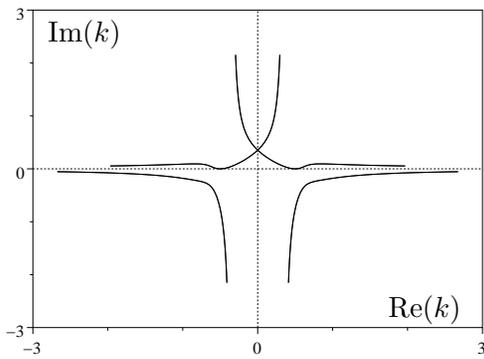
Pour déterminer la nature convective ou absolue de l'instabilité locale, il est nécessaire d'introduire le concept de branche spatiale. Une branche spatiale est une ligne dans le plan complexe des nombres d'ondes solutions de la relation de dispersion correspondant aux valeurs prises par  $\omega$  variant entre  $-\infty + i\sigma$  et  $+\infty + i\sigma$ . Nous appelons ce contour dans le plan complexe des pulsations le contour  $L_\omega$ . Ceci est illustré sur la figure 1.6 où sont tracées les quatre branches spatiales correspondant aux cas typiques  $\sigma > \sigma_{max}$ ,  $\sigma = \sigma_{max}$  et  $\sigma = \text{Im}(\omega_0)$ . Ces branches spatiales ont été calculées numériquement à partir de la relation de dispersion, ce qui est brièvement détaillé en annexe B. Si  $\sigma > \sigma_{max}$ , comme c'est le cas sur la figure 1.6a, alors nous déduisons de l'approche temporelle qu'aucune branche spatiale ne traverse l'axe des abscisses. Les branches spatiales correspondant aux nombres d'ondes de partie imaginaire positive sont appelées  $k^+$  et il a été montré, par un calcul de résidus dans les plans complexes  $k$  et  $\omega$  [9, 3], qu'elles correspondent aux ondes se développant en aval des perturbations. De la même manière, les branches spatiales de partie imaginaire négative sont appelées  $k^-$  et correspondent aux ondes se développant en amont des perturbations. Lorsque nous abaissons le contour  $L_\omega$ , les branches spatiales se rapprochent de l'axe des abscisses et une des branches touche l'axe des abscisses lorsque  $\sigma = \sigma_{max}$  (figure 1.6b). Si nous abaissons encore  $L_\omega$ , deux branches issues de demi-plans différents se rencontrent. La valeur de  $\omega$  au pincement de ces deux branches est précisément la pulsation absolue  $\omega_0$ , et  $k$  est une racine double de la relation de dispersion, figure (1.6c). Nous formulons donc le critère d'existence d'une instabilité absolue de la façon suivante : Le système est absolument instable si  $\text{Im}(\omega_0)$  est positif,  $\omega_0$  étant une racine double de la relation de dispersion correspondant au pincement de deux branches issues de demi-plans différents, soit,

$$D(k, \omega_0; \beta) = \left. \frac{\partial D(k, \omega; \beta)}{\partial k} \right|_{\omega_0} = 0. \quad (1.17)$$

(a)



(b)



(c)

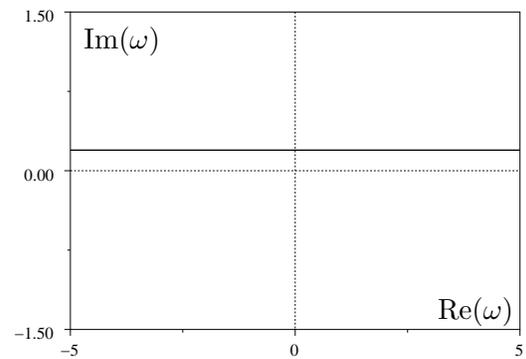
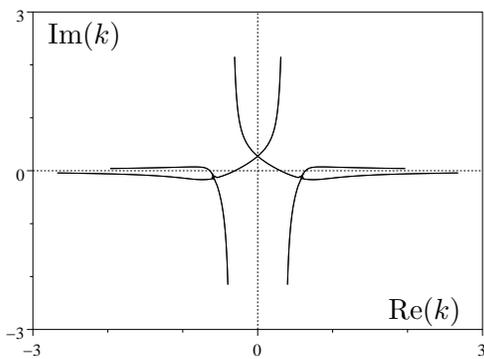


FIG. 1.6: Branches spatiales pour  $\omega$  variant de  $-5 + i\sigma$  à  $5 + i\sigma$ ,  $\beta = 0.5$ ; (a),  $\sigma = 1 > \sigma_{max}$ ; (b),  $\sigma = 0.25 = \sigma_{max}$ ; (c),  $\sigma = 0.1943 = \text{Im}(\omega_0)$ .

Précisons que ce critère n'est pas valable dans le cas singulier  $\partial D/\partial\omega|_{\omega_0} = 0$  [4]. Dans le cas de la figure 1.6, nous avons  $\text{Im}(\omega_0) > 0$ . Nous avons donc affaire à une instabilité absolue.

Les propriétés de l'instabilité locale des systèmes en interaction fluide-structure ont fait l'objet de nombreuses études, qui se sont attachées à établir les critères de transition absolu/convectif pour les instabilités d'une paroi souple en présence d'un écoulement potentiel [8, 16] ou en présence d'un écoulement de couche limite [34], les instabilités des coques cylindriques en présence d'un écoulement [43], les instabilités des ondes variqueuses dans un canal élastique [36, 17] ou les instabilités d'un corps allongé en présence d'un écoulement potentiel [49]. Ainsi le rôle déstabilisant de l'écoulement a d'une manière générale été mis en évidence. Celui-ci peut être vu comme une source d'énergie en tout point du système pour les vibrations de la paroi, ce qui remet en cause le rôle de la vitesse de groupe dans le transport de l'énergie lorsque le système est instable [8].

Dans le cas du tuyau simple, nous devons le critère de transition entre instabilité absolue et instabilité convective à Kulikovskii [32],

$$\beta_c = \frac{8}{9}. \quad (1.18)$$

L'instabilité est absolue si  $\beta < \beta_c$  et convective sinon. Les critères analytiques de transition absolu/convectif des tuyaux en tension ou sur fondation élastique ont été obtenus par une étude dans le plan complexe de la pulsation absolue  $\omega_0$  [40, 20].

Il a de plus été démontré par Crighton et Oswell [16] que pour les systèmes hydroélastiques conservatifs, les symétries particulières de la relation de dispersion impliquent que la transition entre instabilité absolue et instabilité convective intervient lorsqu'il existe une racine triple de la relation de dispersion, soit,

$$\left. \frac{\partial^2 D(k, \omega; R_c)}{\partial k^2} \right|_{\omega_0} = 0. \quad (1.19)$$

Grâce à cette propriété, les critères de transitions entre instabilité absolue et instabilité convective ont été obtenus pour de nombreux systèmes hydroélastiques génériques, de même que leur lien avec l'instabilité interfaciale de Kelvin-Helmoltz [18].

### 1.3.4 Réponse à un forçage harmonique

Analysons maintenant la réponse du système à un forçage harmonique de la forme

$$f(x, t) = \delta(x)H(t) \exp(i\omega_f t), \quad \omega_f \in \mathbb{R}, \quad (1.20)$$

où  $H(t)$  est la fonction de Heavyside. Si le système est absolument instable, la mise en route du forçage à  $t = 0$ , représentée par  $H(t)$  contient toutes les fréquences, dont la fréquence absolue, et l'évolution du système est dominée par l'instabilité absolue. Dans le cas d'une instabilité convective, le paquet d'onde instable, créé par le transitoire de mise en route, est advecté en aval et l'on observe uniquement les ondes à la fréquence de forçage  $\omega_f$ , dont les nombres d'onde

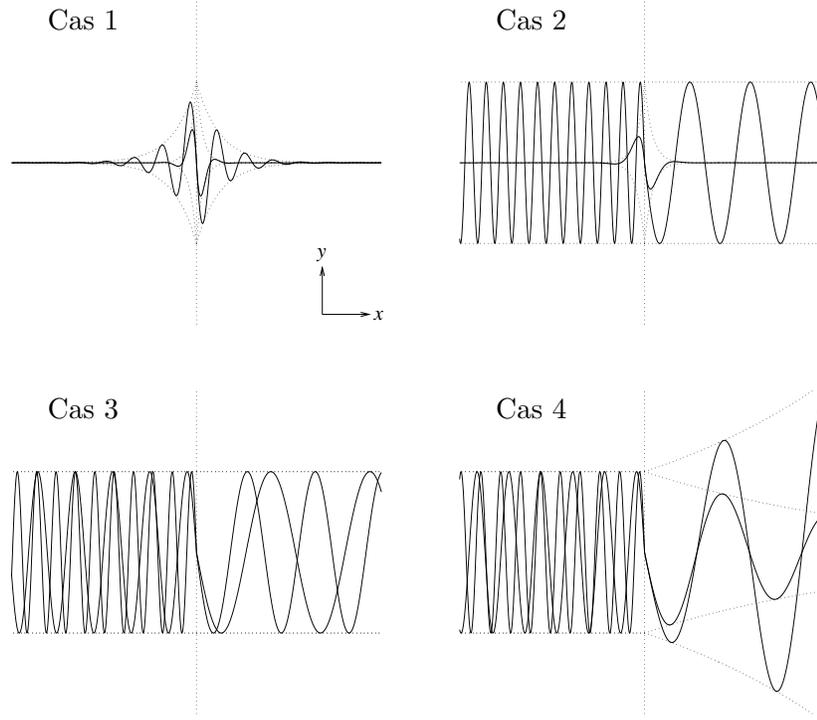


FIG. 1.7: Vue schématique des ondes générées par un forçage harmonique : cas 1, ondes évanescentes ; cas 2, ondes neutres et évanescentes ; cas 3, ondes neutres ; cas 4, ondes neutres, évanescents et amplifiés.

sont donnés par la relation de dispersion à  $\omega = \omega_f$ . Comme il a été dit dans le paragraphe précédent, un nombre d'onde issu d'une branche  $k^+$  correspond à une onde se développant en aval du forçage et inversement, un nombre d'onde issu d'une branche  $k^-$  correspond à une onde se développant en amont. La partie imaginaire de ces nombres d'onde représente le taux de croissance spatial. Ainsi, une onde aval dont le nombre d'onde a une partie imaginaire négative est amplifiée spatialement. Au contraire, si sa partie imaginaire est positive, il s'agit d'une onde spatialement évanescente. On peut facilement généraliser le concept de forçage harmonique à des pulsations complexes. Il s'agit dans ce cas d'un forçage dont l'amplitude croît ou décroît exponentiellement dans le temps. On identifie de la même manière le côté amont ou aval de propagation des ondes et les différents cas sont les mêmes que ceux présentés en figure 1.7. Il est cependant nécessaire de garder à l'esprit qu'en plus d'une variation spatiale de l'amplitude des ondes, s'ajoute une variation temporelle.

La relation de dispersion du tuyau simple (2.1) est d'ordre 4 en  $k$  et il y a 4 nombres d'ondes associés à toute pulsation complexe. Deux de ces ondes se propagent en amont du point de forçage, dont les nombres d'onde seront appelés  $k_1^+$  et  $k_2^+$ , tandis que les deux autres se propagent en aval, et leurs nombres d'onde seront référencés par  $k_1^-$  et  $k_2^-$ . Dans toutes les situations présentées dans ce manuscrit, la configuration des ondes issues d'un forçage harmonique à une fréquence réelle fait partie d'une des quatre configurations de la figure 1.7. Dans le cas 1, quatre ondes évanescentes sont engendrées. Dans le cas 2, une onde neutre et une onde évanescence aval

sont engendrées, et la même chose en amont. Dans le cas 3, quatre ondes neutres sont engendrées et dans le cas 4, une onde amplifiée et une onde évanescence sont engendrées en aval, et deux ondes neutres en amont.

Dans le domaine des interactions fluide-structure, la réponse du système à un tel forçage a été étudiée par Brazier-Smith et Scott [8] et par Crighton et Oswell [16], dans le cas d'un écoulement potentiel au dessus d'une paroi souple. Pour le même système, Lucey [37] a mis en évidence numériquement les ondes issues d'un forçage harmonique. Le cas d'un écoulement de couche limite au dessus d'une plaque souple a été étudié par Lingwood et Peake [34] et le cas d'une coque cylindrique par Peake [43]. Dans tous ces cas, des configurations convectivement instables ont été étudiées. A chaque fois des intervalles de fréquences réelles engendrant des ondes amplifiées ont été identifiés, de même que des intervalles engendrant des ondes neutres.

## 1.4 Instabilité globale

Une approche globale considère à la fois les équations locales du milieu constitutif, la longueur finie du système et les propriétés des conditions aux limites. Nous nous intéressons maintenant aux conditions de stabilité de tels systèmes. Les paramètres cités dans la suite sont définis à partir de l'adimensionnement donné en équation (1.2), pour lequel la longueur de référence est la longueur du système,  $L$ .

La stabilité des tuyaux dont aucune extrémité n'est libre peut s'analyser analytiquement, du fait de leur déstabilisation par flambage. Il est en effet possible de s'affranchir des termes temporels, puisque la déstabilisation par flambage intervient à une fréquence nulle. La conséquence en est que l'instabilité est indépendante du rapport de masse  $\beta$ , qui apparaît devant un terme contenant une dérivée temporelle dans l'équation du mouvement (1.3). Ainsi nous pouvons obtenir des critères analytiques de stabilité pour le cas le plus simple de la conduite horizontale encastrée ou appuyée [42]. Il a été obtenu que dans le cas encastré-encastré, la vitesse critique est  $u_c = 2\pi$  et que dans le cas appuyé-appuyé, la vitesse critique est  $u_c = \pi$ . Considérant en plus une fondation élastique, Roth [45] a obtenu des critères analytiques de stabilité pour ces deux types de conditions aux limites. Ceux-ci seront donnés au chapitre 3.

Le cas de l'instabilité dynamique d'un tuyau encastré-libre ne peut quant à lui être résolu analytiquement. Gregory et Païdoussis [25] ont les premiers obtenu des résultats sur la stabilité du tuyau simple encastré-libre. Dans leur article deux méthodes de résolution sont exposées, celles-ci sont détaillées en annexe B. La première méthode se sert du fait qu'une pulsation complexe est une pulsation propre globale du système s'il est possible de superposer les quatre ondes, dont les nombres d'ondes sont donnés par la relation de dispersion, de façon à ce que les conditions aux limites soient respectées.

La deuxième méthode permet d'obtenir avec plus de facilité les pulsations et modes propres du tuyau. Il s'agit d'une méthode numérique de type Galerkin se servant d'une base modale

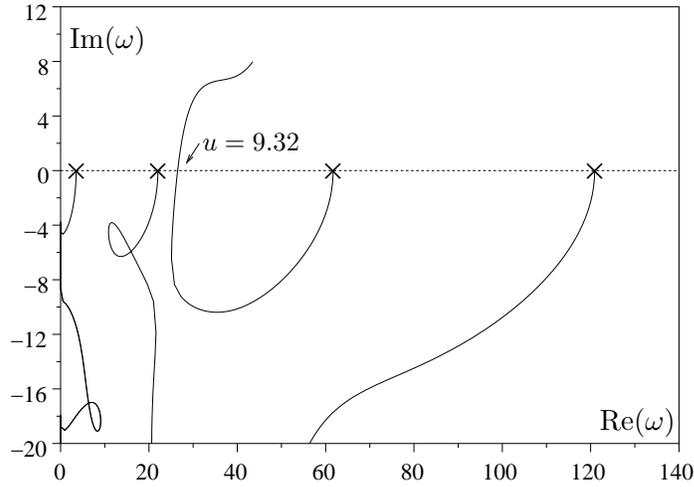


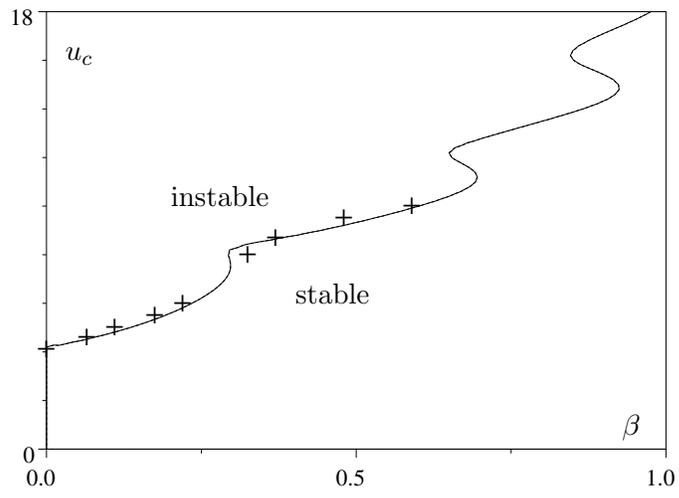
FIG. 1.8: Evolution dans le plan complexe des quatre premières pulsations propres du tuyau encastré-libre pour  $\beta = 0.5$  et  $u$  variant de 0 à 12;  $\times$ , pulsations propres à  $u = 0$ .

constituée des modes propres du tuyau sans écoulement et sans fondation élastique, tension, dissipation, soit une poutre encastrée-libre, aussi appelée poutre en console. Cette méthode permet d'obtenir les  $n$  premières pulsations propres du système,  $\omega_j, j = 1, n$ . La déformée associée à une pulsation propre  $\omega$  est de la forme  $y_j(x, t) = \phi_j(x, t) \exp(-i\omega t)$ , où  $\phi_j(x)$  est cette fois un mode propre du tuyau, formé à partir des modes propres de la poutre, et est en général une fonction complexe de  $x$ . Si une pulsation propre a une partie imaginaire positive, on observe une amplification dans le temps de la déformée et le système est instable. Sur la figure 1.8 est tracée l'évolution, lorsque l'on augmente la vitesse de l'écoulement, des quatre premières pulsations propres du tuyau simple encastré-libre pour  $\beta = 0.5$ , obtenues par la méthode de Galerkin. A  $u = 0$ , le tuyau est assimilable à une poutre, toutes ses pulsations propres sont réelles et le système est marginalement stable. Quand on augmente la vitesse de l'écoulement, on observe tout d'abord une stabilisation du système; toutes les pulsations propres voient leur partie imaginaire diminuer. A la vitesse critique d'instabilité  $u_c$ , la partie imaginaire d'une pulsation propre devient positive,  $u_c = 9.32$  dans le cas de la figure 1.8. La figure 1.9a présente alors la vitesse critique du tuyau encastré-libre en fonction du rapport de masse,  $\beta$ . De même la fréquence critique  $\omega_c$  est tracée sur la figure 1.9b, en fonction de  $\beta$ . Les points expérimentaux apparaissant sur ces deux figures sont issus de [25]. Les résultats numériques obtenus par la méthode de Galerkin apparaissent en bon accord avec les mesures expérimentales.

Nous observons que la courbe de vitesse critique a plusieurs inflexions, qualifiées de formes de "s" par d'autres auteurs [42]. Celles-ci sont attribuées à des changements dans la contribution des modes de poutre formant le mode propre instable.

Païdoussis [41] s'est ensuite intéressé aux propriétés de stabilité d'un tuyau suspendu. En

(a)



(b)

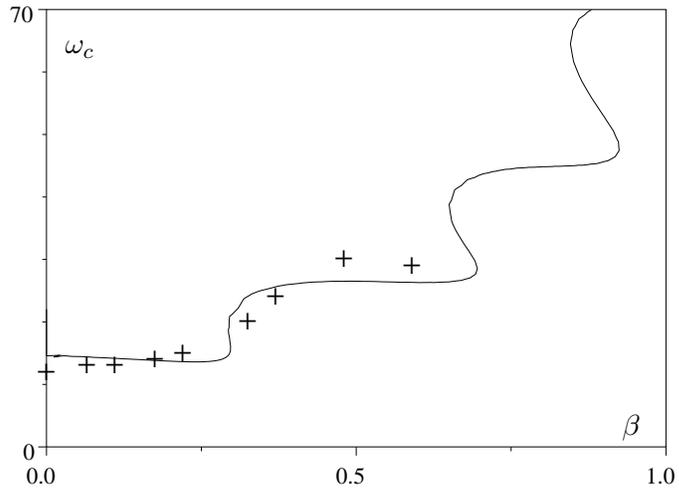


FIG. 1.9: Propriétés de stabilité de la conduite encastrée-libre, (a), vitesse critique en fonction du rapport de masse  $\beta$ ; (b), fréquence critique en fonction du rapport de masse  $\beta$ ; (+), expériences [26]; (-), méthode Galerkin [25].

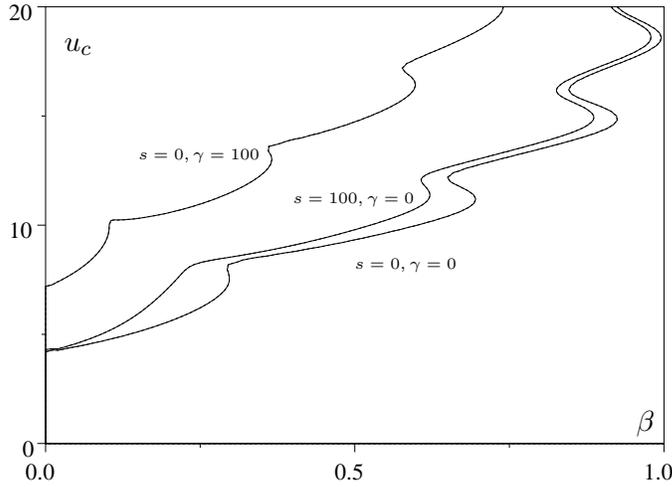


FIG. 1.10: Courbes de stabilité du tuyau encastré-libre, mise en évidence de l'effet stabilisant de la fondation élastique et de la gravité. [25, 35]

effectuant une étude similaire, celui-ci a établi l'effet stabilisant de la gravité. Quant à l'effet de la fondation élastique, Lottati et Kornecki [35] ont montré qu'il est lui aussi stabilisant. La figure 1.10 compare la courbe de stabilité du tuyau simple avec celle du tuyau avec gravité,  $\gamma = 100$ , et celle du tuyau sur fondation élastique,  $s = 100$ . Les effets stabilisant de la gravité et de la fondation élastique apparaissent clairement.

## 1.5 Précédents travaux confrontant les approches locale et globale

Nous distinguons les systèmes globaux homogènes des systèmes globaux non-homogènes. En hydrodynamique il se rapportent respectivement aux écoulements dits parallèles et aux écoulements dits non-parallèles. Les propriétés locales des systèmes homogènes ne varient pas tandis qu'elles peuvent varier le long d'un système inhomogène. Le tuyau par exemple est un système homogène, sauf lorsqu'il est suspendu, en présence de gravité. Dans ce cas la tension locale varie continuellement de zéro, en bas, au poids total du tuyau, en haut.

Intéressons-nous d'abord au cas homogène. Dans le cas de l'équation de Ginzburg-Landau, une équation modèle des équations de Navier-Stokes [28], il a été montré que le critère de stabilité globale est le critère de transition entre instabilité absolue et instabilité convective lorsque la longueur du système tend vers l'infini [14]. Un critère, établi par Kulikovskii [31], permet d'obtenir dans un cas général les propriétés de stabilité globale d'un système lorsque sa longueur tend vers l'infini. Celui-ci a en effet établi que les pulsations globales d'un système, à

la limite  $L \rightarrow \infty$ , se placent sur une ligne dans le plan complexe des pulsations  $\omega$  et satisfont toutes l'équation

$$\text{Im}[k^+(\omega) - k^-(\omega)] = 0, \quad (1.21)$$

où  $k^+$  est l'onde aval la plus amplifiée ou la moins évanescence et  $k^-$  est l'onde amont la plus amplifiée ou la moins évanescence. Ce sont en effet les nombres d'onde des ondes dominantes aux grandes longueurs. En d'autres termes, ce critère dit qu'il existe un mode global à la pulsation  $\omega$  si l'amplification de l'onde aval est exactement compensée par l'amortissement de l'onde amont, et vice-versa. Ainsi, les propriétés globales du tuyau dont la longueur tend vers l'infini ne dépendent plus du type de conditions aux limites. Nous en déduisons que dans le cas de l'équation de Ginzburg-Landau, aucune pulsation de partie imaginaire positive ne satisfait l'équation (1.21).

Dans le cas d'un écoulement de couche limite au dessus d'une paroi souple de longueur finie [50, 51], il a été observé que lorsque le système est convectivement instable, toute perturbation est amortie dans le temps, malgré l'instabilité locale. En revanche lorsque le système est absolument instable, les perturbations sont amplifiées et l'on a affaire à une instabilité globale. Les ondes issues d'un forçage harmonique et leurs réflexions aux extrémités d'une paroi en présence d'un écoulement potentiel ont été analysées par Oswell [39] et simulées numériquement par Lucey [37]. Il a été ainsi mis en évidence qu'il est possible d'observer un transfert d'énergie entre le fluide et le solide lors d'une réflexion d'ondes. Dans le cadre de l'instabilité des écoulements confinés entre deux plaques, Inada et Hayama [29] ont effectué une comparaison entre un mode global instable et les ondes données par la relation de dispersion à la pulsation globale. Il ont notamment calculé l'énergie fournie par le fluide à chacune de ces ondes et ont tenté de la mettre en rapport avec l'apparition de l'instabilité globale.

De nombreuses configurations inhomogènes ont été étudiées en hydrodynamique. On peut citer par exemple le cas de l'instabilité des sillages [24] ou des jets avec contre-courant [47]. Il a été mis en évidence le rôle fondamental d'une zone au sein de laquelle le système est absolument instable. C'est cette zone qui a été identifiée comme étant le moteur de l'instabilité.

## 1.6 Conclusion

Il apparaît que de nombreuses études ont été réalisées sur la stabilité du tuyau avec écoulement interne et les critères de stabilité globale de ce système sont bien connus et sont en bon accord avec les configurations expérimentales (cf. fig. 1.9). De même les propriétés locales de stabilité du tuyau avec écoulement interne sont connues pour de nombreuses configurations et notamment celles qui nous intéressent. En revanche, la confrontation des critères locaux et globaux de stabilité reste encore à faire, et tout indique que des résultats intéressants et génériques peuvent être obtenus. En effet, les propriétés locales du tuyau sont assez similaires à d'autres configurations plus complexes telles que les écoulements au dessus de parois souples et pour lesquelles les études globales sont plus lourdes à mettre en œuvre. Ce travail pourrait ainsi avoir un caractère

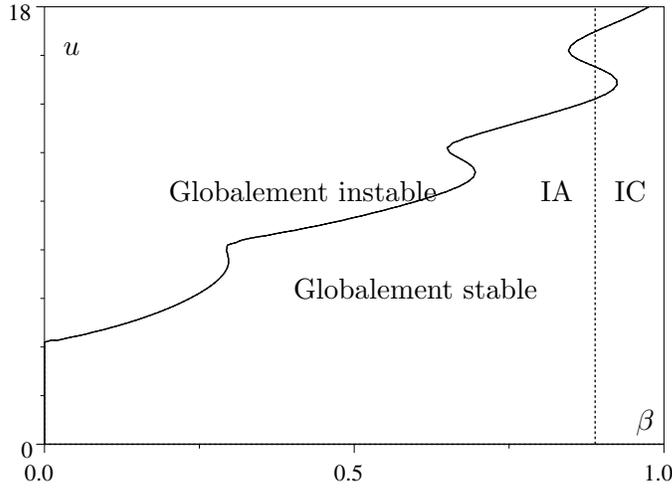


FIG. 1.11: Comparaison des propriétés locales et globales de stabilité du tuyau encastré-libre; (IC), instabilité convective; (IA), instabilité absolue.

générique servant de guide d'application pour d'autres problèmes d'interaction fluide-structure plus complexes. Par exemple, dans le cas d'une paroi souple en présence d'un écoulement potentiel, les propriétés locales de stabilité [8], la réponse locale forcée [16], et les propriétés de réflexion des ondes [39] ont été analysées mais le lien avec les propriétés de stabilité globale du système libre est encore flou. Nous nous proposons de faire ce lien dans le cas du tuyau.

La figure 1.11 compare les propriétés locales et globales de stabilité de la conduite encastrée-libre. La première observation que l'on peut faire est qu'il n'existe aucun lien apparent entre les instabilités locale et globale de la conduite encastrée libre.

Nous allons donc mettre en confrontation les propriétés locales et globales du tuyau lorsque sa longueur augmente, afin de voir quels critères locaux déterminent la stabilité globale. Une comparaison avec les prédictions du critère de Kulikovskii [31] va être faite de manière systématique. Le rôle des conditions aux limites dans l'instabilité va lui aussi être considéré. Au cours du chapitre 2 nous présentons une nouvelle méthode permettant d'obtenir les pulsations et modes propres globaux à partir des propriétés des ondes se développant dans le système et des propriétés des réflexions d'ondes aux conditions aux limites. Cette méthode nous permet de se représenter d'une manière différente un mode instable et d'identifier les rôles respectifs du milieu instable et des conditions aux limites dans l'instabilité globale. Les résultats obtenus dans le second chapitre nous ont inspiré l'analyse en chapitre 3 d'une configuration localement stable pouvant être globalement instable dans laquelle des ondes neutres peuvent suffire à permettre l'instabilité. Les tuyaux étudiés aux chapitres 2 et 3 sont des systèmes homogènes. Enfin, le système du tuyau suspendu va être étudié au cours du chapitre 4. Il s'agit d'un système au sein duquel les propriétés locales varient spatialement et nous verrons qu'il existe une longueur à partir de

laquelle le comportement instable de tout le tuyau est uniquement déterminée par les propriétés en bas du tuyau.

Nous détaillons en annexe A l'obtention des équations du mouvement. Les méthodes permettant d'obtenir les fréquences propres et les modes propres du tuyau sont données en annexe B. En annexe C, nous donnons une liste complète des données expérimentales du chapitre 4. Enfin, en annexe D se trouvent les articles publiés ou soumis. Le premier [23] est en rapport avec le travail présentée au chapitre 3 tandis que les suivants [19, 22] sont en rapport avec le travail du chapitre 4.

-----

## Chapitre 2

# Instabilités locales et globales d'un tuyau simple

Le travail présenté dans ce chapitre découle directement de l'interrogation suscitée par la figure 1.11. Sur cette figure, les propriétés locales et globales de stabilité ne semblent avoir aucun lien évident. Afin de mieux comprendre ce qui conduit à la création d'un mode global instable, il est légitime de se demander s'il est possible de construire ce mode global en partant des propriétés de propagation des ondes dans le milieu. Inspirée par les travaux de Lee et Mote [33], qui se sont intéressés à l'énergie réfléchie par les extrémités d'un tuyau, une nouvelle méthode est présentée dans ce chapitre. Elle permet de calculer les fréquences propres globales à partir des propriétés locales des ondes se propageant dans le système et de leurs réflexions aux extrémités, et ainsi de comparer l'influence respective de l'instabilité locale et des réflexions aux extrémités dans l'instabilité globale. Ainsi nous allons nous intéresser uniquement au domaine convectivement instable,  $8/9 < \beta < 1$ , pour lequel nous parvenons à identifier clairement les ondes de flexion se propageant dans le milieu.

Les adimensionnements utilisés dans ce chapitre sont ceux basés sur la longueur caractéristique  $\eta = \sqrt{EI/MU^2}$ , qui ont servi à illustrer l’approche locale dans le chapitre introductif. Nous rappelons ici la relation de dispersion du tuyau simple, qui ne dépend que du rapport de masse  $\beta$ ,

$$D(k, \omega; \beta) = k^4 - k^2 + 2\sqrt{\beta}k\omega - \omega^2 = 0. \quad (2.1)$$

## 2.1 Réponse à un forçage harmonique

Comme nous l’avons vu au paragraphe 1.3.4, la réponse du système stable ou convectivement instable au forçage harmonique  $\delta(x) \exp(-i\omega t)$ , avec  $\omega$  complexe, est une combinaison de quatre ondes. Deux de ces ondes se trouvent en aval de la perturbation, les deux autres en amont, ce qui est déterminé par l’appartenance à une branche  $k^+$  ou  $k^-$  du nombre d’onde qui leur est associé. Puisqu’une onde appartenant à une branche  $k^+$  se développe dans la région  $x > 0$ , elle est spatialement amplifiée si  $\text{Im}(k) < 0$ , et spatialement évanescence dans le cas contraire. Inversement, un nombre d’onde appartenant à une branche  $k^-$  correspond à une onde spatialement amplifiée si sa partie imaginaire est positive, et à une onde spatialement évanescence si sa partie imaginaire est négative. Un nombre d’onde de partie imaginaire nulle correspond à une onde ni amplifiée, ni évanescence. Nous qualifions cette onde d’onde neutre. Des deux ondes aval, appelons  $k_1^+$  le nombre d’onde de plus petite partie imaginaire et  $k_2^+$  le nombre d’onde de plus grande partie imaginaire. Si une onde aval amplifiée existe, son nombre d’onde est donc  $k_1^+$ . De la même façon,  $k_1^-$  est le nombre d’onde amont de plus grande partie imaginaire et  $k_2^-$  celui de plus petite partie imaginaire. Ce sont donc  $k_1^+$  et  $k_1^-$  qui interviennent dans le critère de Kulikovskii de l’équation (1.21), qui ne considère que les ondes dominantes aux grandes longueurs. Sur la figure 2.1 est représentée la réponse du système au forçage harmonique à une pulsation complexe dans un cas convectivement instable. Il s’agit de la réponse aux temps longs, une fois que le paquet d’onde instable créé par la mise en route du forçage a été advecté. Notons aussi que, du fait de la partie imaginaire de  $\omega$ , le forçage a une amplitude variable dans le temps. Ainsi les enveloppes en traits gras sur la figure 2.1 augmentent ou diminuent comme  $e^{\text{Im}(\omega)t}$ .

Intéressons-nous au cas particulier des pulsations de forçage réelles. Sur la figure 2.2 est tracée la partie imaginaire de  $k$  en fonction de  $\omega \in \mathbb{R}$ . Trois intervalles peuvent être différenciés sur cette figure. Dans l’intervalle  $[0; \omega_s]$ , nous observons une onde aval amplifiée et une onde aval évanescence, les ondes amont étant neutres. Dans l’intervalle  $[\omega_s; \omega_e]$ , les quatre ondes sont neutres. Enfin, dans l’intervalle  $[\omega_e; +\infty]$ , nous observons une onde aval neutre et une onde aval évanescence, et la même chose en amont.

Une attention particulière doit être portée sur l’intervalle  $[\omega_s; \omega_e]$  de quatre ondes neutres. Il est en effet possible qu’une onde neutre à une pulsation réelle devienne une onde amplifiée lorsqu’on augmente la partie imaginaire de  $\omega$ , c’est-à-dire lorsque l’on considère un taux de croissance temporel positif. De précédents travaux en interaction fluide-structure [8, 16, 34, 1]

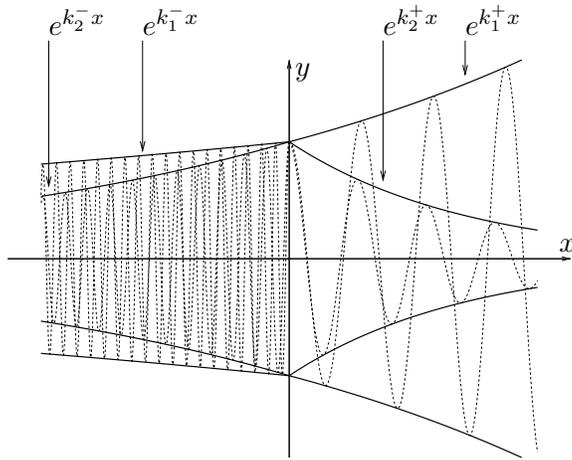


FIG. 2.1: Ondes issues du forçage harmonique à la pulsation complexe  $\omega = 0.21 + 0.003i$  pour  $\beta = 0.95$

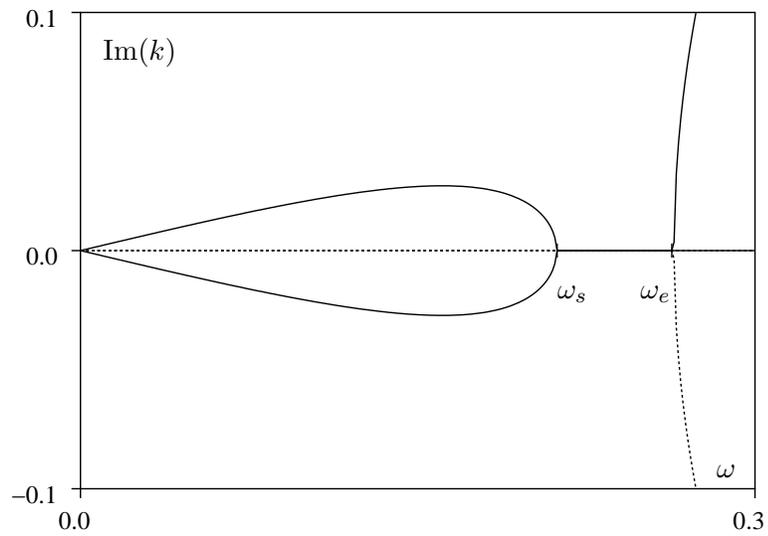


FIG. 2.2: Partie imaginaire des nombres d'onde associés à une pulsation réelle,  $\beta = 0.95$ ; (—), nombres d'onde  $k^+$ ; (⋯), nombres d'onde  $k^-$ .

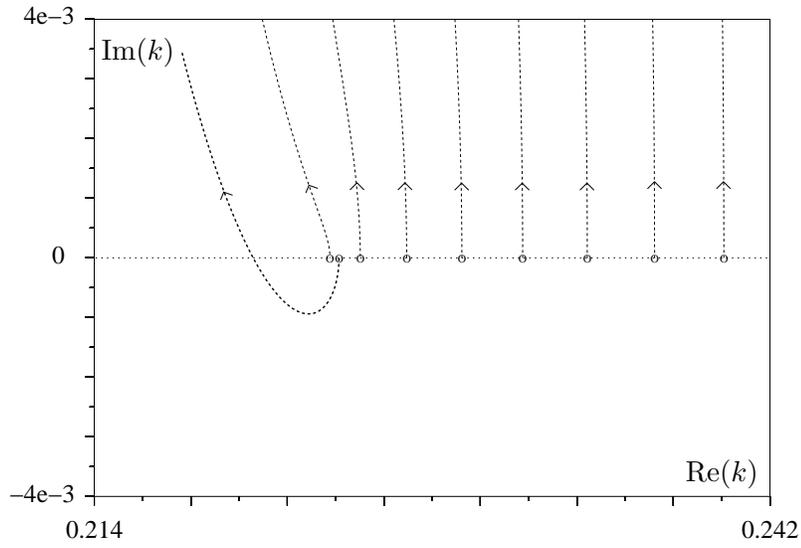


FIG. 2.3: Evolution du nombre d'onde lorsque l'on augmente  $\text{Im}(\omega)$  à partir de 0,  $\beta = 0.95$ ; (o), nombre d'onde pour  $\text{Im}(\omega) = 0$ .

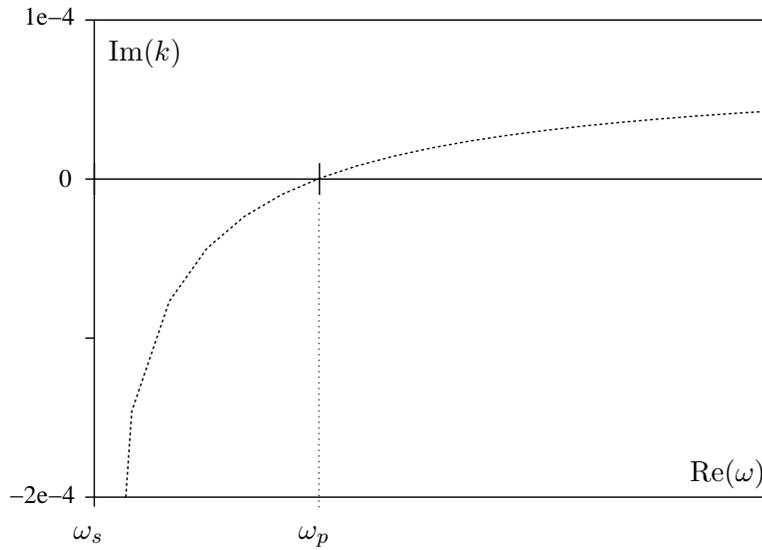


FIG. 2.4: Partie imaginaire de  $k_1^+$  en fonction de la partie réelle de  $\omega$ ,  $\beta = 0.95$ ; (—),  $\text{Im}(\omega) = 0$ ; (⋯⋯),  $\text{Im}(\omega) = 10^{-4}$ .

ont déjà mis en évidence ce type particulier d'onde neutres. Les auteurs qualifient la propagation de ce type particulier d'onde neutre de "propagation anormale" (*ang. anomalous propagation*). L'analyse des sections suivantes nécessite que nous nous préoccupions de savoir si ce type d'ondes existe et pour quelles fréquences. Dans ce but, la figure 2.3 présente l'évolution du nombre d'onde  $k_1^+$  lorsque l'on augmente la partie imaginaire de  $\omega$  depuis 0, ceci pour plusieurs valeurs de la partie réelle de  $\omega$  comprises dans l'intervalle  $[\omega_s, \omega_e]$ . Nous y observons que la plupart des nombres d'ondes, initialement réels pour  $\text{Im}(\omega) = 0$ , voient leur partie imaginaire devenir positive et donc donner lieu à des ondes spatialement évanescentes. Cependant, un de ces nombres d'ondes passe d'abord dans le demi-plan complexe inférieur avant de remonter dans le demi-plan complexe supérieur. L'onde neutre correspondante à  $\text{Im}(\omega) = 0$  devient donc une onde amplifiée dès que l'on augmente la partie imaginaire de  $\omega$  puis devient évanescente par la suite, lorsque  $\text{Im}(\omega)$  est suffisamment grand. Il existe donc un sous-intervalle  $[\omega_s; \omega_e]$  de l'intervalle de quatre ondes neutres pour lequel  $\text{Im}(k_1^+)$  devient négatif lorsque l'on augmente  $\text{Im}(\omega)$  et donne naissance à une onde spatialement amplifiée. Nous identifions numériquement cet intervalle, ce qui est illustré sur la figure 2.4. Sur cette figure, la partie imaginaire de  $k_1^+$  est tracée en fonction de la partie réelle de  $\omega$  pour  $\text{Im}(\omega) = 0$  et  $\text{Im}(\omega) = 10^{-4}$ . Nous observons que pour  $\text{Re}(\omega) \in [\omega_s; \omega_p]$ , la partie imaginaire de  $k_1^+$  devient négative et correspond donc à une onde aval amplifiée. Le croisement des deux courbes donne donc  $\omega_p$ . Notons que ce type particulier d'ondes neutres ne peut pas exister lorsque le système est localement stable. En effet, si une telle onde existe, il existe aussi un nombre d'onde réel auquel correspond une fréquence ayant une partie imaginaire positive et l'approche temporelle nous permet d'affirmer que le système est localement instable.

En résumé, les propriétés des ondes issues d'un forçage harmonique dépendent de la fréquence de forçage :

- Si  $\omega < \omega_s$ , une onde aval amplifiée est créée.
- Si  $\omega_s < \omega < \omega_p$ , quatre ondes neutres sont créées, et une onde aval amplifiée est créée pour  $\text{Im}(\omega) > 0$ .
- Si  $\omega_p < \omega < \omega_e$ , quatre ondes neutres sont créées.
- Si  $\omega > \omega_e$  deux ondes évanescentes et deux ondes neutres sont créés.

Dans l'analyse abordée dans les sections suivantes, nous utilisons une approche spatio-temporelle générale ( $\omega \in \mathbb{C}$  et  $k \in \mathbb{C}$ ), et le développement spatial des ondes ayant une "propagation anormale" ne sera pas abordé différemment des autres ondes dans le système (amplifiées, neutres ou évanescentes). Nous noterons simplement qu'il peut exister des ondes spatialement amplifiées dans l'intervalle  $[\omega_s; \omega_p]$  si la partie imaginaire de  $\omega$  est positive, sans aller plus loin dans l'analyse de ces ondes neutres.

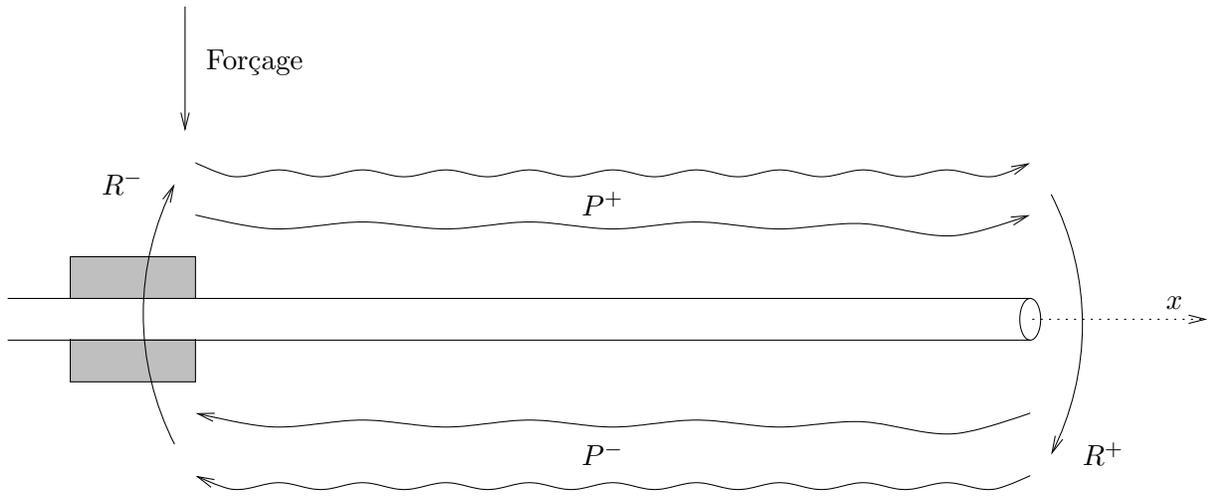


FIG. 2.5: Schéma descriptif de la méthode aller-retour

## 2.2 Bilan des propagations et réflexions d'onde

La méthode décrite dans cette section nous permet d'obtenir les pulsations propres globales du tuyau à partir des contributions séparées de la propagation des ondes et de leur réflexion aux conditions aux limites. Elle nous permet de comparer les rôles respectifs de l'instabilité locale, de la longueur finie, et des conditions aux limites dans l'instabilité globale. Elle est illustrée par la figure 2.5. La longueur finie du système est à nouveau considérée et nous introduisons la longueur sans dimension

$$l = \frac{L}{\eta} = UL \left( \frac{M}{EI} \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Remarquons que cette longueur adimensionnelle est strictement égale à la vitesse adimensionnelle  $u$ , ayant pour longueur de référence la longueur du tuyau, définie dans l'équation (1.2).

### 2.2.1 Matrice de gain

Considérons le forçage harmonique généralisé  $f(x, t) = \delta(x) \exp(-i\omega t)$  avec  $\omega \in \mathbb{C}$ . Comme il a été dit dans la section précédente, quatre ondes sont créées, dont le côté  $x > 0$  ou  $x < 0$  d'existence est déterminé par l'appartenance à une branche  $k^+$  ou  $k^-$  du nombre d'onde leur correspondant. Considérons les deux ondes aval, de nombres d'ondes  $k_1^+$  et  $k_2^+$ . Leurs amplitudes au point de forçage sont notées  $A_1^+$  et  $A_2^+$ , et leur propagation engendre le déplacement du tuyau  $y^+ = y_1^+ + y_2^+$ , soit

$$y^+ = A_1^+ e^{i(k_1^+ x - \omega t)} + A_2^+ e^{i(k_2^+ x - \omega t)}. \quad (2.3)$$

Une fois parcourue la distance  $l$ , ces deux ondes rencontrent le bord aval et ont alors pour amplitudes locales,

$$B_1^+ = A_1^+ \exp(ik_1^+ l), \quad B_2^+ = A_2^+ \exp(ik_2^+ l), \quad (2.4)$$

soit sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} B_1^+ \\ B_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ik_1^+ l} & 0 \\ 0 & e^{ik_2^+ l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1^+ \\ A_2^+ \end{Bmatrix} = P^+ \vec{A}^+. \quad (2.5)$$

La réflexion de ces ondes implique la création de deux ondes amont, de nombres d'onde  $k_1^-$  et  $k_2^-$ , d'amplitudes au bord amont  $A_1^-$  et  $A_2^-$ , le déplacement associé du tuyau étant

$$y^- = A_1^- e^{i(k_1^- x - \omega t)} + A_2^- e^{i(k_2^- x - \omega t)}. \quad (2.6)$$

Leurs amplitudes au bord aval sont données par

$$B_1^- = A_1^- e^{ik_1^- l}, \quad B_2^- = A_2^- e^{ik_2^- l}, \quad (2.7)$$

soit

$$\begin{Bmatrix} A_1^- \\ A_2^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-ik_1^- l} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2^- l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1^- \\ B_2^- \end{Bmatrix} = P^- \vec{B}^-. \quad (2.8)$$

Les amplitudes  $B_1^-$  et  $B_2^-$  des ondes réfléchies doivent être telles que la déformation totale

$$y(x, t) = e^{-i\omega t} \left( B_1^+ e^{ik_1^+ x} + B_2^+ e^{ik_2^+ x} + B_1^- e^{ik_1^- x} + B_2^- e^{ik_2^- x} \right) \quad (2.9)$$

satisfait la condition de bord aval quel que soit  $t$ , l'axe des abscisses ayant ici pour origine le bord aval. Etudions par exemple le cas d'une extrémité encastree. En introduisant (2.9) dans (1.4), nous obtenons le système de deux équations suivant,

$$\begin{cases} B_1^+ + B_2^+ + B_1^- + B_2^- = 0, \\ k_1^+ B_1^+ + k_2^+ B_2^+ + k_1^- B_1^- + k_2^- B_2^- = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

que l'on peut exprimer de façon matricielle,

$$\vec{B}^- = R^+ \vec{B}^+, \quad (2.11)$$

où  $R^+$  est une matrice fonction des nombres d'onde  $k_{1,2}^+$  et  $k_{1,2}^-$ ,

$$R^+ = \frac{1}{k_2^- - k_1^-} \begin{bmatrix} k_2^- - k_1^+ & k_2^- - k_2^+ \\ k_1^- - k_1^+ & k_1^- - k_2^+ \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Nous appelons  $R^+$  une matrice de réflexion : elle donne l'amplitude des ondes réfléchies en fonction de l'amplitude des ondes incidentes. Dans le cas général, en appliquant la même méthode, nous pouvons écrire une matrice de réflexion sous la forme généralisée suivante,

$$\begin{Bmatrix} A_1^r \\ A_2^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r(k_1^i, k_2^r, k_1^r) & r(k_2^i, k_2^r, k_1^r) \\ r(k_1^i, k_1^r, k_2^r) & r(k_2^i, k_1^r, k_2^r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1^i \\ A_2^i \end{Bmatrix}, \quad (2.13)$$

où les exposants  $i$  et  $r$  se réfèrent respectivement aux ondes incidentes et réfléchies. Dans le cas d'une extrémité encastree,  $r(A, B, C) = (A - B)/(B - C)$ , pour une extrémité appuyée,

$r(A, B, C) = (A^2 - B^2)/(B^2 - C^2)$  et pour une extrémité libre,  $r(A, B, C) = (A^3 - A^2B)/(C^2B - C^3)$ .

Les deux ondes engendrées par la réflexion des deux ondes aval se propagent vers l'amont sur un trajet de longueur  $l$ , elles atteignent le bord amont et créent deux ondes aval, d'amplitudes  $A_1^+$  et  $A_2^+$ , telles que

$$\vec{A}^+ = R^- \vec{A}^-. \quad (2.14)$$

En combinant les équations (2.5), (2.8), (2.11) et (2.14), nous pouvons définir une matrice de gain  $G$  entre les ondes aval originales et celles obtenues après un aller-retour

$$\vec{A}^+ = G \vec{A}^+, \quad (2.15)$$

où

$$G = R^- P^- R^+ P^+. \quad (2.16)$$

Cette matrice dépend des paramètres apparaissant dans la relation de dispersion et de  $\omega$  au travers des nombres d'onde. Elle représente bien les étapes successives (propagation-reflexion-propagation-reflexion) de l'aller-retour des ondes engendrées par le forçage à la fréquence  $\omega$ .

## 2.2.2 De la matrice de gain aux pulsations globales

Considérons maintenant les vecteurs propres  $\vec{V}_{1,2}$  et les valeurs propres  $\Lambda_{1,2}$  de  $G(\omega)$ . Un vecteur propre  $\vec{V}_j$  de  $G(\omega)$  correspond à une combinaison des ondes aval dont les amplitudes complexes  $A_1^+$  et  $A_2^+$  sont simplement multipliées par  $\Lambda_j$  lors d'un aller-retour. Si pour une valeur de  $\omega \in \mathbb{C}$  une valeur propre vaut exactement l'unité alors les deux ondes  $y_1^+$  et  $y_2^+$  qui reviennent au point de forçage ont la même amplitude et la même phase que les deux ondes issues du forçage  $y_1^+$  et  $y_2^+$ , c'est à dire que  $\vec{A}^+ = \vec{A}^+$ . Nous en déduisons qu'il n'est pas nécessaire de continuer à forcer le système pour que se développent les ondes. Nous avons donc identifié une pulsation propre globale du système libre, qui conduit à l'instabilité globale si  $\text{Im}(\omega) > 0$ . Appelons simplement  $\Lambda$  et  $\vec{V}$  la valeur propre et le vecteur propre concernés. Le mode global associé est alors la superposition des quatre ondes  $y_{1,2}^+$  et  $y_{1,2}^-$  et la déformation du tuyau est donnée par

$$y_m(x, t) = e^{-i\omega t} \left[ \{e^{ik_1^+ x}, e^{ik_2^+ x}\} \cdot \vec{V} + \{e^{ik_1^- x}, e^{ik_2^- x}\} \cdot P^- R^+ P^+ \vec{V} \right]. \quad (2.17)$$

Il existe d'autres cas pour lesquels les ondes  $y_{1,2}^+$  reviennent avec la même amplitude et la même phase après un nombre supérieur à l'unité d'aller-retours. Ce sont tous les cas où une valeur propre de  $G$  peut être écrite sous la forme

$$\Lambda = e^{2i\pi \frac{k}{l}}, \quad k = 1, 2, \dots, l-1, \quad (2.18)$$

soient toutes les racines  $n$ -ièmes de l'unité,  $n$  étant un entier. En effet dans ce cas les ondes reviennent en phase après  $n$  aller-retours et le mode propre associé est la somme des  $4n$  ondes

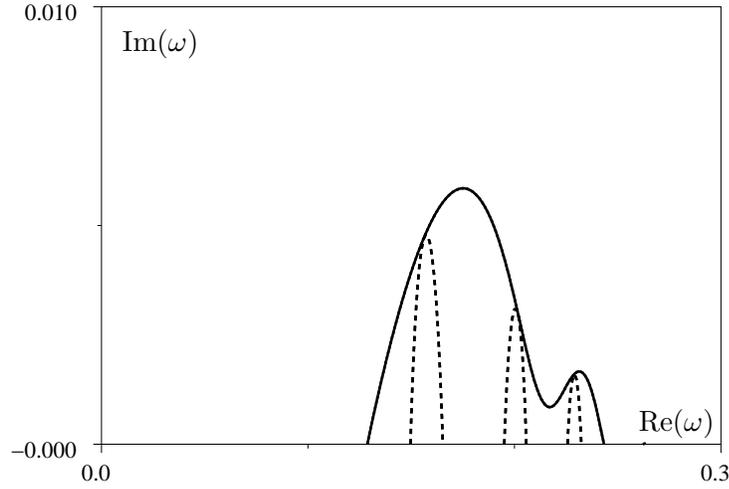


FIG. 2.6: Ligne de contour d'une valeur propre  $\Lambda$  de la matrice de gain,  $\beta = 0.95$ ,  $l = 50$ ; (—),  $|\Lambda| = 1$ ; (---),  $\text{Re}(\Lambda) = 1$ .

intervenant dans ce trajet,

$$y(x, t) = y_m(x, t) \sum_{\alpha=1}^n \Lambda^\alpha. \quad (2.19)$$

Mais pour toutes les valeurs propres satisfaisant (2.18), cette somme est nulle et le mode propre n'engendre aucune déformation du tuyau.

La figure 2.6 représente, à  $\beta = 0.95$  et  $l = 50$ , dans le plan complexe de la pulsation  $\omega$  la courbe où le module d'une valeur propre de  $G(\omega)$  vaut 1 et les courbes où la partie réelle d'une valeur propre de  $G(\omega)$  vaut 1. Ceci permet d'identifier graphiquement les pulsations propres globales du tuyau, qui sont les points de croisement de ces deux courbes. Pour ces valeurs des paramètres, la figure 2.6 montre qu'il existe trois pulsations propres globales instables.

### 2.2.3 Propriétés de la matrice de gain et de ses valeurs propres

La matrice  $G$  est un produit de 4 matrices. Une propriété essentielle d'une matrice complexe est que ses valeurs propres ne dépendent pas de la base choisie. Ainsi, lorsque l'on considère les valeurs propres du produit de deux matrices, nous savons que celles-ci ne changent pas si l'on exprime ce produit dans une base telle qu'une des deux matrices est diagonale. Et si une des deux matrices est diagonale, alors la permutation des matrices du produit ne modifie pas les valeurs propres. Nous en déduisons la propriété générale suivante du produit de deux matrices complexes : la permutation des matrices du produit ne modifie pas les valeurs propres de la matrice résultante. Aussi une permutation circulaire du produit des matrices de  $G$  ne modifie t-elle pas les valeurs propres.

La précédente affirmation nous permet de démontrer une propriété essentielle des valeurs propres de  $G$ . Supposons que le forçage ait été exercé en un point  $x_0 \neq 0$  du tuyau et appliquons à nouveau le bilan matriciel des propagations et réflexions d'onde. Ce bilan doit alors considérer le demi-trajet de propagation vers l'aval de  $x_0$  à  $l$ , la réflexion, le trajet vers l'amont de  $l$  à  $0$  et enfin le demi-trajet de propagation de  $0$  à  $x_0$  vers l'aval, si bien que la matrice de gain s'exprime sous la forme

$$G(x = x_0) = P_2^+ R^- P^- R^+ P_1^+, \quad (2.20)$$

où les matrices de demi-propagation vers l'aval sont de la forme

$$P_1^+ = \begin{bmatrix} e^{ik_1^+(l-x_0)} & 0 \\ 0 & e^{ik_2^+(l-x_0)} \end{bmatrix}, \quad P_2^+ = \begin{bmatrix} e^{ik_1^+x_0} & 0 \\ 0 & e^{ik_2^+x_0} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Or les valeurs propres ne changent pas si nous passons le terme  $P_2^+$  à droite, et, en remarquant que  $P_1^+ P_2^+ = P^+$ , elles sont les mêmes que celles de la matrice  $G$  définie en (2.16). Cela signifie que les valeurs propres de  $G$  ne dépendent pas du point de forçage, et sont des quantités intrinsèques du système. La matrice de gain elle même n'est en revanche pas une quantité intrinsèque du système.

Tout changement autre qu'une permutation circulaire de l'ordre du produit des matrices formant  $G$  modifie les valeurs propres. Cela signifie qu'il n'est pas possible d'écrire une matrice de gain comme le produit de deux matrices, l'une représentant les propagations d'onde, l'autre les réflexions d'onde. Le produit des valeurs propres reste quant à lui constant, mais cette propriété n'a pas d'utilité dans la présente analyse.

#### 2.2.4 Comparaison avec la méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est décrite dans l'annexe B. Elle permet de calculer  $N$  pulsations propres du système à partir d'une base modale constituée de  $N$  modes. La validité des résultats qu'elle permet d'obtenir lors de l'étude de l'instabilité des tuyaux n'est plus à démontrer et elle va nous servir de référence pour confirmer la pertinence de la méthode présentée précédemment. Sur la figure 2.7 sont représentées une fois de plus, dans le plan complexe  $\omega$ , les lignes de contour où le module d'une valeur propre de la matrice de gain vaut 1 et celles où la partie réelle vaut 1. Les pulsations propres instables calculées par la méthode de Galerkin y sont aussi représentées et coïncident bien avec les points où les courbes  $|\Lambda| = 1$  et  $\text{Re}(\Lambda) = 1$  se rejoignent. Cette observation confirme le fait qu'une pulsation propre globale est une pulsation pour laquelle une valeur propre de la matrice de gain vaut l'unité.

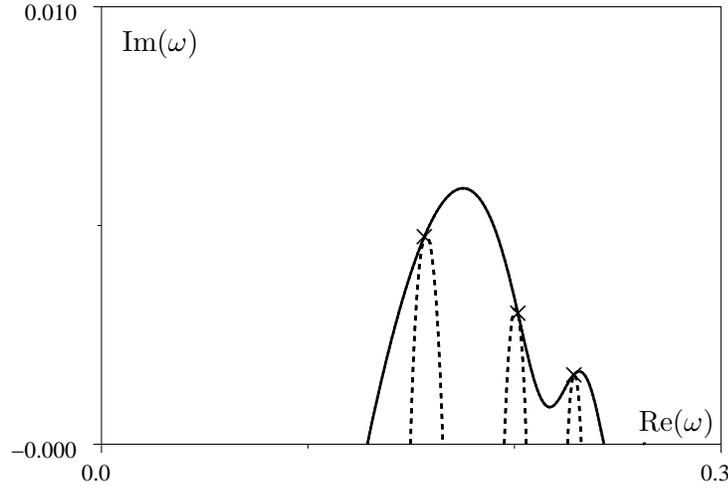


FIG. 2.7: Pulsations propres de la conduite encastrée-libre,  $\beta = 0.95$ ,  $l = 50$ ; (—),  $|\Lambda| = 1$ ; (---),  $\text{Re}(\Lambda) = 1$ ; ( $\times$ ), pulsations propres obtenues par la méthode de Galerkin.

### 2.3 Contributions respectives du trajet des ondes et des réflexions d'ondes

Nous avons vu précédemment qu'il n'est pas possible d'écrire  $G$  de façon à ce que les contributions des propagations d'onde et des réflexions d'onde soient explicitement séparées. Nous exposons cependant ici un moyen permettant de savoir si l'instabilité globale est causée par l'instabilité locale ou par les réflexions d'ondes. Supposons que les conditions aux limites n'introduisent aucun gain et qu'elles ne sélectionnent que la situation la plus amplifiée et celle la moins amplifiée par les propagations d'ondes. Cela se réalise en posant  $R^+ = R^- = Id$ . En effet nous obtenons alors  $G = P^- P^+$ , une matrice diagonale dont le premier terme diagonal est  $\Lambda_p = \exp[i(k_1^+ - k_1^-)L]$ , le bilan propagatif des ondes amont et aval les plus amplifiées, et  $\exp[i(k_2^+ - k_2^-)L]$ , le bilan propagatif des ondes les moins amplifiées. Le module de  $\Lambda_p$  est ainsi le maximum d'amplification permis par les propagations d'ondes seules. Remarquons de plus que poser  $|\Lambda_p| = 1$  est équivalent au critère de Kulikovskii (1.21). Ce dernier dit qu'une pulsation est une pulsation propre globale d'un système de longueur infinie si l'onde la plus amplifiée en aval est exactement compensée par l'onde la moins évanescence en amont, ces deux ondes étant dominantes pour un système de longueur infinie.

Si à présent nous considérons le processus complet des propagations et réflexion d'ondes, et appelons  $\Lambda$  la plus grande des deux valeurs propres de  $G$  en module, nous n'avons plus une onde amplifiée mais une combinaison de deux ondes, et le gain vaut  $\Lambda$ . Afin d'illustrer les différentes situations possibles, traçons dans le plan complexe  $\omega$  une schématisation représentative des courbes  $|\Lambda| = 1$  et  $|\Lambda_p| = 1$ . Cela apparaît sur la figure 2.8, où sont aussi représentées deux pul-

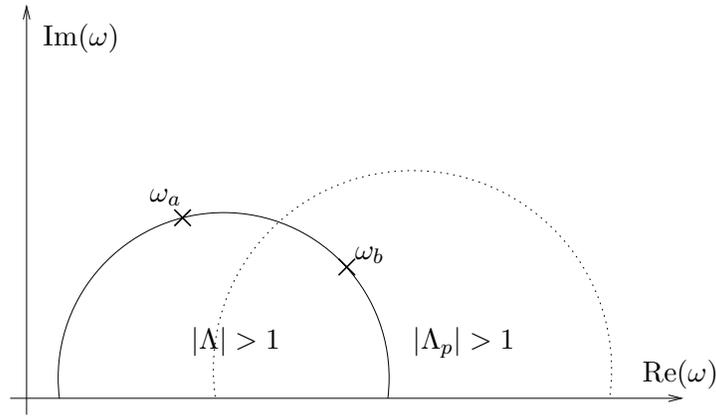


FIG. 2.8: Exemple schématique d’identification des contributions des propagations d’onde et des réflexions d’onde,  $(-)$ ,  $|\Lambda|=1$ ;  $(\cdots)$ , critère de Kulikovskii, équation (1.21);  $(\times)$ , pulsation propre globale;

sations propres globales instables  $\omega_a$  et  $\omega_b$ . La pulsation propre  $\omega_a$  apparaît en dehors de la zone  $|\Lambda_p| \geq 1$ , ce qui signifie que quelle que soit la combinaison d’ondes considérée, leur propagation a une fonction amortissante. Nous en concluons que la pulsation propre globale existe grâce à un gain par les réflexions d’ondes aux conditions aux limites, qui contrebalance l’amortissement des propagations d’ondes. En revanche la pulsation  $\omega_b$  se trouve dans une région où  $|\Lambda_p| > 1$ . Dans ce cas, au contraire, du fait que les réflexions d’ondes et la longueur finie ne favorisent pas la combinaison d’ondes la plus amplifiée par l’instabilité locale, nous pouvons considérer qu’elles ont une fonction stabilisante et affirmer que c’est l’instabilité locale qui engendre l’instabilité globale.

Transposons maintenant cette analyse dans le cas du tuyau pour une situation convectivement instable,  $\beta = 0.95$ , comme cela apparaît sur la figure 2.9. A cette valeur du rapport de masse, l’instabilité apparaît pour  $l > 17.7$ . Sur la figure sont représentés le contour  $|\Lambda_p| = 1$  et les contours  $|\Lambda| = 1$  pour différentes longueurs. Pour  $l = 17.7$  (fig. 2.9a), la pulsation globale instable est dans la région  $|\Lambda_p| < 1$ , ce qui signifie le bilan de la seule propagation d’onde est amortissant. Cela se comprend aisément en remarquant qu’à cette valeur de  $\omega$ , toutes les ondes sont évanescentes. Donc le mode instable existe grâce à une compensation par les conditions aux limites de cet amortissement. Par conséquent nous attribuons l’instabilité aux réflexions d’ondes. Si l’on augmente encore la longueur, la région  $|\Lambda| > 1$  grandit et reste dissociée de la région  $|\Lambda_p| > 1$ , les conditions aux limites continuent donc d’avoir un effet déstabilisant dans la région située sous la courbe  $|\Lambda| = 1$  et un effet stabilisant dans la région située sous la courbe  $|\Lambda_p| = 1$ . Mais pour  $l = 20$  (fig. 2.9b), aucune valeur propre n’est égale à l’unité et le système est globalement stable. Cette restabilisation est une conséquence des formes de “s” de la courbe de stabilité globale du tuyau (cf. figure 1.9a). Pour  $l = 30$  (fig. 2.9c), la région  $|\Lambda| > 1$  continue de grandir, toujours en dehors de la région  $|\Lambda_p| > 1$  d’où un effet encore une fois amplificateur des réflexions d’onde. Cette fois il existe une fréquence instable pour laquelle l’aller-retour des ondes est en

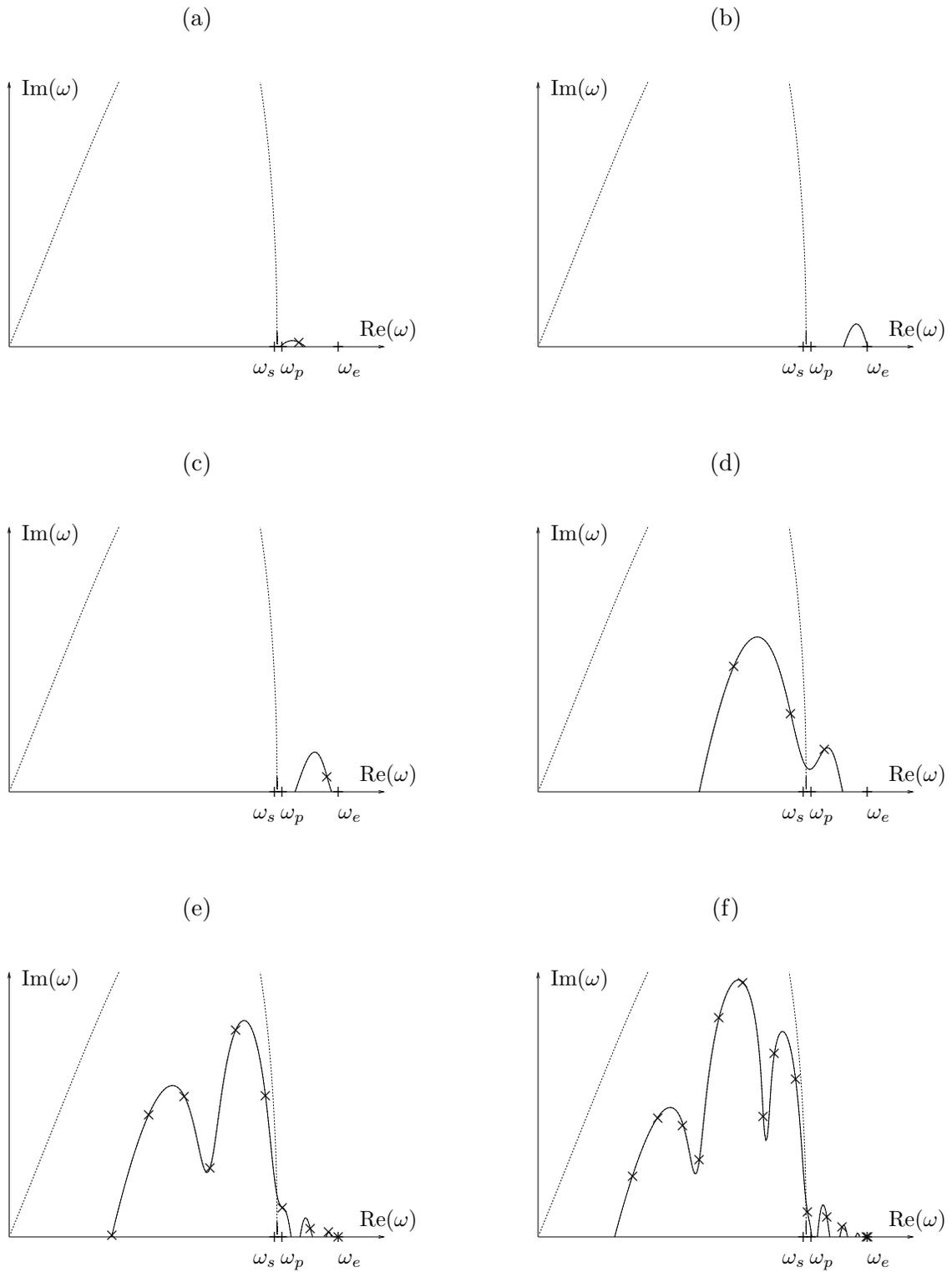


FIG. 2.9: Identification des contributions des propagations d'onde et des réflexions d'onde,  $\beta = 0.95$ ;  $(-)$ ,  $|\Lambda|=1$ ;  $(\cdots)$ , critère de Kulikovskii, équation (1.21);  $(\times)$ , pulsation propre globale; (a),  $l = 17.7$ ; (b),  $l = 20$ ; (c),  $l = 30$ ; (d),  $l = 50$ ; (e),  $l = 100$ ; (f),  $l = 150$ .

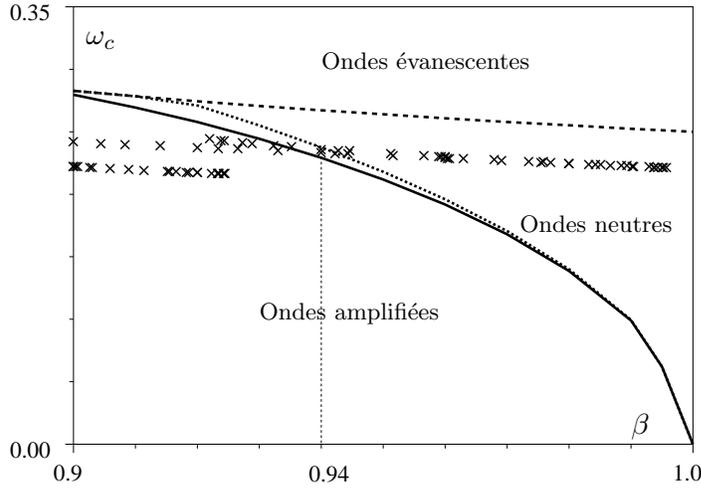


FIG. 2.10: Comparaison des pulsations critiques globales avec les intervalles d'onde locaux, ( $\times$ ), pulsation critique globale  $\omega_c$ ; (—),  $\omega_s$ ; ( $\cdots$ ),  $\omega_p$ . (----),  $\omega_e$ ;

phase. Aux longueurs plus grandes (fig. 2.9d, e, f), de nombreuses pulsations propres instables apparaissent et certaines se trouvent dans la région  $|\Lambda_p| > 1$ , celles-ci peuvent être attribuées aux ondes amplifiées et donc à l'instabilité locale. Remarquons de plus qu'aucune pulsation propre instable n'apparaît dans la région d'ondes évanescentes  $\omega > \omega_e$ . Les ondes évanescentes ont donc un rôle trop amortissant, que ne peuvent compenser les réflexions d'onde. Cela explique aussi pourquoi dans la région du plan complexe  $\omega$  où les ondes sont toutes faiblement évanescentes, c'est-à-dire la région située juste au-dessus de l'intervalle  $[\omega_p; \omega_e]$ , la zone  $|\Lambda| > 1$  diminue. En effet, plus la longueur augmente, plus les ondes évanescentes ont un effet amortissant et moins les réflexions d'onde parviennent à compenser cet amortissement. C'est aussi la raison pour laquelle à la limite  $l \rightarrow \infty$ , il n'existe des pulsations propres globales que sur la courbe décrite par le critère de Kulikovskii.

Scrutons à présent l'ensemble de l'intervalle des rapports de masse  $\beta$  tels que le système est convectivement instable, soit  $\beta \in [8/9; 1]$ . A l'apparition de l'instabilité globale il existe une pulsation propre globale  $\omega_c \in \mathbb{R}$ , appelée pulsation critique. Celle-ci est comparée aux différents types d'intervalles d'ondes sur la figure 2.10. Nous observons que pour  $\beta < 0.94$ ,  $\omega_c < \omega_p$  et les propagations d'onde favorisent l'instabilité à  $\omega_c$ . En revanche, pour  $\beta > 0.94$ , la pulsation critique  $\omega_c$  est dans l'intervalle d'ondes neutres et l'instabilité est attribuée aux réflexions d'ondes aux conditions aux limites.

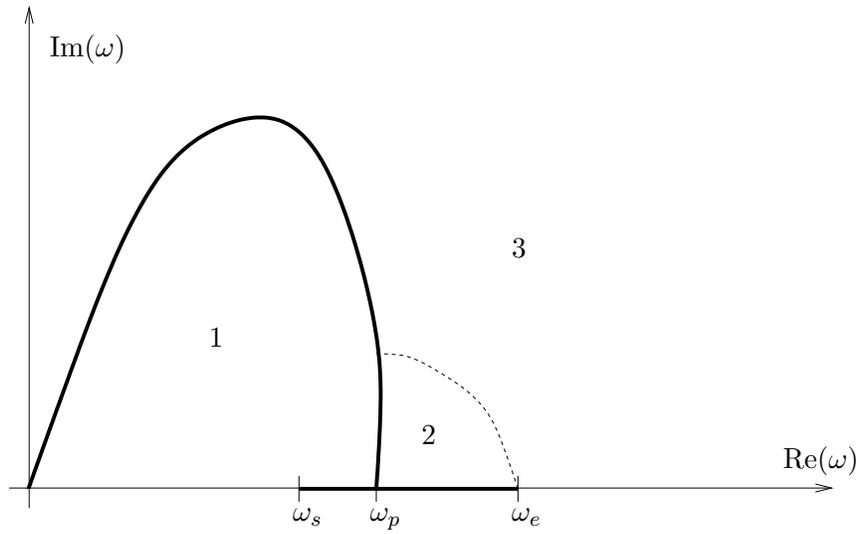


FIG. 2.11: Schéma représentatif du rôle respectif des propagations d'onde et des réflexions d'onde dans la déstabilisation globale du tuyau ; (1), les propagations d'ondes favorisent l'instabilité mais la longueur finie et les conditions aux limites ne l'autorisent pas aux faibles longueurs ; (2), ondes faiblement évanescentes ou neutres, qui permettent aux réflexions d'ondes de provoquer l'instabilité aux faibles longueurs ; (3), ondes fortement évanescentes, qui empêchent toute instabilité d'exister.

## 2.4 Conclusion

La figure 2.11 nous permet de récapituler les résultats obtenus par la méthode présentée dans ce chapitre. Dans le demi-plan complexe des pulsations instables, trois zones y sont représentées. La zone 1 est délimitée par l'axe des abscisses et par le contour défini par le critère de Kulikovskii. Pour toute pulsation propre globale apparaissant dans cette zone, nous attribuons l'instabilité globale au développement d'ondes instables. Et puisque les conditions aux limites et la longueur finie ne sélectionnent pas la combinaison d'ondes la plus amplifiée par le processus de propagation d'ondes, elles ont une influence stabilisante. La zone 2 est une zone d'ondes faiblement évanescentes qui apparaît juste au dessus de l'intervalle d'ondes neutres. Une pulsation propre globale apparaissant dans cette zone est attribuée à un gain par les réflexions d'onde car les propagations d'ondes seules ont une influence stabilisante. Enfin dans la zone 3, il existe des ondes fortement évanescentes qu'un éventuel gain par les réflexions d'ondes ne parvient pas à compenser, ce qui empêche toute pulsation propre globale d'exister. Notons de plus que la frontière entre la zone 2 et la zone 3 n'est pas clairement définie.

En regardant systématiquement dans quelle zone apparaît la première pulsation propre globale instable, nous avons ainsi identifié le moteur de l'instabilité, en fonction du rapport de masse  $\beta$ . Cela est récapitulé sur la figure 2.12. Nous n'avons pas étudié le domaine de rapports de masse pour lequel le système est absolument instable ( $\beta < 8/9$ ) mais nous pouvons supposer que l'instabilité absolue est alors le moteur de l'instabilité globale. Dans le domaine d'instabilité convective ( $\beta > 8/9$ ), nous avons pu démontrer que lorsque  $\beta < 0.94$ , c'est l'instabilité locale

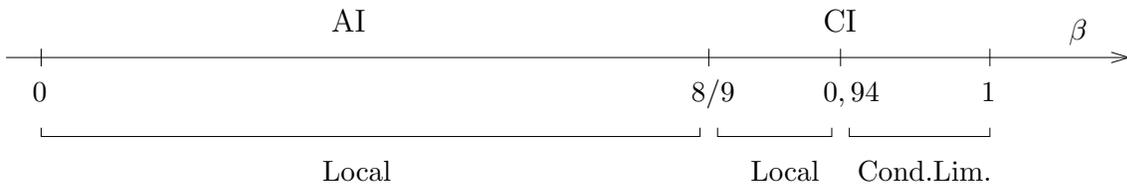


FIG. 2.12: Identification des causes de l'instabilité globale en fonction du paramètre de masse  $\beta$ .

qui est le moteur de l'instabilité globale tandis que pour  $\beta > 0.94$ , ce sont les réflexions d'ondes qui provoquent l'instabilité.

Il est à présent légitime de se demander quel rapport il y a entre nos résultats et ceux de Lee et Mote [33]. Ceux-ci ont calculé l'énergie réfléchie par les réflexions d'onde en fonction des paramètres et du type de condition aux limites. Ils ont notamment trouvé qu'il y a toujours une perte d'énergie lors de la réflexion sur un appui encastré en amont et qu'en fonction des paramètres et de la pulsation, il peut y avoir un gain d'énergie lors d'une réflexion d'ondes à une extrémité libre. Ceci peut sembler en accord avec nos résultats mais leurs travaux devraient être reconsidérés au vu du développement d'ondes instables dans le système. En effet, lorsque des ondes instables se développent, il n'est plus suffisant de considérer qu'une onde ayant un taux de croissance spatial non nul est une onde évanescente dans la bonne direction (il peut exister des ondes spatialement amplifiées) et de considérer que la vitesse de groupe donne la direction de propagation de l'énergie (en tout point du système le fluide peut fournir de l'énergie aux ondes de flexion). On se demande donc quel sens ont les coefficients de réflexion calculés par ces auteurs.

Le travail présenté dans ce chapitre permet de faire le lien entre l'approche locale et l'approche globale. Dans l'approche globale des modes instables sont identifiés mais il n'est pas permis de connaître le moteur de l'instabilité qui se développe. Le critère de Kulikovskii permet lui de faire le lien entre l'instabilité locale et l'instabilité globale dans la limite où la longueur du système tend vers l'infini. Notre approche, quant à elle, permet de faire le lien entre l'approche globale classique et l'approche locale, pour des longueurs finies, et considère un mode instable comme le résultat d'un accord de phase complexe entre les propagations et les réflexions d'onde. Nous avons identifié les causes d'un mode instable dans les situations où la direction de propagation des ondes peut être identifiée, c'est-à-dire dans toutes les situations sauf les situations absolument instables. L'existence d'une pulsation propre instable peut finalement avoir deux causes ; soit les ondes spatialement amplifiées, soit les réflexions d'ondes lorsqu'il n'existe pas d'onde amplifiée à la fréquence propre globale. Nous avons de plus mis en évidence qu'il n'est pas suffisant d'avoir un gain aux conditions aux limites ou un gain par les propagations d'ondes (équivalent à  $|\Lambda| > 1$ ) pour observer l'instabilité globale. Il doit en plus y avoir un accord de phase lors du bilan aller-retour des ondes (équivalent à  $\Lambda = 1$ ).

La méthode présentée est extensible à toutes les relations de dispersion dont on peut calculer

les nombres d'ondes associés à une pulsation complexe. Il n'est pas nécessaire d'avoir le même nombre d'ondes en amont et en aval, les matrices de réflexions pouvant être rectangulaires, avec la nécessité d'avoir autant de conditions aux limites que d'ondes réfléchies. Plusieurs points restent à éclaircir afin de compléter ce travail. Puisque la matrice de gain est définie à partir d'un forçage harmonique du tuyau en un point, il doit être possible, à partir de celle-ci, de calculer une fonction de transfert associée au forçage. La fonction de transfert doit alors nous permettre de retrouver les pulsations propres globales. Une pulsation propre globale est une pulsation pour laquelle la fonction de transfert tend vers l'infini. Nous obtiendrons un complément mécanique à l'approche géométrique de la section 2.2.2. D'autres conditions aux limites doivent être analysées afin de dégager le caractère générique de nos résultats. Nous pouvons d'ores et déjà dire que l'instabilité de flambage, apparaissant quand on considère les tuyaux appuyés-appuyés ou encastrés-encastrés, est causée par les conditions aux limites. Dans ce cas en effet la pulsation globale instable est sur l'axe imaginaire et se situe en dehors de la région favorisée par les propagations d'ondes (région 1 sur la figure 2.12).

Nous nous demandons aussi si ces résultats sont applicables à d'autres problèmes en interaction fluide-structure. Les études locales de stabilité, tant spatiales que temporelles, nous ont conforté dans l'idée que le tuyau est un excellent modèle d'autres problèmes d'interaction fluide-structure. De la même façon que pour le tuyau, des intervalles d'ondes amplifiées, d'ondes neutres, d'ondes évanescentes, d'ondes de "propagation anormale" existent dans le cas d'un écoulement potentiel au dessus d'une paroi souple [8, 16], dans le cas d'un écoulement de couche limite au dessus d'une paroi souple [34] et dans le cas d'un écoulement à l'intérieur ou à l'extérieur d'une coque cylindrique [43]. Il n'est donc pas improbable que l'instabilité globale de ces systèmes puisse présenter les mêmes caractéristiques que celle du tuyau. Il existe cependant des contraintes techniques pour modéliser de façon convenable les conditions aux limites de ces systèmes, ce qui rend l'analyse plus compliquée.

Le travail du chapitre suivant découle directement des résultats du présent chapitre. Nous nous demandons en effet si un système localement stable présentant des intervalles d'ondes neutres peut être globalement instable, de la même façon que le tuyau simple pour  $\beta > 0.94$ . Si les conditions aux limites sont du même type, ceci est tout à fait envisageable.

-----



## Chapitre 3

# Instabilités locales et globales d'un tuyau sur fondation élastique

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment un mode global instable peut se construire et comment isoler les contributions de l'instabilité locale des contributions des conditions aux limites dans l'instabilité globale. Dans le cas étudié en exemple, le moteur de l'instabilité est soit l'instabilité absolue, soit l'onde aval amplifiée, soit les réflexions d'onde. Dans le cas convectivement instable nous avons pu identifier, en fonction de la pulsation globale instable, le moteur de l'instabilité, amplification par les propagations d'onde ou par les réflexions d'onde. Nous avons ainsi découvert que la première pulsation globale instable peut apparaître dans un intervalle où il n'existe que des ondes neutres et en avons conclu que le moteur de l'instabilité dans ces situations est un gain aux conditions aux limites.

Ceci nous amène à présenter maintenant une configuration pour laquelle il peut exister un intervalle d'ondes neutres dans une situation localement stable. Si des pulsations propres globales pouvaient apparaître dans cet intervalle, nous serions alors confrontés à une instabilité globale malgré la stabilité locale.

### 3.1 Instabilité globale

Nous considérons pour l'étude globale l'équation du mouvement (1.1) sans gravité ni tension ni dissipation. L'adimensionnement utilisé est le même que celui donné par l'équation (1.2) et l'équation adimensionnelle est alors l'équation du tuyau simple à laquelle on ajoute le terme de rappel élastique  $sy$ ,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta}u \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + sy = 0. \quad (3.1)$$

Sur la figure 3.1 sont illustrés les différents jeux de conditions aux limites étudiées dans ce chapitre. Y apparaissent les tuyaux encastré-libre, encastré-encastré et appuyé-appuyé.

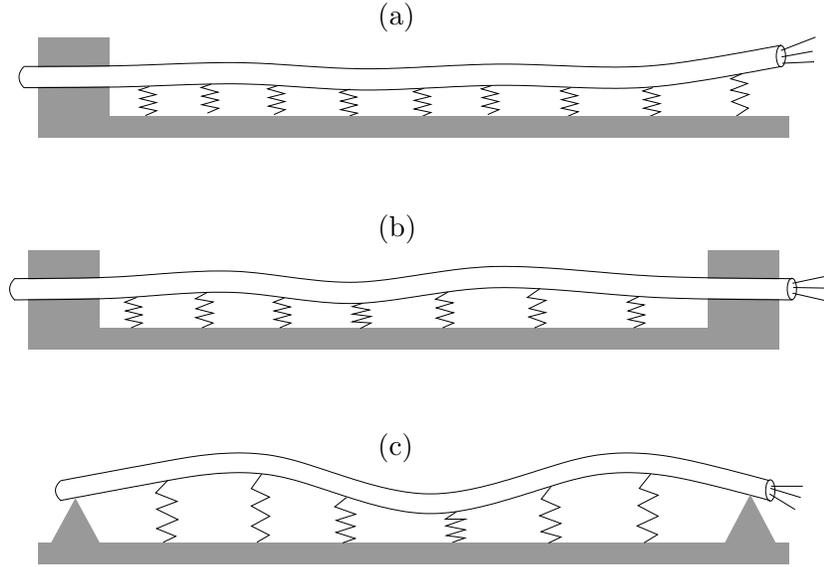


FIG. 3.1: Vues schématiques d'un tuyau sur fondations élastiques ; (a), tuyau encastré-libre ; (b), tuyau encastré-encastré ; (c), tuyau appuyé-appuyé.

#### 3.1.1 Instabilité statique d'un tuyau sans extrémité libre

Pour les tuyaux encastré-encastré et appuyé-appuyé, l'instabilité est de type flambage et est caractérisée par une fréquence nulle à l'instabilité. C'est ce qui a permis à Roth [45] de s'affranchir des termes dépendant du temps, et donc du rapport de masse  $\beta$ , dans l'équation du mouvement et de calculer analytiquement la vitesse critique d'instabilité en fonction du module de fondation élastique  $S$  à l'aide d'une méthode de type Galerkin. Pour le tuyau appuyé-appuyé, la vitesse critique  $u_c$  est donnée par

$$u_c = N\pi \left( 1 + \frac{s}{(N\pi)^4} \right)^{1/2}, \quad (3.2)$$

où  $N$  est le plus petit entier satisfaisant  $N^2(N+1)^2 \geq s/\pi^4$ . Quant à la conduite encastrée à chaque extrémité, sa vitesse critique est donnée par

$$u_c = 2\pi \left( 1 + \frac{3s}{(16\pi)^4} \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

pour  $s \leq (84/11)\pi^4$  et par

$$u_c = \pi \left( \frac{N^4 + 6N^2 + 1}{N^2 + 1} + \frac{s}{\pi^4(N^2 + 1)} \right)^{1/2} \quad (3.4)$$

sinon, où  $N$  est le plus petit entier satisfaisant  $N^4 + 2N^3 + 3N^2 + 2N + 6 \geq s/\pi^4$ . La vitesse critique d'instabilité de la conduite sur fondation élastique pour ces deux jeux de conditions aux limites est représentée en fonction de  $s$  sur la figure 3.2.

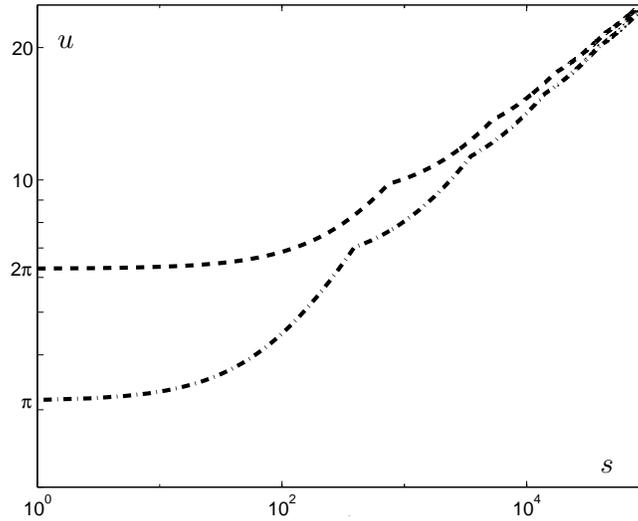


FIG. 3.2: Courbes de stabilité globale des tuyaux sur appuis simples et encastrés; --- , tuyau encastré-encastré; -.- , tuyau sur appuis simples.

### 3.1.2 Instabilité dynamique d'un tuyau encastré-libre

Afin de compléter l'étude de Lottati et Kornecki [35], dont les résultats, présentés dans le chapitre introductif, apparaissent en figure 1.10, nous avons effectué des calculs de stabilité à des valeurs plus grandes de la fondation élastique. De la même manière que les précédents auteurs [25, 35] et qu'au chapitre précédent, nous calculons les fréquences propres globales du tuyau libre par une méthode de Galerkin, utilisant les modes propres d'une poutre encastrée-libre. La courbe de stabilité correspond aux valeurs des paramètres pour lesquelles le système est marginalement instable, c'est à dire pour lesquelles la pulsation propre de plus grande partie imaginaire est réelle. La plus grande valeur de  $s$  explorée par nos calculs est  $10^5$ . Pour une telle valeur de la

fondation élastique, il a été nécessaire d'utiliser 100 modes pour obtenir les fréquences critiques avec une précision suffisante. Encore une fois, pour ce jeu de conditions aux limites, l'instabilité est de type flottement et est caractérisée par une fréquence non nulle à l'instabilité. Sur la figure 3.3 est tracée la vitesse critique d'instabilité en fonction du rapport de masse pour différentes valeurs de la fondation élastique. Y apparaissent les résultats des travaux précédents ( $s = 0, 100$ ) et nos propres résultats. Nous observons que la vitesse critique augmente lorsque la fondation élastique augmente; cette dernière a donc un effet stabilisant.

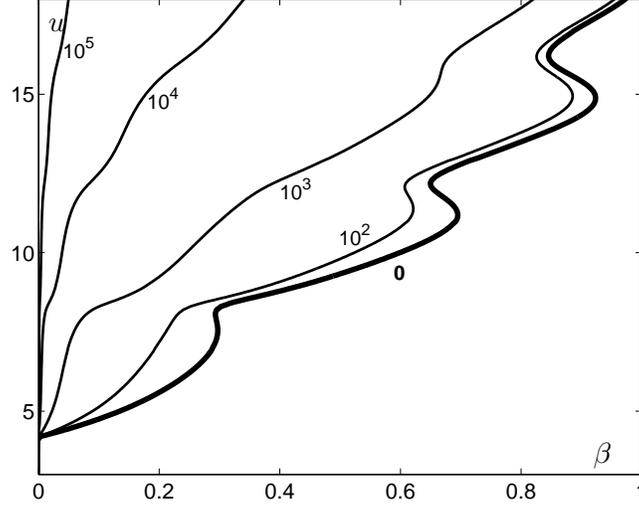


FIG. 3.3: Courbes de stabilité globale du tuyau encasté-libre dans le plan  $(\beta, u)$  pour différentes valeurs de la fondation élastique  $s$ .

## 3.2 Propriétés locales de stabilité

### 3.2.1 Relation de dispersion

Pour l'approche locale nous devons une fois de plus nous affranchir de la longueur du système dans nos adimensionnements. Aussi introduisons-nous la longueur caractéristique basée sur le rapport entre la rigidité en flexion du tuyau et la rigidité de rappel de la fondation élastique

$$\eta = \frac{EI}{S^{1/4}}. \quad (3.5)$$

Nous avons ainsi

$$x = X/\eta, \quad y = Y/\eta, \quad t = (S/(\rho A + m))^{1/2}T, \\ v = U(\rho A)^{1/2}/(SEI)^{1/4}, \quad \beta = \rho A/(\rho A + m), \quad l = L/\eta, \quad f = F/(S^3 EI)^{1/4}. \quad (3.6)$$

Cet adimensionnement sera celui utilisé tout au long de ce chapitre. L'équation du mouvement devient alors

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta}v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + y = f(x, t). \quad (3.7)$$

La relation de dispersion linéaire du tuyau sur fondations élastiques est alors

$$D(k, \omega, v, \beta)y(\omega, k) = \left[ k^4 - v^2 k^2 + 2\sqrt{\beta}vk\omega - \omega^2 + 1 \right] y(\omega, k) = \phi(\omega, k). \quad (3.8)$$

La longueur  $\eta$  est une longueur caractéristique apparaissant lorsque l'on force le tuyau sans écoulement par une force unitaire  $F(X, T) = \delta(X)$ , ce que nous nous proposons de faire apparaître. L'équation dimensionnelle qui entre en jeu est

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} + SY = F(X, T). \quad (3.9)$$

La discontinuité imposée par le forçage sur les efforts tranchants en  $X = 0$  est  $EI \left[ \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} \right] = 1$ . En considérant les solutions particulières de la forme  $Y(X) = e^{\lambda X}$ , nous obtenons

$$EI\lambda^4 + S = 0. \quad (3.10)$$

La déformée statique apparaissant est donc une superposition des quatre solutions de (3.10),  $A_1 e^{\lambda_1 X} + A_2 e^{\lambda_2 X} + A_3 e^{\lambda_3 X} + A_4 e^{\lambda_4 X}$  qui doit satisfaire la continuité de la déformée  $Y$  et de ses deux premières dérivées en  $X = 0$ , la discontinuité des efforts tranchants et être bornée pour  $X \rightarrow \pm\infty$ . La déformée statique apparaissant lorsqu'on force le tuyau sans écoulement par une force unitaire est donc

$$Y(X) = e^{-|X|/\eta} \cos\left(2\pi \frac{X}{\eta}\right), \quad (3.11)$$

dans laquelle on voit apparaître la longueur caractéristique  $\eta$ . Notons que dans le cadre d'une éventuelle expérience, cette longueur caractéristique est simple à mettre en évidence.

### 3.2.2 Instabilité locale

Le système est localement stable si  $\text{Im}[\omega(k)] < 0, \forall k \in \mathbb{R}$ . Nous tirons directement de (3.8) l'expression de la pulsation  $\omega$  en fonction du nombre d'onde  $k$ ,

$$\omega = \sqrt{\beta}vk \pm \sqrt{v^2 k^2 (\beta - 1) + k^4 + 1}. \quad (3.12)$$

D'où nous tirons aisément de critère de stabilité locale, initialement trouvé par Roth [45]. Le tuyau est localement instable si

$$v > v_i = \sqrt{\frac{2}{1 - \beta}}. \quad (3.13)$$

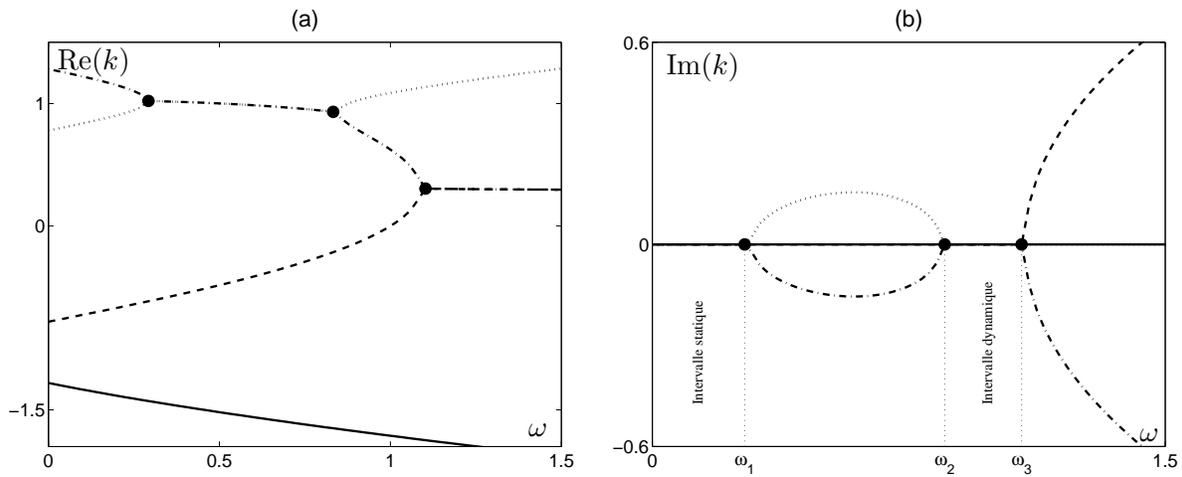


FIG. 3.4: Nombre d'onde en fonction  $\omega$  pour  $\beta = 0.15$ ,  $v = 1.5$  (a) Partie réelle de  $k$ , (b) Partie imaginaire de  $k$ ;  $\bullet$ , lieu d'une racine double de la relation de dispersion.

### 3.2.3 Instabilités absolue et convective

Par une analyse de la pulsation absolue  $\omega_0$ , définie en (1.17), il a été démontré que la vitesse critique de transition entre instabilités absolue et convective  $v_{ac}$  est

$$v_{ac} = \left( \frac{12\beta}{8/9 - \beta} \right)^{1/4}. \quad (3.14)$$

Si  $v > v_i$  et  $v > v_{ac}$ , l'instabilité est absolue. Si  $v > v_i$  et  $v < v_{ac}$ , l'instabilité est convective. Il a été de plus remarqué qu'à la transition  $v = v_{ac}$ , il existe une racine triple de la relation de dispersion en  $\omega_0$ .

### 3.2.4 Distinction entre neutralité et évanescence

Attardons nous maintenant sur les propriétés des ondes dans la région stable de l'espace des paramètres. La figure 3.4 présente l'évolution des nombres d'ondes  $k_{1,2}^+$  et  $k_{1,2}^-$  associés à un nombre d'onde  $\omega$  réel dans une situation localement stable ( $\beta = 0.15$ ,  $v = 1.5$ ). On distingue deux intervalles de fréquences,  $[0, \omega_1]$  et  $[\omega_2, \omega_3]$ , pour lesquelles les quatre nombres d'onde associés sont tous réels. C'est à dire que les ondes générées par un forçage à ces fréquences sont toutes neutres. On remarque de plus que les trois pulsations  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  sont des fréquences pour lesquelles il existe un nombre d'onde qui est racine double de la relation de dispersion. Dans les autres intervalles de fréquences il y a toujours une onde amont et une onde aval qui sont évanescentes. Un des intervalles d'ondes neutres contient la fréquence nulle et nous l'appellerons désormais *l'intervalle statique* tandis que l'autre sera appelé *l'intervalle dynamique*. L'intervalle statique apparaît lorsque  $\omega_1 = 0$ , c'est à dire lorsqu'il existe une racine double de la relation de

dispersion à la pulsation nulle. Posons donc  $\omega = 0$  dans la relation de dispersion (3.8),

$$D(k, 0, \beta, v_s) = k^4 - v_s^2 k^2 + 1 = 0. \quad (3.15)$$

Nous cherchons une racine double, la dérivée de cette dernière équation doit donc aussi être nulle,

$$\left. \frac{\partial D(k, \omega, \beta, v_s)}{\partial k} \right|_{\omega=0} = 4k^3 - 2v_s^2 k^2 = 0. \quad (3.16)$$

Ce qui donne,

$$v_s = \sqrt{2}. \quad (3.17)$$

Si  $v > v_s$ , il existe un intervalle de pulsations  $[0, \omega_1]$  dans lequel toutes les ondes sont neutres. Quant à l'intervalle dynamique, il est borné par deux fréquences pour lesquelles il existe une racine double de la relation de dispersion. A l'apparition de cet intervalle, la pulsation  $\omega_2 = \omega_3$  est donc le lieu d'une racine triple de la relation de dispersion, soit l'extension du critère de l'équation (3.14) à la zone stable de l'espace des paramètres. Finalement, si  $v_{ac} < v < v_i$ , alors il existe un intervalle de fréquences réelles, appelé intervalle dynamique, dans lequel toutes les ondes engendrées sont neutres.

### 3.2.5 Bilan des critères locaux

Nous pouvons finalement résumer la réponse du tuyau infini sur fondation élastique à un forçage harmonique à une fréquence réelle en distinguant plusieurs domaines dans l'espace des paramètres  $(\beta, v)$ . Les différents domaines identifiés sont représentés dans l'espace des paramètres  $(\beta, v)$  sur la figure 3.5.

– Si

$$v < \sqrt{2} \text{ et } v < \left( \frac{12\beta}{8/9 - \beta} \right)^{\frac{1}{4}},$$

des ondes évanescentes sont générées à toutes les fréquences de forçage. Ce domaine sera désormais qualifié d'*Evanescent* (E sur la figure 3.5).

– Si

$$v > \sqrt{\frac{2}{1-\beta}} \text{ et } v > \left( \frac{12\beta}{8/9 - \beta} \right)^{\frac{1}{4}},$$

la réponse à tout forçage est dominée par la fréquence absolue  $\omega_0$ . Il s'agit du domaine d'*Intabilité absolue* (AI sur la figure 3.5).

– Si

$$v > \sqrt{\frac{2}{1-\beta}} \text{ et } v < \left( \frac{12\beta}{8/9 - \beta} \right)^{\frac{1}{4}},$$

il existe un intervalle de fréquences de forçage pour lequel des ondes spatialement amplifiées sont générées. Il s'agit du domaine d'*Instabilité convective* (CI sur la figure 3.5).

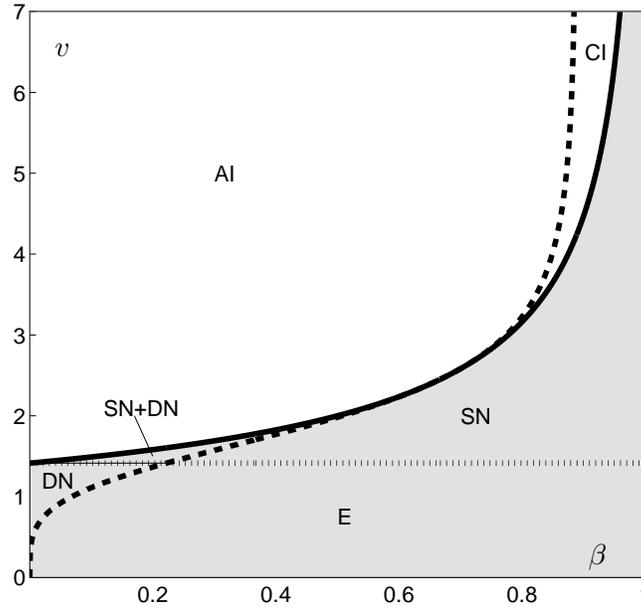


FIG. 3.5: Propriétés des ondes dans la conduite sur fondations élastiques de longueur infinie, —, critère de stabilité locale, equation (3.13); ----, critère de transition entre les instabilités absolue et convective dans le domaine de stabilité locale et d’existence de l’intervalle dynamique dans le domaine de stabilité locale, equation (3.14); +++++, critère d’existence de l’intervalle statique, equation (3.17). E, evanescence; DN, neutralité dynamique; SN, neutralité statique; CI, instabilité convective; AI, instabilité absolue; region grisée, stabilité locale.

- Dans le domaine restant, aucune onde amplifiée n’est générée, quelle que soit la fréquence de forçage. Il existe cependant des intervalles de fréquences pour lesquelles quatre ondes neutres sont générées. Si il s’agit de l’intervalle statique, on parle de *Neutralité statique*, si il s’agit de l’intervalle dynamique, on parle de *Neutralité dynamique* (SN et DN sur la figure 3.5).

### 3.3 Confrontation des critères locaux et globaux

Considérons maintenant un tuyau de longueur finie,  $L$ . Exprimée dans les nouvelles grandeurs adimensionnelles de l’équation (3.6), la longueur du tuyau est

$$l = L \left( \frac{S}{EI} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (3.18)$$

L’augmentation de la longueur du tuyau est donc ici équivalente à l’augmentation de la raideur de la fondation élastique [21]. Nous avons les relations suivantes entre les deux jeux de paramètres adimensionnels :

$$s = l^4, \quad u = lv. \quad (3.19)$$

### 3.3.1 Critères statiques

Nous pouvons exprimer les critères de stabilité de la conduite sur appuis simples à l'aide de ces nouvelles grandeurs, la vitesse critique est alors

$$v_c = \frac{N\pi}{l} \left[ 1 + \left( \frac{l}{N\pi} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.20)$$

où  $N$  est le plus petit nombre entier satisfaisant  $N^2(N+1)^2 \geq (l/\pi)^4$ . Pour le tuyau encastré, cela donne

$$v_c = \frac{2\pi}{l} \left[ 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{l}{\pi} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad v_c = \frac{\pi}{l} \left[ \frac{N^4 + 6N^2 + 1 + (l/\pi)^4}{N^2 + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

pour  $l^4 \leq (84/11)\pi^4$  ou  $l^4 \geq (84/11)\pi^4$  respectivement, en utilisant  $N^4 + 2N^3 + 3N^2 + 2N + 6 \geq (l/\pi)^4$ .

Timoshenko [48], dans le cas du flambage des poutres sur fondations élastiques soumises à une compression axiale, a déjà remarqué que la compression critique de flambage devient indépendante des conditions aux limites lorsque la longueur tend vers l'infini. Dans ce problème, la compression joue un rôle équivalent à l'écoulement fluide lorsque  $\beta = 0$ . Nous savons de plus que le flambage du tuyau sur fondations élastiques est indépendant de  $\beta$ . Nous en déduisons que les vitesses critiques des tuyaux se déstabilisant par flambage ont la même limite  $v_\infty$  lorsque la longueur tend vers l'infini. Nous avons en effet

$$v_\infty = \sqrt{2}. \quad (3.22)$$

Cette limite correspond de plus au critère d'existence d'ondes neutres à la fréquence nulle (3.17).

Il a déjà été observé [42, p. 102] qu'à l'apparition de l'instabilité de flambage du tuyau, les nombres d'ondes associés à la pulsation nulle sont tous réels. L'existence de quatre ondes neutres est donc une condition nécessaire à la construction du mode de flambage instable. Ceci est cohérent avec le fait que pour  $l \rightarrow \infty$ , le système devienne instable par flambage dès qu'il y a quatre ondes neutres à la fréquence nulle. Ce résultat est illustré sur la figure 3.6(a), sur laquelle les courbes d'instabilité statique des tuyaux encastré-encastré et appuyé-appuyé pour différentes valeurs de la longueur sont représentées dans le plan des paramètres  $(\beta, v)$ . Ces courbes tendent vers la courbe  $v = \sqrt{2}$ . Enfin, la courbe 3.6(b) illustre l'influence des propriétés locales sur l'instabilité globale de flambage. Dans la région grisée, les ondes associées à la pulsation nulle sont évanescentes, ce qui interdit l'existence d'un mode propre global et assure la stabilité globale.

### 3.3.2 Critères dynamiques

De la même manière, comparons la vitesse critique d'instabilité du tuyau encastré-libre avec le critère d'existence de l'intervalle dynamique. Sur la figure 3.7a sont représentées les courbes

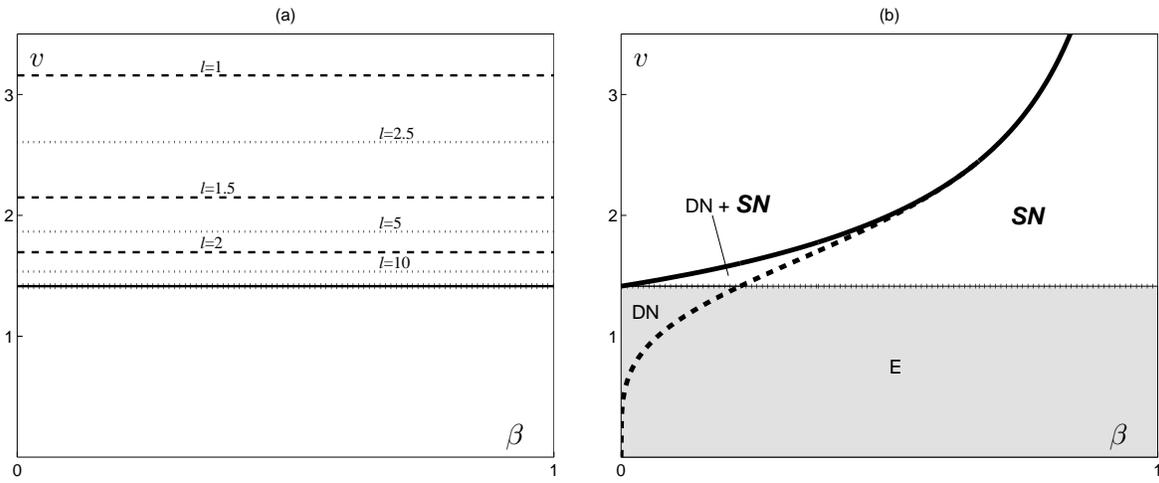


FIG. 3.6: (a) : Vitesses critiques du tuyau sur appuis simples (---) et encastré-encasté (.....) pour différentes longueurs. La ligne en gras représente le critère asymptotique de stabilité de l'équation (3.22). (b) : Vue schématique des propriétés locales de propagation des ondes. Dans la région grisée, il existe des ondes évanescentes à  $\omega = 0$ .

de stabilité marginale du tuyau encastré-libre ainsi que le critère d'existence de l'intervalle dynamique d'ondes neutres. Et comme cela apparaît sur la figure 3.7b, aux grandes longueurs, l'instabilité dynamique du tuyau survient dès qu'il existe un intervalle de fréquences réelles non-nulles pour lesquelles quatre ondes neutres se développent. Enfin, la figure 3.8 compare la pulsation critique pour  $l = 10$  en fonction de  $\beta$  avec l'intervalle dynamique (région grisée). Il apparaît clairement sur cette figure que la pulsation critique globale est toujours une pulsation pour laquelle les quatre ondes associées sont neutres.

### 3.3.3 Interprétation des résultats

Le système du tuyau sur fondations élastiques est donc un système pour lequel le critère d'instabilité aux grandes longueurs est un critère local d'existence d'ondes neutres à certaines fréquences. Pour les jeux de conditions aux limites pour lesquels l'instabilité est de type flambage, l'instabilité survient dès qu'il y a quatre ondes neutres à la fréquence nulle, tandis que pour le tuyau encastré-libre, l'instabilité survient dès qu'il existe quatre ondes neutres dans un intervalle de fréquences réelles non-nulles.

Dans le précédent chapitre nous avons observé que l'instabilité globale pouvait entre autres apparaître dans un intervalle d'ondes neutres. Ceci concerne le seuil d'apparition de l'instabilité, pour lequel la pulsation propre globale d'instabilité est réelle. Juste au dessus du seuil, la pulsation propre globale a une partie imaginaire positive et les nombres d'ondes, initialement tous réels, voient leur partie imaginaire devenir non-nulle. Puisque le système est stable, nous ne pouvons pas avoir affaire à des ondes amplifiées, comme cela a pu être le cas dans le chapitre

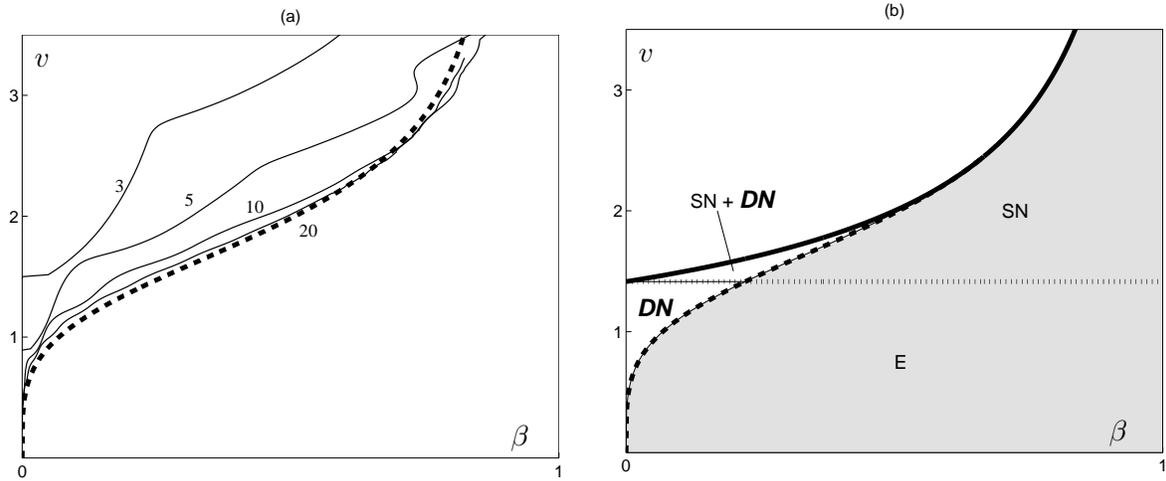


FIG. 3.7: (a) : Vitesses critiques du tuyau encastré-libre pour différentes valeurs de la longueur. La ligne en pointillés gras représente le critère asymptotique d'instabilité du tuyau encastré-libre, équation (3.14) ; (b) : Vue schématique des propriétés locales des ondes propagatives. Dans la région grisée, l'intervalle dynamique d'ondes neutres n'existe pas.

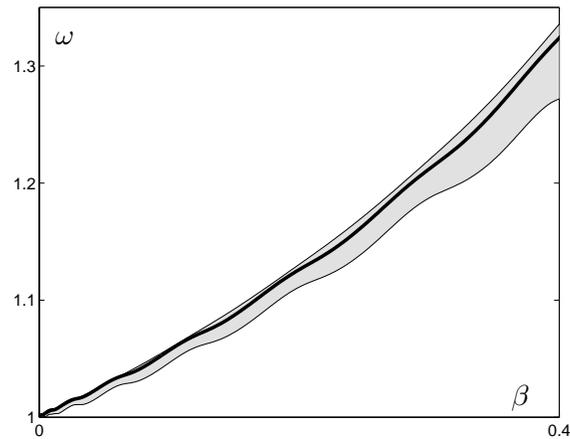


FIG. 3.8: Comparaison entre la fréquence critique et l'intervalle dynamique, —, fréquence critique du tuyau encastré-libre sur fondations élastiques ; région grisée, intervalle dynamique.

précédent. Dans le cas du tuyau sur fondation élastique, les ondes sont donc toutes évanescentes. Dans la même situation, nous avons conclu au chapitre précédent que le mode instable ne peut exister que grâce à un gain par les réflexions d'onde aux conditions aux limites.

Que dit le critère de Kulikovskii dans le cas du tuyau sur fondation élastique ? Nous pouvons directement prédire des propriétés des branches spatiales que les intervalles dynamique et statique sont des intervalles continus de pulsations propres globales du système de longueur infinie, puisque les nombres d'ondes associés satisfont le critère de Kulikovskii. Le système est alors marginalement stable à la limite  $l \rightarrow \infty$ . La figure 3.9 montre que cela n'est pas en contradiction avec nos résultats. En effet, nous y observons l'évolution en fonction de  $l$  de la partie imaginaire de la pulsation propre globale la plus instable  $\omega_m$  du tuyau encastré libre pour deux combinaisons des paramètres  $\beta$  et  $v$ . Pour le premier jeu de paramètres, le système est localement neutre ; l'intervalle dynamique existe. A partir de  $l \simeq 10.9$  le taux de croissance associé à la pulsation propre globale la plus instable devient positif et l'instabilité apparaît. Il passe alors par un maximum pour  $l \simeq 13.6$  décroît vers 0 pour  $l \rightarrow \infty$ . Ceci est cohérent avec le critère de Kulikovskii, qui prédit que le système est globalement marginalement instable à  $l \rightarrow \infty$ . Pour la deuxième combinaison de paramètres, le système est convectivement instable. Il apparaît alors que le système se déstabilise pour  $l \simeq 5.5$  et que cette fois le taux de croissance maximal ne tend pas vers 0, mais vers une valeur positive. Cette valeur limite correspond à la pulsation de plus grande partie imaginaire satisfaisant le critère de Kulikovskii. On remarque tout de même que la convergence vers cette asymptote est très lente.

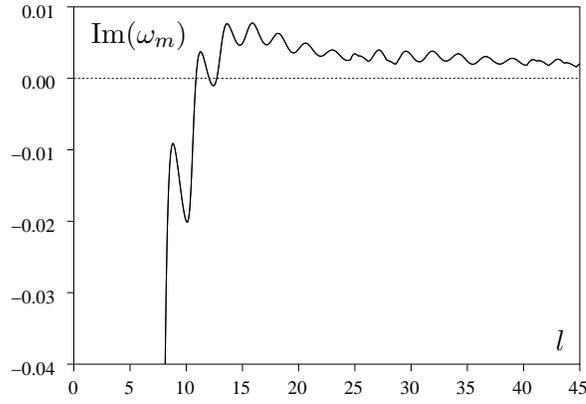
Le critère de Kulikovskii prédit en effet, par des critères locaux indépendants du type de conditions aux limites, l'instabilité ou la stabilité globale à  $l \rightarrow \infty$ . Ces deux exemples montrent cependant que la convergence est très lente et que les propriétés de stabilité à des longueurs intermédiaires peuvent être décrites par un autre critère local, qui est l'existence d'ondes neutres dans un intervalle de fréquences réelles.

### 3.4 Effet de la dissipation

Il paraît légitime de se demander si les résultats que nous venons d'obtenir résistent à l'ajout de dissipation. Il est en effet probable que les intervalles d'ondes neutres n'existent plus et que la stabilité globale soit pilotée par un autre phénomène. Introduisons une dissipation dans le système en considérant les frottements du tuyau avec le fluide extérieur,  $c > 0$ . Il s'agit du terme  $\alpha \frac{\partial y}{\partial t}$  de l'équation (1.3). Dans les adimensionnement basés sur la longueur caractéristique  $\eta$  définie en (3.5), ce terme dissipatif devient  $f \frac{\partial y}{\partial t}$  avec

$$f = \frac{c\eta^2}{[EI(M+m)]^{1/2}}. \quad (3.23)$$

(a)



(b)

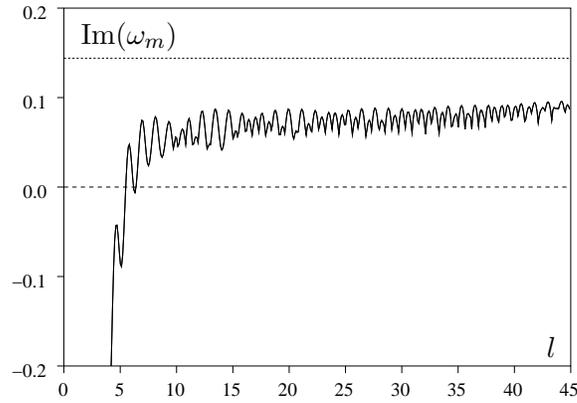


FIG. 3.9: Taux de croissance du mode instable du tuyau encastré-libre sur fondation élastique en fonction de la longueur; (·····), taux de croissance maximal pour  $l = \infty$  prédit par le critère de Kulikovskii; (a),  $\beta = 0.2$ ,  $\nu = 1.5$ ; (b),  $\beta = 0.8$ ,  $\nu = 3.2$ .

### 3.4.1 Effet sur la stabilité locale

Regardons en premier lieu ce que deviennent les deux intervalles d'ondes neutres après l'ajout de la dissipation dans le système. La figure 3.10 présente l'évolution dans le plan complexe  $k$  des branches spatiales après l'ajout de dissipation. Nous représentons sur la figure 3.10a l'évolution des nombres d'ondes  $k_1^+$  et  $k_1^-$  lorsque l'on diminue la partie imaginaire de  $\omega$ , la partie réelle de  $\omega$  étant dans un intervalle comprenant l'intervalle statique. Certains nombres d'ondes sont réels lorsque  $\text{Im}(\omega) = 0$ . Ce sont les nombres d'ondes correspondant aux pulsations de l'intervalle statique. Quant aux nombres d'ondes complexes à  $\text{Im}(\omega) = 0$ , ils correspondent à des ondes évanescentes. Les branches spatiales ont un comportement intéressant lorsqu'on ajoute de la dissipation (figure 3.10b). On observe un pincement des branches  $k_1^+$  et  $k_1^-$ , signe caractéristique

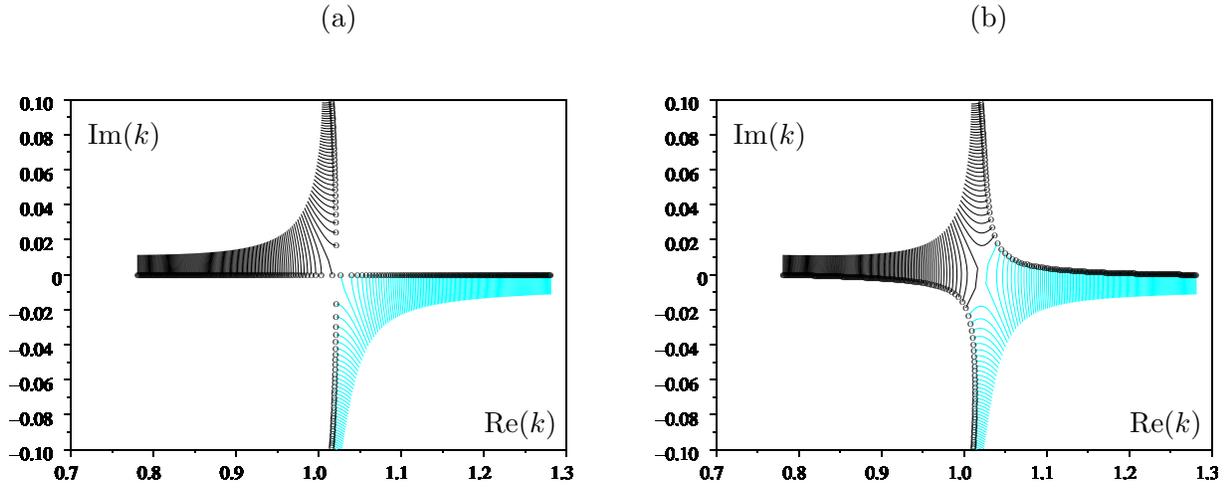


FIG. 3.10: Evolution dans le plan complexe  $k$  des branches spatiales lorsque la partie imaginaire de  $\omega$  est diminuée de 0.2 à 0,  $\text{Re}(\omega) \in [0, 0.36]$  comprenant l'intervalle statique ;  $\beta = 0.15, v = 1.5$  ;  $(\infty\omega)$ , nombres d'onde pour  $\text{Im}(\omega) = 0$  (a),  $f = 0$  ; (b),  $f = 10^{-2}$ .

de l'apparition d'une instabilité absolue. Nous observons donc que l'intervalle statique d'ondes neutres disparaît lorsqu'on ajoute de la dissipation, et qu'une instabilité absolue apparaît.

Sur la figure 3.11 nous faisons la même comparaison pour l'intervalle dynamique d'ondes neutres. En figure 3.11a est représentée l'évolution des nombres d'ondes  $k_1^+$  et  $k_1^-$  lorsque l'on diminue la partie imaginaire de  $\omega$ , la partie réelle de  $\omega$  étant dans un intervalle comprenant l'intervalle dynamique. Nous observons cette fois que les ondes, initialement neutres à  $\text{Im}(\omega) = 0$ , deviennent évanescentes lorsqu'on ajoute la dissipation. C'est ce qui apparaît sur la figure 3.11b. Le comportement des nombres d'ondes  $k_2^+$  et  $k_2^-$ , non représentés, est similaire. Nous concluons donc que l'intervalle dynamique d'ondes neutres devient un intervalle d'ondes évanescentes lorsqu'on ajoute de la dissipation.

Ainsi le critère d'existence de l'intervalle statique devient un critère d'instabilité lorsqu'on ajoute de la dissipation. Ce résultat est cohérent avec le critère d'instabilité établi par Roth [45] ; le tuyau sur fondation élastique avec dissipation est instable si

$$v > \sqrt{2}. \quad (3.24)$$

Puisqu'il apparaît en plus un pincement entre une branche  $k^+$  et une branche  $k^-$ , nous pouvons préciser qu'il s'agit d'une instabilité absolue.

### 3.4.2 Effet sur la stabilité globale

Sur la figure 3.12 sont tracées les vitesses critiques dans le plan  $(\beta, v)$  pour différentes valeurs de  $l$ , et pour  $f = 10^{-2}$ . Nous observons que selon la plage de longueurs, la stabilité globale du tuyau est soit influencée par le critère d'ondes neutres du tuyau sans dissipation, soit influencée par le

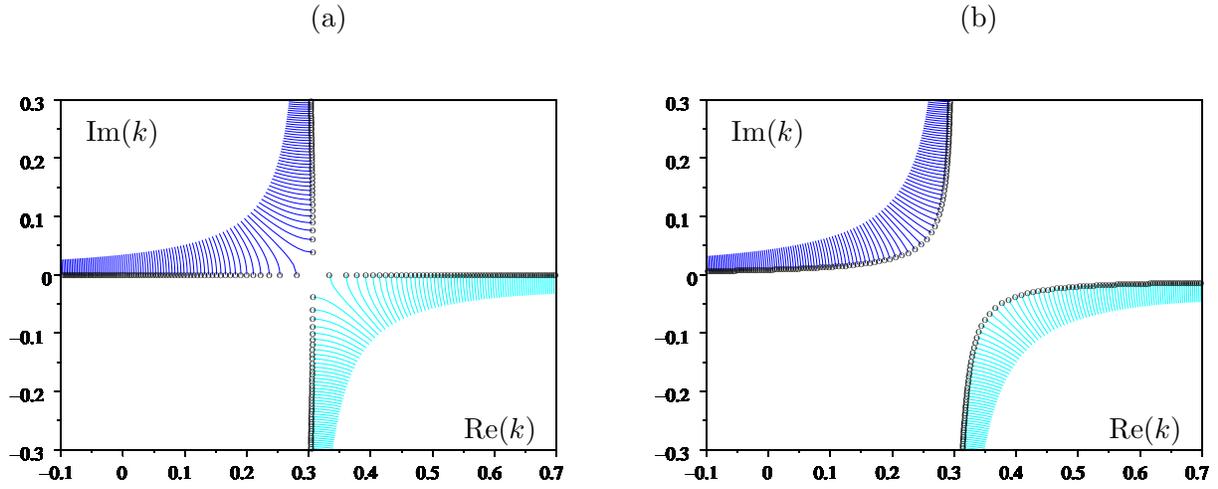


FIG. 3.11: Evolution dans le plan complexe  $k$  des branches spatiales lorsque la partie imaginaire de  $\omega$  est diminuée de 0.2 à 0,  $\text{Re}(\omega) \in [0.8, 1.2]$  comprenant l'intervalle dynamique;  $\beta = 0.15, v = 1.5$ ; ( $\infty$ ), nombres d'onde pour  $\text{Im}(\omega) = 0$ ; (a),  $f = 0$ ; (b),  $f = 10^{-2}$ .

critère de stabilité locale du tuyau avec dissipation. Pour  $\beta < 2/9$ , aux faibles longueurs, le critère d'instabilité globale est encore dans la région de neutralité dynamique et tend à s'en éloigner lorsque  $l$  augmente. Notre interprétation de ce phénomène est qu'aux faibles longueurs, l'effet amortissant des ondes évanescentes est encore compensable par un gain des réflexions d'ondes aux conditions aux limites. En revanche, lorsque la longueur augmente, cet effet amortissant est trop important et cette compensation n'est plus possible. La stabilité locale domine. Remarquons que ce phénomène est similaire à la diminution du taux de croissance global observée sur la figure 3.9a.

Pour  $\beta > 2/9$  le système est encore une fois dominé par le critère dynamique d'ondes neutres aux faibles longueurs. Pour ces longueurs le système est absolument instable dès que  $v > \sqrt{2}$  mais l'instabilité absolue ne conduit pas à l'instabilité globale. Cela doit être attribué au confinement, qui ne permet pas l'existence d'un mode global instable aux faibles longueurs. Ainsi ce n'est qu'aux plus grandes longueurs que le critère d'instabilité locale détermine l'instabilité globale.

Dans le cas de l'instabilité dynamique du tuyau encastré-libre nous avons mis en évidence deux comportements instables distincts : aux longueurs faibles, l'instabilité est similaire au cas conservatif et l'instabilité est pilotée par les réflexions d'ondes. Aux grandes longueurs, l'effet des ondes évanescentes est trop important pour permettre aux réflexions d'onde de piloter l'instabilité. En revanche cette fois, c'est l'instabilité absolue qui pilote l'instabilité.

### 3.5 Conclusion

Suite aux résultats du précédent chapitre, nous avons entrepris de présenter un système pouvant être stable et présenter des intervalles de fréquences réelles générant uniquement des ondes

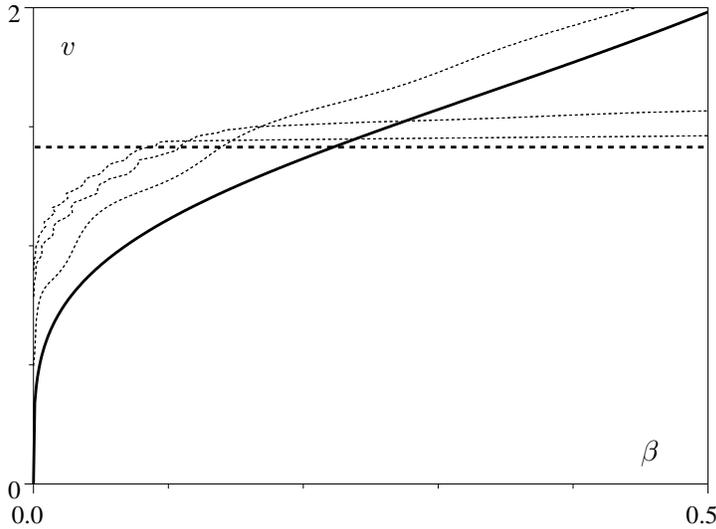


FIG. 3.12: Comparaison dans le plan  $(\beta, v)$  des propriétés de stabilité globale et globale d'un tuyau encastré-libre sur fondations élastiques en présence de dissipation,  $f = 10^{-2}$ , pour différentes longueurs; (—), critère d'existence de l'intervalle dynamique lorsque  $f = 0$ .; (---), critère de stabilité locale lorsque  $f > 0$ ; ( $\cdots$ ), courbes de stabilité globale pour  $l = 10, 30, 50$ .

neutres, ceci afin d'éventuellement exhiber un système localement stable et globalement instable. Le système du tuyau sur fondation élastique présente deux intervalles d'ondes neutres; l'un apparaît à la fréquence nulle et est qualifié d'intervalle statique, l'autre apparaît à une fréquence non nulle et est qualifié d'intervalle dynamique. Nous avons alors établi que le critère d'instabilité globale aux grandes longueurs est précisément le critère d'existence de l'intervalle statique pour les jeux de conditions aux limites conduisant à l'instabilité globale statique et l'intervalle dynamique pour le tuyau encastré-libre, dont l'instabilité globale est dynamique. Le même type d'analyse qu'au précédent chapitre nous permet d'affirmer que dans ce cas l'instabilité est causée par un gain par les réflexions d'ondes aux extrémités. Ce résultat peut être confirmé de manière intuitive en remarquant qu'aux pulsations propres globales instables, les ondes dans le milieu sont toutes évanescentes et il est nécessaire d'avoir un gain aux conditions aux limites pour compenser l'amortissement de leur propagation. Remarquons aussi que ce résultat ne peut être prédit par le critère de Kulikovskii, qui lui ne prend en considération que les équations locales du milieu.

L'influence de la dissipation a ensuite été étudiée. Dès l'ajout de dissipation, les intervalles d'ondes neutres disparaissent. Les ondes de l'intervalle statique sont déstabilisées et conduisent à une instabilité absolue, tandis que les ondes de l'intervalle dynamique sont stabilisées et deviennent évanescentes, si bien que le critère de stabilité locale du tuyau avec dissipation devient le critère d'existence de l'intervalle statique du tuyau sans dissipation, soit  $v = \sqrt{2}$ . Il apparaît

alors que lorsque le critère de stabilité globale du tuyau dont la longueur tend vers l'infini est égal au critère de stabilité locale. Les résultats obtenus dans le cas conservatif ne résistent donc pas à l'ajout de dissipation. Nous avons en revanche observé pour le tuyau encastré-libre, qu'aux longueurs intermédiaires, l'instabilité globale peut encore être influencée par le critère dynamique d'ondes neutres du cas conservatif. Nous expliquons cela par le fait qu'à ces longueurs, un gain aux conditions aux limites peut encore compenser l'amortissement des ondes faiblement évanescentes dans l'intervalle dynamique.

Il serait intéressant, pour compléter ce travail, de faire le rapprochement entre nos résultats quant à la déstabilisation des ondes neutres par la dissipation et ceux de précédents auteurs [10, 11, 16, 43]. Ceux-ci ont mis en évidence que ce comportement particulier peut être prédit par le signe de l'énergie des ondes neutres. Il a en effet été démontré qu'une onde d'énergie négative est déstabilisée par l'ajout de dissipation. Une onde d'énergie négative peut être vue comme une onde dont la création implique une perte d'énergie dans le système.

Nous pouvons une fois de plus nous interroger sur le caractère général que peuvent présenter nos résultats. En effet, l'existence d'un intervalle d'ondes neutres est une condition nécessaire à l'instabilité globale du tuyau sur fondation élastique de grande longueur et son existence ou non doit être déterminante dans la stabilité globale d'autres systèmes de grande longueur. Nous ne savons pas si dans d'autres systèmes en interaction fluide-structure il existe des intervalles de fréquences pour lesquels toutes les ondes sont neutres. Pour les systèmes hydroélastiques conservatifs, la transition absolu/convectif et l'apparition d'un intervalle d'ondes neutres est liée à l'existence d'une racine triple de la relation de dispersion. Ainsi, tout système dont le critère de transition absolu/convectif, déterminé par un critère de racine triple, se prolonge dans une région stable de l'espace des paramètres possède un intervalle d'ondes neutres à la stabilité locale. Il est donc permis pour ces systèmes d'observer la stabilité locale en même temps que l'instabilité globale. Dans le cas de l'écoulement dans un canal élastique [30, 36, 17], de même que dans le cas d'un tuyau en tension [20], le critère de transition absolu/convectif se trouve uniquement dans le domaine d'instabilité de l'espace des paramètres. Même si cela n'exclut pas l'existence d'intervalles d'ondes neutres, il n'est pas possible de prévoir directement leur existence par ce critère et une nouvelle analyse de la relation de dispersion est nécessaire.

-----



## Chapitre 4

# Instabilités locales et globales d'un tuyau suspendu

Nous étudions dans ce chapitre le cas du tuyau suspendu verticalement. De la même manière que dans les chapitres précédents, l'effet de la longueur sur la stabilité du système est analysée. Ce système présente cependant une caractéristique très différente de ceux étudiés précédemment. Celui-ci est, du fait de l'effet de la gravité, sujet à une tension variable. La tension en un point du tuyau, causée par le poids de tuyau situé en dessous, varie linéairement de zéro, en bas, au poids total du tuyau pour l'extrémité supérieure.

L'analyse locale de ce système va donc être dépendante de la position considérée, le paramètre de tension étant variable. Le lien local-global de ce système particulier va donc être mis en confrontation avec de précédentes études de systèmes non homogènes, en particulier des systèmes hydrodynamiques.

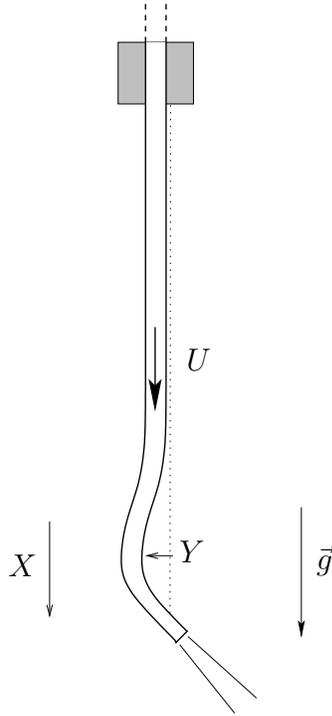


FIG. 4.1: Vue schématique du tuyau suspendu conduisant un fluide

## 4.1 Expériences d'instabilités globales

Païdoussis [41] a effectué des mesures des vitesses critiques sur un tuyau suspendu dans le but d'étudier l'effet de la gravité sur la stabilité du tuyau. Des calculs numériques de type Galerkin ont aussi été effectués et l'effet stabilisant de la gravité a été mis en évidence. Les longueurs considérées dans le travail de Païdoussis sont cependant faibles et une étude préliminaire [44, 19] a montré qu'aux longueurs supérieures à celles explorées par les précédents travaux, un comportement différent apparaît. Ceci nous a amené à réaliser des essais sur des tuyaux de plus grande longueur.

### 4.1.1 Mesures de vitesses critiques

Les expériences ont été effectuées sur cinq tuyaux différents, dont les propriétés sont récapitulées dans le tableau 4.2. Les tuyaux, dont une vue schématique apparaît en figure 4.1, sont suspendus à une potence. Une pince à hauteur réglable permet de faire varier la position de l'encastrement et par conséquent la longueur du tuyau encasturé-libre. Le tuyau est alimenté par l'eau courante. Le débit est mesuré à l'aide d'un débit-mètre à bille, qui est moins précis que le couple chronomètre/doseur mais permet une mesure instantanée, ce qui est un avantage, considérant l'irrégularité du débit de l'eau courante. Ainsi pour chaque tuyau, et pour une large plage de longueurs, la vitesse critique est mesurée. Le protocole est le suivant : le débit  $Q$  est progres-

Tuyau	$EI$ (N.m <sup>2</sup> )	$D$ (m)	$m$ (Kg.m <sup>-1</sup> )	$M$ (Kg.m <sup>-1</sup> )	$\beta$
1	9.9E-4	4E-3	4.56E-2	1.26E-2	0.22
2	8.16E-4	3.2E-3	2.18E-2	8E-3	0.27
3	1.0E-3	5E-3	4.22E-2	1.96E-2	0.32
4	2.2E-4	4E-3	1.72E-2	1.26E-2	0.42
5	1.55E-4	4E-3	1.51E-2	1.26E-2	0.45
6	2E-3	5E-3	7.1E-2	1.96E-2	0.22

FIG. 4.2: Caractéristiques des tuyaux utilisés au cours des expériences. Les tuyaux 1 à 5 se rapportent à l'expérience décrite sur la figure 4.1 tandis que le tuyau 6 est celui de la figure 4.6.

sivement augmenté depuis 0 jusqu'au débit critique  $Q_c$  auquel apparaissent les oscillations. La vitesse critique est alors  $U_c = 4Q_c/\pi D^2$ . Les oscillations s'amplifient jusqu'à une saturation non-linéaire, et leur fréquence est mesurée soit à l'aide d'un chronomètre, soit à l'aide d'un stroboscope. Nous observons, à l'instar des précédents travaux [42], que lorsque l'on réduit la vitesse de l'écoulement, la vitesse pour laquelle les oscillations s'arrêtent est inférieure à la vitesse d'apparition de l'instabilité. Cet hystérésis est dû aux non-linéarités présentes dans le système réel, qui n'apparaissent pas dans les équations du mouvement. Puisque dans toute notre étude, nous nous intéressons au seuil linéaire d'apparition de l'instabilité, nous ne tenons compte que de la première vitesse mesurée (la plus grande des deux). Il faut cependant remarquer que la fréquence des oscillations que l'on mesure est la fréquence correspondant à un cycle limite non linéaire, non décrit par les équations linéaires. Il a cependant été remarqué que cette fréquence est très proche de la fréquence linéaire à l'apparition des oscillations [42].

La figure 4.3 présente nos résultats expérimentaux pour les tuyaux 1 à 5 du tableau 4.2. Sur cette figure sont aussi représentés les résultats expérimentaux des précédents travaux pour des rapports de masse  $\beta$  équivalents à ceux de nos expériences. Sur la figure 4.3a, la vitesse critique est tracée en fonction de  $\gamma^{1/3}$ . Nous utilisons les adimensionnements classiques [41] ayant pour longueur de référence la longueur du tuyau, définis en équation (1.2). Nous les rappelons ici,

$$u = UL \left( \frac{M}{EI} \right)^{1/2}, \quad \Omega = 2\pi FL^2 \left( \frac{M+m}{EI} \right)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{(M+m)gL^3}{EI}. \quad (4.1)$$

Quant à la figure 4.3b, nous y traçons la vitesse critique en fonction de la longueur adimensionnelle, en utilisant une longueur de référence basée sur le rapport entre la rigidité en flexion et la force de gravité par unité de longueur, soit

$$\eta = \left( \frac{EI}{(M+m)g} \right)^{1/3}. \quad (4.2)$$

Les paramètres adimensionnels deviennent alors ;

$$v = U\eta \left( \frac{M}{EI} \right)^{1/2}, \quad \omega = 2\pi F\eta^2 \left( \frac{M+m}{EI} \right)^{1/2}, \quad l = L/\eta, \quad (4.3)$$

et nous avons la relation suivante entre les deux ensembles de paramètres,

$$v = u\gamma^{-1/3}, \quad \omega = \Omega\gamma^{-2/3}, \quad l = \gamma^{1/3}. \quad (4.4)$$

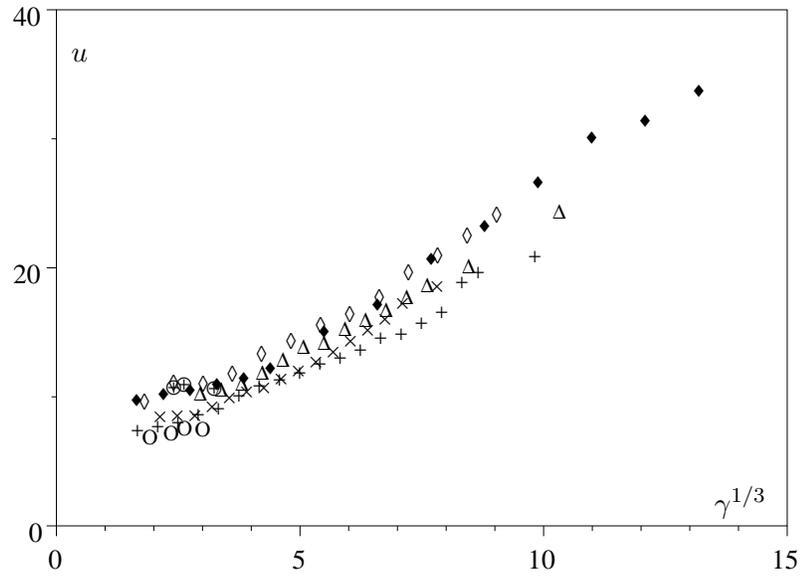
La vitesse adimensionnelle  $u$  est définie indépendamment de la gravité  $g$ . La figure 4.3a montre que l'augmentation de la gravité, au travers de l'augmentation de  $\gamma$ , fait augmenter la vitesse critique  $u_c$ . Cela met en évidence le fait qu'une augmentation de la gravité, toutes choses égales par ailleurs, retarde l'instabilité et a donc un effet stabilisant. En revanche, la vitesse adimensionnelle  $v$  est basée sur une échelle de longueur faisant intervenir la gravité, et est indépendante de la longueur du tuyau  $L$ . Il apparaît sur la figure 4.3b qu'une augmentation de la longueur entraîne une diminution de la vitesse critique  $v$ . Cela signifie que la longueur a un effet déstabilisant sur le tuyau suspendu. Nous observons cependant qu'à partir d'une certaine longueur, la vitesse critique ne diminue plus et atteint une asymptote, qui semble dépendre du rapport de masse. Les données expérimentales des précédents travaux ne permettaient pas de mettre en évidence ce phénomène.

De la même manière la figure 4.4 représente la pulsation critique d'instabilité. La fréquence critique adimensionnelle  $\Omega$ , représentée en figure 4.4a, est indépendante de la gravité et nous en concluons qu'une augmentation de la gravité entraîne une augmentation de la fréquence critique d'instabilité. Finalement, la pulsation critique adimensionnelle basée sur la gravité est tracée en figure 4.4b en fonction de la longueur adimensionnelle. Il apparaît que la pulsation critique atteint elle aussi une valeur constante à partir d'une certaine longueur.

#### 4.1.2 Mesures des déformées du tuyau

L'expérience présentée maintenant nous permet d'obtenir une mesure temporelle de la déformée globale du tuyau. Les tuyaux utilisés précédemment ne permettent pas une mesure correcte des déformées. En effet, bien que leur courbure naturelle et leurs défauts ne modifient pas de manière conséquente les vitesses critiques et les fréquences critiques, le mouvement instable que nous observons est rarement parfaitement plan et n'est pas observable à l'aide d'une caméra. C'est pourquoi nous avons préparé un type particulier de tuyau, se prêtant mieux à l'observation du mouvement à l'aide d'une caméra. Celui-ci nous a été inspiré par les expériences de Borglund [6]. Il consiste en deux tuyaux fixés de part et d'autre d'une bande de plastique de 15cm de large et 1.20m de long. Ils sont attachés de façon à ce que leurs courbures naturelles soient en opposition. Une représentation schématique en est donnée sur la figure 4.5 et une photographie sur la figure 4.6. Le système particulier ainsi constitué est droit lorsqu'il est au repos et les oscillations se font uniquement dans la direction  $Y$ . Nous plaçons de plus une caméra au dessus,

(a)



(b)

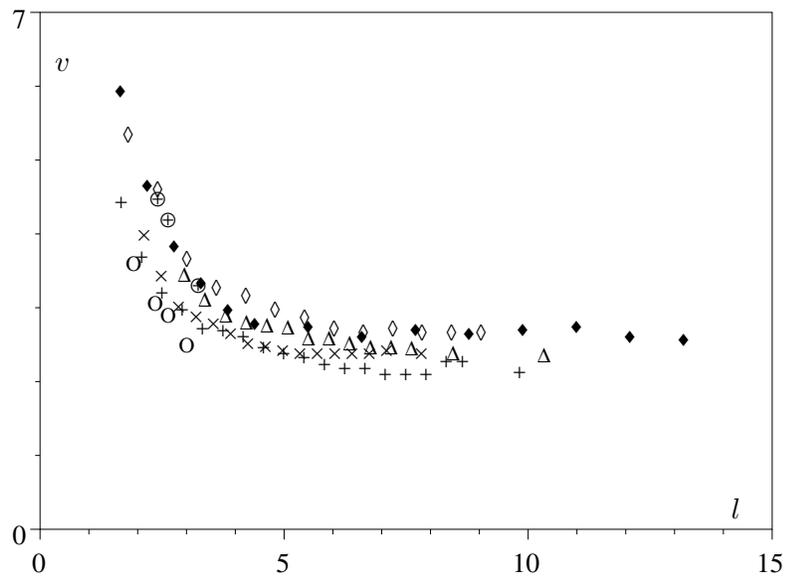
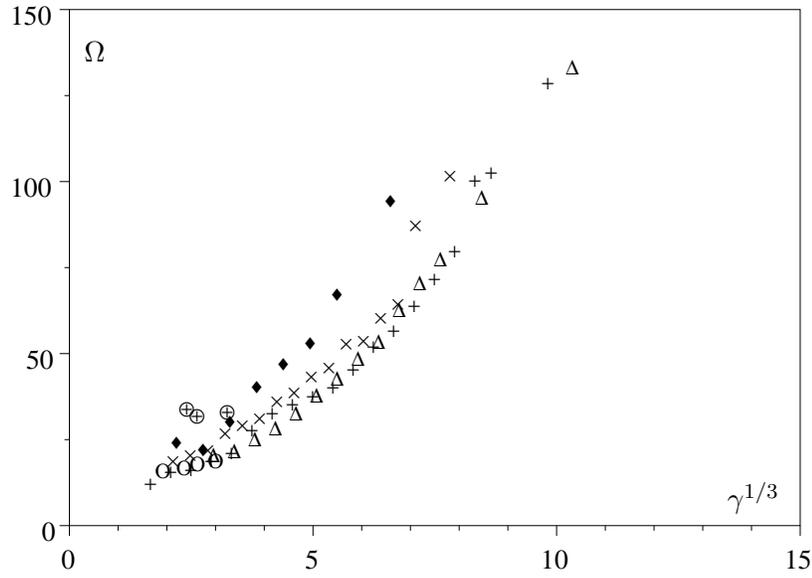


FIG. 4.3: Vitesse critique d'instabilité; (+),  $\beta = 0.22$ ; ( $\times$ ),  $\beta = 0.27$ ; ( $\triangle$ ),  $\beta = 0.32$ ; ( $\blacklozenge$ ),  $\beta = 0.42$ ; ( $\diamond$ ),  $\beta = 0.45$ ; (O), ( $\oplus$ ), données de Gregory et Païdoussis [41] pour respectivement  $\beta = 0.21$  et  $\beta = 0.43$ ; (a), grandeurs adimensionnelles définies avec la longueur du tuyau, (b), grandeurs adimensionnelles définies avec la gravité.

(a)



(b)

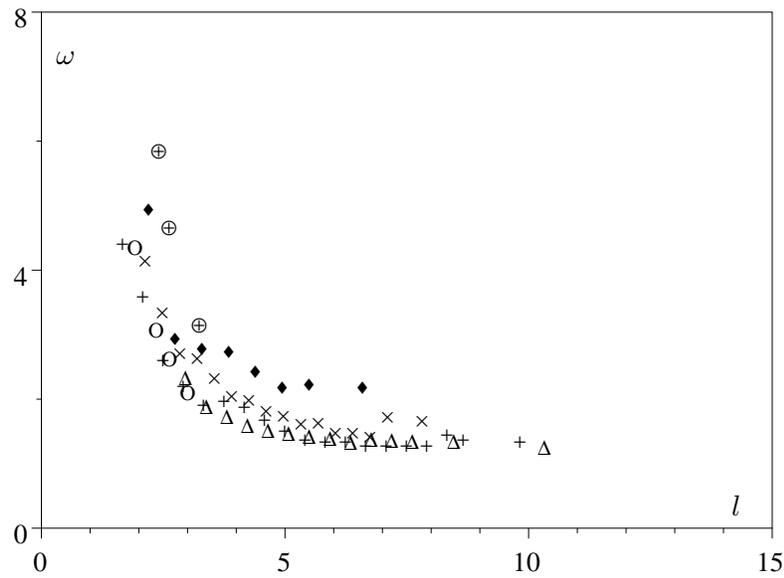


FIG. 4.4: Pulsation critique d'instabilité; (+),  $\beta = 0.22$ ; ( $\times$ ),  $\beta = 0.27$ ; ( $\Delta$ ),  $\beta = 0.32$ ; ( $\blacklozenge$ ),  $\beta = 0.42$ ; ( $\blacklozenge$ ),  $\beta = 0.45$ ; (O), ( $\oplus$ ), données de Gregory et Païdoussis [41] pour respectivement  $\beta = 0.21$  et  $\beta = 0.43$ ; (a), grandeurs adimensionelles définies la longueur du tuyau, (b), grandeurs adimensionelles définies la gravité.

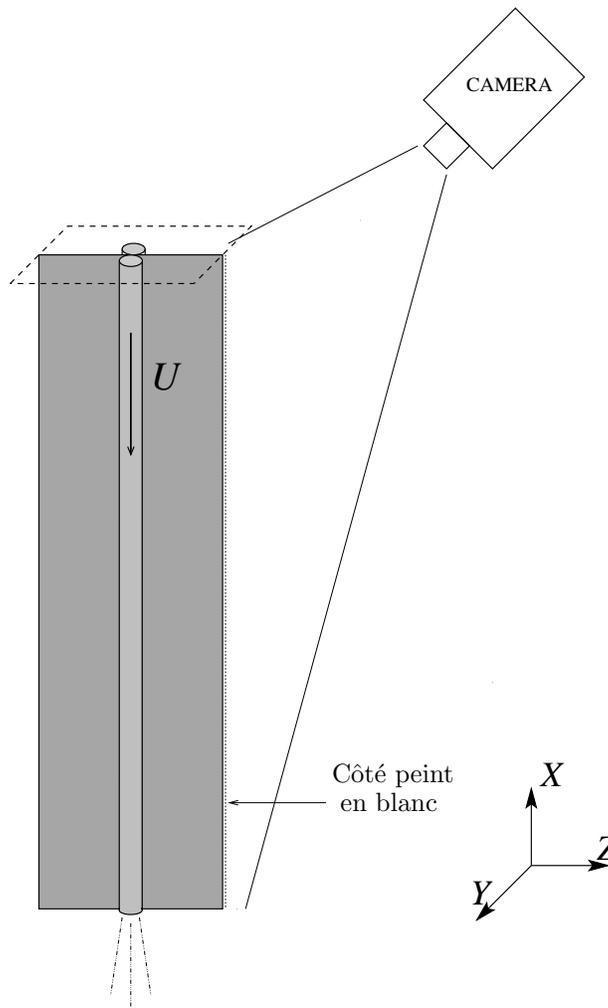


FIG. 4.5: Schéma du système expérimental utilisé pour mesurer la déformation du tuyau

dont l'axe de vision est incliné d'environ  $20^\circ$  par rapport à la verticale. Tout le système est peint en noir sauf la tranche se trouvant face à la caméra. Ainsi, avec un éclairage approprié, l'image obtenue par la caméra est la ligne blanche sur fond noir d'une des tranches de la bande, et correspond à la déformation du tuyau.

Reste alors à tirer de cette image la déformée exacte  $Y(X, T)$  du tuyau. Pour cela une grille de référence composée de carrés de  $10 \times 10$  cm a été préalablement filmée et constitue l'échelle de référence (figure 4.7a). Appelons  $PX$  et  $PY$  les coordonnées de l'image selon  $X$  et  $Y$  respectivement. Sur la figure 4.7b les valeurs de  $X$  sont tracées en fonction de  $PX$ , tandis que sur la figure 4.7c sont tracées les valeurs successives de  $PX$  en fonction de la distance  $\Delta PY$  correspondant à  $\Delta Y = 20$  cm (deux carrés). Une régression cubique est utilisée sur la première courbe et une régression linéaire sur la deuxième, ce qui permet d'obtenir une estimation suffisante de la correspondance entre les coordonnées en pixels et la position dans le plan  $(X, Y)$ , soit pour l'axe des abscisses,

$$X = a_1 PX^3 + a_2 PX^2 + a_3 PX + a_4, \quad (4.5)$$

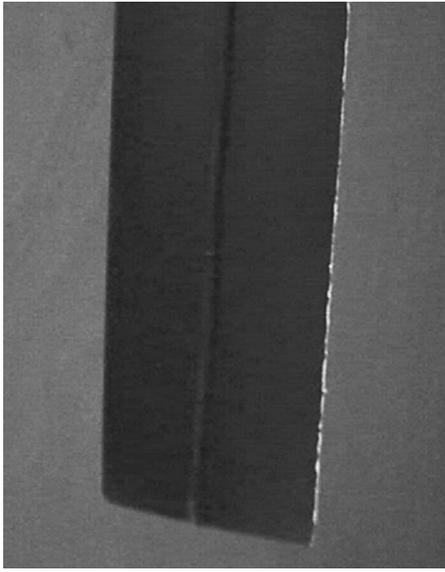


FIG. 4.6: Photographie du bas du système (tuyau+bande)

et pour l'axe des ordonnées,

$$\Delta PY = b_1 PX + b_2. \quad (4.6)$$

Il s'agit ensuite d'identifier, à partir d'une image du tuyau, sa position de façon automatique. Chaque pixel de l'image que nous traitons numériquement est codé sur 8 bits, ce qui correspond à 256 niveaux de gris. Chaque image est donc un tableau de taille  $NX \times NY$ . Un algorithme détermine, pour chaque valeur de  $PX$  sur l'image, la valeur de  $PY$  correspondant au maximum de niveau de gris. Afin d'identifier l'extrémité inférieure du tuyau, nous estimons une valeur limite du niveau de gris en dessous de laquelle un pixel ne doit plus correspondre au tuyau. Appelons alors  $PY_0$  les valeurs de  $PY$  du tuyau sans écoulement. Nous calculons alors la déformation du tuyau par la formule suivante pour obtenir  $Y$

$$Y = \frac{(PY - PY_0)\Delta Y}{b_1 PX + b_0}, \quad (4.7)$$

l'abscisse  $X$  étant directement obtenue par l'équation 4.5. Nous obtenons ainsi la déformée du tuyau pour tout instant  $Y(X, T)$ . La figure 4.8 présente alors les étapes successives du protocole expérimental et de traitement numérique. En figure 4.8a nous présentons l'image du tuyau au repos, sans écoulement. En figure 4.8b apparaît une image du tuyau en mouvement dont nous voulons extraire la position  $Y(X)$ . La figure 4.8c présente la position du tuyau en pixels après identification à partir des niveaux de gris de l'image et enfin la figure 4.8d la position  $Y(X)$  calculée d'après les positions en pixels correspondant aux images 4.8a et 4.8b.

La figure 4.9 présente une séquence de 10 déformées obtenues grâce à cette méthode, pour  $l = 8.4$  et  $v = 2.26$ . Elles sont espacées d'une durée  $\Delta t = 0.08s$  et couvrent l'ensemble de la période d'oscillation du tuyau,  $T = 0.8s$ . Cette séquence d'images représente la première mesure de la déformée d'un tuyau suspendu d'une telle longueur. Le mouvement observé est comparable

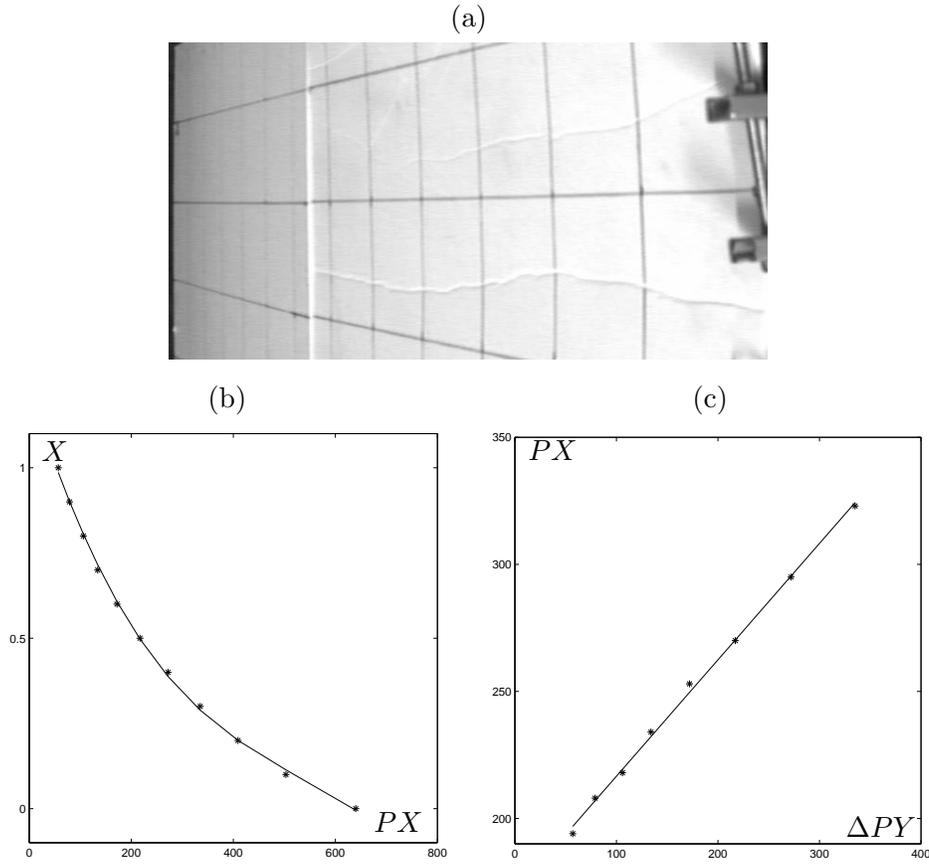


FIG. 4.7: (a) Grille d'étalonnage placée devant le tuyau. Coubes d'étalonnage ; (b), correspondance entre  $PX$  et  $X$  ; (c), correspondance entre  $\Delta PY$  et  $PX$ .

à celui d'un tuyau en l'absence de gravité, mais reste confiné en bas du tuyau. Cette observation va nous servir de référence dans l'analyse faite aux sections suivantes.

## 4.2 Propriétés locales

Considérons l'équation du mouvement du tuyau suspendu utilisant les adimensionnements définis en (4.3),

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + [v^2 - \chi] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + 2\sqrt{\beta} v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (4.8)$$

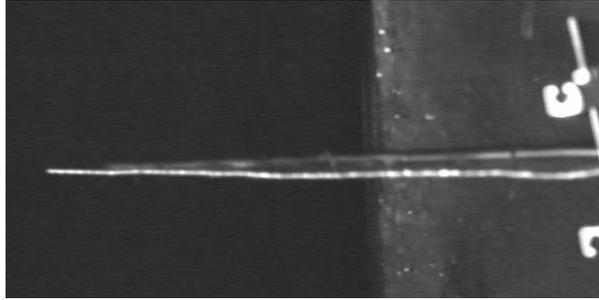
où  $\chi$  est donné par

$$\chi = l - x. \quad (4.9)$$

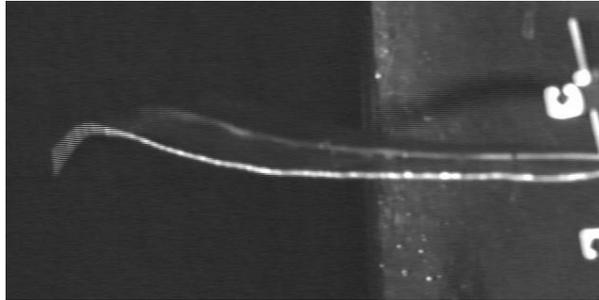
### 4.2.1 Relation de dispersion

Plaçons nous maintenant à une position  $x$  du tuyau et supposons le homogène et infini dans la direction  $x$ , *i.e.*  $\partial \chi / \partial x = 0$ . L'effet de la gravité apparaît clairement comme équivalent à l'effet d'une tension locale. Nous nous intéressons dans cette section aux propriétés locales de stabilité

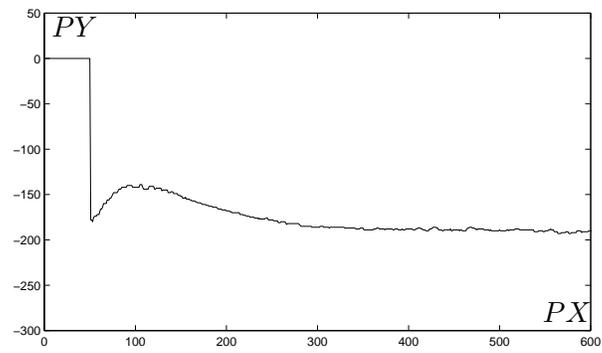
(a)



(b)



(c)



(d)

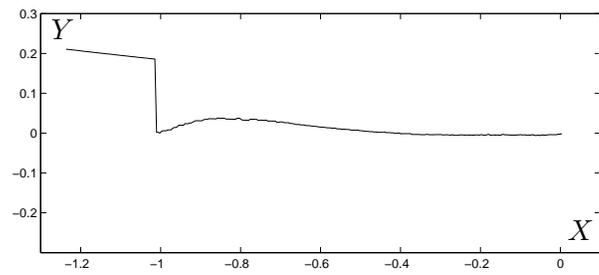


FIG. 4.8: (a), image du tuyau sans écoulement, servant de référence; (b) image du tuyau déformé; (c); position dans l'espace  $(PX, PY)$  correspondante; (d), position dans l'espace  $(X, Y)$  correspondante.

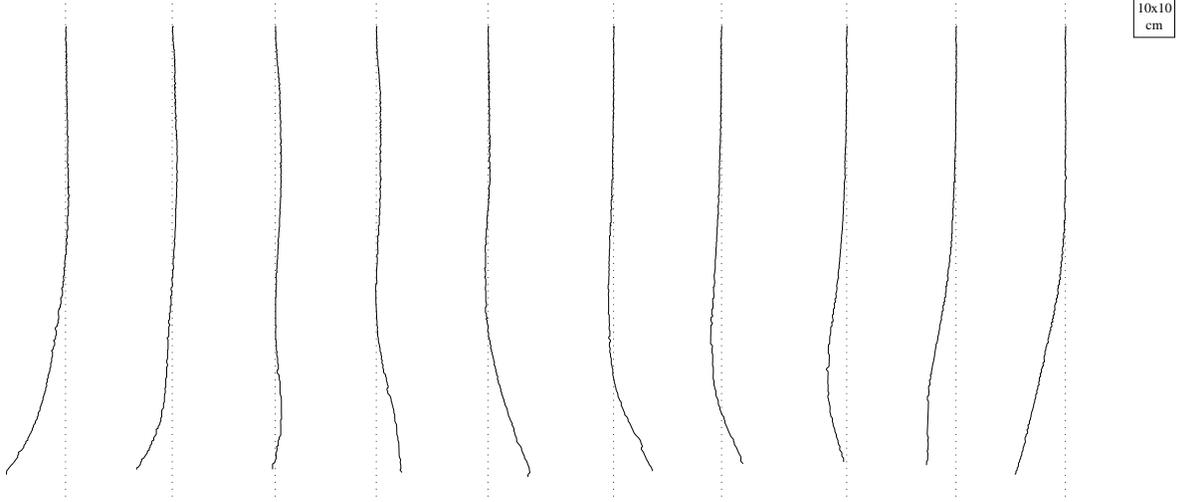


FIG. 4.9: Séquence d'images du tuyau durant une période d'oscillation,  $\beta = 0.22$ ,  $l = 8.4$ ,  $v = 2.26$ ,  $\Delta T = 0.8s$ .

d'un tuyau en tension. En considérant à nouveau une décomposition du mouvement du tuyau en solutions particulières de la forme  $e^{i(kx-\omega t)}$ , nous obtenons la relation de dispersion, décrivant le comportement local des ondes à la position  $x = l - \chi$ ,

$$D(k, \omega, \beta; v, \chi) = k^4 - k^2(v^2 - \chi) + 2\sqrt{\beta}vk\omega - \omega^2 = 0. \quad (4.10)$$

#### 4.2.2 Critère local de stabilité

La stabilité locale est assurée si  $\text{Im}[\omega(k)] < 0, \forall k \in \mathbb{R}$  [46], avec ici

$$\omega(k; \beta, v, \chi) = k \left( \sqrt{\beta} \pm \sqrt{\beta v^2 + k^2 - v^2 + \chi} \right). \quad (4.11)$$

Le critère de stabilité est alors

$$\chi(x) > v^2(1 - \beta). \quad (4.12)$$

La tension  $\chi$  variant de 0 à  $l$  de bas en haut, il existe toujours une région à l'extrémité inférieure du tuyau dans laquelle se développent des ondes instables, pourvu que  $\beta \neq 1$  et  $v \neq 0$ . Deux situations se présentent alors : (a) si  $l < v^2(1 - \beta)$ , l'intégralité du tuyau est parcouru par des ondes instables, le critère (4.12) étant violé pour tout  $x$ ; (b) si  $l > v^2(1 - \beta)$ , deux régions existent dans le tuyau, la région inférieure  $l > x > l - v^2(1 - \beta)$  d'instabilité, et la région supérieure où (4.12) est satisfait,  $l - v^2(1 - \beta) > x > 0$ . La transition entre ces deux situations intervient pour un tuyau de longueur

$$l_c = v^2(1 - \beta). \quad (4.13)$$

### 4.2.3 Critères locaux de transition

De la même manière que dans le chapitre précédent, nous nous proposons de différencier aussi les critères locaux de transition entre les instabilités absolue et convective ainsi que de transition entre neutralité et évanescence. Par une analyse dans le plan complexe de la pulsation absolue  $\omega_0$ , il a été démontré [20] que la transition entre l'instabilité absolue et l'instabilité convective intervient pour  $\chi > l_{ac}$  avec

$$l_{ac} = v^2 \frac{\beta_c - \beta}{\beta_c}. \quad (4.14)$$

Il a de plus été remarqué que cette transition correspond à l'existence d'une racine triple de la relation de dispersion à la pulsation  $\omega_0$ .

La transition entre évanescence et neutralité intervient lorsque le système est stable et qu'apparaît un intervalle d'ondes neutres. Cet intervalle est encore une fois borné par deux fréquences pour lesquelles il existe une racine double de la relation de dispersion. A l'apparition de l'intervalle, la coïncidence de ces deux fréquences entraîne l'existence d'une racine triple de la relation de dispersion. La relation de dispersion (4.10) admet une racine triple pour deux combinaisons de paramètres,

$$\chi = v^2 \frac{\beta_c - \beta}{\beta_c}, \quad \chi = v^2. \quad (4.15)$$

Le premier de ces deux critères intervient toujours à l'instabilité locale et correspond à la transition convectif/absolu. Quant au second critère, il intervient à la stabilité locale et correspond à la transition neutre/évanescence. Posons  $l_{ne} = v^2$ . Les longueurs  $l_c$ ,  $l_{ac}$  et  $l_{ne}$  correspondent aux valeurs de la tension adimensionnelle locale de transition. Ce sont aussi des longueurs adimensionnelles critiques d'apparition de différentes zones de propriétés locales (instabilité absolue, instabilité convective, neutralité, évanescence). Ainsi, selon la longueur du tuyau, 4 cas peuvent se présenter :

- Si  $l < l_{ac}$  l'ensemble du tuyau est absolument instable.
- Si  $l_{ac} < l < l_c$  le tuyau est absolument instable dans sa partie inférieure  $\chi < l_{ac}$  et convectivement instable dans la partie supérieure.
- Si  $l_c < l < l_{ne}$  trois zones se succèdent, une zone absolument instable  $\chi < l_{ac}$ , une zone convectivement instable  $l_{ac} < \chi < l_c$  et une zone neutre dans la partie supérieure restante.
- Si  $l > l_{ne}$  on distingue quatre zones, de bas en haut, les zones d'instabilité absolue, d'instabilité convective, de neutralité et enfin d'évanescence, pour  $\chi > l_{ne}$ .

La figure 4.10 illustre de façon graphique, dans le plan  $(\beta, v)$  l'existence de ces différentes zones. Pour ce tuyau  $l > l_{ne}$ , et les quatre zones apparaissent.

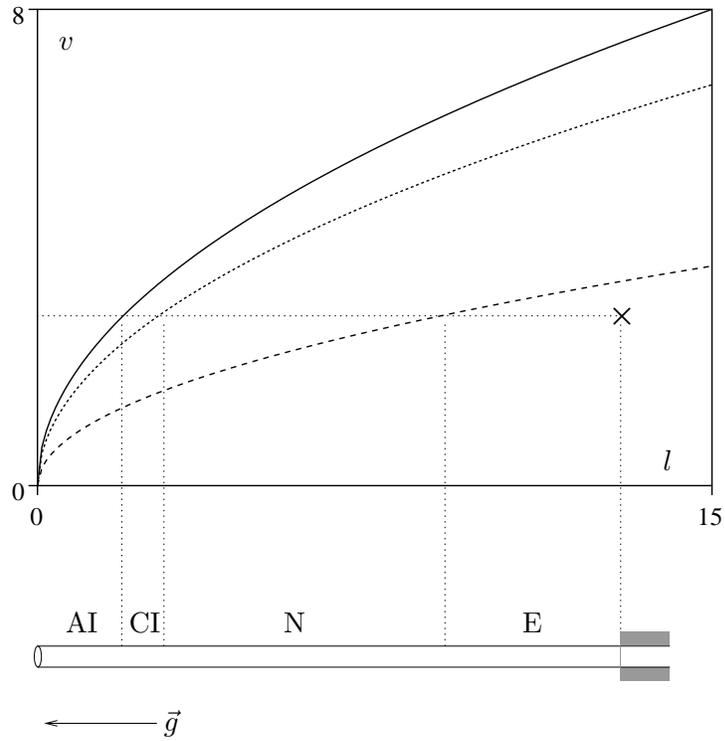


FIG. 4.10: Illustration des différentes zones de propriétés locales des ondes dans un tuyau suspendu pour  $l = 13$  et  $v = 3$ ; (—), transition absolu/convectif; ( $\cdots$ ), transition instable/stable; (---), transition neutre/évanescent.

### 4.3 Confrontation des critères locaux et des comportements globaux asymptotiques

La figure 4.11 compare dans le plan  $(l, v)$  l'évolution de la vitesse critique mesurée avec les différents critères de changement de comportement local de stabilité. Nous constatons alors que l'apparition d'une asymptote de la vitesse critique semble liée à une des trois longueurs de transition  $l_{ac}$ ,  $l_c$  ou  $l_{ne}$ . Cependant, il est difficile de savoir lequel de ces trois critères est pertinent dans la mesure où pour ces valeurs du rapport de masse  $\beta$ , les trois longueurs  $l_{ac}$ ,  $l_c$  et  $l_{ne}$  sont trop voisines. Nous étendons le domaine de rapports de masse à l'aide d'un calcul numérique.

De la même manière qu'aux chapitres précédents, la méthode numérique utilisée est de type Galerkin. L'équation du mouvement est l'équation modèle (4.8) d'un tuyau en présence de gravité et sans dissipation. Encore une fois nous cherchons les combinaisons de paramètres pour lesquelles la pulsation propre globale la plus instable est marginalement instable, c'est-à-dire lorsque la pulsation propre globale la plus instable est réelle. Avant d'effectuer des calculs pour de grandes valeurs de  $\beta$ , nous calculons les courbes de stabilité marginale pour les valeurs de  $\beta$  des tuyaux utilisés dans les précédentes expériences, et les comparons avec les données expérimentales sur la figure 4.12. Nous observons alors un très bon accord entre les vitesses critiques expérimentales et celles obtenues par le calcul. Ceci confirme la validité à la fois du modèle non dissipatif et de la méthode numérique.

Sur la figure 4.13 est tracée la vitesse critique  $v_c$  en fonction de la longueur  $l$  pour trois nouvelles valeurs de  $\beta$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\beta = 0.7$  et  $\beta = 0.9$ . Sur la figure 4.13b, le comportement asymptotique de la vitesse critique apparaît alors que la zone d'ondes évanescentes n'existe pas encore en haut du tuyau. Nous en concluons que l'apparition de ce comportement n'est pas lié à la transition entre neutralité et évanescence. Sur la figure 4.13c,  $\beta > \beta_c$  et il n'existe pas de zone d'instabilité absolue en bas du tuyau. Le comportement asymptotique apparaît quand-même, ce qui exclut tout rapport entre le critère de transition absolu/convectif et le changement de comportement de la vitesse critique. Le calcul effectué à  $\beta = 0.9$  n'a pas permis d'obtenir avec une précision suffisante la courbe de la vitesse critique. Cette courbe apparaît en effet comme un nuage de points. Pour une telle valeur du rapport de masse, les ondulations de la vitesse critique sont nombreuses et serrées, comparativement aux valeurs plus faibles de  $\beta$ , ce qui se distingue sur la figure. Le nombre d'ondulations est tel que celles-ci apparaissent comme des repliements de la courbe de stabilité. Toutefois, un début de comportement asymptotique est visible.

Finalement, les critères de transition entre instabilité absolue et convective et entre neutralité et évanescence semblent ne pas être pertinents dans ce cas. Cette constatation nous permet d'affirmer que le changement de comportement de la vitesse critique est lié à l'apparition d'une zone stable en haut du tuyau, dont le critère est donné par l'équation (4.13).

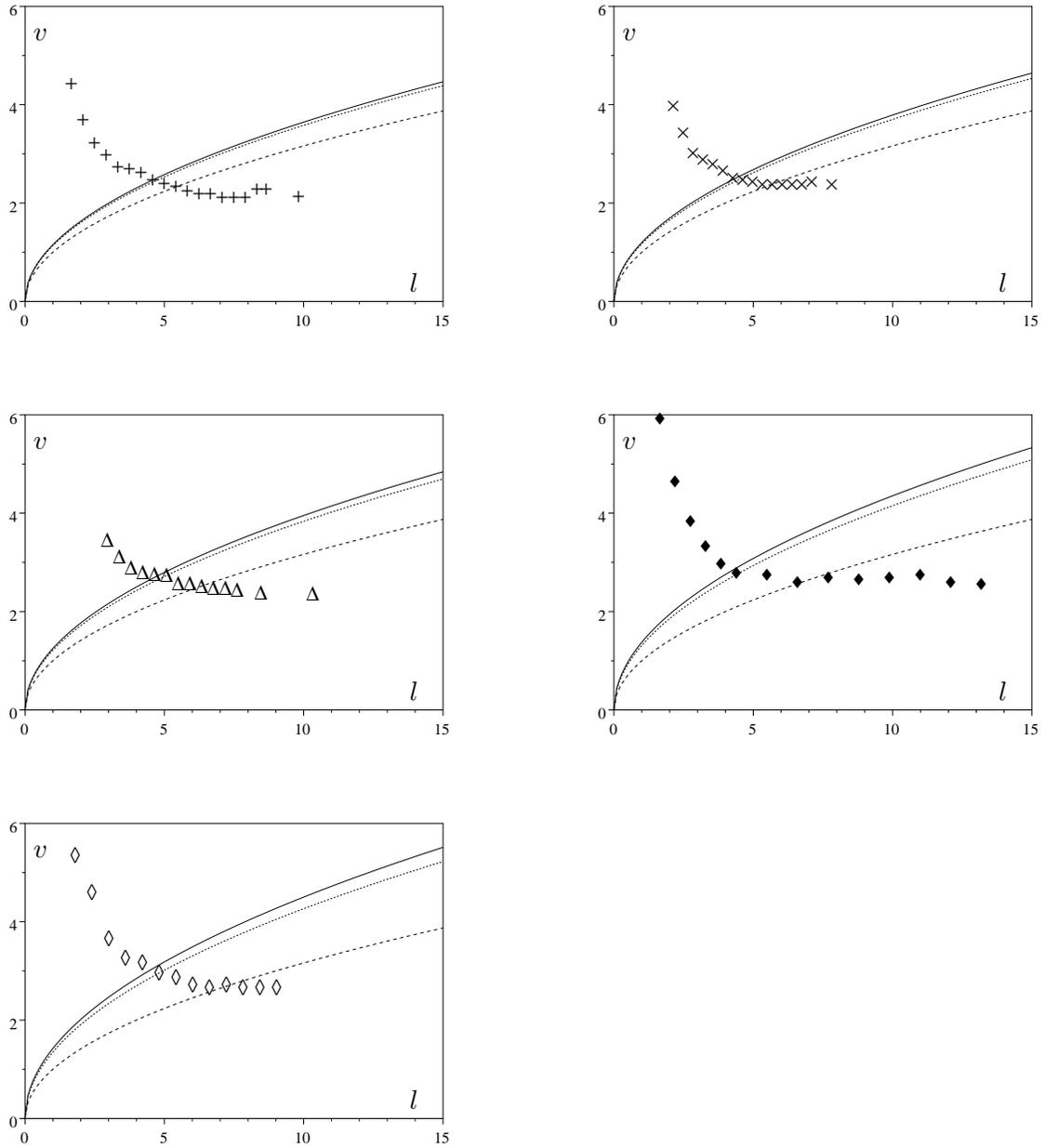


FIG. 4.11: Comparaison entre le changement de comportement de la vitesse critique et l'existence des différentes zones de propriétés locales différentes (+),  $\beta = 0.22$ ; (x),  $\beta = 0.27$ ; ( $\Delta$ ),  $\beta = 0.32$ ; ( $\blacklozenge$ ),  $\beta = 0.42$ ; ( $\diamond$ ),  $\beta = 0.45$ ; (—), transition absolu/convectif; ( $\cdots$ ), transition instable/stable; (---), transition neutre/évanescent.

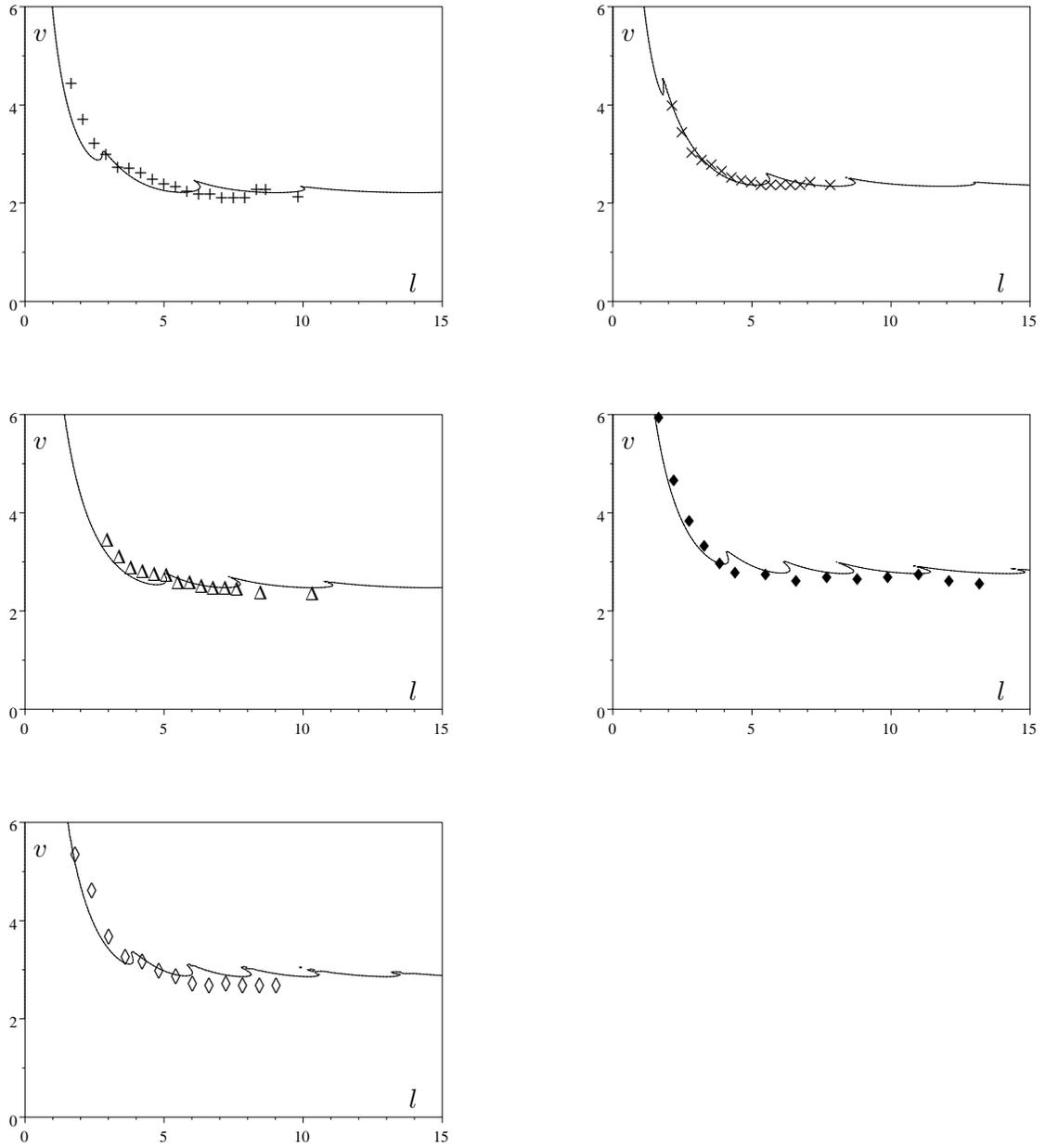


FIG. 4.12: Comparaison entre les résultats expérimentaux et les calculs numériques; (+),  $\beta = 0.22$ ; (x),  $\beta = 0.27$ ; ( $\triangle$ ),  $\beta = 0.32$ ; ( $\blacklozenge$ ),  $\beta = 0.42$ ; ( $\diamond$ ),  $\beta = 0.45$ .

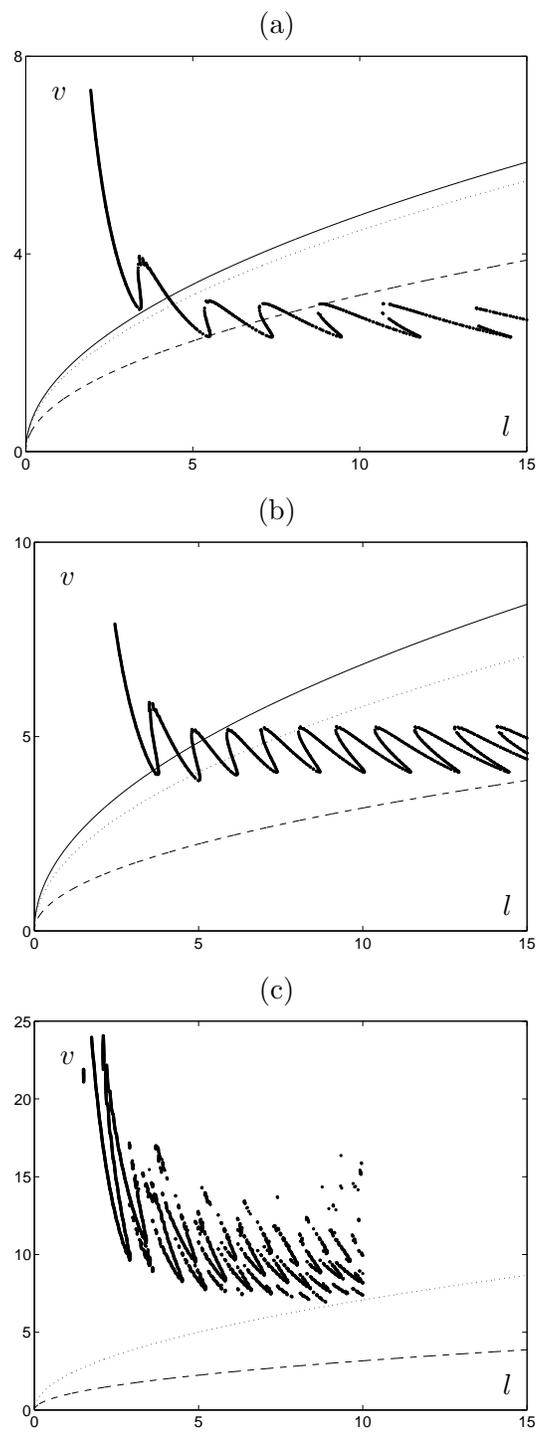


FIG. 4.13: Vitesse critique en fonction de la longueur comparée aux longueurs d'existence des différentes propriétés des ondes; (—), transition absolu/convectif; ( $\cdots$ ), transition instable/stable; (---), transition neutre/évanescent; (a),  $\beta = 0.5$ ; (b),  $\beta = 0.7$ ; (c),  $\beta = 0.9$ .

## 4.4 Modèles descriptifs des comportements asymptotiques

Le tuyau suspendu semble donc avoir deux comportements distincts que nous qualifierons de "tuyau court" et "tuyau long". La transition s'effectue, comme il a été montré dans la section précédente, lorsque une zone d'ondes stables apparaît en haut du tuyau. Nous allons maintenant tenter de trouver des modèles décrivant de manière satisfaisante le comportement aux faibles longueurs et aux grandes longueurs.

### 4.4.1 Tuyau court

Il a été montré par Païdoussis [42] que lorsque la gravité est très faible, *i.e.*  $\gamma \ll 1$ , ou de manière équivalente lorsque la longueur est très faible, la vitesse critique ne dépend que de  $\beta$ . Soit  $u_0(\beta)$  la vitesse critique pour  $\gamma = 0$ . Nous nous attendons alors à ce que la vitesse critique  $v$  dépende de la longueur de la manière qui suit,

$$v(\beta, l) = \frac{u_0(\beta)}{l}. \quad (4.16)$$

### 4.4.2 Tuyau long, approche lentement variable

Monkewitz *et al.* [38] ont étudié, dans le cadre des équations de Navier-Stokes, une configuration assez semblable à la notre. Il s'agit d'un écoulement successivement, dans le sens de l'écoulement, absolument instable, convectivement instable puis stable. Ce système est de plus semi-infini, avec un bord en amont, avant la zone absolument instable. Il s'agit donc d'un système très similaire, à la différence près que l'écoulement est inversé. Il a dans ce cas été démontré, en utilisant l'approche lentement variable WKBJ, que la fréquence instable globale est la fréquence la plus absolue, c'est à dire celle dont le taux de croissance est le plus grand. L'approche WKBJ fait l'hypothèse d'un milieu lentement variable, soit un milieu dont les propriétés varient peu sur une longueur d'onde caractéristique locale.

Dans notre cas il semble que cette hypothèse ne soit pas satisfaite. Prenons par exemple le cas tuyau dont le mouvement est représenté sur la figure 4.9. Dans les conditions de l'expérience,  $v = 2.26$  et  $\beta = 0.22$ , nous avons  $l_{ne} = 5.1$ . Cela signifie que sur environ la moitié de sa longueur, le tuyau est successivement absolument instable, convectivement stable, neutre puis évanescent. Nous remarquons que la longueur caractéristique du mode global instable, qui est comparable aux longueurs d'ondes locales entrant en jeu, est du même ordre de grandeur que la longueur sur laquelle les propriétés locales changent. Cette forte variation est en contradiction avec l'hypothèse de départ de l'approche WKBJ.

Le résultat essentiel de l'approche WKBJ sur un système similaire est que l'instabilité est dominée par la pulsation absolue dominante, celle dont la partie imaginaire est la plus grande. Si tel était le cas pour le tuyau, la vitesse critique ne tendrait non pas vers une valeur finie, mais vers 0. En effet au bout du tuyau, et pour  $\beta < \beta_c$ , il existe toujours une zone absolument instable

si  $u > 0$ . Aux grandes longueurs, le tuyau devrait donc toujours être instable et l'instabilité dominée par la zone absolument instable en bas, ce qui n'est pas le cas puisque la vitesse critique ne tend pas vers 0 lorsque la longueur tend vers l'infini. De plus le système peut être globalement instable même lorsqu'il n'existe pas de zone absolument instable en bas du tuyau ( $\beta > \beta_c$ ).

#### 4.4.3 Tuyau long, modèle du tuyau de longueur instable

Le modèle décrit dans cette section s'appuie sur les observations suivantes :

- Le changement de comportement s'effectue lorsqu'il existe en haut du tuyau une zone d'ondes stables.
- Lorsque le tuyau est assez long, comme sur la figure 4.9, l'essentiel des oscillations à l'instabilité se fait à l'extrémité aval libre. La partie haute du tuyau ne bouge pas.
- Hormis une éventuelle réflexion d'ondes avec un gain d'énergie à l'extrémité amont du tuyau, le seul moteur possible de l'instabilité se trouve dans la zone instable en bas du tuyau.

Nous considérons pour ce modèle un tuyau dont la longueur est égale à la longueur instable, c'est à dire  $l = l_c$ . Une représentation schématique de ce modèle est donnée en figure 4.14. Nous supposons de plus que la tension est constante et vaut la tension moyenne du tuyau suspendu de longueur  $l_c$ , soit,

$$\chi = \frac{v^2(1 - \beta)}{2}. \quad (4.17)$$

L'équation du mouvement de ce système est, en utilisant (4.8) et (4.17),

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \left[ (1 + \beta) \frac{v^2}{2} \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta}v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (4.18)$$

avec les conditions aux limites décrites par (1.4) en  $x = 0$  et par (1.6) en  $x = l_c$ . Posons  $\beta_0 = 2\beta/(1 + \beta)$  et  $v_0 = v\sqrt{(1 + \beta)/2}$ , l'équation (4.18) devient

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + v_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta_0}v_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (4.19)$$

où  $x$  varie de 0 à  $l_c$ . En utilisant les variables et paramètres adimensionnels définis en (1.2) ayant pour longueur de référence la longueur physique du tuyau,  $L_c = \eta l_c$ , nous obtenons,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + u_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta_0}u_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (4.20)$$

avec  $x$  variant de 0 à 1. C'est l'équation du mouvement d'un tuyau encasté-libre sans tension ni gravité, initialement résolue par Gregory et Païdoussis [25], dont la vitesse critique est  $u_0(\beta_0)$  et dont une représentation graphique est donnée dans le chapitre d'introduction en figure 1.9. Réexprimée dans les variables adimensionnelles ayant  $\eta$  pour longueur de référence, la vitesse critique de ce modèle de tuyau long s'écrit

$$v_\infty(\beta) = \left( \frac{u_0(\beta_0)}{1 - \beta} \right)^{1/3}. \quad (4.21)$$

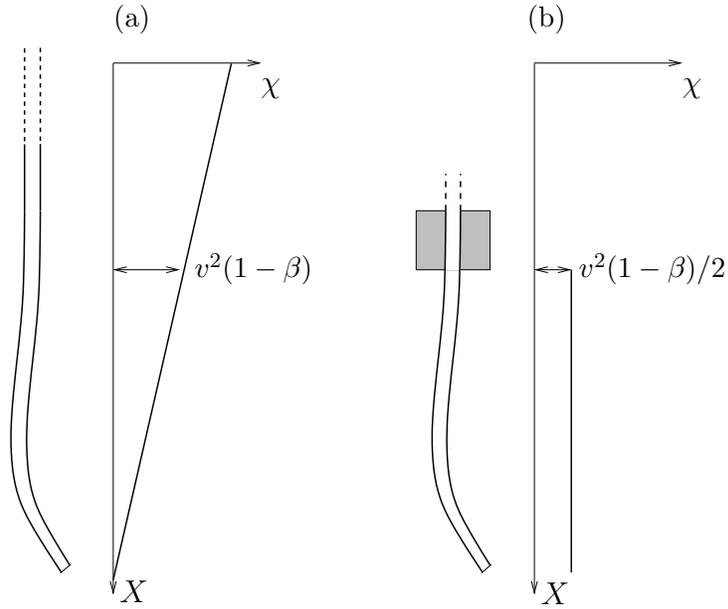


FIG. 4.14: Tension dans le modèle de tuyau long, (a), tuyau semi-infini ; (b), tuyau équivalent de longueur finie.

Quant à la fréquence critique correspondante, elle est définie de manière similaire en utilisant  $\Omega_0$ , la fréquence critique à  $u_0(\beta_0)$ ,

$$\omega_\infty(\beta) = \frac{\Omega_0(\beta_0)}{(1 - \beta)^2 v_\infty^4(\beta)}. \quad (4.22)$$

#### 4.4.4 Comparaison modèles/essais

La figure 4.15 compare la vitesse critique du tuyau suspendu avec les vitesses obtenues par le modèle de tuyau court, par le modèle de tuyau long et avec le critère d'existence d'ondes stables en haut du tuyau, ceci pour deux cas expérimentaux et pour deux cas numériques. La bonne description du comportement de la vitesse critique avec le critère de transition et les deux modèles asymptotiques de la vitesse critique nous amène à la conclusion suivante :

- Lorsque l'intégralité du tuyau est parcourue par des ondes instables, la vitesse critique varie en  $1/l$ .
- Dès qu'il existe une zone localement stable en haut du tuyau, la vitesse critique ne varie plus.
- La vitesse critique d'un tuyau instable en bas et stable en haut est égale à la vitesse critique d'un tuyau de longueur  $l_c$ , qui est très proche de la vitesse critique d'un tuyau même longueur et de tension homogène égale à la tension moyenne du tuyau de longueur  $l_c$ .

La figure 4.16 présente alors les valeurs de la vitesse critique aux grandes longueurs en fonction du rapport de masse  $\beta$  et les compare avec celles du modèle de tuyau long. La même

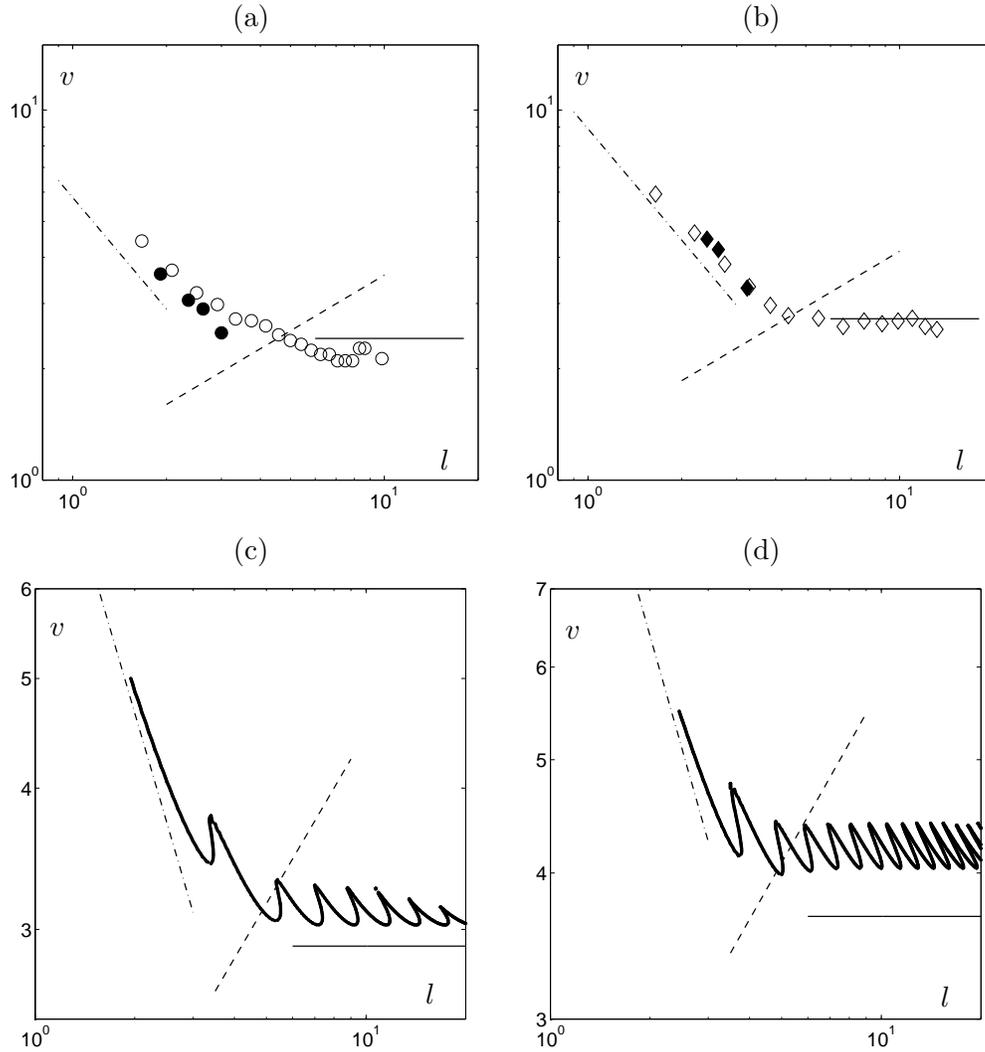


FIG. 4.15: Comparaison entre la vitesse critique du tuyau suspendu et les différents modèles; (----), vitesse critique du tuyau court, équation (4.16); (—), vitesse critique du tuyau semi-infini, équation (4.21); (-.-.-), longueur d'apparition d'une zone d'ondes stable en haut du tuyau, équation (4.12); (a) et (b), expériences pour  $\beta = 0.22$  et  $\beta = 0.42$  respectivement, ( $\bullet$ ) et ( $\blacksquare$ ), données de Païdoussis [41]; ( $\circ$ ) et ( $\square$ ), données du présent travail; (c) et (d), calculs numériques pour  $\beta = 0.5$  et  $\beta = 0.7$  respectivement.

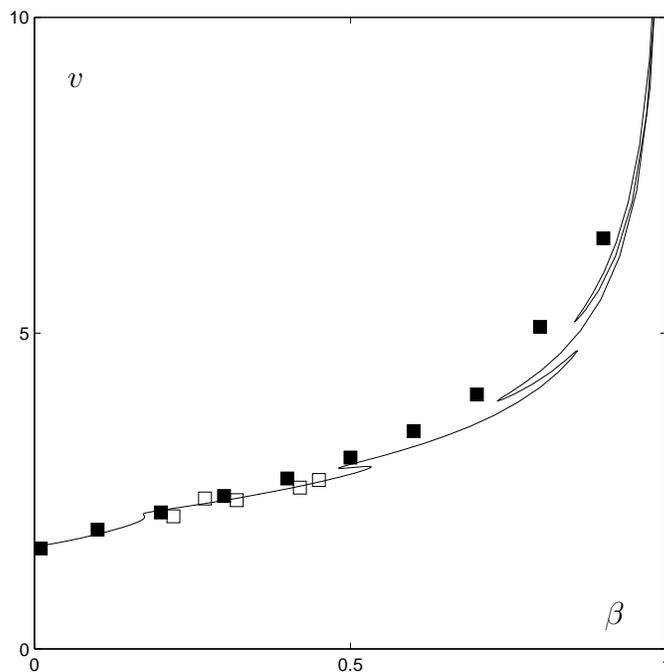


FIG. 4.16: Vitesse critique des long tuyaux suspendus ; (■) calculs numériques ; (□), expériences ; (---), modèle du tuyau long (4.21).

chose est faite pour la fréquence critique en figure 4.17. Nous observons encore un bon accord entre la vitesse critique asymptotique des expériences et des calculs numériques et celle du modèle proposé.

Il reste maintenant à estimer la longueur critique pour laquelle le changement de comportement intervient. C'est la longueur du tuyau lorsque la courbe de stabilité croise la courbe du critère d'existence d'une zone stable en haut du tuyau. Nous pouvons en donner une estimation en considérant que c'est la longueur du tuyau lorsque la vitesse critique du modèle de tuyau long est égale à la vitesse critique du modèle de tuyau court, soit

$$l_{\infty} = u_0(\beta)u_0(\beta_0)^{-1/3}(1 - \beta). \quad (4.23)$$

Cette longueur est tracée en fonction de  $\beta$  sur la figure 4.18. Nous traçons aussi la longueur pour laquelle la courbe de la vitesse critique, numérique ou expérimentale, croise la courbe du critère d'apparition d'une zone d'ondes stables en haut du tuyau [équation (4.13)]. Ces deux longueurs sont encore une fois en bon accord. Comme cela apparaît sur la figure, la longueur critique de transition dépend assez peu du rapport de masse  $\beta$ . La longueur  $l_{\infty}$  vaut en effet toujours à peu près 4. Sous forme dimensionnelle nous l'exprimons comme suit,

$$L_{\infty} \simeq 4 \left[ \frac{EI}{(M + m)g} \right]^{1/3}. \quad (4.24)$$

Remarquons que cette longueur est approximativement le double de la longueur nécessaire au flambage statique sous son propre poids d'un tuyau identique, encastré en bas et libre en haut

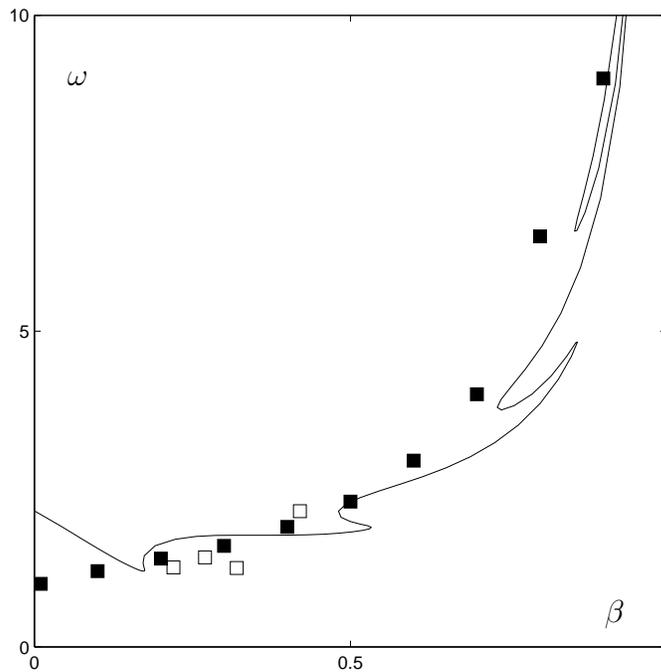


FIG. 4.17: Fréquence critique des longs tuyaux suspendus ; (■) calculs numériques ; (□), expériences ; (---), modèle du tuyau long (4.22).

[42].

## 4.5 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre s'est attaché à décrire la stabilité d'un tuyau suspendu alors que sa longueur est augmentée. L'existence d'une longueur à partir de laquelle la vitesse critique devient constante a été mise en évidence expérimentalement. Le même comportement a été observé pour la fréquence critique. Une méthode de Galerkin a confirmé ce comportement en explorant tout le domaine des rapports de masse. L'apparition de ce comportement asymptotique a été mise en relation avec les critères d'apparition de zones d'instabilité convective, de neutralité et d'évanescence en haut du tuyau. Ceci a permis de montrer que l'apparition de ce comportement asymptotique est lié à l'apparition d'une zone en haut du tuyau dans laquelle ne se développe aucune onde instable.

Après avoir vérifié qu'une approche lentement variable ne peut pas décrire le comportement d'un tuyau semi infini, nous avons développé un modèle simple permettant de retrouver convenablement la vitesse critique et la fréquence critique de tout tuyau suspendu dont la longueur est supérieure à la longueur d'apparition d'ondes stables en haut. Ce modèle nous a de plus permis de retrouver la longueur critique d'apparition du comportement asymptotique de la vitesse critique. Nous avons alors constaté que cette longueur est approximativement égale à deux fois la longueur nécessaire au flambage sous son propre poids de ce même tuyau. Il est intéressant de

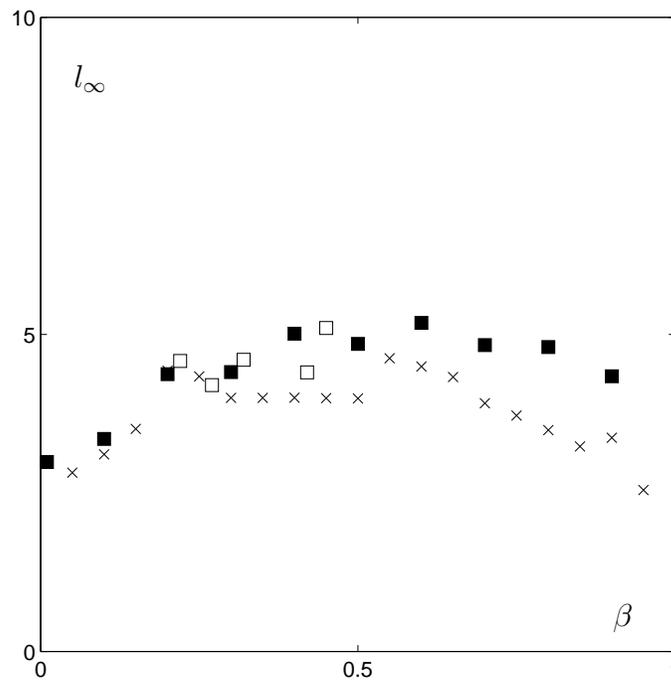


FIG. 4.18: Longueur critique d'apparition du comportement asymptotique ; (■) calculs numériques ; (□), expériences ; (×), longueur pour laquelle la vitesse critique du modèle de tuyau long (4.21) égale la vitesse critique du modèle de tuyau court (4.16).

remarquer que finalement, les propriétés globales de stabilité du tuyau sans gravité permettent d'approcher de façon très satisfaisante l'ensemble des configurations du tuyau suspendu.

Nous pouvons maintenant nous demander si des systèmes similaires, tels que des poutres, drapeaux, ou parois souples, soumises à un écoulement externe axial, et dont l'extrémité amont est encastrée ne pourraient pas présenter le même type de comportement. Pour le tuyau, les forces de frottement visqueuses à la paroi sont exactement compensées par le gradient de pression, dont l'origine est justement ces forces. Dans le cas d'écoulement externe en revanche, le gradient de pression, s'il existe, n'est pas lié aux frottements visqueux. Ces derniers agissent donc sur la paroi et induisent une tension variable, qui augmente d'amont en aval.

-----

# Chapitre 5

## Conclusion

L'objectif de départ de cette thèse était de confronter les approches locales et globales dans le cadre des interaction fluide-structure. Nous avons choisi de concentrer notre étude sur le problème du tuyau avec écoulement interne. Plusieurs raisons ont conduit à ce choix :

- Le tuyau est un système dont les équations du mouvement sont bien connues et dont les solutions sont bien validées expérimentalement.
- Les conditions aux limites sont bien définies et simples à modéliser, ce qui facilite les analyses globales de stabilité.
- Des analyses de stabilité locale ont montré que le système peut être absolument instable, convectivement instable ou stable, comme bien d'autres autres systèmes en interaction fluide-structure.
- Nous avons montré que comme dans d'autres systèmes en interaction fluide-structure, des types particuliers d'ondes peuvent exister, comme les les "ondes de propagation anormale".

Cela signifie que ce système permet, de part sa simplicité, d'aller plus loin dans l'analyse globale, et de part ses similarités avec d'autres systèmes, d'obtenir des résultats qui ont toutes les chances d'avoir un caractère générique.

Notre premier objectif a été d'avoir une vision claire du lien existant entre l'approche "ondes instables" de l'instabilité locale et l'approche "modes instables" de l'instabilité globale. Nous avons pour cela élaboré une méthode permettant d'obtenir les pulsations propres globales du système libre à partir des ondes issues d'un forçage harmonique. Nous avons ainsi mis en évidence la complexité du mécanisme de construction d'un mode global, interaction entre quatre ondes et quatre conditions aux limites, et des conditions nécessaires à l'existence d'un mode global instable. Cela nous a en plus permis de différencier les situations où l'instabilité locale est le moteur de l'instabilité et les situations où il s'agit d'un gain aux conditions aux limites. Après avoir montré que les réflexions d'ondes aux extrémités du tuyau peuvent provoquer l'instabilité globale, nous avons exhibé un système localement stable mais globalement instable. Pour ce système, aucun doute n'est permis quant à l'origine de l'instabilité globale. Enfin, nous avons

entrepris d'étudier le cas d'un tuyau suspendu, sur lequel la gravité induit une tension variable, ceci afin de chercher si l'instabilité globale peut être prédite par des critères locaux. Pour tous ces systèmes nous avons obtenu des critères simples de stabilité globale, à partir de critères locaux. Ainsi, l'instabilité globale d'un tuyau sur fondations élastiques intervient dès qu'il existe un intervalle de fréquences réelles pour lesquelles ne se développent que des ondes neutres. Ce résultat ne peut être prédit par le critère de Kulikovskii, du fait du rôle important joué par les conditions aux limites dans cette instabilité globale. De manière similaire, l'instabilité globale d'un tuyau suspendu de grande extension ne peut être prédite par une approche WKBJ, du fait de l'importante variation des propriétés locales sur une longueur d'onde. Nous avons en revanche observé que ce tuyau peut être modélisé de façon très satisfaisante par un tuyau de longueur égale à la zone instable au bout du tuyau et de tension homogène égale à la tension moyenne.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses. Nous avons remarqué au chapitre 4 que la tension peut elle aussi entraîner l'existence d'intervalles d'ondes neutres. Il serait donc intéressant, afin de tester le caractère générique de notre résultat, de comparer le critère d'instabilité globale aux grandes longueurs du tuyau en tension avec le critère d'existence d'ondes neutres. Manque à ce travail une analyse plus systématique de l'effet de la dissipation, notamment la dissipation sur la flexion, pour savoir si l'instabilité locale permet d'expliquer le fait que l'instabilité globale est parfois favorisée par l'ajout de dissipation. L'ajout d'une raideur séparant les échelles globales et locales dans le tuyau suspendu permettrait certainement d'obtenir une instabilité prédite par la zone absolument instable en bas du tuyau. Il serait aussi intéressant d'envisager une expérience mettant en évidence les comportements décrits dans les chapitres 2 et 3. Un système expérimental permettant d'observer une instabilité globale dans un cas localement stable serait à envisager. On pourrait imaginer par exemple de tester nos résultats dans l'expérience de Chang et Moretti [12, 13]. Cette expérience est constituée d'une membrane dont une des directions est grande devant l'autre, tendue entre deux supports placés sur la plus grande des deux directions. L'écoulement s'effectue dans la plus grande des directions, perpendiculairement à la tension. Chaque mode transversal de déformation possède une raideur de fondation élastique associée, et, en supposant qu'une des extrémités soit libre, nous aurions affaire à un système très similaire au tuyau sur fondations élastiques. Il est de plus possible que l'effet des frottements de l'air sur la membrane soient non négligeables et induisent ainsi une tension variable, parallèle à l'écoulement. Celle-ci conduirait à un système présentant les caractéristiques à la fois du tuyau sur fondations élastiques (raideur élastique due à la tension transversale) et du tuyau suspendu (tension longitudinale variable). Enfin, le lien que nous avons réussi à faire entre la réponse forcée locale et la réponse libre globale du tuyau donne des pistes pour d'autres configurations similaires comme les configurations de parois souples en présence d'un écoulement potentiel ou d'un écoulement de couche limite, dont les conditions aux limites sont moins simples à modéliser mais dont les configurations expérimentales sont réalisables.

# Bibliographie

- [1] I.D. Abrahams and G.R. Wickham. On transient oscillations of plates in moving fluids. *Wave Motion*, 33 :7–23, 2001.
- [2] T. B. Benjamin. Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid - I. Theory. *Proceedings of the Royal Society of London*, 261 :457–486, 1960.
- [3] A. Bers. Space-time evolution of plasma instabilities-absolute and convective. In M.N. Rosenbluth and R.Z. Sagdeev, editors, *Handbook of Plasmas Physics*, volume 1, pages 451–517. North-Holland, 1983.
- [4] A. Bers and R.J. Briggs. Criteria for determining absolute instabilities and distinguishing between amplifying and evanescent waves. *Quarterly Progress Report*, 71 :122–131, 1963. Research laboratory of electronics.
- [5] R. D. Blevins. *Formulas for natural frequency and mode shape*. New York : Nostrand Reinhold, 1979.
- [6] D. Borglund. On the optimal design of pipes conveying fluids. *Journal of Fluids and Structures*, 12 :353–365, 1998.
- [7] F. J. Bourrières. Sur un phénomène d’oscillation auto-entretenu en mécanique des fluides réels. *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l’Air*, 147, 1939.
- [8] Brazier-Smith, P.R., and J.F. Scott. Stability of fluid flow in the presence of a compliant surface. *Wave Motion*, 1984.
- [9] R.J. Briggs. *Electron-stream interaction with plasmas*. Cambridge :MIT Press, 1964.
- [10] R.A. Cairns. The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 92 :1–14, 1979.
- [11] P.W. Carpenter and A. D. Garrad. The hydrodynamic stability over Kramer-tpe compliant surfaces. Part 2. Flow-induced surface instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 170 :199–232, 1986.
- [12] Y.B. Chang and P.M. Moretti. Experimental study on edge flutter in webs. In *Web Handling*, volume 149, pages 67–78. ASME, 1992.

- [13] Y.B. Chang and P.M. Moretti. Flow-induced vibration of free edges of thin films. In T. Ziada, S. & Staubli, editor, *Flow Induced Vibration*, number 7, pages 801–810. A.A. Balkema :Rotterdam, 2000.
- [14] C. Cossu. Communication privée.
- [15] A. Couairon and J.M. Chomaz. Absolute and convective instabilities, front velocities and global modes in nonlinear systems. *Physica D*, 108, 1997.
- [16] D. Crighton and J. E. Oswell. Fluid loading with mean flow. I. Response of an elastic plate to localized excitation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A335 :557–592, 1991.
- [17] E. de Langre. Ondes variqueuses absolument instables dans un canal élastique. *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, Série IIb*, 328 :61–65, 2000.
- [18] E. de Langre. Absolutely unstable waves in inviscid hydroelastic systems. *soumis à Journal of Sound and Vibration*, 2001.
- [19] E. de Langre, O. Doaré, and F. Pellet. Force suiveuse critique sur une colonne pesante semi-infinie : Modèle et expériences. *Comptes rendus de l'académie des sciences, Série IIb*, 329 :175–178, 2001.
- [20] E. de Langre and A. E. Ouvrard. Absolute and convective bending instabilities in fluid-conveying pipes. *Journal of Fluids and Structures*, 13(6) :663–680, 1999.
- [21] O. Doaré and E. de Langre. Local and global instabilities of fluid-conveying cantilever pipes. In T. Ziada, S. & Staubli, editor, *Flow-Induced Vibration*, pages 349–354. A.A. Balkema :Rotterdam, 2000.
- [22] O. Doaré and E. de Langre. The flow-induced instability of long hanging pipes. *European Journal of Mechanics A/Solids, in press*, 2002.
- [23] O. Doaré and E. de Langre. Local and global instability of fluid-conveying pipes on elastic foundations. *Journal of Fluids and Structures*, 16 :1, 2002.
- [24] Karniadakis G.E. and G.S. Triantafyllou. Frequency selection and asymptotic states in laminar wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, 199 :441–469, 1989.
- [25] R. W. Gregory and M. P. Païdoussis. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluids. I. Theory. *Proceedings of the Royal Society of London*, A 293 :512–527, 1966.
- [26] R. W. Gregory and M. P. Païdoussis. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluids. II. Experiments. *Proceedings of the Royal Society of London*, A 293 :528–542, 1966.
- [27] P. Huerre. *Perspectives in Fluid Dynamics*, chapter Open shear flow instabilities. Cambridge university press, 2000.
- [28] P. Huerre and M. Rossi. *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*, chapter Hydrodynamic instabilities in open flows. Cambridge University Press, 1998.

- [29] F. Inada and S. Hayama. Mechanisms of leakage-flow-induced vibrations - single-degree-of-freedom and continuous systems. In T. Ziada, S. & Staubli, editor, *Flow Induced Vibration*, volume 7, pages 837–844. A.A. Balkema :Rotterdam, 2000.
- [30] M. Kelbert and I. Sazonov. *Pulses and other wave processes in fluids*. Modern Approaches in Geophysics. Kluwer Academic Publisher, 1996.
- [31] A. G. Kulikovskii. Cited in Course of theoretical physics, physical kinetics L. Landau and Lifshitz, vol. 10, p281, 1966.
- [32] A. G. Kulikovskii and I. S. Shikina. On the bending oscillation of a long tube filled with moving fluid. *Izvestia Akademii Nauk Arminskoi SSR*, 41(1) :31–39, 1988.
- [33] S. Y. Lee and C. D. Mote, Jr. A generalized treatment of the energetics of translating continua. Part II. Beams and fluid conveying pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 204(5) :735–753, 1997.
- [34] R.J. Lingwood and N. Peake. On the causal behaviour of flow over an elastic wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 396 :319–344, 1999.
- [35] I. Lottati and A. Kornecki. The effect of an elastic foundation and of dissipative forces on the stability of fluid-conveying pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 2(109) :327–338, 1986.
- [36] S. Louazel. Instabilités fluide-structure liées à un écoulement entre deux plaques, 2000. Rapport de stage, ENSTA.
- [37] A.D. Lucey. The excitation of waves on a flexible panel in a uniform flow. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 356 :2999–3039, 1998.
- [38] P.A. Monkewitz, P. Huerre, and J.M. Chomaz. Global linear stability analysis of weakly non-parallel shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 251 :1–20, 1993.
- [39] J. Oswell. PhD thesis, Cambridge, 1992.
- [40] A.E. Ouvrard. Instabilités fluide-structure en écoulement axial, 1998. Rapport de stage, École Polytechnique.
- [41] M. P. Païdoussis. Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid. *Journal Mechanical Engineering Science*, 12(2) :85–103, 1970.
- [42] M. P. Païdoussis. *Fluid-structure Interactions. Slender Structures and Axial Flow*, volume 1. Academic Press, 1998.
- [43] N. Peake. On the behaviour of a fluid-loaded cylindrical shell with mean flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 338 :387–410, 1997.
- [44] F. Pellet. Instabilités d’un tuyau souple parcouru par un écoulement, 2000. Rapport de stage, École Polytechnique.
- [45] W. Roth. Instabilität durchströmter Rohre. *Ingenieur-Archiv*, 33 :236–263, 1964.

- [46] R. A. Stein and M. W. Tobriner. Vibration of pipes containing flowing fluids. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 37 :906–916, 1970.
- [47] P.J. Strykowski and D. L. Nicu. The influence of velocity and density ratio on the dynamics of spatially developing mixing layers. *Physics of Fluids*, 4(4) :770–781, 1992.
- [48] S. P. Timoshenko and J. M. Gere. *Theory of Elastic Stability*. New York, Mac Graw, 1961.
- [49] G. S. Triantafyllou. Physical condition for absolute instability in inviscid hydroelastic coupling. *Physics of Fluids A*, 4 :544–552, 1992.
- [50] O. Wiplier and U. Ehrenstein. Numerical investigation of the interaction between a compliant coating and an unstable boundary layer. In T. Ziada, S. & Staubli, editor, *Flow-Induced Vibration*, volume 7, pages 379–386. A.A. Balkema :Rotterdam, 2000.
- [51] O. Wiplier and U. Ehrenstein. On the absolute instability in a boundary-layer flow with compliant coatings. *European Journal of Mechanics*, 20 :127–144, 2001.

# Annexe A

## Équations du mouvement

Les équations locales du mouvement du tuyau ont été initialement obtenues par Bourrières [7]. Nous décrivons ici le développement des équations telles que cela apparaît dans [42]. Nous considérons un tuyau uniforme de longueur  $L$ , de périmètre interne  $S$ , correspondant à une aire  $A$ , de masse linéique  $m$  et de rigidité en flexion  $EI$ , conduisant un fluide de masse linéique  $M$  à la vitesse moyenne  $U$ . Le déplacement du tuyau entraîne une force de frottement avec le fluide extérieur, caractérisée par le coefficient de frottement  $c$ . Quelques approximations doivent être faites :

- Le tuyau est inextensible ; son déplacement latéral est exprimé par  $Y(X, T)$ . Nous pouvons utiliser indifféremment  $Y$  comme coordonnée cartésienne ou pour exprimer le déplacement latéral du tuyau.
- Le déplacement  $Y$  est d'amplitude et de longueur d'onde faible devant le diamètre du tuyau. Aussi l'abscisse curviligne  $s$  est-elle équivalente à la coordonnée cartésienne  $X$ .
- L'écoulement considéré est uniforme, ce qui est une approximation satisfaisante d'un écoulement turbulent pleinement développé. L'écoulement uniforme peut être vu comme une colonne sans aucune rigidité se déplaçant à l'intérieur du tuyau à la vitesse  $U$ .

Considérons alors les éléments de fluide et de solide  $\delta s$ , représentés sur la figure A.1. Sur la figure A.1a apparaissent les différentes forces agissant sur l'élément fluide, les forces induites par le gradient de pression, la réaction normale du tuyau sur le fluide, la réaction tangentielle associée aux frottements visqueux et la force de gravité. En projection selon  $X$  et  $Y$  et en éliminant les termes de second ordre, cela donne

$$-A \frac{\partial p}{\partial X} - qS + Mg + F \frac{\partial Y}{\partial X} = Ma_{fX}, \quad (\text{A.1})$$

$$-F - A \frac{\partial}{\partial X} \left( p \frac{\partial Y}{\partial X} \right) - qS \frac{\partial Y}{\partial X} = Ma_{fY} \quad (\text{A.2})$$

où  $a_{fX}$  et  $a_{fY}$  sont les accélérations de l'élément fluide selon  $X$  et  $Y$  respectivement. Comme cela apparaît sur la figure A.1b, des forces supplémentaires agissent sur l'élément de conduite  $\delta s$ , la tension  $T$ , la force de frottement transversale  $Q$  et le moment de flexion  $\mathcal{M}$ . On obtient

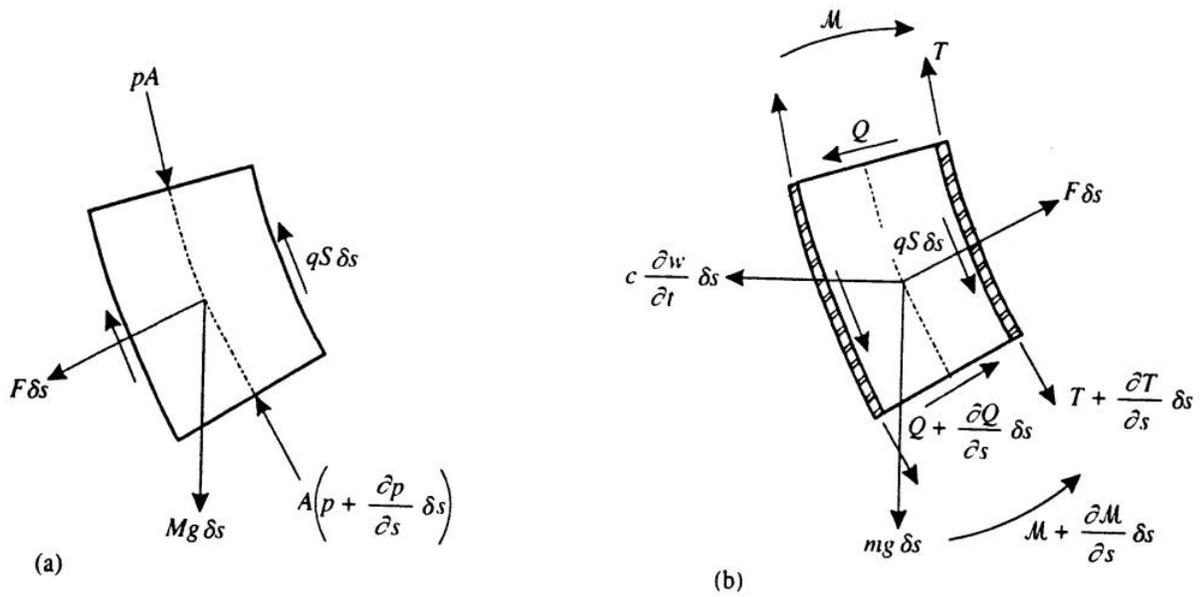


FIG. A.1: Eléments de fluide et de conduite sur une longueur  $\delta s$  [25].

alors

$$\frac{\partial T}{\partial X} + qS + mg - F \frac{\partial Y}{\partial X} = m a_{pX}, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial X} + F + \frac{\partial}{\partial X} \left( T \frac{\partial Y}{\partial X} \right) + qS \frac{\partial Y}{\partial X} - c \frac{\partial Y}{\partial T} = m a_{pY}, \quad (\text{A.4})$$

$$Q = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X} = -EI \frac{\partial^3 Y}{\partial X^3}, \quad (\text{A.5})$$

Les accélérations selon la direction  $X$  sont nulles et celles selon  $Y$  sont de la forme,

$$a_{fY} = \left( \frac{\partial}{\partial T} + U \frac{\partial}{\partial X} \right)^2 Y, \quad a_{pY} = \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2}. \quad (\text{A.6})$$

En sommant les bilans des forces selon  $Y$ , on obtient

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} - \frac{\partial}{\partial X} \left[ (\tau - pA) \frac{\partial Y}{\partial X} \right] + M \left[ \frac{\partial}{\partial T} + U \frac{\partial}{\partial X} \right]^2 Y + c \frac{\partial Y}{\partial T} + m \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} = 0, \quad (\text{A.7})$$

$c$  représente l'effet dissipatif du fluide environnant (en général l'air). Les bilans des forces dans la direction longitudinale  $X$  donnent

$$\frac{\partial}{\partial X} (\tau - pA) + (M + m)g = 0. \quad (\text{A.8})$$

Distinguons alors la tension extérieure, appliquée par l'expérimentateur, qui est constante le long du tuyau, de la tension résultant de bilans de forces internes, comme la gravité. En posant  $\tau = \tau_e + \tau_i$ , et en remarquant que la pression à l'extrémité aval du tuyau est la pression atmosphérique, que nous posons nulle, nous obtenons finalement

$$\tau - pA = \tau_e + (M + m)g(L - X). \quad (\text{A.9})$$

En ajoutant un terme de rappel élastique,  $SY$ , l'équation du mouvement devient

$$\begin{aligned}
 & EI \frac{\partial^4 Y}{\partial X^4} + [MU^2 - \tau_e - (M + m)g(L - X)] \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \\
 & + 2MU \frac{\partial^2 Y}{\partial X \partial T} + (M + m)g \frac{\partial Y}{\partial X} + c \frac{\partial Y}{\partial T} + (m + M) \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + SY = 0. \quad (\text{A.10})
 \end{aligned}$$



## Annexe B

# Obtention des pulsations et modes propres

### B.1 La méthode exacte du déterminant

A une pulsation complexe donnée supposons la déformée du tuyau de la forme  $y(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ . Introduite dans l'équation du mouvement, nous obtenons la relation de dispersion. La relation de dispersion pour un tuyau simple est donnée en (2.1). C'est un polynôme d'ordre 4 en  $k$  et nous avons donc quatre nombres d'onde  $k_j$ ,  $j = 1..4$ . La déformée du tuyau est donc de la forme

$$y(x, t) = \exp(-i\omega t)[A_1 \exp(ik_1 x) + A_2 \exp(ik_2 x) + A_3 \exp(ik_3 x) + A_4 \exp(ik_4 x)]. \quad (\text{B.1})$$

Cette expression doit satisfaire de plus les quatre conditions aux limites, dépendant du type d'extrémité en  $x = 0$  et  $x = 1$ . Pour un tuyau encastré des deux côtés, nous avons, d'après l'équation (1.4),

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0, \\ k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 = 0, \\ A_1 e^{ik_1} + A_2 e^{ik_2} + A_3 e^{ik_3} + A_4 e^{ik_4} = 0, \\ k_1 A_1 e^{ik_1} + k_2 A_2 e^{ik_2} + k_3 A_3 e^{ik_3} + k_4 A_4 e^{ik_4} = 0. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Ce système d'équations admet une solution non triviale si le déterminant de sa matrice est nul, soit

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ e^{ik_1} & e^{ik_2} & e^{ik_3} & e^{ik_4} \\ k_1 e^{ik_1} & k_2 e^{ik_2} & k_3 e^{ik_3} & k_4 e^{ik_4} \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Gregory et Païdoussis [25] ont proposé une méthodologie permettant d'obtenir les vitesses critiques pour le tuyau simple mais dans le cas général, une méthode numérique est nécessaire.

## B.2 La méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est très bien détaillée dans [42] dans le cas précis du tuyau. Nous nous contenterons ici d'en donner les grands principes en se servant du cas de la conduite encastrée libre pour l'illustrer. Nous cherchons ainsi à résoudre l'équation suivante

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta}u \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{B.4})$$

avec les conditions aux limites

$$y|_{x=0} = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Décomposons la déformée de la conduite sur la base des modes  $\Phi_n(x)$ ,  $n = 1, \infty$ ,

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) q_n(t). \quad (\text{B.6})$$

Dans notre cas la base modale choisie est constituée des modes propres du tuyau sans écoulement, c'est à dire les modes propres d'une poutre ayant les mêmes conditions aux limites. Dans le cas de la poutre encastrée-libre, nous avons [42, 5]

$$\Phi_n(x) = \cosh \lambda_n x - \cos \lambda_n x - \sigma_n (\sinh \lambda_n x - \sin \lambda_n x), \quad (\text{B.7})$$

avec

$$\cos \lambda_n \cosh \lambda_n + 1 = 0, \quad \sigma_n = \frac{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n}{\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n}. \quad (\text{B.8})$$

Ainsi, la déformée  $y(x, t)$ , telle qu'elle est construite en (B.6) satisfait toujours les conditions aux limites. Nous considérons de plus qu'une troncature à  $N$  modes est suffisante pour décrire de façon satisfaisante l'évolution du système. Introduit dans l'équation du mouvement, cela donne

$$\sum_{n=1}^N \left[ q_n (\Phi_n'''' + u^2 \Phi_n'') + 2\dot{q}_n \sqrt{\beta} u \Phi_n' + \ddot{q}_n \Phi_n \right] = 0, \quad (\text{B.9})$$

où  $(\ )'$  exprime la dérivée par rapport à la variable d'espace  $x$  tandis que  $(\ )\dot{\phantom{a}}$  exprime la dérivée par rapport au temps  $t$ . Multiplions cette dernière équation par  $\Phi_n$  et intégrons par rapport à  $x$  entre 0 et 1,

$$\sum_n \left[ q_n \int_0^1 (\Phi_n'''' \Phi_m + u^2 \Phi_n'' \Phi_m) dx + 2\dot{q}_n \sqrt{\beta} u \int_0^1 \Phi_n' \Phi_m dx + \ddot{q}_n \int_0^1 \Phi_n \Phi_m \right] = 0, \quad (\text{B.10})$$

Il est possible d'expliciter analytiquement les intégrales suivantes

$$l_{mn} = \int_0^1 \Phi_m \Phi_n'''' = \lambda_n^4 \delta_{mn}, \quad b_{mn} = \int_0^1 \Phi_m \Phi_n', \quad c_{mn} = \int_0^1 \Phi_m \Phi_n''. \quad (\text{B.11})$$

Considérant les matrices carrées  $B$  et  $C$ , de taille  $N$  et dont les éléments sont respectivement  $b_{mn}$  et  $c_{mn}$ , l'équation du mouvement peut alors être exprimée sous la forme matricielle

$$[M]\ddot{\mathbf{q}} + [C]\dot{\mathbf{q}} + [K]\mathbf{q} = 0. \quad (\text{B.12})$$

Il existe plusieurs manières de résoudre ce système couplé de  $N$  équations d'ordre 2 en temps. Pour les résultats présentés dans ce manuscrit le vecteur  $\mathbf{q}$  est décomposé en deux vecteurs distincts

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{q}, \quad \mathbf{X}_2 = \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

Ce qui permet d'obtenir le système couplé de  $2N$  équations du premier ordre en temps,

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -K & -C \end{bmatrix} \mathbf{X}. \quad (\text{B.14})$$

L'évolution du système est alors donnée par

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 e^{Lt} = \mathbf{X}_0 V^{-1} e^{\Lambda t} V, \quad (\text{B.15})$$

où  $\Lambda$  est la matrice diagonale composée des  $2N$  valeurs propres  $\lambda_j$  de  $L$  et  $V$  la matrice composée des vecteurs propres de  $L$  en colonnes. Ainsi, si une des valeurs propres de  $L$  a une partie réelle positive, le mouvement est instable. Remarquons aussi qu'une valeur propre de  $L$  ayant une partie imaginaire non nulle conduit à un mouvement oscillant.

Pour utiliser les mêmes références que dans l'approche locale, laquelle considère qu'à une pulsation propre  $\omega_j$  est associée l'évolution  $\exp(-i\omega_j t)$ , utilisons plutôt la pulsation  $\omega_j = -i\lambda_j$ . Ainsi, si il existe une pulsation propre ayant une partie imaginaire positive, alors le système est instable. La figure B.1 présente les pulsations propres du tuyau encastré-libre pour  $\beta = 0.5$  et  $u = 11$ . Nous avons dans ce cas  $n = 10$  et donc 20 pulsations propres apparaissent sur cette figure. Deux pulsations propres ont une partie imaginaire positive, et donc le système est instable.

### B.3 Méthodes numériques utilisées

Tous les calculs numériques présentés dans ce manuscrit ont été effectués avec MATLAB ou SCILAB en utilisant les fonctions standard. Les calculs les plus longs ont duré quelques heures.

Les calculs dans le plan complexe  $\omega$  des figures 1.6, 2.2, 2.3 et 2.4 ont nécessité l'identification des branches spatiales dans tout le domaine de la pulsation complexe  $\omega$ . Pour cela, les nombres d'onde  $k^+$  et  $k^-$  pour  $\text{Im}(\omega) > \sigma_{max}$  sont identifiés à l'aide de la fonction prédéfinie ROOTS. Le taux de croissance  $\text{Im}(\omega)$  est alors diminué et les branches sont construites en recherchant le nombre d'onde le plus proche à chaque étape.

Les courbes marginales de stabilité ont été obtenues de deux manières différentes. Dans les cas simples où la courbe de stabilité est une bijection, un algorithme de recherche du zéro d'une fonction a été utilisé, la fonction à annuler étant la partie imaginaire de la pulsation la plus instable. Dans les cas où la courbe de stabilité est plus complexe, la pulsation la plus instable du système est calculée dans tout le domaine de paramètres et la courbe marginale de stabilité est approchée en utilisant les fonctions graphiques de tracé de contour de MATLAB ou SCILAB.

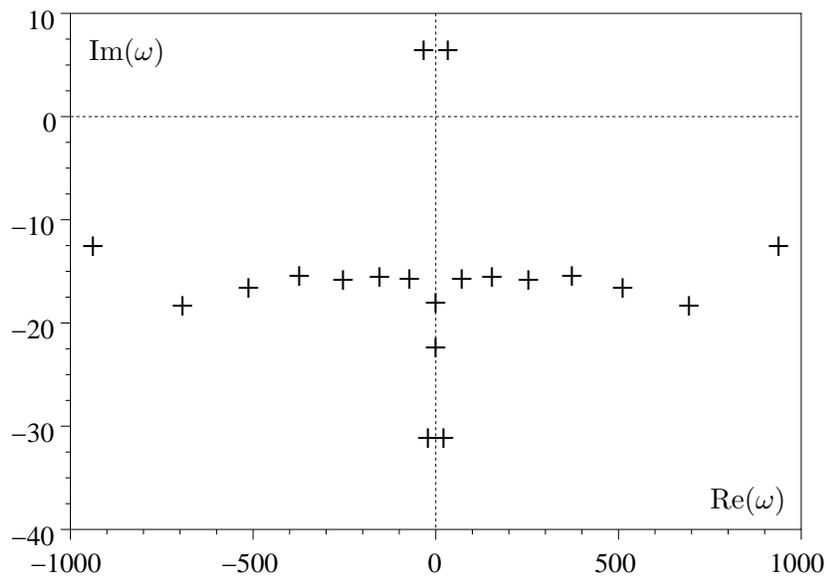


FIG. B.1: Pulsations propres du tuyau simple pour  $\beta = 0.5$  et  $u = 11$ .

## Annexe C

# Données expérimentales

Les mesures expérimentales données dans cette annexe se rapportent aux travaux présentés au chapitre 4. Nous donnons à la fois le débit critique d'apparition de l'instabilité  $Q_i$  lorsque l'on augmente le débit et celui de restabilisation  $Q_h$ , lors de la diminution. La différence entre  $Q_i$  et  $Q_h$  constitue la manifestation d'un cycle d'hystérésis dû aux non-linéarités. Les débits  $Q_h$  mesurés sont donnés, bien qu'il n'aient pas été utilisés par l'analyse de ce manuscrit.

Tuyau n° 1

$EI$ (N.m <sup>2</sup> )	$D$ (m)	$m$ (Kg.m <sup>-1</sup> )	$M$ (Kg.m <sup>-1</sup> )	$\beta$
9.9E-4	4E-3	4.56E-2	1.26E-2	0.22

$L$ (m)	$Q_i$ (L/mn)	$Q_h$ (L/mn)	$F$ (min <sup>-1</sup> )
0.20	7.80	6.80	380
0.25	6.50	5.75	310
0.30	5.65	5.20	225
0.35	5.25	4.75	190
0.40	4.80	4.50	165
0.45	4.75	4.45	170
0.50	4.60	4.30	162
0.55	4.35	4.05	145
0.60	4.20	3.95	130
0.65	4.10	3.85	118
0.70	3.95	3.75	115
0.75	3.85	3.70	115
0.80	3.85	3.60	110
0.85	3.70	3.40	110
0.90	3.70	3.45	110
0.95	3.70	3.50	110
1.00	4.00	3.75	125
1.04	4.00	3.70	118
1.18	3.75	3.40	115

Tuyau n° 2

$EI$ (N.m <sup>2</sup> )	$D$ (m)	$m$ (Kg.m <sup>-1</sup> )	$M$ (Kg.m <sup>-1</sup> )	$\beta$
8.16E-4	3.2E-3	2.18E-2	8E-3	0.27

$L$ (m)	$Q_i$ (L/mn)	$Q_h$ (L/mn)	$F$ (min <sup>-1</sup> )
0.30	4.35	4.10	330
0.35	3.75	3.45	266
0.40	3.30	3.10	216
0.45	3.15	3.00	210
0.50	3.05	2.80	185
0.55	2.90	2.75	163
0.60	2.75	2.60	159
0.65	2.70	2.60	145
0.70	2.65	2.55	139
0.75	2.60	2.50	129
0.80	2.60	2.45	130
0.85	2.60	2.45	117
0.90	2.60	2.45	118
0.95	2.60	2.45	113
1.00	2.65	2.50	138
1.10	2.60	2.50	133

Tuyau n° 3

$EI$ (N.m <sup>2</sup> )	$D$ (m)	$m$ (Kg.m <sup>-1</sup> )	$M$ (Kg.m <sup>-1</sup> )	$\beta$
1.0E-3	5E-3	4.22E-2	1.96E-2	0.32

$L$ (m)	$Q_i$ (L/mn)	$Q_h$ (L/mn)	$F$ (min <sup>-1</sup> )
0.35	7.75	7.55	202
0.40	7.00	6.85	164
0.45	6.50	6.40	150
0.50	6.30	6.10	138
0.55	6.20	5.95	130
0.60	6.15	5.95	127
0.65	5.80	5.70	122
0.70	5.80	5.70	120
0.75	5.65	5.50	115
0.80	5.55	5.30	119
0.85	5.55	5.25	118
0.90	5.50	5.25	116
1.00	5.35	5.00	116
1.22	5.30	5.00	109

Tuyau n° 4

$EI$ (N.m <sup>2</sup> )	$D$ (m)	$m$ (Kg.m <sup>-1</sup> )	$M$ (Kg.m <sup>-1</sup> )	$\beta$
2.2E-4	4E-3	1.72E-2	1.26E-2	0.42

$L$ (m)	$Q_i$ (L/mn)	$Q_h$ (L/mn)
0.35	3.25	3.00
0.25	4.20	3.55
0.15	6.50	5.50
0.20	5.10	4.25
0.30	3.65	3.25
0.40	3.05	2.85
0.50	3.00	2.85
0.60	2.85	2.75
0.70	2.95	2.85
0.80	2.90	2.70
0.90	2.95	2.75
1.00	3.00	2.70
1.10	2.85	2.75
1.20	2.80	2.65

$L$ (m)	$F$ (min <sup>-1</sup> )
0.20	490
0.25	290
0.30	275
0.35	270
0.40	240
0.45	215
0.50	220
0.50	215

Tuyau n° 5

$EI$ (N.m <sup>2</sup> )	$D$ (m)	$m$ (Kg.m <sup>-1</sup> )	$M$ (Kg.m <sup>-1</sup> )	$\beta$
1.55E-4	4E-3	1.51E-2	1.26E-2	0.45

$L$ (m)	$Q_i$ (L/mn)	$Q_h$ (L/mn)
0.15	5.40	5.30
0.20	4.65	4.55
0.25	3.70	3.55
0.30	3.30	3.20
0.35	3.20	3.05
0.40	3.00	2.90
0.45	2.90	2.75
0.50	2.75	2.65
0.55	2.70	2.50
0.60	2.75	2.45
0.65	2.70	2.50
0.70	2.70	2.55
0.75	2.70	2.50

# Annexe D

## Articles

### **D.1 Local and global instability of fluid-conveying pipes on elastic foundations**

O. Doaré and E. de Langre, Local and global instability of fluid-conveying pipes on elastic foundations, *Journal of Fluids and Structures*, 16 :1, 2002.

### **D.2 Force suiveuse critique sur une colonne pesante semi-infinie : modèles et expériences**

E. de Langre, O. Doaré, and F. Pellet, Force suiveuse critique sur une colonne pesante semi-infinie : Modèle et expériences, *Comptes rendus de l'académie des sciences, Série IIb*, 329 :175–178, 2001.

### **D.3 The flow-induced instability of long hanging pipes**

O. Doaré and E. de Langre, The flow-induced instability of long hanging pipes, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2002, in press.