

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité Mécanique

Présentée par

Marie LE MERRER

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

**Dissipation aux interfaces :
caléfaction, sillages, filaments visqueux**

Soutenance prévue le 10 septembre 2010 devant le jury composé de :

M.	Yacine Amarouchene	Rapporteur
Mme	Elisabeth Charlaix	Rapporteur
M.	Christophe Clanet	Directeur de thèse
M.	Yves Couder	
M.	L. Mahadevan	
M.	David Quéré	Directeur de thèse

Table des matières

Introduction	5
I Frictions de gouttes en caléfaction	9
1 Caléfaction sur un solide : autopropulsion	13
1.1 Généralités sur les gouttes en caléfaction	14
1.2 Autopropulsion sur un toit d'usine	22
1.3 Mécanismes de propulsion	26
Bibliographie	33
2 Caléfaction sur un solide : friction	35
2.1 Frictions de goutte	36
2.2 Friction sur une surface décorée : les créneaux	43
2.3 Friction sur un toit d'usine	50
Bibliographie	53
3 Caléfaction sur un liquide : résistance de vague	55
3.1 Statique	56
3.2 Décélération d'une goutte : la résistance de vague	61
Bibliographie	74
II Déformations de filaments visqueux	79
4 Flambage visqueux	83

4.1	Introduction au flambage visqueux	83
4.2	Flambage d'un filament en compression	89
	Bibliographie	101
5	Plectonèmes visqueux	103
5.1	Plectonèmes élastiques	104
5.2	Plectonèmes visqueux	108
	Bibliographie	116
6	Chute de filaments visqueux	117
6.1	Sélection de forme	118
6.2	Chaînette visqueuse	126
6.3	Filaments en U	132
	Bibliographie	138
7	Chute de filaments viscoélastiques	141
7.1	De nouvelles formes	142
7.2	Solutions de polymère	142
7.3	Filaments suspendus	149
7.4	Chaînettes visco-élastiques	152
7.5	Des ondes sur des filaments liquides	161
	Bibliographie	166
	Conclusion	171
	Annexes	173
A	Caléfaction avec de la carboglace	175
B	Caléfaction sur une marche : rôle de l'ébullition	179
	Bibliographie	181
C	Oscillations de gouttes sur un cercle	183
D	Gel de gouttes sur des surfaces superhydrophobes	191
E	Résistance de vague sur une sphère immergée	195
	Bibliographie	198

Ce travail de thèse s'attache à étudier différents objets liquides, dont le point commun est de présenter des interfaces en mouvement. Nous cherchons plus particulièrement à comprendre le rôle de la dissipation dans ces mouvements, et dans quelle mesure celle-ci est affectée par la présence des interfaces.

Frictions de gouttes en caléfaction

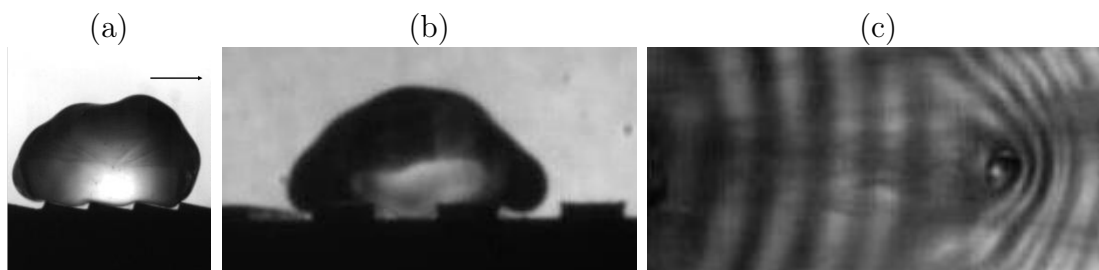


FIGURE 1 – Goutte en caléfaction sur un toit d'usine (a), sur une surface crénelée (b) et à la surface de l'eau (c, vue aérienne).

Dans la première partie, nous nous intéressons au mouvement de gouttes qui lèvitent sur un mince film de vapeur¹ (caléfaction). La question centrale est celle de la friction de ces objets quand ils se déplacent soit sur des surfaces rigides texturées, soit sur des surfaces liquides déformables.

Linke *et al.*² ont montré que de telles gouttes avancent spontanément sur un support en « dents de scie » (figure 1(a)). Notre contribution est ici d'identifier le

1. J.G. Leidenfrost. *De Aquae Communis Nonnullis Qualitatibus Tractatus*. Duisburg, 1756

2. H. Linke, B. J. Alemán, L. D. Melling, M. J. Taormina, M. J. Francis, C. C. Dow- Hygelund,

mécanisme physique responsable du mouvement (chapitre 1). Nous mesurons ensuite la friction de ces gouttes sur des solides lisses ou crénelés (figure 1(b)), rendue spéciale par la présence du film de vapeur qui sépare solide et liquide (chapitre 2). La compétition entre propulsion et friction nous permet ainsi d'expliquer les vitesses terminales mesurées sur le dispositif de Linke.

Au chapitre 3, nous regardons la décélération de gouttes d'azote liquide en cavéfaction sur des surfaces déformables (eau et huiles). Ce déplacement engendre un sillage d'ondes à la surface de l'eau, qui est à l'origine de la friction subie par ces gouttes (figure 1(c)). On dispose ainsi d'un système modèle pour mesurer la résistance de vague³.

Déformations de filaments visqueux

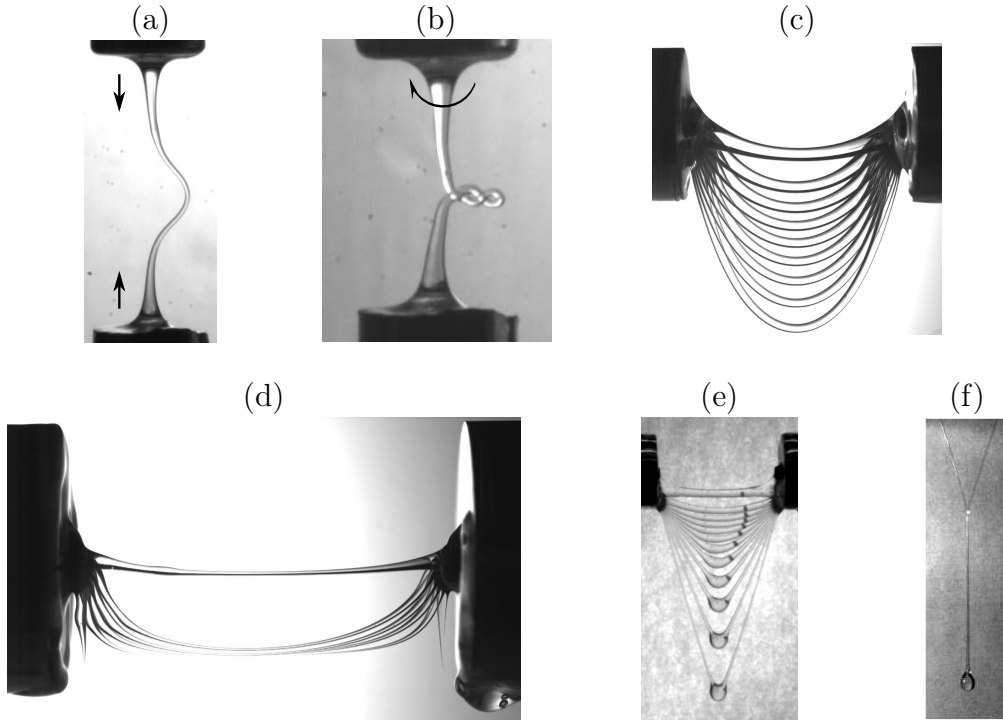


FIGURE 2 – Différentes déformations de filaments visqueux ou viscoélastiques.

Dans une seconde partie, nous étudions les déformations de filaments liquides très visqueux. La présence d'interfaces libres implique l'absence de cisaillement dans les

V. Narayanan, R. P. Taylor, and A. Stout. Self-propelled leidenfrost droplets. *Physical Review Letters*, 96(15) :154502, 2006.

3. E. Raphaël and P.-G. de Gennes. Capillary gravity waves caused by a moving disturbance : Wave resistance. *Phys. Rev. E*, 53(4) :3448–3455, 1996.

filaments, dont la dynamique est alors dominée par les écoulements élongationnels. Les formes observées sont très variées (figure 2) et nous nous attachons à comprendre leur origine et leur évolution.

- Les filaments comprimés se courbent (a) : un flambage visqueux⁴ se produit, dans une géométrie analogue à celle d’une tige élastique en compression (chapitre 4).
- Les filaments tordus s’enroulent (b), sculptant des formes originales de plectonèmes visqueux (chapitre 5).
- Les filaments horizontaux dans le champ de la gravité prennent des formes différentes suivant la répartition de leur masse, en chaînette⁵ (c) ou en U⁶ (d), suivant un critère que nous déterminons (chapitre 6). Si l’on ajoute des effets élastiques à ce phénomène, des formes en V (e) ou en Y (f) peuvent aussi être observées (chapitre 7).

4. G.I. Taylor. Instability of jets, threads and sheets of viscous fluids. *Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics*, p. 382, 1969.

5. J. Teichman and L. Mahadevan. The viscous catenary. *Journal of Fluid Mechanics*, 478 :71–80, 2003.

6. J.P. Koulakis, C. D. Mitescu, F. Brochard-Wyart, P.-G. de Gennes, and E. Guyon. The viscous catenary revisited : experiments and theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 609 :87–110, 2008.

Première partie

Frictions de gouttes en caléfaction

Posons une goutte d'eau sur une plaque chauffée à 300 °C. Contrairement à ce que l'on attendrait, cette goutte ne disparaît pas instantanément mais persiste, posée sur un film de vapeur qu'elle alimente par sa lente évaporation. On dit alors qu'elle est en caléfaction, ou encore dans l'état de Leidenfrost. L'absence de contact avec leur support confère à ces objets une très grande mobilité que nous étudions dans ce travail, dédié à leur mouvement sur différents substrats.

Nous présentons dans un premier temps quelques caractéristiques générales des gouttes en caléfaction. Nous cherchons en particulier à comprendre pourquoi, posées sur un substrat sculpté en toit d'usine, ces gouttes avancent spontanément, à une vitesse bien définie (chapitre 1).

Nous caractérisons ensuite la friction subie par ces objets. Sur un solide (chapitre 2), celle-ci est très faible du fait de l'absence de contact avec la plaque. En revanche, si le solide présente un relief important, il modifie la forme de la goutte et la friction augmente.

Au chapitre 3, nous regardons enfin la décélération d'une goutte de Leidenfrost sur un autre liquide. Le sillage de vague créé lors de son déplacement est alors le responsable principal de la friction.

Caléfaction sur un solide : autopropulsion

Sommaire

1.1	Généralités sur les gouttes en caléfaction	14
1.1.1	Qu'est-ce qu'une goutte en caléfaction?	14
1.1.2	Forme d'une goutte en caléfaction	16
1.1.3	Mécanismes d'évaporation et conséquences	19
1.2	Autopropulsion sur un toit d'usine	22
1.2.1	L'expérience de Linke	22
1.2.2	Mesure de la force de propulsion	24
1.3	Mécanismes de propulsion	26
1.3.1	Plusieurs mécanismes possibles	26
1.3.2	Effet fusée	29
1.3.3	Mouvement de la goutte	31
	Bibliographie	33

avec Guillaume Lagubeau. Les surfaces utilisées ont été fabriquées par David Renard, Laurent Quartier et Guillaume Clermont.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un mouvement d'autopropulsion de gouttes en caléfaction. Les gouttes en caléfaction sont des gouttes d'eau ou d'éthanol posées sur un substrat très chaud (environ 300 °C) qui leur confère un certain nombre de propriétés, que nous rappelons dans une première partie. Dans un deuxième temps, nous présentons le dispositif découvert par Linke [1] que nous utilisons pour déplacer ces gouttes sans contact : il s'agit d'un substrat asymétrique, en forme

de toit d'usine. Enfin, nous présentons nos travaux pour identifier le mécanisme à l'origine du mouvement spontané des gouttes.

1.1 Généralités sur les gouttes en caléfaction

1.1.1 Qu'est-ce qu'une goutte en caléfaction ?

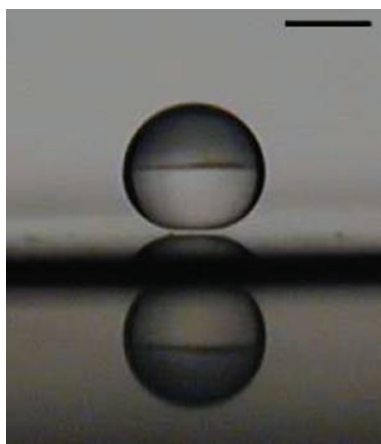


FIGURE 1.1 – Goutte d'eau en caléfaction sur une plaque chauffante (cliché tiré de [2]). L'échelle en haut à droite de la photo représente 1 mm.

Lorsqu'on pose une goutte d'eau millimétrique sur une plaque chauffée à plus de 100 °C, on peut légitimement s'attendre à ce qu'elle s'évapore très rapidement au contact de la plaque. Or ce n'est pas toujours ce que l'on observe. Quand la température de la plaque est plus élevée qu'une certaine température, nommée température de Leidenfrost [3], un film de vapeur d'eau se forme entre la plaque et la goutte d'eau. Une telle goutte (dont on peut voir un exemple sur la figure 1.1, où l'on distingue bien le film de vapeur) est alors dite goutte de Leidenfrost, ou encore goutte en caléfaction.

Le film de vapeur sous la goutte a une épaisseur de 10 à 100 microns et il a deux propriétés principales. La première est qu'il isole l'eau de la plaque, limitant fortement l'évaporation. La goutte s'évapore moins vite et persiste donc plus longtemps, jusqu'à une minute, alors qu'à des températures plus faibles, sa durée de vie n'est qu'une fraction de seconde (figure 1.2). La mesure du « temps de vie » d'une goutte de volume initial donné en fonction de la température permet ainsi de mesurer la température de Leidenfrost, pour laquelle ce temps de vie est maximal [4].

Une deuxième propriété du film de vapeur est qu'il empêche tout contact entre le liquide et le solide, ce qui place la goutte dans une situation de non-mouillage

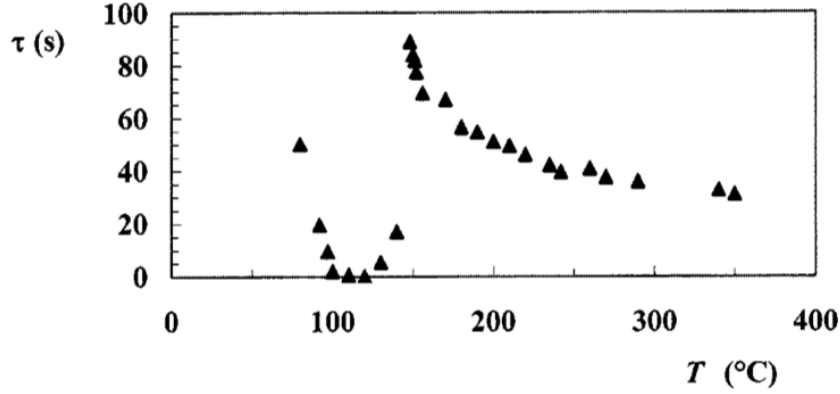


FIGURE 1.2 – Durée de vie τ d'une goutte d'eau de rayon $R = 1$ mm, en fonction de la température T de la plaque (figure tirée de [4]).



FIGURE 1.3 – Plusieurs situations de mouillage, caractérisées par différents angles de contact θ : mouillage total $\theta = 0$, mouillage partiel hydrophile $\theta < 90^\circ$, mouillage partiel hydrophobe $\theta > 90^\circ$ et mouillage nul $\theta = 180^\circ$

parfait : l'angle de contact θ , qui est l'angle entre la surface de l'eau et la surface du substrat, vaut 180° (figure 1.3).

Une conséquence du mouillage nul est de rendre les gouttes très mobiles : le liquide ne touche pas du tout le solide, qui ne peut donc pas être à l'origine d'une quelconque friction. De très faibles forces suffisent à faire se mouvoir des gouttes en caléfaction, qui sont ainsi très difficiles à immobiliser, ce qui rend les expériences statiques avec ces gouttes très délicates. C'est en particulier cette propriété de très grande mobilité que nous avons exploitée dans ce travail de thèse, soit pour mouvoir des gouttes de Leidenfrost avec de très faibles forces (c'est ce que nous étudierons dans ce chapitre), soit pour les utiliser comme « sondes » pour mesurer des forces très faibles (dans le chapitre 3).

Précisons ici que nous avons utilisé soit des liquides « classiques » (tels que l'eau ou l'éthanol) sur des plaques chauffées autour de 300°C , soit de l'azote liquide, qui a la particularité d'être en caléfaction sur la plupart des substrats à température ambiante, la température de vaporisation de l'azote étant de -196°C . Ce liquide s'évapore certes plus vite dans une atmosphère à 20°C , mais il autorise une plus

grande variété de substrats, puisqu'il n'est plus nécessaire de les chauffer.

1.1.2 Forme d'une goutte en caléfaction

Comme la goutte est en mouillage nul, on peut calculer sa forme sur un substrat horizontal. Cette forme résulte d'une compétition entre tension de surface et gravité. En effet, un liquide est un état de la matière cohésif, et toute interface a un coût énergétique, caractérisé par la tension de surface γ du liquide (ou plus rigoureusement de l'interface liquide-vapeur) : l'énergie liée à l'existence d'une surface S s'écrit γS . La tension de surface tend ainsi à rendre les gouttes sphériques pour minimiser leur surface.

À l'inverse, la gravité veut aplanir les objets. En effet, pour un volume donné, l'énergie potentielle de pesanteur va diminuer si la goutte est étalée, ce qui lui confère une altitude moyenne plus faible.

La forme des gouttes en caléfaction va être celle qui minimise l'énergie, qui est la somme de l'énergie de pesanteur et de l'énergie de surface. Pour une goutte sphérique de rayon R , l'énergie de surface varie comme γR^2 , tandis que son énergie potentielle de pesanteur s'écrit $\rho g R^4$ (où ρ est la masse volumique du liquide et g l'accélération due à la pesanteur). Ces deux énergies seront du même ordre pour $R \sim a = \sqrt{\gamma/\rho g}$. a est la longueur capillaire, en général millimétrique : pour de l'eau à 100 °C, a vaut 2,5 mm, pour de l'éthanol à l'ébullition (79 °C), elle vaut 1,6 mm et pour de l'azote liquide, elle vaut 1,1 mm. La forme des gouttes dépendra donc du rapport de leur taille (ou plus précisément de leur rayon équatorial R) à la longueur capillaire a .

On cherche le rayon de la goutte $r(z)$ où z représente l'altitude (par convention, on prendra l'axe des z en descendant et $z = 0$ comme correspondant au point sur l'axe de la goutte) (figure 1.4). On paramètre cette courbe par son abscisse curviligne s . On note $\alpha(s)$ l'angle entre la surface et l'horizontale à l'abscisse s , ce qui donne $\cos \alpha = \frac{dr}{ds}$ et $\sin \alpha = \frac{dz}{ds}$.

De façon équivalente à la minimisation de l'énergie totale, la courbe $r(z)$ peut se calculer par un équilibre de pressions. Quelle influence ont gravité et tension de surface sur les pressions d'équilibre dans la goutte ? D'une part, la goutte obéit à la loi de la statique des fluides : $\frac{dP}{dz} = \rho g$. D'autre part, on sait qu'à l'existence d'une interface courbée, de courbure moyenne κ , est associée celle d'un saut de pression à cette interface $\Delta P = \gamma \kappa$: c'est la loi de Laplace. Ainsi, une bulle de savon est en surpression par rapport à l'air ambiant, ce dont on peut avoir une bonne intuition en la gonflant.

Si P_0 est la pression de l'air autour de la goutte, la pression en un point de la goutte sous la surface à l'altitude z s'écrit, d'après la loi de Laplace, $P(z) = P_0 + \gamma \kappa = P_0 + \gamma \left(\frac{\sin \alpha}{r} + \frac{d\alpha}{ds} \right)$. Au sommet de la goutte, la courbure vaut κ_0 , la pression vaut donc $P_0 + \gamma \kappa_0$. Par ailleurs, cette surpression liée à la courbure équilibre la pression

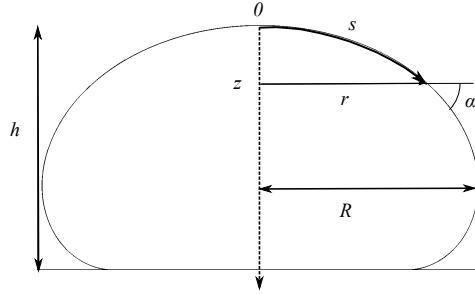


FIGURE 1.4 – Schéma d'une goutte posée en mouillage nul. On repère la forme de la goutte à l'aide de l'abscisse curviligne s , du rayon horizontal r et de l'altitude z .

hydrostatique, car on a $P(z) = P_0 + \gamma\kappa_0 + \rho gz$. L'équation à résoudre pour trouver la forme de la surface de la goutte est donc :

$$P_0 + \gamma\kappa = P_0 + \gamma\kappa_0 + \rho gz$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$a\kappa = a\kappa_0 + \frac{z}{a} \quad (1.1)$$

qui fait apparaître la longueur capillaire a . La forme d'une goutte posée va donc être déterminée par le paramètre $a\kappa_0$, c'est-à-dire par sa courbure au sommet, et par l'angle de contact θ , qui vaut ici 180° . En utilisant l'abscisse curviligne, (1.1) se réécrit

$$a \left(\frac{\sin \alpha}{r} + \frac{d\alpha}{ds} \right) = a\kappa_0 + \frac{z}{a} \quad (1.2)$$

Cette équation peut se résoudre numériquement, la condition aux limites étant donnée par l'angle de contact : $\alpha = \theta = \pi$. On obtient alors des formes comme celles de la figure 1.5, pour lesquelles on peut calculer le volume Ω et la hauteur h en fonction du rayon équatorial R (figure 1.6).

Suivant la valeur de $a\kappa_0$, on peut écrire (1.1) de façon approchée. On identifie alors deux régimes limites, qui correspondent à R plus petit ou plus grand que a .

- Premier régime : $a\kappa \approx a\kappa_0$. La courbure est constante (la tension de surface domine), la goutte est donc une calotte sphérique. Comme nous sommes ici dans une situation de mouillage nul, on s'attend à ce que la goutte soit une sphère parfaite. En réalité, comme l'ont étudié Mahadevan et Pommeau [5], celle-ci est légèrement déformée par la gravité : elle s'écrase sur une surface l^2 (figure 1.7(a)), ce qui lui permet d'abaisser son centre de gravité. On peut évaluer l en écrivant que la surpression sous la goutte γ/R (l'interface du

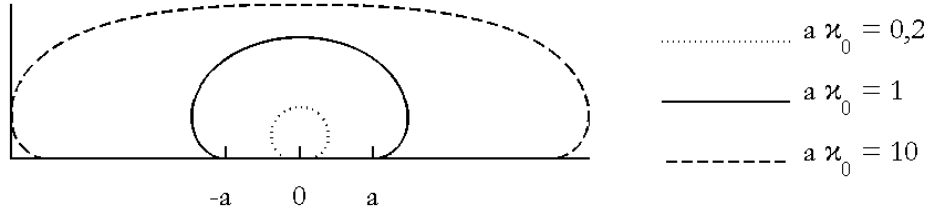


FIGURE 1.5 – Formes d’une goutte d’eau non-mouillante, pour différentes courbures au sommet.

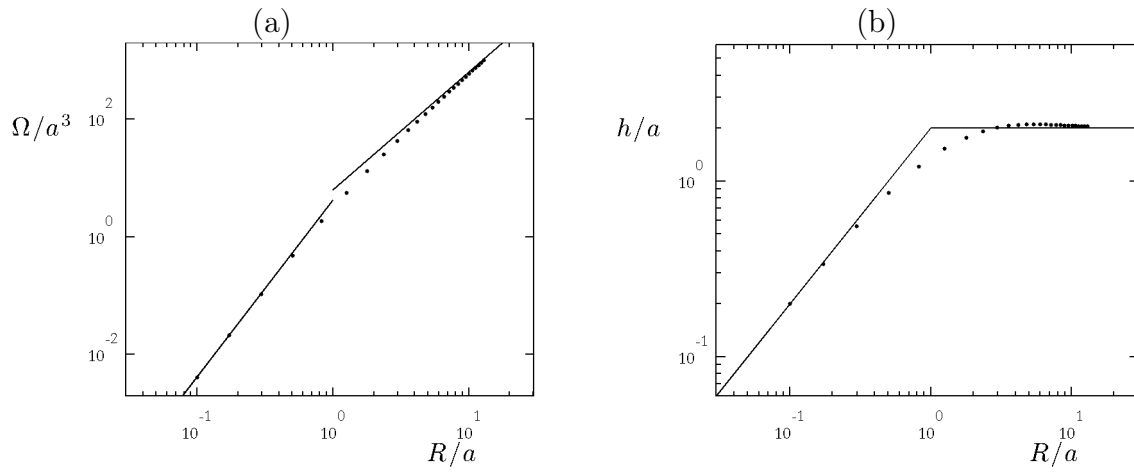


FIGURE 1.6 – Résultats de la prédiction de la forme d’une goutte non-mouillante : (a) volume adimensionné Ω/a^3 et (b) hauteur adimensionnée h/a de la goutte, en fonction du rayon équatorial adimensionné R/a . Sur la figure (a), les deux droites correspondent à une variation en R^3 puis en R^2 . Sur la figure (b), la première droite correspond à $h \sim R$, la deuxième à $h = 2a$.

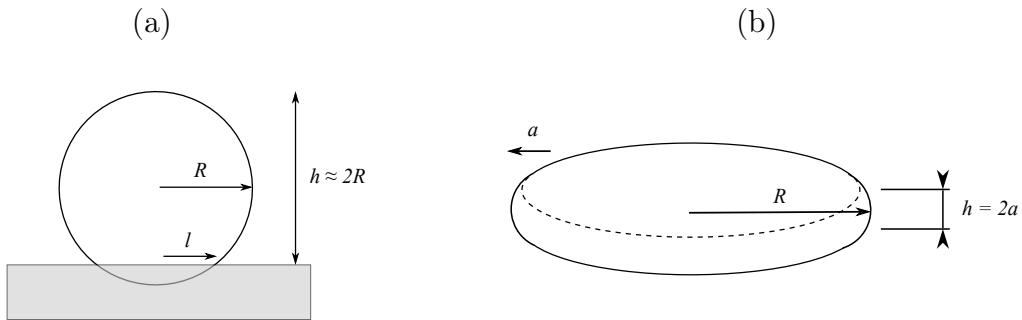


FIGURE 1.7 – Formes limites des gouttes : (a) $R < a$ et (b) $R > a$.

dessous est plane et γ/R est la surpression dans la goutte) compense celle due au poids de la goutte $\rho g R^3/l^2$. On trouve alors que l'étendue l de la surface écrasée, qui correspond au film de vapeur, varie comme R^2/a . Ce régime est valable tant que $z/a \ll a\kappa_0$, soit pour $R \ll a$: les petites gouttes sont sphériques. On vérifie d'ailleurs sur la figure 1.6 que, pour $R < a$, le volume Ω varie comme R^3 et la hauteur h comme R .

- Deuxième régime : $a\kappa_0 \ll z/a$. La courbure sur l'axe est très faible, car la gravité écrase les gouttes (cela correspond au cas de la plus grosse goutte à la figure 1.5). Elles prennent donc une forme de cylindre plat (figure 1.7(b)), sauf sur les bords dont l'équation est celle d'un ménisque : $a\kappa \approx z/a$. La résolution de cette équation donne l'étendue latérale du ménisque, d'ordre a — on observera ainsi des flaques pour $R \gg a$ — et la hauteur de la goutte $h = a\sqrt{2(1 - \cos \theta)} = 2a$. Une flaque en caléfaction a donc une épaisseur de deux fois la longueur capillaire, comme on le voit sur la figure 1.6(b), soit 5 mm pour de l'eau. On vérifie bien par ailleurs que le volume Ω varie comme R^2 pour $R > a$ (figure 1.6(a)).

Ces formes de gouttes en mouillage nul, que l'on peut aussi observer dans d'autres situations — pour des gouttes d'eau enrobées de grains hydrophobes par exemple [6] — ont bien été vérifiées expérimentalement dans le cas des gouttes en caléfaction par A.-L. Biance [2].

1.1.3 Mécanismes d'évaporation et conséquences

Une goutte en caléfaction est donc posée sur un film de vapeur, qu'elle alimente par son évaporation. Or le flux de vapeur s'échappe par les bords de la goutte, comme schématisé sur la figure 1.8, et c'est cet écoulement qui supporte le poids de la goutte, via la contrainte visqueuse qu'il engendre. L'épaisseur du film de vapeur et la vitesse d'évaporation sont donc liées par plusieurs relations que nous détaillons ci-dessous dans les cas limites de gouttes aplaties ($R > a$) ou sphériques ($R < a$).

Flaques ($R > a$)

Comme on l'a dit, le flux de vapeur est alimenté par l'évaporation de la goutte. Cette évaporation est entretenue par le flux de chaleur sous la goutte, qui est diffusif. Le flux de chaleur est alors proportionnel à λ la diffusivité thermique de la vapeur, $\Delta T/e$ le gradient de température (ΔT est la différence de température entre la goutte, qui est à la température d'ébullition du liquide, et la plaque, et e est l'épaisseur du film de vapeur) et à la surface d'échange, qui est la surface horizontale de la goutte πR^2 (figure 1.8). Si M est la masse de la goutte, sa dérivée temporelle $\dot{M}$ est le taux d'évaporation, et on a alors (aux dimensions) :

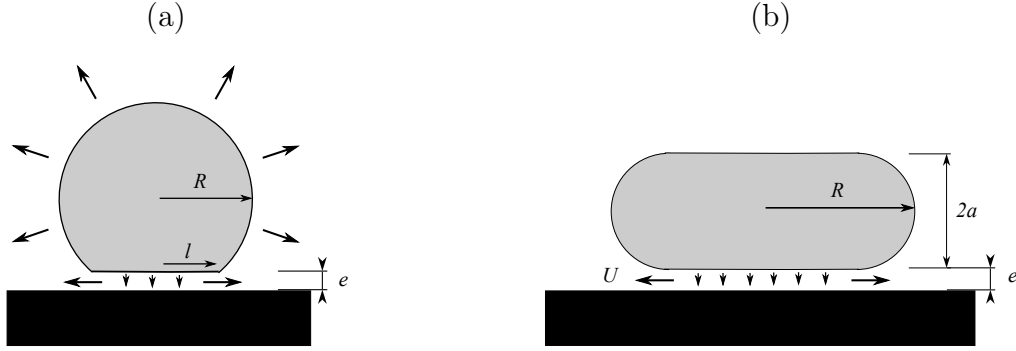


FIGURE 1.8 – La goutte est supportée par le flux de vapeur dû à l'évaporation : limites (a) $R < a$ et (b) $R > a$.

$$\mathcal{L}\dot{M} \sim \lambda \frac{\Delta T}{e} R^2$$

où $\mathcal{L}$ est la chaleur latente de vaporisation du liquide de la goutte.

La vapeur formée s'échappe par les côtés du film de vapeur, qui ont une surface $2\pi Re$. Si on note U la vitesse latérale d'éjection de la vapeur, la conservation de la masse conduit à :

$$\dot{M} \sim \rho_v U R e$$

ρ_v étant la masse volumique de la vapeur.

Enfin, du point de vue mécanique, la force visqueuse générée par l'écoulement soutient le poids de la goutte. On a donc :

$$Mg \sim \rho g R^2 a \sim \eta U \frac{R^3}{e^2}$$

avec ρ la masse volumique du liquide de la goutte.

Ces trois équations permettent de prédire l'épaisseur du film de vapeur e , le taux d'évaporation $\dot{M}$ et la vitesse de la vapeur U . En introduisant la longueur $b = (\lambda \eta \Delta T / \mathcal{L} \rho_v \rho g a)^{1/2}$ qui dépend des caractéristiques, notamment thermiques, de notre système, on trouve :

$$e \sim (bR)^{1/2} \quad (1.3)$$

$$\dot{M} \sim \frac{\lambda \Delta T}{\mathcal{L}} \frac{R^{3/2}}{b^{1/2}} \quad (1.4)$$

$$U \sim \frac{\lambda \Delta T}{\rho_v \mathcal{L} b} \quad (1.5)$$

Pour de l'eau sur une plaque chauffante, on calcule $b \sim 3 \mu\text{m}$; si $R \sim 3 \text{ mm}$, alors $e \sim 100 \mu\text{m}$, de l'ordre de grandeur de ce que l'on peut mesurer [4]. On calcule également que la vitesse U est de l'ordre du mètre par seconde, ce qui nous permet d'évaluer le nombre de Reynolds de cet écoulement $\text{Re} = \rho_v U e / \eta \approx 1 \times 10^{-4} / 10^{-5} \approx 10$. Dans cette géométrie confinée, Re est à comparer au rapport d'aspect $R/e \approx 3/0,1 \approx 30$. On voit donc que $\text{Re} < R/e$ mais Re n'est pas très petit devant R/e : on est ici à la limite du cadre de l'approximation de lubrification.

Gouttes sphériques ($R < a$)

Dans ce cas, l'équilibre mécanique est inchangé, à ceci près que la surface du film de vapeur n'est plus la surface horizontale de la goutte R^2 , mais la surface sur laquelle la goutte s'écrase $l^2 \sim R^4/a^2$ (figure 1.8). On a donc :

$$\rho g R^3 \sim \eta U \frac{l^3}{e^2} \sim \eta U \frac{R^6}{a^3 e^2}$$

Cependant, pour les petites gouttes, l'évaporation n'a plus simplement lieu dans le film de vapeur mais sur toute leur surface, qui dans ce cas est beaucoup plus grande que la surface l^2 du film de vapeur. En effet, l'air environnant est chauffé par la plaque, et le flux de chaleur s'écrit alors $\lambda R^2 \frac{\Delta T}{R} \sim \lambda R \Delta T$. Le taux d'évaporation est donc donné par :

$$\mathcal{L} \dot{M} \sim \lambda R \Delta T \quad (1.6)$$

Seule une fraction $l^2/R^2 \sim (R/a)^2$ de la vapeur alimente le film sous-jacent, la conservation de la masse s'écrit donc :

$$\dot{M} \left(\frac{R}{a} \right)^2 \sim \rho_v U l e \sim \rho_v U R^2 e / a$$

On trouve alors :

$$e \sim \frac{R^{4/3} b^{2/3}}{a} \quad (1.7)$$

$$\dot{M} \sim \frac{\lambda \Delta T}{\mathcal{L}} R \quad (1.8)$$

$$U \sim \frac{\lambda \Delta T}{\rho_v \mathcal{L}} \frac{1}{R^{1/3} b^{2/3}} \quad (1.9)$$

Précisons ici qu'à la fois les ordres de grandeur ($e \sim 10 - 100 \mu\text{m}$, $\dot{M} \sim 1 \text{ mg/s}$, $U \sim 1 \text{ m/s}$) et les lois d'échelle obtenus par ces arguments ont été vérifiés quantitativement dans les expériences d'A.-L. Biance [2, 4].

1.2 Autopropulsion sur un toit d'usine

1.2.1 L'expérience de Linke

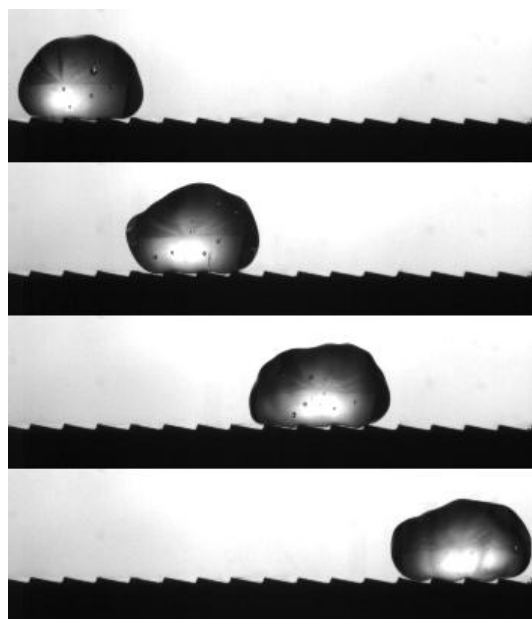


FIGURE 1.9 – Images successives du dispositif de Linke [1] : on pose une goutte d'eau en caléfaction sur un substrat décoré en toit d'usine et chauffé à 350 °C. Elle se déplace alors spontanément vers la droite, dans la direction qui « remonte » les marches. La longueur d'onde du réseau est 1,5 mm, la hauteur des marches est 250 μm et l'intervalle entre deux images est 40 ms.

En 2006, l'équipe de Linke [1] a utilisé comme substrat pour une goutte en caléfaction une plaque en toit d'usine, c'est-à-dire présentant dans une direction des dents asymétriques, comme sur la figure 1.9. Ils ont alors observé un mouvement spontané des gouttes de Leidenfrost, toujours dans la même direction, celle qui remonte la plus grande pente des marches. Ce mouvement existe lorsque les gouttes sont plus grandes que le pas du réseau (plus précisément, le rayon des gouttes doit être plus grand que le tiers de la longueur d'onde du réseau). Linke *et al.* ont mesuré le mouvement des gouttes pour plusieurs volumes de gouttes, à différentes températures et pour différents liquides (eau, éthanol, azote liquide, acétone...). Une mesure typique de la vitesse de la goutte en fonction du temps est présentée sur la figure 1.10(a). Nous voyons alors que le mouvement de la goutte est accéléré avant d'atteindre une vitesse constante de l'ordre de quelques centimètres par seconde. Linke *et al.* reportent aussi l'accélération que l'on peut ainsi mesurer en fonction de la température (figure 1.10(b)), ce qui permet de distinguer deux régimes : un premier régime de basse températures (noté (L) sur la figure 1.10(b)), pour lequel

l'accélération des gouttes varie très fortement sur une petite plage de températures et peut atteindre des valeurs allant jusqu'à 1 m/s^2 , et un régime de hautes températures (noté (H) sur la figure 1.10(b)), dans lequel l'accélération, de l'ordre d'une fraction de m/s^2 , dépend très peu de la température.

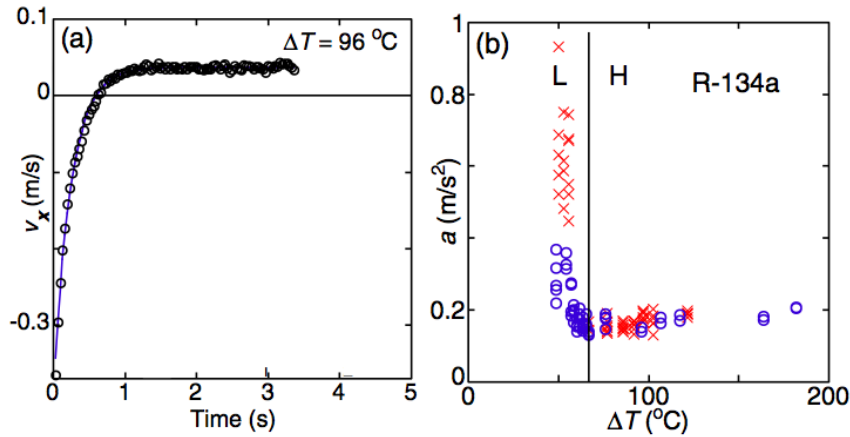


FIGURE 1.10 – (a) Vitesse d'une goutte en fonction du temps. Le liquide utilisé est du réfrigérant R-134a (point d'ébullition : -26°C , température de Leidenfrost : 20°C , masse volumique : 1400 kg/m^3). La goutte (de rayon $1,5 \text{ mm}$) est initialement lancée dans le sens qui descend les marches, d'où la vitesse initiale négative. Le pas du réseau est ici $1,5 \text{ mm}$. (b) Accélération de gouttes du même liquide, en fonction de la différence de température entre plaque chauffée et liquide. On distingue deux régimes : basses (L) et hautes (H) températures. Figures tirées de [1].

Dans le premier régime, on s'attend à ce que le phénomène d'autopropulsion qui nous intéresse soit très influencé par des phénomènes d'ébullition. En effet, la température se rapproche de la température de Leidenfrost, pour laquelle la caléfaction disparaît. De plus, la géométrie du substrat est ici très particulière, et on pourrait imaginer que la goutte refroidit plus efficacement les coins des marches que le reste du toit. Dans ce cas, le sommet des marches peut être à une température plus basse que celle de Leidenfrost. À cet endroit, le film de vapeur peut disparaître et la goutte est en contact direct avec un substrat très chaud. On a alors ébullition et la goutte a la possibilité de capturer de petites bulles de vapeur, capables de modifier considérablement son mouvement. Ce régime de basses températures est par ailleurs facilement identifiable par le bruit de crépitement qui se produit lors des ébullitions successives. Par la suite, nous nous sommes intéressés au régime des hautes températures, pour lesquelles l'ébullition disparaît. Nous avons reconstruit le dispositif de Linke au laboratoire, et essayé de comprendre quels étaient les mécanismes en jeu dans ce mouvement spontané des gouttes.

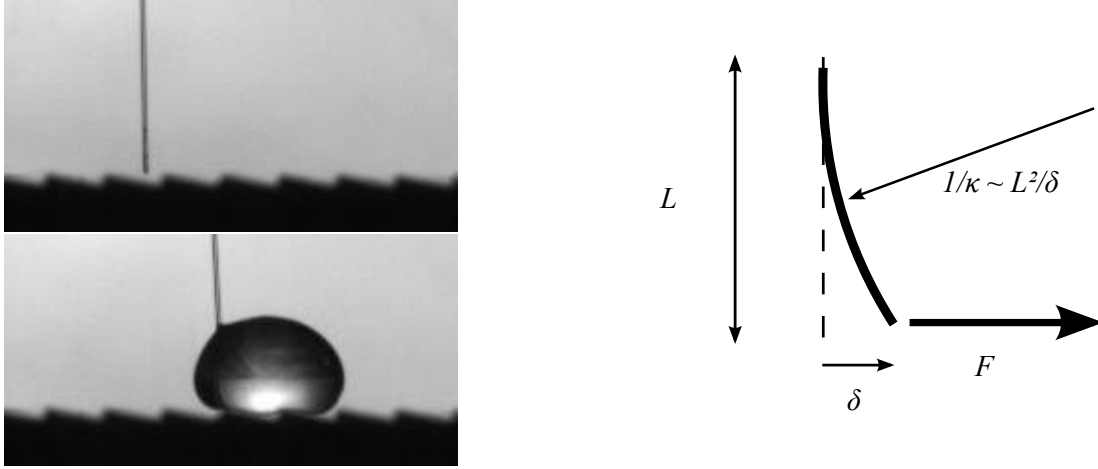


FIGURE 1.11 — Méthode de mesure de la force : on voit sur la photo en bas à gauche qu'en s'accrochant à la fibre, la goutte la dévie de sa position initiale (en haut à gauche). À droite : la déflexion δ de la fibre est proportionnelle à sa courbure κ , et donc à la force F .

1.2.2 Mesure de la force de propulsion

Afin de comprendre le phénomène d'autopropulsion et le déplacement des gouttes sur la surface texturée, nous avons cherché à étudier séparément le mécanisme moteur et la dissipation qui freine la goutte. Pour cela, au lieu de considérer le déplacement des gouttes, nous avons cherché à les immobiliser pour mesurer la force de propulsion seule.

Dans ce but, nous avons utilisé la déflexion d'une fibre élastique accrochée à la goutte. On approche une fibre de verre de longueur L de quelques centimètres et de diamètre $d = 125 \mu\text{m}$, initialement verticale, de la surface en toit d'usine chauffée à 350°C , sur laquelle on dépose une goutte d'éthanol. Par conséquent, la goutte est en caléfaction sur le toit d'usine, en même temps qu'elle s'accroche à la fibre, puisque l'éthanol mouille le verre. Sous l'effet du mécanisme qui voudrait faire se mouvoir la goutte, la fibre se défléchit (figure 1.11), et son déplacement est proportionnel à la force de propulsion. Par ailleurs, au cours du temps, la goutte s'évapore, son rayon R diminue donc, et nous pouvons mesurer la déflexion de la tige pour différentes tailles de gouttes.

La déflexion δ est proportionnelle à la force F exercée sur la tige, comme on peut le voir sur la figure 1.11. En effet, dans le régime de petites déflexions $\delta \ll L$, le moment de rappel lié à la rigidité de la tige varie comme $Ed^4\kappa$ (E est le module de Young de la tige, et κ sa courbure), soit $Ed^4\delta/L^2$. Ce moment est équilibré par celui de la force de propulsion, soit FL . On a donc $F = (A/L^3) \delta$, où la constante $A = 3,64 \text{ N/m}^2$ est déterminée en accrochant de petites masses à l'extrémité de la

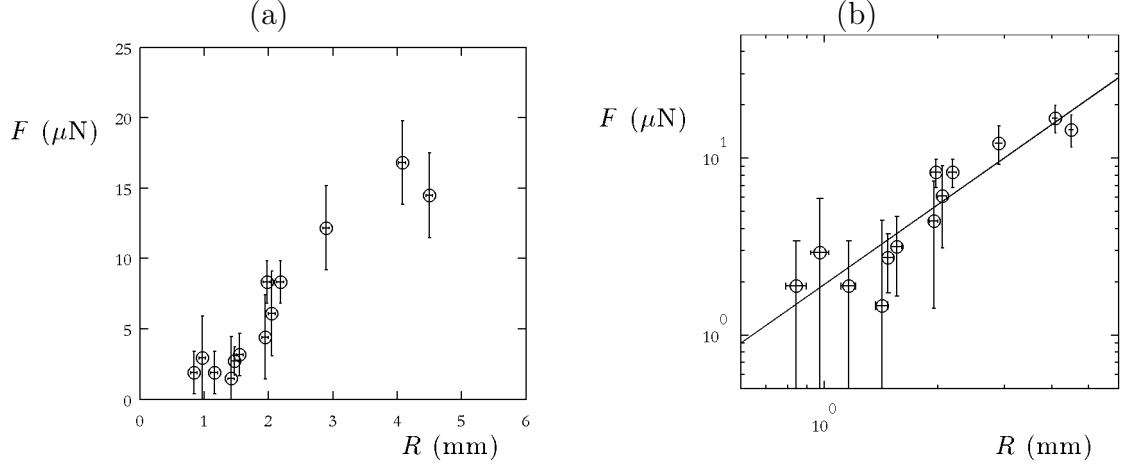


FIGURE 1.12 — Force F exercée par la goutte sur la fibre en fonction de son rayon équatorial R (a) en coordonnées linéaires et (b) en coordonnées logarithmiques (la droite représentée a une pente $3/2$). Il s'agit de gouttes d'éthanol sur un substrat à 350°C .

tige tenue horizontale et en mesurant la déflexion induite. En pratique, nous avons utilisé des tiges de différentes longueurs (entre 4 et 12 cm) pour ajuster la sensibilité de notre capteur de force.

Nos mesures sont présentées sur la figure 1.12. On observe que la force augmente avec la taille de la goutte. L'ordre de grandeur des forces est la dizaine de micronewtons, soit 10 à 100 fois moins que le poids des gouttes utilisées. La force de propulsion est donc très faible, et le fait qu'elle suffise à mouvoir la goutte à des vitesses appréciables est tout à fait remarquable, et lié à la très grande mobilité des liquides en caléfaction. Par ailleurs, si l'on regarde la force en fonction du rayon dans un diagramme logarithmique (figure 1.12(b)), on voit que les données sont compatibles avec une variation de la force proportionnelle à $R^{3/2}$, comme le suggère la droite sur le graphique. Notons ici plusieurs limitations à la précision et à l'étendue de nos mesures : tout d'abord, les gouttes plus petites que le pas du réseau ne sentent pas son influence, on ne peut donc pas faire de mesures pour des gouttes plus petites que 0,5 mm. D'autre part, quand le rayon est de l'ordre de la longueur d'onde du décor, les gouttes accrochées à la fibre ont tendance à se placer dans les creux du toit d'usine. Les mesures de déflexion dans ce régime sont en quelque sorte discrétisées, avec un pas qui est celui du réseau, soit 1,5 mm. C'est ce qui explique les barres d'erreur importantes sur la force pour les petites tailles de gouttes. Enfin, pour les plus grosses gouttes ($R > 5$ mm), sous l'effet de la force de propulsion, les gouttes s'allongent avant de se casser : la tension de surface n'arrive alors plus à maintenir leur cohésion.

1.3 Mécanismes de propulsion

Plusieurs arguments peuvent être proposés pour expliquer le mouvement spontané de cette goutte.

1.3.1 Plusieurs mécanismes possibles

Effets de courbure

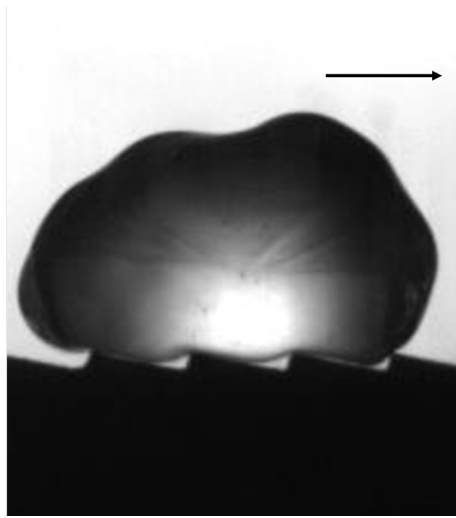


FIGURE 1.13 – Goutte d'eau sur un toit d'usine à 350 °C. Le pas du réseau est 1,5 mm, la goutte se déplace vers la droite.

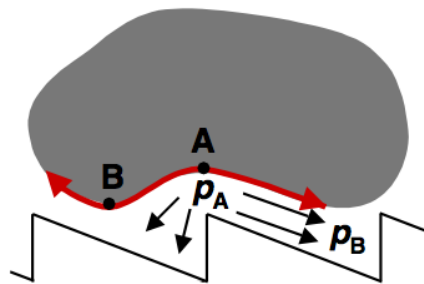


FIGURE 1.14 – Schéma d'une goutte en caléfaction au-dessus du toit d'usine. La courbure en A (au-dessus des coins) n'a pas le même signe que la courbure en B (au-dessus des creux). À cause de la loi de Laplace, la pression dans le film de vapeur en A est donc plus élevée que la pression en B, d'où un écoulement des coins vers les creux des marches. Figure tirée de [1].

C'est l'argument proposé par Linke [1]. Sous la goutte, la courbure de la surface n'est pas constante, comme on peut le voir sur la photo de la figure 1.13 ou sur la figure 1.14 ; elle n'est pas nulle comme dans le cas d'une goutte de Leidenfrost posée sur une plaque lisse. Au niveau des coins des marches, elle n'est pas dans le même sens qu'au-dessus des creux (figure 1.14). Linke en déduit que cette variation de courbure induit, d'après la loi de Laplace, un gradient de pression responsable d'un écoulement de vapeur des sommets vers les creux des marches. Le deuxième argument de Linke est alors de dire que la vapeur qui devrait s'écouler le long de la plus grande pente va pouvoir s'échapper dans la direction transverse le long des marches. Ainsi, l'écoulement principal est vers l'« avant » de la goutte, en descendant la pente douce des marches, et on peut imaginer que par frottement visqueux, l'écoulement de vapeur tire la goutte vers l'avant (vers la droite sur nos figures). On peut cependant objecter que, lorsque la goutte avance, sa surface totale ne change. On voit donc difficilement comment un mécanisme fondé sur des effets capillaires pourrait expliquer le mouvement.

Effets Marangoni

Certains systèmes microfluidiques permettent de déplacer des gouttelettes par effet Marangoni [7]. On pourrait imaginer un mécanisme similaire dans le système du toit d'usine. Du point de vue thermique, nous l'avons déjà vu, les coins ont un statut particulier. À cet endroit, le solide est en regard de deux surfaces liquides « froides » au lieu d'une. Les coins se refroidissent donc plus que le reste de la marche, et nous avons évoqué le fait que c'est là que se produisent les événements d'ébullition. On pourrait aussi imaginer que les coins étant plus froids, la température de la goutte au-dessus des coins des marches soit localement plus faible, et donc que la tension de surface y soit plus élevée. Ce gradient de tension de surface provoquerait alors un écoulement de liquide à la surface de la goutte, depuis les creux vers le haut des marches. Cependant, l'interface sous la goutte est le lieu du changement d'état liquide-vapeur. La température doit donc y être partout la température de vaporisation, ce qui n'est pas compatible avec un mécanisme fondé sur les gradients de tension de surface.

Ondes de surface

Lorsque la goutte se déplace, la décoration du substrat a pour conséquence la formation de vagues à la surface de la goutte, qui se propagent. On voit bien de telles ondes sur la figure 1.13. A cause de l'asymétrie du substrat, on peut imaginer un système où les ondes ne sont pas stationnaires mais progressent, sur la face supérieure, de l'arrière vers l'avant de la goutte, comme indiqué sur la figure 1.15, entraînant le reste de la goutte dans ce mouvement. La goutte se déplacerait alors comme une sorte de roue d'engrenage dans une crémaillère.

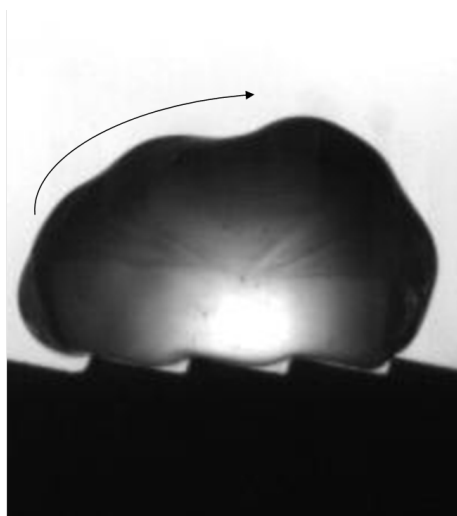


FIGURE 1.15 – Goutte d’eau sur un toit d’usine à 350 °C. On observe des ondes à la surface, qui se déplacent dans le sens indiqué par la flèche.

Nous pouvons cependant remarquer que de telles ondes ne sont pas visibles sur la goutte accrochée à la fibre de la figure 1.11. Les ondes sont donc plutôt une conséquence du mouvement de la goutte et la propulsion existe même en leur absence. Elles ne peuvent donc expliquer seules le mouvement des gouttes sur le toit d’usine.

Oscillations spontanées

La vibration de gouttes sur une surface asymétrique [8, 9], ou inversement, la vibration asymétrique de gouttes sur un substrat lisse [10] peuvent induire le déplacement de gouttes sur des surfaces. D’autre part, les gouttes en caléfaction peuvent se mettre spontanément à osciller [11]. Ces oscillations spontanées pourraient permettre à la goutte d’explorer son voisinage, et ainsi de « tomber » dans la marche voisine sous l’effet de la gravité couplée à l’asymétrie du substrat.

L’asymétrie est cependant ici difficile à quantifier, puisqu’il n’y a pas de gradient d’angle de contact contrairement aux exemples évoqués. Par ailleurs, pour éprouver cette idée, nous avons essayé de faire se déplacer des gouttes lycopodées (c’est-à-dire des gouttes d’eau ou de glycérol entourées d’une couche de grains hydrophobes, qui les rend non-mouillantes [6]) sur le substrat en toit d’usine que nous avons fait vibrer, mais nos expériences préliminaires n’ont pas mis en évidence de direction privilégiée pour le déplacement des gouttes.

Éjection asymétrique de vapeur

En état Leidenfrost, le liquide repose sur un film de vapeur alimenté par son évaporation. Sur un substrat lisse, la vapeur dans ce film s’éjecte par les côtés de la

goutte de façon isotrope. En revanche, sur le toit d'usine, à cause de la décoration de la surface, la zone par laquelle la vapeur doit s'échapper n'est pas symétrique : d'un côté, la pente de la marche est « douce » ; de l'autre, la vapeur fait face à un mur.

Nous avons vu au paragraphe 1.1.3 que le nombre de Reynolds Re valait ici environ 10, valeur plus faible mais comparable au rapport d'aspect $R/e \approx 30$. Il est donc probable que les effets inertiels soient suffisamment importants pour que l'écoulement ne soit plus réversible.

D'après la littérature sur des écoulements à Re modérés dans des expansions [12] ou des contractions [13] cylindriques, la perte de charge est beaucoup plus importante dans la direction de la contraction que dans celle de l'expansion (d'ordre au moins 10, même si nous n'avons pas trouvé dans la littérature d'expériences directement comparables). Il semble donc plausible de penser que, comme sur la figure 1.16, l'écoulement de vapeur se fera préférentiellement dans la direction de la « pente douce » des marches (qui correspond à l'« expansion »), qui offre une résistance plus faible que l'autre direction.

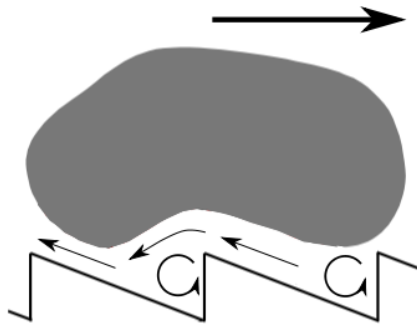


FIGURE 1.16 – Schéma d'une goutte en caléfaction au-dessus du toit d'usine. L'écoulement sous la goutte est rendu asymétrique par le décor en toit d'usine et se fait principalement le long de la pente douce de la marche. Par effet fusée, la goutte est propulsée dans la direction opposée.

Le flux de vapeur sous la goutte n'est donc plus symétrique, et se fait le long de la pente faible des marches (vers la gauche sur les figures). Par effet fusée, la goutte est propulsée dans la direction opposée, celle qui « remonte » les marches (vers la droite sur les figures).

1.3.2 Effet fusée

Un solide en caléfaction

Une remarque peut être faite sur les différents scénarios proposés ci-dessus. Les quatre premiers sont très fortement liés au caractère déformable de la goutte. Le

cinquième est en revanche simplement dû au film de vapeur et à ses propriétés, et ne fait pas intervenir d'autres caractéristiques de la goutte que son évaporation. Si nous sommes capables de faire la même expérience, non pas avec une goutte, mais avec un solide sur « coussin d'air », nous pourrions donc discriminer ces deux types d'argument. Un tel solide existe : c'est la carboglace, c'est-à-dire le dioxyde de carbone solide. À pression ambiante, le CO_2 se sublime directement et sa température de sublimation est $-78,5\text{ }^\circ\text{C}$. En posant un palet de carboglace (que l'on peut mouler pour contrôler ses dimensions) sur une plaque chauffée à $300\text{ }^\circ\text{C}$, la carboglace se transforme en CO_2 gazeux au contact de la plaque et on a alors, si le palet est assez fin (et donc pas trop lourd), un solide en caléfaction.

Si nous posons maintenant un tel palet sur une surface chauffée et décorée en toit d'usine, nous observons que le palet se déplace dans le même sens que les gouttes (figure 1.17).

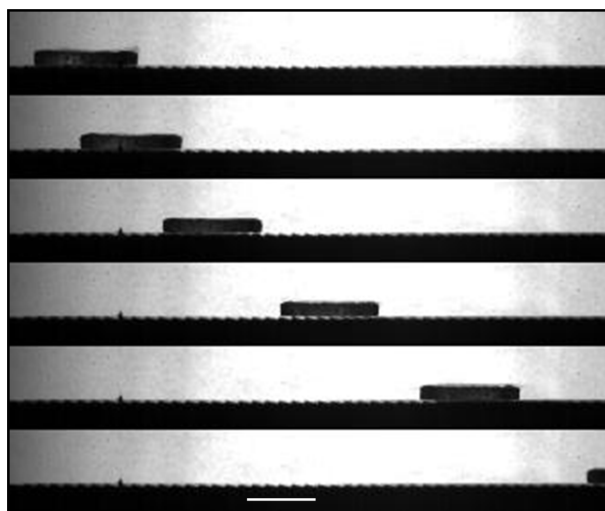


FIGURE 1.17 – Images successives d'un palet de carboglace sur une surface en toit d'usine chauffée à $350\text{ }^\circ\text{C}$. L'intervalle entre deux images vaut 300 ms, et le segment blanc représente 1 cm.

Cette expérience nous permet donc de dire que l'écoulement dans le film de vapeur peut être un des mécanismes à l'origine du déplacement des gouttes de Leidenfrost sur un toit d'usine. On peut d'ailleurs remarquer que cette expérience se reproduit « à l'envers ». Si l'on sculpte le dessous d'un palet de carboglace par un motif en toit d'usine, puis qu'on le pose sur une surface lisse, le palet se déplace alors, du moins tant que l'évaporation de la glace carbonique n'a pas « lissé » ce décor.

Loi d'échelle

Nous pressentons ainsi qu'une goutte se déplace sur le substrat de Linke par effet fusée. En première approximation, on peut considérer que le relief des marches bloque totalement le flux de vapeur d'un côté de la goutte, et qu'il ne le modifie pas de l'autre côté — on fait ici l'hypothèse que l'asymétrie de l'écoulement est importante. En reprenant les notations du paragraphe 1.1.3, la quantité de mouvement perdue dans la direction de la pente faible (figure 1.16) s'écrit $\dot{M}U$. Par effet fusée, la goutte se déplacera du côté opposé, comme si elle était propulsée avec une force $\dot{M}U$.

Dans le cas de gouttes plus grandes que la longueur capillaire (dans le cas contraire, les gouttes sont plus petites que le pas du réseau, elles ne sentent plus l'asymétrie du substrat et ne se déplacent plus spontanément), nous avons vu que le taux d'évaporation $\dot{M}$ varie comme $R^{3/2}$ (équation (1.4)) et que la vitesse U est indépendante de la taille de la goutte (équation (1.5)). Ces lois découlent de l'équilibre thermique du film de vapeur et de l'équilibre mécanique de la goutte. On en déduit la force motrice $F \sim F_0(R/b)^{3/2}$, où F_0 est une force de l'ordre de 10^{-10} N et où b est la longueur thermique définie au 1.1.3. Pour $b \sim 3$ microns et une goutte de rayon $R = 3$ mm, l'ordre de grandeur de la force attendue est alors 3 μ N, comparable aux forces mesurées avec la fibre. D'autre part, d'après cet argument, la force doit varier comme la puissance 3/2 du rayon des gouttes, ce qui est aussi cohérent avec nos mesures (figure 1.12).

On peut ici remarquer que le rôle de la température dans ce système autopropulsif est complexe. D'un côté, si l'on augmente la température T , l'évaporation sera plus efficace et donc une force de propulsion en $\dot{M}U$ augmente. Cependant, si T augmente, le film de vapeur s'épaissit. Ce faisant, l'écoulement de vapeur sent de moins en moins l'asymétrie du substrat (quand la hauteur des marches devient plus petite que l'épaisseur du film) et le moteur de la goutte — le caractère directionnel de l'échappement de vapeur — disparaît. Pour une taille de marche donnée, il doit donc exister une température optimale pour l'autopropulsion.

1.3.3 Mouvement de la goutte

Les mesures faites et les arguments proposés ci-dessus concernent le mécanisme de propulsion de la goutte dans un régime statique, puisque les gouttes ne se déplacent pas dans nos mesures de forces. En pratique, lorsque la goutte n'est plus tenue et qu'on la pose sans vitesse sur le toit d'usine, elle accélère avant d'atteindre, après quelques centimètres de course, une vitesse constante de l'ordre de quelques centimètres par seconde, comme nous l'avons vu sur la figure 1.10. Nous avons mesuré la vitesse limite atteinte par des gouttes d'éthanol sur une plaque chauffée à 360 °C, pour différents rayons de gouttes. Nos résultats sont présentés dans la fi-

gure 1.18, qui représente la vitesse limite V de la goutte, en fonction de son rayon équatorial R .

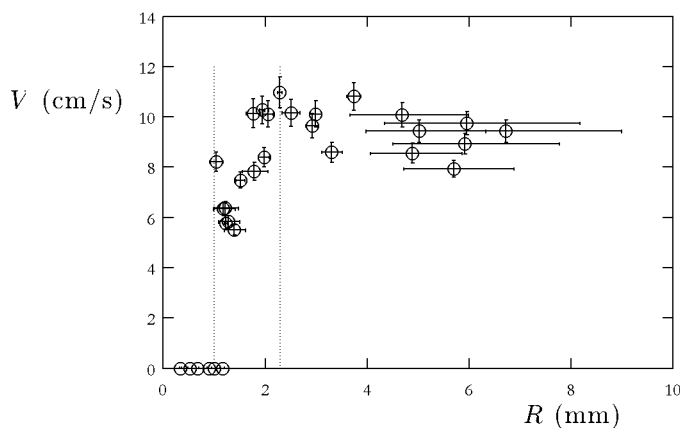


FIGURE 1.18 – Gouttes d'éthanol sur un toit d'usine chauffé à 360 °C : vitesse terminale V en fonction du rayon équatorial des gouttes R . Les barres d'erreur importantes sur les rayons pour $R > 4$ mm s'expliquent par le fait que les gouttes n'ont plus de symétrie de révolution dans ce régime : elles sont plus allongées dans une direction que dans l'autre.

Deux régimes apparaissent selon la taille des gouttes, matérialisés par les lignes pointillées sur la figure 1.18. D'un côté, les petites gouttes ont une vitesse nulle : plus petites que le pas du réseau, elles ne peuvent pas sentir l'asymétrie du substrat. Le moteur du mouvement disparaît et la goutte reste piégée au fond des creux du réseau. D'un autre côté, pour les gouttes les plus grandes, les vitesses terminales mesurées, de l'ordre de quelques centimètres par seconde, décroissent très légèrement avec la taille des gouttes. Entre ces deux régimes, il existe un intervalle de rayon ($1,0 \text{ mm} < R < 2,3 \text{ mm}$) dans lequel V augmente avec R et qui correspond au seuil en rayon pour observer l'effet de la structure en toit d'usine.

Comment expliquer ces vitesses ? En régime stationnaire, la force de propulsion est équilibrée par une force de friction, que nous devons identifier pour pouvoir prédire la vitesse terminale des gouttes. Quels sont les mécanismes de dissipation possibles pour une goutte en caléfaction sur un solide de façon générale, et sur un solide texturé en particulier ? C'est à ces questions que nous essaierons de répondre au chapitre suivant.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'autopropulsion de gouttes en caléfaction sur un substrat particulier, décoré en toit d'usine. Nous avons mesuré

quelle était la force de propulsion associée, pour des gouttes de différentes tailles. Cette force de propulsion est de l'ordre du dixième du poids des gouttes, il faut donc souligner que ces objets se déplacent parce qu'ils sont très mobiles, grâce au film de vapeur qui les isole de leur substrat. La propulsion est maintenue quand l'objet en caléfaction n'est plus liquide mais solide (en l'occurrence du dioxyde de carbone), ce qui suggère un scénario d'effet fusée pour expliquer la propulsion. Celle-ci est donc intimement liée au fait que ces gouttes sont des objets en caléfaction, c'est-à-dire qu'ils s'évaporent. Une question reste à explorer sur ce substrat en toit d'usine : celle de la vitesse constante atteinte par les gouttes après une course de quelques centimètres, à cause d'une friction dont l'étude fait l'objet du chapitre suivant.

Bibliographie

- [1] H. Linke, B. J. Alemán, L. D. Melling, M. J. Taormina, M. J. Francis, C. C. Dow-Hygelund, V. Narayanan, R. P. Taylor, and A. Stout. Self-propelled leidenfrost droplets. *Physical Review Letters*, 96(15) :154502, 2006. 13, 22, 23, 26, 27, 179
- [2] A.-L. Himbert-Biance. *Gouttes inertielles : de la caléfaction à l'étalement*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, 2004. 14, 19, 21
- [3] J.G. Leidenfrost. *De Aquae Communis Nonnullis Qualitatibus Tractatus*. Duisburg, 1756. 14
- [4] A.-L. Biance, C. Clanet, and D. Quéré. Leidenfrost drops. *Physics of Fluids*, 15 :1632–1637, 2003. 14, 15, 21
- [5] L. Mahadevan and Y. Pomeau. Rolling droplets. *Physics of Fluids*, 11(9) :2449–2453, 1999. 17, 38, 59
- [6] P. Aussillous and D. Quéré. Liquid marbles. *Nature*, 411 :924, 2001. 19, 28
- [7] P.T. Nagy and G. P. Neitzel. Optical levitation and transport of microdroplets : Proof of concept. *Physics of Fluids*, 20 :101703, 2008. 27
- [8] A. Buguin, L. Talini, and P. Silberzan. Ratchet-like topological structures for the control of microdrops. *Appl. Phys. A*, 75 :207–212, 2002. 28
- [9] M. Reyssat, F. Pardo, and D. Quéré. Drops onto gradients of texture. *Europhysics Letters*, 87 :36003, 2009. 28
- [10] S. Daniel, M.K. Chaudhury, and P.-G. de Gennes. Vibration-actuated drop motion on surfaces for batch microfluidic processes. *Langmuir*, 21 :4240–4248, 2005. 28
- [11] K. Adachi and R. Takaki. Vibration of a flattened drop. i. observation. *Journal of the Physical Society of Japan*, 53 (12) :4184–4191, 1983. 28

- [12] G. Astarita and G. Greco. Excess pressure drop in laminar flow through sudden contraction. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 7(1) :27–31, 1968. 29
- [13] PJ Oliveira, FT Pinho, and A. Schulte. A general correlation for the local loss coefficient in newtonian axisymmetric sudden expansions. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 19(6) :655–660, 1998. 29

CHAPITRE 2

Caléfaction sur un solide : friction

Sommaire

2.1	Frictions de goutte	36
2.1.1	Goutte libre	36
2.1.2	Influence d'un solide	37
2.1.3	Influence d'une ligne de contact	42
2.2	Friction sur une surface décorée : les créneaux	43
2.2.1	Expériences	43
2.2.2	Mécanismes	47
2.3	Friction sur un toit d'usine	50
	Bibliographie	53

avec Guillaume Dupeux (2.2). Les surfaces utilisées ont été fabriquées par Laurent Quartier et Guillaume Clermont.

Les gouttes en caléfaction sont des objets très mobiles. Comme on l'a vu au chapitre précédent, ces objets peuvent être propulsés par des forces dix fois plus petites que leur poids. On le voit aussi au laboratoire quand on manipule de l'azote liquide, qui traverse facilement une pièce entière quand on le renverse. Ces observations posent la question de l'origine et des ordres de grandeur des forces de friction exercées sur ces objets, dans la gamme de vitesse explorée au laboratoire, entre la dizaine de centimètres et le mètre par seconde. Quels sont les mécanismes de friction envisageables pour les gouttes de Leidenfrost ? Quelle résistance subissent-elles dans les expériences ? Comment expliquer les vitesses mesurées dans le dispositif

d'autopropulsion étudié au chapitre précédent ? Ce sont les questions que nous nous posons dans ce chapitre.

2.1 Frictions de goutte

2.1.1 Goutte libre

Demandons-nous d'abord quelle force de friction subit une goutte qui se déplace dans l'air. La vitesse de la goutte est V et nous notons son rayon R . La forme de cette friction va dépendre du nombre de Reynolds de l'écoulement, qui se fait dans l'air. On suppose ici que la goutte se comporte comme un solide vis-à-vis du gaz ambiant, ce qui est plausible car la viscosité dynamique $\eta \sim 10$ mPa.s du liquide de la goutte est 100 fois plus grande que celle de l'air $\eta_{\text{air}} \sim 10^{-2}$ mPa.s. Le nombre de Reynolds Re compare les effets dus à la viscosité du fluide et ceux dus à l'inertie. Plus précisément, les contraintes caractéristiques de ces deux effets s'écrivent $\eta_{\text{air}} V/R$ pour la viscosité, V/R étant l'échelle typique des gradients de vitesse, et $\rho_{\text{air}} V^2$ pour l'inertie, ρ_{air} étant la masse volumique de l'air. L'inertie dominera quand on aura :

$$\rho_{\text{air}} V^2 > \eta_{\text{air}} V/R$$

soit

$$Re = \frac{RV}{\nu_{\text{air}}} > 1$$

où $\nu_{\text{air}} = \eta_{\text{air}}/\rho_{\text{air}}$ est la viscosité cinématique de l'air, d'ordre 10^{-5} m²/s.

À petit nombre de Reynolds, la viscosité domine. La force de friction sur la goutte est alors proportionnelle à $\eta_{\text{air}}(V/R)R^2 \sim \eta_{\text{air}}VR$ [1]. En revanche, à grand nombre de Reynolds, la force est proportionnelle à la pression dynamique $\rho_{\text{air}}V^2$ et à la surface R^2 : $F \sim \rho_{\text{air}}V^2R^2$. La figure 2.1 illustre ces différents régimes, en représentant le coefficient de traînée d'une sphère $C_D = F/(\rho_{\text{air}}\pi R^2V^2/2)$ en fonction de $2Re$.

Dans quel régime se situent les gouttes en caléfaction que nous étudions ? Les vitesses des gouttes d'azote liquide varient en général entre la dizaine de centimètres et le mètre par seconde. Comme nous nous intéressons à des gouttes, l'échelle des objets est la longueur capillaire, soit le millimètre. Le nombre de Reynolds associé à cette plage de vitesse est donc dans l'intervalle :

$$10 < Re < 10^2$$

Dans cette gamme de Re intermédiaires, nous ne sommes ni dans un régime dominé par l'inertie, ni dans un régime purement visqueux. La traînée doit être décrite par

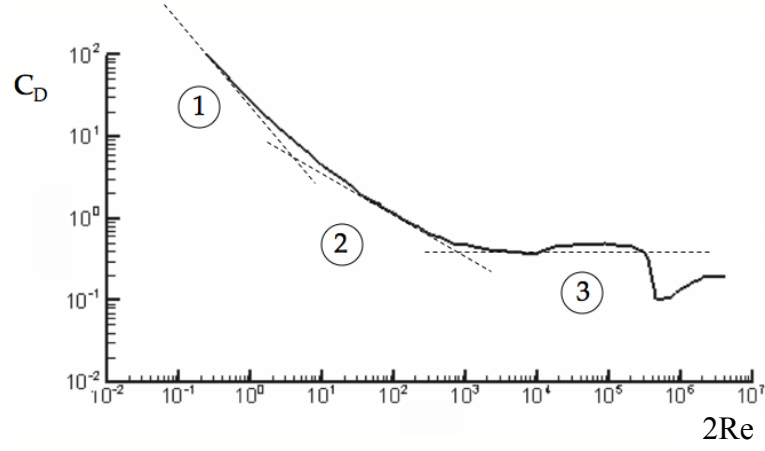


FIGURE 2.1 – Coefficient de traînée $C_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 \pi R^2}$, en fonction de $2Re = \frac{2RV}{\nu_{\text{air}}}$ (figure extraite de [2]). On identifie sur cette courbe trois régimes : le régime visqueux (1) dans lequel C_D est bien approché par la formule $\frac{12}{Re}$ [1], représentée en pointillés, le régime intermédiaire (2) pour lequel $C_D \simeq \frac{8}{Re}$ (d'après la figure), et le régime inertiel (3) où $C_D \simeq 0,5$ [3].

une friction visqueuse dans la couche limite. Cette « traînée de peau » s'écrit alors :

$$F_{\text{air}} \sim \eta_{\text{air}} \frac{V}{\delta} R^2$$

où V/δ est le gradient de vitesse. δ est l'épaisseur de la couche limite visqueuse. Elle s'écrit $\delta \sim \sqrt{\nu_{\text{air}} \times \text{temps d'advection}} \sim \sqrt{\nu_{\text{air}} R/V}$ [4]. La force de friction dans l'air est donc :

$$F_{\text{air}} \sim \rho_{\text{air}} \nu^{1/2} V^{3/2} R^{3/2} \sim \frac{\rho_{\text{air}} V^2 R^2}{\sqrt{Re}} \quad (2.1)$$

Le coefficient numérique devant cette expression de la force de friction vaut environ 13 pour une sphère (d'après la figure 2.1). La force de friction subie par la goutte varie donc entre 10^{-8} et 10^{-6} N, selon la vitesse V .

2.1.2 Influence d'un solide

Que devient la friction si la goutte se déplace maintenant sur une surface ? Le solide va confiner le gaz qui entoure la goutte, ce qui modifie les gradients de vitesse à l'origine de la dissipation. En état Leidenfrost, la friction peut trouver son origine dans le cisaillement visqueux du film de vapeur, qui a une épaisseur de 10 à 100 microns. Ce cisaillement dans une fine couche de gaz pourrait aussi être à l'origine de la friction subie par une goutte sur une surface superhydrophobe. Le liquide repose

alors sur un matériau mixte composé de solide et d'air. Si le déplacement est assez rapide, on pourrait même imaginer que ce mouvement entraîne un film d'air sous la goutte, par un mécanisme de type Landau-Levich [5].

De façon extrême, si la distance entre goutte et solide devient nulle, le solide impose une condition de non-glissement en dessous de la goutte. Les gouttes freineront alors à cause de la dissipation visqueuse à l'intérieur de la goutte [6]. C'est ce mécanisme qui explique la friction subie par des gouttes entourées de grains hydrophobes [7] ou par des gouttes de glycérol sur des surfaces superhydrophobes [8]. Toutefois, pour des gouttes en caléfaction, il n'y a aucun contact entre le liquide et le solide. La vitesse du liquide au bas de la goutte peut donc être égale à la vitesse V de l'ensemble de la goutte.

Cisaillement du film de vapeur

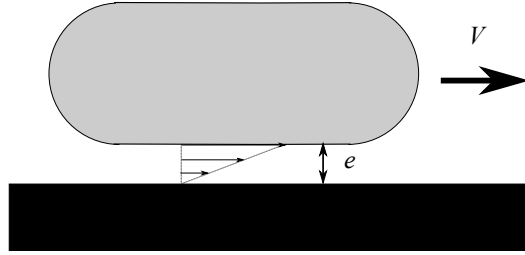


FIGURE 2.2 – Goutte de Leidenfrost en mouvement : le film de vapeur sous-jacent est cisailé (l'épaisseur du film est très exagérée sur ce schéma).

Comme schématisé sur la figure 2.2, la goutte en mouvement à la vitesse V cisaille la couche de vapeur sous-jacente sur une épaisseur e . Si η_v est la viscosité dynamique de la vapeur, la contrainte de cisaillement engendrée s'écrit $\eta_v V/e$. Pour trouver la force de friction, il faut intégrer cette contrainte sur toute la surface du film, qui vaut R^2 pour les grosses gouttes aplaties et R^4/a^2 pour les petites gouttes sphériques (paragraphe 1.1.2).

Pour les gouttes plus petites que a , nous avons vu que l'on a $e \sim b^{2/3} a^{-1} R^{4/3}$ (équation (1.7)), où a est la longueur capillaire et b la longueur thermique, qui vaut environ $3 \mu\text{m}$ pour de l'eau sur une plaque chauffante. La friction due au film s'écrit alors :

$$F_{\text{film}} \sim \eta_v V b^{-2/3} a^{-1} R^{8/3}$$

En ordre de grandeur $\eta_v \sim 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $a \sim 3 \text{ mm}$, et $V \sim 0,1 - 1 \text{ m/s}$, on trouve donc que F varie entre 10^{-8} et 10^{-7} N pour une goutte de rayon $R \sim 1 \text{ mm}$.

Pour les gouttes plus grandes que a , on a $e \sim (bR)^{1/2}$ (équation (1.3)). On en déduit :

$$F_{\text{film}} \sim \eta_v V R^{3/2} b^{-1/2}$$

En ordre de grandeur, pour $R \sim 3 \text{ mm}$, on estime F entre 10^{-7} et 10^{-6} N pour V entre $0,1$ et 1 m/s .

Décélération d'une goutte d'azote liquide

Pour mesurer la friction subie par une goutte en caléfaction, nous avons choisi de mesurer sa décélération en l'absence de toute autre force. Nous avons vu en introduction que des gouttes d'azote liquide décélèrent généralement sur une distance de l'ordre du mètre. Cette distance de freinage L est très grande par rapport à la taille millimétrique des objets que nous regardons. Cela signifie que si l'on veut mesurer la friction sur de tels objets, la longueur des trajectoires que nous devons regarder devra approcher cette distance, ou au moins être de l'ordre de quelques dizaines de centimètres. C'est cette contrainte expérimentale qui nous a amené à effectuer des expériences avec de l'azote liquide, qui est en caléfaction à température ambiante. Dans ce cas, nous n'avons plus besoin de chauffer un substrat de façon homogène sur une grande distance.

On peut alors évaluer la friction typique F sur ces objets. Leur masse M est d'environ 10 mg et leur vitesse typique V d'environ $0,3 \text{ m/s}$. L'énergie cinétique perdue MV^2 compense le travail de la force FL . On estime donc $F \sim MV^2/L \sim 10^{-5} \times 0,3^2/1 \sim 1 \text{ }\mu\text{N}$. Cette force est 100 fois plus faible que le poids des gouttes, d'ordre $100 \text{ }\mu\text{N}$.

L'expérience réalisée est schématisée sur la figure 2.3 : on envoie des gouttes d'azote liquide de rayon $R \approx 1,5 \text{ mm}$ sur un marbre, avec une vitesse initiale imposée par la pente de la « rampe » d'accélération et qui peut varier entre $0,1$ et 1 m/s . La goutte se déplace sur le marbre, et on enregistre sa position en fonction du temps, sur une étendue d'environ 20 cm . Un exemple de trajectoire est donné sur la figure 2.4.

On ajuste ensuite cette trajectoire par un polynôme du second degré $x = -\Gamma t^2/2 + vt + x_0$, ce qui nous permet pour chaque trajectoire de mesurer une décélération moyenne $|\frac{dV}{dt}| = \Gamma$ et une vitesse moyenne $V = v - \Gamma t_{\text{exp}}/2$, où t_{exp} est la durée de l'expérience. Pour l'expérience présentée à la figure 2.4, la vitesse moyenne vaut environ 20 cm/s et la décélération mesurée vaut 6 cm/s^2 . Un temps typique de freinage est donc $\tau \sim V/\Gamma \sim 20/6 \sim 3 \text{ s}$, la goutte décélère donc sur une distance $V\tau \sim 60 \text{ cm}$, de l'ordre du mètre.

Nous répétons cette expérience pour plusieurs gouttes de même rayon, pour différentes vitesses initiales et nous pouvons ainsi tracer la décélération en fonction de la vitesse (figure 2.5). On voit que lorsque la vitesse augmente, la décélération,

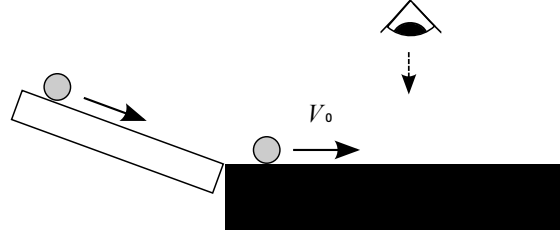


FIGURE 2.3 – Schéma de l'expérience : on fait glisser une goutte d'azote liquide le long d'une pente que l'on peut varier. La goutte arrive alors sur un marbre horizontal avec une vitesse initiale V_0 et on filme sa trajectoire vue de dessus.

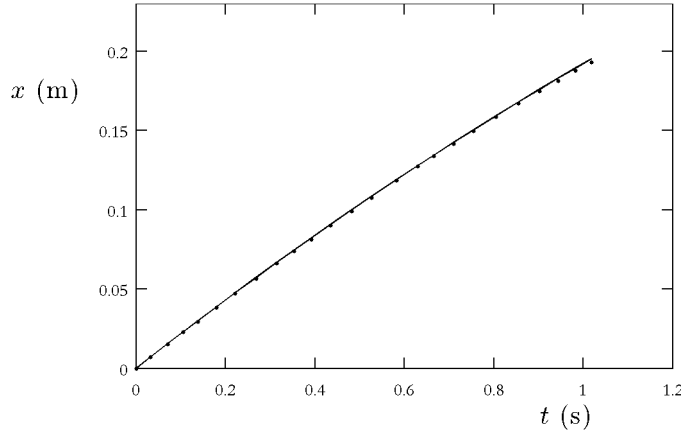


FIGURE 2.4 – Position x d'une goutte d'azote liquide ($R = 1,5$ mm) sur un marbre, en fonction du temps t . La ligne représente un ajustement parabolique d'équation $x = -\Gamma t^2/2 + vt$ avec $v = 0,22$ m/s et $\Gamma = 0,060$ m/s².

proportionnelle à la friction, augmente, ce qui n'est pas surprenant. Dans l'intervalle de vitesse exploré ($0,1 < V < 1$ m/s), la décélération varie entre 3 et 50 cm/s², ce qui correspond à une friction entre 0,2 et 3,5 μ N pour ces gouttes de masse $M \approx 7$ mg.

Nous avons deux possibilités principales pour expliquer cette décélération. D'un côté, la friction de la goutte dans l'air est une traînée de peau (équation (2.1)). De l'autre, le film de vapeur est cisailé, ce qui induit une friction visqueuse sur le bas de la goutte. Les ordres de grandeur des forces engendrées par ces deux mécanismes sont du même ordre, entre 0,01 et 1 μ N.

Nous superposons aux données expérimentales de la figure 2.5 la décélération due à une simple traînée de peau pour une sphère de même taille que les gouttes.

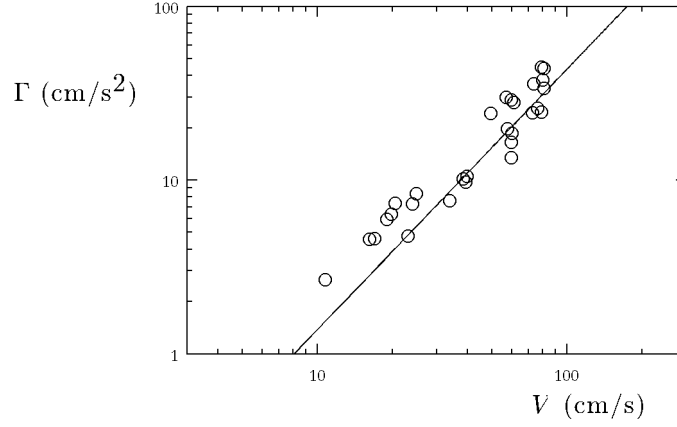


FIGURE 2.5 – Décélération Γ en fonction de la vitesse V d'une goutte d'azote liquide ($R = 1,5$ mm) sur un marbre. Comme $R > a = 1,1$ mm, la goutte est légèrement aplatie par la gravité. On estime donc la traînée de peau $F = M\Gamma \approx 13 \rho_{\text{air}} \nu^{1/2} V^{3/2} R_m^{3/2}$ pour un rayon moyen $R_m = \sqrt{Ra}$, qui correspond à la droite sur cette représentation logarithmique. Les valeurs pour $\rho_{\text{air}} = 1,2$ kg/m³ et $\nu_{\text{air}} = 1,9 \cdot 10^{-5}$ m²/s correspondent à de l'air à 20 °C.

On constate alors que la friction sur les gouttes est bien décrite par la traînée de l'air sur une sphère rigide pour cette expérience.

Malgré la dispersion des mesures, on peut remarquer une légère déviation pour des vitesses $V < 20$ cm/s. La décélération mesurée est alors plus élevée que la prédiction. Cet écart n'est pas surprenant car la friction peut être due à l'effet du film de vapeur à basse vitesse. En effet, l'influence du solide sera déterminante quand l'épaisseur de vapeur $e \sim 100$ μm sera plus petite que la couche limite de Prandtl $\sqrt{\nu_{\text{air}} R/V}$, soit pour $V < \nu_{\text{air}} R/e^2 \sim 1$ m/s.

Cette transition entre un premier régime où la goutte ne sent pas la présence du solide et un deuxième où elle ne freine qu'à cause du film de vapeur mériterait d'être exploré à l'avenir, notamment en caractérisant l'influence du rayon de la goutte sur la décélération. On peut cependant souligner ici que ces expériences nous ont permis d'identifier l'ordre de grandeur de la friction en caléfaction, qui est proche du micronewton, et de nous montrer que cette friction pouvait être expliquée par la traînée de la goutte dans l'air environnant. Cette expérience illustre les petites forces de freinage subies lorsque le contact avec le solide disparaît, que l'on peut comparer aux forces dues à l'existence d'une ligne de contact.

2.1.3 Influence d'une ligne de contact

Adhésion

En règle générale, une goutte posée sur un solide y adhère : les gouttes de pluie restent ainsi accrochées à une vitre, tant que d'autres forces, comme leur poids ou l'action du vent, ne viennent pas l'en décrocher. Cette propriété d'adhésion des gouttes à la paroi découle de l'accrochage de la ligne de contact sur les défauts du substrat [9]. Une autre conséquence visible de l'existence de ligne est l'hystérésis de l'angle de contact, que l'on peut observer sur une goutte immobilisée sur un plan incliné (figure 2.6) : l'angle de contact à l'avant, que l'on nomme angle d'avancée θ_a , est plus grand que l'angle de contact à l'arrière, appelé angle de reculée $\theta_r = \theta_a - \Delta\theta$. C'est cette différence d'angle de contact qui va induire une force d'adhésion $\gamma R(\cos \theta_r - \cos \theta_a) \approx \gamma R \Delta\theta \sin \theta$, en supposant $\Delta\theta \ll \theta$ et en notant γ la tension de surface de la goutte. On peut alors estimer cette force d'adhésion pour une goutte d'eau millimétrique $\gamma R \sim 10^{-1} \times 10^{-3} \sim 100 \mu\text{N}$, capable de compenser le poids de la goutte.

Sur des surfaces superhydrophobes, c'est-à-dire rugueuses et chimiquement hydrophobes, $\Delta\theta$ diminue, et θ devient proche de π : l'adhésion est beaucoup plus faible et les gouttes peuvent se déplacer sur des substrats faiblement inclinés [10–12]. Dans le cas des gouttes en caléfaction, il n'y a plus de ligne de contact, et donc plus d'hystérésis, ce qui explique leur grande mobilité.

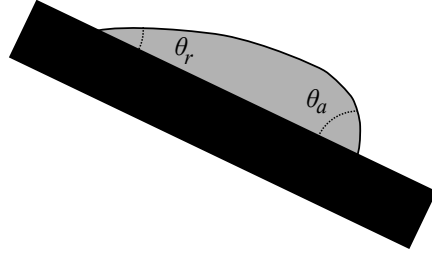


FIGURE 2.6 – Accrochage d'une goutte sur un solide : la goutte tient sur un plan incliné grâce à l'hystérésis de l'angle de contact ($\theta_a > \theta_r$).

Friction de ligne

Quand une ligne de contact se déplace, le confinement du fluide près de la ligne impose de forts gradients de vitesse. Par conséquent, pour une goutte d'eau qui

glisse sur une surface comme du verre, la dissipation est localisée près de la ligne de contact, où la dynamique est visqueuse. Si les vitesses sont modérées, l'angle de contact dynamique est proche de l'angle de Young θ . La friction par unité de longueur de la ligne de contact s'écrit alors $f \sim \frac{\eta V}{\theta} \ln$, où $\ln$ est le logarithme d'un rapport de longueur, en général d'ordre 10 [9]. Pour une goutte d'eau millimétrique se déplaçant à 10 cm/s sur un substrat modérément hydrophile ($\theta \sim 0,1$), la force de friction va s'écrire $F \sim 2\pi r f \sim 2\pi r \frac{\eta V}{\theta} \ln \sim 100 \mu\text{N}$. On constate que la force de friction due à la présence d'une ligne de contact est plus élevée que celle subie par une goutte en caléfaction, qui n'en possède pas.

2.2 Friction sur une surface décorée : les créneaux

Nous avons vu que la friction subie par une goutte d'azote liquide se déplaçant à 10 cm/s sur un solide lisse est de l'ordre du micronewton. Cette valeur est beaucoup plus faible que les forces de propulsion mesurées pour le dispositif de Linke, de l'ordre de 10 μN . La friction des gouttes dans l'air ou la dissipation dans le film de vapeur ne peuvent expliquer seules le fait que sur le toit d'usine les gouttes atteignent une vitesse constante de quelques cm/s sur quelques centimètres. Un autre mécanisme de dissipation plus efficace doit exister pour expliquer ces vitesses : le réseau en écaille non seulement propulse la goutte, mais il induit également une friction spéciale. Pour mieux comprendre ce phénomène, nous avons décidé d'enlever au substrat son caractère « propulsif », c'est-à-dire son asymétrie. Nous avons ainsi fabriqué des surfaces en aluminium en forme de créneaux symétriques, comme schématisé sur la figure 2.7, dont nous avons fait varier la profondeur. La longueur d'onde λ des créneaux est de 3 mm, et la hauteur H des marches varie entre 150 et 730 μm .

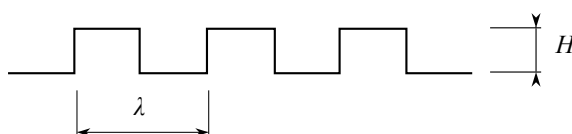


FIGURE 2.7 – Schéma d'une surface décorée de créneaux : λ est la longueur d'onde du réseau, et H est la hauteur des marches.

2.2.1 Expériences

Ordres de grandeurs

La première expérience que nous faisons est d'envoyer une goutte d'éthanol sur une surface crénelée chauffée à 350 °C, comme sur la figure 2.8, et de mesurer sa

trajectoire. On représente ainsi sur la figure 2.9 la position x d'une goutte de rayon $R = 3$ mm en fonction du temps t . Au cours de ce mouvement, la vitesse de la goutte passe de 8 cm/s à 1 cm/s en 0,6 s. La décélération typique est donc 10 cm/s², et la distance typique de freinage de l'ordre de la dizaine de centimètres, au lieu du mètre sur une surface lisse. Cette goutte a une masse d'environ 50 mg. La force de friction qu'elle subit est donc de l'ordre de 5 μ N pour une vitesse relativement faible, de l'ordre de quelques centimètres par seconde. Le découpage en créneaux augmente donc fortement la dissipation.

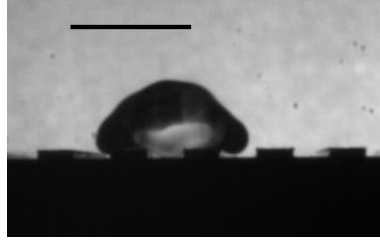


FIGURE 2.8 – Goutte d'éthanol lancée sur une surface crénelée. Les créneaux sont caractérisés par $\lambda = 3$ mm et $H = 360$ μ m. La plaque est chauffée à 350 °C. Le segment noir a une longueur de 5 mm.

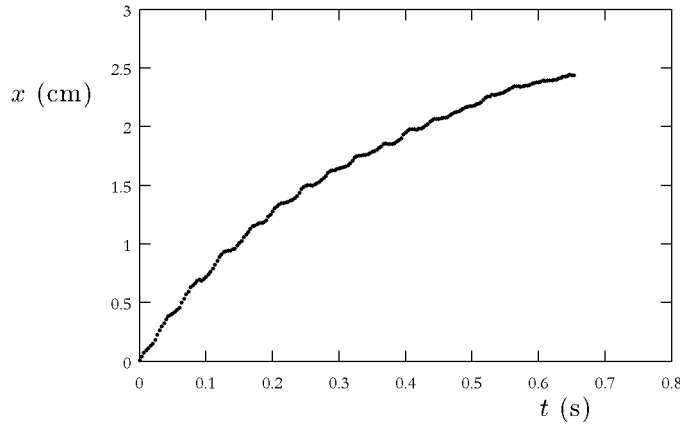


FIGURE 2.9 – Position x d'une goutte d'éthanol ($R = 3$ mm) en fonction du temps t . Les créneaux sont caractérisés par $\lambda = 3$ mm et $H = 360$ μ m. La plaque est chauffée à 350 °C.

Profitant du fait que les gouttes freinent à l'échelle de quelques centimètres sur les surfaces en créneaux, nous avons monté l'expérience suivante, schématisée sur la figure 2.10 : on incline la surface crénelée d'un angle α par rapport à l'horizontale et on pose une goutte d'éthanol d'un volume Ω (contrôlé à la micropipette) sur la plaque. La goutte descend la plaque et atteint en quelques centimètres une vitesse terminale V que nous mesurons. Lorsque la vitesse est constante, la force de friction

compense la force de propulsion $\rho\Omega g \sin \alpha$. Notre système permet donc de mesurer la force de friction F en fonction de la vitesse V pour différents volumes Ω .

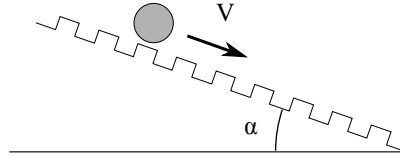


FIGURE 2.10 – Schéma de l'expérience : une goutte dévale une surface à crêteaux inclinée d'un angle α ; on mesure sa vitesse terminale V .

Influence de la vitesse et de la taille des gouttes

On effectue cette expérience sur un substrat donné ($\lambda = 3$ mm, $H = 220$ μm), pour différentes pentes α et trois volumes de gouttes : 50, 100 et 150 μL . Nous sommes donc ici dans un régime de flaques ($R > a$), comme dans l'expérience de Linke. On peut tout d'abord regarder la vitesse V en fonction de la pente α , pour les trois différents volumes Ω (figure 2.11).

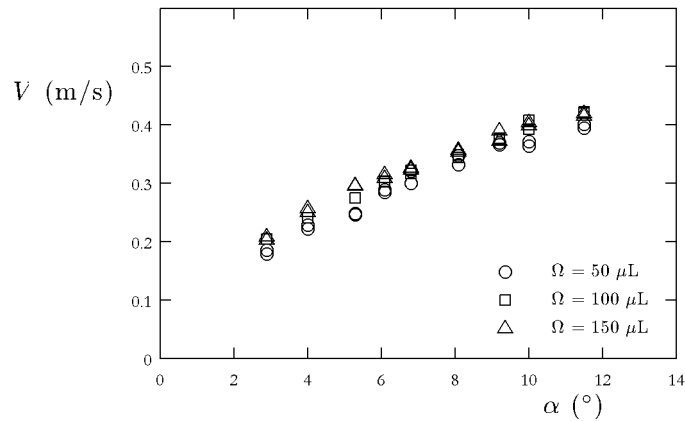


FIGURE 2.11 – Vitesse V de gouttes d'éthanol en caléfaction en fonction de la pente α , pour trois volumes Ω . Les crêteaux sont tels que $\lambda = 3$ mm et $H = 220$ μm .

On constate que V augmente avec la pente α — le frottement augmente avec la vitesse, comme on pourrait s'y attendre — et cette vitesse ne dépend pas du volume

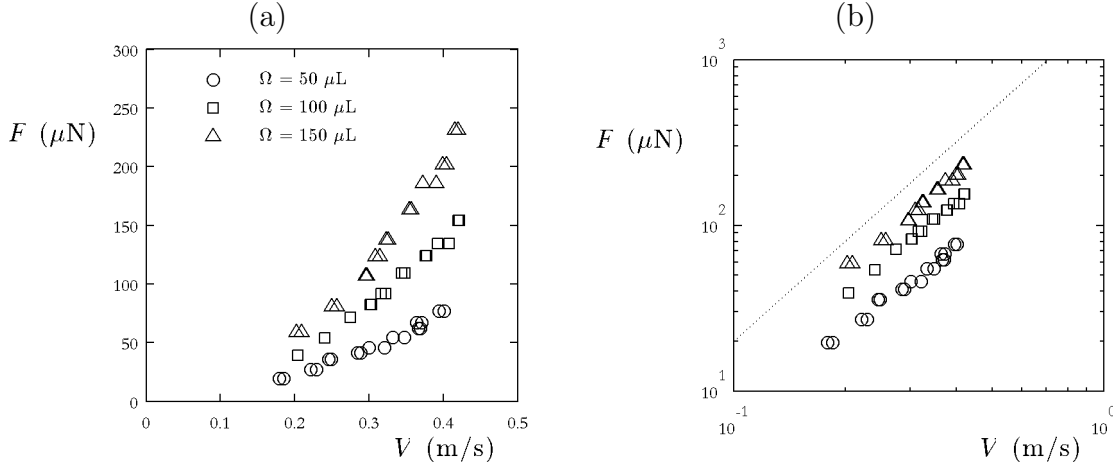


FIGURE 2.12 – Force de friction F en fonction de la vitesse V pour trois volumes Ω , (a) en échelle linéaire et (b) en échelle logarithmique, où la droite en pointillés correspond à une force proportionnelle à V^2 . Les créneaux sont tels que $\lambda = 3 \text{ mm}$ et $H = 220 \mu\text{m}$.

de la goutte posée. Cela signifie que la force de friction F varie comme le volume Ω car $F/\Omega = \rho g \sin \alpha$ ne dépend pas de la taille des gouttes. Ces gouttes, plus grandes que la longueur capillaire, ont une forme approximative de cylindre aplati, dont le volume varie comme $R^2 a$, où R est le rayon équatorial des gouttes et a la longueur capillaire de l'éthanol, qui vaut $1,6 \text{ mm}$ dans ces conditions de température. La force de friction varie donc comme R^2 .

Nous traçons ensuite sur la figure 2.12 la force F en fonction de la vitesse V , pour les mêmes expériences. On constate, comme nous l'avons déjà dit, que la force augmente avec la vitesse. Plus précisément, sur un diagramme logarithmique (figure 2.12(b)), nous voyons que F semble varier comme V^2 . La dissipation semble ici de type inertielle, proportionnelle à une pression dynamique en ρV^2 (en notant ρ la masse volumique du liquide), et non visqueuse, auquel cas la force serait linéaire en vitesse.

Influence de la hauteur des créneaux

Pour des gouttes de $100 \mu\text{L}$ et pour différentes vitesses V , la figure 2.13 montre la force de freinage F en fonction de H . On voit que la force de friction augmente avec la hauteur H des créneaux, et que cette augmentation semble linéaire en H : plus le relief est important, plus la dissipation l'est.

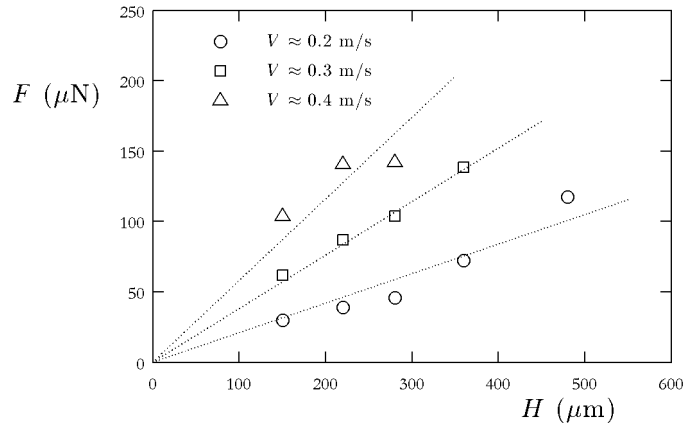


FIGURE 2.13 – Force de friction F en fonction de la hauteur des créneaux H , pour trois vitesses entre 20 et 40 cm/s et pour $\Omega = 100 \mu\text{L}$. Les droites pointillées ont pour pentes respectives 0,58, 0,38 et 0,21 N/m.

2.2.2 Mécanismes

La dissipation augmente donc fortement lorsque la surface est décorée. Nous cherchons maintenant un mécanisme lié à l'existence des marches pour expliquer cette dissipation. Un premier candidat est lié au fait que les marches déforment l'interface et créent donc des ondes de surface sur la goutte, qui sont ensuite dissipées par viscosité. Un deuxième est la conséquence de l'écoulement du liquide de la goutte entre les marches.

Création et dissipation d'ondes

Lorsque les gouttes de Leidenfrost descendent les surfaces en créneaux, on les voit osciller fortement (figure 2.8). Ces oscillations sont aussi visibles sur le toit d'usine (figure 1.15). Elles sont associées au mouvement de la goutte : on ne les voit plus lorsque cette dernière est accrochée à une fibre (figure 1.11). Ces oscillations, qui emmagasinent de l'énergie (de surface notamment), sont ensuite amorties par viscosité dans le volume de la goutte. Quel est l'ordre de grandeur de cette dissipation ?

À chaque fois que la goutte parcourt λ , le créneau déforme la surface de la goutte et l'énergie de surface associée à cette déformation s'écrit γHR . Si l'on fait l'hypothèse que cette énergie de surface est intégralement dissipée par viscosité lors du mouvement de la goutte, alors l'énergie perdue lorsque la goutte avance de λ est γHR . La force résultante pour la goutte est donc égale à :

$$F_{\text{ondes}} \sim \gamma R \frac{H}{\lambda}$$

Pour $R \sim 3$ mm, $\gamma \sim 20$ mN/m et $H/\lambda \sim 0,1$, on trouve $F_{\text{ondes}} \sim 6$ μN , valeur un peu plus faible que les forces mesurées. D'autre part, si la dépendance de cette force avec la hauteur des crêneaux est bonne (figure 2.13), cette expression est indépendante de la vitesse, et elle varie linéairement avec R , ce qui ne correspond pas à nos expériences (figures 2.11 et 2.12).

On peut d'ailleurs discuter l'hypothèse d'atténuation « totale » des ondes : les ondes sont amorties par viscosité sur un temps caractéristique $\tau_\nu = \lambda^2/8\pi^2\nu$ [13], ici d'ordre 100 ms ($\lambda = 3$ mm et $\nu = 10^{-6}$ m²/s est la viscosité cinématique du liquide). Ce temps est à comparer au temps caractéristique du mouvement de la goutte R/V , qui varie dans nos expériences entre 30 et 100 ms. On voit que ces deux temps caractéristiques sont comparables ; l'hypothèse d'ondes intégralement dissipées est donc forte, mais pas déraisonnable.

Impact sur les marches

Intéressons-nous maintenant à l'écoulement de liquide dans la goutte entre les marches. Le nombre de Reynolds associé à cet écoulement est $\text{Re} = HV/\nu$. V est de l'ordre de 30 cm/s, H de l'ordre de 300 μm , $\nu \sim 10^{-6}$ m²/s, donc $\text{Re} \approx 100$. L'inertie doit donc dominer les effets visqueux.

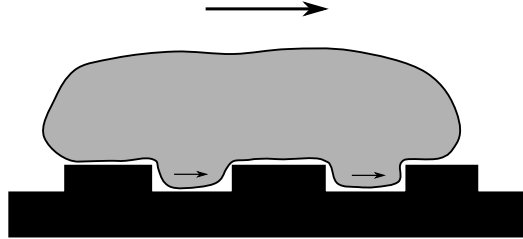


FIGURE 2.14 – Scénario pour la dissipation : lorsqu'elle avance, la goutte subit un impact sur le côté des crêneaux.

On peut alors imaginer que, lors de son mouvement, la goutte frappe le côté des marches (figure 2.14) et que ce choc soit à l'origine de la traînée subie par la goutte. Plus précisément, une pression dynamique ρV^2 s'exerce sur la section latérale HR des marches. La force exercée par une marche sur la goutte s'écrit donc $\rho V^2 RH$. Cette force sur une marche est à multiplier par le nombre de marches R/λ sous une goutte. La force totale s'écrit alors :

$$F \sim \rho V^2 \frac{H}{\lambda} R^2 \quad (2.2)$$

Cette expression de la force de friction peut aussi être déduite d'un raisonnement énergétique, en supposant que la quantité de liquide coincée entre chaque pas du réseau subit un choc mou contre la marche. Quand la goutte avance de λ , elle perd l'énergie cinétique de la quantité de liquide contenue entre les marches. L'énergie cinétique perdue au niveau d'une marche s'écrit $\rho V^2 \times \text{volume de liquide} \sim \rho V^2 R H \lambda$. Cette quantité est à multiplier par le nombre de marches R/λ . Le travail de la force de friction $F\lambda$ est donc proportionnel à $\rho V^2 R^2 H$. On retrouve ainsi l'expression de l'équation (2.2).

On peut évaluer l'ordre de grandeur de cette force : en gardant $R \sim 3 \text{ mm}$, $H/\lambda \sim 0,1$ et pour une vitesse $V \sim 30 \text{ cm/s}$, on trouve $F \sim 100 \text{ }\mu\text{N}$, du même ordre que ce que l'on mesure (figure 2.12).

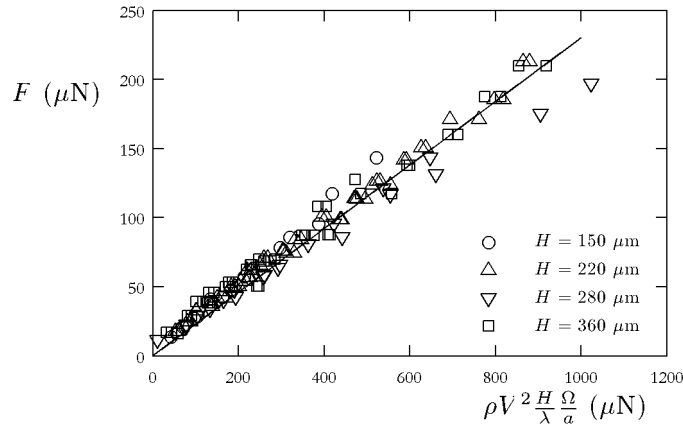


FIGURE 2.15 – Force de friction mesurée F en fonction de la force prédite $\rho V^2 \frac{H}{\lambda} \frac{\Omega}{a} \sim \rho V^2 \frac{H}{\lambda} R^2$. La droite, de pente 0,23, correspond au meilleur ajustement linéaire des données.

Cette prédiction est cohérente avec les mesures faites sur les différents créneaux, en ce qui concerne la dépendance vis-à-vis de la taille des gouttes (figure 2.11), de la vitesse V (figure 2.12) et de la hauteur des créneaux (figure 2.13). On peut tracer, pour toutes nos expériences, la force de friction mesurée F en fonction de la force prédite $\rho V^2 R^2 H/\lambda \sim \rho V^2 H \Omega/\lambda a$. On voit sur la figure 2.15 que pour des hauteurs de créneaux $H < 400 \text{ }\mu\text{m}$, la prédiction fonctionne bien, avec un coefficient numérique de l'ordre de $1/4$.

En revanche, pour des créneaux plus profonds, la force de friction s'éloigne de cette loi (figure 2.16). La traînée F est alors plus élevée que ce qui est attendu, et elle ne varie plus proportionnellement à V^2 . Comment expliquer cette variation ? On pourrait penser qu'avec des créneaux plus profonds, la goutte ne remplit plus complètement les marches, mais les visualisations lors des expériences montrent que ce n'est pas le cas (figure 2.17). En revanche, cette augmentation de la dissipation pourrait être due au fait que l'écoulement de liquide entre les marches n'est plus

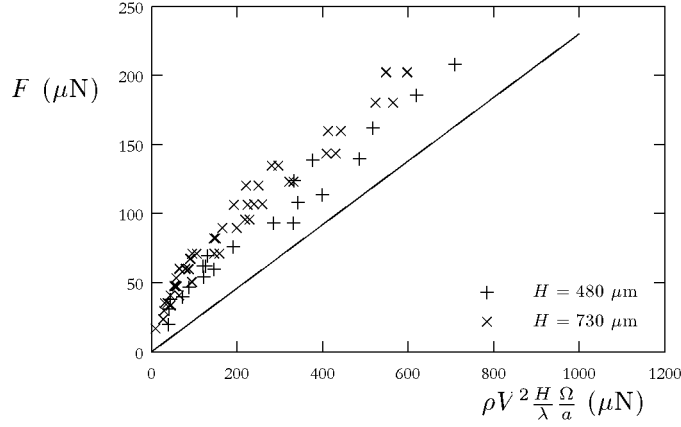


FIGURE 2.16 – Force de friction mesurée F en fonction de la force prédite $\rho V^2 \frac{H}{\lambda} \frac{\Omega}{a} \sim \rho V^2 \frac{H}{\lambda} R^2$ pour de grandes hauteurs de marches : $H > 400 \mu\text{m}$. La droite correspond à la loi déduite de la figure 2.15 pour $H < 400 \mu\text{m}$.

parallèle à la plaque (comme nous l'avons implicitement supposé avant), mais qu'il se fait dans toutes les directions comme schématisé sur la figure 2.18.



FIGURE 2.17 – Image d'une goutte d'éthanol de volume $\Omega = 150 \mu\text{L}$ sur des créneaux « profonds » : $H = 1,5 \text{ mm}$, soit la moitié de la longueur d'onde $\lambda = 3 \text{ mm}$. On peut remarquer que l'éthanol atteint toujours le fond des marches dans cette géométrie.

2.3 Friction sur un toit d'usine

Nous avons vu que le mouvement d'une goutte sur un réseau est plus dissipatif que sur un substrat lisse. Les forces de friction mesurées varient alors entre 10 et 200 μN et, tant que le relief n'est pas trop creusé, la friction due au réseau en créneau s'écrit $\rho V^2 R^2 H / \lambda$ pour des flaques. Cette force peut-elle expliquer les vitesses terminales V mesurées sur la surface en toit d'usine ?

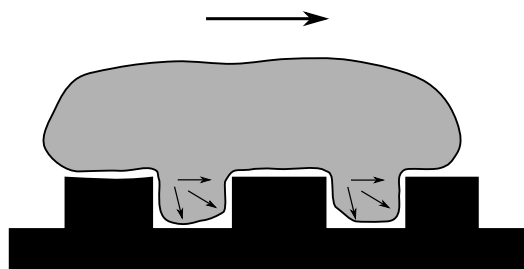


FIGURE 2.18 – Si les créneaux sont trop profonds par rapport à leur longueur d'onde, on ne peut plus supposer que l'écoulement dans la goutte reste parallèle à la plaque.

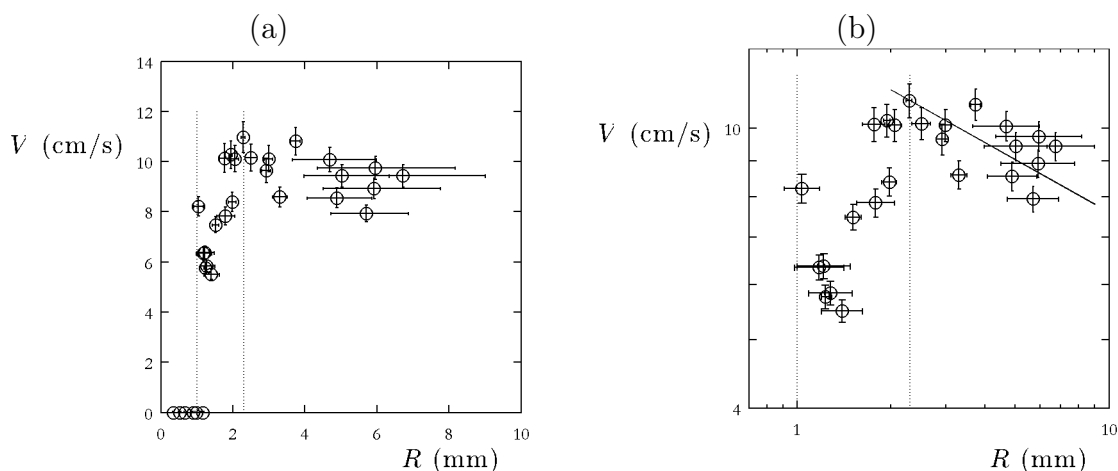


FIGURE 2.19 – Gouttes d'éthanol sur un toit d'usine chauffé à 350 °C : vitesse terminale V en fonction du rayon équatorial des gouttes R (a) en échelle linéaire et (b) échelle logarithmique. La droite représente une variation en $R^{-1/4}$.

On voit sur la figure 2.19 qui montre V en fonction du rayon R qu'il existe plusieurs régimes suivant la taille des gouttes (matérialisés par les lignes pointillées sur la figure 2.19). Pour $R < 1$ mm, les gouttes sont insensibles à l'asymétrie du substrat : il n'y a pas de propulsion et elles restent piégées au creux des écailles. Pour $1 \text{ mm} < R < 2$ mm, l'effet propulsif du substrat commence à se faire sentir : la vitesse augmente brusquement avec R , elle passe d'une valeur nulle à environ 10 cm/s dans cet intervalle de rayon. Enfin, pour $R > 2$ mm, V décroît légèrement avec R : on observe une diminution d'environ 15 % alors que R est multiplié par 3. Nous nous intéressons maintenant plus particulièrement à ce dernier régime.

Pour une goutte de rayon $R = 3$ mm, nous avons trouvé sur le toit d'usine une force de propulsion de 10 μN . Pour cette surface, on a $H = 250 \text{ }\mu\text{m}$ et $\lambda = 1,5 \text{ mm}$,

donc $H/\lambda \approx 0,2$. Les vitesses terminales atteintes pour des gouttes suffisamment grandes sont d'environ 10 cm/s (figure 2.19). D'après l'équation (2.2), la force de friction due aux créneaux vaut donc 20 μN , du même ordre de grandeur que la force de propulsion. Il est donc possible que la dissipation sur le toit d'usine soit principalement due à ses aspérités, d'autant plus que les gouttes propulsées « remontent » les marches : elles font donc face à la pente verticale des écailles, comme schématisé sur la figure 2.20.

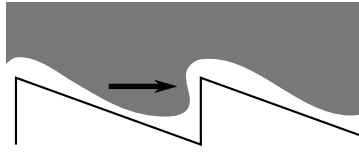


FIGURE 2.20 – Schéma du dessous de la goutte se déplaçant sur le toit d'usine : le liquide coincé entre les écailles avance vers la face verticale des marches.

On peut alors s'intéresser à la dépendance de la vitesse terminale avec le rayon de la goutte R , en considérant le cas de flaques assez grandes pour sentir l'influence des écailles du substrat ($R > 2$ mm). Dans ce cas, nous avons vu que la force de propulsion s'écrit :

$$F_{\text{propulsion}} \sim F_0 \left(\frac{R}{b} \right)^{3/2}$$

où F_0 est une force de l'ordre de 10^{-10} N et $b \approx 3$ μm est la longueur thermique de notre système. Par ailleurs, la force de friction s'écrit :

$$F_{\text{friction}} \sim \rho V^2 \frac{H}{\lambda} R^2$$

Lorsque la vitesse terminale est atteinte, $F_{\text{propulsion}} = F_{\text{friction}}$. On s'attend donc à une vitesse terminale :

$$V \sim \sqrt{\frac{F_0}{\rho} \frac{\lambda}{H} \frac{1}{b} \left(\frac{b}{R} \right)^{1/4}}$$

On peut évaluer la vitesse attendue :

$$V \sim \sqrt{\frac{10^{-10}}{10^3 \times 0,2}} \times \frac{1}{3 \cdot 10^{-6}} \times \left(\frac{3 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-3}} \right)^{1/4} \sim 4 \text{ cm/s}$$

Cet ordre de grandeur est cohérent avec les expériences. Par ailleurs, la vitesse terminale prédite est proportionnelle à $R^{-1/4}$. Il s'agit d'une dépendance faible.

Même s'il est difficile de conclure de façon certaine à cause de l'étendue limitée de nos mesures, cette dépendance est compatible avec les observations (figure 2.19), au-delà de la taille caractéristique où le mouvement a lieu ($R > 2$ mm).

Ce comportement pose alors la question d'un relief optimal pour ce mouvement. En effet, plus la hauteur des marches va être grande, plus l'écoulement sous la goutte sera asymétrique, ce qui augmente l'efficacité de la propulsion. En revanche, si le relief augmente, la dissipation augmente aussi, ce qui va freiner les gouttes. L'efficacité du substrat en toit d'usine va donc être très dépendante de la hauteur du relief et de sa géométrie, un point qui mériterait d'être exploré dans l'avenir.

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à la décélération de gouttes en caléfaction sur des solides. Sur des solides lisses, nous avons vu que cette décélération est faible, de l'ordre du cm/s^2 . La force de friction, de l'ordre du micronewton, est alors due en grande partie à la friction de la goutte dans l'air. Cette faible dissipation ne peut expliquer les vitesses terminales atteintes par les gouttes sur le dispositif en toit d'usine du chapitre 1. En revanche, nous avons pu montrer, à l'aide de surfaces découpées en créneaux, que ces vitesses et la dissipation associée sont dues à la présence des aspérités sur le toit d'usine, qui engendre une traînée inertielle (quadratique en vitesse) beaucoup plus élevée que sur une surface lisse : les forces mesurées sont alors de l'ordre de 10 à 100 μN . Cette augmentation de la force de friction s'explique par le fait que la dissipation est alors localisée dans le liquide, 1000 fois plus dense que l'air environnant. Ainsi les textures ont-elles la double propriété d'engendrer de la propulsion et une friction spéciale. On dispose ainsi d'un moyen original de freiner les gouttes en caléfaction aussi bien que de les mouvoir.

Bibliographie

- [1] G. G. Stokes. On the effect of internal friction in fluids on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9, 1851. 36, 37
- [2] L. Jacquin and P. Tabeling. Turbulence et tourbillons. Cours de M1 "Dynamique des fluides" - École Polytechnique, 2006. 37
- [3] E. Achenbach. Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 54(3), 1972. 37
- [4] L. Prandtl. Motion of fluids with very little viscosity. Technical report, NACA Technical Memorandum, 1904. 37

- [5] L. Landau and B. Levich. Dragging of a liquid of a moving plate. *Acta Phys.-Chim. URSS*, 17 :42, 1942. 38
- [6] L. Mahadevan and Y. Pomeau. Rolling droplets. *Physics of Fluids*, 11(9) :2449–2453, 1999. 17, 38, 59
- [7] P. Aussillous and D. Quéré. Properties of liquid marbles. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, 462(2067) :973–999, 2006. 38
- [8] D. Richard and D. Quéré. Viscous drops rolling on a tilted non-wettable solid. *Europhys. Lett.*, 48(3) :286–291, 1999. 38
- [9] P. G. de Gennes. Wetting : statics and dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 57(3) :827–863, 1985. 42, 43
- [10] N. Satoh T. Onda, S. Shibuichi and K. Tsujii. Super-water-repellent fractal surfaces. *Langmuir*, 12 :2126, 1996. 42
- [11] D. Öner and T. J. McCarthy. Ultrahydrophobic surfaces. effects of topography length scales on wettability. *Langmuir*, 16 :7777–7782, 2000. 42
- [12] Z. Yoshimitsu, A. Nakajima, T. Watanabe, and K. Hashimoto. Effects of surface structure on the hydrophobicity and sliding behavior of water droplets. *Langmuir*, 18 :5818–5822, 2002. 42
- [13] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Dover Publications, 1932. 48, 68, 74

CHAPITRE 3

Caléfaction sur un liquide : résistance de vague

Sommaire

3.1	Statique	56
3.1.1	Forme des interfaces	56
3.1.2	Cas des petites gouttes	58
3.1.3	Cas des flaques	60
3.2	Décélération d'une goutte : la résistance de vague	61
3.2.1	Expérience	61
3.2.2	Résistance de vague : bilan radiatif	64
3.2.3	Comparaison quantitative à la théorie	69
	Bibliographie	74

en collaboration avec Frédéric Chevy (LKB, ENS Ulm) et Élie Raphaël (PCT, ESPCI)

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la friction des gouttes en caléfaction sur des solides. Nous nous intéressons maintenant à l'influence de la déformabilité du substrat. Nous étudions dans ce chapitre le comportement des gouttes d'azote sur d'autres liquides — de l'eau tout d'abord, puis des huiles silicones. Nous discutons la statique d'objets en caléfaction sur un autre liquide, avant de nous intéresser à leur dynamique.

3.1 Statique

Une goutte d'azote liquide envoyée à la surface de l'eau se met en caléfaction comme elle le ferait sur un solide. Un film de vapeur existe donc entre l'eau du bain et la goutte d'azote liquide. Cette lentille va flotter à la surface de l'eau pour deux raisons. D'une part, elle est moins dense que l'eau (la masse volumique de l'azote liquide est 808 kg/m^3) : la poussée d'Archimède soutient donc la goutte. D'autre part, en s'enfonçant, la goutte déforme la surface. La tension de surface de l'eau tend alors à s'opposer à cette déformation, et cet effort soutient aussi la goutte. Par ailleurs, cet équilibre est différent de celui d'un objet rigide (comme un insecte) à la surface de l'eau car la goutte est un objet déformable, au même titre que la surface de l'eau. Deux questions se posent dès lors :

- quelles formes prennent la goutte et la surface de l'eau ?
- comment les grandeurs caractéristiques de cet objet (volume, étendue, profondeur) varient-elles avec son rayon ?

3.1.1 Forme des interfaces

Au paragraphe 1.1.2, nous avons vu que la forme d'une goutte posée sur un solide plan était déterminée par un équilibre entre pression hydrostatique due à la gravité et pression de Laplace due à la tension de surface. Nous rappelons sur la figure 3.1 les notations utilisées : on cherche le rayon horizontal r en fonction de l'altitude z . Ces quantités sont reliées entre elles par l'équation suivante :

$$a\kappa = a\kappa_0 + \frac{z}{a} \quad (3.1)$$

où κ est la courbure de l'interface et $a = \sqrt{\gamma/\rho g}$ est la longueur capillaire.

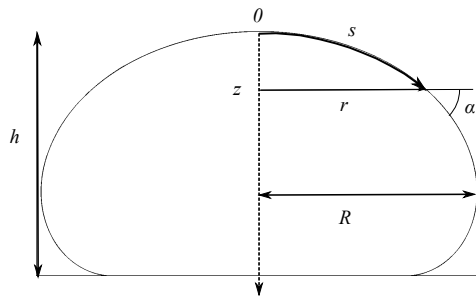


FIGURE 3.1 – Forme d'une goutte posée en mouillage nul. On caractérise le profil à l'aide de l'abscisse curviligne s , du rayon horizontal r et de l'altitude z (la référence étant sur l'axe de la goutte).

Que se passe-t-il quand l'azote liquide est posé sur un autre liquide (de l'eau par exemple), qui a une certaine capacité à se déformer ? Pour répondre à cette question, on peut, comme l'ont fait Princen et Mason [1], considérer que l'on a ici trois interfaces différentes (figure 3.2) :

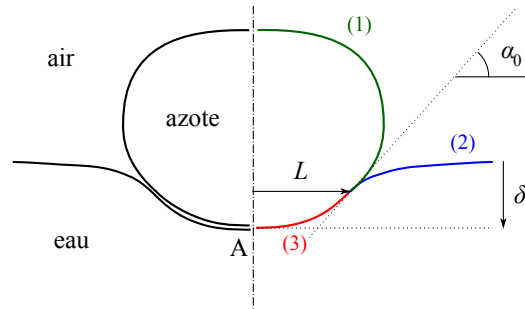


FIGURE 3.2 – Schéma d'une goutte d'azote liquide posée sur de l'eau. On modélise le film de vapeur (à gauche) comme une interface eau-azote (à droite). Dans ce modèle, les interfaces (1), (2) et (3) se rejoignent à la ligne « triple », de rayon L . En ce point, elles sont tangentes et inclinées de α_0 par rapport à l'horizontale.

- (1) une interface azote-air, qui correspond au dessus de la goutte. La tension de surface de l'azote est $\gamma_1 = 8,8 \text{ mN/m}$ et sa masse volumique $\rho_1 = 808 \text{ kg/m}^3$. L'équation pour cette zone est celle d'une goutte posée (équation (3.1)), avec la longueur capillaire $a_1 = \sqrt{\gamma_1/\rho_1 g} = 1,1 \text{ mm}$.
- (2) une interface eau-air, qui est un ménisque. Les grandeurs caractéristiques sont ici la tension de surface de l'eau $\gamma_2 = 72 \text{ mN/m}$ et sa densité $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$. La longueur capillaire associée au ménisque est donc $a_2 = \sqrt{\gamma_2/\rho_2 g} = 2,7 \text{ mm}$.
- (3) le dessous de la goutte est la zone du film de vapeur, coincé entre la goutte d'azote et l'eau. Nous faisons l'hypothèse que cette zone peut être modélisée comme une seule interface eau-azote. Ce faisant, on néglige l'influence de la vapeur qui s'écoule dans le film. L'équation de la zone (3) est alors celle d'une goutte (équation (3.1)) mais à l'« envers » (axe des z orienté vers le haut et avec une origine au point A de la figure 3.2) et en prenant la tension de surface équivalente $\gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2 = 81 \text{ mN/m}$ et la masse volumique équivalente $\rho_3 = \rho_2 - \rho_1 = 192 \text{ kg/m}^3$. La longueur capillaire associée à cette « interface » (visible en rouge sur la figure 3.2) est alors $a_3 = \sqrt{\gamma_3/\rho_3 g} = 6,6 \text{ mm}$.

Ces interfaces se raccordent à la ligne « triple » (circulaire dans cette géométrie), de rayon L . En ce point, elles ont la même pente α_0 : c'est une conséquence de l'équilibre local des tensions (relation de Young). En connaissant cette pente et L , on peut en théorie remonter à la forme globale de la goutte, en utilisant l'égalité des

pressions à la ligne « triple ». La loi de Laplace impose alors :

$$\gamma_3 \kappa_3 = \gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2 \quad (3.2)$$

où κ_1 , κ_2 et κ_3 sont les courbures des trois interfaces à cet endroit (en choisissant $\kappa > 0$ quand l'axe de révolution de la goutte est à l'intérieur de la surface courbée).

Pour une goutte de volume donné, L et α_0 sont sélectionnés par l'équilibre mécanique de la goutte : son poids doit être compensé par la résultante des forces de pression agissant dans le film de vapeur. Plus le rayon R de la goutte est grand, plus son poids est élevé et plus l'eau va se déformer pour maintenir la goutte.

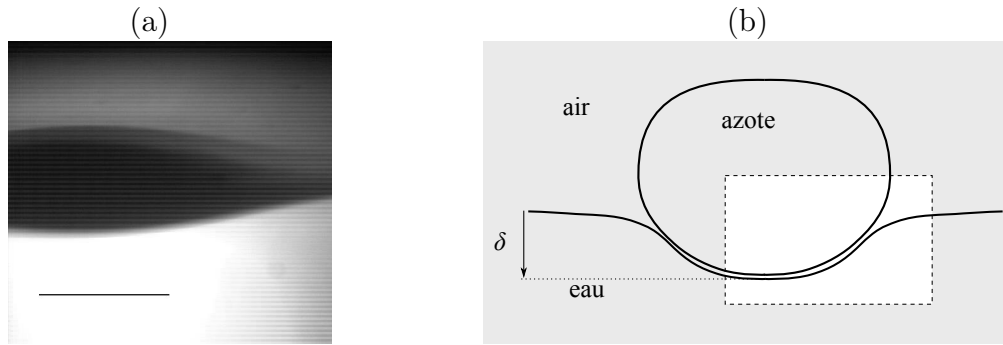


FIGURE 3.3 – (a) Vue de dessous de la surface de l'eau sous une lentille d'azote liquide ($R = 0,9$ mm). La barre noire représente 1 mm. Le champ visible sur la photo (a) correspond à la zone encadrée sur le schéma (b).

À l'aide d'une loupe binoculaire, on peut visualiser la surface de l'eau sous la goutte, comme sur la figure 3.3. On en déduit la profondeur d'enfoncement δ (définie sur la figure 3.2) en fonction de R , que l'on mesure en filmant simultanément la goutte de dessus. On vérifie sur la figure 3.4 que δ augmente avec R .

3.1.2 Cas des petites gouttes

On considère ici le cas limite où $R \ll a_1 < a_2 < a_3$ (R est toujours le rayon équatorial de la goutte). La gravité ne joue pas sur la forme des interfaces ici, les zones (1) et (3) sont donc des calottes sphériques, tandis que l'interface (2) demeure plate (figure 3.5). On cherche alors le rayon de courbure R_c de l'interface (3). Il est donné par l'égalité des pressions dans la goutte :

$$\frac{2\gamma_1}{R} = \frac{2\gamma_3}{R_c}$$

qui est une approximation de (3.2). L'étendue de la zone déformée L est alors déterminée par l'équilibre mécanique de la goutte. Celle-ci est quasi-sphérique et l'on

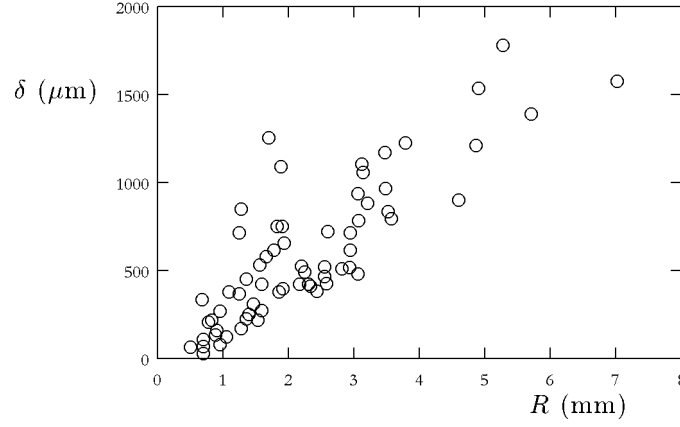
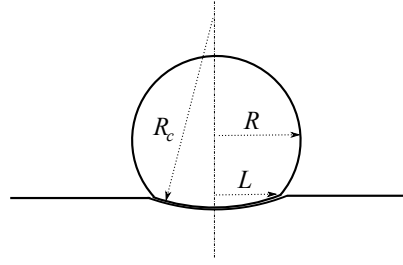
FIGURE 3.4 – Profondeur d'enfoncement δ en fonction du rayon R .

FIGURE 3.5 – Schéma d'une petite goutte d'azote liquide à la surface de l'eau.

considère que la zone « immergée » est petite devant la taille totale de la goutte. Le poids s'écrit alors $\frac{4}{3}\pi\rho_1 R^3 g$. Il est compensé par la résultante des forces de pression dans le film, qui s'écrit $\pi L^2 \times 2\gamma_2/R_c$. On obtient alors :

$$L = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \frac{R^2}{a_1}} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_2} \frac{R^2}{a_1}} \quad (3.3)$$

et

$$R_c = \frac{\gamma_3}{\gamma_1} R = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1} R \quad (3.4)$$

Dans la limite d'un liquide sous-jacent indéformable ($\gamma_2 \gg \gamma_1$), on retrouve à partir de (3.3) et (3.4) le cas d'une goutte non-mouillante posée sur un solide ($R_c \rightarrow \infty$) discuté par Mahadevan et Pomeau [2] $L = \sqrt{2/3} R^2/a_1$. Pour des gouttes d'azote liquide à la surface de l'eau, on a $(\gamma_1 + \gamma_2)/\gamma_2 = 81/72 = 1.13 \approx 1,06^2$. La zone déformée va donc être 6% plus grande que sur un solide : l'eau est peu déformable par rapport à l'azote liquide, l'étendue du film de vapeur doit donc être très proche de celle sur un solide.

Dans cette limite de gouttes « sphériques », on peut déduire de la géométrie la profondeur d'enfoncement δ : elle est telle que $2\delta R_c \approx L^2$. On attend donc

$$\delta \approx \frac{1}{3} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{R^3}{a_1^2}$$

Pour une goutte de rayon $R = 0,5$ mm, on évalue $\delta \approx 5$ μ m. Cette valeur est beaucoup plus faible que les observations (δ de l'ordre de la centaine de microns), qui sont par ailleurs très dispersées. Cet écart pourrait être dû au fait que les expériences ne correspondent pas à des rayons très petits devant a_1 : on a $R/a_1 \approx 0,5$ au minimum. On pourrait remettre en cause un certain nombre d'approximations dans ce raisonnement : gravité négligée, approximation du poids de la goutte et non-prise en compte de l'existence du film de vapeur par exemple.

3.1.3 Cas des flaques

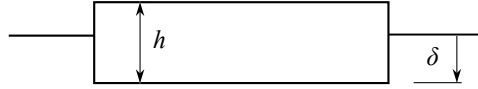


FIGURE 3.6 – Schéma d'une flaque d'azote liquide à la surface de l'eau.

Si $R \gg a_3 > a_2 > a_1$, la goutte a une forme de cylindre aplati de hauteur h (figure 3.6). La profondeur d'enfoncement δ est dans ce cas reliée à la hauteur h par l'équilibre des pressions hydrostatiques sous la goutte :

$$\rho_1 g h = \rho_2 g \delta$$

L'épaisseur h d'une goutte de volume Ω se trouve en minimisant par rapport à h l'énergie totale $\mathcal{E}$ de la goutte, qui est la somme des énergies de surface et de gravité :

$$\mathcal{E} = 2\gamma_1 \frac{\Omega}{h} + \frac{1}{2} \rho_1 g \frac{\Omega}{h} (h - \delta)^2 + \frac{1}{2} \rho_3 g \frac{\Omega}{h} \delta^2$$

La minimisation donne $h = 2\sqrt{\gamma_1/\tilde{\rho}g}$ avec $\tilde{\rho} = \rho_3\rho_1/\rho_2 = 155$ kg/m³ [3]. L'épaisseur de la flaque d'azote à l'équilibre vaut donc $h = 4,8$ mm, et sa profondeur d'enfoncement vaut $\delta = h(\rho_1/\rho_2) = 3,9$ mm.

En pratique, les profondeurs que nous mesurons sont toujours inférieures à 2 mm. Cela n'est pas surprenant, car les rayons R explorés ne dépassent pas 8 mm. La

condition $R \gg a_3 = 6,6 \text{ mm}$ n'est donc jamais vérifiée dans la gamme de nos expériences : l'interface sous la goutte est toujours courbée et nous n'atteignons pas le régime asymptotique de flaque décrit ici.

3.2 Décélération d'une goutte : la résistance de vague

3.2.1 Expérience

Principe

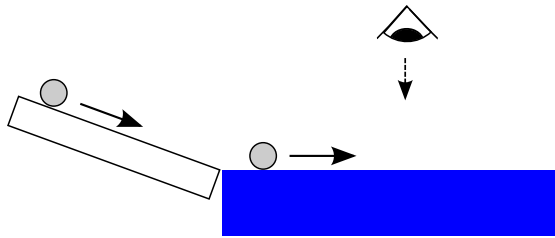


FIGURE 3.7 – Schéma de l'expérience : on accélère une goutte d'azote liquide sur un plan incliné qui aboutit sur un récipient d'eau. La goutte se déplace alors à la surface de l'eau et on filme de dessus son ralentissement.

On s'intéresse maintenant à la dynamique des gouttes d'azote sur l'eau. L'expérience est présentée sur la figure 3.7 : on accélère une goutte d'azote sur un plan incliné qui aboutit sur un bain d'eau (ou d'un autre liquide). La goutte arrive à la surface de l'eau avec une vitesse initiale que nous choisissons entre 10 cm/s et 1 m/s. On filme son déplacement de dessus. La figure 3.8 montre des images d'une expérience typique, sur laquelle on peut remarquer le ralentissement de la goutte. Nous déduisons de ces enregistrements la position de la goutte en fonction du temps, ce qui permet de mesurer, comme nous l'avons fait au paragraphe 2.1.2, une décélération moyenne $\Gamma = -\frac{dV}{dt}$ pour une vitesse moyenne V .

Influence de la vitesse

Nous présentons sur la figure 3.9 nos mesures de Γ en fonction de V pour des gouttes de rayon $R = 1,50 \pm 0,13 \text{ mm}$ lancées sur de l'eau et sur un solide. Ces mesures constituent le résultat central de ce chapitre.

On peut tout d'abord constater que la friction augmente fortement à cause de la présence du liquide sous-jacent : pour $V = 40 \text{ cm/s}$, Γ est 20 fois plus grande sur

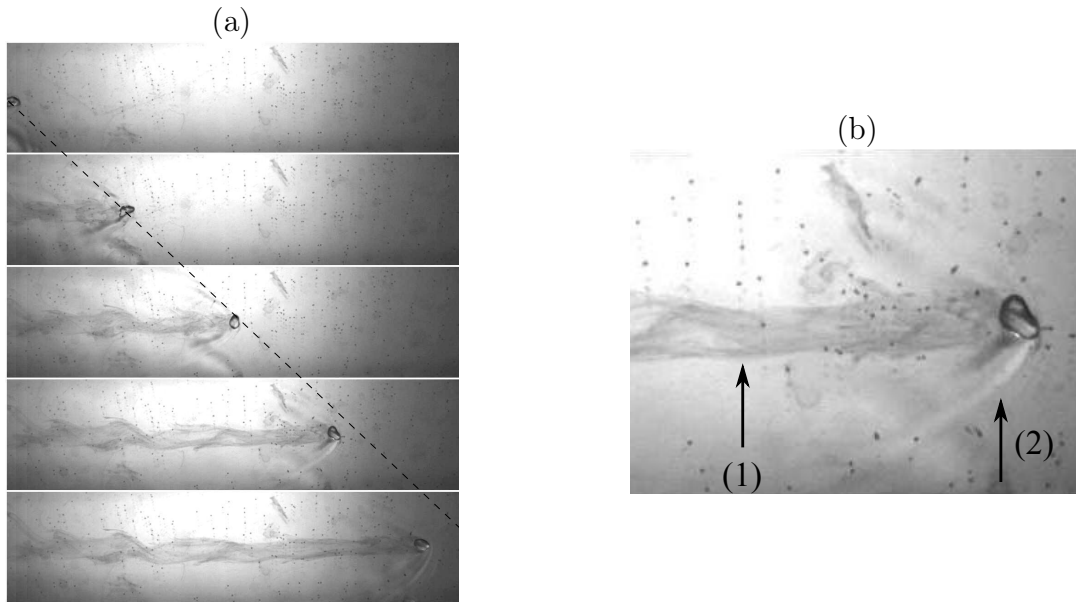


FIGURE 3.8 – (a) Images successives d’une goutte d’azote liquide glissant sur de l’eau. Le rayon de la goutte est $R = 1,4$ mm et sa vitesse initiale est 56 cm/s. L’intervalle entre deux images consécutives est 40 ms. (b) Image grossie de la goutte : on remarque deux sillages différents. Le premier, noté (1), correspond à la traînée laissée dans l’air par la goutte : celle-ci refroidit l’air et de la vapeur d’eau se condense après son passage. Le deuxième, noté (2), est un sillage d’ondes à la surface de l’eau.

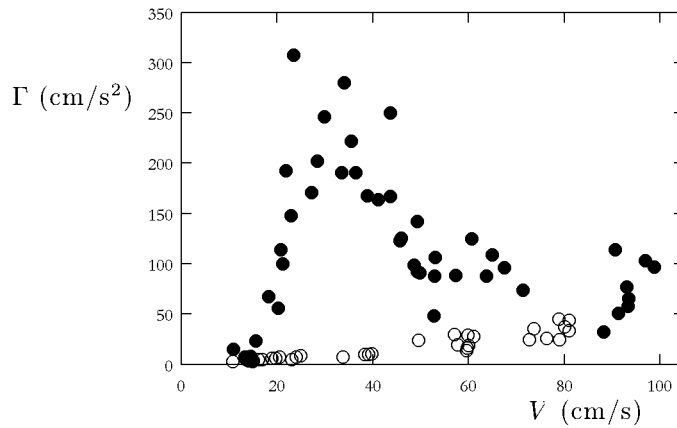


FIGURE 3.9 – Décélération Γ en fonction de la vitesse V d’une goutte de rayon $R = 1,50 \pm 0,13$ mm sur de l’eau (symboles pleins ●) ou sur un solide (symboles creux ○).

le substrat liquide. La décélération sur l’eau est d’ordre 2 m/s^2 . La masse M des gouttes vaut environ 10 mg. La force de friction vaut donc environ $20 \text{ }\mu\text{N}$, contre $1 \text{ }\mu\text{N}$ sur le solide.

Intéressons-nous à la dépendance de Γ en la vitesse V . Pour les vitesses les plus faibles ($V \sim 10 - 15$ cm/s), la décélération est semblable à celle mesurée sur le solide. Pour V légèrement plus grand, on constate une augmentation très violente de Γ avec la vitesse : alors que V passe de 15 à 25 cm/s, soit moins d'un facteur 2, Γ est multipliée par 30. La décélération atteint ensuite un maximum, de l'ordre de $2,5 \text{ m/s}^2$, pour $V \sim 30$ cm/s. Enfin, pour des vitesses supérieures, Γ décroît quand V augmente. Pour $V \sim 80$ cm/s, elle n'est plus que 2 fois la décélération sur un solide.

Influence de la taille des gouttes

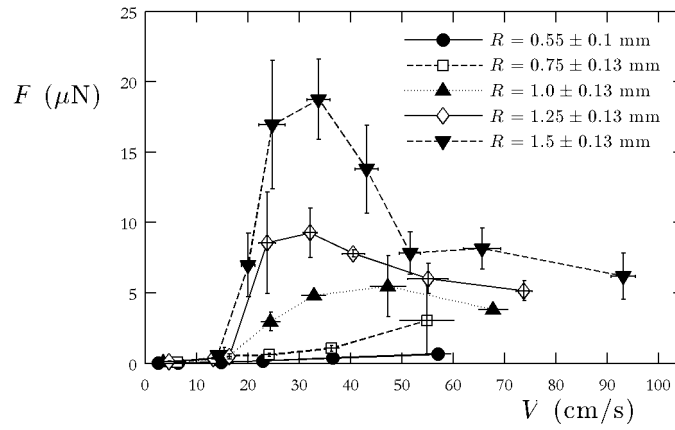


FIGURE 3.10 – Force résistante F en fonction de la vitesse de la goutte V , pour différents rayons R . La force F est estimée à partir des mesures de décélération.

Nous avons reproduit cette expérience pour différents rayons de gouttes, compris entre $R = 0,55$ mm et $R = 1,50$ mm. À partir des mesures de décélération, on peut estimer la force de friction F exercée sur la goutte. Nous présentons nos résultats moyennés pour $F(V)$ sur la figure 3.10, sur laquelle on constate que la friction F est très sensible au rayon, qui varie seulement d'un facteur 3 dans cette expérience. La première sensibilité est celle de l'amplitude maximale $F_{\max}$ de la force. $F_{\max}$ est ainsi multipliée par 3 (de 6 à 19 μN) quand R passe de 1 à 1,5 mm, soit une augmentation de 50 % seulement. La deuxième influence du rayon est de changer l'allure de la courbe $F(V)$. Plus particulièrement, la vitesse pour laquelle $F = F_{\max}$ diminue quand R augmente : pour $R \approx 1$ mm, F est maximale pour $V \approx 50$ cm/s, tandis que ce maximum est visible pour $V \approx 30$ cm/s quand R vaut 1,5 mm. Pour les plus petites gouttes ($R \leq 0,75$ mm), on n'observe plus de maximum de force dans la plage de vitesse explorée.

3.2.2 Résistance de vague : bilan radiatif

La décélération sur l'eau peut être expliquée par ce que l'on appelle traditionnellement résistance de vague. Lorsqu'un objet (comme un bateau) se déplace à la surface de l'eau, il engendre un sillage de vague stationnaire qui est responsable d'une traînée supplémentaire pour le bateau. La vitesse de croisière d'un sous-marin immergé est ainsi 20 à 50 % plus élevée que sa vitesse à la surface [4]. Lorsqu'elles glissent à la surface de l'eau, les gouttes d'azote liquide créent aussi un sillage que l'on devine sur la figure 3.8. La différence entre un bateau et notre expérience est qu'aux échelles millimétriques auxquelles nous travaillons, l'énergie emmagasinée par les vagues n'est pas seulement de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur, mais aussi de l'énergie de surface. Nous reprenons ici le principe de la théorie d'É. Raphaël et P.-G. de Gennes [5], qui prédit la résistance de vague pour un objet ponctuel en se fondant sur un bilan d'énergie.

Relation de dispersion

Les ondes que nous considérons ici sont dites « capillaro-gravitaires » : les éléments stabilisants pour ces vagues sont la gravité et la tension de surface. Dans nos expériences, les longueurs d'onde sont millimétriques, et la profondeur du bain d'eau centimétrique. On peut donc se placer dans l'approximation d'eau profonde. La relation de dispersion des ondes de surface s'écrit alors :

$$\omega^2 = gk + \gamma \frac{k^3}{\rho} \quad (3.5)$$

en notant k le nombre d'onde et ω la pulsation [6]. Ici, γ et ρ désignent la tension de surface et la masse volumique de l'eau, dont on néglige dans un premier temps la viscosité.

Seuil en vitesse

L'équation (3.5) implique que la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$ n'est pas monotone avec k (figure 3.11). Elle atteint un minimum pour $k = 1/a$ (l'inverse de la longueur capillaire), qui vaut $c_{\min} = (4g\gamma/\rho)^{1/4}$. Pour de l'eau, $c_{\min}$ vaut 23 cm/s.

Lorsqu'un objet se déplace à la surface de l'eau à la vitesse V , le sillage qu'il crée est tel que $v_\varphi = V$ ¹. Une première conséquence de cela est que l'on n'observera pas de sillage stationnaire si la goutte se déplace à une vitesse plus petite que 23 cm/s. C'est effectivement ce que l'on observe sur la figure 3.12. Par conséquent, pour $V < 23$ cm/s, la source de la résistance de vague disparaît et la force associée

1. à une dimension. À deux dimensions, le sillage part dans toutes les directions du plan, et les ondes sont telles que $v_\varphi \leq V$.

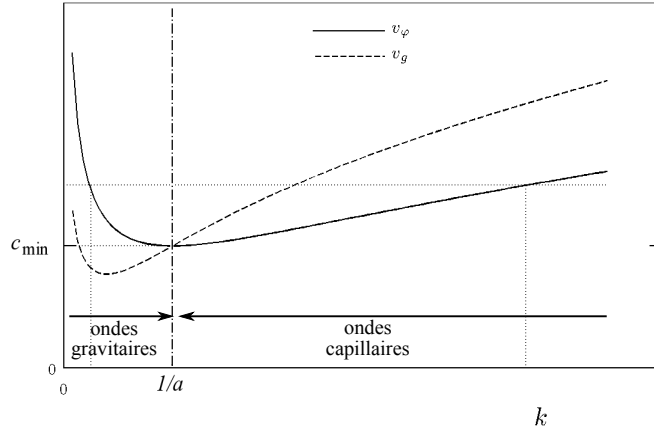


FIGURE 3.11 – Vitesses de phase v_φ et de groupe v_g des ondes de surface, en fonction du nombre d'onde k , calculées d'après l'équation (3.5). Les petits nombres d'onde ($k < 1/a$) correspondent aux ondes de gravité, les grands nombres d'onde ($k > 1/a$) aux ondes capillaires.

est nulle. La goutte ralentit simplement parce qu'elle se déplace dans l'air et sa décélération est très proche de celle sur un solide (figure 3.9).

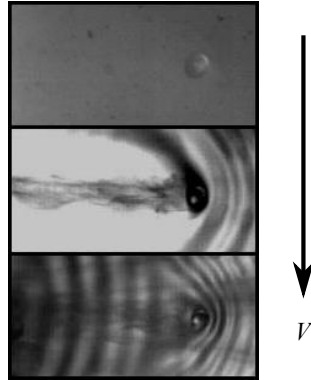


FIGURE 3.12 – Images de gouttes d'azote liquide se déplaçant sur de l'eau (vue de dessus, $R \approx 1,5$ mm). Les vitesses V des gouttes sont (de haut en bas) 11, 24 et 40 cm/s. On n'observe de sillage que pour $V > 23$ cm/s.

Bilan radiatif

Pour $V > c_{\min}$, on voit sur la figure 3.11 que la vitesse V sélectionne deux nombres d'onde, l'un plus grand que $1/a$, qui correspond aux ondes « capillaires », l'autre plus petit que $1/a$, qui correspond aux ondes « gravitaires ». D'autre part, la figure 3.11 nous montre que la surface de l'eau est un milieu dispersif : la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ n'est pas égale à la vitesse de phase v_φ . Pour $k > 1/a$, on a

$v_g > v_\varphi$: les ondes capillaires sont à l'avant de la goutte (figure 3.12). Inversement, pour $k < 1/a$, on a $v_g < v_\varphi$: les ondes gravitaires sont à l'arrière.

Une autre conséquence du caractère dispersif de la surface est que l'énergie emmagasinée dans les ondes (énergies cinétique, de pesanteur et de surface) s'éloigne de l'objet qui se déplace, à la vitesse $v_g - v_\varphi$: les ondes capillaires transportent l'énergie en avant de la goutte, les ondes gravitaires en arrière. C'est ce mécanisme qui est à l'origine de la résistance de vague.

Considérons un modèle simplifié à une dimension, dans lequel on impose une force verticale ponctuelle w par unité de largeur. Dans notre situation bidimensionnelle, la force imposée est le poids W de la goutte. Dans ce cadre, nous évaluons la puissance $\mathcal{P}$ par unité de largeur qui s'éloigne de la goutte avec les vagues quand celle-ci se déplace à une vitesse constante V . On note E l'énergie par unité de surface emmagasinée dans les vagues. L'énergie E est transportée à la vitesse de groupe v_g , donc par rapport à l'objet qui se déplace à la vitesse $V = v_\varphi$, la puissance qui s'en éloigne s'écrit $\mathcal{P} \sim E(v_g - V)$. Cette puissance perdue par l'objet mobile est équivalente à une force de traînée f par unité de largeur, telle que $\mathcal{P} = fV$, soit :

$$f \sim \frac{v_g - V}{V} E$$

Cette force constitue la résistance de vague, dans le cas où le sillage existe et est stationnaire, c'est-à-dire pour $V \geq c_{\min} = 23$ cm/s. É. Raphaël et P.-G. de Gennes calculent alors l'expression de la résistance de vague :

$$f = \frac{w^2}{\gamma} \frac{1}{[1 - (c_{\min}/V)^4]^{1/2}}$$

Ils prédisent que la résistance de vague est infinie pour $V = c_{\min}$, et tend vers w^2/γ pour $V \gg c_{\min}$. À deux dimensions, la dépendance de la résistance F en la vitesse V est montrée sur la figure 3.13. La résistance de vague est discontinue à $V = c_{\min}$ — elle passe de $F = 0$ à $F = W^2/(2^{3/2}\gamma a)$ —, puis augmente avec V .

Cette discontinuité explique l'allure de la décélération $\Gamma(V)$ d'une goutte d'azote liquide (figure 3.9). À basse vitesse ($V < 23$ cm/s), il n'y a pas de résistance de vague, et la friction subie par la goutte est très proche de celle sur un solide. En revanche, pour $V > 23$ cm/s, la friction est beaucoup plus élevée et est principalement due à la résistance de vague. Pour $V = c_{\min} = 23$ cm/s, la discontinuité attendue de la force se traduit expérimentalement par l'augmentation très forte (d'un facteur 30) de Γ que l'on mesure entre 15 et 25 cm/s.

Pour une goutte d'azote liquide de rayon $R = 1,5$ mm, la masse M vaut 7 mg, et la force maximale mesurée est environ 20 μN (figure 3.10), qui est comparable à l'estimation $W^2/\gamma a \sim (Mg)^2/\gamma a \sim (7 \cdot 10^{-6} \times 10)^2/(70 \cdot 10^{-3} \times 3 \cdot 10^{-3}) \sim 20 \mu\text{N}$.

On peut également remarquer que la résistance de vague prédite est très sensible avec la force verticale W : elle est proportionnelle à W^2 . Dans notre expérience, W

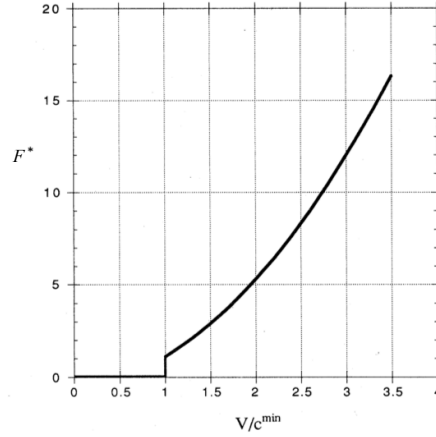


FIGURE 3.13 – Résistance de vague adimensionnée $F^* = \pi F \gamma a / W^2$ en fonction de $V/c_{\min}$. Figure tirée de [5].

est le poids des gouttes, qui varie comme R^3 pour des gouttes sphériques ($R < a_1 = 1,1$ mm). Si elle est due à la résistance de vague, on s'attend donc à ce que la force résistante F varie comme R^6 , ce qui est une variation très sensible. On constate bien dans les expériences que la traînée augmente avec la taille des gouttes, de façon très rapide (figure 3.10).

Comment comprendre cette dépendance au poids imposé W (ou w à une dimension) ? Nous avons vu que la force résistante est proportionnelle à l'énergie par unité de surface des vagues : $f \sim E$. Une longueur d'onde typique est ici la longueur capillaire a . Dans ce cas, on peut estimer l'énergie par unité de surface des vagues, qui est la somme des énergies cinétique, de gravité et de surface :

$$E \sim \rho g A^2 \sim \gamma A^2 k^2$$

où A désigne l'amplitude des vagues. A est enfin reliée à la force verticale w [7]. Comme $a \sim 1/k$ est ici la seule échelle de longueur « horizontale », la pression typique imposée par la force ponctuelle varie dimensionnellement comme w/a . Cette pression s'équilibre avec la pression due à la présence des vagues $\rho g A \sim \gamma A k^2$, d'où il vient :

$$A \sim \frac{w}{\rho g a}$$

L'amplitude du sillage est linéaire avec la force verticale imposée. On en déduit que f doit être proportionnelle à w^2/γ à une dimension — à deux dimensions, on aurait $F \sim W^2/\gamma a$.

Effet de taille finie

Dans le cas d'un objet de grande taille (comme un bateau de longueur L), la résistance de vagues augmente quand le nombre de Froude $Fr = V/\sqrt{gL}$ devient d'ordre 1 [6]. Cela correspond au moment où les sillages générés par l'avant et l'arrière du bateau interfèrent fortement, c'est-à-dire quand $L \sim 1/k$.

Dans le régime dominé par la gravité, l'équation de dispersion (3.5) s'écrit $\omega^2 = gk$ qui donne $V^2 = g/k$ si $V = \omega/k$. On aura donc une résistance plus grande pour $L \sim V^2/g$, soit pour $V \sim \sqrt{gL}$. C'est l'origine de ce que l'on appelle en architecture navale la « vitesse limite de coque ».

Le mécanisme qui explique que l'on observe un maximum de décélération en V (figure 3.9) est ici le même : la résistance de vague sera maximale quand la longueur d'onde $1/k$ sera d'ordre R , mais on considère ici de petites longueurs d'onde pour lesquelles la capillarité compte plus que la gravité. Dans ce cas, l'équation (3.5) s'écrit $\omega^2 = \gamma k^3/\rho$, soit $V^2 = \gamma k/\rho$, qui donne $1/k = \gamma/\rho V^2$. En comparant cette longueur à l'échelle R de la goutte, on construit un nombre de Froude capillaire $Fr_\gamma = V\sqrt{\rho R/\gamma}$. La résistance de vague sera maximale pour $Fr_\gamma \sim 1$, soit pour $V \sim \sqrt{\gamma/\rho R}$. En prenant $R = 1$ mm, on trouve $\sqrt{\gamma/\rho R} \approx 30$ cm/s, ce qui est du même ordre de grandeur que la vitesse du maximum de décélération dans les mesures (figure 3.9). Cette vitesse caractéristique est décroissante en R , ce qui aussi cohérent avec les expériences (figure 3.10), dans lesquelles $F = F_{\max}$ pour des vitesses plus faibles à mesure que R augmente.

Viscosité du substrat

Si le liquide du bain est plus visqueux que l'eau, les ondes sont amorties et la résistance de vagues doit disparaître. On s'attend à ce que cet effet soit perceptible si le taux d'amortissement des ondes νk^2 [8] devient plus grand que la pulsation $v_\varphi k$. En prenant $v_\varphi \approx c_{\min}$ et $k \approx 1/a$, on trouve que les ondes disparaissent pour $\nu > ac_{\min}$. Pour un liquide de mêmes masse volumique et tension de surface que l'eau, on trouve $ac_{\min} \approx 6 \cdot 10^{-3} \times 2 \cdot 10^{-1} \approx 600$ cSt : les ondes seront amorties pour une viscosité supérieure à 600 fois celle de l'eau. Pour un bain d'huile silicone, on a $\rho \approx 970$ kg/m³ et $\gamma \approx 20$ mN/m. La longueur capillaire vaut donc $a = 1,5$ mm et la vitesse minimale pour observer un sillage devient $c_{\min} = 17$ cm/s. Le seuil en viscosité pour voir les ondes disparaître est donc $\nu \approx 300$ cSt. On observe en effet que le sillage créé par une goutte d'azote disparaît quand ν augmente entre 5 et 1000 cSt (figure 3.14).

Nous avons ainsi mis en évidence que les gouttes d'azote décélèrent principalement à cause de la résistance de vagues. C'est une conséquence de la très grande mobilité des gouttes de Leidenfrost. De plus, dans cette expérience, la condition imposée par la goutte est très bien définie — il s'agit simplement de son poids



FIGURE 3.14 – Images de gouttes d’azote liquide se déplaçant sur des huiles silicone de viscosité ν croissante : de haut en bas, $\nu = 5, 20, 100, 300$ et 1000 cSt. Les gouttes, de rayon $R \approx 1,5$ mm et de vitesse $V \sim 30$ cm/s $> c_{\min}$, sont vues de dessus.

Mg —, contrairement aux expériences précédentes de mesure de la résistance de vague [9, 10], dans lesquelles la présence d’une ligne de contact complique la comparaison aux théories existantes. On dispose ainsi d’un outil modèle pour étudier quantitativement la résistance de vague.

3.2.3 Comparaison quantitative à la théorie

Dans la continuité des travaux d’É. Raphaël, P.-G. de Gennes et D. Richard [5, 11], une théorie de la résistance de vague a été développée par É. Raphaël et F. Chevy, qui permet de calculer la décélération des gouttes d’azote liquide due au sillage. Nous en rappelons ici les grands principes, avant d’en comparer les résultats aux expériences.

Cadre théorique général

Nous reprenons ici le raisonnement d’É. Raphaël et F. Chevy [12], pour calculer la résistance de vague due à la force verticale W imposée par un objet. Celui-ci impose plus précisément un champ de pression à la surface de l’eau, qui se déplace à la vitesse V . Dans le cas extrême d’une force ponctuelle, ce champ de pression est une fonction de Dirac. Dans notre cas, nous allons considérer que la pression est

constante sur un cercle de rayon L , où elle vaut $W/\pi L^2$, et nulle partout ailleurs.

De façon générale, on écrit la transformée de Fourier du champ de pression :

$$\hat{p}(k_x, k_y) = W \hat{\phi}(k)$$

On peut en déduire, à travers les équations des ondes de surface dans le régime linéaire, la transformée de Fourier $\hat{\xi}(k_x, k_y)$ du déplacement de la surface de l'eau $\xi(x, y)$:

$$\hat{\xi}(k_x, k_y) = -W \frac{k}{\rho} \left(\frac{\hat{\phi}(k)}{gk - \gamma k^3/\rho - 4\nu^2 k^3 q + (2\nu k^2 - i\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})^2} \right)$$

en notant $q^2 = k^2 - i\mathbf{V} \cdot \mathbf{k}/\nu$. La résistance de vague correspond enfin à l'intégrale de la composante horizontale des forces de pression :

$$\mathbf{F} = \int d^2r \, p(\mathbf{r}) \nabla \xi(\mathbf{r})$$

qui se réécrit :

$$\mathbf{F} = \frac{W}{(2\pi\rho)^2} \int d^2\mathbf{k} \left(\frac{ik|\hat{\phi}(k)|^2 \mathbf{k}}{gk - \gamma k^3/\rho - 4\nu^2 k^3 q + (2\nu k^2 - i\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})^2} \right)$$

Hypothèses du modèle

Pour calculer la résistance de vague, il faut préciser l'allure du champ de pression imposé par la goutte. Pour cela, nous avons supposé que la pression était constante sur un disque de rayon L , qui correspondrait à l'étendue du film de vapeur sous la goutte (partie 3.1). En pratique, nous ne connaissons pas exactement L pour R quelconque. Nous avons donc pris l'étendue du film de vapeur pour une goutte posée sur un solide, que nous savons légèrement inférieure à l'étendue réelle dans le cas des petites gouttes (paragraphe 3.1.2).

De la même façon, nous ne savons pas calculer de façon exacte la masse de la goutte d'azote posée sur de l'eau. Nous estimons donc la masse M en prenant celle qu'aurait une goutte de même rayon équatorial posé sur un solide (paragraphe 1.1.2). Nous pouvons comparer cette prédiction à des mesures de $M(R)$, faites en pesant un récipient rempli d'eau, sur lequel on dépose une goutte d'azote que l'on filme en même temps (figure 3.15). On constate que la masse calculée sous-estime la valeur réelle (la moyenne des résidus est d'environ 10 %). Comme la résistance de vague varie comme le carré du poids des gouttes $W = Mg$, cet écart peut mener à une sous-estimation importante de la force de friction.

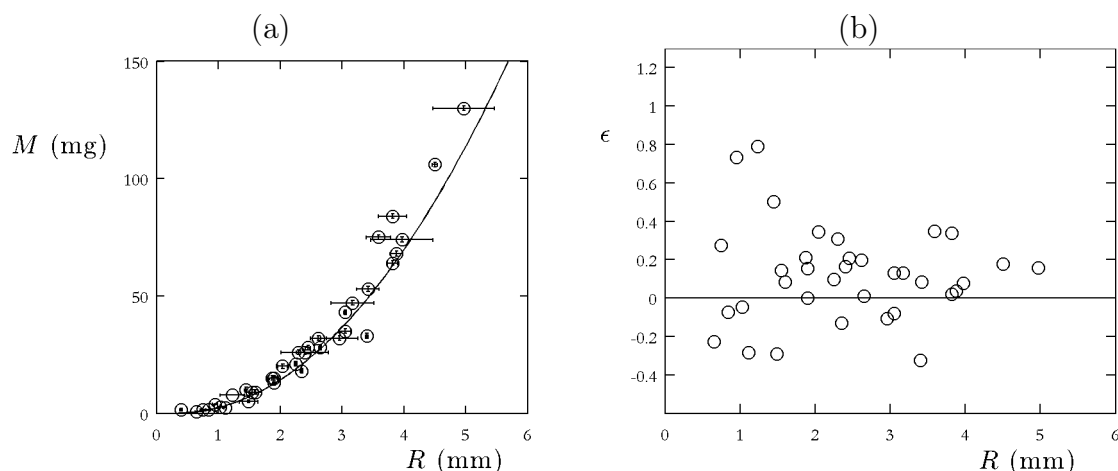


FIGURE 3.15 – (a) Masse M d'une goutte d'azote liquide de rayon R . La courbe en trait plein correspond à la prédiction M_{calcul} pour une goutte posée sur un solide (paragraphe 1.1.2). (b) Résidu $\epsilon = \frac{M - M_{\text{calcul}}}{M_{\text{calcul}}}$ en fonction du rayon R .

Comparaison aux expériences

Influence du rayon On peut ensuite comparer quantitativement les décélérations mesurées pour différentes tailles de gouttes aux prédictions de cette théorie (courbes en traits pleins, figure 3.16). On constate que les prédictions rendent bien compte des expériences pour $R \geq 1$ mm (figures 3.16(a)(b)(c)), en calculant la résistance de vague pour des rayons de goutte égaux ou légèrement supérieurs à ceux mesurés dans les expériences. Cette différence de rayon n'est pas surprenante car nous venons de voir que le modèle sous-estime légèrement le poids des gouttes W . On peut remarquer qu'en particulier, l'amplitude et la position du maximum de décélération sont cohérentes entre théorie et expérience. Pour les décélérations plus faibles (à petite et grande vitesses), la valeur théorique est plus basse que la valeur mesurée. Cela s'explique par le fait qu'il existe d'autres sources de friction, comme le frottement de l'air ou dans le film de vapeur (chapitre 2), qui s'ajoutent à la traînée de vague. On peut tenter de tenir compte de ces autres effets, soit à partir de mesures de décélération de gouttes d'azote liquide sur un solide pour $R \approx 1,5$ mm (figure 3.9, symboles creux), soit en extrapolant linéairement la décélération aux vitesses plus petites que 15 cm/s, pour les autres rayons. Dans ce dernier cas, on fait l'hypothèse que la friction additionnelle est de type visqueuse. Nous traçons sur la figure 3.16 cette estimation de la décélération due à ces autres frictions (en pointillés), ainsi que la décélération totale attendue (trait discontinu). On observe alors un bon accord entre théorie et expérience sur toute la gamme de vitesse explorée, et pour tous les rayons ($0,55 \text{ mm} < R < 1,5 \text{ mm}$). On peut ainsi remarquer que pour les gouttes les plus petites ($R = 0,55 \text{ mm}$, figure 3.16(e)), la résistance de vague ne constitue plus

que la moitié de la friction totale.

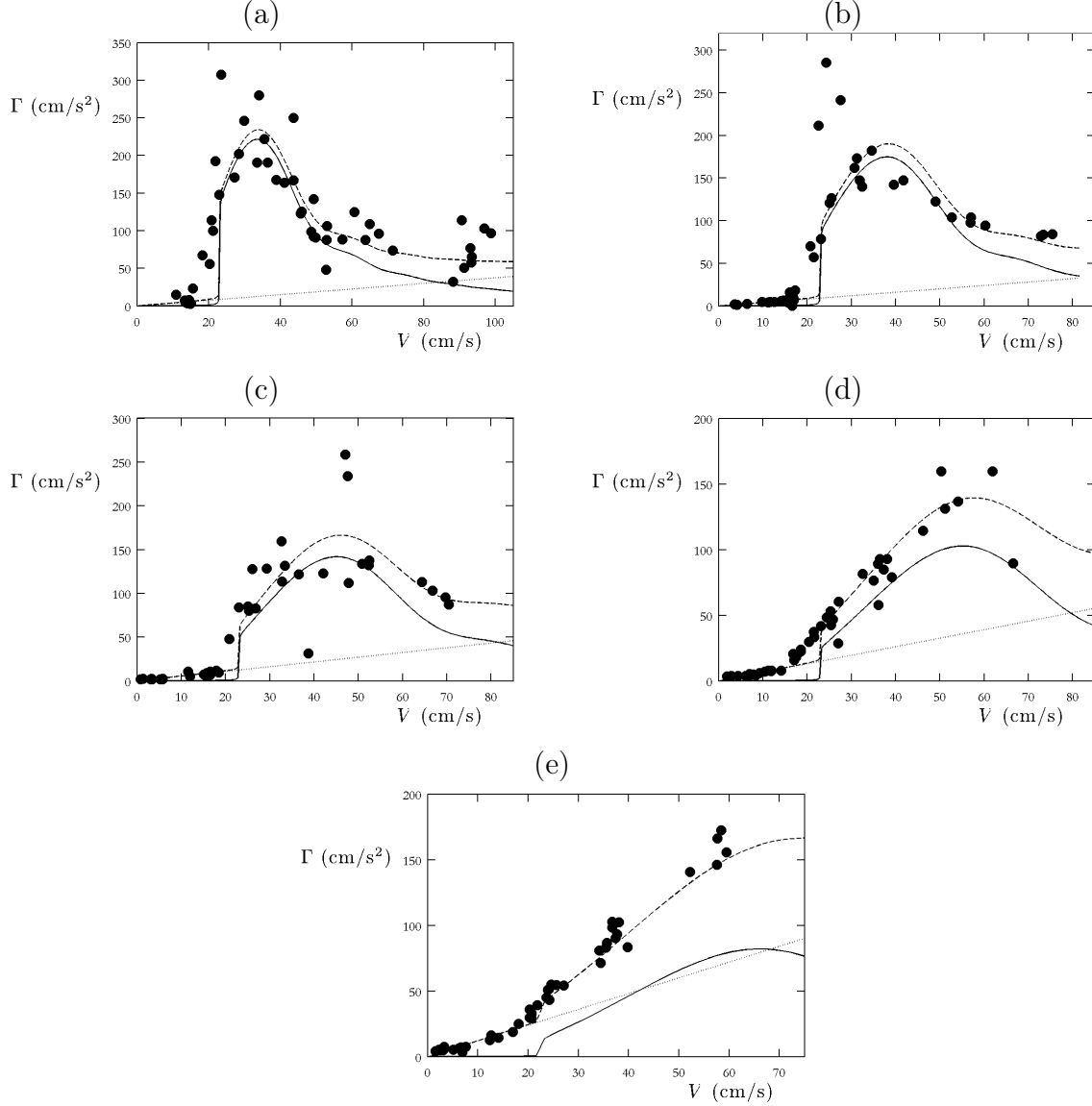


FIGURE 3.16 – Décélération Γ en fonction de la vitesse V : influence du rayon R de la goutte. Les symboles représentent les points expérimentaux. Les courbes en trait plein correspondent aux prédictions de résistance de vague de F. Chevy et É. Raphaël calculées pour un rayon R_{th} , les courbes en pointillés à une estimation de la décélération due aux autres types de friction et les courbes en trait discontinu à une superposition des deux courbes précédentes. (a) $R = 1,5 \pm 0,13$ mm, $R_{\text{th}} = 1,6$ mm ; (b) $R = 1,25 \pm 0,13$ mm, $R_{\text{th}} = 1,25$ mm ; (c) $R = 1,0 \pm 0,13$ mm, $R_{\text{th}} = 1,05$ mm ; (d) $R = 0,75 \pm 0,13$ mm, $R_{\text{th}} = 0,75$ mm ; (e) $R = 0,55 \pm 0,1$ mm, $R_{\text{th}} = 0,65$ mm.

Grandes viscosités On peut également essayer de quantifier l'influence de la viscosité du substrat. Pour cela, nous avons envoyé des gouttes d'azote liquide de rayon $R \approx 1,5$ mm sur des bains d'huile silicone dont la viscosité varie entre $\nu = 5$ cSt et $\nu = 1000$ cSt. Pour ces huiles, on trace sur la figure 3.17 la décélération Γ en fonction de la vitesse V . Sur cette figure, nous comparons systématiquement nos mesures avec la théorie, calculée pour $R_{th} = 1,5$ mm.

On constate que la décélération maximale diminue quand ν augmente : pour $\nu = 20$ cSt (figure 3.17(d)), la décélération mesurée est proche de 250 cm/s^2 , tandis qu'elle est d'environ 150 cm/s^2 pour $\nu = 300$ cSt (figure 3.17(b)). Cela n'est pas surprenant si la résistance de vague disparaît quand ν augmente.

En revanche, à plus grande viscosité, la friction est plus importante à basse vitesse ($V < 15 \text{ cm/s}$) ; c'est ce que l'on voit en comparant la figure 3.17(c) ($\nu = 100$ cSt) et la figure 3.17(e) ($\nu = 5$ cSt). Cela peut s'expliquer par le fait que, quand elle glisse sur un substrat visqueux, la goutte déplace du liquide, ce qui a pour effet une force d'origine visqueuse. Cette dissipation dans le volume augmente avec ν , ce qui explique ce comportement à basse vitesse sur les substrats visqueux.

En revanche, à grande vitesse, Γ décroît avec V , pour une raison très différente des faibles viscosités. Dans ce cas, on peut supposer que la goutte d'azote n'atteint pas sa profondeur d'équilibre lors du mouvement. La quantité de liquide déplacée est donc plus faible, et finalement, la friction d'origine visqueuse diminue avec la vitesse. Aux dimensions, on s'attend à observer cet effet quand la résistance visqueuse verticale $\rho\nu VR$ devient plus grande que le poids de la goutte $\rho g R^2$, soit pour $V > gR^2/\nu$. Pour $R = 1,5$ mm et $\nu = 100$ cSt, on trouve $gR^2/\nu \approx 20 \text{ cm/s}$, ce qui est compatible avec les données expérimentales (figure 3.17(c)). Pour $\nu = 1000$ cSt, on atteindrait un maximum de décélération pour une vitesse 10 fois plus faible. Expérimentalement, on ne voit pas sur la figure 3.17(a) ce maximum qui correspond à une vitesse plus faible que celles de nos mesures ; on observe simplement le régime où Γ diminue avec V . Pour les huiles les plus visqueuses ($\nu = 100, 300$ et 1000 cSt), on constate par ailleurs un bon accord entre théorie et expériences.

Faibles viscosités Pour les huiles moins visqueuses ($\nu = 20$ et 5 cSt, figures 3.17(d) et (e)), on peut remarquer que les décélérations mesurées sont plus élevées que sur l'eau : pour $\nu = 5$ cSt, $\Gamma_{\max} \sim 4 \text{ m/s}^2$, alors que sur l'eau $\Gamma_{\max} \sim 2,5 \text{ m/s}^2$. Cela s'explique par la tension de surface plus basse de l'huile (3 fois moindre que celle de l'eau). La résistance de vague, qui varie comme $1/\gamma a$, est donc plus élevée sur l'huile.

On constate par ailleurs que pour ces deux viscosités, la théorie prédit des valeurs de Γ environ deux fois plus élevées que ce que nous avons mesuré. On peut avancer plusieurs raisons pour expliquer cet écart, toutes liées au temps caractéristique du freinage V/Γ , qui devient petit dans cette gamme de vitesse par rapport au reste de l'expérience. Pour $\Gamma \sim 400 \text{ cm/s}^2$ et $V \sim 20 \text{ cm/s}$, ce temps de freinage vaut 50 ms .

D'une part, ce temps n'est plus forcément très grand par rapport à l'intervalle entre deux images des expériences, qui vaut typiquement 2 ms. D'autre part, comme sur un solide, les gouttes d'azote liquide oscillent spontanément. Leur période d'oscillation propre vaut $\sqrt{\rho_1 R^3 / \gamma_1} \sim 30$ ms [8] pour $R = 1,5$ mm, du même ordre que le temps de freinage. Les oscillations perturbent donc les mesures pour ces grandes décélérations. Enfin, cette surestimation de la théorie pourrait être due au fait que cette dernière ne tient pas compte des effets transitoires, mais suppose que le sillage est stationnaire dans le calcul de la résistance de vague. Cette approximation n'est plus vraie si le temps de freinage V/Γ est court devant le temps de propagation des ondes $1/Vk$, c'est-à-dire pour $\Gamma > V^2 k \sim c_{\min}^2/a \sim g$. On constate en effet sur les figures 3.17(d) et (e) que la prédiction dévie de l'expérience pour $\Gamma \gtrsim 300$ cm/s² $\approx g/3$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement de gouttes de Leidenfrost placées sur d'autres liquides. Quand elles sont immobiles, ces gouttes se déforment et déforment la surface de leur substrat. Lorsqu'elles se déplacent, elles sont soumises à une friction qui trouve son origine dans le sillage qu'elles génèrent. Ce phénomène est une conséquence de leur très grande mobilité : en règle générale, la résistance de vague est dominée par les autres forces de friction, mais ici ces derniers effets sont beaucoup plus faibles à cause de l'absence de contact entre azote et liquide sous-jacent. La traînée de vague est donc à l'origine de la dépendance inhabituelle de la friction en la vitesse, qui s'explique d'une part par l'existence d'un seuil en vitesse à 23 cm/s, produisant une quasi-discontinuité de la friction à cette vitesse, et d'autre part par l'influence de la taille finie de l'objet se déplaçant à la surface de l'eau. Les gouttes d'azote liquide constituent alors un système modèle pour étudier quantitativement la résistance de vague, dans une situation bien contrôlée comparable aux théories existantes. Quand on augmente la viscosité du liquide-substrat, les ondes sont amorties et la résistance de vagues s'atténue. Dans ce système, les liquides les plus visqueux sont ainsi ceux qui engendrent la friction la plus faible.

Bibliographie

- [1] H. M. Princen and S. G. Mason. Shape of a fluid drop at a fluid-liquid interface ii. theory for three-phase systems. *Journal of Colloid Science*, 20 :246–266, 1965. 57
- [2] L. Mahadevan and Y. Pomeau. Rolling droplets. *Physics of Fluids*, 11(9) :2449–2453, 1999. 17, 38, 59

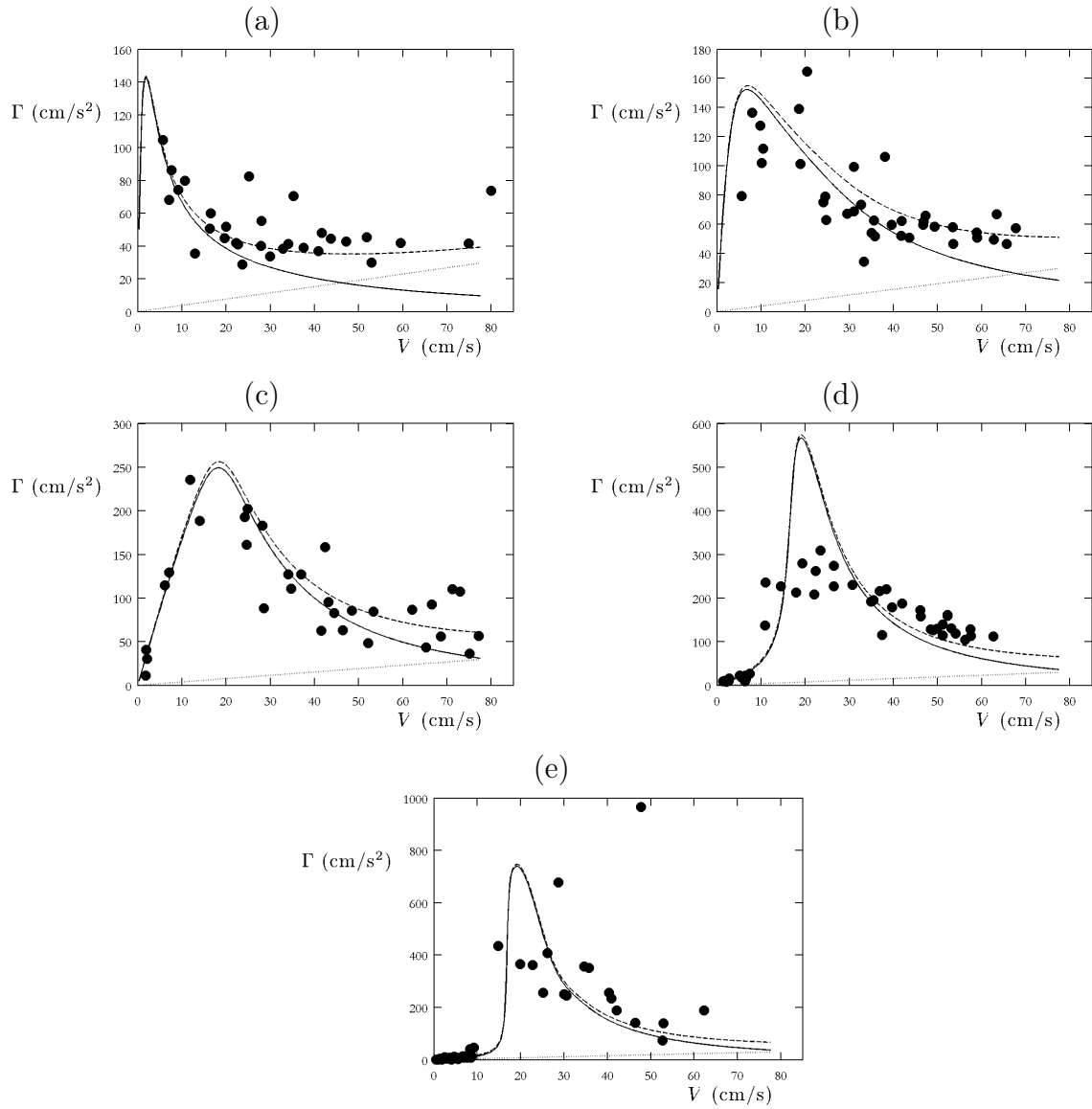


FIGURE 3.17 – Décélération Γ en fonction de V : influence de la viscosité ν du liquide substrat. Le rayon des gouttes est $R = 1,5 \pm 0,25$ mm et le liquide du bain est de l'huile silicone. Les symboles représentent les points expérimentaux. Les courbes en trait plein correspondent aux prédictions de résistance de vague de F. Chevy et É. Raphaël calculées pour un rayon $R_{th} = 1,5$ mm, les courbes en pointillés à une estimation de la décélération due aux autres types de friction (d'après la figure 3.9, symboles creux) et les courbes en trait discontinu à une superposition des deux courbes précédentes. (a) $\nu = 1000$ cSt ; (b) $\nu = 300$ cSt ; (c) $\nu = 100$ cSt ; (d) $\nu = 20$ cSt ; (e) $\nu = 5$ cSt .

- [3] I. Langmuir. Oil lenses on water and the nature of monomolecular expanded films. *The Journal of Chemical Physics*, 1(11) :756–776, 1933. 60

- [4] J. Browaeys. *Les ferrofluides : ondes de surface, résistance de vague et simulation de la convection dans le manteau terrestre*. PhD thesis, Université Paris 7, 2000. 64
- [5] E. Raphaël and P.-G. de Gennes. Capillary gravity waves caused by a moving disturbance : Wave resistance. *Phys. Rev. E*, 53(4) :3448–3455, 1996. 64, 67, 69
- [6] M. J. Lighthill. *Waves in fluids*. Cambridge University Press, 1978. 64, 68
- [7] J.W.S. Rayleigh. The form of standing waves on the surface of running water. *Proc. London Math. Soc.*, 15 :69, 1883. 67
- [8] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Dover Publications, 1932. 48, 68, 74
- [9] R. Perzynski J. Browaeys, J.-C. Bacri and M. I. Shliomis. Capillary-gravity wave resistance in ordinary and magnetic fluids. *Europhysics Letters*, 53 :209–215, 2001. 69, 195
- [10] T. Burghlea and V. Steinberg. Onset of wave drag due to generation of capillary-gravity waves by a moving object as a critical phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, 86(12) :2557–2560, 2001. 69, 195, 197
- [11] D. Richard and E. Raphaël. Capillary-gravity waves : The effect of viscosity on the wave resistance. *Europhysics Letters*, 48 :49–52, 1999. 69
- [12] F. Chevy and E. Raphaël. Capillary gravity waves : A "fixed-depth" analysis. *Europhysics Letters*, 61(6) :796, 2003. 69, 196

Nous avons ainsi étudié expérimentalement la dynamique de gouttes en caléfaction. Nous exploitons l'absence totale de contact avec le substrat pour caractériser leur très grande mobilité.

Nous avons mis en évidence le rôle crucial joué par le gaz qui entoure la goutte. D'une part, l'écoulement de vapeur sous-jacent est responsable du mouvement spontané de la goutte sur un substrat texturé de façon asymétrique. D'autre part, quand celle-ci glisse sur un substrat lisse, elle ralentit à cause de la friction exercée par l'air environnant.

Plusieurs substrats permettent cependant d'augmenter significativement la friction de ces objets. D'un côté, si le substrat solide est crénelé, il perturbe la forme de la goutte, ce qui induit une dissipation d'origine inertielle dans le liquide. D'un autre côté, si le substrat n'est plus rigide mais déformable, sa mise en mouvement par la goutte, via le sillage qu'elle engendre, augmente considérablement la traînée, que l'on appelle alors résistance de vague : les gouttes en caléfaction sur de l'eau sont un système modèle pour étudier les caractéristiques de cette résistance spéciale.

Deuxième partie

Déformations de filaments visqueux

Cette deuxième partie porte sur la déformation de filaments de liquide visqueux (entre 10^3 et 10^6 fois la viscosité de l'eau). La géométrie des objets est ici élancée, et les filaments ont deux échelles de longueurs caractéristiques, leur longueur L et leur diamètre $D \ll L$. D'autre part, la présence de surfaces libres a pour conséquence l'absence de cisaillement. La dissipation, purement visqueuse ici, est donc principalement due aux écoulements élongationnels : allongement et courbure des filaments.

Les déformations observées peuvent avoir plusieurs causes : soit nous imposons la condition cinématique aux extrémités du fil visqueux, en translation (chapitre 4) ou en rotation (chapitre 5), soit le système évolue spontanément sous l'effet de forces, d'origine gravitaire ou capillaire (chapitres 6 et 7).

Dans toutes ces expériences, les questions que nous nous posons sont :

- quelles formes prennent les filaments et comment les comprendre ?
- quelles sont les échelles de temps associées à ces déformations ?

CHAPITRE 4

Flambage visqueux

Sommaire

4.1	Introduction au flambage visqueux	83
4.1.1	Historique	83
4.1.2	Fluide visqueux et courbure	86
4.2	Flambage d'un filament en compression	89
4.2.1	Expériences	89
4.2.2	Seuil de flambage	93
4.2.3	Cas limites	97
	Bibliographie	101

Nous allons maintenant nous intéresser aux déformations de filaments de liquides visqueux, en particulier au flambage de tels filaments. Après avoir introduit ce phénomène, nous étudions une expérience de compression d'un filament qui met en évidence la possibilité de flambage.

4.1 Introduction au flambage visqueux

4.1.1 Historique

Le flambage de solides élastiques élancés a été formalisé pour la première fois par Euler dans son *Elastica* [1] en 1744 : lorsque l'on comprime un corps élancé à ses bouts, au-delà d'une force ou d'un déplacement seuil, le coût énergétique de la

compression est grand par rapport à celui de la courbure. Le corps élancé comprimé va donc fléchir : on dit qu'il flambe (figure 4.1).

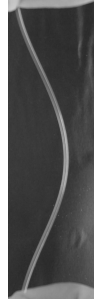


FIGURE 4.1 – Exemple de flambage solide : il s'agit ici d'une tige de plexiglas de 1 mm de diamètre comprimée par ses extrémités.

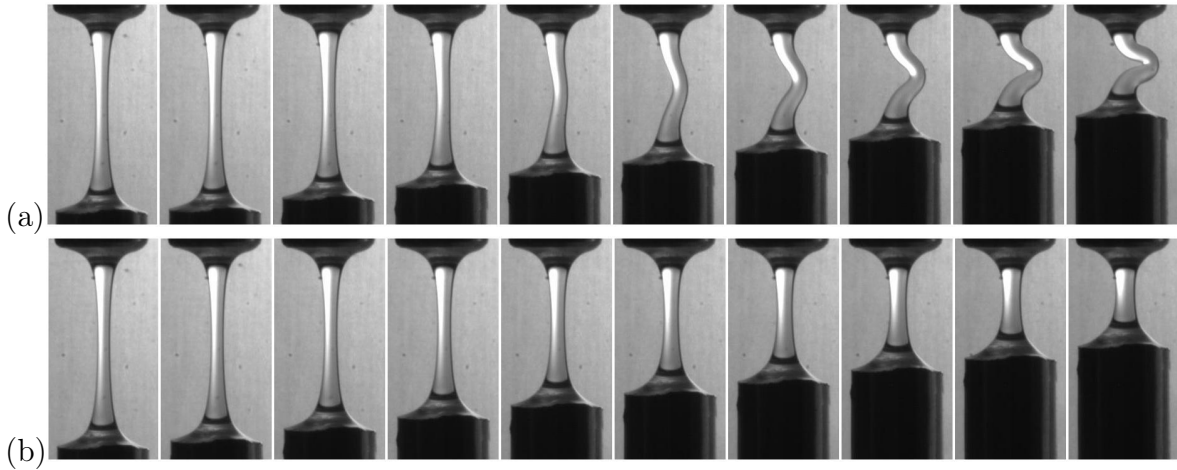


FIGURE 4.2 – Images successives d'un filament visqueux (de longueur $L = 8$ mm, de diamètre $D = 0,6$ mm et de viscosité $\eta = 500$ Pa.s), pour deux vitesses U de compression : (a) $U = 1$ mm/s (l'intervalle entre 2 images est $\Delta t = 0,44$ s) ; (b) $U = 200$ $\mu\text{m/s}$ ($\Delta t = 2,2$ s).

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au flambage visqueux de filaments liquides comprimés à différentes vitesses U . Si U est assez élevée, on observe un fléchissement du filament (figure 4.2(a)) : il flambe. À vitesse plus faible, le filament reste axisymétrique (figure 4.2(b)). Nous nous attachons à comprendre ces observations par analogie avec des solides élastiques.

L'idée de faire flamber des liquides visqueux remonte à Taylor [2], qui a le premier tenté de manipuler des filaments de liquide visqueux posés sur d'autres liquides : il observe alors des formes semblables à celles de tiges élastiques (figure 4.3). Cela n'est pas étonnant car, comme l'a remarqué Rayleigh [3], les équations régissant l'équilibre d'un solide élastique ou le mouvement d'un fluide visqueux (si l'on peut

négliger les effets d'inertie) sont similaires, à l'échelle de temps près : la contrainte élastique s'écrit $\sigma \sim E\epsilon$, où E le module de Young et ϵ la déformation relative, tandis que la contrainte d'origine visqueuse est donnée par $\sigma \sim \eta\dot{\epsilon}$, avec η la viscosité et $\dot{\epsilon}$ le taux de déformation relative.

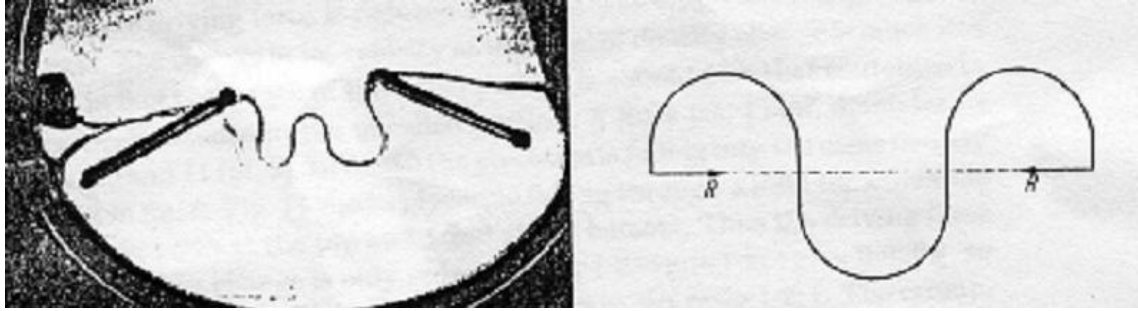


FIGURE 4.3 – Flambage d'un filament liquide de SAIB (Sucrose Acetate Isoburate) sur un bain de mercure (à gauche), comparé aux figures (à droite) d'*Elastica* de Love [4] (images tirées de [2]).

Deux exemples mettant en évidence un flambage visqueux ont notamment été étudiés de façon approfondie.

Le premier est lié à la chute de jets visqueux sur un solide : c'est le phénomène d'enroulement ou de repliement d'un filament ou d'une nappe de miel (figure 4.4), analogue à l'enroulement d'une corde ou au repliement d'un drap, qui a été étudié par Cruickshank et Munson [5], Mahadevan [6–8] et Ribe [9–11] notamment.

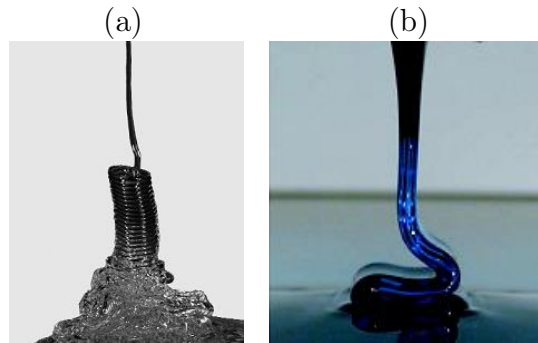


FIGURE 4.4 – Enroulement d'une corde (a) (image tirée de [7]) ou repliement d'une nappe (b) (image tirée de [10]) de liquide visqueux.

Le deuxième est le flambage d'une nappe de liquide visqueux posée sur un bain de liquide beaucoup moins visqueux. Cette situation, que l'on observe par exemple lors de la fabrication de plaques de verre (on parle de « float glass » : on a alors une couche de verre fondu sur un bain d'étain liquide), a été étudiée dans plusieurs configurations [12–15]. Par exemple, Suleiman et Munson [13] puis Benjamin et Cullick [14] ont étudié expérimentalement et théoriquement le flambage d'une nappe

visqueuse induit par un cisaillement dans une cellule de Couette. À un cisaillement correspond une compression et une élongation dans des directions perpendiculaires et inclinées de 45° par rapport à la direction du cisaillement. On observe alors des plis sur la surface inclinés de 45° par rapport aux directions radiales et orthoradiales de la cellule (figure 4.5).



FIGURE 4.5 – Plis de flambage d’une nappe d’huile silicone sur de l’eau soumise à un cisaillement (image tirée de [14])

4.1.2 Fluide visqueux et courbure

Écoulements élongationnels

Pour comprendre ces phénomènes, il est important de se souvenir qu’un fluide n’est pas en général seulement soumis à des efforts en cisaillement, même si c’est ainsi que l’on définit la viscosité (qui est le rapport entre la contrainte et le taux de cisaillement). Les gradients de vitesse peuvent aussi être le long de la direction de l’écoulement, et on parle alors d’écoulement élongationnel. On définit la viscosité élongationnelle comme le rapport entre la force par unité de surface qu’il faut exercer pour étirer du liquide et le gradient de vitesse qui caractérise cet étirement. Trouton [16] a ainsi montré, et vérifié expérimentalement, que la viscosité élongationnelle était proportionnelle à la viscosité en cisaillement (avec un facteur égal à 3), dans le cas de liquides newtoniens. Cela découle du fait qu’un mouvement d’allongement peut se décomposer en deux mouvements de cisaillement, inclinés d’un angle de 45° par rapport à la direction d’allongement (figure 4.6). Réciproquement, un mouvement de cisaillement peut se décomposer entre deux mouvements d’allongement (figure 4.7), ce qui permet classiquement, dans le cas des solides élastiques, de trouver la relation entre module de Young et module de Coulomb (de cisaillement).

Le cisaillement est généralement dominant lorsque l’on considère des écoulements autour d’objets solides, impliquant une condition de non-glissement à la paroi. Cependant, avec des filaments liquides, les interfaces sont libres : en l’absence de gradient de tension de surface, la contrainte tangentielle est nulle à la paroi.

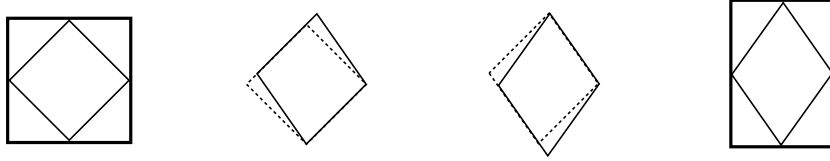


FIGURE 4.6 – On voit sur cette série de transformations géométriques qu'un mouvement de compression-élongation peut être décomposé en deux mouvements de cisaillement, inclinés à 45° .

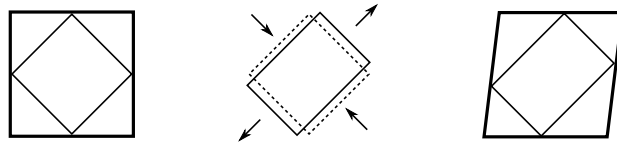


FIGURE 4.7 – Un cisaillement correspond toujours à une extension et à une compression perpendiculaire, inclinées de 45° par rapport à la direction de cisaillement.

Les écoulements sont donc plutôt de type bouchon, et non de Poiseuille, avec des gradients de vitesse longitudinaux (figure 4.8).

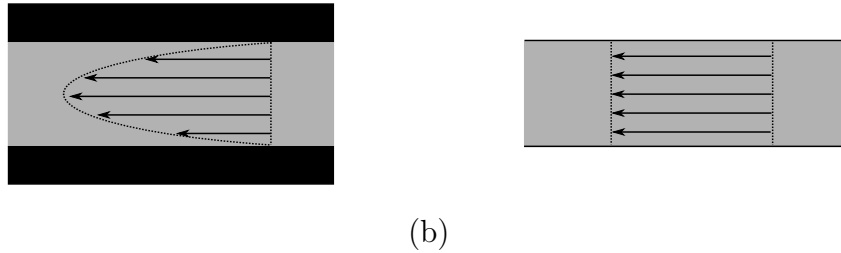


FIGURE 4.8 – (a) Dans un canal, la condition de non-glissement à la paroi impose un écoulement de type Poiseuille. (b) Dans un filament, la paroi est libre et la contrainte tangentielle y est nulle : on a un écoulement de type bouchon.

Coût de la courbure

Dans un solide élancé comme une tige (ou une feuille), la résistance à la courbure provient du fait que lorsqu'on le courbe, la partie située à l'intérieur de la courbure se retrouve comprimée, et celle à l'extérieur, étirée. Ces deux parties de tige exercent une contrainte pour revenir à leur position initiale de repos, ce qui a

pour conséquence un moment qui s'oppose à la courbure et qui lui est proportionnel (le coefficient de proportionnalité étant la rigidité en courbure de la structure).

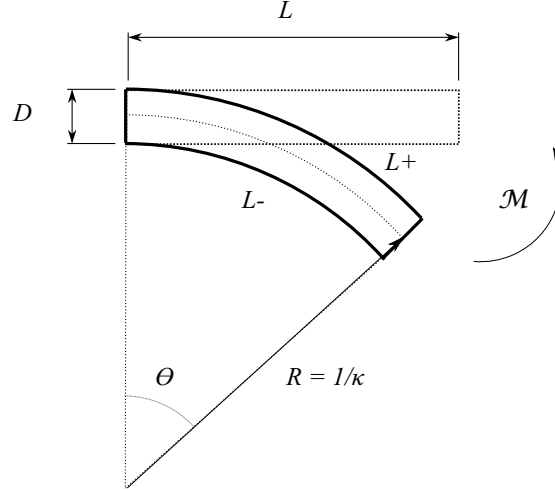


FIGURE 4.9 – Une tige de diamètre D et de longueur L prend une courbure κ : une partie de la tige est alors étirée (sa longueur est L^+) et une partie est comprimée (sa longueur est L^-).

Plus précisément, si l'on courbe une tige de longueur L avec une courbure κ , elle décrit un arc de cercle d'ouverture $\theta \sim L\kappa$ (figure 4.9). Par rapport à la section médiane, la partie extérieure de la tige est allongée de $D\theta$, et la partie intérieure comprimée de $D\theta$. Aux dimensions, la contrainte exercée par chacune des deux parties est alors $\sigma \sim E \frac{D\theta}{L} \sim ED\kappa$, où E est le module de Young du solide. Cette contrainte, intégrée sur toute la section, n'exerce pas de force sur la tige, mais elle est à l'origine d'un moment de rappel qui vaut :

$$\mathcal{M} \sim \sigma D^3 \sim ED^4\kappa$$

Dans ce mouvement de flexion d'un angle θ , l'énergie élastique emmagasinée s'écrit alors :

$$\mathcal{E} \sim \mathcal{M}\theta \sim ED^4L\kappa^2 \quad (4.1)$$

Considérons maintenant le cas d'un filament visqueux (de viscosité η) de mêmes dimensions. On note encore κ la courbure et $\dot{\kappa}$ sa dérivée par rapport au temps. Quand le filament est courbé, la partie extérieure du filament a une longueur $L^+ = L + D\theta = L + DL\kappa$, et la partie intérieure une longueur $L^- = L - DL\kappa$. Le taux

de déformation associé est donc $\dot{\epsilon} \sim \frac{\dot{L}^+}{L^+} \sim -\frac{\dot{L}^-}{L^-} \sim D\dot{\kappa}$. Il induit une contrainte $\sigma \sim \eta\dot{\epsilon} \sim \eta D\dot{\kappa}$. Cette contrainte est à l'origine d'un moment de rappel :

$$\mathcal{M} \sim \sigma D^3 \sim \eta D^4 \dot{\kappa} \quad (4.2)$$

On peut également calculer la puissance dissipée lors de ce mouvement de flexion. Elle est telle que $\mathcal{P} \sim \mathcal{M}\dot{\theta}$, soit :

$$\mathcal{P} \sim \eta D^4 L \dot{\kappa}^2 \quad (4.3)$$

Une analogie se dessine donc entre solide élastique et fluide visqueux, que nous résumons dans le tableau suivant, qui indique les correspondances que l'on peut faire.

Solide élastique	Fluide visqueux
module de Young E	viscosité η
distance	vitesse
déformation relative ϵ	taux de déformation $\dot{\epsilon}$
κ	$\dot{\kappa}$
énergie emmagasinée	puissance dissipée

Dans ce raisonnement, la seule caractéristique du liquide que nous avons considérée est sa viscosité η . En particulier, nous n'avons pour l'instant pas tenu compte de sa tension de surface γ .

4.2 Flambage d'un filament en compression

4.2.1 Expériences

Dispositif expérimental

Nous nous intéressons au flambage d'Euler d'un filament de liquide visqueux. Ce filament est vertical et nous nous plaçons dans un régime où la gravité intervient peu, contrairement au cas de l'entortillement d'un filament de miel [6, 10]. Pour ce faire, il faut que la différence de pression hydrostatique $\rho g L$ le long du filament (L est la longueur du cylindre visqueux, ρ la masse volumique du liquide et g l'accélération due à la pesanteur) soit plus petite que la suppression de Laplace au centre γ/D (D est le diamètre et γ la tension de surface du liquide). Cette condition est satisfaite quand $LD < \gamma/\rho g$, c'est-à-dire quand la surface du filament est plus petite que le carré de la longueur capillaire $a = \sqrt{\gamma/\rho g}$. Pour les huiles silicones que nous avons utilisées, a vaut 1,5 mm. Dans nos expériences, la longueur L est comprise entre 5 et 11 mm, et le diamètre D entre 0,1 et 1 mm ; la surface LD est donc comprise

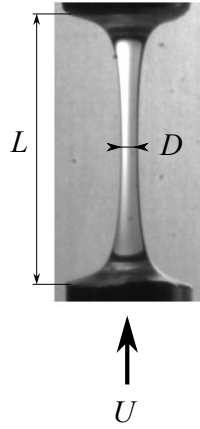


FIGURE 4.10 – Principe de l’expérience : le filament de liquide, de longueur initiale L et de diamètre initial D , est comprimé à la vitesse U . L est de l’ordre du centimètre, D du millimètre et U vaut quelques millimètres par seconde.

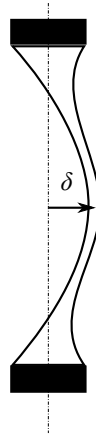
entre 0,5 et 11 mm², que l’on peut comparer à $a^2 \approx 2$ mm². En pratique, nous nous assurons que la gravité joue un rôle mineur en ne prenant que des filaments qui présentent une symétrie haut-bas, comme sur la figure 4.10.

L’expérience est la suivante : on fabrique un filament d’huile silicone très visqueuse (η vaut $5 \cdot 10^2$ ou 10^3 Pa.s, soit $5 \cdot 10^5$ ou 10^6 fois la viscosité de l’eau) en étirant à vitesse constante une goutte d’huile de volume fixé. En gardant cette vitesse inchangée d’une expérience à l’autre, nous sommes capables de former des filaments de dimensions identiques plusieurs fois de suite. Le filament est ensuite comprimé : on rapproche ses extrémités à une vitesse constante U , que nous pouvons faire varier et dont l’ordre de grandeur est le millimètre par seconde (figure 4.10).

Observations

Si la vitesse est assez élevée (nous préciserons plus loin quel est le régime de vitesse concerné), on observe un « flambage » du filament de liquide, comme on l’aurait avec un solide : il s’écarte de son axe en se courbant, comme on le voit sur la série d’images de la figure 4.2(a). On peut souligner ici que la présence de surfaces libres dans cette expérience est à l’origine de la non-réversibilité de l’écoulement : la déformation n’est pas la même quand on étire ou comprime un filament visqueux, tandis que, pour un écoulement de Stokes dans un système comportant uniquement des parois rigides, changer le sens de la vitesse de la paroi renverse symétriquement le sens de l’écoulement [17].

Dynamique Pour essayer de quantifier ce flambage, nous nous intéressons à l’écart δ entre le milieu du filament et son axe (figure 4.11). Comme nos filaments présentent

FIGURE 4.11 – On mesure l'écart δ du filament à l'axe.

presque toujours une symétrie haut-bas (à cause de la gravité négligeable ici), ce point est aussi le plus éloigné de l'axe.

Sur des expériences similaires à celle de la figure 4.2(a), on mesure δ en fonction du temps t . Nous obtenons alors des courbes comme celles présentées sur la figure 4.12(a).

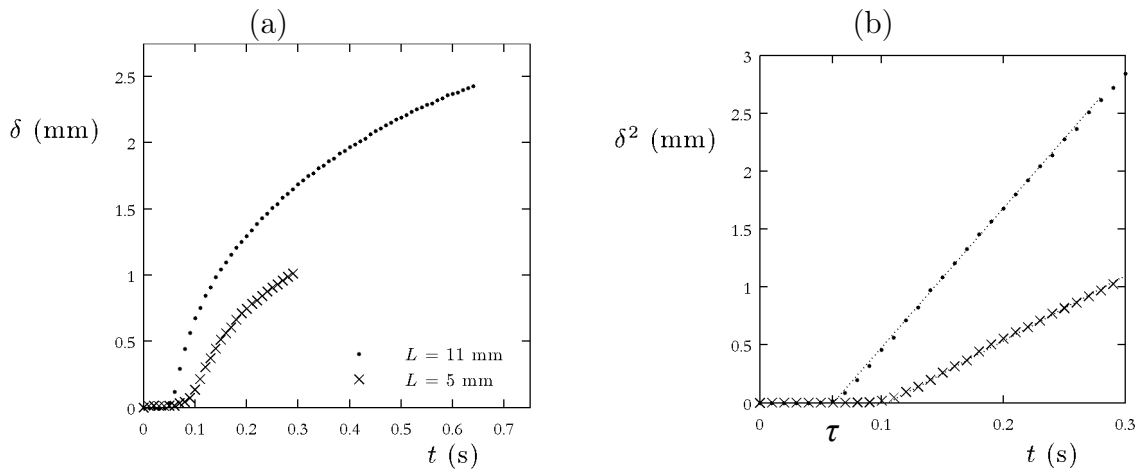


FIGURE 4.12 – Pour deux filaments d'huile silicone ($\eta = 1000$ Pa.s) de longueurs L différentes ($D = 0,4$ mm, $U = 5$ mm/s), on trace (a) δ et (b) δ^2 en fonction de t . On voit ainsi apparaître un temps caractéristique de « flambage » τ , qui vaut 0,06 s pour le filament de longueur 11 mm, et 0,1 s pour le filament de longueur 5 mm.

On voit qu'aux temps courts, le filament n'est quasiment pas dévié de son axe. Puis à partir d'un temps, noté τ , la déviation augmente, avec un comportement en

racine du temps : si l'on trace δ^2 en fonction de t , on trouve une droite pour $t > \tau$ (figure 4.12(b)).

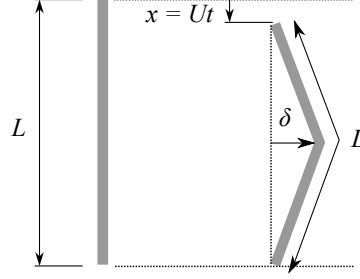


FIGURE 4.13 – Si la longueur totale du filament est conservée, alors géométriquement : $L^2 = (L - x)^2 + 4\delta^2$, d'où $\delta^2 \sim LUt$.

Ce comportement en $\sqrt{t - \tau}$ peut s'expliquer par une simple relation géométrique (figure 4.13) : si l'on diminue l'écartement entre les bords du filament d'une longueur x , et que la longueur L totale du filament est conservée, on doit avoir $\delta^2 \sim Lx$. Ici, $x = Ut$, donc $\delta^2 \sim LUt$. Ainsi cette déviation en racine du temps est la trace qu'à partir de l'instant τ , il n'y a quasiment plus de compression, et seulement une courbure de plus en plus grande du filament.

Temps caractéristique de flambage À partir de « trajectoires » comme celles de la figure 4.12, on mesure le temps τ qui est le temps caractéristique du flambage visqueux dans cette expérience. On étudie l'influence de la vitesse de fermeture U , de la longueur L et du diamètre D du filament.

Nous voyons sur les figures 4.14 et 4.15 que τ augmente quand on augmente le diamètre D , et que ce temps diminue quand on augmente la vitesse U ou la longueur L . Ainsi, nos observations sont conformes à l'intuition que nous aurions avec un solide élastique : les filaments les plus élancés (D petit, L grand) flambent plus facilement, c'est-à-dire plus tôt (τ petit).

Pouvons-nous prédire ce temps caractéristique de flambage par une analogie avec le cas du solide élastique ?

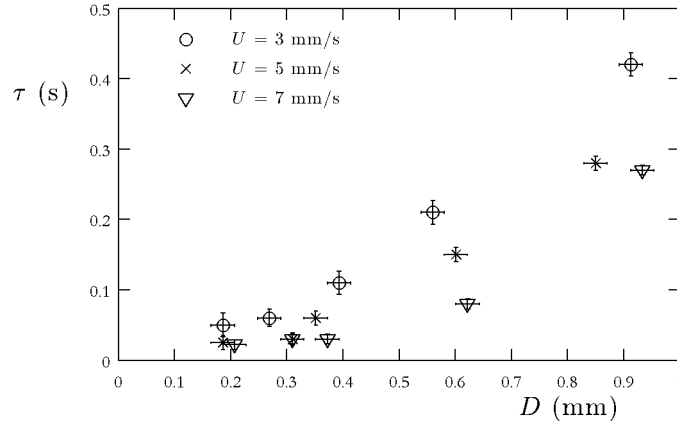


FIGURE 4.14 – Temps de flambage τ en fonction du diamètre initial D , pour différentes vitesses de compression U ($\eta = 10^3$ Pa.s, $L = 11$ mm).

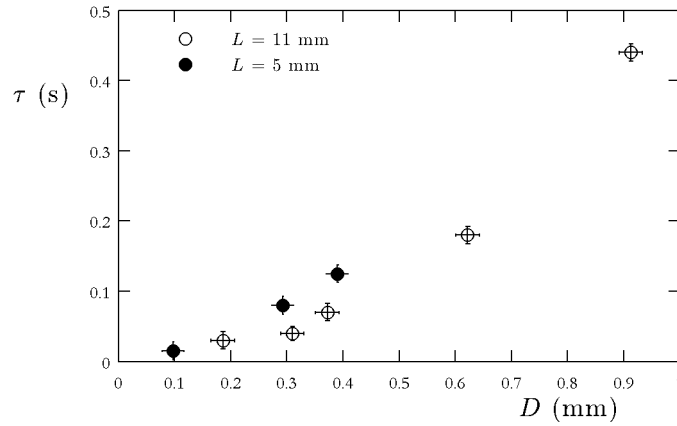


FIGURE 4.15 – Temps de flambage τ en fonction du diamètre initial D , pour deux longueurs L de filament ($\eta = 10^3$ Pa.s, $U = 4$ mm/s).

4.2.2 Seuil de flambage

Flambage solide

On considère une tige élastique de longueur L , de diamètre D et de module de Young E , sur laquelle on appuie avec une force F (figure 4.16). Imaginons que la tige s'écarte d'une distance δ de son axe. La force F implique un moment $\mathcal{M}(F) \sim F\delta$. En même temps, le filament se courbe (avec une courbure δ/L^2). Il existe donc un moment élastique de rappel qui s'écrit $ED^4\delta/L^2$. Le moment résultant est $\mathcal{M} = (F - ED^4/L^2)\delta$. C'est un couple de rappel, c'est-à-dire que δ revient à sa position

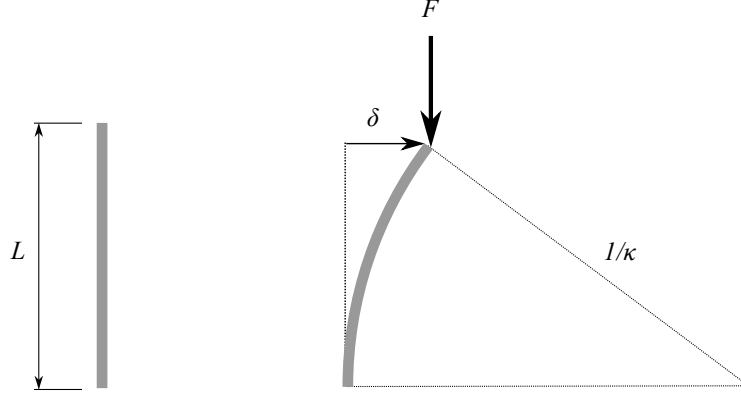


FIGURE 4.16 – On regarde le retour à l'équilibre d'une tige de longueur L , qui s'écarte d'une distance δ de son axe (ce qui induit une courbure $\kappa \sim \delta/L^2$). La force de compression est F .

d'équilibre, quand $F < ED^4/L^2$. Pour $F > ED^4/L^2$, la situation est instable : le filament flambe. On retrouve ainsi par ce raisonnement en moments le seuil de flambage d'Euler :

$$F > F_c \sim E \frac{D^4}{L^2}$$

Si l'on considère un seuil de flambage en déplacement (on note alors x la distance sur laquelle on comprime le filament, comme sur la figure 4.13), on voit que le filament flambe quand la force de compression ED^2x/L devient plus grande que ED^4/L^2 , soit pour

$$x > x_c \sim \frac{D^2}{L} \quad (4.4)$$

On remarque que l'expression du déplacement seuil x_c est indépendante du module de Young E et dépend simplement de la géométrie de la tige élastique. Pour $L \sim 1$ cm et $D \sim 1$ mm, x_c vaut environ 100 μm . x_c est donc difficile à mesurer en pratique, car petit devant L . Par ailleurs, quand L augmente, x_c diminue : les tiges élancées flambent plus facilement, c'est-à-dire pour x petit.

Flambage liquide

Considérons maintenant un filament liquide de viscosité η qui commence à flamber : il s'écarte de l'axe d'une distance δ . Le filament est comprimé à la vitesse U , soit avec une force visqueuse $\eta D^2(U/L)$. Il en résulte un moment qui va écarter le filament de son axe $\eta D^2(U/L)\delta$. Mais dans le même temps, le filament se courbe,

avec une courbure $\kappa \sim \delta/L^2$. Il existe donc un moment de rappel (de courbure) $\eta D^4 \delta / L^2$ (équation (4.2)). L'équilibre des moments donne :

$$\eta D^2 \frac{U}{L} \delta \sim \eta D^4 \frac{\dot{\delta}}{L^2} \quad (4.5)$$

qui se réécrit :

$$\dot{\delta} \sim \frac{LU}{D^2} \delta$$

Cette équation différentielle prédit une variation exponentielle $\delta = \delta_0 \exp(\lambda t)$, avec un taux d'accroissement $\lambda = LU/D^2$ positif : la situation est instable. C'est une propriété générique du flambage visqueux : en l'absence de forces stabilisatrices comme la gravité ou la tension de surface, la compression provoque toujours un flambage visqueux [13, 14, 18, 19]. Le temps caractéristique de cette instabilité est $\tau \sim 1/\lambda \sim D^2/LU$. À temps plus long ($t > \tau$), la déformation est limitée par la longueur du filament, et δ est alors donné par la relation géométrique $\delta^2 \sim LU(t - \tau)$.

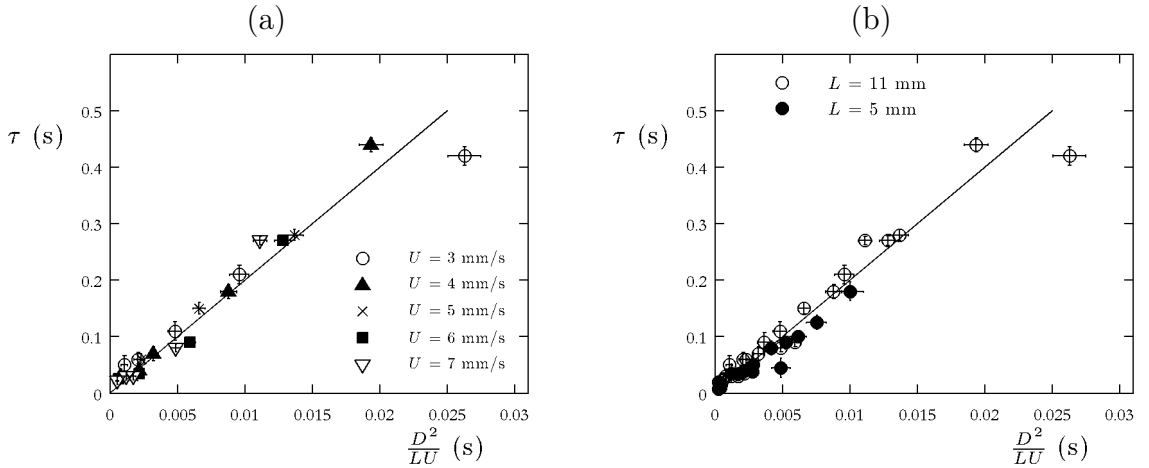


FIGURE 4.17 – Temps de flambage τ en fonction de D^2/LU . (a) L vaut 11 mm, et D et U varient. (b) L vaut 11 ou 5 mm. η vaut 10^3 Pa.s. La droite correspond à la variation linéaire $\tau = 20 D^2/LU$.

Nous vérifions bien sur la figure 4.17, pour les différents diamètres, vitesses et longueurs des figures 4.14 et 4.15, que τ est proportionnel à D^2/LU , qui est donc bien le temps caractéristique du flambage. Plus précisément, on trouve que $\tau \approx 20 D^2/LU$. Ainsi, le flambage existe toujours — la situation est toujours instable — mais il ne sera observable que si τ est plus petit que la durée de l'expérience L/U , soit pour $D/L < 1/\sqrt{20} \approx 0,2$, ce qui exclut les filaments trop peu élancés.

Comme en outre la distance de « fermeture » de notre dispositif s'écrit $x = Ut$, on observera une déviation du filament pour $x > D^2/L$ — qui correspond à $t >$

$\tau \sim D^2/LU$ — qui est, à un facteur numérique près, la relation de flambage que nous avons vue pour un solide (équation (4.4)). Flambages visqueux et élastique sont donc presque équivalents ici. On pourrait d'ailleurs objecter que, comme les liquides utilisés sont des huiles très visqueuses formées de chaînes polymériques longues pouvant donner lieu à des effets non-newtoniens, nous sommes ici en présence d'un flambage « solide » dû à l'élasticité des polymères. Expérimentalement, il n'est pas possible de découpler ces deux effets. Cependant, on peut se convaincre du caractère visqueux de ce que nous observons en comparant les taux de compression en jeu $\dot{\epsilon} \sim U/L$, qui varient entre 0,02 et 1 s^{-1} , aux taux de cisaillement critiques des huiles utilisées, qui marquent le début d'un comportement rhéofluidifiant, et qui valent entre 3 et 50 s^{-1} .

Minimum de dissipation visqueuse

Dans l'analogie solide-liquide, nous avons vu que la puissance dissipée par viscosité fait écho à l'énergie élastique emmagasinée. En élasticité, nous pouvons retrouver le seuil de flambage d'Euler en cherchant la configuration qui emmagasine le moins d'énergie élastique. Par analogie, nous allons chercher pour le filament visqueux l'écoulement qui minimise la puissance dissipée. Ce principe de minimum de dissipation visqueuse n'est pas rigoureusement vrai ici. Il l'est pour un écoulement de Stokes sur un domaine « simple » avec des conditions aux limites en vitesse (comme l'a énoncé Helmholtz [20] puis démontré Korteweg [21]), mais les surfaces libres et la géométrie plus complexe du filament que nous étudions ici rendent cette généralisation délicate. Un tel raisonnement permet néanmoins de retrouver le temps caractéristique D^2/LU .

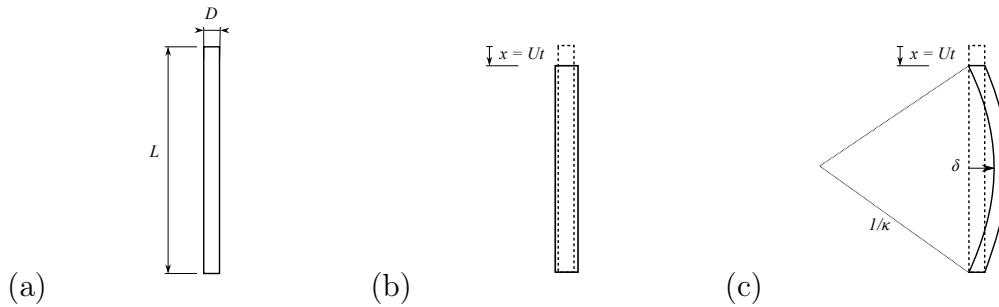


FIGURE 4.18 — Quand on comprime d'une longueur x l'extrémité d'un filament de longueur L et de diamètre D (a), on peut imaginer deux cas de figures : le filament se comprime dans son axe et s'épaissit (b), ou il se courbe (c).

Tige élastique Pour connaître le seuil de flambage de la tige, il faut déterminer quel comportement (compression dans l'axe ou flambage) a la plus basse énergie

(figure 4.18). Quand on comprime le filament d'une longueur x , le déplacement relatif associé est $\epsilon \sim x/L$, et l'énergie élastique emmagasinée, proportionnelle au volume du filament LD^2 , s'écrit :

$$\mathcal{E}_{\text{compression}} \sim ELD^2 \epsilon^2 \sim ED^2 \frac{x^2}{L} \quad (4.6)$$

Si la tige se courbe, sa courbure est proportionnelle à sa déviation ($\kappa \sim \delta/L^2$), qui dépend de la distance de compression ($\delta^2 \sim Lx$). L'énergie élastique de la courbure est donc :

$$\mathcal{E}_{\text{courbure}} \sim ED^4 L \kappa^2 \sim ED^4 \frac{x}{L^2}$$

La tige va flamber quand $\mathcal{E}_{\text{courbure}} < \mathcal{E}_{\text{compression}}$, c'est-à-dire pour $x > x_c \sim D^2/L$. Ce raisonnement nous permet ensuite de retrouver le seuil en force plus souvent considéré : pour comprimer le filament d'une longueur x , il faut lui appliquer la force $F \sim ED^2 x/L$, d'où la force critique de chargement pour flamber $F_c \sim ED^2 x_c/L \sim ED^4/L^2$.

Filament visqueux On compare la puissance dissipée dans la compression et la puissance dissipée dans la courbure. Pour la compression, le gradient de vitesse est U/L , la puissance dissipée est donc :

$$\mathcal{P}_{\text{compression}} \sim \eta LD^2 \left(\frac{U}{L} \right)^2 \sim \eta D^2 \frac{U^2}{L} \quad (4.7)$$

Pour la déformation en courbure, le filament est courbé sur toute sa longueur L , donc la puissance dissipée s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\text{courbure}} \sim \eta D^4 L \dot{\kappa}^2 \sim \eta D^4 \frac{U}{tL^2}$$

avec $\kappa \sim \delta/L^2$ et $\delta^2 \sim LUt$. Le filament va flamber quand $\mathcal{P}_{\text{courbure}} < \mathcal{P}_{\text{compression}}$ c'est-à-dire si $t > D^2/LU$. On retrouve donc le temps caractéristique du flambage $\tau \sim D^2/LU$ par un argument fondé sur la minimisation de la puissance dissipée.

4.2.3 Cas limites

Filaments épais

Nous avons vu que l'on ne peut pas observer de flambage lorsque le filament devient trop épais ou court ($D/U > 0,2$) : le temps de flambage $\tau \sim D^2/LU$ est alors plus grand que la durée de l'expérience L/U . Que se passe-t-il en pratique lorsqu'on regarde la dynamique $\delta(t)$ pour des filaments moins élancés ?

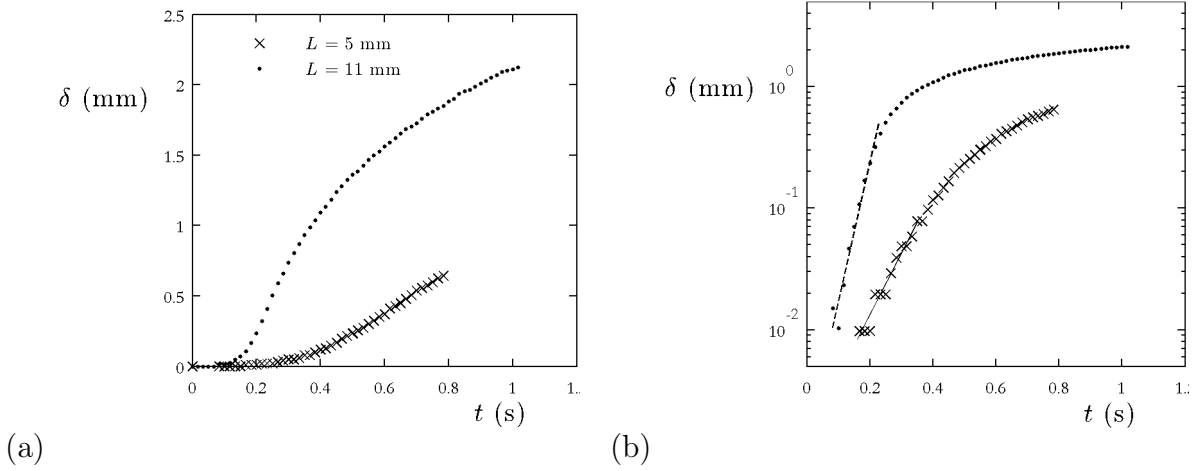


FIGURE 4.19 — δ en fonction de t pour des filaments « épais » ($D = 0,6$ mm, $U = 3$ mm/s, $L = 5$ mm ou $L = 11$ mm, $\eta = 10^3$ Pa.s) (a) en échelle linéaire et (b) en échelle semi-logarithmique. Les deux droites correspondent à une variation exponentielle avec un taux de croissance de 12 s $^{-1}$ et 26 s $^{-1}$.

On voit sur les exemples de la figure 4.19(a) qu'en réalité, la déviation δ ne passe pas brusquement d'une valeur nulle à un comportement en racine carrée du temps. Il existe une phase de transition, que l'on peut interpréter comme la mise en place de l'instabilité. Lorsque le filament est dévié de son axe, c'est avec une dynamique exponentielle, avec un taux de croissance LU/D^2 (équation (4.5)). On voit effectivement sur le diagramme semi-logarithmique de la figure 4.19(b) qu'à temps court, δ varie exponentiellement avec t avec un taux caractéristique qui augmente avec L . Sur quelques expériences pour des filaments épais de viscosité 1 kPa.s, nous avons mesuré ce taux caractéristique λ . Nos résultats, présentés sur la figure 4.20 montrent que λ augmente avec LU/D^2 . En revanche, nous ne pouvons explorer une large gamme de diamètre car aux petits D , nous ne voyons plus ce régime exponentiel, mais seulement la variation en $\sqrt{t - \tau}$.

En effet, pour se déformer, le filament doit s'allonger. Pour une déviation $\delta(t)$, le filament a une longueur $\mathcal{L}$ imposée par la géométrie : $\mathcal{L}^2 \sim (L - Ut)^2 + \delta^2$. La vitesse de compression « réelle » est donc $U - \delta\dot{\delta}/L$. Pour en tenir compte, l'équation (4.5) se réécrit :

$$\eta D^2 \frac{(U - \delta\dot{\delta}/L)}{L} \delta \sim \eta D^4 \frac{\dot{\delta}}{L^2} \quad (4.8)$$

Dans la limite des temps courts (δ petit), on retrouve l'équation (4.5) avec une croissance exponentielle de δ que l'on observe sur la figure 4.19. À temps long, le terme d'étirement en $\delta\dot{\delta}$ domine le terme de courbure dans l'équation (4.8), qui se simplifie en :

$$U \sim \frac{\delta\dot{\delta}}{L}$$

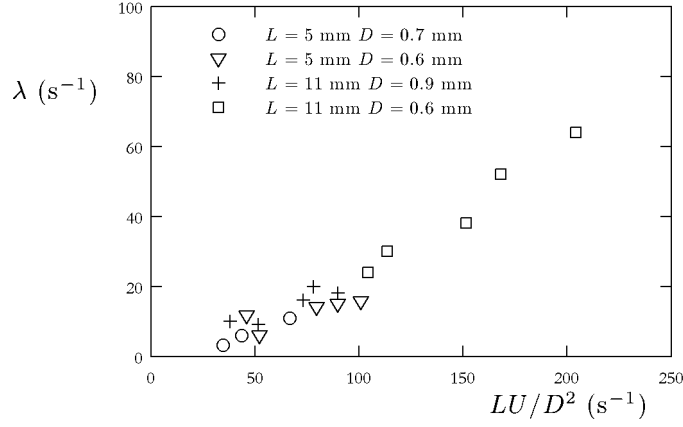


FIGURE 4.20 – Taux d'accroissement λ en fonction de LU/D^2 , pour différentes dimensions de filaments et différentes vitesses (U varie entre 3 et 7 mm/s). Le liquide est de l'huile silicone ($\eta = 10^3$ Pa.s).

qui s'intègre pour donner :

$$\delta^2 - \delta^2(t = \tau) \sim LU(t - \tau)$$

qui correspond au comportement observé pour des filaments plus élancés (figure 4.12).

La transition entre ces deux régimes est observée quand le terme d'étirement $\eta D^2 \delta^2 \dot{\delta} / L^2$ dans l'équation (4.8) devient du même ordre que le terme de courbure $\eta D^4 \dot{\delta} / L^2$, soit pour $\delta \sim D$. Ceci explique pourquoi on ne voit le premier régime exponentiel que lorsque le filament est assez épais (figure 4.19).

Faibles vitesses : influence de la tension de surface

Quand on diminue la vitesse de compression ou la viscosité du liquide, le flambage disparaît, comme nous l'avons vu au début de ce chapitre (figure 4.2) : un filament identique flambe lorsqu'il est comprimé à 1 mm/s, mais reste rectiligne lorsque la vitesse de compression est 5 fois plus faible (200 μ m/s).

Ce comportement, qui semble contredire le caractère générique du flambage visqueux, s'explique par le rôle de la tension de surface, qui est ici stabilisant. La force capillaire qui tire parallèlement au filament s'écrit γD (figure 4.21). Il en résulte un moment de rappel sur le filament $\mathcal{M} \sim \gamma D \delta$. La capillarité domine quand ce moment est plus grand que celui qui déstabilise le filament, $\eta D^2 U \delta / L$, soit pour

$$\frac{D \eta U}{L \gamma} < 1 \quad (4.9)$$

Ainsi on pourra observer du flambage visqueux pour $U > \gamma L / \eta D$. Pour les filaments

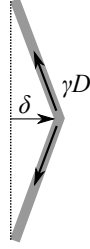


FIGURE 4.21 – La force capillaire γD tend à ramener le filament vers sa position axisymétrique en exerçant un moment $\gamma D \delta$.

de la figure 4.2 ($L = 8$ mm, $D = 0,6$ mm, $\eta = 500$ Pa.s et $\gamma \approx 20$ mN/m), cela se produira pour $U > 500$ $\mu\text{m/s}$.

On peut retrouver ce critère par un argument énergétique : la tension de surface joue un rôle quand l'énergie de surface gagnée par unité de temps lors de la compression γDU devient plus grande que la puissance dissipée $\eta D^2 U^2 / L$.

Le critère (4.9) fait intervenir à la fois le nombre capillaire $\text{Ca} = \eta U / \gamma$ (qui compare effets visqueux et capillaires) et le rapport d'aspect D/L . Ainsi, la tension de surface ne pourra pas être négligée pour les filaments très élancés, pour les faibles vitesses de compression et pour les liquides de plus faible viscosité.

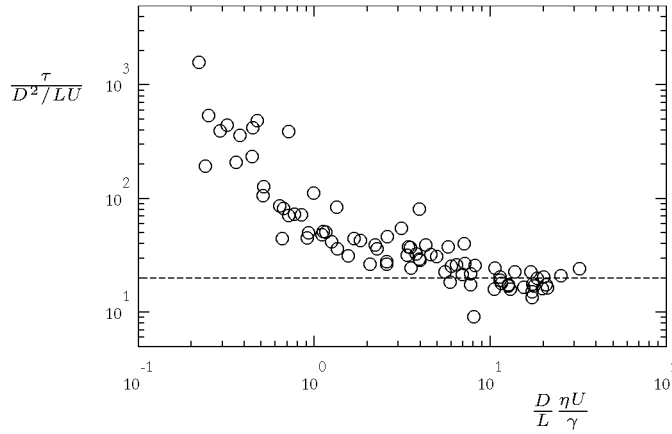


FIGURE 4.22 – Pour différentes expériences, on trace $\tau / (D^2 / LU)$ en fonction de $\text{Ca } D/L = (\eta U / \gamma)(D/L)$ (U varie entre 300 $\mu\text{m/s}$ et 7 mm/s, L entre 5 et 11 mm, D entre 0,1 et 1 mm et la viscosité η vaut $5 \cdot 10^2$ ou 10^3 Pa.s). La droite horizontale correspond à $\tau = 20 D^2 / LU$, qui correspond à la droite de la figure 4.17.

Expérimentalement, nous pouvons vérifier ce critère en mesurant le temps de flambage τ et en traçant $\tau / (D^2 / LU)$ en fonction de $\text{Ca } D/L$ (figure 4.22). On

constate qu'en effet, le flambage est retardé quand la capillarité joue un rôle. Quand $Ca D/L$ devient très petit, le flambage disparaît, comme sur la figure 4.2(b).

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié une analogie visqueuse du flambage d'Euler. Nous avons vu que ce flambage visqueux était caractérisé par un temps D^2/LU , qui est l'analogue du seuil en déplacement pour le flambage élastique D^2/L . Dans le cas du solide comme dans celui du liquide, le flambage est observé quand la distance de compression est plus grande que D^2/L . En particulier, on ne peut pas voir flamber les filaments trop peu élançés. Cette analogie liquide-solide est remise en question lorsque la tension de surface n'est plus négligeable, c'est-à-dire quand $Ca D/L$ devient petit devant 1. La capillarité joue alors un rôle stabilisant et retarde, voire supprime le flambage.

Bibliographie

- [1] L. Euler. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimi proprietate gaudentes. Additamentum I (De curvis elasticas). Leonardi Euleri Opera Omnia IXXIV, 231-297.* 1744. 83
- [2] G. I. Taylor. Instability of jets, threads and sheets of viscous fluids. *Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics*, page 382, 1969. 84, 85
- [3] J.W.S. Rayleigh. *The theory of sound vol.2*, pages 313–315. Dover, 1945. 84
- [4] A.E.H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover, 1944. 85, 107, 111
- [5] J.O. Cruickshank and B.R. Munson. Viscous fluid buckling of plane and axisymmetric jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 113 :221–239, 1981. 85
- [6] L. Mahadevan, W. S. Ryu, and A. D. T. Samuel. Fluid 'rope trick' investigated. *Nature*, 392 :140, 1998. 85, 89
- [7] L. Mahadevan, W.S. Ryu, and A.D.T. Samuel. Correction : Fluid 'rope trick' investigated. *Nature*, 403 :502, 2000. 85
- [8] M. Skorobogatiy and L. Mahadevan. Folding of viscous sheets and filaments. *Europhysics Letters*, 52(5) :532–538, 2000. 85
- [9] N. M. Ribe. Bending and stretching of thin viscous sheets. *Journal of Fluid Mechanics*, 433 :135–160, 2001. 85
- [10] N. M. Ribe. Periodic folding of viscous sheets. *Phys. Rev. E*, 68(3) :036305, 2003. 85, 89

- [11] N.M. Ribe. Coiling of viscous jets. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 460 :3223–3239, 2004. 85
- [12] M. A. Biot. Theory of viscous buckling of multilayered fluids undergoing finite strain. *Physics of Fluids*, 7(6) :855–861, 1964. 85
- [13] S. M. Suleiman and B. R. Munson. Viscous buckling of thin fluid layers. *Physics of Fluids*, 24(1) :1–5, 1981. 85, 95
- [14] T. B. Benjamin and T. Mullin. Buckling instabilities in layers of viscous liquid subjected to shearing. *Journal of Fluid Mechanics*, 195 :523–540, 1988. 85, 86, 95
- [15] A. Boudaoud and S. Chaïeb. Singular thin viscous sheet. *Phys. Rev. E*, 64(5) :050601, 2001. 85
- [16] F. T. Trouton. On the coefficient of viscous traction and its relation to that of viscosity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 77 :426–440, 1906. 86, 118
- [17] E. Guyon, J.-P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. CNRS Editions, 2001. 90
- [18] J.D. Buckmaster, A. Nachman, and L. Ting. The buckling and stretching of a viscida. *Journal of Fluid Mechanics*, 69 :1–20, 1975. 95
- [19] J. D. Buckmaster and A. Nachman. The buckling and stretching of a viscida ii. effects of surface tension. *Q J Mechanics Appl Math*, 31 :157–168, 1978. 95
- [20] H. Helmholtz. *Wiss. Abh.*, 1 :223–230, 1868. 96
- [21] D. J. Korteweg. On a general theorem of the stability of the motion of a viscous fluid. *Philosophical Magazine Series 5*, 16(98) :112–118, 1883. 96

CHAPITRE 5

Plectonèmes visqueux

Sommaire

5.1 Plectonèmes élastiques	104
5.1.1 Expérience	104
5.1.2 Déplacement seuil	105
5.2 Plectonèmes visqueux	108
5.2.1 Expérience	108
5.2.2 Temps de formation de la première boucle	109
5.2.3 Fréquences de rotation élevées	114
Bibliographie	116

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le flambage visqueux d'un filament en compression (flambage d'Euler). Nous reproduisons ici un analogue visqueux d'un autre phénomène de flambage : les plectonèmes. Si l'on impose une torsion importante à une tige élastique ou à un filament visqueux, on assiste à la formation de boucles : nous nous attachons à comprendre le seuil de formation de la première boucle, pour des tiges élastiques puis pour des filaments visqueux, en nous appuyant sur une analogie entre les deux types de déformations.

5.1 Plectonèmes élastiques

5.1.1 Expérience

Considérons une tige élastique, à laquelle on impose une rotation à l'une de ses extrémités. Rapprochons ensuite ses extrémités : on observe la formation d'une boucle qui peut continuer à s'enrouler en « tresse » si l'on continue à la comprimer et si la rotation initiale est assez importante (figure 5.1). Cet objet est appelé plectonème.

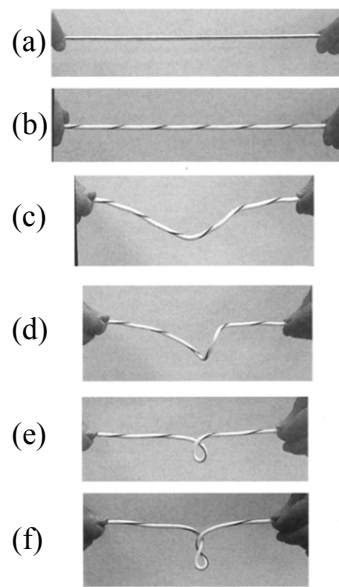


FIGURE 5.1 – On prend une tige de caoutchouc, initialement rectiligne (a). On impose une rotation à l'une des extrémités (b). On rapproche ensuite progressivement les deux extrémités ((c) à (f)) : le filament se déforme tout d'abord en dehors de son axe (on observe des formes proches de l'hélice) (c, d) avant de former brusquement une boucle (entre les photos (d) et (e)). Cette boucle continue à s'enrouler si l'on rapproche encore les extrémités (f). Figure tirée de [1].

Les plectonèmes se rencontrent dans plusieurs applications pratiques : dans notre vie quotidienne, on pense au fil de téléphone qui s'enroule. Ce phénomène se rencontre aussi à plus grande échelle lors de la manipulation de câbles sous-marins [2]. À petite échelle, il est également observé sur l'ADN, dont la capacité de réplication dépend de cet enroulement [3].

Une telle boucle se forme car elle permet de diminuer l'énergie emmagasinée sous forme de torsion — la formation d'une boucle diminue la torsion d'un tour — au prix d'énergie de courbure supplémentaire — la boucle ayant en général une courbure plus élevée que la tige avant enroulement, comme on peut le remarquer en comparant les images (d) et (e) de la figure 5.1.

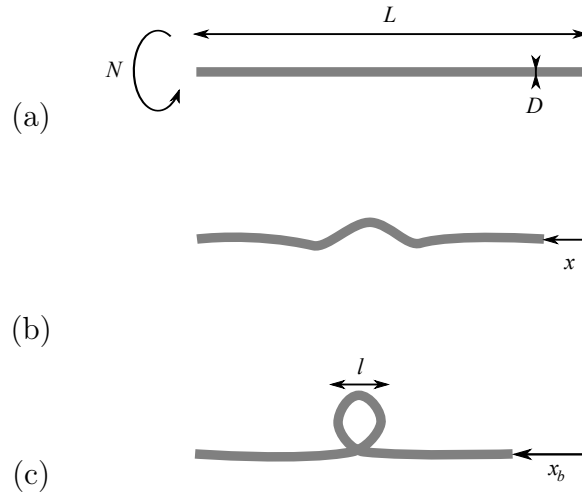


FIGURE 5.2 – Principe de l'expérience : (a) on impose une rotation de N tours à l'extrémité d'une tige de longueur L et de diamètre D . (b) On comprime le filament d'une distance x . (c) Pour $x = x_b$, une boucle d'extension l se forme.

Nous avons reproduit au laboratoire un analogue de l'expérience de Goss *et al.* [1], que nous schématisons sur la figure 5.2. On encastre aux deux extrémités une tige d'élastomère (polyvinylsiloxane de module de Young $E = 200$ ou 400 kPa), de diamètre D de quelques millimètres, et de longueur L de quelques centimètres. On impose une rotation de N tours d'un côté de la tige, puis on rapproche les extrémités d'une distance x à l'aide d'une vis micrométrique. On mesure alors la distance de compression x_b à imposer pour former une première boucle, qui correspond au saut qui se produit entre les images (d) et (e) de la figure 5.1. Pour $L = 55$ mm, $D = 2,9$ mm et $E \approx 400$ kPa, on trace sur la figure 5.3 x_b en fonction de N . Précisons ici que x_b est toujours mesurée en augmentant la compression (x croissants), car ce seuil est hystérétique : si on diminue x , la boucle se défera pour $x < x_b$. On constate sur cette figure que x_b diminue quand N augmente : plus la rotation imposée est importante, plus le seuil pour observer une boucle sera bas. On constate même que pour $N = 8$, x_b est négatif : il y a formation d'une boucle sans avoir besoin de rapprocher les extrémités de la tige. La tige « bouclée » est alors sous tension. Pour mesurer x_b dans ce cas, nous avons tendu la tige pour défaire la boucle, avant de la recomprimer.

5.1.2 Déplacement seuil

Nous cherchons ici à comprendre l'origine du déplacement seuil x_b pour former la première boucle, et son lien avec la géométrie du filament et le nombre de tours N initialement imposé.

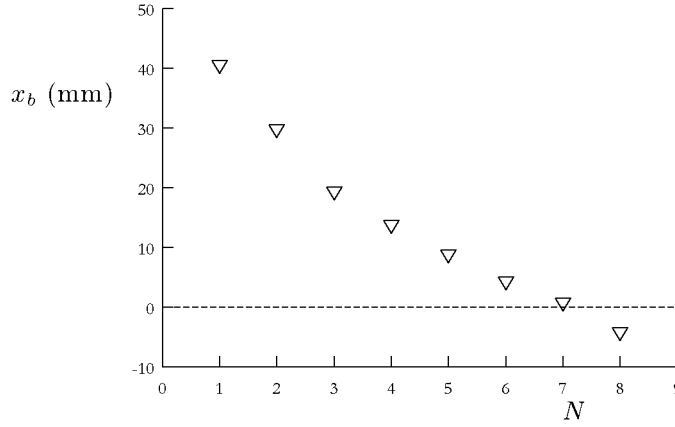


FIGURE 5.3 – Déplacement seuil x_b pour former la première boucle, en fonction du nombre N de tours initialement imposé. La tige, de module $E \approx 400$ kPa, a une longueur $L = 55$ mm et un diamètre $D = 2,9$ mm. L'erreur de mesure sur x_b est 0,25 mm. Quand $x_b < 0$, cela signifie que l'on a tendu la tige pour défaire la boucle, avant de la recomprimer.

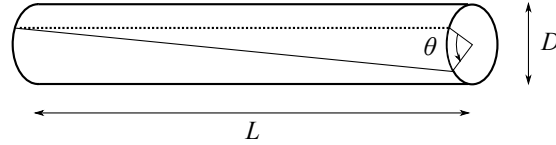


FIGURE 5.4 – Torsion d'une tige élastique de longueur L et de diamètre D : l'angle imposé est θ , le déplacement correspondant est $D\theta$ et le cisaillement associé s'écrit $D\theta/L$.

Quelle est l'énergie emmagasinée par une tige lorsqu'une torsion lui est imposée ? Quand on tord la tige d'un angle θ , on la cisaille (figure 5.4). La déformation relative associée s'écrit $\epsilon \sim D\theta/L$. L'énergie élastique correspondante est proportionnelle au module de Young, au volume LD^2 et à ϵ^2 . Elle s'écrit donc

$$\mathcal{E}_{\text{torsion}} \sim E LD^2 \epsilon^2 \sim E \frac{D^4}{L} \theta^2 \quad (5.1)$$

Si l'on impose initialement une rotation de N tours, l'énergie correspondant à la situation où la tige ne forme pas de boucle s'écrit $\mathcal{E}_1 \sim ED^4 N^2/L$. En revanche, si la tige forme une boucle, elle a été « détordue » d'un tour mais elle est désormais courbée. L'énergie de torsion s'écrit alors $ED^4(N-1)^2/L$. D'autre part, on suppose que la boucle est presque circulaire et que la longueur L de la tige est conservée. Dans ce cas, l'extension de la boucle est $l \sim x$ (figure 5.2), et l'énergie de courbure (équation (4.1)) associée à son existence s'écrit $ED^4 l \times (1/l)^2 \sim ED^4/l \sim ED^4/x$.

L'énergie totale de l'état « bouclé » s'écrit donc $\mathcal{E}_2 \sim ED^4(N-1)^2/L + ED^4/x$. Si la tige prend la configuration d'énergie minimale, on observera une boucle pour :

$$\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$$

soit pour :

$$\frac{1}{x} < \frac{2N-1}{L}$$

qui se réécrit :

$$x > \frac{L}{2N-1}$$

Ce raisonnement est évidemment simplifié à l'extrême : la tige n'est pas soit rectiligne, soit bouclée. En réalité, plusieurs régimes de déformation hors du plan sont observés, comme on le voit sur la figure 5.1. La tige prend alors une forme hélicoïdale, plus ou moins localisée. Les transitions entre ces différents régimes ont été étudiées, notamment du point de vue des nombreux types d'instabilité identifiés dans ce système [1, 4–8]. Ce modèle naïf permet cependant de mettre en évidence que le seuil x_b doit être proportionnel à L et ne dépend pas du diamètre D . D'autre part, on comprend ainsi le fait que x_b diminue quand N augmente (figure 5.3). Pour des rotations modérées ($N = 1, 2$ ou 3), on vérifie bien sur la figure 5.5 que x_b est proportionnel à L et diminue avec N : pour $N = 1$ (symboles blancs), $x_b \approx 0,7 L$; pour $N = 2$ (symboles gris), $x_b \approx 0,5 L$; pour $N = 3$ (symboles noirs), $x_b \approx 0,4 L$.

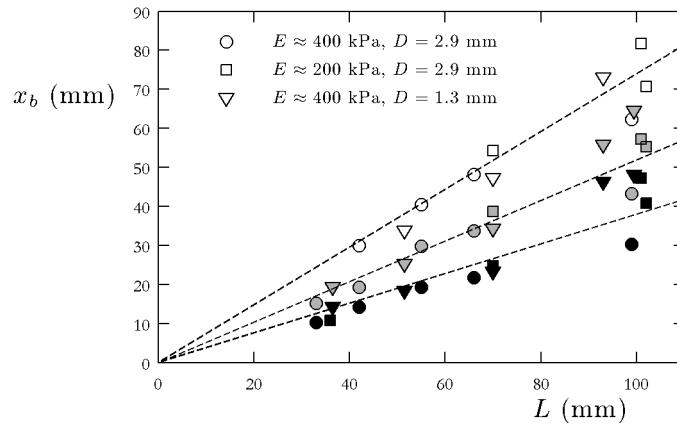


FIGURE 5.5 – Boucles élastiques : seuil x_b en fonction de la longueur L , pour $N = 1$ (en blanc), $N = 2$ (en gris) et $N = 3$ (en noir). Les différents symboles correspondent à des tiges de caractéristiques différentes ($E \approx 200$ ou 400 kPa, $D = 1,3$ ou $2,9$ mm). Les droites pointillées ont pour pentes respectives $0,74$, $0,51$ et $0,38$.

Les seuils x_b/L de nos expériences sont cohérents avec ceux trouvés expérimentalement et théoriquement (après intégration numérique des équations de la tige) par

Goss *et al.* : pour $N = 1$, ils observent que la « fermeture » de la boucle se produit pour $x/L = 0,73$; pour $N = 2$, la boucle se forme quand $x/L = 0,41$.

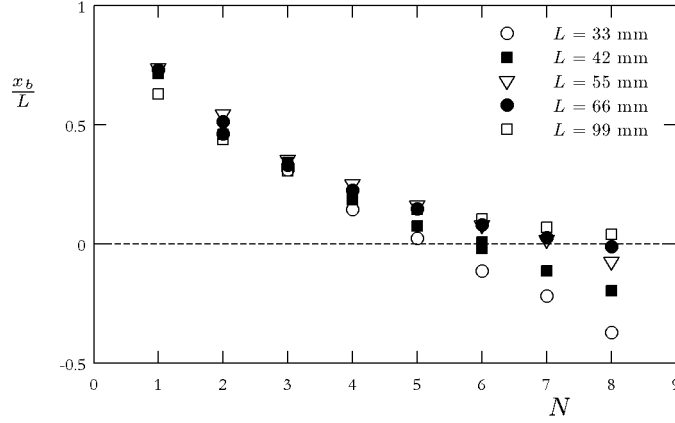


FIGURE 5.6 – Tige élastique : déplacement seuil adimensionné x_b/L , en fonction du nombre N de tours imposé, pour plusieurs longueurs L entre 3 et 10 cm. La tige a un module $E \approx 400$ kPa et un diamètre $D = 2,9$ mm.

Quand la torsion est plus importante ($N \gtrsim 4$), x_b n'est plus proportionnel à L (figure 5.6). On peut proposer deux arguments pour expliquer ce comportement. D'un côté, quand N augmente, le rayon de courbure l de la boucle diminue, jusqu'à devenir de l'ordre du diamètre du filament D . D'autre part, nous pouvons remarquer que x_b prend des valeurs négatives aux grands N : le filament est alors tendu. Pour décrire son équilibre, il faudrait alors tenir compte de son énergie de tension $ELD^2\epsilon^2$ (ϵ désigne l'allongement relatif), qui varie proportionnellement à D^2 , contrairement aux énergies de torsion et de courbure, qui varient en D^4 .

5.2 Plectonèmes visqueux

5.2.1 Expérience

Pour former des plectonèmes visqueux, nous reprenons l'expérience du chapitre 4, en y ajoutant de la torsion (figure 5.7) : on forme un filament d'huile très visqueuse, de viscosité $\eta \approx 10^3$ Pa.s, de longueur L centimétrique et de diamètre D millimétrique. On fait tourner l'une des extrémités à une fréquence constante f , de l'ordre du hertz. On comprime ensuite le filament à une vitesse constante U de quelques mm/s.

On observe alors la formation de boucles liquides, dont le nombre et la taille varient avec la fréquence de rotation f (figure 5.8) : plus f est élevée, plus on

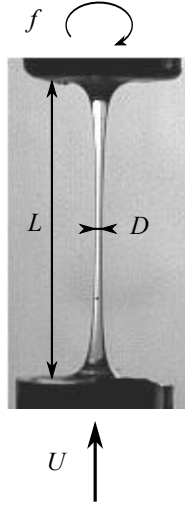


FIGURE 5.7 – Principe de l'expérience : on forme un filament de liquide visqueux de longueur L et de diamètre D . On fait ensuite tourner l'une des extrémités à la fréquence f , avant de comprimer l'autre côté à la vitesse U .

forme une boucle tôt et plus les boucles supplémentaires sont nombreuses, de façon analogue à ce que l'on observe dans le cas élastique.

À partir de ces images, on mesure le temps τ_b au bout duquel la première boucle se forme, c'est-à-dire pour lequel il y a contact entre deux parties du filament. Pour des expériences comme celles de la figure 5.8, on trace sur la figure 5.9 τ_b en fonction de la fréquence f . On constate deux régimes sur ce diagramme logarithmique : pour $f \leq 1$ Hz, τ_b est constant, tandis que τ_b décroît avec f pour $f \geq 1$ Hz.

5.2.2 Temps de formation de la première boucle

Écrivons tout d'abord la puissance dissipée par viscosité dans un filament auquel on impose un taux de rotation f à l'une des extrémités. D'après la figure 5.4, le filament va être cisailé. Comme $\theta \sim ft$, le taux de cisaillement s'écrit $\dot{\epsilon} \sim Df/L$. La puissance dissipée lors de la torsion s'écrit donc

$$\mathcal{P} \sim \eta LD^2 \dot{\epsilon}^2 \sim \eta \frac{D^4}{L} f^2 \quad (5.2)$$

On retrouve ainsi l'analogie élasticité-viscosité décrite au chapitre 4 : la viscosité η fait écho au module d'élasticité E , la puissance dissipée $\mathcal{P}$ à l'énergie emmagasinée $\mathcal{E}$, et dans le cas de la torsion, la fréquence de rotation f à l'angle $\theta = 2\pi N$.

Il faut souligner ici une différence entre les boucles solide et liquide : avec une tige élastique, on observe un « saut » entre une forme d'allure hélicoïdale et une

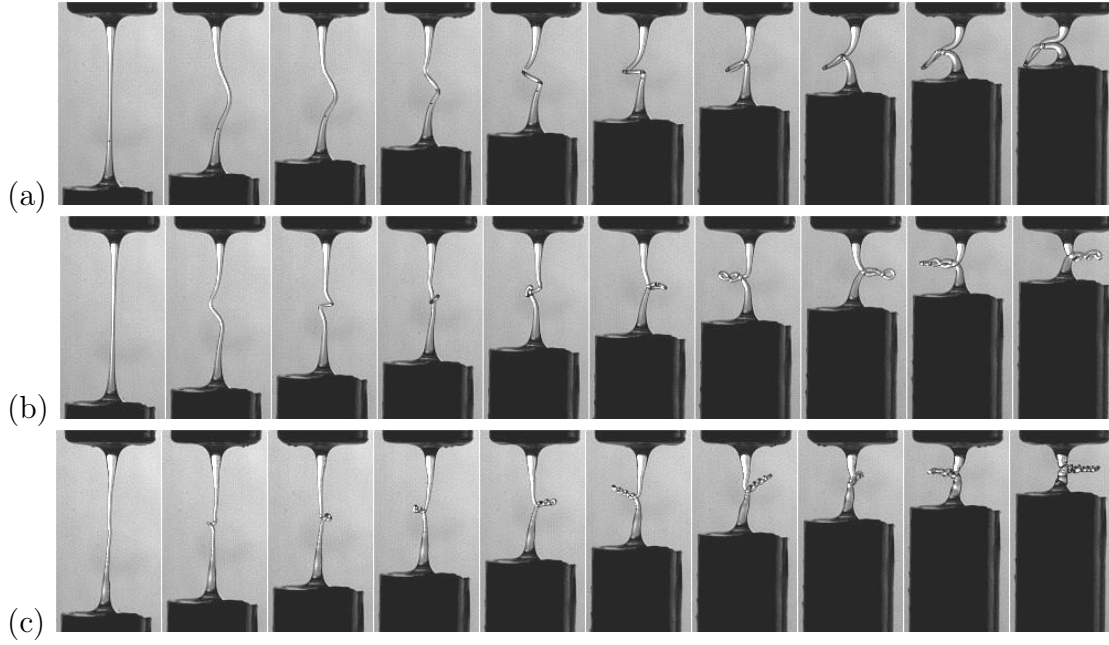


FIGURE 5.8 – Chronophotographies de l'expérience de plectonème visqueux : la viscosité de l'huile est $\eta = 10^3$ Pa.s, le filament est initialement de longueur $L \approx 8$ mm et de diamètre $D \approx 0,2$ mm. La vitesse de compression est $U = 4$ mm/s. De haut en bas, la fréquence de rotation augmente : (a) $f = 0,70$ Hz ; (b) $f = 6,4$ Hz ; (c) $f = 22$ Hz. L'intervalle entre deux images consécutives est 0,15 s.

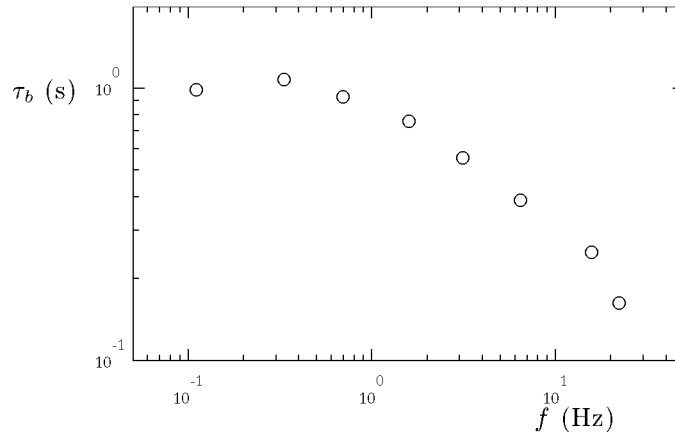


FIGURE 5.9 – Temps de la première boucle τ_b en fonction de la fréquence de rotation f . Les dimensions du filament sont $L = 8$ mm et $D \approx 0,2$ mm. La vitesse de compression est $U = 4$ mm/s. L'huile silicone utilisée est de viscosité $\eta = 10^3$ Pa.s.

boucle plate, comme il se produit entre les images (d) et (e) de la figure 5.1. Ce n'est pas le cas avec le filament visqueux pour lequel la déformation est continue.

La forme d'hélice est simplement de plus en plus inclinée jusqu'au contact : l'angle β défini à la figure 5.10 augmente jusqu'à valoir π pour $t = \tau_b$.

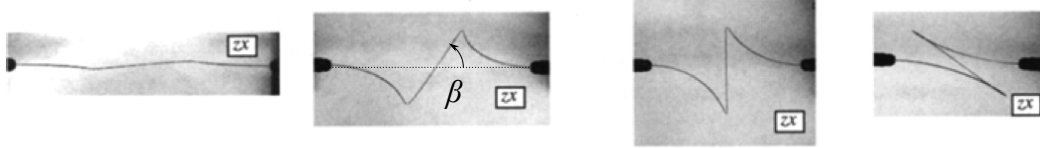


FIGURE 5.10 – Tiges élastiques en forme d'hélices plus ou moins inclinées. On définit l'angle d'inclinaison β de l'hélice (images tirées de [1]).

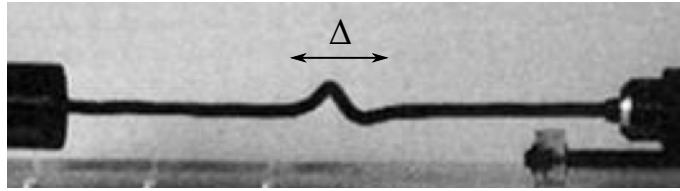


FIGURE 5.11 – Déformation localisée d'une tige élastique (image tirée de [6]). On note Δ l'échelle de cette déformation. Sur la figure 5.10, on a $\Delta \sim L$.

La distance de compression $x_b = U\tau_b$ à imposer pour arriver au contact est alors proportionnelle à la taille caractéristique Δ de l'hélice (définie à la figure 5.11). Pour déterminer le temps τ_b de formation de la première boucle, il suffit de trouver l'échelle caractéristique de déformation $\Delta \sim U\tau_b$, pour une expérience donnée. La détermination de Δ dépend d'une compétition complexe entre courbure et torsion, qui nécessiterait en toute rigueur de tenir compte de la torsion « cinématique » du filament (aussi appelée « tortuosité »), c'est-à-dire du fait qu'il ne suit pas une courbe plane [5, 9]. La mise en place de la forme hélicoïdale permet de diminuer la torsion totale, mais est à l'origine d'un terme de courbure dans la puissance dissipée par le filament. Nous supposons par la suite que la déformation du filament cherche à minimiser la puissance dissipée $\mathcal{P}_{\text{torsion}} + \mathcal{P}_{\text{courbure}}$.

Faibles fréquences ($f < U/L$)

Si la rotation n'est pas trop importante, le terme de courbure $\mathcal{P}_{\text{courbure}}$ domine le terme de torsion $\mathcal{P}_{\text{torsion}}$. Le filament cherchera donc à minimiser la puissance due à la courbure. Celle-ci est localisée sur une étendue Δ et d'ordre $\kappa \sim \sqrt{\Delta U t} / \Delta^2$ par conservation de la longueur. Aux dimensions, la puissance dissipée par courbure s'écrit donc :

$$\mathcal{P}_{\text{courbure}} \sim \eta D^4 \Delta \dot{\kappa}^2 \sim \eta D^4 \frac{U}{t \Delta^2}$$

Il s'agit de l'équation (4.7) dans le cas où $L = \Delta$. Minimiser $\mathcal{P}_{\text{courbure}}$ implique de prendre Δ la plus grande possible, c'est-à-dire :

$$\Delta \sim L$$

Comme $\Delta \sim U\tau_b$, cela signifie que l'on formera une boucle au bout d'un temps

$$\tau_b \sim \frac{L}{U} \quad (5.3)$$

Cela sera valable tant que la puissance dissipée dans la courbure $\eta D^4 U / t L^2 \sim \eta D^4 U^2 / L^3$ (en prenant $t \sim L/U$) domine le terme de torsion $\eta D^4 f^2 / L$, soit pour $f < U/L$.

Fréquences plus élevées ($f > L/U$)

Pour $f > L/U$, on ne peut plus négliger la torsion. La déformation du filament en hélice modifie la rotation totale ft d'un terme sans dimension $\Phi(t)$, qui dépend des caractéristiques géométriques de la forme hélicoïdale du filament : pour un filament rectiligne $\Phi = 0$; pour une boucle plate $\Phi = 2\pi$; pour une forme déformée en trois dimensions comme une portion d'hélice, l'expression de Φ est plus compliquée et dépend notamment de la torsion cinématique. De façon générale, la puissance dissipée par torsion se réécrit :

$$\mathcal{P}_{\text{torsion}} \sim \eta \frac{D^4}{L} \left(f - \dot{\Phi} \right)^2$$

Initialement, le filament est rectiligne : $\Phi(t=0) = 0$. À $t = \tau_b$, on a une boucle plate : $\Phi(t = \tau_b) = 2\pi$. Aux dimensions, $\dot{\Phi}$ varie donc comme $2\pi/\tau_b \sim U/\Delta$. L'ordre de grandeur de la puissance totale est donc :

$$\mathcal{P}_{\text{totale}} \sim \eta \frac{D^4}{L} \left(f - \frac{U}{\Delta} \right)^2 + \eta D^4 \frac{U^2}{\Delta^3}$$

où la puissance due à la courbure est évaluée pour $t = \tau_b \sim \Delta/U$. On cherche la longueur Δ qui minimise $\mathcal{P}_{\text{totale}}$. C'est la solution de $\frac{d\mathcal{P}_{\text{totale}}}{d\Delta} = 0$. On résoud donc l'équation :

$$f\Delta^2 - U\Delta - LU = 0$$

dont la solution positive est :

$$\Delta \sim \frac{U + \sqrt{U^2 + ULf}}{f}$$

Dans la limite où $f \ll U/L$, on trouve $\Delta \sim U/f \gg L$. En pratique, la longueur Δ sature à L , on retrouve donc le régime où Δ est indépendante de la fréquence f . À l'opposé, pour $f \gg U/L$, on obtient $\Delta \sim \sqrt{ULf}/f$ qui donne :

$$\Delta \sim L \sqrt{\frac{U}{Lf}}$$

On remarque que Δ diminue avec f , comme ce que l'on observe dans les expériences (figure 5.8). Plus f est importante, plus on formera une boucle tôt, au bout du temps :

$$\tau_b \sim \frac{L}{U} \sqrt{\frac{U}{Lf}} \quad (5.4)$$

Comparaison aux expériences

Le temps pour former la première boucle τ_b est donc déterminée par les équations (5.3) et (5.4), suivant que Lf/U est plus ou moins grand devant 1. Le temps τ_b est donc indépendant du diamètre D (ainsi que de la viscosité η). Ce n'est pas surprenant car nous avons vu que les puissances dissipées par torsion ou par courbure ont la même dépendance en diamètre (elles sont proportionnelles à D^4). La compétition entre torsion et courbure est donc indépendante de D , comme la variation de τ_b avec f , comme on peut le constater sur la figure 5.12.

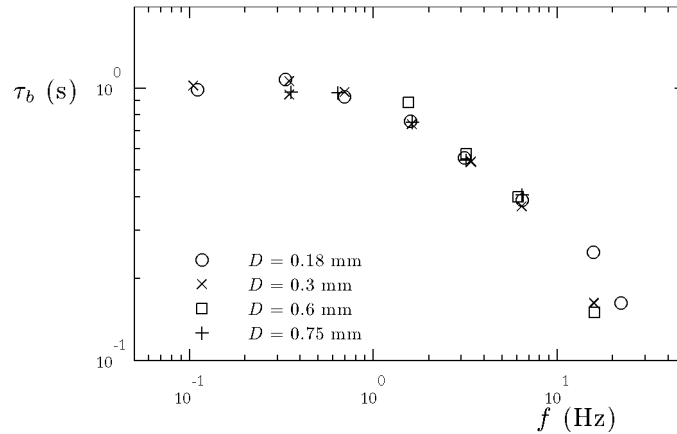


FIGURE 5.12 – Temps de la première boucle τ_b en fonction de la fréquence f , pour différents diamètres D . La longueur L vaut 8 mm, la vitesse U vaut 4 mm/s et la viscosité vaut $\eta = 10^3$ Pa.s.

Dans ces conditions, les échelles de temps possibles du système sont simplement $1/f$ et L/U . On constate en effet que nos données de τ_b en fonction de f se superposent quand on adimensionne τ_b par le temps caractéristique L/U , et f par la

fréquence caractéristique U/L , pour différentes longueurs L (figure 5.13) et différentes vitesses U (figure 5.14). Les équations (5.3) et (5.4) donnent le temps seuil adimensionné $\tau^* = U\tau_b/L$ en fonction de la fréquence adimensionnée $f^* = Lf/U$:

$$\tau^* \sim \begin{cases} 1 & \text{si } f^* < 1 \\ 1/\sqrt{f^*} & \text{si } f^* > 1 \end{cases}$$

Cette variation est aussi cohérente avec les données des figures 5.13 et 5.14, sur lesquelles on distingue bien les deux régimes.

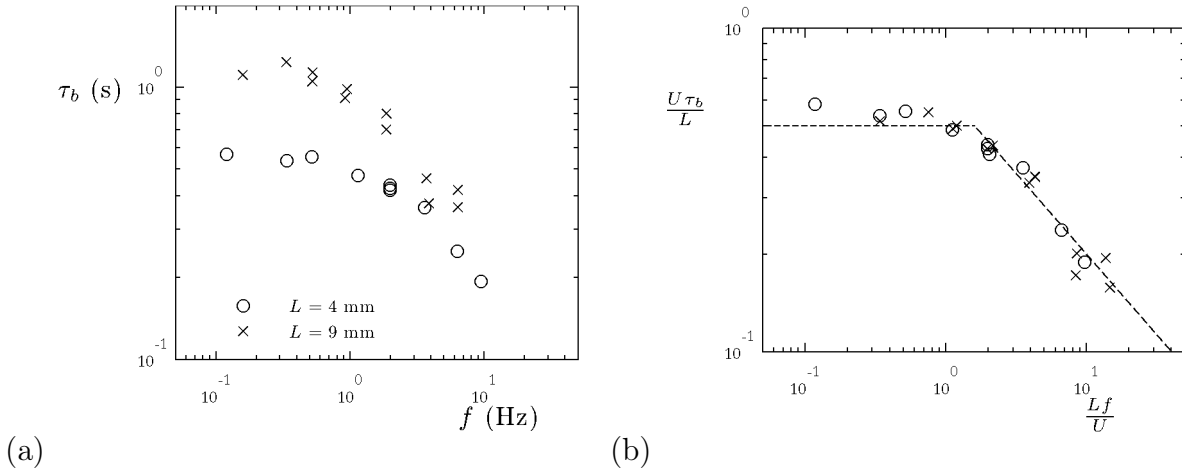


FIGURE 5.13 – Influence de la longueur L . Les filaments, de différents diamètres D entre 0,2 et 0,4 mm, sont tels que $\eta = 10^3$ Pa.s et $U = 4$ mm/s. (a) τ_b en fonction de f , (b) $U\tau_b/L$ en fonction de Lf/U . Les droites pointillées correspondent à $U\tau_b/L = 0,5$ et $U\tau_b/L = 0,6 \sqrt{U/Lf}$.

5.2.3 Fréquences de rotation élevées

Si les fréquences de rotation sont plus élevées, de plusieurs hertz, on forme de nombreuses boucles comme sur la figure 5.8(c). La caractérisation de ces boucles est cependant délicate : les rayons de courbure sont alors d'ordre D , et le contact du filament sur lui-même est difficile à apprécier. Par ailleurs, la modélisation des filaments très enroulés est rendue plus complexe par l'existence du contact.

D'autre part, quand la fréquence f est grande, on observe parfois la formation d'une « boucle » de taille D , même sans rapprocher les extrémités du filament (figure 5.15). La torsion est suffisamment forte pour que le filament forme une boucle malgré le double coût de la courbure et de la tension supplémentaires : pour former une telle boucle, le filament doit s'allonger.

Pour ces vitesses de rotation élevées, on constate également l'apparition de stries le long du filament visqueux, que l'on devine sur la figure 5.15 et dont nous ne comprenons pas l'origine.

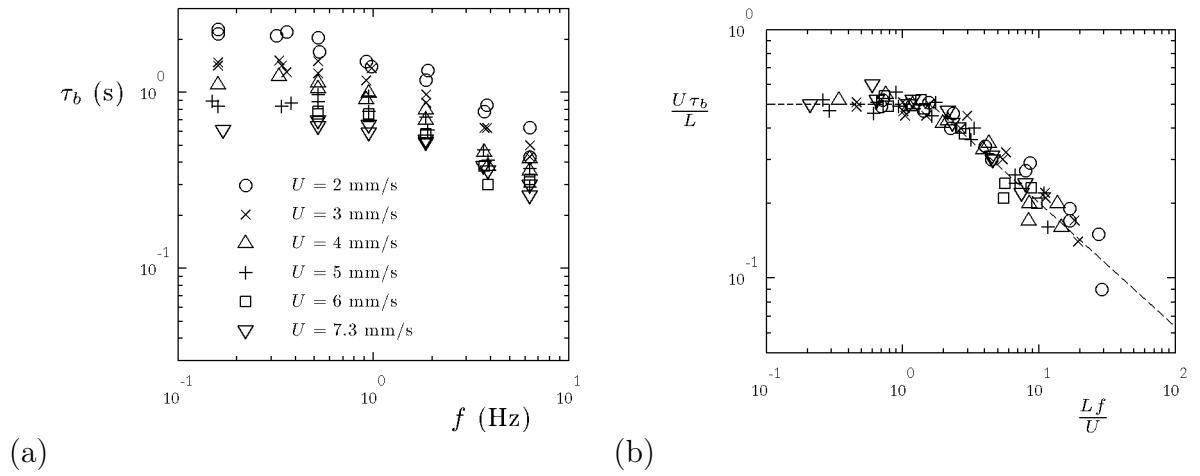


FIGURE 5.14 – Influence de la vitesse de compression U . Les filaments, de différents diamètres D entre 0,2 et 0,4 mm, sont tels que $\eta = 10^3$ Pa.s et $L = 9$ mm/s. (a) τ_b en fonction de f , (b) $U\tau_b/L$ en fonction de Lf/U . Les droites pointillées correspondent à $U\tau_b/L = 0,5$ et $U\tau_b/L = 0,6 \sqrt{U/Lf}$.

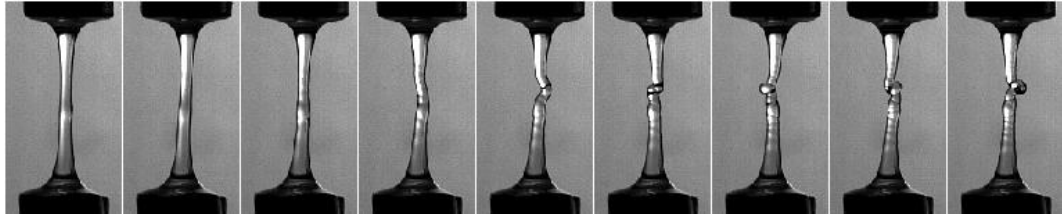


FIGURE 5.15 – Succession d'images d'un filament visqueux de longueur $L = 8$ mm et de diamètre $D = 0,5$ mm. La fréquence de rotation imposée est $f = 28$ Hz. L'intervalle entre deux images est 0,05 s.

Conclusion

Nous avons ainsi montré l'existence de plectonèmes visqueux, analogues des boucles observées sur des tiges élastiques. À faible fréquence de rotation, le temps τ_b nécessaire pour former une boucle est L/U : dans ce régime, le filament cherche simplement à minimiser la puissance due à la courbure. En revanche, pour $f > U/L$, la puissance dissipée dans la torsion n'est plus négligeable, et on observe que $U\tau_b$ diminue quand Lf/U augmente. Pour des fréquences de rotation plus élevées, les rayons de courbure deviennent de l'ordre du diamètre D et on observe un enroulement de plusieurs boucles.

Bibliographie

- [1] V. G. A. Goss, G. H. M. van der Heijden, J. M. T. Thompson, and S. Neukirch. Experiments on snap buckling, hysteresis and loop formation in twisted rods. *Experimental Mechanics*, 45 :101–111, 2005. 104, 105, 107, 111
- [2] T. Yabuta. Submarine cable kink analysis. *Bull. Jap. Soc. Mech. Eng.*, 27(231) :1821, 1984. 104
- [3] J-F Allemand, TR Strick, D. Bensimon, and V. Croquette. Twisting DNA : single molecule studies. *Contemporary Physics*, 45 :383–403, 2004. 104
- [4] A.G. Greenhill. On the strength of shafting when exposed both to torsion and to end thrust. *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, pages 182–209, April 1883. 107
- [5] A.E.H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover, 1944. 85, 107, 111
- [6] J. M. T. Thompson and A. R. Champneys. From helix to localized writhing in the torsional post-buckling of elastic rods. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 452 :117–138, 1996. 107, 111
- [7] A. R. Champneys and J. M. T. Thompson. A multiplicity of localized buckling modes for twisted rod equations. *Proceedings : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 452(1954) :2467–2491, 1996. 107
- [8] A. Goriely and M. Tabor. Nonlinear dynamics of filaments. IV Spontaneous looping of twisted elastic rods. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 454 :3183–3202, 1998. 107
- [9] J. Coyne. Analysis of the formation and elimination of loops in twisted cable. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 15(2) :72, 1990. 111

CHAPITRE 6

Chute de filaments visqueux

Sommaire

6.1	Sélection de forme	118
6.1.1	Deux formes	118
6.1.2	Drainage capillaire	120
6.1.3	Chute	123
6.1.4	Critère de sélection	124
6.2	Chaînette visqueuse	126
6.2.1	Dynamique de chute	126
6.2.2	Évolution de la forme	130
6.3	Filaments en U	132
6.3.1	Chute	132
6.3.2	Amincissement	136
	Bibliographie	138

avec Jacopo Seiwert

Dans ce chapitre, nous nous demandons ce que devient un filament de liquide très visqueux, initialement horizontal, dans le champ de la gravité qui le déforme et le fait tomber. Nous nous intéressons aux formes qu'il peut prendre, à ce qui les détermine et à la dynamique de chute associée.

6.1 Sélection de forme

6.1.1 Deux formes

L'expérience est présentée sur la figure 6.1 : on coince une goutte de liquide visqueux (entre 1000 et 100 000 fois la viscosité de l'eau) entre deux plaques verticales en regard que l'on éloigne rapidement l'une de l'autre de quelques centimètres. On forme ainsi en un dixième de seconde un filament horizontal, de longueur L et de diamètre D , qui tombe sous l'effet de la gravité tout en étant retenu par ses bords. On observe son évolution au cours du temps à l'aide d'une caméra rapide, ce qui nous permet d'étudier sa déformation et sa hauteur de chute H en fonction du temps.

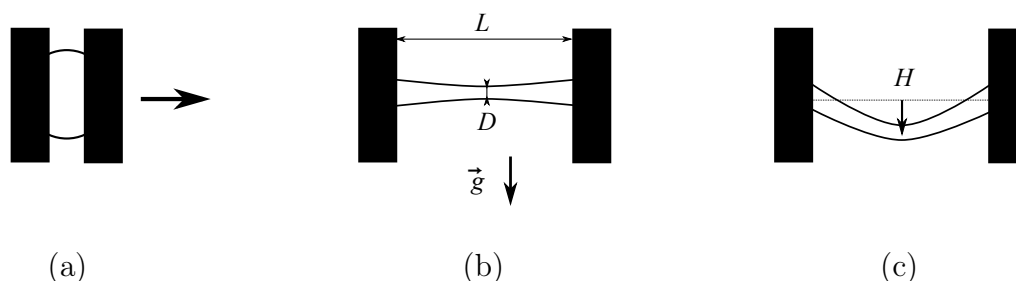


FIGURE 6.1 – Schéma de l'expérience : (a) on place une goutte de liquide visqueux entre deux mors, que l'on écarte ensuite rapidement. (b) On forme alors un filament horizontal, initialement de longueur L et de diamètre D . (c) Sous l'effet de la gravité, le filament tombe. On s'intéresse à sa forme et à sa « hauteur de chute » H .

Dans notre expérience, nous avons utilisé des huiles silicones de viscosité dynamique $\eta = 1, 10$ et 10^2 Pa.s, et du miel de viscosité 5 Pa.s. Les filaments ont une longueur initiale L comprise entre 1,5 et 6 cm, et un diamètre D de l'ordre du millimètre. Initialement horizontal, un filament se déforme sous l'effet de la gravité, comme on le voit sur la superposition d'images de la figure 6.2(a). Il descend d'une hauteur de l'ordre de L en une seconde environ, pour une huile de viscosité $\eta = 10$ Pa.s.

Dès 1906, Trouton s'est intéressé, dans ces travaux sur la viscosité élongationnelle du goudron [1], à la déformation d'un cylindre horizontal visqueux dans le champ de la gravité, mais uniquement dans le régime des très faibles déformations ($H \sim D$). En 2003, Teichman et Mahadevan [2] ont étudié la déformation de filaments visqueux dans le champ de la pesanteur, en se demandant si l'on pouvait reproduire avec un liquide la forme de la chaînette, qui est celle que prend un fil (ou une chaîne) accrochée par les deux bouts (figure 6.3(a)) [3]. En effet, en faisant « tomber » un filament de liquide tenu à ses extrémités, on observe une forme semblable à celle d'une chaînette, comme on le voit sur la figure 6.2(a).

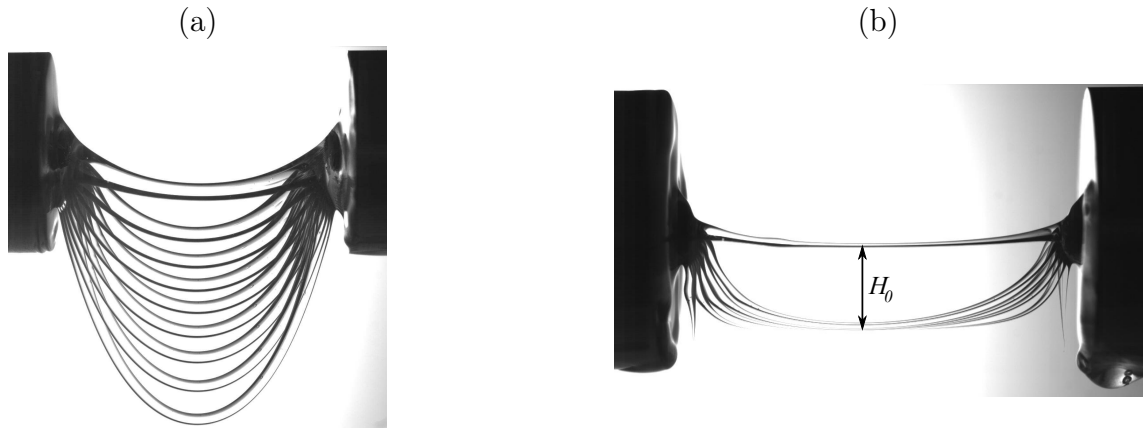


FIGURE 6.2 – Superposition d’images d’un filament d’huile silicone de viscosité 10 Pa.s placé dans le champ de la gravité. (a) La longueur initiale du filament est $L = 25$ mm et son diamètre $D = 1,75$ mm. L’intervalle de temps entre deux images consécutives est 0,08 s. (b) La longueur initiale du filament est $L = 25$ mm et son diamètre $D = 0,33$ mm. L’intervalle de temps entre deux images consécutives est 0,32 s.

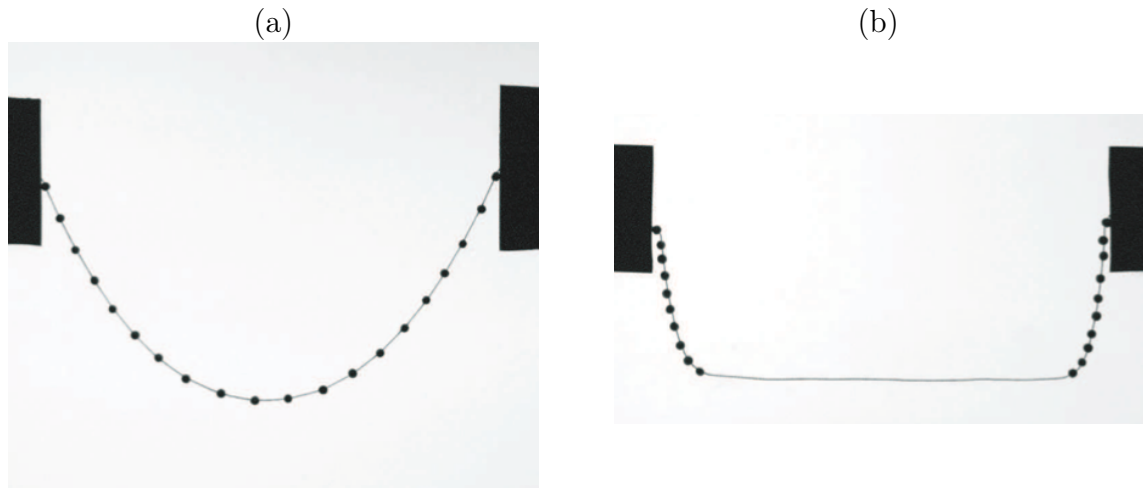


FIGURE 6.3 – Photos de fils plombés. (a) La masse est répartie régulièrement (les plombs sont espacés de 10 mm). (b) La masse est concentrée sur les bords (aux extrémités, les plombs sont espacés de 5 mm). Dans les deux cas, la distance entre les bords du fil est 13 cm, la longueur totale du fil est 20 cm.

Cette chaînette s’allonge au cours du temps, et Teichman et Mahadevan proposent une prédiction pour la dynamique de chute : la force motrice est le poids du filament, on néglige son inertie et la dissipation est purement visqueuse. Pour l’expérience de la figure 6.2(a), $L \sim 1$ cm, $\eta = 10$ Pa.s, $\rho = 10^3$ kg/m³ est la masse volumique du liquide et $\tau \sim 1$ s le temps caractéristique de la chute. Le nombre de Reynolds est donc $Re \approx \rho L^2 / \eta \tau \approx 10^{-2} \ll 1$, ce qui justifie cette hypothèse.

Plus précisément, dans cette configuration d'écoulement à surface libre, les écoulements sont élongationnels. Dans ce cas, Teichman et Mahadevan prédisent qu'à temps courts, la dissipation est liée à la création de courbure dans le filament. Aux temps « intermédiaires » et longs, la dissipation est cette fois dominée par l'étirement du filament : pour pouvoir descendre, le filament, accroché à des bords fixes, doit s'allonger. Citons également ici le travail de Brochard-Wyart et de Gennes [4], qui ont aussi étudié la dynamique du filament avec des arguments énergétiques.

Koulakis *et al.* [5] ont étudié en détail (à la fois expérimentalement et théoriquement) la chute du filament et sa forme. La dynamique de chute est en bon accord avec les prédictions précédentes, en tenant compte toutefois de l'inertie du filament à temps courts. Or Koulakis *et al.* ont observé une forme différente de la chaînette attendue. Lorsque le volume initial de la goutte est « petit », le filament, plus fin, prend une forme en U, et s'arrête de tomber, comme on le voit sur la figure 6.2(b) : la descente du filament atteint une valeur limite, que nous noterons H_0 , plus petite que L . Dans cette position, le filament s'amincit en son milieu et finit par se rompre.

Comment expliquer cette forme différente ? On peut le comprendre en reprenant l'analogie de Teichman et Mahadevan entre filament visqueux et fil pesant. Dans le premier cas (pour les grands volumes de liquide), la répartition de masse est sensiblement homogène le long du filament. La forme du filament visqueux (figure 6.2(a)) est alors très semblable à celle d'une chaînette (figure 6.3(a)).

En revanche, sur les images de filaments visqueux en forme de U (figure 6.2(b)), on peut remarquer que le filament est plus épais sur les bords qu'en son centre (où il devient tellement fin qu'il finit par se casser). On voit sur la figure 6.3(b) que si la masse n'est plus répartie de façon homogène sur le fil mais concentrée vers les bords, la forme prise par le fil est différente : il est presque horizontal sur sa partie centrale et quasi-vertical sur les bords. Sa forme, analogue à un U, est donc très semblable à celle du filament visqueux de la figure 6.2(b).

Les deux formes que l'on observe sont donc la conséquence d'une répartition de masse différente le long du filament : homogène dans le premier cas, elle est concentrée sur les bords dans le second. Cette variation de forme avec la répartition de masse est d'ailleurs un moyen d'obtenir des formes inédites, comme l'avait compris l'architecte catalan Gaudí (figure 6.4).

Comment expliquer la répartition de masse adoptée par le filament, qui gouverne la transition entre ces deux formes ? Quelle est la dynamique de chute de ces deux objets ? Ce sont ces questions qui guident notre travail dans ce chapitre.

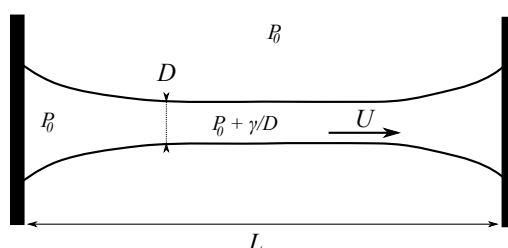
6.1.2 Drainage capillaire

Dans le cas des formes en U, le mécanisme qui emporte le liquide vers les extrémités est d'origine capillaire. Un cylindre de liquide n'est pas une forme d'équilibre



FIGURE 6.4 – Atelier d'Antoni Gaudí (photo tirée de [6])

car il n'offre pas une surface minimale, contrairement à la sphère. Pour la quantité de liquide coincé entre les mors de notre dispositif, une goutte unique est ainsi une forme de plus basse énergie. Le cylindre liquide n'est donc pas stable. C'est l'instabilité de Plateau-Rayleigh [7, 8], qui explique par exemple pourquoi un jet d'eau se fragmente en plusieurs gouttelettes. La taille des gouttelettes est donnée par la longueur d'onde la plus instable (celle pour laquelle le taux d'accroissement est le plus grand). Dans le cas d'un liquide peu visqueux, la longueur d'onde la plus instable est proportionnelle au diamètre du cylindre, mais cela n'est plus le cas quand les effets visqueux dominent les effets inertiels. Dans ce cas, ce sont les grandes longueurs d'onde qui sont les plus instables [4, 8]. Dans notre expérience, c'est ainsi la longueur L du filament qui joue ce rôle.

FIGURE 6.5 – Le filament a une courbure plus élevée en son milieu. À cause de la loi de Laplace, la pression y est maximale, ce qui provoque un mouvement de liquide vers les extrémités du filament.

Une autre façon de comprendre ce drainage vers les deux bords est de considérer la surpression de Laplace à l'intérieur du filament γ/D , qui est plus élevée que celle dans les ménisques présents aux extrémités du filament (qui ont une taille caracté-

ristique plus grande que D , de l'ordre de la longueur capillaire a). Cette différence de pression de Laplace provoque un drainage du liquide vers les bords du filament, comme schématisé sur la figure 6.5. Cherchons l'échelle de temps de ce drainage d'origine capillaire. On note U la vitesse de migration du liquide vers les ménisques. La surpression de Laplace est $\Delta P \sim \gamma/D$, le gradient de pression à l'origine de l'écoulement s'écrit donc $\Delta P/L \sim \gamma/DL$. Ce gradient de pression équilibre le terme de contrainte visqueuse de l'équation de Navier-Stokes $\eta U/L^2$, car les gradients de vitesse sont ici longitudinaux. Il vient donc :

$$U \sim \frac{\gamma}{\eta} \frac{L}{D}$$

pour les premiers instants. À cause du drainage, le filament s'amincit et on note $d(t)$ son diamètre au cours du temps, avec $d(t=0) = D$. La vitesse de drainage s'écrit plus généralement :

$$U \sim \frac{\gamma}{\eta} \frac{L}{d}$$

Par ailleurs, la conservation de la masse impose :

$$-\frac{\dot{d}}{d} \sim \frac{U}{L}$$

qui donne :

$$\dot{d} \sim -\frac{\gamma}{\eta} \quad (6.1)$$

Cette équation s'intègre pour donner l'évolution temporelle du diamètre, qui est linéaire :

$$d \approx D - \frac{\gamma}{\eta} t \quad (6.2)$$

Le filament s'amincit au cours du temps. Au bout d'un certain temps, il devient si fin qu'il se casse, comme on le voit par exemple sur la figure 6.2(b). D'après l'équation (6.2), on attend $d = 0$ pour $t = \eta D/\gamma$. On définit ainsi un temps caractéristique du drainage capillaire :

$$\tau_\gamma = \frac{\eta D}{\gamma} \quad (6.3)$$

Dans les expériences, nous avons mesuré le temps au bout duquel le filament se rompt. Nous notons ce temps de « rupture » τ_r . Pour les quatre liquides utilisés, nous vérifions que τ_r est proportionnel à $\eta D/\gamma$ (figure 6.6). τ_γ est donc bien le temps caractéristique du drainage capillaire, responsable de la rupture des filaments.

La tension de surface est donc responsable de la redistribution de masse observée sur les filaments en U. Dans le cas de la chaînette, ce drainage n'est pas observé car il intervient à une échelle de temps plus longue que celle de la chute.

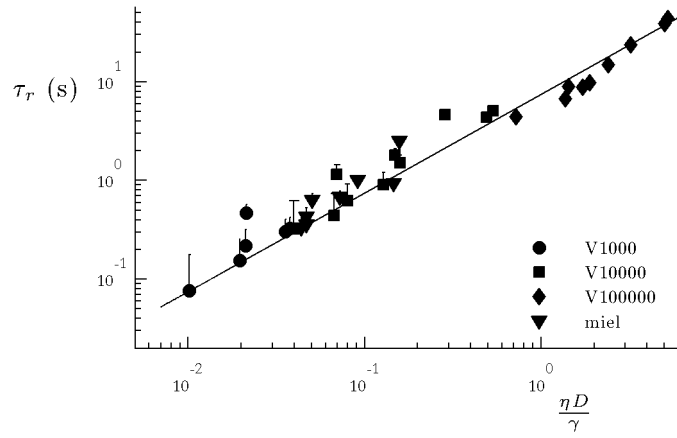


FIGURE 6.6 – Temps de rupture τ_r en fonction du temps caractéristique $\tau_\gamma = \eta D / \gamma$, pour différentes expériences. Les différents symboles correspondent aux différents liquides utilisés (huiles V1000, V10000 et V100000, de viscosités respectives 1, 10 et 100 Pa.s, et miel de viscosité 5 Pa.s). La droite représentée correspond à une variation linéaire $\tau_r = 7,5 \tau_\gamma$.

6.1.3 Chute

On cherche donc à évaluer le temps caractéristique de la déformation causée par la gravité. La dissipation dans ce système est d'origine visqueuse. Comme nous l'avons vu au chapitre 4, les surfaces sont libres si bien que les écoulements sont élongationnels : le filament est très déformé et sa longueur augmente beaucoup. La source principale de dissipation est donc l'élongation du filament. Quel est le temps caractéristique τ_g de cette élongation sous l'effet de la gravité ?

Aux dimensions, si l'élongation se fait à un taux $1/\tau_g$, la force visqueuse résistant à l'élongation s'écrit $\eta D^2/\tau_g$. Cette force compense le poids du filament $\rho g L D^2$. Le temps caractéristique de la chute doit être :

$$\tau_g = \frac{\eta}{\rho g L} \quad (6.4)$$

Ainsi, plus le filament est court ou plus le liquide utilisé est visqueux, plus la « chaînette » tombe lentement. On voit aussi que ce temps de chute est indépendant du diamètre. Pour l'expérience de la figure 6.2, son ordre de grandeur est 0,1 s.

Pour les liquides utilisés et différentes dimensions, nous avons mesuré le temps mis par le filament pour atteindre une hauteur $H = L/2$. Nous notons ce temps $\tau_{L/2}$. Nous représentons sur la figure 6.7 $\tau_{L/2}$ en fonction du temps caractéristique $\tau_g = \eta/\rho g L$, pour toutes nos expériences. On voit sur ce diagramme logarithmique que τ_g est bien un temps caractéristique de chute pour le filament, même si l'on peut remarquer une certaine dispersion des mesures. Celle-ci est en partie à l'influence du diamètre à temps court sur laquelle nous reviendrons. D'autre part, pour les

liquides les moins visqueux, le filament tombe avant que l'on n'ait fini d'écarter ses extrémités (ce temps d'ouverture est de l'ordre de 0,1 s). Nous avons choisi de définir l'instant initial comme celui où l'ouverture du dispositif est terminée, mais à ce moment, la hauteur initiale n'est pas nulle.

Ce problème de condition initiale est à l'origine des barres d'erreur sur les temps caractéristiques (comme $\tau_{L/2}$) que nous mesurons. Pour τ_g , l'incertitude provient de l'erreur sur la mesure de L , qui est due à la présence des ménisques. Cette erreur est de l'ordre de la longueur capillaire $a = \sqrt{\gamma/\rho g}$ (γ est la tension de surface du liquide), qui est aussi la taille caractéristique des ménisques. La longueur a vaut 1,5 mm pour de l'huile silicone et 2,2 mm pour le miel utilisé.

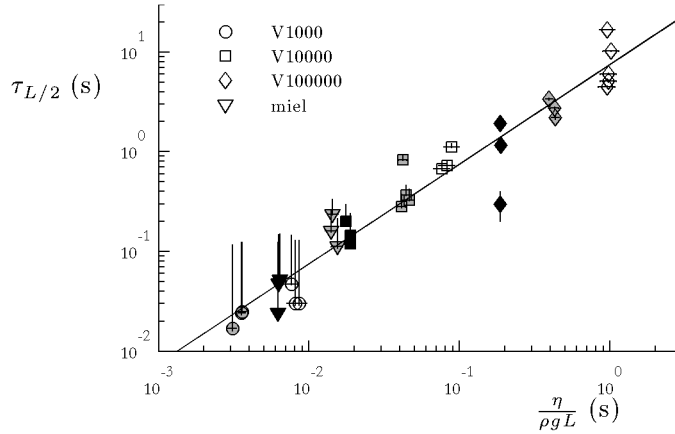


FIGURE 6.7 – Temps de chute $\tau_{L/2}$ (tel que $H(t = \tau_{L/2}) = L/2$) en fonction du temps caractéristique $\tau_g = \eta/\rho g L$, pour différentes expériences. Les différents symboles correspondent aux différents liquides utilisés (huiles V1000, V10000 et V100000, de viscosités respectives 1, 10 et 100 Pa.s, et miel de viscosité 5 Pa.s), les différentes couleurs aux différentes longueurs de filament (en blanc $L = 12$ mm, en gris $L = 25$ mm, en noir $L = 57$ mm). La droite montre la variation linéaire $\tau_{L/2} = 7,5 \tau_g$.

6.1.4 Critère de sélection

On peut maintenant se demander ce qui sélectionne la forme du filament visqueux. Dans le cas du U, le liquide va vers les extrémités à cause des effets capillaires. Dans le cas de la chaînette, il tombe : c'est la gravité qui l'emporte. Pour comparer ces deux effets (gravité et tension de surface), il faut comparer les dynamiques associées. On aura un U quand $\tau_\gamma < \tau_g$, c'est-à-dire :

$$\frac{\eta D}{\gamma} < \frac{\eta}{\rho g L}$$

si l'on a :

$$LD < a^2$$

Ainsi, quoique la forme du filament soit déterminée par sa dynamique, le critère qui en décide est purement statique. Cela est dû au fait que, dans ces mouvements freinés par la dissipation visqueuse, les temps caractéristiques sont toujours proportionnels à la viscosité η du liquide. Pour tous les liquides utilisés, nous avons vérifié la validité de ce critère. Pour chaque expérience, on fait varier la longueur L et le diamètre D du filament (que nous avons mesuré précisément à l'aide d'une deuxième caméra montée sur une loupe binoculaire), et on regarde si le fil visqueux forme un U ou une chaînette. Nous reportons sur la figure 6.8 nos données pour ce « diagramme de phases ». On voit sur ce diagramme que le critère $LD < 7a^2$ permet de bien séparer le régime « chaînette » du régime des U : les filaments courts ou minces forment des U, tandis que les longs ou épais engendrent des chaînettes.

Précisons ici qu'il n'y a en général pas d'ambiguïté entre les formes en U (qui cessent de tomber sur une hauteur H_0 plus petite que L) et les formes en chaînette (qui ne s'arrêtent pas de tomber). Le filament qui prend une forme de U n'augmente plus sa longueur, mais diminue son diamètre. L'importance relative de la tension de surface par rapport à la gravité augmente donc : il reste dans le régime où le drainage capillaire l'emporte. D'un autre côté, si $\Omega = LD^2$ est le volume de la chaînette, sa surface $LD \sim \sqrt{L\Omega}$ ne cessera de croître si bien qu'elle ne deviendra pas un U.

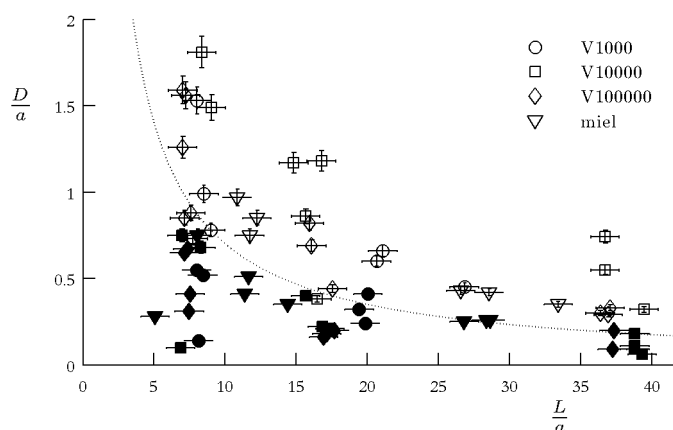


FIGURE 6.8 – Diagramme de phase (L/a , D/a) pour la forme des filaments : les symboles pleins représentent les expériences qui ont engendré des U, les symboles creux celles qui ont donné des chaînettes. La forme du symbole renvoie au liquide utilisé (huiles silicones et miel). La courbe en pointillés représente l'hyperbole d'équation $LD = 7a^2$.

Nous regardons ensuite plus en détail les différentes caractéristiques de ces deux objets, notamment leur dynamique.

6.2 Chaînette visqueuse

Intéressons-nous tout d'abord à la « chaînette visqueuse », pour laquelle la masse est répartie de façon homogène le long du filament.

6.2.1 Dynamique de chute

Pour une expérience comme celle de la figure 6.2(a), on mesure la variation de la hauteur H du filament en fonction du temps t . On en donne un exemple sur la figure 6.9 pour un filament d'huile de viscosité 10 Pa.s. On peut remarquer deux phases dans cette « trajectoire ». À « faible » déformation, c'est-à-dire $H < L$, la courbe $H(t)$ est très légèrement concave, tandis qu'à « grande » déformation ($H > L$), la courbe est convexe : le mouvement du bas du filament est accéléré. Nous nous attachons à comprendre ces deux phases, pour lesquelles la transition a lieu à $H \sim L$, pour $t = \tau_L \sim 0,6$ s, en comparant la force motrice due à la gravité et la dissipation due à l'étirement du filament.

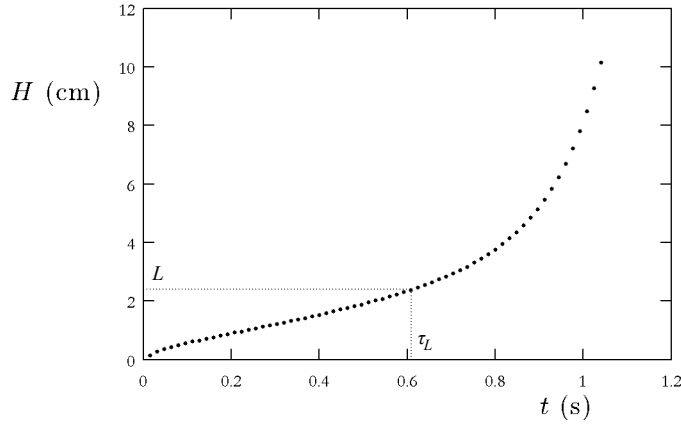


FIGURE 6.9 – Hauteur H du filament en fonction du temps t . Le liquide utilisé est de l'huile silicone de viscosité 10 Pa.s. Les dimensions initiales du filament sont $L = 2,4$ cm et $D = 2,3$ mm.

Temps courts ($H < L$)

Nous cherchons à exprimer le taux d'élongation $\dot{\epsilon} = \dot{S}/S$, où S désigne la longueur du filament, et L sa longueur initiale. Pour $H \ll L$, on a géométriquement $S^2 \approx L^2 + 4H^2$ (figure 6.10) donc $\dot{S} \sim H\dot{H}/S \sim H\dot{H}/L$. On peut donc écrire le taux d'élongation $\dot{\epsilon} \sim H\dot{H}/L^2$. On connaît alors la contrainte visqueuse tangentielle dans le filament $\sigma \sim \eta\dot{\epsilon}$, et donc la force visqueuse tangentielle σD^2 . La force visqueuse qui

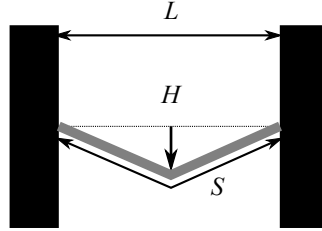


FIGURE 6.10 – Lorsque le filament tombe d’une hauteur H , il s’allonge : sa longueur passe de L à S , telle que $S^2 \approx L^2 + 4H^2$.

résiste à la chute du filament est alors la projection verticale de la force tangentielle : $F_\nu \sim \sigma D^2 H/L \sim \eta D^2 H^2 \dot{H}/L^3$.

Cette force verticale compense le poids du filament $F_g \sim \rho g D^2 L$. L’équilibre de forces $F_g = F_\nu$ donne donc :

$$\rho g D^2 L \sim \eta D^2 \frac{H^2 \dot{H}}{L^3} \quad (6.5)$$

Cette équation s’intègre pour donner la loi de variation de la hauteur :

$$H^3 \sim \frac{\rho g L^4}{\eta} t \quad (6.6)$$

On voit apparaître le temps caractéristique de chute τ_g défini à l’équation (6.4). L’équation de chute se réécrit alors :

$$H \sim L \left(\frac{t}{\tau_g} \right)^{1/3}$$

Pour comparer cette prédiction aux expériences, nous traçons sur la figure 6.11 $H(t)$ en échelle logarithmique pour l’expérience de la figure 6.9. On constate que H semble varier comme une loi de puissance t^β , mais avec un exposant $\beta \approx 0,7$ plus élevé qu’attendu ($\beta = 1/3$). Suivant les expériences, β est variable et est compris entre 0,25 et 0,7, mais, comme nous l’avons souligné, la condition initiale n’est pas toujours bien définie avec ce système. Plusieurs phénomènes peuvent par ailleurs expliquer cet écart à la loi (6.6).

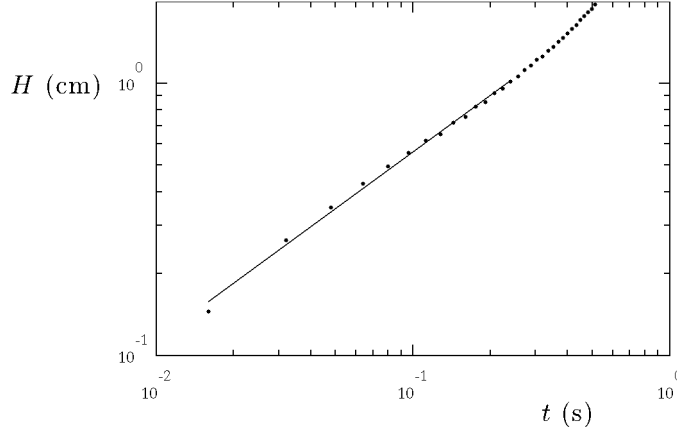


FIGURE 6.11 – Hauteur H du filament en fonction du temps t , en échelle logarithmique, pour l'expérience de la figure 6.9. Le liquide utilisé est de l'huile silicone de viscosité 10 Pa.s. Les dimensions initiales du filament sont $L = 2,4$ cm et $D = 2,3$ mm. La droite correspond à une variation en $t^{0,7}$.

- À très faible déformation, la dissipation est principalement due à la courbure du filament et non à son étirement (chapitre 4). Teichman et Mahadevan ont alors montré que le filament tombe à vitesse constante : $H \sim \rho g L^4 t / \eta D^2$. Toutefois, ce régime correspond aux temps très courts, tels que $H < D$, que nous ne voyons que très rarement dans nos expériences.
- Aux premiers instants, Brochard-Wyart et de Gennes, ainsi que Koulakis *et al.* ont montré qu'il fallait tenir compte de l'inertie du filament. On décrit alors la déformation comme une chute libre $H \sim gt^2$, tant que $t < t_{\text{inertie}} = \rho L^2 / \eta$. Pour l'expérience de la figure 6.9, t_{inertie} vaut 0,1 s, comparable à τ_g .
- Dans les expériences, nous constatons une dépendance du temps de chute $\tau_{L/2}$ avec le diamètre du filament : $\tau_{L/2}$ diminue avec D (figure 6.12), tandis que les différents scénarios de chute présentés sont soit indépendant de D (régime d'étirement ou de chute libre), soit prédisent un temps de chute qui augmente avec D (régime dominé par la courbure). Cette tendance peut être expliquée par l'influence de la tension de surface, qui retient le filament. La force capillaire qui s'oppose au poids va s'écrire γD , que multiplie un facteur géométrique dépendant de H/L . Son importance relative par rapport au poids dépend donc du rapport $\gamma D / \rho g L D^2 = a^2 / LD$: quand D diminue, a^2 / LD augmente et les effets capillaires ralentissent la chute.

Temps longs ($H > L$)

Intéressons-nous maintenant au régime dans lequel le filament est très déformé, c'est-à-dire $H > L$. La dissipation est toujours donnée par l'extension du filament.

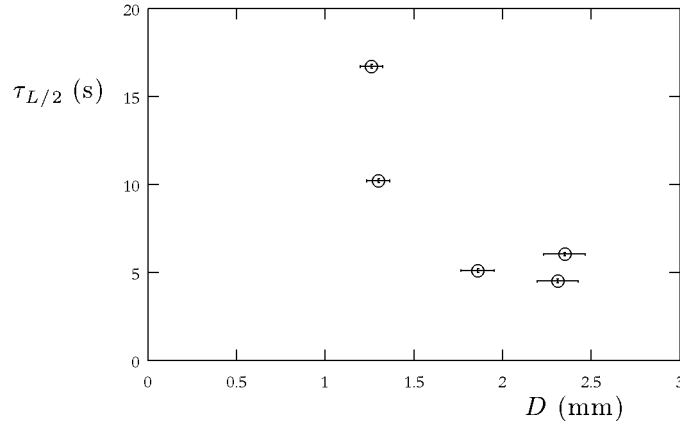


FIGURE 6.12 – Temps de chute $\tau_{L/2}$ de chaînettes visqueuses en fonction du diamètre D , pour une longueur $L = 1,2$ cm et $\eta = 100$ Pa.s.

Il est alors très allongé dans la direction verticale et on le modélise par un simple cylindre vertical, de hauteur H et de diamètre d (figure 6.13). La conservation du volume nous donne par ailleurs $LD^2 = Hd^2$.

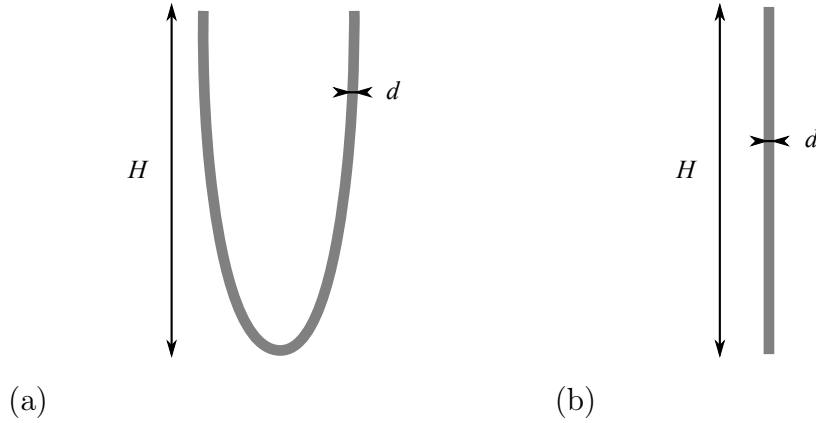


FIGURE 6.13 – Grandes déformations : on modélise le filament très allongé (a) par un simple cylindre de hauteur H (b).

Dans ce cas, le taux d'élongation s'écrit $\dot{H}/H$ et donc la contrainte visqueuse $\eta\dot{H}/H$. La force visqueuse résistante s'écrit alors $\eta d^2 \dot{H}/H$. Cette force s'oppose au poids du filament $\rho g L D^2 = \rho g H d^2$. L'équilibre entre les deux forces donne l'équation qui donne la dynamique du filament :

$$\eta \dot{H} \sim \rho g H^2$$

Cette équation s'intègre avec pour conditions initiales $H(t = \tau_L) = L$ qui correspond au début du régime des « grandes déformations ». On obtient :

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{H} = \frac{\rho g(t - \tau_L)}{\eta}$$

qui se réécrit :

$$\frac{L}{H} = 1 + \frac{\tau_L}{\tau_g} - \frac{t}{\tau_g}$$

ou encore :

$$H \sim \frac{L}{1 - (t - \tau_L)/\tau_g} \quad (6.7)$$

Pour $H \gg L$ et $t \gg \tau_L \sim \tau_g$, H varie comme $L\tau_g/t$. On remarque ici que les deux régimes ($H < L$ et $H > L$) ont d'ailleurs le même temps caractéristique τ_g .

Pour vérifier la prédiction de l'équation 6.7, nous traçons figure 6.14 L/H en fonction du temps adimensionné t/τ_g , pour l'expérience de la figure 6.9. On voit que, comme attendu, L/H décroît linéairement avec t/τ_g . On peut par ailleurs remarquer que cette décroissance linéaire fonctionne bien à partir de $H \sim L$.

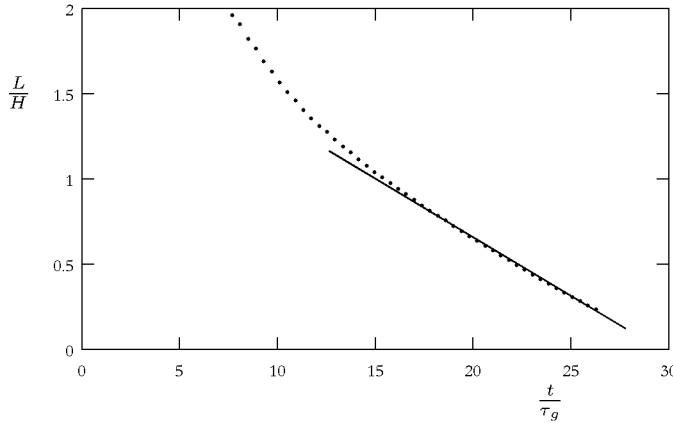


FIGURE 6.14 – L/H en fonction du temps adimensionné t/τ_g . Le liquide utilisé est de l'huile silicone de viscosité 10 Pa.s. Les dimensions initiales du filament sont $L = 24$ mm et $D = 2,3$ mm.

6.2.2 Évolution de la forme

Le filament prend une forme de chaînette si la répartition de masse est homogène. En réalité, si l'on regarde attentivement la chaînette à temps long ($H > L$), ce n'est plus le cas. À l'inverse du U, le filament est plus épais au centre que sur les bords (ce que l'on peut voir sur la figure 6.15(a)), ce qui a pour conséquence une forme plus

« pointue » que la chaînette, visible sur la figure 6.15(b), sur laquelle on a superposé forme du filament et profil de la chaînette de mêmes dimensions.

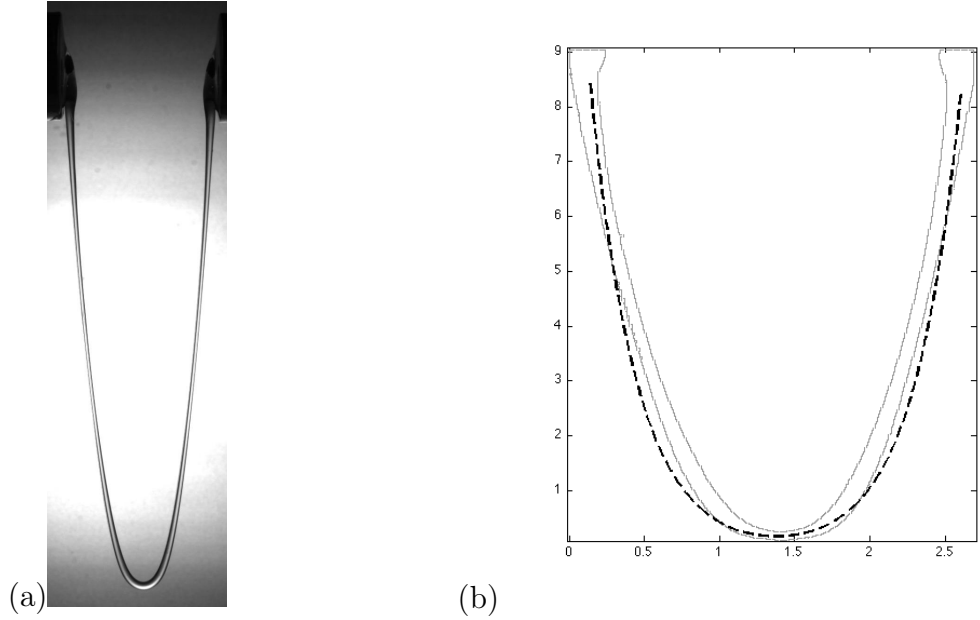


FIGURE 6.15 – (a) « Chaînette » visqueuse d’huile silicone ($\eta = 10$ Pa.s, $L = 24$ mm et $D = 2,3$ mm). (b) On superpose à la forme de ce filament visqueux (en gris) la forme d’une chaînette (pointillés noirs) ayant les mêmes dimensions (les unités des axes sont en cm).

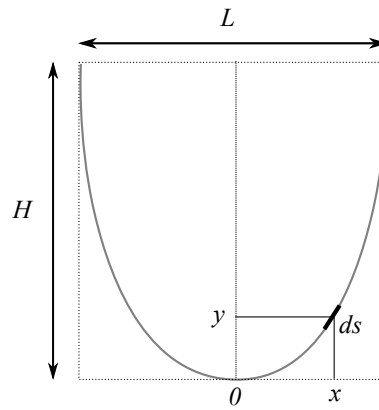


FIGURE 6.16 – Paramètres de la « chaînette visqueuse » : la forme de la parabole est donnée par la hauteur y en fonction de l’abscisse x , repérées à partir du bas du filament.

Cette variation de masse est due à la géométrie du filament et à son mouvement. En effet, supposons que le filament ait une forme parabolique (c’est le cas

d'une chaînette que l'on regarde près de son minimum). Repérée à partir du bas du filament (figure 6.16), la hauteur du filament à l'abscisse x s'écrit $y = H(2x/L)^2$. Considérons la portion de chaîne d'abscisse x et de largeur dx . La longueur de chaîne correspondante est ds , telle que $ds^2 = dx^2 + dy^2$. On a donc :

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{8xH}{L^2}\right)^2}$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve

$$\dot{ds} = dx \frac{\left(\frac{8xH}{L^2}\right) \left(\frac{8x\dot{H}}{L^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{8xH}{L^2}\right)^2}}$$

On peut alors écrire le taux d'élongation $\dot{\epsilon} = \dot{ds}/ds$ en fonction de l'abscisse x :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{H}}{H} \frac{\left(\frac{8xH}{L^2}\right)^2}{1 + \left(\frac{8xH}{L^2}\right)^2}$$

On retrouve avec cette expression les deux régimes limites que nous avons cités : les faibles déformations ($H < L$), pour lesquelles $\dot{\epsilon} \sim \dot{H}H/L^2$, et les grandes déformations ($H > L$) pour lesquelles $\dot{\epsilon} \sim \dot{H}/H$. On voit aussi que l'élongation est plus importante sur les bords ($x = L/2$) qu'au milieu ($x = 0$), où elle est nulle. Par conservation de la masse, la variation d'épaisseur du diamètre $\dot{d}/d$ est proportionnelle à $\dot{\epsilon}$, le filament s'amincit donc sur les bords.

6.3 Filaments en U

6.3.1 Chute

Les filaments qui donnent des formes de U sont caractérisés par une dynamique de chute $H(t)$ différente des chaînettes, dont on peut voir un exemple sur la figure 6.17. Après quelques instants de chute, le filament est ralenti, avant d'attendre une hauteur limite, que nous notons H_0 . En effet, la capillarité provoque un écoulement presque horizontal, qui va empêcher le filament de tomber.

Hauteur finale

Le filament atteint une hauteur d'équilibre car il est retenu par la tension de surface. H_0 est donc déterminée par un équilibre entre poids et capillarité. Le poids du filament est $\rho g L D^2$. La force capillaire parallèle au filament s'écrit γD (figure 6.18).

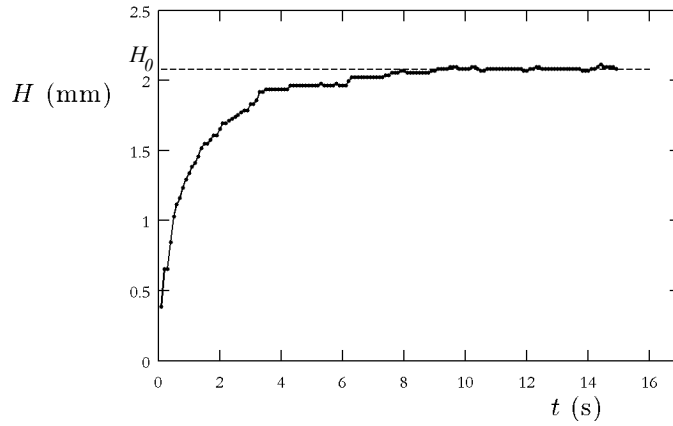


FIGURE 6.17 – Hauteur H en fonction du temps t , pour un filament en U d’huile silicone de viscosité 100 Pa.s. Les dimensions initiales du filament sont $D = 0,5$ mm et $L = 12$ mm.

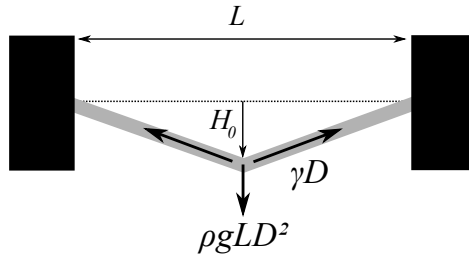


FIGURE 6.18 – La gravité fait tomber le filament mais il est retenu par la force capillaire : on atteint donc une hauteur d’équilibre H_0 .

Pour écrire l’équilibre du filament, il faut projeter cette force sur la verticale. Le liquide est donc retenu par une force $\gamma DH/L$. L’équilibre des deux forces verticales permet d’obtenir une prédiction pour la hauteur finale H_0 :

$$H_0 \sim \frac{L^2 D}{a^2} \quad (6.8)$$

Pour un U, $L \sim 1$ cm et $D \sim 0,1$ mm, donc l’ordre de grandeur de $L^2 D/a^2$ est 1 cm, du même ordre que la hauteur H_0 visible dans les expériences (figures 6.2(b) et 6.17). Par ailleurs, plus le filament est long ou épais, plus la hauteur d’équilibre devrait être grande. Pour toutes les expériences qui ont donné des formes de U, nous avons mesuré la hauteur finale H_0 . Nous vérifions bien sur la figure 6.19 que H_0 est proportionnelle à la distance $L^2 D/a^2$.

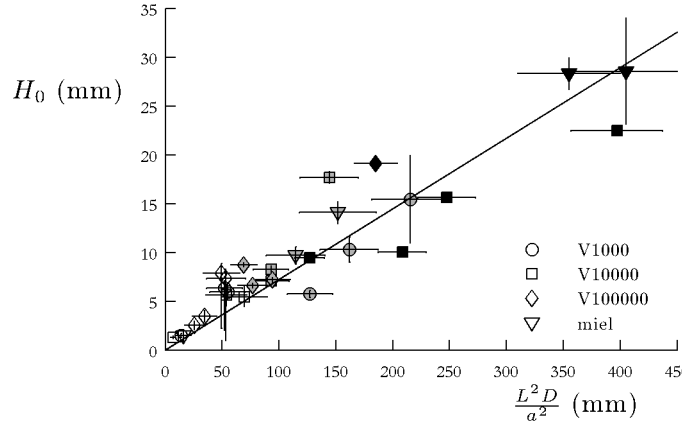


FIGURE 6.19 – Hauteur finale H_0 du U en fonction de la distance $L^2 D / a^2$ pour différents liquides. Les symboles blancs correspondent à $L = 12$ mm, les gris à $L = 25$ mm, les noirs à $L = 57$ mm.

On peut d'ailleurs remarquer que cette hauteur d'équilibre permet de retrouver le critère qui détermine la forme du filament. Les U sont les filaments qui s'arrêtent sur une hauteur H_0 plus petite que L . Le critère s'écrit donc $L^2 D / a^2 < L$ soit $LD < a^2$. Plus généralement, les chaînettes sont les filaments qui tombent, c'est-à-dire ceux pour lesquels le poids $\rho g L D^2$ est plus grand que la tension de surface qui retient le filament γD . On a donc une chaînette quand $LD > a^2$.

Temps courts

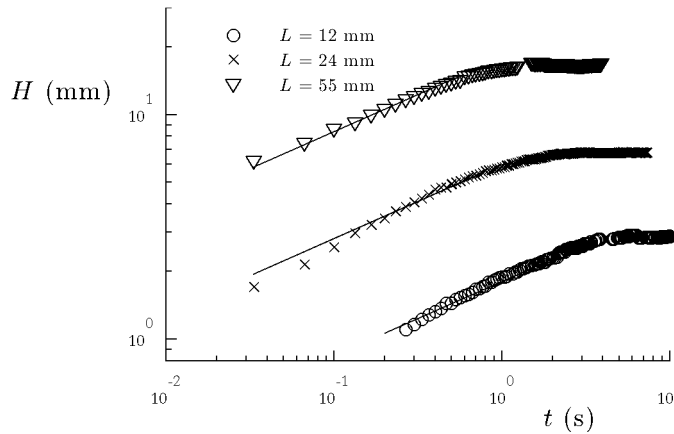


FIGURE 6.20 – Hauteur H en fonction du temps t pour des filaments en U de différentes longueurs L , en diagramme logarithmique. Les droites représentent des variations de H en $t^{1/3}$. La viscosité du liquide vaut $\eta = 100$ Pa.s.

À temps très court, le drainage n'a pas encore modifié la répartition de masse et donc la forme du fil visqueux. La loi de chute pour la chaînette (équation (6.6)) doit donc rester vraie pour les filaments en U aux premiers instants. On constate sur les expériences présentées sur la figure 6.20 que la variation $H(t)$ est compatible avec une loi en $t^{1/3}$: pour toutes nos expériences, on a H proportionnel à t^β , avec β compris entre $1/3$ et $1/2$.

Par ailleurs, nous mesurons le temps $\tau_{L/10}$ au bout duquel le filament est tombé d'une hauteur $L/10$. Nous montrons les résultats de nos mesures sur la figure 6.21. Les mesures sont dispersées mais compatibles avec la prédiction de l'équation (6.6) : le temps de chute $\tau_{L/10}$ varie comme le temps caractéristique $\tau_g = \eta/\rho g L$. Ceci confirme que la dynamique initiale de chute du filament en U est semblable à celle de la chaînette.

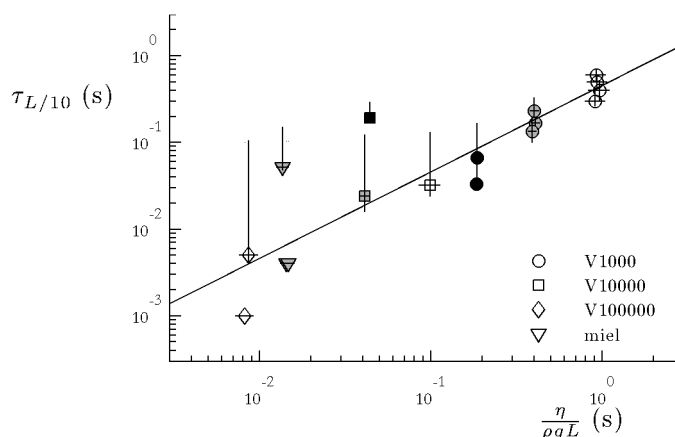


FIGURE 6.21 – Temps de chute $\tau_{L/10}$ de filaments en U, en fonction du temps caractéristique $\tau_g = \eta/\rho g L$, pour différents liquides. Les symboles blancs correspondent à $L = 12$ mm, les gris à $L = 25$ mm, les noirs à $L = 57$ mm. La droite correspond à une variation $\tau_{L/10} = 0,46 \tau_g$.

Temps longs

À temps long, H se rapproche de la hauteur finale H_0 et la tension de surface se met à jouer un rôle prépondérant. Plus précisément, on s'intéresse à la variation de la différence de hauteur $h = H_0 - H$ au cours du temps. On voit sur le diagramme semi-logarithmique de la figure 6.22 que h décroît exponentiellement avec le temps : $h = h_0 \exp(-t/\tau_h)$. Cette relaxation exponentielle est caractéristique d'une grandeur qui approche l'équilibre avec une dissipation visqueuse — on peut par exemple penser à la dynamique de la montée capillaire (loi de Washburn [9]) près de la hauteur d'équilibre de Jurin.

Supposons que la forme de la dissipation visqueuse soit inchangée par rapport

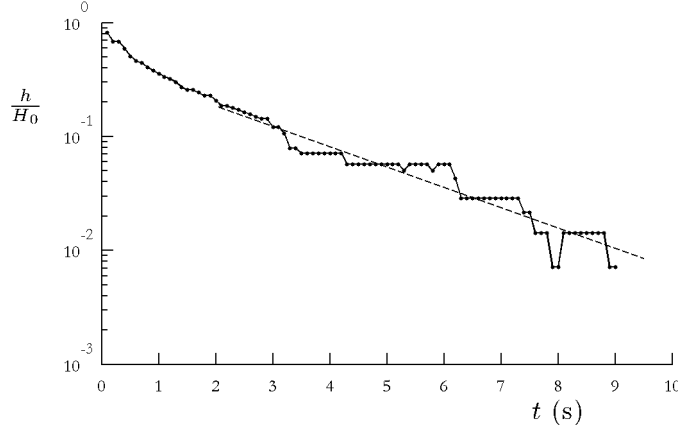


FIGURE 6.22 – h/H_0 en fonction de t (diagramme semi-logarithmique), pour un filament d’huile silicone de viscosité 100 Pa.s. Les dimensions initiales du filament sont $D = 0,5$ mm et $L = 12$ mm. La droite en pointillés correspond à un ajustement $\ln(h/h_0) = -t/\tau_h$ avec $\tau_h = 2,4$ s.

à ce que nous avons dit précédemment. Il faut alors modifier l’équation (6.5) pour prendre en compte la tension de surface, qui retient le filament :

$$\rho g D^2 L - \gamma D \frac{H}{L} \sim \eta D^2 H^2 \frac{\dot{H}}{L^3} \quad (6.9)$$

qui donne, en introduisant $h = H_0 - H$ et $H_0 \sim L^2 D/a^2$ (équation (6.8)) :

$$\frac{\dot{h}}{h} \sim -\frac{\gamma}{\eta} \frac{a^4}{L^2 D^3} \sim -\frac{1}{\tau_h} \quad (6.10)$$

On attend ainsi une relaxation exponentielle de h , avec un temps caractéristique $\tau_h = \eta L^2 D^3 / \gamma a^4$. Pour le filament de la figure 6.22, on évalue $\tau_h \approx 16$ s, un peu plus élevé que la valeur expérimentale $\tau_h \approx 2,4$ s. En revanche, nos mesures de τ_h en fonction de L et D sont trop dispersées pour permettre de conclure quant à la validité de la forme de dissipation choisie pour l’équation (6.9).

6.3.2 Amincissement

Nous avons rappelé précédemment qu’un cylindre de liquide est instable du point de vue de la capillarité. Le liquide va donc s’écouler vers les bords du filament. Sa dynamique d’amincissement s’écrit (équation (6.2)) :

$$d \approx D - \frac{\gamma}{\eta} t$$

Le diamètre d diminue à une vitesse constante γ/η . Cette loi est-elle modifiée dans les filaments en forme de U ? Pour l'expérience de la figure 6.17, nous montrons sur la figure 6.23 le diamètre d du filament en fonction du temps t . On voit que pendant une grande partie de l'expérience le diamètre du filament décroît avec une vitesse constante, de l'ordre de $30 \mu\text{m/s}$.

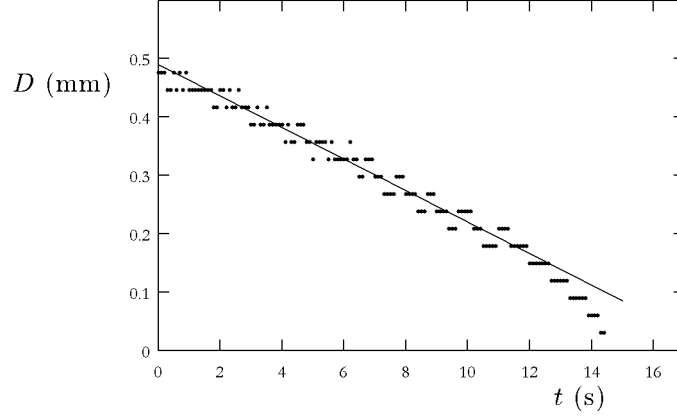


FIGURE 6.23 – Diamètre d en fonction du temps t , au centre d'un filament en U d'huile silicone, de viscosité 100 Pa.s. Les dimensions initiales du filament sont $D = 0,5 \text{ mm}$ et $L = 12 \text{ mm}$. La droite correspond à une décroissance linéaire à la vitesse de $27 \mu\text{m/s}$.

Logiquement, la vitesse d'amincissement $|\dot{d}|$ décroît lorsque la viscosité η du liquide augmente : $|\dot{d}|$ est de l'ordre de quelques centaines de microns par seconde pour $\eta = 10 \text{ Pa.s}$, et de quelques dizaines de microns par seconde pour $\eta = 100 \text{ Pa.s}$. Par ailleurs, nous mesurons que $|\dot{d}|$ est de l'ordre d'un dixième de γ/η — théoriquement, on attendrait $|\dot{d}| = \gamma/3\eta$ [10]. On peut proposer deux arguments pour expliquer le ralentissement du drainage par la gravité.

Imaginons que le filament ait atteint la hauteur finale H_0 . La différence de pression à l'origine de l'écoulement est alors diminuée par un terme de pression hydrostatique $\Delta P = \gamma/D - \rho g H_0$. En utilisant l'expression de H_0 , la vitesse de drainage de l'équation (6.1) devient alors

$$|\dot{d}| \sim \frac{\gamma}{\eta} \left(1 - \frac{L^2 D^2}{a^4} \right)$$

Quand LD devient proche de a^2 , on voit que la vitesse de drainage diminue. On peut aussi remarquer que, quand LD augmente, l'influence de la gravité sur la dynamique devient du même ordre que la capillarité. Or, lorsque la chaînette tombe, nous avons vu qu'elle s'amincit plus sur ses bords qu'en son centre. La chute change la répartition de masse en sens inverse du drainage capillaire. Plus la chute est

importante, plus le comportement global d'amincissement du filament au centre va ralentir. Ainsi, de façon qualitative, le drainage ralentit à cause de l'influence de la gravité. Nos quelques mesures de $\dot{d}$ sont cependant trop dispersées pour décrire de façon quantitative cet effet.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les déformations de filaments visqueux horizontaux. Selon les dimensions initiales du filament (longueur L et diamètre D), on observe deux comportements très différents : dans un cas, les filaments prennent une forme parabolique qui s'allonge au cours du temps (on parle alors de « chaînette visqueuse »), et ils subissent des déformations importantes (avec des hauteurs de chute plus grandes que la longueur initiale du filament). Dans l'autre cas, les filaments atteignent une hauteur limite, et prennent une forme très différente, proche du U. Ces formes sont déterminées par la répartition de masse le long du filament : les chaînettes ont une masse répartie de façon homogène tandis que, pour les U, la masse est concentrée sur les bords. Le mécanisme qui amincit le filament en son milieu est d'origine capillaire : la pression est plus importante dans le cylindre visqueux qu'aux extrémités, ce qui provoque un drainage du liquide vers les bords. La forme prise par le filament est alors déterminée par une compétition entre la dynamique de drainage (de temps caractéristique $\eta D/\gamma$) et la dynamique de chute (de temps caractéristique $\eta/\rho g L$). La comparaison de ces deux temps permet d'obtenir un critère pour déterminer la forme du filament : on obtiendra une chaînette si $LD > a^2$, un U dans le cas contraire.

De façon surprenante, ce critère ne dépend pas de la viscosité car les deux dynamiques (drainage et chute) ont la même dépendance en η . Cela est dû au fait que les phénomènes que nous étudions ici sont dominés par la dissipation visqueuse. Par ailleurs, en l'absence de surfaces rigides, les écoulements dans le filament sont élongationnels. Cette remarque nous amène naturellement à nous demander ce qu'il advient de ces phénomènes (formes et dynamique) lorsque l'on prend des liquides présentant des viscosités élongationnelles anormales, au lieu des liquides newtoniens étudiés ici. C'est ce qui nous intéressera au chapitre suivant.

Bibliographie

- [1] F. T. Trouton. On the coefficient of viscous traction and its relation to that of viscosity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 77 :426–440, 1906. 86, 118
- [2] J. Teichman and L. Mahadevan. The viscous catenary. *Journal of Fluid Mechanics*, 478 :71–80, 2003. 118, 155

- [3] J. Bernoulli, G.W. Leibniz, and Ch. Huygens. Solutiones problematis a Jacobo Bernoulli. *Acta Eruditorum*, page 273, 1691. 118
- [4] F. Brochard-Wyart and P.-G. de Gennes. The viscous catenary : A poor man's approach. *Europhysics Letters*, 80(3) :36001, 2007. 120, 121, 151, 156
- [5] J. P. Koulakis, C. D. Matescu, F. Brochard-Wyart, P.-G. de Gennes, and E. Guyon. The viscous catenary revisited : experiments and theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 609 :87–110, 2008. 120
- [6] D. Chak, M. Galbraith, and A. Kilian. CatenaryCAD : An architectural design tool. MIT Project Report. 121
- [7] J. Plateau. *Statique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-Villars, Paris, 1873. 121, 161
- [8] J.W.S. Rayleigh. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. *Phil. Mag.*, 34 :145, 1892. 121
- [9] E. W. Washburn. The dynamics of capillary flow. *Phys. Rev.*, 17(3) :273–283, 1921. 135
- [10] A.V. Bazilevsky, V.M. Entov, and A.N. Rozhkov. Liquid filament microrheometer and some of its applications. *Proceedings of the Third European Rheology Conference*, pages 41–43, 1990. 137, 146

CHAPITRE 7

Chute de filaments viscoélastiques

Sommaire

7.1	De nouvelles formes	142
7.2	Solutions de polymère	142
7.2.1	Rhéologie en cisaillement	143
7.2.2	Rhéologie extensionnelle	146
7.2.3	Comparaison des solutions	148
7.3	Filaments suspendus	149
7.3.1	Tomber ou ne pas tomber ?	149
7.3.2	Évolution des filaments suspendus : chute et drainage . .	150
7.4	Chaînettes visco-élastiques	152
7.4.1	Dynamique de chute	152
7.4.2	Formes	156
7.5	Des ondes sur des filaments liquides	161
	Bibliographie	166

Ce travail a en grande partie été réalisé dans l'équipe de L. Mahadevan (université d'Harvard), en collaboration avec Etienne Reyssat. Une des solutions utilisées (PS) a été fournie et caractérisée par le laboratoire de G. McKinley (MIT). Les mesures de rhéologie sur l'autre solution (POE) ont été effectuées dans le laboratoire de D. Weitz (université d'Harvard) grâce à l'aide de Paul Menut.

Nous reprenons dans ce chapitre l'expérience du chapitre précédent — sur l'évolution d'un filament liquide initialement horizontal dans le champ de la gravité —

avec des liquides non-newtoniens. Ce sont des solutions de polymère à très longue chaîne, à la fois très visqueuses (sans quoi nous ne pourrions pas former des filaments : ils se déstabiliseraient avant de tomber) et très élastiques. Notre travail avec ce type de liquide a été motivé par la constatation suivante : les phénomènes rencontrés avec des filaments de liquide visqueux étaient souvent liés au caractère élongationnel des écoulements, et donc à la viscosité élongationnelle. En choisissant des liquides qui ont une viscosité élongationnelle anormale, nous espérons ainsi modifier les écoulements et donc les caractéristiques observées dans l'expérience du chapitre 6.

7.1 De nouvelles formes

Nous répétons l'expérience du chapitre 6 en utilisant une solution aqueuse de polyoxyéthylène (POE) à très longue chaîne — nous détaillons un peu plus loin les caractéristiques de cette solution. La forme du filament n'est alors plus une chaînette, comme ce que l'on observe avec un liquide visqueux (figure 7.1(a)), mais devient en tombant semblable à un V (figure 7.1(b)). Comme au chapitre précédent, cette forme s'explique par la répartition de masse le long du filament : ici, la masse est concentrée au centre du filament. Le V est d'ailleurs la forme que prend un fil au milieu duquel on accroche un poids. Cela est dû au fait que, sur le filament de solution polymérique, le liquide se déplace vers le centre du filament, comme le suggère le déplacement des bulles présentes dans le liquide, sur la figure 7.1(b).

Dans ce chapitre, nous souhaiterions comprendre l'origine de cette forme, en étudiant les caractéristiques des solutions de polymères utilisées et leur influence sur le comportement de ces filaments : les filaments tombent-ils dans tous les cas ? Avec quelle dynamique ? Comment comprendre la concentration de masse au centre observée sur la figure 7.1(b) ?

À mesure que le filament de la figure 7.1(b) se déforme sous l'effet de son propre poids, il se forme une sorte de goutte tenue par deux fils très fins. À cause de la gravité, cette goutte s'allonge et se déforme, et brutalement, les deux branches du V coalescent. On obtient alors un filament en forme de Y (figure 7.1(c)). Nous étudions plus spécifiquement cette coalescence très rapide au dernier paragraphe.

7.2 Solutions de polymère

Nous avons utilisé deux types de solutions. La première (fournie par Johannes Soulages et Gareth McKinley) est constituée de longues chaînes de polystyrène (PS) diluées dans des oligostyrènes (chaînes beaucoup plus courtes du même monomère). Une deuxième série d'expériences a été effectuée avec des solutions aqueuses de

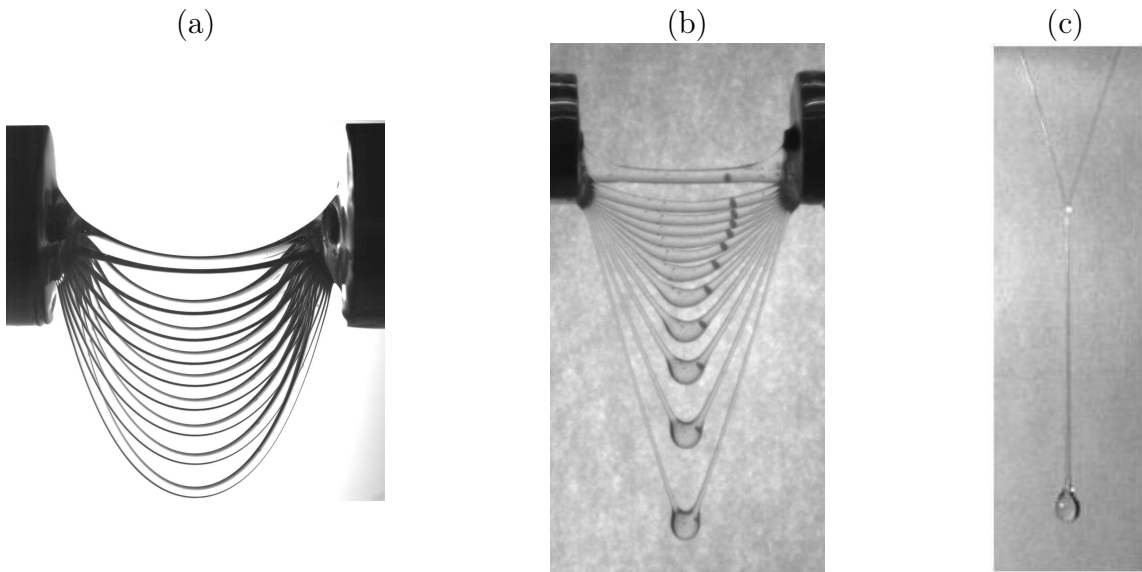


FIGURE 7.1 – Superposition d’images de filaments dans le champ de la gravité. (a) Le liquide est de l’huile silicone de viscosité 10 Pa.s. La longueur initiale du filament est $L = 25$ mm et son diamètre $D = 1,75$ mm. L’intervalle de temps entre deux images consécutives est 0,08 s. (b) Le liquide est une solution de polyoxyéthylène (POE). Les dimensions initiales sont $L = 3$ cm et $D = 2$ mm. L’intervalle entre deux images est 1 s. Les bulles présentes dans le liquide permettent de voir que celui-ci se déplace vers le centre du filament. (c) Au bout d’un certain temps, les deux branches du filament de POE coalescent : on observe alors une forme de Y.

polyoxyéthylène (POE).

La masse volumique de la solution de PS est $\rho = 1025$ kg/m³, sa tension de surface est $\gamma = 38$ mN/m, si bien que la longueur capillaire vaut $a = 1,9$ mm. Pour les solutions de POE, nous avons mesuré $\rho = 1000$ kg/m³, $\gamma \approx 65$ mN/m et donc $a = 2,6$ mm.

7.2.1 Rhéologie en cisaillement

Solution de polystyrène

Les mesures de rhéologie en cisaillement (oscillant ou constant) pour ce fluide, effectuées au laboratoire de G. McKinley [1], sont présentées sur la figure 7.2. Sur ce diagramme, on voit que cette solution est quasiment un fluide de Boger, c’est-à-dire un liquide élastique de viscosité indépendante du cisaillement. La viscosité de cette solution est $\eta_0 = 25$ Pa.s, du même ordre de grandeur que celle des huiles silicones utilisées au chapitre précédent. Cette viscosité est un peu plus élevée que celle du solvant, qui vaut $\eta_s = 22$ Pa.s. Cette solution est en effet assez diluée (la concentration en polymères est 0,025 % en masse, le tiers de la concentration pour laquelle on considère que les chaînes sont enchevêtrées). Pour quantifier l’importance

des effets élastiques, il faut examiner la rhéologie du liquide en cisaillement oscillant (figure 7.2), ce qui permet d'évaluer un temps typique de relaxation dans ce système, qui vaut ici $\tau = 3,9$ s.

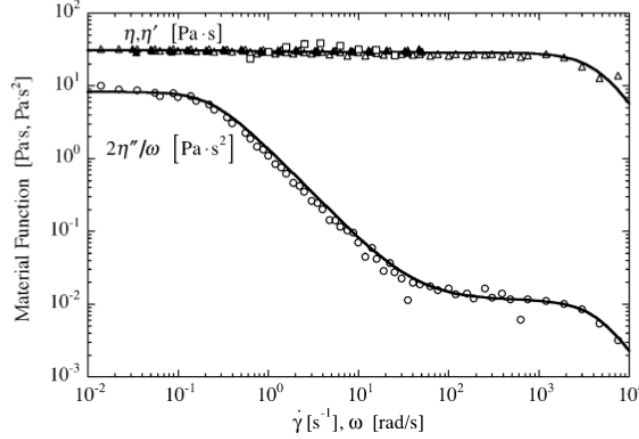


FIGURE 7.2 – Rhéologie en cisaillement de la solution de PS : en haut (mesures en cisaillement stationnaire et oscillant), on voit que la viscosité est pratiquement constante (fluide de Boger) ; elle vaut environ 25 Pa.s. En dessous, on a mesuré la composante élastique lors d'expériences en cisaillement oscillant. On voit que $\eta''/\omega = G'/\omega^2$ commence à décroître pour $\omega \sim 0,2$ s⁻¹. On en déduit une première évaluation du temps de relaxation $\tau \sim 1/\omega \sim 5$ s. Un ajustement de ces données avec un modèle plus complexe (modèle de Zimm avec spectre de temps de relaxation, présenté dans [2]) permet de trouver le plus long temps de relaxation $\tau = 3,9$ s (figure tirée de [1]).

Solution de polyoxyéthylène

Pour atteindre les viscosités nécessaires à la formation de filaments liquides, nous avons utilisé des solutions très concentrées (5 ou 10 g/L) de chaînes très longues (poids moléculaire de $8 \cdot 10^6$ g/mol, ce qui correspond pour le POE à des chaînes de 200 000 monomères). Ces solutions sont loin d'être idéales, et les chaînes sont très enchevêtrées. À titre de comparaison, pour une masse moléculaire de 10^6 g/mol, la concentration critique de recouvrement des chaînes est de l'ordre de 2 g/L [3].

Nous avons caractérisé la rhéologie en cisaillement d'une solution concentrée à 10 g/L dans une géométrie cône-plan. La première série de mesures est faite à cisaillement constant, pour différents taux de cisaillement. Les résultats sont présentés sur la figure 7.3. On y trace la viscosité η et la contrainte σ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\epsilon}$.

Dans cette gamme de taux de cisaillement, cette solution est :

- fortement rhéofluidifiante (figure 7.3 (b)). En particulier, nous n'avons pas pu mesurer de véritable plateau de viscosité à bas taux de cisaillement, comme on est capable de le faire pour d'autres solutions de polymère, ce qui nous em-

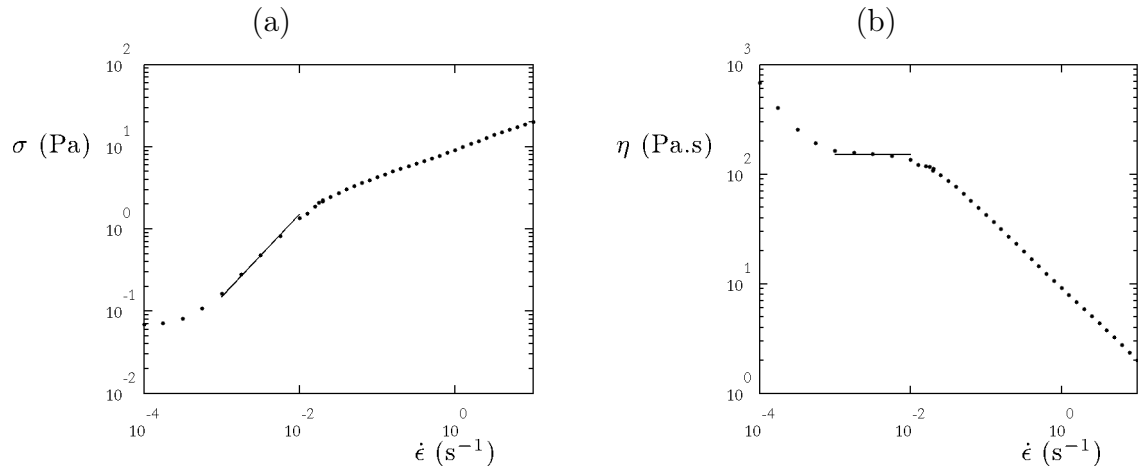


FIGURE 7.3 – Rhéologie en cisaillement constant d'une solution de POE : (a) contrainte σ et (b) viscosité η en fonction du taux de cisaillement $\dot{\epsilon}$. Les droites symbolisent un comportement visqueux (avec $\eta \approx 150$ Pa.s) pour $\dot{\epsilon}$ compris entre 10^{-3} et 10^{-2} s $^{-1}$.

pêche de définir une viscosité de référence « quasi-statique » pour ce fluide. On observe cependant une viscosité presque constante d'environ 150 Pa.s quand $\dot{\epsilon}$ est compris entre 10^{-3} et 10^{-2} s $^{-1}$.

- un fluide à seuil (figure 7.3 (a)). Le fluide ne coule que pour $\sigma > 7 \cdot 10^{-2}$ Pa.

Nous avons aussi caractérisé cette solution en cisaillement oscillant : pour une déformation complexe $\epsilon^* = \epsilon_0 \exp(i\omega t)$, on mesure la contrainte complexe σ^* , qui est reliée à la déformation par le module complexe $G^* = \sigma^*/\epsilon^*$. G^* se décompose en une partie réelle G' , appelée module élastique, en phase avec la déformation, qui correspond à un comportement élastique, et une partie imaginaire G'' , appelée module de perte, en quadrature de phase par rapport à la déformation et qui correspond à un comportement visqueux. Nous reportons sur la figure 7.4 les modules G' et G'' en fonction de la fréquence de sollicitation f . Pour un fluide viscoélastique de Maxwell, caractérisé par son module de Young E et sa viscosité η (le temps de relaxation est alors $\tau = \eta/E$), les modules G' et G'' s'écrivent [4] :

$$G' = E \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad G'' = E \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

À faible fréquence de sollicitation ($\omega\tau \ll 1$), on a $G'' \approx \eta\omega \gg G'$: le fluide est un liquide visqueux. À fréquence élevée, on a au contraire $G' \approx E \gg G''$: c'est un comportement de solide élastique. Pour $\omega\tau = 1$, on a enfin $G' = G'' = E/2$. Une façon de définir le temps de relaxation d'une solution viscoélastique est donc de prendre l'inverse de la pulsation ω pour laquelle on a égalité des modules élastique et de perte. D'après nos mesures, $G' \approx G''$ pour $f \approx 10^{-2}$ Hz, ce qui correspond à un temps caractéristique $1/2\pi f$ d'environ 10 s.

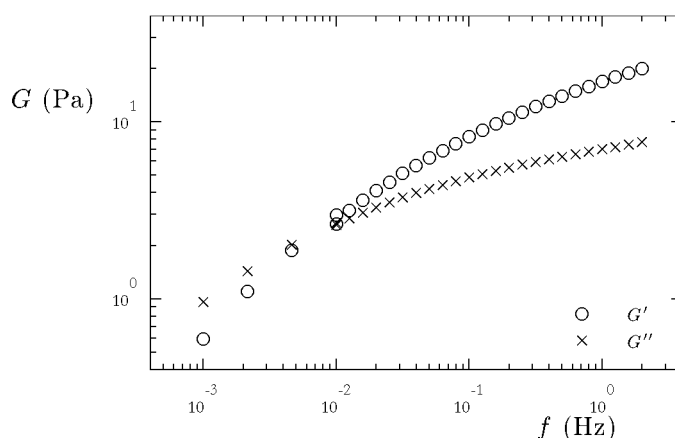


FIGURE 7.4 – Solution de POE : rhéologie en cisaillement oscillant. On mesure le module élastique G' (cercles) et le module de perte G'' (croix) en fonction de la fréquence d'oscillation f .

7.2.2 Rhéologie extensionnelle

Polystyrène

La viscosité élongationnelle de la solution de PS a aussi été caractérisée. Pour un taux d'élongation de 3 s^{-1} , nous montrons sur la figure 7.5 le rapport de Trouton (rapport entre viscosité élongationnelle et viscosité en cisaillement) en fonction de la déformation. On voit que la viscosité élongationnelle augmente fortement quand on étire le filament (cela correspond à l'effort qu'il faut fournir pour allonger les polymères), avant d'atteindre une valeur limite, qui correspond à des chaînes polymériques complètement étirées. La viscosité de ce plateau est 300 fois plus grande que la viscosité quasi-statique, ce qui illustre la résistance extrême de ces solutions à l'élongation.

Polyoxyéthylène

Pour mieux comprendre le comportement en extension de la solution de POE, nous regardons le drainage d'un filament vertical de liquide : on mesure son diamètre d en fonction du temps t . On voit sur la figure 7.6 que d décroît exponentiellement au cours du temps.

Théoriquement, on attend que le temps caractéristique de la décroissance soit relié au temps de relaxation du polymère τ :

$$d = D \exp(-t/3\tau) \quad (7.1)$$

Ce résultat de Basilevsky *et al.* [5, 6] peut se retrouver dans le cadre d'un modèle de solution de polymère de type Oldroyd-B [7, 8]. En reprenant le raisonnement

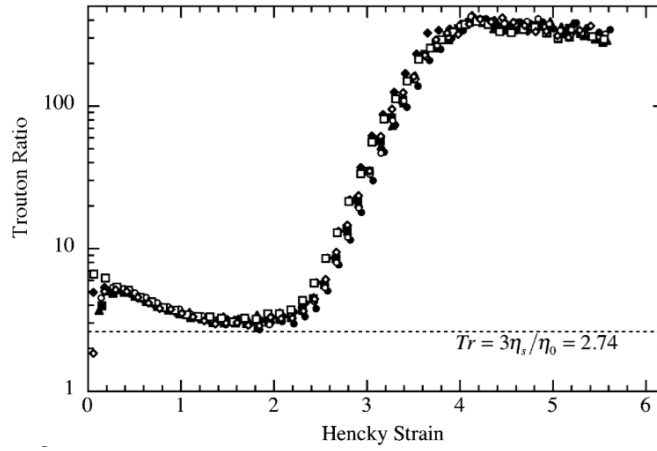


FIGURE 7.5 – Rhéologie extensionnelle de la solution de PS : pour un taux d'élongation $\dot{\epsilon}$ constant égal à 3 s^{-1} , on affiche la viscosité extensionnelle (divisée par la viscosité en cisaillement) en fonction de la déformation $\ln(L/L_0)$ (on parle alors traditionnellement de « Hencky strain ») (figure tirée de [1]).

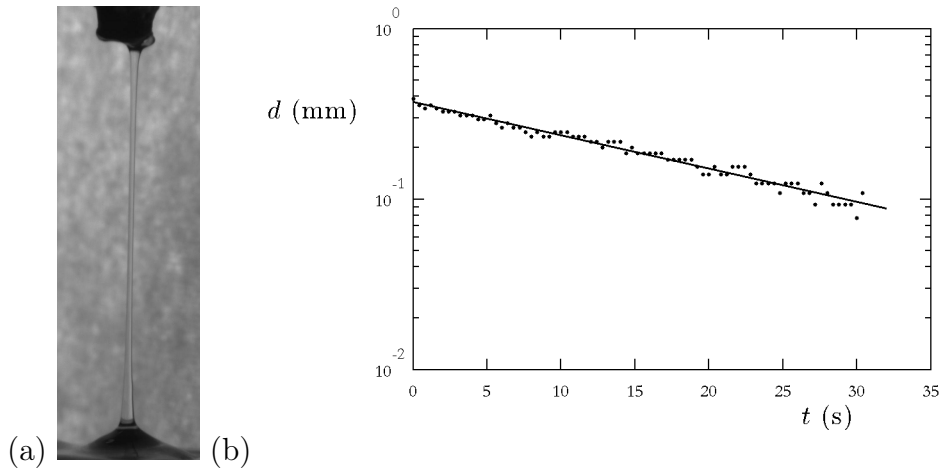


FIGURE 7.6 – Drainage capillaire d'un filament de POE : (a) on crée un filament vertical ($L = 2 \text{ cm}$, $D = 0,3 \text{ mm}$) qui s'amincit par capillarité; (b) diamètre d en fonction du temps t . Sur ce diagramme semi-logarithmique, on voit que le diamètre décroît exponentiellement au cours du temps, avec un temps caractéristique d'environ 22 s.

d'Entov et Hinch [6], et en notant $\dot{\epsilon} = -\dot{d}/d$, les équations constitutives du fluide viscoélastique (dans les directions radiale et axiale du filament) se simplifient pour donner :

$$\frac{2\gamma}{d} = 6\eta\dot{\epsilon} + G \quad (7.2)$$

où G correspond à la résistance élastique des polymères étirés. Si les polymères sont

très étirés, un modèle Oldroyd-B prédit pour G la loi d'évolution suivante :

$$\dot{G} = 4\dot{\epsilon}G - \frac{1}{\tau}G \quad (7.3)$$

qui découle du fait que les polymères sont étirés par l'écoulement le long de l'axe du filament, mais relaxent avec un temps caractéristique τ . On identifie alors deux régimes. Dans un premier temps, la contrainte est principalement visqueuse. L'équation (7.2) devient alors :

$$\frac{2\gamma}{d} = 6\eta\dot{\epsilon}$$

qui donne :

$$\dot{d} = -\frac{\gamma}{3\eta}$$

La dynamique est alors la même qu'avec un fluide newtonien : on a une décroissance du diamètre avec une vitesse constante $\gamma/3\eta$, comme on a pu le constater sur des filaments visqueux au paragraphe 6.3.2. Cet amincissement a pour conséquence d'allonger les polymères dans la direction axiale. Au bout d'un certain temps, le terme de contrainte dominant sera le terme élastique G . Dans ce cas, l'équation (7.2) s'écrit

$$\frac{2\gamma}{d} = G \quad (7.4)$$

ce qui permet d'évaluer $\dot{G} = -2\dot{d}\gamma/d^2 = \dot{\epsilon}G$. En remplaçant $\dot{G}$ dans l'équation (7.3), on trouve ainsi :

$$3\dot{\epsilon} = \frac{1}{\tau}$$

qui donne l'équation (7.1) une fois exprimé le taux de déformation $\dot{\epsilon} = -\dot{d}/d$. Ce résultat nous permet d'évaluer par l'expérience de drainage capillaire (figure 7.6) le temps de relaxation τ de la solution de POE, qui vaut environ 7 s.

7.2.3 Comparaison des solutions

Lorsque l'on compare les temps caractéristiques pour ces deux familles de liquides, on constate qu'ils sont proches, de l'ordre de la dizaine de secondes. Cependant, leur rhéologie en cisaillement les rend en fait très différents, en grande partie à cause de leur différence de concentration : dans le cas du PS, la solution est diluée dans un solvant très visqueux et la contribution des polymères à la viscosité est faible (celle-ci passe de 22 à 25 Pa.s avec l'ajout des chaînes polymériques). En revanche, dans le cas du POE, les solutions sont concentrées, et leur viscosité principalement due aux polymères : les viscosités mesurées sont 3 à 6 ordres de grandeur plus élevées que la viscosité du solvant (1 mPa.s). Cette question de concentration est vraisemblablement à l'origine de différences de comportement entre les deux fluides dans les expériences que nous discutons maintenant.

7.3 Filaments suspendus

7.3.1 Tomber ou ne pas tomber ?

Au chapitre précédent, nous avons vu que l'importance relative des effets de la tension de surface et de la gravité conditionne la forme et le comportement des filaments visqueux : ils tombent si $LD > a^2$, et restent suspendus dans le cas contraire. On voit sur la figure 7.7 que ce critère est toujours valable pour les filaments de liquide viscoélastique de nos expériences, avec toutefois un préfacteur numérique légèrement différent : les filaments courts ou fins s'arrêtent et s'amincissent au cours du temps, tandis que les filaments longs ou épais tombent, en prenant différentes formes, sur lesquelles nous reviendrons.

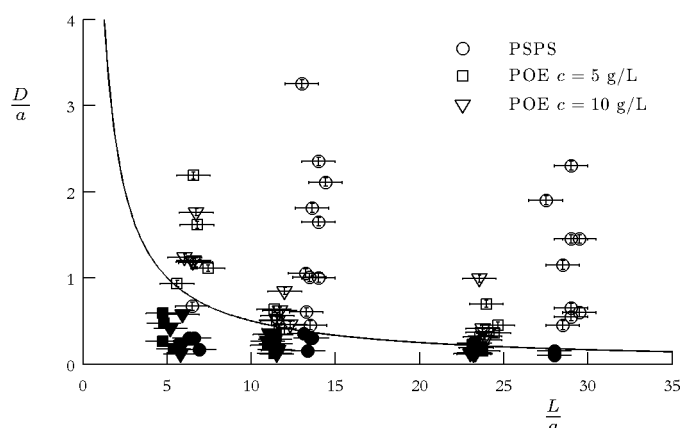


FIGURE 7.7 – Pour plusieurs expériences avec des solutions de PS et de POE (concentrations de 5 et 10 g/L), on note dans ce diagramme $(L/a, D/a)$ si le filament formé tombe sous l'effet de son poids (symboles vides $\circ$) ou reste suspendu (symboles pleins $\bullet$). La courbe dessinée correspond à une hyperbole d'équation $LD = 5a^2$.

Notons cependant que les filaments suspendus (ceux qui sont courts ou fins) prennent une forme différente du cas visqueux (figure 7.8, à comparer à la figure 6.2(b)). Cette forme arrondie, qui contraste avec les formes de U vues précédemment, s'explique par la répartition de masse très homogène le long du filament de solution polymérique : celui-ci est semblable à un cylindre homogène connecté à deux gouttes accrochées aux parois, alors que pour un filament visqueux, la variation de diamètre le long du filament est beaucoup plus progressive. On peut constater que cette forme est très semblable aux motifs de « beads on a string » (gouttes connectées par des filaments cylindriques, figure 7.9) fréquemment observés lorsque des jets ou des filaments de solution polymérique se déstabilisent [2, 9–11].



FIGURE 7.8 – Forme d'un filament de POE ($L = 25$ mm) retenu par la tension de surface.

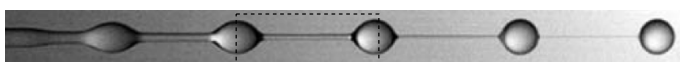


FIGURE 7.9 – « Beads on a string » : destabilisation d'un jet d'une solution aqueuse de polyacrylamide. Le cadre souligne le motif de cylindre homogène connecté à deux gouttes que nous observons dans nos expériences (figure 7.8). Figure tirée de [2].

7.3.2 Évolution des filaments suspendus : chute et drainage

On peut également discuter la dynamique de ces filaments suspendus. La figure 7.10 montre la hauteur H et le diamètre d d'un filament de PS en fonction du temps t .

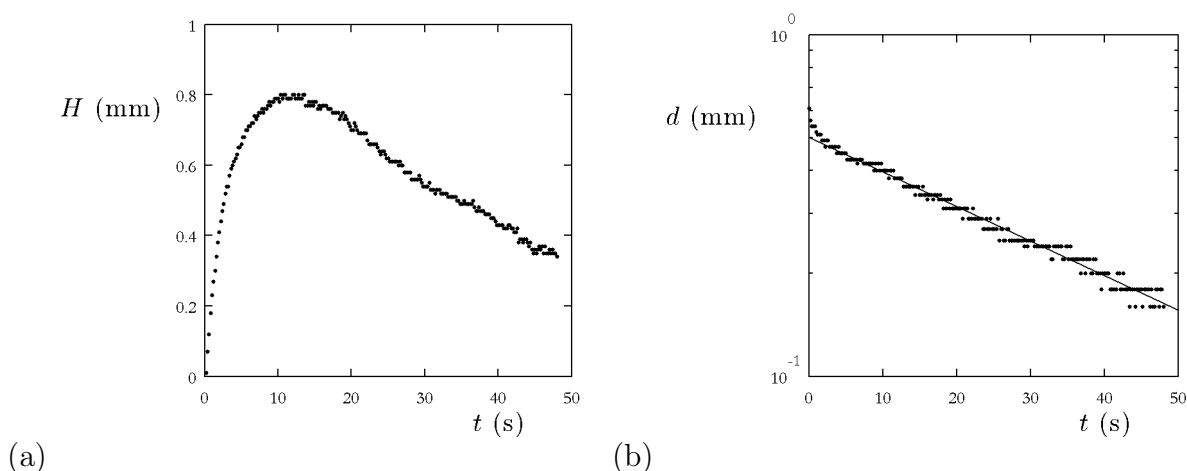


FIGURE 7.10 – Pour un filament de PS (dimensions initiales $L = 13$ mm et $D = 0,6$ mm) on trace (a) la hauteur H et (b) le diamètre d en fonction du temps t . Sur ce diagramme semi-logarithmique, la droite correspond à une décroissance exponentielle avec une constante de temps de 43 s.

On voit que d diminue au cours du temps : comme on l'a déjà souligné, le filament s'amincit par drainage capillaire. Cet amincissement est exponentiel, mais le temps caractéristique de l'amincissement est plus long que ce à quoi l'on s'attendrait d'après l'équation (7.1). On attend ainsi une constante de temps $3\tau \approx 12$ s, alors

que pour des diamètres entre 0,3 et 0,6 mm, le temps de drainage varie entre 20 et 50 s et il augmente avec le diamètre. Quant au temps de drainage visqueux, il est plus de 10 fois plus court ($3\eta_0 D/\gamma \approx 0,9$ s pour $D = 0,5$ mm). On peut proposer plusieurs pistes pour expliquer cet écart et l'influence du diamètre initial sur le temps d'amincissement, qui rappelle l'influence des conditions expérimentales constatée dans d'autres systèmes avec des écoulements élongationnels [12–14] :

- l'influence de la gravité, qui sera plus grande pour les filaments les plus épais ;
- l'influence du rapport d'aspect D/L et de la géométrie du filament (plus ou moins proche du cylindre) [13, 14].

Pendant ce temps, H augmente puis diminue au cours de l'expérience. Dans un premier temps, le filament tombe sous l'effet de la gravité, avant d'être retenu par la tension de surface. Nous avons vu au chapitre 6 que la hauteur finale dépend d'un équilibre entre le poids $\rho g L d^2$ et la force capillaire projetée sur la verticale $\gamma d \times H/L$:

$$H \sim \frac{L^2 d}{a^2} \quad (7.5)$$

Pour l'expérience de la figure 7.10, on vérifie en effet que, pour $d < 0,3$ mm (soit $t > 20$ s), H est bien proportionnelle à d (figure 7.11) : le filament remonte parce qu'il s'amincit, si bien que sa hauteur d'équilibre diminue. La hauteur du filament est donc donnée par une succession d'états quasi-statiques. Cette propriété est liée à la durée de vie remarquablement longue des filaments viscoélastiques, et au fait qu'ils restent homogènes en épaisseur.

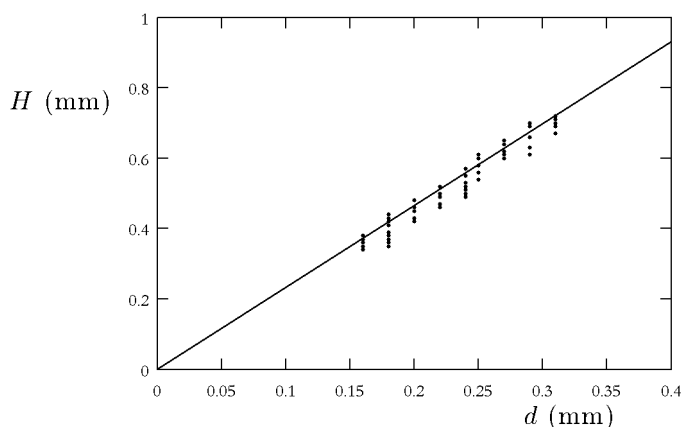


FIGURE 7.11 – Pour l'expérience de la figure 7.10, on trace H en fonction de d pour $t > 20$ s. La droite représentée correspond à $H = 2,3 d$, soit une pente de l'ordre de la valeur attendue $L^2/16a^2 \approx 2,9$, qui correspond une géométrie à courbure constante calculée dans [15].

7.4 Chaînettes visco-élastiques

Dans cette partie, nous nous intéressons aux filaments qui ne sont pas retenus par la capillarité, et qui tombent, comme pour l'expérience de la figure 7.12 : on y voit la déformation d'un filament de PS, initialement de longueur $L = 32$ mm et de diamètre $D = 2,2$ mm.



FIGURE 7.12 – Superposition d'images d'un filament de PS (dimensions initiales $L = 32$ mm et $D = 2,2$ mm). L'intervalle entre deux images est 2 s.

7.4.1 Dynamique de chute

À partir des images de la figure 7.12, on mesure la hauteur H en fonction du temps t . Cette « trajectoire » est présentée sur la figure 7.13. On voit que la hauteur H augmente en fonction du temps, de façon accélérée.

Avec des filaments de POE, on obtient des trajectoires similaires, mais il est beaucoup plus difficile d'être reproductible : l'expérience est très sensible à la préparation de la goutte de liquide et aux conditions d'ouverture. Pour les expériences avec le PS, un temps d'attente de 30 s à 1 min avant d'ouvrir les mors du dispositif permet d'obtenir des résultats reproductibles.

En comparant cette expérience avec celles du chapitre précédent (figure 6.9 par exemple), on observe que la dynamique est beaucoup plus lente que celle qu'on

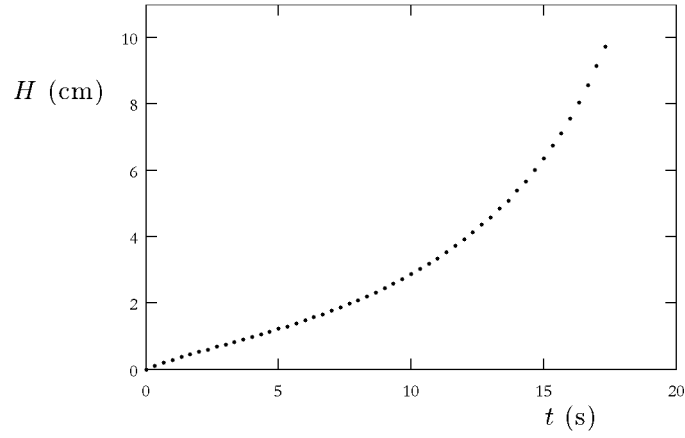


FIGURE 7.13 – Pour le filament de PS de la figure 7.12 (dimensions initiales $L = 32$ mm et $D = 2,2$ mm), on trace la hauteur H en fonction du temps t .

attendrait avec un filament de liquide newtonien de même viscosité ($\eta = 25$ Pa.s). On peut se convaincre de ce ralentissement en mesurant (pour plusieurs filaments) le temps pour lequel $H = L/2$, que nous avons noté $\tau_{L/2}$ au chapitre 6. Sur la figure 7.14, on trace $\tau_{L/2}$ en fonction du temps de chute visqueux $\eta/\rho g L$. On voit que le temps de chute « viscoélastique » est environ un ordre de grandeur plus élevé que le temps de chute visqueux.

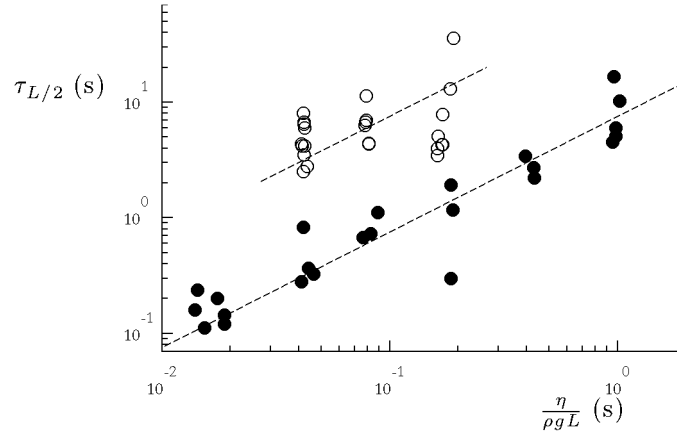


FIGURE 7.14 – Temps de chute mesuré $\tau_{L/2}$ en fonction du temps caractéristique visqueux $\eta/\rho g L$. Les symboles pleins correspondent aux huiles silicones newtoniennes du chapitre 6, les symboles vides au PS. Dans ce dernier cas, $\eta/\rho g L$ est calculé à partir de la viscosité en cisaillement $\eta_0 = 25$ Pa.s.

Étudions maintenant en détail la dynamique de chute $H(t)$. À temps court (fi-

gure 7.15(a)), il semble que le filament tombe à vitesse constante. À temps long (figure 7.15(b)), H augmente exponentiellement avec t .

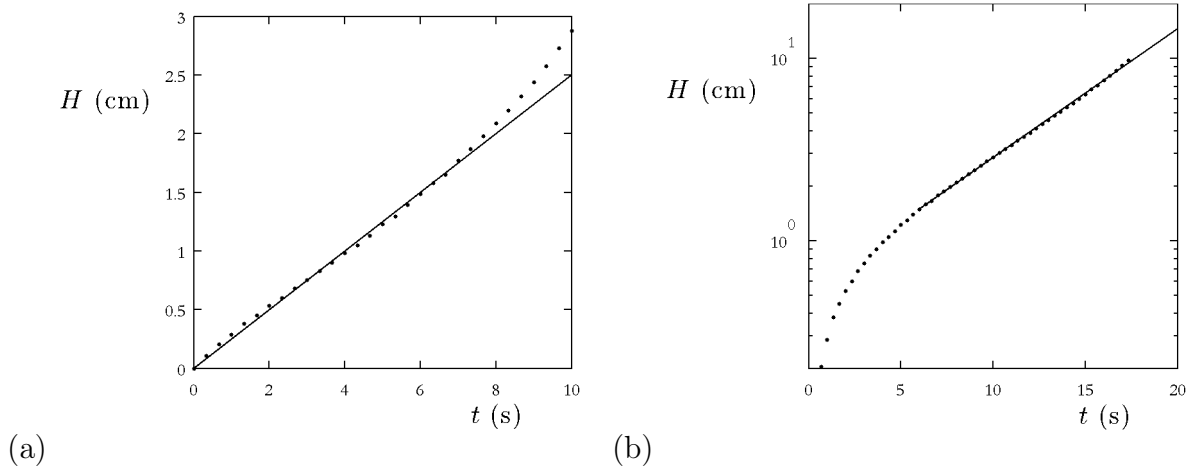


FIGURE 7.15 – Pour l'expérience des figures 7.12 et 7.13, on regarde la dynamique $H(t)$ (a) à temps court (la droite correspond à une vitesse constante $V = 2,5$ mm/s) et (b) à temps long (dans ce diagramme semi-logarithmique, la droite correspond à une croissance exponentielle avec une constante de temps de 6,2 s).

Temps courts ($H < L$)

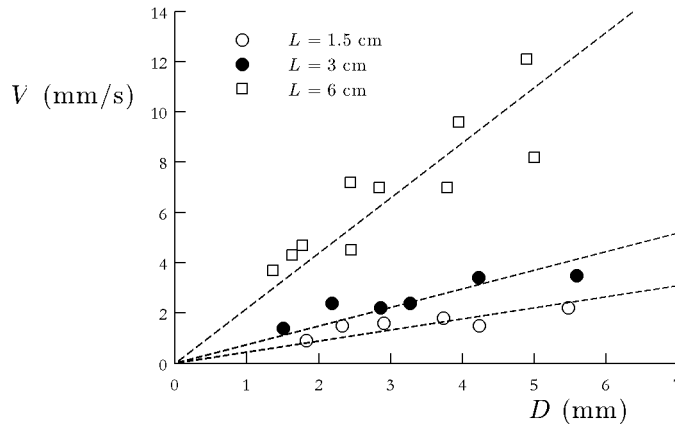


FIGURE 7.16 – Vitesse caractéristique de chute à temps court V en fonction du diamètre D , pour différentes longueurs L . Le fluide utilisé est du PS. Les droites (de pentes respectives 0,44, 0,74 et $2,2 \text{ s}^{-1}$) correspondent à un ajustement linéaire pour chaque série de points.

Dans ce régime de vitesse quasi-constante, nous étudions l'influence des dimensions du cylindre liquide. La figure 7.16 montre la vitesse de chute mesurée V en

fonction de D , pour différentes longueurs L . On observe que V augmente avec L et D . Dans le cas du liquide visqueux, nous avons vu qu'il existe un régime de chute uniforme, dans lequel la dissipation est due à la courbure croissante du filament. La vitesse de chute est alors $V \sim \rho g L^4 / \eta D^2$ [16] : la vitesse de chute diminue quand D augmente, ce qui n'est pas ce que nous mesurons dans les expériences (figure 7.16).

Cette chute à vitesse constante ne correspond pas non plus à ce que l'on attendrait théoriquement pour un fluide de Oldroyd-B. D'après les travaux de Roy *et al.* [17], on aurait d'abord une dynamique visqueuse :

$$H \sim L \left(\frac{\rho g L t}{\eta_0} \right)^{1/3}$$

comme prédit par l'équation (6.6) — il n'apparaît alors pas de dépendance avec le diamètre D comme celle observée sur la figure 7.16 — avant d'être ralenti par la contrainte d'origine élastique due aux polymères.

La déformation du filament se fait donc à vitesse constante, mais nous ne comprenons pas l'origine de cette vitesse, ni sa dépendance avec les dimensions du filament.

Temps longs ($H > L$)

Quand le filament est très déformé ($H > L$), H croît exponentiellement avec t (figure 7.15(b)), avec un temps caractéristique τ_e . Cette variation exponentielle est caractéristique du comportement élastique du fluide, comme dans le cas du drainage capillaire (paragraphe 7.2.2). Considérons le filament comme un cylindre vertical de hauteur H et de diamètre d (avec $LD^2 \sim Hd^2$ par conservation du volume) (figure 6.13). Comme dans le raisonnement du paragraphe 7.2.2, quand le filament est très étiré, la contrainte visqueuse $\eta \dot{H}/H$ est négligeable par rapport à la contrainte élastique G . La contrainte élastique équilibre donc la contrainte due au poids du filament $\rho g H d^2 / d^2$:

$$G \sim \rho g H \quad (7.6)$$

tandis que l'équation de variation de la contrainte élastique s'écrit :

$$\dot{G} = 2 \frac{\dot{H}}{H} G - \frac{1}{\tau} G \quad (7.7)$$

L'équation (7.6) donne $\dot{G} = (\dot{H}/H)G$, que l'on peut remplacer dans (7.7). On trouve alors :

$$\frac{\dot{H}}{H} = \frac{1}{\tau}$$

On attend donc une croissance exponentielle de H , avec un temps caractéristique τ qui est le temps de relaxation du polymère. Dans nos expériences, H croît bien exponentiellement, avec un temps caractéristique τ_e . Cependant, contrairement à ce

qu'on attendrait ($\tau_e = \tau$), τ_e dépend des dimensions initiales du filament, comme dans le cas du drainage du filament suspendu (paragraphe 7.3.2). La figure 7.17 montre τ_e en fonction du diamètre D pour plusieurs longueurs L . Si l'influence de L n'est pas évidente, on voit que τ_e diminue quand D augmente : τ_e varie ici entre τ et $2,5 \tau$ et tend vers τ pour D grand. Comme pour le drainage (7.3.2), on peut avancer plusieurs arguments pour expliquer cette dépendance :

- l'influence de la géométrie (rapport d'aspect ou répartition de masse particulière dans la chaînette viscoélastique) ;
- l'influence de la tension de surface. Quand le filament s'allonge, son diamètre diminue, la tension capillaire va donc s'opposer au poids avec une contrainte $2\gamma/d \sim \gamma/D$ (qui correspond au terme de « tension de ligne » ajoutée à la pression de Laplace [15]), ce qui peut modifier la dynamique de chute.

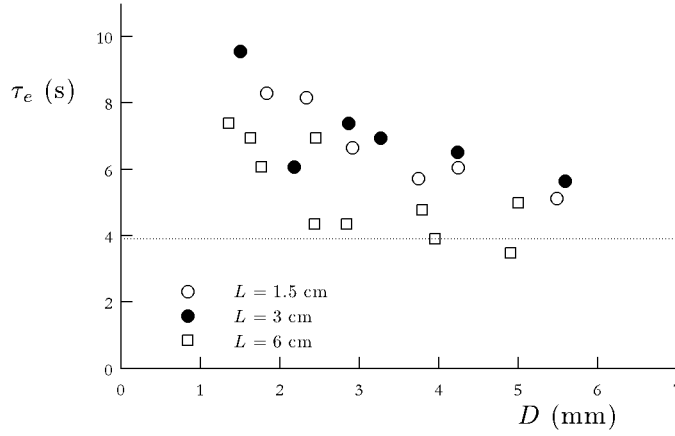


FIGURE 7.17 – Temps caractéristique de chute τ_e à temps longs (tel que $H \sim H_1 \exp(t/\tau_e)$) en fonction du diamètre initial D , pour différentes longueurs initiales L . La droite en pointillés correspond à 3,9 s, le plus long temps de relaxation du liquide utilisé (PS).

7.4.2 Formes

Pouvons-nous comprendre les formes très spéciales, proches du V, observées avec les filaments de POE (figure 7.1(b)) ?

Dans le cas d'une chaînette visqueuse, en première approximation, la masse reste répartie de façon homogène le long du filament : c'est ce qui explique les formes analogues à celles d'une chaînette que l'on observe (figure 7.1(a)). Nous avons aussi vu au paragraphe 6.2.2 qu'un filament déformé est plus étiré sur les bords qu'à son centre. Par conséquent, il s'amincit sur les bords, mais pas au milieu. Quand il est

très déformé ($H > L$), le diamètre est plus important au centre et la forme du filament (figure 6.15) est alors intermédiaire entre celle d'un V (masse uniquement au centre) et celle d'une chaînette (masse homogène).

Pour les filaments de PS, nous obtenons des formes très semblables. Quand le filament n'est pas très allongé (jusqu'à $H \sim L$), son diamètre est presque homogène et il a une forme de chaînette (figure 7.18(a)). En revanche, quand il est très déformé ($H \gg L$), la masse est concentrée au milieu et la forme du filament est plus proche du V (figure 7.18(b)).

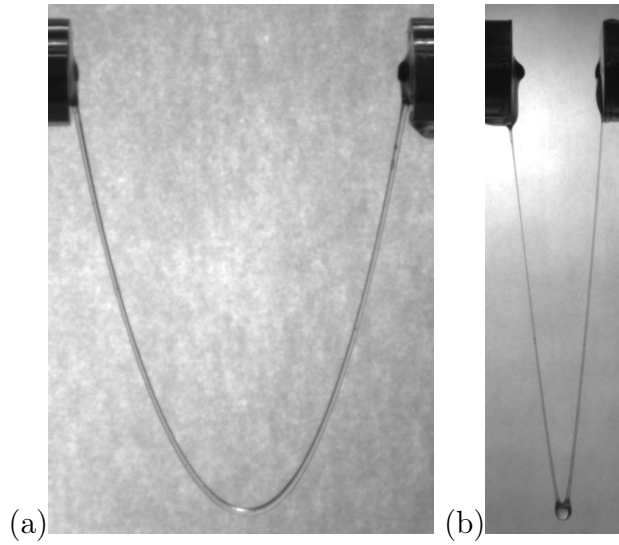


FIGURE 7.18 – Images de filaments de PS à différents stades de la chute (a) $H \sim L$ ($L = 6$ cm, $D = 1,5$ mm) (b) $H \gg L$ ($L = 15$ mm, $D = 1,8$ mm).

Enfin, pour les filaments de POE, on observe une concentration de masse au centre du filament, comme nous l'avons vu au début de ce chapitre (figure 7.1(b)). Cette concentration est beaucoup plus rapide qu'avec le PS, on obtient donc des formes en V même pour H de l'ordre de L car le fluide se déplace des bords vers le centre du filament, comme l'indique le mouvement des bulles dans le liquide sur la figure 7.1(b).

Ce déplacement de liquide vers le centre du fil visqueux est difficile à caractériser : les expériences sont peu reproductibles (très grande influence de la préparation de la quantité de liquide, des conditions d'ouverture...), à cause du caractère très non-newtonien du fluide utilisé. On peut toutefois caractériser à quel point le filament a une forme proche du V avec le paramètre suivant :

$$K = \frac{l_{H/2} - \frac{L}{2}}{\frac{L}{2}}$$

où $l_{H/2}$ est la distance entre les 2 côtés du filament à mi-hauteur (figure 7.19). Pour une forme de V, K est nul, tandis qu'il est positif pour une forme plus arrondie comme la chaînette. Pour des filaments de dimensions initiales proches ($L \approx 3$ cm et $D \approx 2$ mm), on trace sur la figure 7.20 le paramètre K en fonction du rapport H/L , pour un liquide newtonien (huile silicone de viscosité 10 Pa.s) et les deux liquides non-newtoniens utilisés. Pour l'huile silicone, on voit qu'au début, K augmente avec H/L , comme on l'attend pour une forme de chaînette (pour laquelle K tend vers 1 à grand H/L), avant de diminuer pour $H/L > 1$, à cause de l'amincissement du filament sur les bords (paragraphe 6.2.2). Pour les liquides non-newtoniens, K diminue avec H/L et est inférieur à ce que l'on mesure avec le liquide newtonien. De plus, pour H/L fixé, K est beaucoup plus faible pour le POE que pour le PS. La concentration de masse au milieu existe donc avec les deux liquides viscoélastiques, mais elle est beaucoup plus marquée avec la solution de POE.

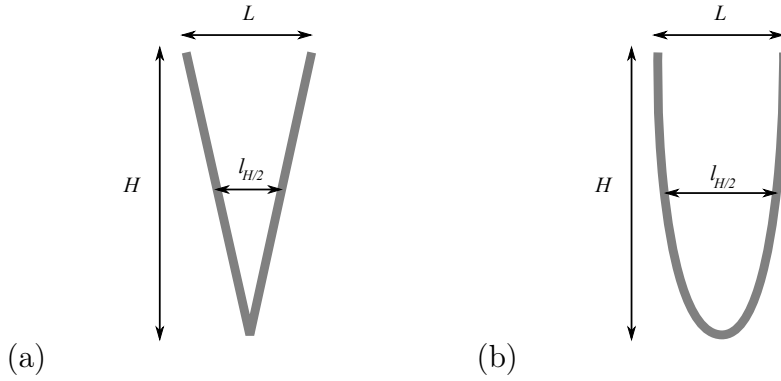


FIGURE 7.19 – Caractérisation de la forme du filament : on mesure l'écartement à mi-hauteur $l_{H/2}$. Si le filament a une forme de V (a), le théorème de Thalès nous donne $l_{H/2} = L/2$ et $K = (l_{H/2} - L/2)/(L/2) = 0$. Si la forme est arrondie (b), $l_{H/2} > L/2$ et $K > 0$.

Le fait que K varie différemment en fonction de H/L pour les trois liquides indique que la répartition de masse des filaments viscoélastiques n'est pas simplement affectée par la déformation du filament sous l'effet de la chute, comme pour les liquides newtoniens. On peut alors proposer un autre mécanisme pour expliquer cette concentration de masse au centre.

Prenons un ressort, étirons-le et relâchons ensuite ces deux extrémités : le ressort va se contracter (figure 7.21(a)). La symétrie du système impose que son centre est immobile, le ressort se retrouve donc comprimé « au milieu ». Imaginons maintenant que le filament de liquide polymérique se comporte comme un seul ressort élastique dans un solvant visqueux (figure 7.21(b)). Lors de la formation du filament, nous écartons les mors du dispositif à une vitesse W . La condition de non-glissement du solvant visqueux à la paroi implique que l'on étire le liquide visqueux, qui va exercer une force sur le ressort, proportionnelle à la viscosité η du solvant et à la vitesse W .

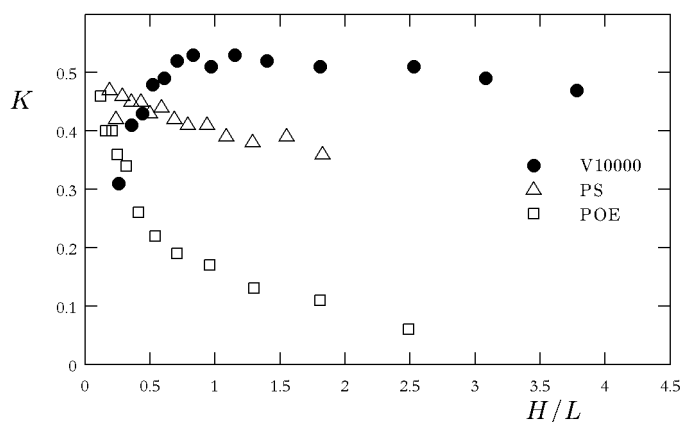


FIGURE 7.20 — Pour les mêmes dimensions initiales ($L \approx 3$ cm et $D \approx 2$ mm), on trace K en fonction du rapport H/L pour différents liquides, newtoniens ou non : huile silicone newtonienne de viscosité 10 Pa.s (expérience des figures 6.9 et 6.15), solution de PS (expérience de la figure 7.12) et solution de POE (expérience de la figure 7.1(b)).

Au « début » de l'expérience, les mors sont de nouveau immobiles, il n'y a donc plus de contrainte visqueuse qui s'exerce sur le ressort, qui se trouve relâché. Il relaxe alors vers le milieu, en entraînant le solvant qui l'entoure : la masse de liquide se concentre au centre. Une échelle de temps naturelle pour cette contraction est le temps de relaxation τ de la solution. Pour le filament de POE, $\tau \sim 10$ s, comparable au temps que met le liquide à se déplacer sur la figure 7.1(b), sur laquelle l'intervalle de temps entre deux images successives est 1 s.

L'origine des différences de comportement entre les deux liquides (PS et POE) n'est cependant pas claire. Le fait que la solution de PS soit plutôt diluée, alors que la solution de POE est très concentrée — la viscosité du liquide est alors principalement due à la présence des polymères et pas au solvant — joue sans doute un rôle dans cette différence de comportement. Pour la solution de PS, la contraction élastique des polymères pourrait être masquée par la grande viscosité du solvant.

Comprendre ce mécanisme de façon approfondie nécessiterait d'effectuer ces expériences avec des solutions viscoélastiques intermédiaires — pour lesquelles on pourrait par exemple faire varier le temps de relaxation τ en gardant la même viscosité caractéristique — mais surtout de mieux contrôler les conditions d'ouverture : en imposant l'amplitude de la contrainte élastique initiale, la vitesse d'ouverture W joue un rôle prépondérant, qui mériterait d'être quantifié.

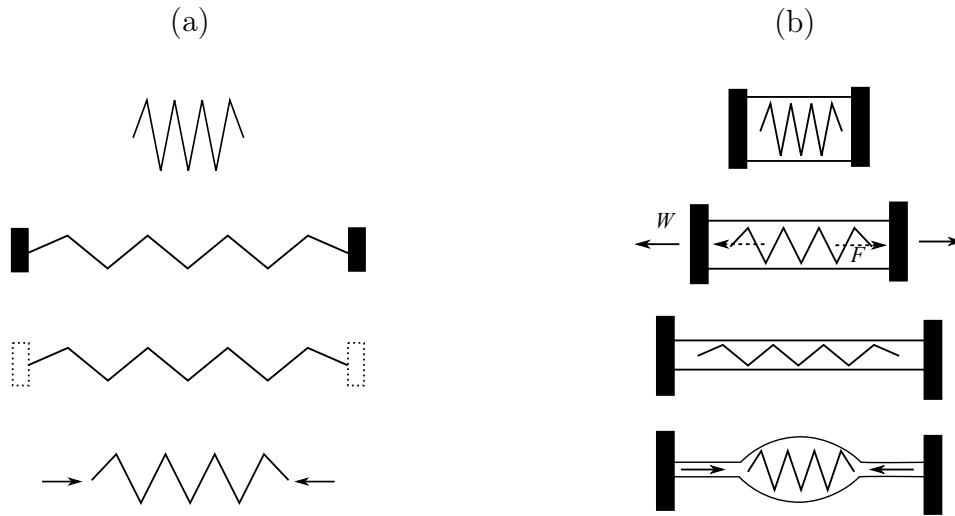


FIGURE 7.21 – (a) On étire un ressort que l'on relâche ensuite : le ressort se contracte, de façon symétrique par rapport à son milieu. (b) On tient une goutte de solution de polymère entre deux mors. On écarte les mors à la vitesse W . La condition de non-glissement à la paroi entraîne le mouvement du solvant, qui exerce une force visqueuse F sur le « ressort » polymérique. À la fin de l'ouverture, la vitesse W est nulle, et il n'y a plus de force visqueuse : $F = 0$. Le ressort est relâché. Il se contracte en entraînant du liquide.

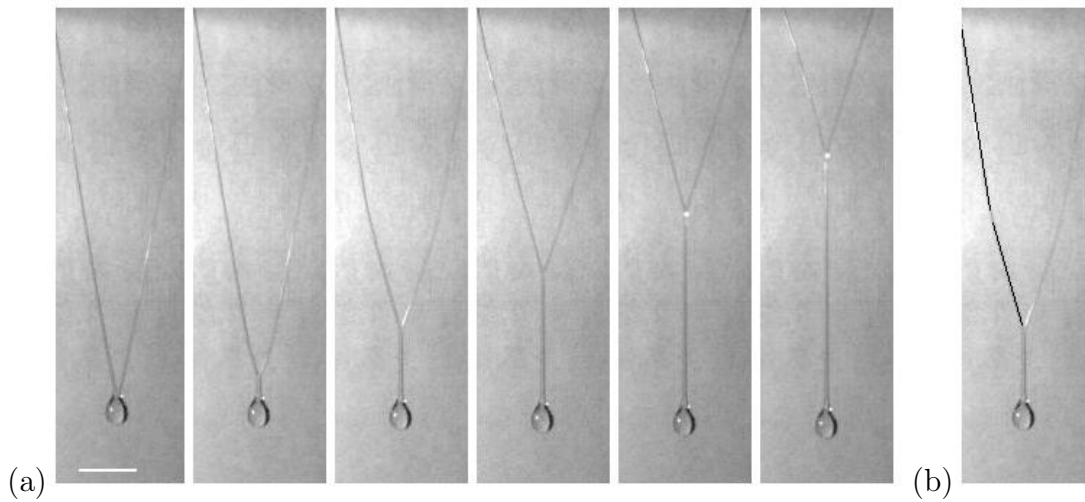


FIGURE 7.22 – (a) Images successives d'un filament de POE. L'intervalle entre deux images consécutives est 15 ms, le trait blanc représente 1 cm. (b) On reproduit la troisième image de la série précédente, en soulignant le profil du filament, qui présente une rupture de pente.

7.5 Des ondes sur des filaments liquides

Quand un filament de POE se déforme, le liquide se déplace pour former une goutte en son milieu. Cette goutte s'allonge sous l'effet de la gravité. Les deux branches de filament qui la retiennent se rapprochent donc et, à un moment donné, elles « fusionnent » de façon très brutale, comme on le voit sur la figure 7.22(a), jusqu'à former une sorte de « Y ». Ce mécanisme de coalescence de filaments rappelle les expériences de Cuvelier *et al.* [18], qui ont observé la coalescence de tubes de bicouche lipidique. On peut remarquer sur cette chronophotographie que ce phénomène se produit à une échelle beaucoup plus rapide (tout se passe en moins de 100 ms) que celle de la chute (la dizaine de secondes). Lors de la coalescence des deux filaments, on peut voir sur la figure 7.22(b) que chacune des branches forme un léger coude. L'existence de ce coude et sa dynamique nous ont intrigués et nous ont incités à regarder deux autres expériences avec des filaments très fins de POE (de diamètre $d \sim 0,5$ mm), dans lesquelles on retrouve ce genre de discontinuité de forme, remarquable avec des liquides.

Dans une première série d'expérience, on fait coalescer deux filaments qui se croisent, comme sur la figure 7.23. C'est une situation très proche de l'expérience précédente, mais sans le poids de la goutte, qui est difficile à contrôler en pratique. Comme dans l'expérience initiale, les filaments coalescent et on peut observer la propagation d'un coude, avant d'arriver à une position finale. On peut penser que les filaments coalescent à cause de la tension d'origine capillaire, jusqu'à arriver à une configuration où les 3 « branches » de filament sont à l'équilibre au niveau d'un nœud (figure 7.24). Cette situation rappelle la question de la forme des bords de Plateau [19] dans une mousse sèche. Selon les diamètres initiaux d_1 et d_2 des deux filaments, la géométrie du point de rencontre des filaments sera différente. C'est bien ce que l'on voit sur la figure 7.23, quand on compare les séquences (a) ($d_1 \approx d_2$) et (b) ($d_1 > d_2$). Toutefois, la géométrie finale n'est pas celle que l'on attend. Sur la figure 7.23(a), l'angle θ (défini sur la figure 7.24) est ainsi de l'ordre de 40° , alors que l'on attend $\theta = 90^\circ$. La situation n'est donc pas simplement décrite par l'équilibre des tensions au nœud.

On peut par ailleurs remarquer sur la figure 7.23 qu'au « nœud », l'orientation des filaments ne change quasiment pas au cours de la coalescence : $\Psi(t) \approx \text{constante} \approx \theta$.

Dans une deuxième série d'expériences, on met en contact un filament unique avec une plaque en verre (lame de microscope). Si la plaque n'est pas trop inclinée par rapport au filament, celui-ci se colle alors de façon très rapide sur la lame, en formant un coude très marqué, comme on le voit sur la figure 7.25. On mesure alors la vitesse du coude v et la vitesse de collage u (définie sur la figure 7.26), qui sont quasiment constantes au cours du mouvement.

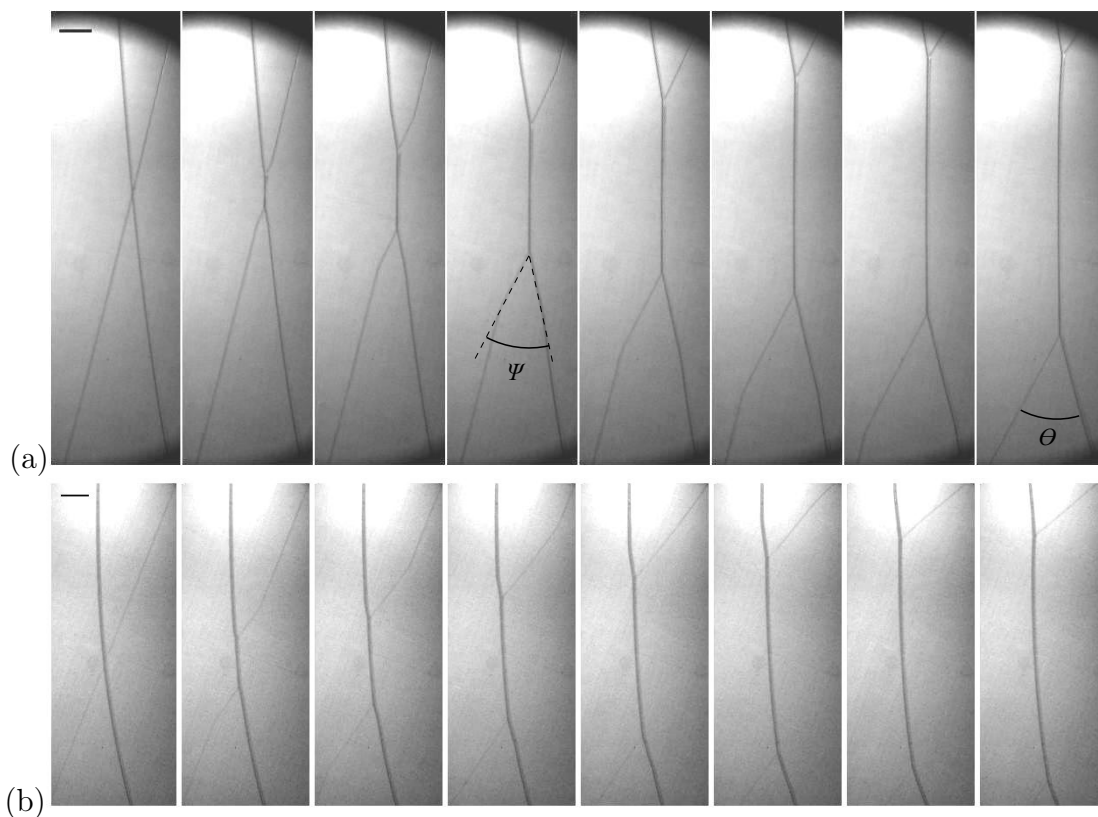


FIGURE 7.23 – Images successives de deux filaments de POE qui coalescent. L'intervalle entre deux images est 5 ms, les segments noirs représentent 5 mm. Les diamètres des filaments sont (a) 0,6 et 0,5 mm, et (b) 0,6 et 0,2 mm.

Dans les expériences, v ne dépend pas de l'angle d'inclinaison α entre plaque et filament. En revanche, v diminue quand le diamètre d du filament augmente (figure 7.28(a)). Une façon de comprendre cette vitesse du coude est de regarder l'expérience suivante de « corde pincée » : on tend un élastique pour former une forme de triangle, avant de le relâcher. L'élastique revient alors vers sa position initiale en ayant une forme de trapèze, comme on le voit sur la figure 7.27. On observe donc, comme dans nos expériences, un coude qui se propage à vitesse constante. Cette propagation correspond à celle d'une onde de compression dans l'élastique. La vitesse (horizontale) du coude est donc la vitesse du son $c = \sqrt{T/\mu}$, où T est la tension dans le filament, et μ la masse linéique.

De façon analogue, le « coude » dans les expériences sur des filaments de POE correspond à la propagation d'une onde de tension (pour se coller sur la plaque, le filament doit en effet s'allonger). La tension est ici celle des polymères de la solution qui sont étirés dans le filament. En l'absence d'autre contrainte exercée sur les filaments, la contrainte élastique équilibre la contrainte d'origine capillaire

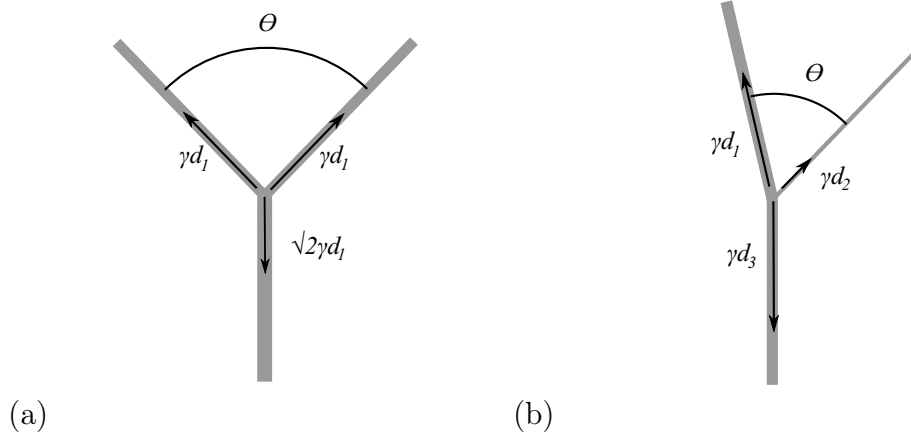


FIGURE 7.24 – Equilibre au nœud : on imagine que les forces capillaires se compensent à cet endroit. d_1 et d_2 sont les diamètres des filaments initiaux, d_3 est le diamètre du filament formé après coalescence. La conservation du volume implique $d_3^2 = d_1^2 + d_2^2$. (a) Cas où $d_1 = d_2$, on a alors $d_3 = \sqrt{2}d_1$ (b) Cas où $d_1 > d_2$.

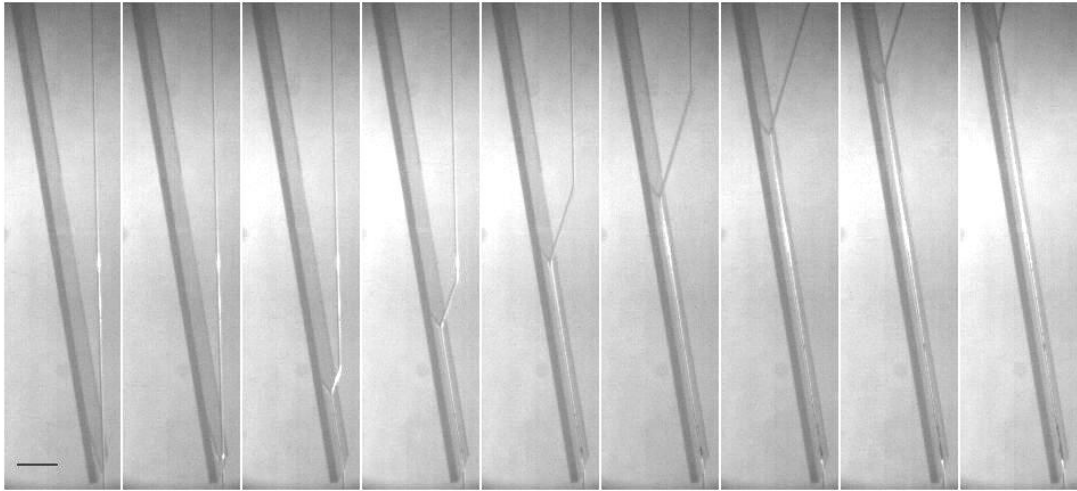


FIGURE 7.25 – Images successives d'un filament de POE qui adhère sur une plaque de verre. Le diamètre du filament est 0,6 mm. L'intervalle entre deux images est 10 ms, le segment noir représente 5 mm.

(équation (7.4)). La tension s'écrit alors γd . La masse linéique μ s'écrit ρd^2 , on s'attend donc à une vitesse du son $c = \sqrt{T/\mu} \sim \sqrt{\gamma/\rho d}$. On peut en effet vérifier que v varie bien comme $1/\sqrt{d}$ (figure 7.28(b)). Pour $d = 1$ mm, on mesure $v \approx 1$ m/s, du même ordre que $\sqrt{\gamma/\rho d} \approx \sqrt{60 \cdot 10^{-3}/(10^3 \times 10^{-3})} \approx 0,24$ m/s. On a donc ici une corde liquide tendue par la tension de surface. Des ondes de ce type ont aussi été observées sur des filaments de cristaux liquides [20, 21]. C'est aussi un analogue

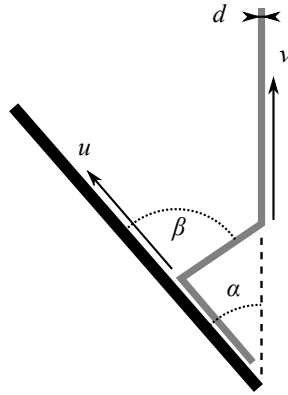


FIGURE 7.26 – Schéma de l'expérience d'adhésion d'un filament sur une plaque : on approche un filament de diamètre d d'une plaque (généralement en verre), sur laquelle le filament va se coller. α est l'angle d'inclinaison entre plaque et filament. On mesure la vitesse du « coude » v , ainsi que la vitesse de « collage » u .

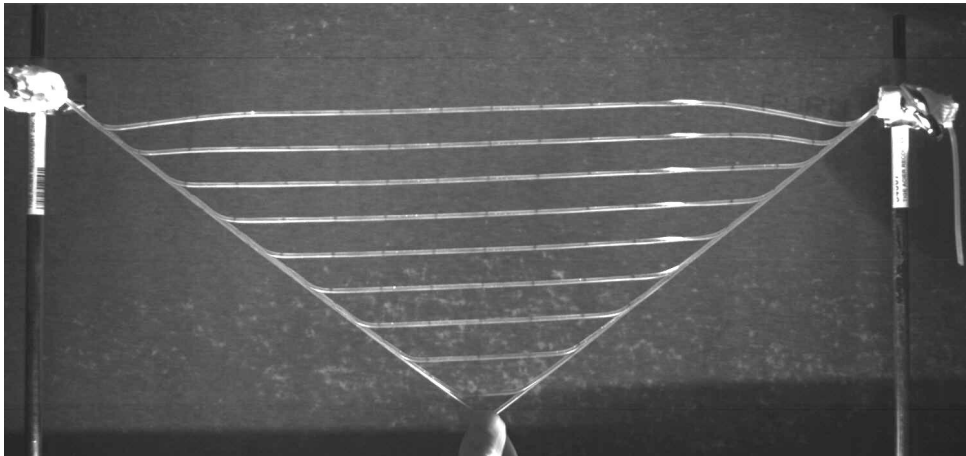


FIGURE 7.27 – Expérience de la corde pincée (superposition d'images espacées de 3,3 ms) : on tend un élastique (diamètre de 3 mm, module de Young d'environ 150 kPa, distance entre les bords de l'élastique de 50 cm), avant de le relâcher. L'élastique revient alors à sa position d'équilibre horizontale en adoptant une forme de trapèze.

à une dimension des ondes dites « antisymétriques » qui peuvent se propager sur une feuille liquide [22].

Par ailleurs, si l'on forme le filament liquide à des vitesses plus élevées que d'habitude (30 cm/s au lieu de 3 cm/s), on va « surtendre » les polymères et la vitesse de propagation v sera plus élevée (figure 7.28, symboles creux).

Intéressons-nous maintenant à la vitesse d'adhésion u . Nous avons pu vérifier

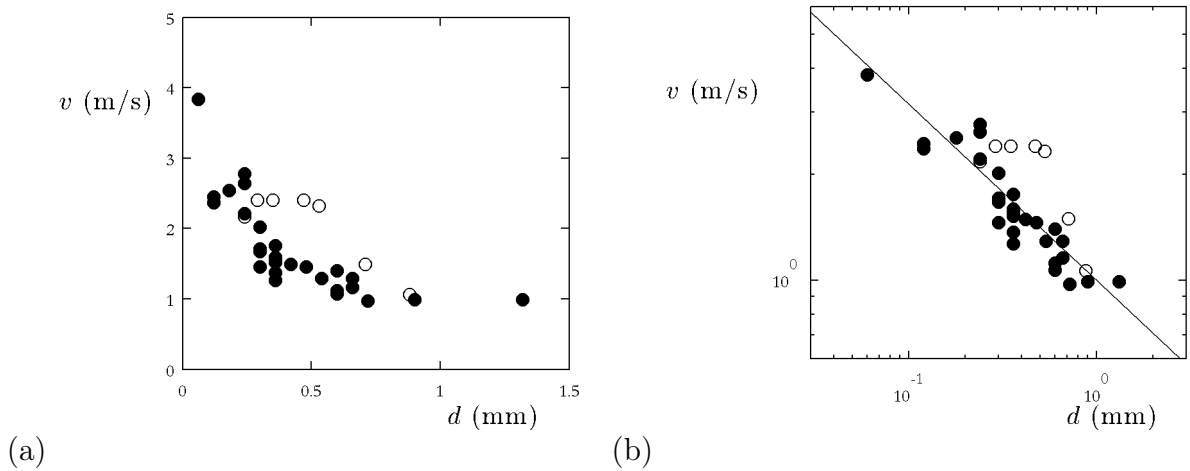


FIGURE 7.28 – Vitesse du « coude » v en fonction du diamètre d du filament. Les symboles pleins (●) correspondent aux expériences où l'on forme le filament à une vitesse modérée d'environ 3 cm/s, les symboles creux (○) à celles où l'on forme le filament à une vitesse environ 10 fois plus élevée. (a) Diagramme linéaire, (b) diagramme logarithmique. La droite correspond une variation de v en $d^{-1/2}$.

qu'elle est proportionnelle à v et toujours plus petite que v . Sur la figure 7.29, nous traçons u/v en fonction de l'angle α . On voit que u/v décroît avec α , jusqu'à $\alpha \approx 30^\circ$. Au-delà de 30° , le filament ne se colle plus à la plaque de façon aussi systématique.

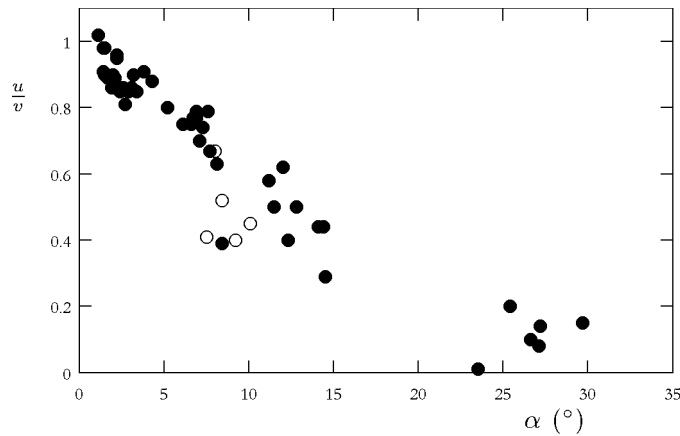


FIGURE 7.29 – Rapport u/v en fonction de l'angle α (symboles pleins ● : lame de verre ; symboles creux ○ : plaque de téflon).

Nous avons également étudié l'influence de la surface solide sur l'adhésion dans quelques expériences, en mettant le filament en contact avec une plaque de téflon. Dans ces quelques expériences, nous ne voyons pas d'effet significatif de la surface sur la vitesse u (figure 7.29). En revanche, si nous mesurons l'angle β entre la plaque

et le « bras de filament » déformé (défini sur la figure 7.26), il semble que β change avec la nature de la plaque. Au cours de l'expérience, β semble diminuer avec le temps. Sur du verre, β varie entre 20 et 40° (suivant les expériences), tandis que pour une plaque de téflon, β varie entre 10 et 20°.

Conclusion

Après la déformation de filaments visqueux, nous nous sommes intéressés à celle de filaments viscoélastiques. Nous observons de nouvelles formes, dues au fait que le liquide se déplace vers le centre du filament. Pour deux solutions de polymère, nous avons vérifié que la distinction entre des phénomènes dominés par la gravité et d'autres régis par les effets capillaires perdure : comme avec des liquides newtoniens, les filaments longs ou épais (tels que $LD > a^2$) tombent tandis que les courts ou fins sont retenus par la tension de surface. En revanche, avec des liquides polymériques, la dynamique de ces écoulements élongationnels est modifiée : elle résulte d'une compétition entre gravité ou capillarité et élasticité des polymères, ce qui aboutit à la sélection d'un taux d'élongation inversement proportionnel au temps de relaxation τ du polymère. La nouvelle forme en V observée dans certains cas n'est vraisemblablement pas due à l'effet de la déformation causée par la gravité, mais à l'influence des conditions de fabrication du filament. Enfin, cette forme de V subit un phénomène de coalescence, qui met en évidence la propagation d'ondes de tension. Le caractère visqueux disparaît alors, les filaments se comportant comme des élastiques tendus.

Bibliographie

- [1] S. L. Anna and G. H. McKinley. Effect of a controlled pre-deformation history on extensional viscosity of dilute polymer solutions. *Rheologica Acta*, 47(8) :841–859, 2008. 143, 144, 147
- [2] C. Clasen, J. Eggers, M. A. Fontelos, J. Li, and G. H. McKinley. The beads-on-string structure of viscoelastic threads. *Journal of Fluid Mechanics*, 556 :283–308, 2006. 144, 149, 150
- [3] V. Tirtaatmadja, G. H. McKinley, and J. J. Cooper-White. Drop formation and breakup of low viscosity elastic fluids : Effects of molecular weight and concentration. *Physics of Fluids*, 18 :043101, 2006. 144
- [4] P. Oswald. *Rhéophysique ou comment coule la matière*. Belin, 2005. 145
- [5] A. V. Bazilevsky, V. M. Entov, and A. N. Rozhkov. Liquid filament microrheometer and some of its applications. *Proceedings of the Third European Rheology Conference*, pages 41–43, 1990. 137, 146

- [6] Entov V.M. and Hinch E.J. Effect of spectrum of relaxation times on the capillary thinning of a filament of elastic liquid. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 72 :31–53, 1997. 146, 147
- [7] J.G.Oldroyd. Formulation of rheological equations of state. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 200(1063) :523–541, 1950. 146
- [8] R.B.Bird, R.C.Armstrong, and O.Hassager. *Dynamics of polymeric liquids*. Wiley, 1987. 146
- [9] M. Goldin, J. Yerushalmi, R. Pfeffer, and R. Shinnar. Breakup of a laminar capillary jet of a viscoelastic fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 38 :689–711, 1969. 149
- [10] D.W. Bousfield, R. Keunings, G. Marrucci, and M.M. Denn. Nonlinear analysis of the surface tension driven breakup of viscoelastic filaments. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 21 :79–97, 1986. 149
- [11] Y. Amarouchene, D. Bonn, J. Meunier, and H. Kellay. Inhibition of the finite-time singularity during droplet fission of a polymeric fluid. *Phys. Rev. Lett.*, 86(16) :3558–3561, Apr 2001. 149
- [12] Y. Amarouchene. *Étude de l'interaction polymère-écoulement*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2002. 151
- [13] M.I.Kolte and P.Szabo. Capillary thinning of polymeric filaments. *J. Rheol.*, 43 :609–625, 1999. 151
- [14] G. H. McKinley and T. Sridhar. Filament-stretching rheometry of complex fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 34 :375–415, 2002. 151
- [15] F. Brochard-Wyart and P.-G. de Gennes. The viscous catenary : A poor man's approach. *Europhysics Letters*, 80(3) :36001, 2007. 120, 121, 151, 156
- [16] J. Teichman and L. Mahadevan. The viscous catenary. *Journal of Fluid Mechanics*, 478 :71–80, 2003. 118, 155
- [17] A. Roy, L. Mahadevan, and J.-L. Thiffeault. Fall and rise of a viscoelastic filament. *Journal of Fluid Mechanics*, 563 :283–292, 2006. 155
- [18] D.Cuvelier, I.Derényi, P.Bassereau, and P.Nassoy. Coalescence of membrane tethers : experiments, theory, and applications. *Biophysical Journal*, 88 :2714–2726, 2005. 161
- [19] J. Plateau. *Statique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-Villars, Paris, 1873. 121, 161
- [20] R. Stannarius, A. Nemeş, and A. Eremin. Plucking a liquid chord : Mechanical response of a liquid crystal filament. *Phys. Rev. E*, 72(2) :020702, Aug 2005. 163

- [21] J.Petzold, A.Neme, A.Eremin, C.Bailey, N.Diorio, A.Jákli, and R. Stannarius. Acoustically driven oscillations of freely suspended liquid crystal filaments. *Soft Matter*, 5 :3120–3126, 2009. 163
- [22] G.I. Taylor. The dynamics of thin sheets of fluid. II. Waves on fluid sheets. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 253(1274) :296–312, 1959. 164

Nous avons caractérisé dans cette partie plusieurs types de déformation de filaments visqueux.

Dans ces expériences, la compétition entre gravité et tension de surface détermine la forme des filaments et, dans une certaine mesure, leur dynamique. Nous avons vu que le critère qui sépare ces deux régimes s'écrit :

$$LD < a^2$$

où L et D sont la longueur et le diamètre du filament. Les filaments courts (L petit) ou fins (D petit) sont soumis aux effets capillaires, tandis que les filaments longs ou épais subissent l'action de la gravité.

Dans une première partie, nous avons considéré des filaments verticaux forcés par le déplacement des extrémités du fil visqueux (chapitres 4 et 5). On observe alors du flambage visqueux, caractérisé par des longueurs typiques D^2/L (chapitre 4) ou L (chapitre 5), comme dans le cas du flambage élastique. L'échelle de temps τ de l'expérience est alors imposée par ces longueurs et la vitesse de compression U : $\tau \sim D^2/LU$ ou $\tau \sim L/U$.

Dans une deuxième partie, les filaments visqueux sont horizontaux et libres d'évoluer, sous l'effet de la gravité ou de la capillarité (chapitre 6). Dans le premier cas, on met en évidence un temps caractéristique de chute $\eta/\rho g L$. Dans le deuxième, on identifie le temps caractéristique du drainage capillaire $\eta D/\gamma$.

L'importance du caractère élongationnel des écoulements est visible de façon marquante si les mêmes expériences sont conduites avec des liquides polymériques (chapitre 7). Les formes observées et les dynamiques associées sont alors fortement modifiées par l'élasticité des polymères.

Conclusion

Dans ce travail de thèse, plusieurs expériences nous ont permis d’explorer le lien entre interfaces déformables et dissipation. Plus précisément, nous avons caractérisé la dynamique de deux familles d’objets : des gouttes en caléfaction et des filaments visqueux.

Les expériences de la première partie sont marquées par les faibles frictions mesurées et le caractère inertiel des écoulements.

- Sur un toit d’usine, nous avons montré qu’une goutte en caléfaction se déplace spontanément par effet fusée à cause de l’asymétrie de l’échappement de vapeur, rendue possible par la non-réversibilité de cet écoulement¹. La question du changement d’échelle reste à explorer dans ce système. Réduire la taille du relief du toit d’usine permettrait par exemple de changer le rapport entre hauteur des marches et épaisseur du film de vapeur, et d’étudier le mouvement spontané de gouttes sphériques plus petites que la longueur capillaire. Le rôle de l’ébullition à température plus faible mériterait également d’être étudié (annexe B).
- Sur un solide crénelé, une goutte freine dix fois plus que sur un solide lisse, où la faible friction, de l’ordre d’un centième du poids, est principalement due à la dissipation dans l’air autour de la goutte. Nous avons montré que la perte d’énergie cinétique est alors due aux multiples chocs du liquide contre les montants des marches.
- Sur de l’eau, une goutte d’azote ralentit à cause de la résistance de vague que son mouvement engendre. Ce motif de sillage est rendu possible par l’existence

1. G. Lagubeau, M. Le Merrer, C. Clanet, D. Quéré, Leidenfrost on a ratchet, soumis à *Nature Physics*.

d'ondes de surface, conséquence d'un jeu entre gravité, tension de surface et inertie de l'eau. Nous avons ainsi pu mesurer quantitativement la résistance de vague dans une situation bien contrôlée, où le sillage est créé par le poids de la goutte². On peut envisager d'autres systèmes de mesure de cette force, par exemple avec des objets immergés (annexe E), ce qui permet d'isoler la résistance de vague des autres traînées, ainsi que de modifier la perturbation à l'origine du sillage.

Contrairement à ces mouvements inertiels, les déformations de filaments visqueux de la seconde partie sont dominées par les contraintes visqueuses associées aux écoulements élongationnels. Les formes observées sont très variées : flambage, plectonème, chaînette, U, V, Y.

- Si l'on comprime les filaments, seule la viscosité joue, et le liquide se comporte comme un solide élastique capable de flamber. Nous mettons en évidence le seuil du flambage visqueux, dans le régime capillaire. Le régime dominé par la gravité mériterait d'être étudié à l'avenir, notamment pour le mettre en lien avec d'autres exemples de flambage observés sur des jets visqueux³ : un filament visqueux suffisamment long peut flamber parce qu'on le comprime aux extrémités, comme dans nos expériences, ou parce qu'il s'écoule sous l'effet de la gravité. Nous avons aussi montré l'existence possible de plectonèmes visqueux, dont nous comprenons le seuil de formation. Le régime des fréquences de rotation élevées, dans lequel on observe des boucles multiples, reste à explorer.
- Si en revanche le filament est libre de se déformer, sa dynamique découle d'une compétition entre viscosité et capillarité ou gravité, selon l'importance relative de ces deux derniers effets, que l'on peut déterminer par le rapport de la surface des filaments sur le carré de la longueur capillaire⁴. Le rôle de la viscoélasticité sur l'évolution d'un tel filament dans le champ de la gravité reste à clarifier, notamment à l'aide de liquides complexes mieux caractérisés, ainsi qu'en contrôlant avec précision les conditions de fabrication des filaments, afin de pouvoir découpler les différents effets en présence.

2. M. Le Merrer, F. Chevy, É. Raphaël, C. Clanet, D. Quéré, Drag on floating bodies, lettre en préparation.

3. L. Mahadevan, W. S. Ryu, and A. D. T. Samuel. Fluid 'rope trick' investigated. *Nature*, 392 :140, 1998 ; N.M. Ribe. Coiling of viscous jets. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 460 :3223–3239, 2004.

4. M. Le Merrer, J. Seiwert, D. Quéré, C. Clanet, Shapes of hanging viscous filaments, *Europhysics Letters*, 84 (2008) 56004.

Annexes

ANNEXE A

Caléfaction avec de la carboglace

avec Jacopo Seiwert

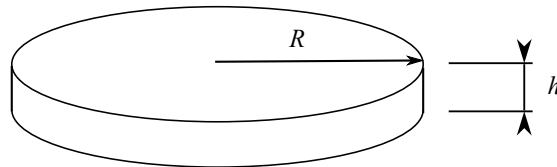


FIGURE A.1 – Géométrie des palets de carboglace que l'on observe : la hauteur initiale h est de l'ordre du centimètre et le rayon R de quelques centimètres.

Lors de notre étude de l'autopropulsion des gouttes sur le toit d'usine (chapitre 1), nous avons été amenés à travailler avec des palets de carboglace, qui sont des objets solides en caléfaction. Nous nous sommes alors demandés si les lois caractéristiques de la caléfaction (taux d'évaporation et épaisseur du film de vapeur notamment) étaient toujours valables pour un solide de Leidenfrost. Pour cela, nous avons effectué une série d'expériences sur des palets cylindriques de carboglace de rayon centimétrique et de hauteur initialement centimétrique, schématisés sur la fi-

gure A.1. On pose ces cylindres sur une plaque d'aluminium chauffée à 350 °C et on prend des images à intervalles réguliers du palet, ainsi que du film de vapeur sous-jacent à l'aide d'une loupe (figure A.2).

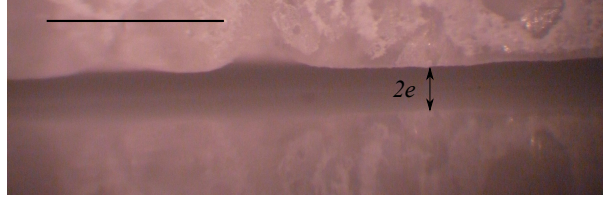


FIGURE A.2 – Vue à la loupe du dessous du palet de carboglace : on observe le palet et sa réflexion sur le substrat. On peut alors mesurer la distance entre le bord inférieur du palet et son image, qui est 2 fois l'épaisseur e du film de vapeur. Le trait horizontal noir représente 1 mm.

On observe que lorsque le palet s'évapore, son rayon R ne change pratiquement pas, tandis que sa hauteur h diminue au cours du temps. Pour plusieurs morceaux de carboglace de différents rayons R , on mesure h en fonction du temps t , en même temps que l'épaisseur e du film de vapeur. Nos résultats sont présentés sur la figure A.3.

En comparaison de ce que l'on peut observer avec des liquides, on voit que les taux d'évaporation sont semblables avec ceux des gouttes liquides : $|\dot{h}| \sim 10 \mu\text{m/s}$ donc $|\dot{M}| \sim \rho R^2 |\dot{h}| \sim 1 \text{ mg/s}$. Les films de vapeur sont un peu plus épais sous la carboglace (environ 200 microns), mais du même ordre de grandeur que sous les gouttes.

Si les lois valables avec des gouttes restent vraies pour la carboglace, quelles lois attendrait-on pour h et e ? Le moteur de l'évaporation est la diffusion thermique dans le film de vapeur :

$$\mathcal{L}\dot{M} \sim \rho \mathcal{L} R^2 \dot{h} \sim -\lambda R^2 \frac{\Delta T}{e} \quad (\text{A.1})$$

en reprenant les notations du chapitre 1. Cette équation se réécrit :

$$\dot{h} \sim -\frac{\lambda}{\rho \mathcal{L}} \frac{\Delta T}{e} \quad (\text{A.2})$$

Si la goutte est soutenue par l'écoulement de vapeur sous-jacent de vitesse U , l'équilibre mécanique s'écrit :

$$Mg \sim \eta \frac{R^3}{e^2} U \quad (\text{A.3})$$

En utilisant la conservation de la masse $\dot{M} \sim -\rho_v R e U$, il vient :

$$\rho_v g h \sim -\eta \frac{R^2}{e^3} \dot{h} \quad (\text{A.4})$$

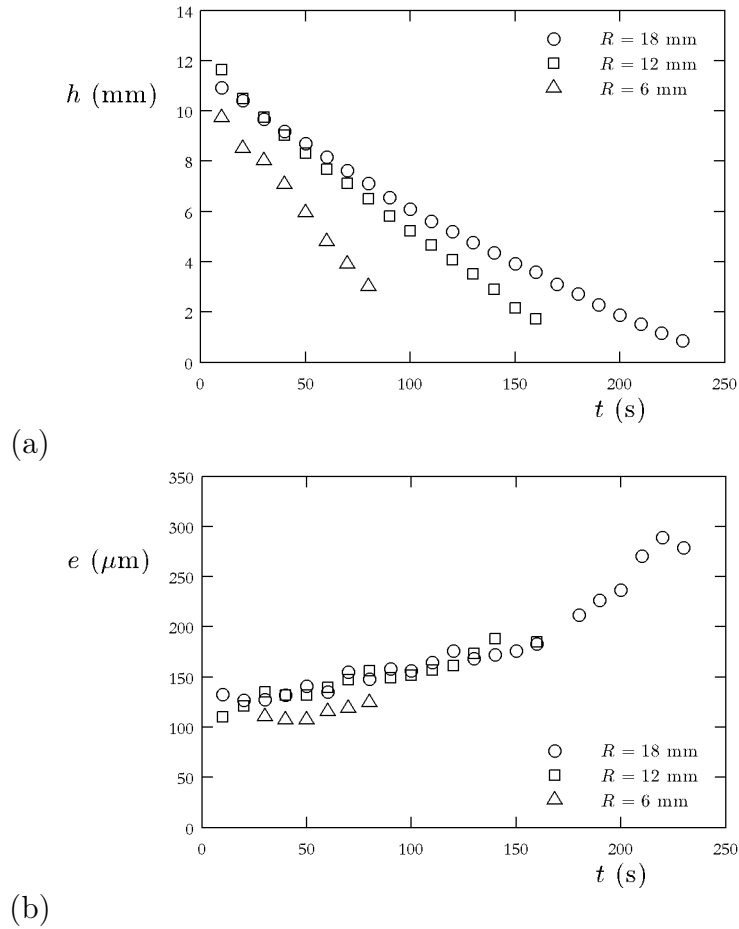


FIGURE A.3 – Pour des cylindres de carboglace de différents rayons R on représente (a) la hauteur h et (b) l'épaisseur e du film de vapeur, en fonction du temps t .

Pour tester séparément les deux lois (A.2) et (A.4), il faudrait pouvoir tracer la dérivée $\dot{h}$ en fonction de $1/e$ d'un côté et de $e^3 h/R^2$ de l'autre. Comme nos mesures de h sont trop bruitées pour cela, on peut plutôt tracer $h_0 - h$ en fonction de l'intégrale $\int dt/e$ ou $\int dt e^3 h/R^2$. C'est ce que nous faisons sur la figure A.4.

On voit alors que $h_0 - h$ varie bien linéairement avec $\int dt/e$, mais que le coefficient numérique change quand R devient grand. Cela signifie que l'on a bien un transport de chaleur diffusif dans le film de vapeur, mais qu'il n'est pas aussi simple que ce que nous avons décrit précédemment. Une raison à cela pourrait être la taille importante des morceaux de carboglace utilisés, par rapport aux expériences avec des gouttes, et le temps de plusieurs minutes passé par la carboglace au dessus de la plaque chauffée. La plaque se refroidit localement (et ce d'autant plus que le palet est grand), ce qui diminue l'évaporation. $|\dot{h}|$ est donc plus faible que ce que l'on attendrait, comme on le voit avec le palet le plus grand.

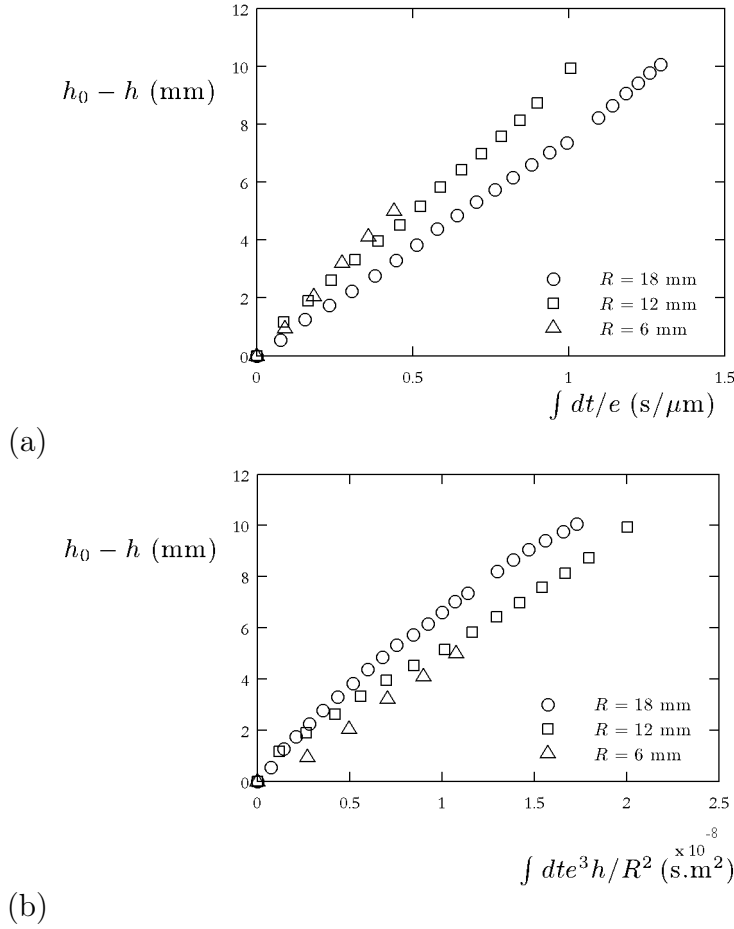


FIGURE A.4 – Pour les expériences de la figure A.3, on trace $h_0 - h$ en fonction de (a) $\int dt/e$ et (b) $\int dt e^3 h / R^2$.

En revanche, $h_0 - h$ ne varie pas linéairement avec $\int dt e^3 h / R^2$, la dépendance est un peu plus faible que ce qui est attendu ; d'après nos mesures, il semblerait qu'on ait plutôt $h_0 - h \propto (\int dt e^3 h / R^2)^{5/6}$. On observe aussi une légère dépendance, inattendue, en fonction de R . L'écoulement dans le film de vapeur sous la carboglance diffère donc sans doute un peu de celui sous une goutte liquide.

On peut également se demander quelle force de propulsion s'exercerait sur un palet de carboglance sur le toit d'usine, dans le cas où le film de vapeur est plus épais que la hauteur des marches. Les équations (A.1) et (A.3) permettent de prédire une force de propulsion $\dot{M}U$ variant comme $R^{3/2}$ et $h^{3/4}$. Il serait alors intéressant de comparer cette prédiction à une mesure de la force de propulsion (comme au chapitre 1), pour des palets de différents rayons et hauteurs.

Caléfaction sur une marche : rôle de l'ébullition

avec Guillaume Lagubeau

Lors de l'étude du mouvement d'une goutte sur un toit d'usine au chapitre 1, nous avons évoqué le fait que la température avait un rôle non trivial dans ce système, puisqu'accroître la température augmente l'évaporation tout en diminuant l'asymétrie de l'écoulement de vapeur. Par ailleurs, Linke *et al.* [1] ont noté dans leurs mesures d'accélération de gouttes sur un toit d'usine un régime limité de températures, légèrement au-dessus de la température de Leidenfrost, pour lequel les accélérations mesurées sont beaucoup plus élevées (jusqu'à 1 m/s^2) qu'à des températures plus élevées où elles sont de l'ordre de $0,2 \text{ m/s}^2$. Ce régime, noté (L), est en particulier visible sur la figure 1.10(b).

Nous avons ici cherché à préciser l'effet de la température dans un système un peu différent, celui d'une marche unique de 60 microns, du même ordre de grandeur que les écailles du toit d'usine, sur laquelle on fait rebondir une goutte d'eau de rayon $R = 1,5 \text{ mm}$ (figure B.1). Dans cette situation, la marche pourrait, comme les écailles du toit d'usine, empêcher l'écoulement de vapeur d'un côté et exercer une force qui propulserait la goutte dans le sens de la montée de la marche (figure B.2).

On note x l'abscisse du centre de gravité de la goutte, en prenant l'origine au niveau de la marche. On s'intéresse à la direction du rebond de la goutte. On observe que, quand la goutte arrive à droite d'une certaine position limite $x > x_l$, elle rebondit vers la droite, tandis que si elle arrive à gauche ($x < x_l$), elle rebondit à gauche (figure B.3). On regarde alors comment cette position limite x_l varie quand on change la température (figure B.4). En l'absence d'effets de type fusée liés à l'évaporation, on s'attendrait à ce que la goutte parte vers la gauche (« descende »

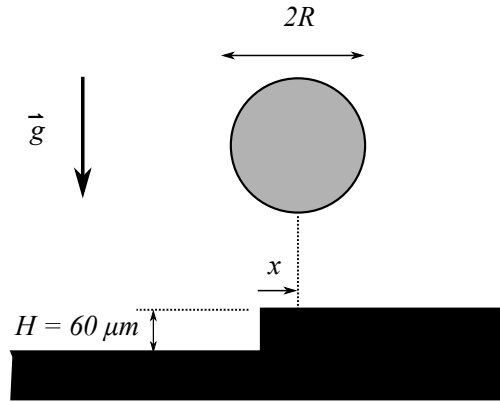


FIGURE B.1 – Schéma de l'expérience : on fait tomber une goutte d'eau de rayon R sur une surface présentant une marche de 60 microns. On s'intéresse à l'influence de la position de la goutte par rapport à la marche x .

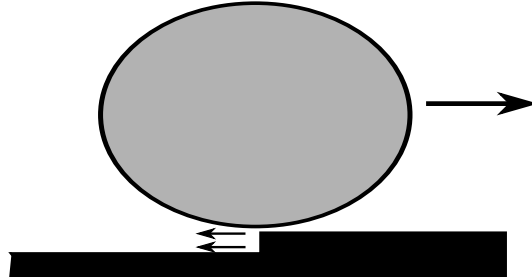


FIGURE B.2 – La marche bloque l'écoulement de vapeur d'un côté. La perte de masse se fait donc dans une direction, ce qui propulse la goutte par effet fusée. La force de propulsion tend à faire remonter la marche.

la marche) dès qu'elle est en contact avec la partie plus basse : $x_l = R = 1,5 \text{ mm}$. Cela correspond à la limite en pointillés sur la figure B.4, sur laquelle on représente x_l en fonction de la température T du substrat. On observe alors que x_l augmente avec T . Quand T est grand (supérieur à 300°C), x_l vaut presque $1,5 \text{ mm}$. La gravité domine ; cela n'est pas surprenant car nous avons vu au chapitre 1 que la force de propulsion était de l'ordre du dixième du poids des gouttes sur le toit d'usine. En revanche, quand T passe en dessous de 300°C , x_l diminue et devient même négatif. Cela signifie que la goutte est alors capable de remonter la marche, malgré son poids.

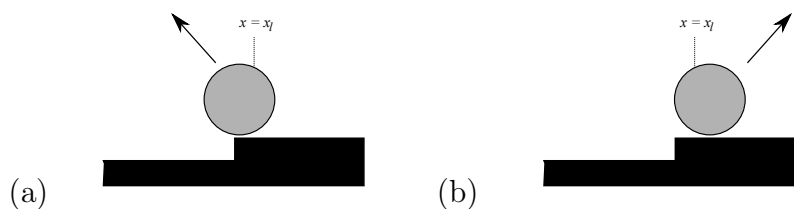


FIGURE B.3 – Deux cas de figure peuvent survenir : (a) si la goutte arrive à gauche de la position limite ($x < x_l$), elle rebondit à gauche ; (b) si elle arrive à droite ($x > x_l$), elle rebondit à droite.

Cette expérience nous confirme qu'à « basse » température (près de la température de Leidenfrost), la remontée des marches est plus efficace. Cela ne peut pas être simplement expliqué par l'effet fusée que nous avons évoqué précédemment, puisque le taux d'évaporation, et donc le moteur de gouttes, diminue quand on refroidit le substrat. Linke suggère que ce régime particulier pourrait être dû à des effets d'ébullition. En effet, les coins se refroidissent plus que le reste de la plaque, on peut donc passer localement en dessous de la température de Leidenfrost, et donc avoir des événements d'ébullition. Dans ce cas, il peut y avoir nucléation d'une bulle à l'intérieur de la goutte, qui peut provoquer une expulsion de vapeur de la goutte. On a donc un effet fusée, mais beaucoup plus violent que ce que l'on observe à haute température.

Une manifestation spectaculaire de cet effet survient quand une goutte se déplace sur la surface et rencontre une marche dans le sens de la descente. Dans certaines conditions, on peut ainsi la voir changer de sens : elle « rebondit » sur la marche descendante, comme on peut le voir sur la figure B.5.

Bibliographie

- [1] H. Linke, B. J. Alemán, L. D. Melling, M. J. Taormina, M. J. Francis, C. C. Dow-Hygelund, V. Narayanan, R. P. Taylor, and A. Stout. Self-propelled leidenfrost droplets. *Physical Review Letters*, 96(15) :154502, 2006. 13, 22, 23, 26, 27, 179

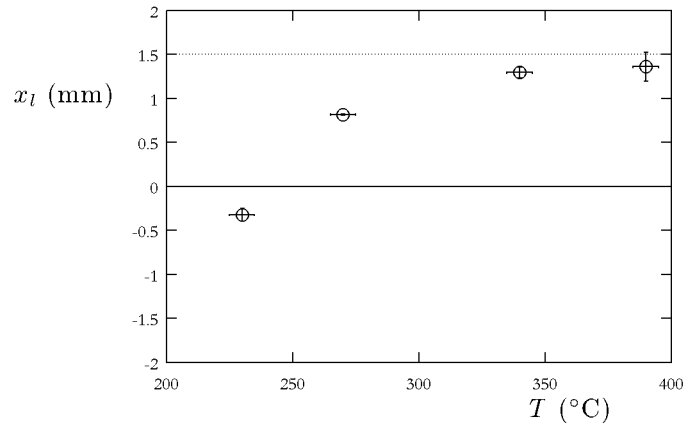


FIGURE B.4 – Position limite x_l en fonction de la température T .

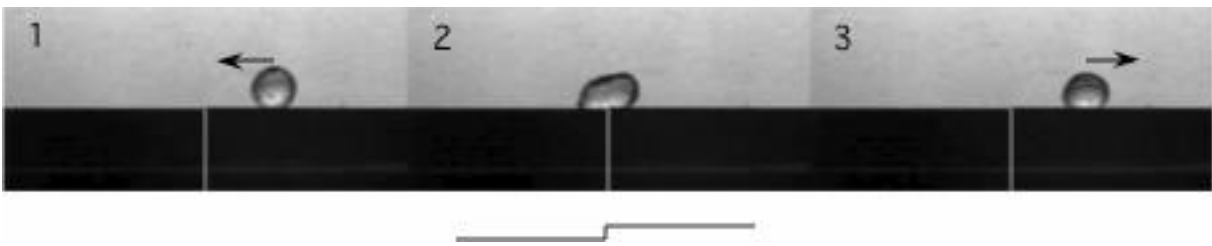


FIGURE B.5 – Sur une plaque à 200 °C, on lance (1) une goutte d'eau vers la gauche, dans le sens qui descend la marche de 60 μm . Lorsqu'elle arrive au niveau de la marche (2), elle s'arrête et repart dans le sens opposé (3).

Oscillations de gouttes sur un cercle

Une des principales difficultés expérimentales pour mesurer le freinage de gouttes en caléfaction est la grande distance de parcours nécessaire pour mesurer un effet (chapitre 2). Un moyen de réduire le champ d'observation tout en gardant une trajectoire assez longue est de faire osciller les gouttes dans un arc de cercle. La trajectoire est alors confinée par la gravité.

Expérience

L'expérience est la suivante : on pose une goutte d'azote liquide à l'intérieur d'un arc de cercle, comme sur la figure C.1(a), et on la laisse évoluer. On mesure alors l'angle θ qu'elle parcourt le long de l'arc en fonction du temps t (figure C.1(b)). Un exemple de mesure est donné sur la figure C.2(a). On dispose pour cette expérience de deux arcs de quelques centimètres, de rayons respectifs $L = 2,7$ et $4,8$ cm, sur lesquels est gravée une petite rigole permettant de maintenir la goutte ; la profondeur de la rigole est, respectivement, de 200 et 500 μm .

On observe figure C.2(a) des oscillations amorties, avec un temps caractéristique de l'ordre de la dizaine de secondes, beaucoup plus grand que la période des oscillations τ , qui vaut une fraction de seconde. La vitesse typique des gouttes est alors d'ordre $L\theta/\tau$, soit entre 0 et 10 cm/s. Elle est donc plus faible que dans l'expérience du paragraphe 2.1.2. Comme cette expérience dure plusieurs secondes (contre une fraction de seconde pour l'expérience du 2.1.2), l'évaporation de la goutte n'est plus négligeable sur la durée de l'expérience. Nous mesurons donc, à partir du profil de la goutte sur les images, son volume Ω en fonction du temps t . Un exemple de cette

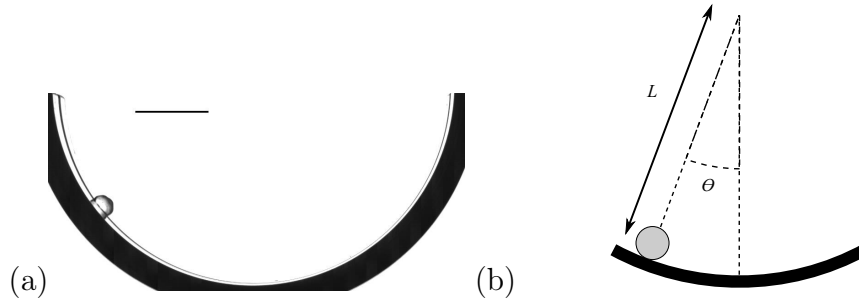


FIGURE C.1 – Oscillations d’une goutte d’azote liquide sur un arc de cercle : (a) photo de l’expérience (le trait noir a une longueur d’un centimètre) (b) schéma de l’expérience : on mesure l’angle θ qui décrit la trajectoire de la goutte sur l’arc de rayon L .

mesure est donnée à la figure C.2(b).

En l’absence de force de frottement, et dans un régime de petits angles, on s’attend à ce que la goutte ait un mouvement de pendule, de période $\tau = 2\pi\sqrt{L/g}$. Pour l’expérience de la figure C.2, pour laquelle $L = 4,8$ cm, la mesure de la période d’oscillations montre qu’elle est à peu près égale à $2\pi\sqrt{L/g} = 0,44$ s, mais qu’elle décroît légèrement — de 0,54 s à 0,44 s — au cours de l’expérience (qui dure environ 15 s). Ce raccourcissement de période peut s’expliquer par le fait que les oscillations ne sont pas ici de petite amplitude $\theta_0 \ll 1$. À l’ordre suivant en θ_0 , la période des oscillations est donnée par la formule de Borda $\tau = 2\pi\sqrt{L/g}(1 + \theta_0^2/16)$. Pour $\theta_0 \approx \pi/2$, on trouve que la période attendue est 15 % plus élevée que $2\pi\sqrt{L/g}$, ce qui est cohérent avec nos mesures.

Atténuation

Une trajectoire comme celle de la figure C.2(a) permet de mesurer l’atténuation des oscillations sur quelques périodes, comme on le voit sur la figure C.3. On en déduit un taux d’atténuation moyen λ , qui augmente au cours du temps, comme on peut le voir sur la figure C.4, au fur et à mesure que la taille de la goutte et l’amplitude des oscillations diminue. On voit que l’ordre de grandeur de λ est $0,1 \text{ s}^{-1}$. On en déduit une distance typique du freinage $L\theta/\lambda\tau \approx (5 \cdot 10^{-2} \times 1)/(0,1 \times 0,5) \approx 1$ m, comparable à ce que l’on observe sur un solide plan (chapitre 2).

Pour plusieurs expériences, on trace λ en fonction de la vitesse caractéristique $L\theta_m/\tau$, où θ_m est l’amplitude moyenne des oscillations (figure C.5). Suivant la force de friction F et sa dépendance avec la vitesse V , on attend des variations différentes de λ avec V :

Type de force	F	λ
Traînée visqueuse	V^1	V^0
Traînée inertielle	V^2	V^1
Traînée de peau	$V^{3/2}$	$V^{1/2}$

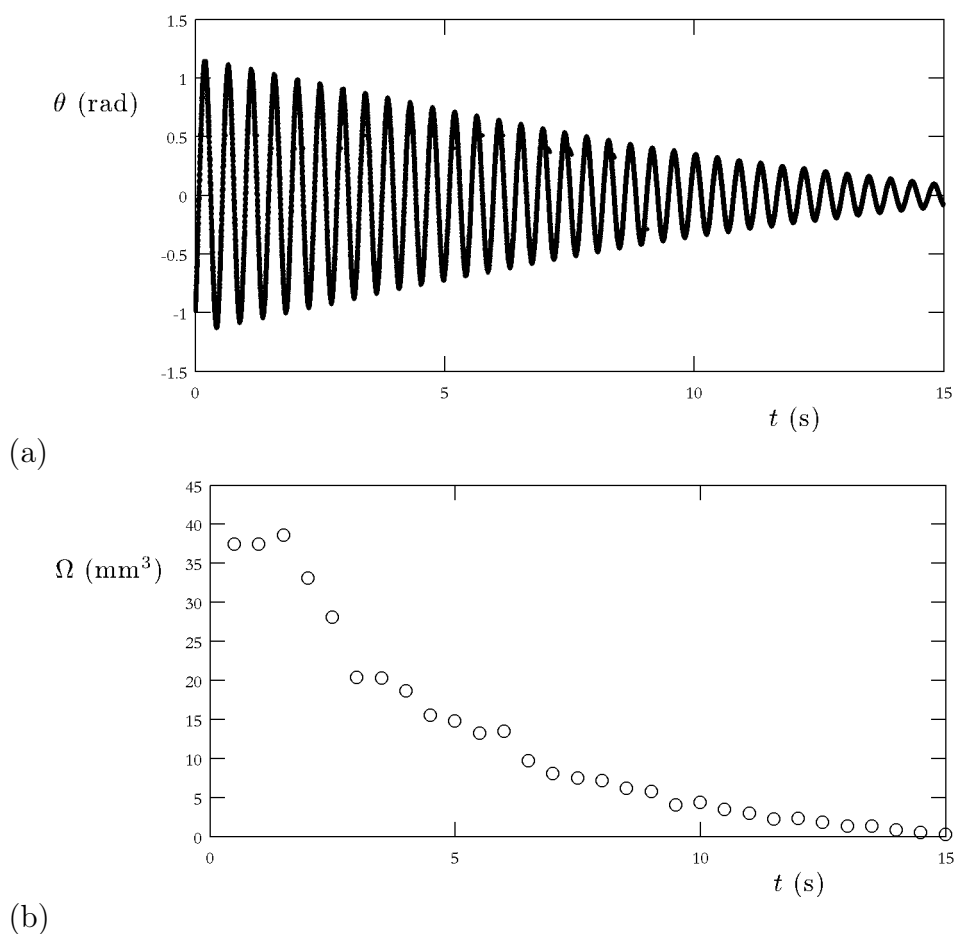


FIGURE C.2 – Goutte d’azote liquide sur un arc de cercle de rayon $L = 4,8$ cm. Pour la même expérience, on mesure (a) l’angle θ et (b) le volume de la goutte Ω en fonction du temps t . L’erreur relative sur le volume, d’environ 15 %, est en grande partie due aux oscillations de la surface de la goutte.

Nos mesures sont cependant trop dispersées pour nous permettre de conclure quant à la nature de la friction.

Pour ces mêmes expériences, on trace λ en fonction du rayon équatorial R , pour différentes vitesses caractéristiques (figure C.6). Dans cette représentation logarithmique, on voit que λ décroît quand le rayon de la goutte augmente et varie qualitativement comme $1/R$ (sans que l’on observe de changement de comportement très marquant quand R vaut la longueur capillaire $a = 1,1$ mm), ce qui correspondrait à une force de friction (proportionnelle à $\Omega\lambda$) en R^2 pour les gouttes plus petites que a , dont le volume varie en R^3 , et en R pour les gouttes plus grandes que a , dont le volume est proportionnel à R^2 .

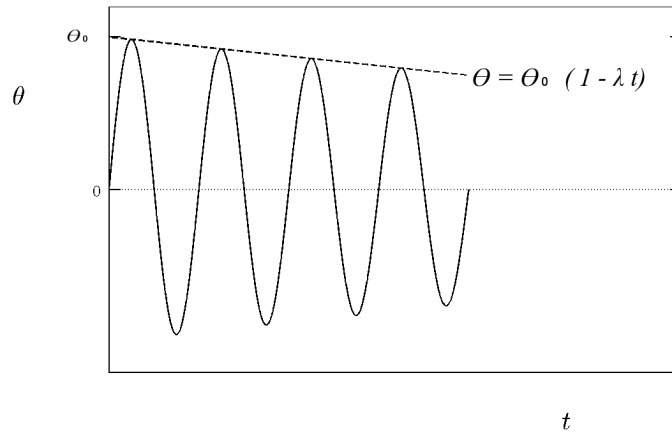


FIGURE C.3 – Principe de la mesure du taux d’atténuation λ : sur quelques périodes, tout se passe comme si l’amplitude de l’oscillation était atténuée linéairement. On peut donc déduire de la courbe $\theta(t)$ un taux d’atténuation moyen pour cet ensemble de périodes.

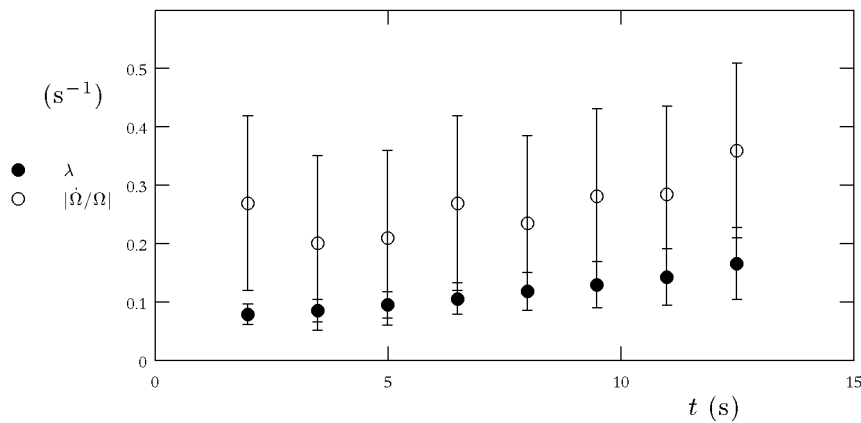


FIGURE C.4 – Taux d’atténuation λ et taux relatif d’évaporation $|\dot{\Omega}/\Omega|$ en fonction du temps t , pour l’expérience de la figure C.2.

Évaporation

Tout ce que nous avons écrit jusqu’à présent est valable pour un système fermé, de masse constante au cours du temps. Ce n’est pas le cas ici où les gouttes s’évaporent au cours de l’expérience. À partir des images, nous avons vu que nous pouvons mesurer le volume de la goutte en fonction du temps (figure C.2(b)). On peut donc estimer le taux d’évaporation relatif $\dot{M}/M = \dot{\Omega}/\Omega$ en fonction du temps (figure C.4). On peut aussi regarder comment le taux d’évaporation varie en fonction de la taille des gouttes (figure C.7).

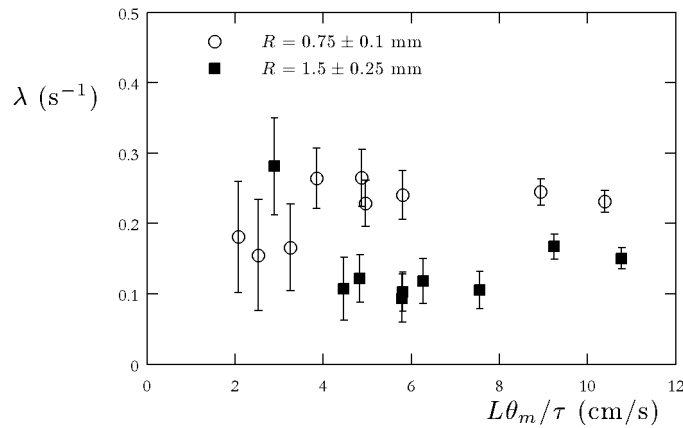


FIGURE C.5 – Taux d'atténuation λ en fonction de la vitesse $L\theta_m/\tau$, pour deux rayons de gouttes différents ($R = 0,75$ mm et $R = 1,5$ mm).

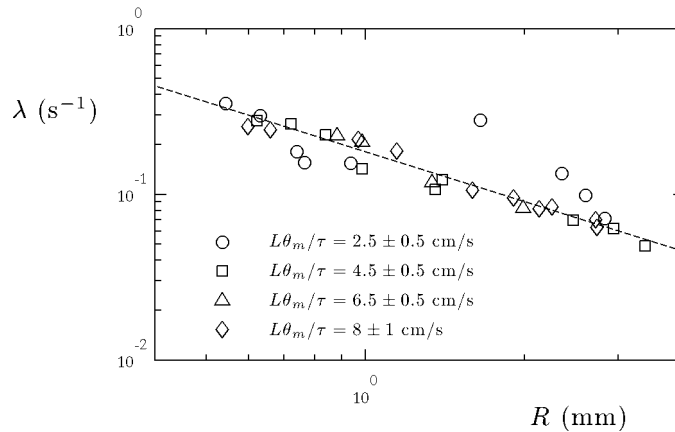


FIGURE C.6 – Taux d'atténuation λ en fonction du rayon R de la goutte, pour différentes vitesses entre 2 et 8 cm/s. La droite en pointillés suggère une variation en $1/R$.

Dans un régime statique, d'après le chapitre 1, nous attendons les lois d'évaporation suivantes :

- petites gouttes ($R < a$) : le taux d'évaporation $\dot{\Omega}$ est proportionnel à R .
- grosses gouttes ($R > a$) : $\dot{\Omega}$ est proportionnel à $R^{3/2}$.

Ces prédictions prédisent des variations avec R un peu moins sensibles que ce que nous observons figure C.7 ($\dot{\Omega}$ variant comme $R^{1,7}$). On peut cependant imaginer plusieurs mécanismes modifiant l'évaporation dans ce système. Tout d'abord, le support de la goutte n'est pas plat, mais courbé dans deux directions. Cela pourrait avoir une influence sur la zone du film de vapeur, et donc l'évaporation. D'autre part, la goutte se déplace. On peut imaginer que sa vitesse modifie l'évaporation

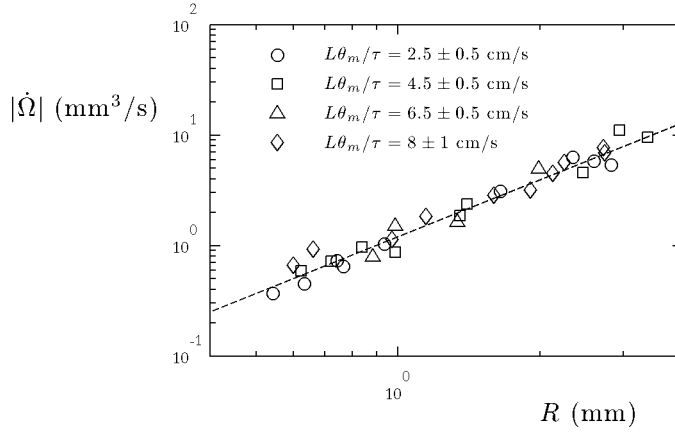


FIGURE C.7 – Taux d’atténuation $|\dot{\Omega}|$ en fonction du rayon R de la goutte, pour différentes vitesses entre 2 et 8 cm/s. La droite correspond à une variation en $R^{1.7}$.

pour deux raisons.

Premier mécanisme : la vitesse de la goutte perturbe l’écoulement de vapeur sous la goutte, ce qui modifie l’échange de chaleur entre substrat et goutte. On s’attend cependant à ce que cet effet soit sensible quand la vitesse de la goutte V devient de l’ordre de la vitesse d’éjection de la vapeur U (chapitre 1). Ce n’est pas le cas dans cette expérience où $V \sim 10$ cm/s est plus faible que $U \sim 1$ m/s.

Deuxième mécanisme : le déplacement de la goutte renouvelle l’air autour de la goutte, ce qui perturbe l’échange de chaleur entre goutte et air environnant, qui serait diffusif en l’absence de mouvement. Imaginons que la situation stationnaire de diffusion de la chaleur considérée au chapitre 1 n’ait pas le temps de s’instaurer, c’est-à-dire que la taille de la couche limite de Prandtl $\sqrt{KR/V}$ (où $K \sim 10^{-5}$ m²/s est la diffusivité thermique de la vapeur) soit plus petite que l’échelle du régime diffusif R . Cela se produit quand $V > K/R$, soit pour des vitesses plus grandes que le centimètre par seconde, donc dans le régime de nos expériences. Dans ce cas, l’équilibre thermique de la goutte (équation 1.6) s’écrit (en conservant les notations du chapitre 1) :

$$|\dot{\Omega}| \sim \frac{\lambda}{\mathcal{L}\rho} R^2 \frac{\Delta T}{\sqrt{KR/V}} \sim \frac{\lambda \Delta T}{\mathcal{L}\rho} \frac{R^{3/2} V^{3/2}}{K^{1/2}}$$

En prenant $\mathcal{L} \sim 2$ kJ/kg, $\lambda \sim 3 \cdot 10^{-2}$ W/m/K, $R \sim 1$ mm et $V \sim 10$ cm/s, on trouve $|\dot{\Omega}| \sim 10$ mm³/s, du même ordre de grandeur que les mesures.

Pour les petites gouttes, la variation prédite par ce raisonnement ($\dot{\Omega}$ variant comme $R^{3/2}$) est plus compatible avec les expériences (figure C.7) que le scénario « statique » ($\dot{\Omega}$ variant comme R). Par ailleurs, on peut également regarder comment $\dot{\Omega}$ varie en fonction de la vitesse caractéristique $L\theta_m/\tau$ (figure C.8). Ces mesures ne

permettent pas vraiment de conclure, mais on peut remarquer que l'évaporation des petites gouttes augmente légèrement avec la vitesse pour $L\theta_m/\tau > 6$ cm/s.

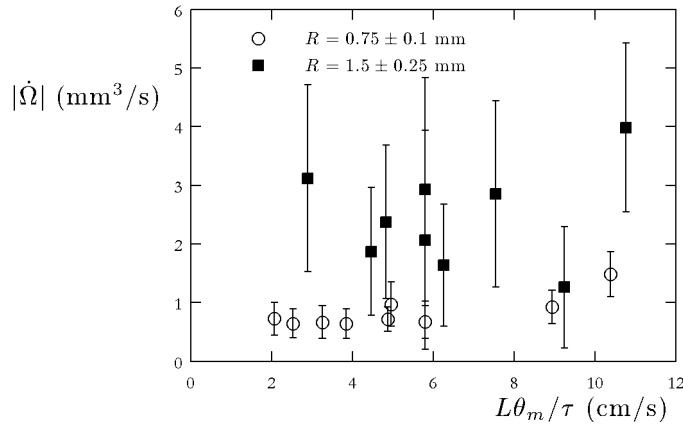


FIGURE C.8 – Taux d'atténuation $|\dot{\Omega}|$ en fonction de la vitesse $L\theta_m/\tau$, pour deux rayons de gouttes différents ($R = 0,75$ mm et $R = 1,5$ mm).

Effet de l'évaporation sur le mouvement

À la figure C.4, on remarque que $|\dot{\Omega}/\Omega|$ est du même ordre que λ , ce qui suggère que l'évaporation pourrait jouer un rôle dans la dynamique de la goutte à faible vitesse.

Nous avons vu avec l'exemple du toit d'usine (chapitre 1) que si l'on dissymétrise l'écoulement de vapeur sous la goutte, une force de réaction peut apparaître qui propulse la goutte en sens inverse de l'écoulement de vapeur. Cet exemple nous laisse penser que l'évaporation permanente de la goutte pourrait modifier sa vitesse.

Considérons alors une goutte de masse M et de vitesse V . Sa masse diminue au cours du temps : $\dot{M} < 0$, et la vapeur formée a une vitesse moyenne u par rapport au support de l'expérience. En l'absence d'autre force extérieure, un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé « goutte + vapeur » donne :

$$M \frac{dV}{dt} = \dot{M}(u - V)$$

Pour évaluer l'importance de l'évaporation sur la dynamique de la goutte, il faudrait connaître la vitesse u de la vapeur. Ce n'est malheureusement pas le cas. Nous pouvons cependant envisager deux cas de figure extrêmes :

- la vitesse moyenne relative de la vapeur par rapport à la goutte est nulle : $u = V$. Dans ce cas, l'évaporation n'a pas d'effet sur la variation de quantité de mouvement.

- la vitesse moyenne de la vapeur par rapport au substrat est nulle : $u = 0$. Dans ce cas, la vitesse relative vaut $-V$, et la force apparente $-\dot{M}V$ est une force de propulsion. Comme $|\dot{\Omega}/\Omega|$ est proche de λ , cela signifie que cette force de propulsion est du même ordre de grandeur que les forces de friction dans cette expérience.

Gel de gouttes sur des surfaces superhydrophobes

Dans la première partie de ce manuscrit, nous avons étudié certaines caractéristiques de la dynamique de gouttes en caléfaction. Une propriété de l'état Leidenfrost que nous avons en revanche peu considérée est le caractère d'isolant thermique du film de vapeur sous la goutte, qui permet à cette dernière d'exister pendant des durées surprenantes pour de tels objets, jusqu'à la minute (figure 1.2).

Ce travail, qui a été réalisé à l'occasion du stage de Piotr Tourkine, est en partie inspiré de cette remarque — l'air est en effet un très mauvais conducteur de chaleur — et de la suivante : une goutte sur une surface superhydrophobe peut être en état dit « fakir » et elle ne repose alors sur le substrat qu'en des points très isolés. La surface sous la goutte est alors composite et formée en grande partie d'air.

Nous nous demandons comment cette couche de gaz peut diminuer les transferts thermiques entre goutte et substrat. Une conséquence de cet effet est de retarder le gel d'une goutte, ce qui a un intérêt pratique évident si l'on cherche à éviter la formation de givre sur certaines surfaces.

Delayed Freezing on Water Repellent Materials

Piotr Tourkine, Marie Le Merrer, and David Quéré*

*Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes, UMR 7636 du CNRS, ESPCI, 75005 Paris, France, and
Ladhyx, UMR 7646 du CNRS, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France*

Received March 17, 2009. Revised Manuscript Received May 25, 2009

Water drops on hydrophobic microtextured materials sit on a mixture of solid and air. In standard superhydrophobic situations, the drop contacts more air than solid, so that we can think of exploiting the insulating properties of this sublayer. We show here that its presence induces a significant delay in freezing, when depositing water on cold solids. If the substrate is slightly tilted, these drops can thus be removed without freezing and without accumulating on the substrate, a property of obvious practical interest.

A liquid deposited on a solid decorated with a hydrophobic microtexture has two main configurations.^{1,2} Either it conforms to the contours of the solid surface (Wenzel state) or it rests on the crests of the roughness, leaving the cavities below filled with air. This latter condition, the Cassie state, is also referred to as the “fakir” state, since the drop then sits on a bed of micronails.^{3,4} Comparing the surface energies of the two states indicates which one should be preferred, even if metastable Cassie states are often observed on dilute textures, despite a higher surface energy.^{5,6} Owing to the presence of air below the liquid, the fakir situation generates remarkable properties, such as reduced adhesion (which prevents drops from sticking),^{2,7,8} large slip (when water flows along the surface),^{9,10} and antifogging properties for nanostructured materials.¹¹

The substantial presence of air below the drop may also provide a thermal barrier between the solid and the liquid. Compare this configuration with the one reported long ago by Leidenfrost where water drops are observed to stay very long in hot spoons (temperature around 300 °C), due to the presence of a vapor film between the solid and the liquid.¹² This film prevents contact between both phases and thus the nucleation of bubbles (these drops indeed do not boil). Moreover, its insulating properties delay evaporation: water droplets of radius $R = 1$ mm can have lifetimes as high as 100 s on such hot solids!¹³

The air sublayer in a superhydrophobic state is somewhat different from a Leidenfrost film. Its thickness is directly related to the texture height (often a few micrometers), which makes it generally much thinner than a Leidenfrost film, whose thickness typically is 100 μm .¹³ In addition, only a small fraction of the surface area of a fakir drop directly contacts the solid, contrasting

with a Leidenfrost drop, which literally floats on a vapor cushion. Nonetheless, as shown from contact angle measurements and from direct observations, the liquid/air surface area below a fakir drop is much larger than the solid/liquid surface area (by a factor of 10–100).^{8,14} Therefore, it appears likely that these air sublayers can provide substantial thermal insulation, and we demonstrate here that freezing is indeed significantly delayed when depositing water on cold superhydrophobic materials.

We first fabricated rough surfaces, following the robust and convenient method proposed by Larmour et al.¹⁵ Copper plates (dimensions 5 cm $\times$ 5 cm) are immersed in a 0.1 M solution of silver nitrate, which induces roughness at the scale of a few micrometers. Varying the immersion time, we showed that the desired wetting properties were reached after 1 min; a longer immersion does not provide any improvement. The relevant level of roughness is directly apparent from the darkening of the copper plates. The rough surfaces are then plunged 30 min in a bath of ethanol containing a (volumetric) proportion of 3×10^{-4} of fluorinated thiols. These HDFT molecules (3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,9,9,10,10,10-heptafluoro-1-decanethiol) chemisorb onto the copper, forming a hydrophobic monolayer. Hence, we get rough (super-) hydrophobic surfaces, with advancing and receding contact angles of 165° and 155°, respectively. The corresponding low value of the hysteresis (10°) is consistent with the fakir state.

An aluminum plate is then brought in contact with a circulation of cryogenic liquid whose temperature is fixed for this study at -12 °C. The plate temperature is measured and found to be -8 °C. Both superhydrophobic and regular copper substrates are attached to this plate and quickly reach the same constant temperature. Without any precaution, the substrates are covered with frost within 30 min, due to condensation of water from the air. This phenomenon of course opposes any potential effect related to the presence of an air cushion, since this cushion is then replaced by ice. We have found that condensation can be avoided by simply covering the substrate with an inverted Petri dish.

The experiments consist of depositing a volume Ω of distilled deionized water (generally between 10 and 200 μL) of initial temperature $T_0 = 25$ °C on copper of temperature $T = -8$ °C, and then measuring the time τ when this drop starts to solidify.

- (1) Johnson, R. E.; Dettre, R. H. *Adv. Chem. Ser.* **1964**, *43*, 112.
- (2) Lafuma, A.; Quéré, D. *Nat. Mater.* **2003**, *2*, 457.
- (3) Wenzel, R. N. *Ind. Eng. Chem.* **1936**, *28*, 988.
- (4) Cassie, A. B. D.; Baxter, S. *Trans. Faraday Soc.* **1944**, *40*, 546.
- (5) Bico, J.; Thiele, U.; Quéré, D. *Colloids Surf., A* **2002**, *206*, 41.
- (6) He, B.; Patankar, N. A.; Lee, J. *Langmuir* **2003**, *19*, 4999.
- (7) Oner, D.; McCarthy, T. J. *Langmuir* **2000**, *16*, 7777.
- (8) Yoshimitsu, Z.; Nakajima, A.; Watanabe, T.; Hashimoto, K. *Langmuir* **2002**, *18*, 5818.
- (9) Cottin-Bizonne, C.; Barrat, J. L.; Bocquet, L.; Charlaix, E. *Nat. Mater.* **2003**, *2*, 237.
- (10) Ou, J.; Perot, B.; Rothstein, J. P. *Phys. Fluids* **2004**, *16*, 4635.
- (11) Gao, X. F.; Yan, X.; Yao, X.; Xu, L.; Zhang, K.; Zhang, J. H.; Yang, B.; Jiang, L. *Adv. Mater.* **2007**, *19*, 2213.
- (12) Leidenfrost, J. G. *De aquae communis nonnullis qualitatibus tractatus*; Duisburg, 1756.
- (13) Biance, A. L.; Clanet, C.; Quéré, D. *Phys. Fluids* **2003**, *15*, 1632.

(14) Rathgen, H.; Sugiyama, K.; Ohl, C. D.; Lohse, D.; Mugele, F. *Phys. Rev. Lett.* **2007**, *99*, 214501.

(15) Larmour, I. A.; Bell, S. E. J.; Saunders, G. C. *Angew. Chem.* **2007**, *119*, 1740.

Performing this simple experiment with a given volume of water led to a very poor reproducibility: the measured times τ fluctuated by more than 1 order of magnitude. We realized that this is due to the low control we had on the content of impurities in the water. Distilled deionized water can be supercooled, to temperatures well below 0 °C before the onset of freezing. Freezing is a function of the particular (unknown) impurities present in the drop or on the solid surface. We solved this problem by using regular tap water, which contains enough impurities to trigger freezing at 0 °C, as checked by direct measurements of the temperature inside the drop. This change significantly improves the reproducibility of the measurements; specifically, the variability of the freezing time decreased from 1000% with “pure” water to 20–30% with tap water.

We show in Figure 1 the successive states of two drops on cold copper, either superhydrophobic or regular. Since a drop reflects the color of its substrate, the one on the left looks black and the second one looks orange. The first row shows the drops immediately after they are deposited on the substrates. Later (second row), the drop on flat copper has frozen, as revealed by its milky texture, but at a significant (and measurable) time later the left drop also solidifies (third row). We now try to quantify the delay between both solidifications.

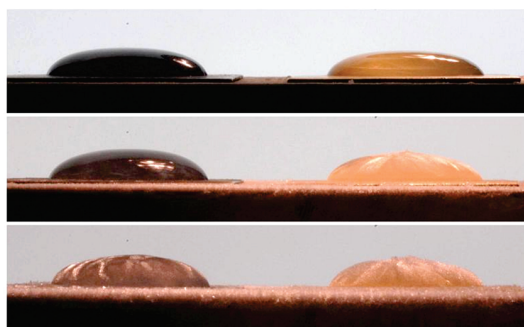


Figure 1. Comparison between two water drops ($\Omega = 1200 \mu\text{L}$) deposited on microtextured superhydrophobic (black) copper (left) and flat (orange) copper (right), both at a temperature $T = -7 \text{ }^\circ\text{C}$. First row: the drops were just deposited; their colors reflect the substrates. Second row: the drop on flat copper has frozen. Third row: both drops are frozen. There is no difference in contact angle between the drops, because a thin ring (of radius $R = 10 \text{ mm}$) has been etched in both plates, providing pinning for the contact line and allowing us to compare the freezing of drops of same volume and same surface area.

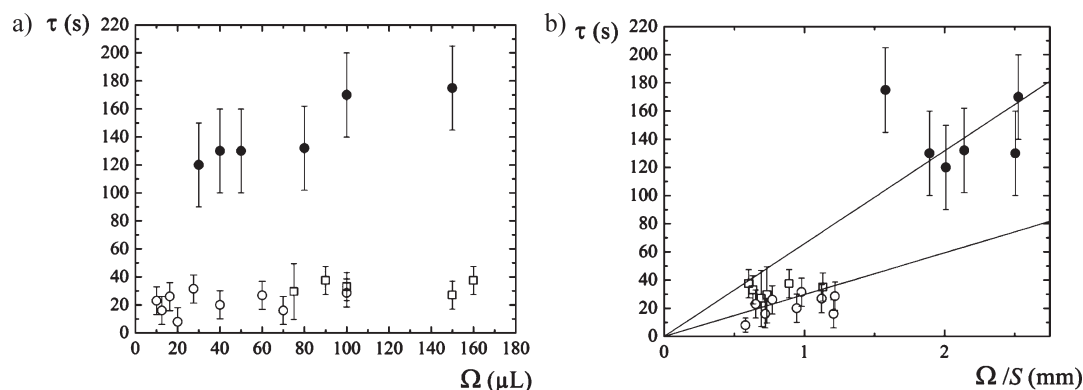


Figure 2. (a) Freezing time τ (in seconds) of water drops on flat copper ($\circ$), on copper treated with a fluorinated thiol ($\square$), or on superhydrophobic copper ($\bullet$), as a function of the drop volume Ω (in microliters). For all the data, the initial temperature T_0 of water is 25 °C, and the plate temperature T is $-8 \text{ }^\circ\text{C}$. The error bars express the standard deviations in the experiments. (b) Same data plotted as function of the ratio Ω/S (expressed in millimeters), where S is the (measured) (apparent) surface area between solid and liquid. The two families of data remain quite distinct.

In a first series of experiments, we measured the freezing time τ as a function of the drop volume Ω on both surfaces. The corresponding results are displayed in Figure 2, with empty or full symbols when the plate is flat or microtextured, respectively. For the flat surface, we also reported data points obtained after treating the surface with the fluorinated thiol (squares), making it slightly more hydrophilic than the regular plate, with an advancing angle of 110° instead of 90° for the regular (oxidized) copper.

It is observed in Figure 2a that the presence of microtextures dramatically affects the freezing time of the drops, for all the considered volumes. Solidification is always delayed, by a factor between 3 and 5. Two effects can contribute to this difference. As mentioned above, the presence of a thin film of air may act as a barrier to thermal transfer. However, there is a more trivial reason, namely, the difference of surface area between both drops for a given volume Ω .

Our drops are larger than the capillary length a ($a = (\gamma/\rho g)^{1/2}$, denoting ρ as the liquid density and γ as its surface tension), so that their thicknesses are dictated by a balance between gravity (which tends to thin the drop) and capillarity (which tends to make it spherical).¹³ For a puddle of thickness h , this balance can be written: $1/2\rho gh^2 = \gamma(1 - \cos\theta)$, where θ is the contact angle. The resulting thickness $h = 2a \sin(\theta/2)$ increases monotonically with the contact angle. Puddles are thicker on superhydrophobic surfaces than on regular copper, which implies a smaller (heat exchange) surface area S and thus a reduced thermal transfer and a slower freezing.

This argument can be made more precise. As emphasized earlier, the use of tap water induces freezing at 0 °C, so that the time τ is just the time needed for decreasing the drop temperature from its initial value T_0 to 0 °C. The equation of heat transfer can be written: $\Omega T_0/\tau = KS$, where K is a constant which captures the physical parameters of the problem (plate temperature, specific heat of the liquid, etc.). We thus expect the freezing time τ to vary as Ω/S and thus to be sensitive to the surface area S for a given volume of water. The latter relationship can be written: $\tau = (\Omega/S)/c$, which defines a freezing velocity c . We plotted in Figure 2b the data of Figure 2a (same symbols), as a function of the ratio Ω/S , which has the dimension of a length (roughly, the height of the drop). The two series of data are observed to be distinct, which suggests that the difference in surface area alone cannot explain the delay in freezing observed with the fakir substrate. Drawing a straight line through the origin for each series of data, as expected from the arguments above, we find that

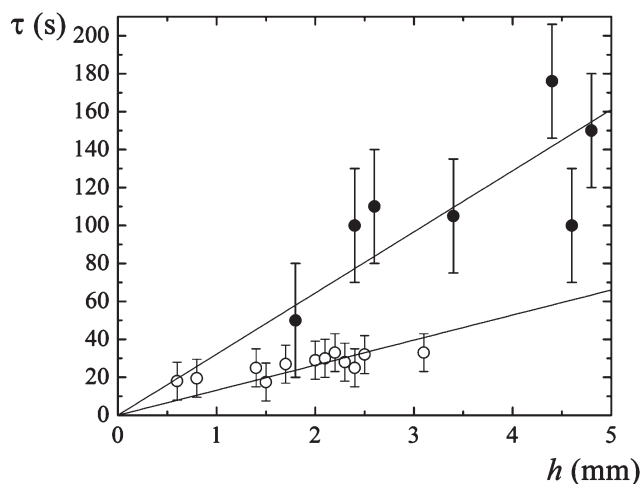


Figure 3. Freezing time τ (in seconds) as a function of the drop height h , for drops of the same surface area. A circular groove of radius $R = 10$ mm is first etched on the substrate in order to pin the contact line and to allow us to vary the drop volume (and thus the drop height) while keeping the surface area $S = \pi R^2$ constant. Data are reported for both regular copper (empty symbols) and superhydrophobic copper (full symbols), both at -8°C . Freezing is again observed to be delayed in the latter case.

the slopes differ by a factor of about 2, which might imply a difference of the same order between the freezing velocities on both substrates.

The representation in Figure 2b is a useful step to decouple the geometrical effects (increasing the contact angles makes the puddle thicker and thus reduces the efficiency of thermal exchanges) from other possible causes of freezing delay, such as the presence of air below the fakir drop. In order to confirm this partial conclusion, we performed a second series of experiments, where both the volume *and* the surface area were kept constant, allowing us to compare the freezing kinetics independently of the puddle geometry. On both surfaces, we etched a thin circular line of radius $R = 10$ mm. As known since Gibbs, grooves efficiently pin contact lines, preventing drops from advancing or receding: on such “defects”, the apparent contact angle is flexible. We placed a large volume of liquid inside the circle and suctioned it off until a prescribed volume Ω was reached. Whatever the nature of the solid (slightly hydrophobic for copper, or superhydrophobic for microtextured copper), we could thus prepare drops with the same shape, as shown in Figure 1 where this trick was used. We then measured the freezing time τ for different volumes Ω , keeping the surface area $S = \pi R^2$ constant. For centimeter-size drops, the ratio Ω/S is close to be the drop height h , and we plot in Figure 3 the solidification time τ as a function of h .

Once again, the two families of results are distinct, with slopes differing by a factor of the order of 2. This confirms the qualitative results of Figure 2b, namely, the significant difference in freezing kinetics between both substrates. The presence of an air film below the fakir drop might be responsible for its much slower solidification.

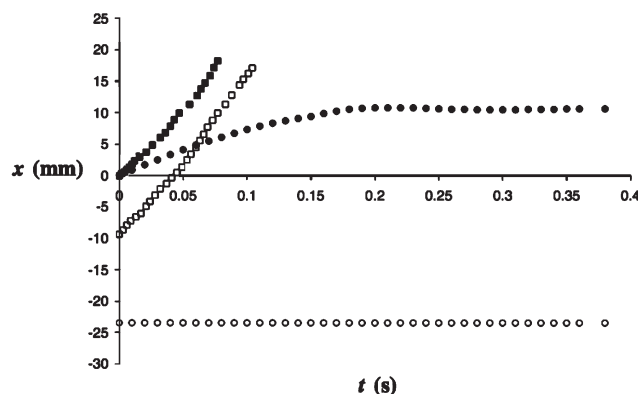


Figure 4. Positions of the leading and trailing edges (filled and empty symbols, respectively) of water drops of volume $\Omega = 100\ \mu\text{L}$ deposited on cold substrates (at -8°C) tilted by 40° . The substrate is either rough hydrophobic copper (squares) or flat copper (circles). In the first case, the drop quickly runs down without freezing, so that the solid remains dry. In the second case, the drop is slower. It leaves a film that immediately freezes (thus the trailing edge never moves), while the leading edge slows down, stops, and freezes.

This property can also be exploited dynamically. For drops larger than the capillary length, angle hysteresis cannot oppose the drop weight, so that we expect that the drops will run downward if the substrate is tilted. However, the descent velocities should be different on both substrates. On flat copper, the presence of a moving contact line slows down the liquid, while on superhydrophobic copper the high contact angle leads to much quicker descents. Together with the delayed freezing, we can thus anticipate very different behaviors on both solids. These differences are illustrated in Figure 4, where we follow the position x of drops on inclined substrates as a function of time t .

In the experiment of Figure 4, water drops of volume $\Omega = 100\ \mu\text{L}$ are deposited on cold plates tilted by an angle $\alpha = 40^\circ$. We follow the positions x_f and x_t of the leading and trailing edges of the drops, represented by full and empty symbols, respectively. The drop on the textured surface (squares) has a smaller initial diameter $x_f - x_t$ than the drop on flat copper (circles) due to a higher contact angle. It is observed that its velocity is larger but, more importantly, that it leaves the solid surface (at $x \approx 20$ mm) without depositing any film and without freezing. Conversely, the drop on flat copper spreads more and runs slower, so that it leaves a film that freezes immediately. For this drop, the trailing edge never moves (empty circles); on the other hand, the leading edge slows down and stops before the end of the plate and thus fully solidifies (full circles). The final states are thus completely different. In the first case, the solid is clean and dry. In the second case, the substrate is covered by a long patch of ice. This dynamic situation is directly applicable to rain running down solids in the field of gravity, and it helps to illustrate that water repellency is an excellent strategy to avoid formation of ice on cold solids.

Acknowledgment. We do thank Robert Cohn for his generous help in revising the manuscript.

Résistance de vague sur une sphère immergée

La résistance de vague n'est pas toujours subie par des objets se déplaçant à la surface. Un corps qui avance sous la surface déforme aussi cette dernière, ce qui en retour affecte la traînée qu'il subit. Ce phénomène a ainsi des conséquences sur la nage des poissons [1, 2]. À la fin de ma thèse, nous avons monté avec Adrien Benusiglio, en thèse au laboratoire depuis janvier 2010, une expérience pour mesurer la traînée de vague subie par une sphère se déplaçant sous l'eau à vitesse constante.

Principe de l'expérience

Un obstacle majeur à la mesure de la résistance de vague est le fait qu'il s'agit d'une force qui s'ajoute aux autres traînées subies par l'objet se déplaçant, ce qui oblige à soustraire ces autres composantes aux mesures effectuées [3, 4]. Dans cette expérience, nous avons choisi de nous affranchir de ce problème en mesurant une différence de force entre une sphère proche de la surface et une sphère immergée beaucoup plus profondément.

Deux billes de polypropylène de 10 mm de diamètre sont reliées par un bras métallique de longueur $2L \approx 10$ cm, tenu en son centre (figure E.1). L'ensemble du dispositif est tiré par un chariot à une vitesse constante V variant entre 0 et 35 cm/s, dans une cuve d'eau de plusieurs mètres de long. Si le dispositif est immergé loin de la surface, la force sur les deux billes est la même et aucun moment n'est exercé sur le point d'attache. En revanche, si l'on rapproche le montage de la surface, la bille supérieure subit une traînée supplémentaire F_{vagues} due à la résistance de vague, qui produit un couple $\mathcal{M} = F_{\text{vagues}}L$ sur le point d'attache. En mesurant ce couple, on accède directement à la résistance de vague sur la bille supérieure, sans avoir besoin

de retrancher les autres forces de friction.

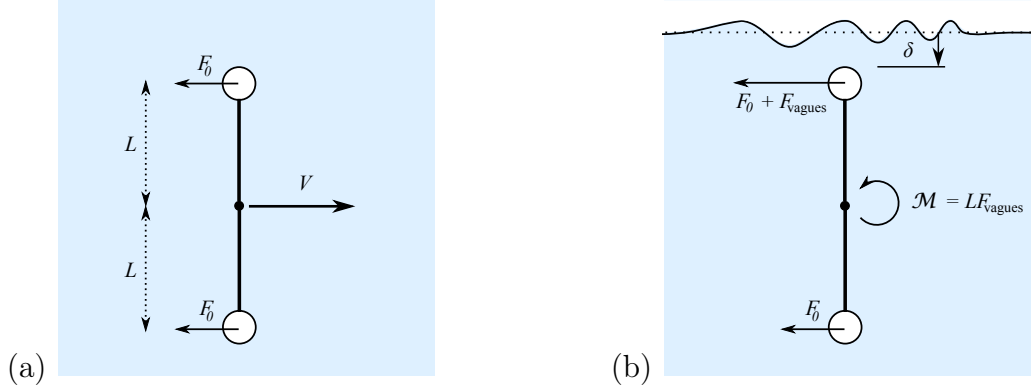


FIGURE E.1 – Schéma de l'expérience : (a) au fond de l'eau, la traînée subie par les deux billes est la même; (b) proche de la surface, à une profondeur δ , la traînée est plus grande sur la bille supérieure à cause du sillage créé à la surface. Au centre de la tige, il existe donc un couple $\mathcal{M}$ proportionnel à F_{vagues} .

Mesure de couple

Pour mesurer ce couple $\mathcal{M}$, on utilise la torsion d'un fil de nylon de diamètre ϕ compris entre 0,2 et 0,9 mm de diamètre. Le fil est suffisamment tendu pour éviter qu'il ne se déforme à cause de l'écoulement d'eau dans la cuve, et étalonné sous tension hors de l'eau à l'aide de petites masses m calibrées. Nous montrons des courbes de calibration sur la figure E.2. Pour mesurer la résistance de vague, on impose un angle de torsion initial θ au fil, tel que le bras portant les billes se redressera verticalement au cours du mouvement sous l'effet du couple de la résistance de vague. Le couple $\mathcal{M}$ appliqué est alors proportionnel à θ . L'intérêt de ce dispositif est qu'il offre une très grande sensibilité — avec un fil de diamètre $\phi = 0,35$ mm, la sensibilité en force est d'ordre $100 \mu\text{N}/\text{rad}$ — que l'on peut facilement moduler en changeant de fil (figure E.2) — la constante de torsion d'un fil variant comme ϕ^4 .

Premiers résultats

Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'influence de la vitesse V de la bille sur la traînée de vagues F_{vagues} (figure E.3). Comme on s'y attend (chapitre 3), la résistance de vague n'est pas mesurable pour $V \lesssim c_{\min} = (4g\gamma/\rho)^{1/4} = 23 \text{ cm/s}$. Pour $V \gtrsim 20 \text{ cm/s}$, la traînée augmente, mais on n'observe pas de saut comme observé avec des gouttes d'azote liquide. Cela n'est pas surprenant car la dépendance de la force en vitesse dépend de ce qui est à l'origine du sillage. F. Chevy et É. Raphaël [5] ont ainsi montré que si l'on n'impose pas la force exercée par un objet à la surface

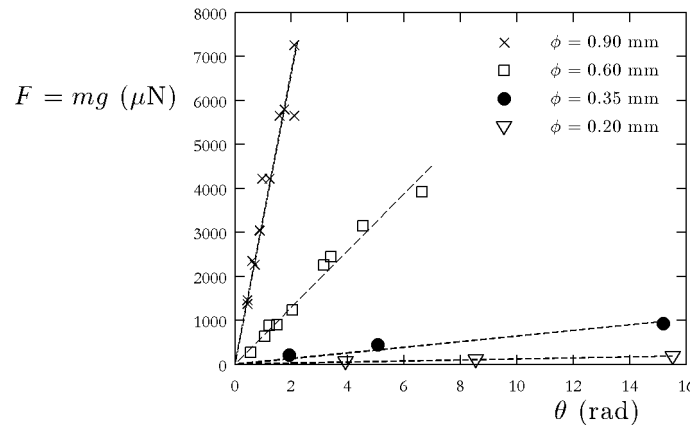


FIGURE E.2 – Calibration des fils de torsion à l’aide de masses m : force $F = mg$ en fonction de l’angle de torsion θ , pour des fils de nylon de longueur semblable (environ 10 cm) et de différents diamètres ϕ . Les droites ont pour pentes respectives $3,3 \cdot 10^3$, $6,5 \cdot 10^2$, 64 et 12 $\mu\text{N}/\text{rad}$.

(comme au chapitre 3), mais sa profondeur d’enfoncement, la discontinuité attendue disparaît et la résistance de vague augmente continûment pour $V > c_{\min}$, comme mesuré dans d’autres expériences [4]. Ici, les vagues sont créées par l’écoulement d’eau autour de la sphère immergée. La compréhension de la résistance de vague passe par celle du profil du sillage, étude commencée par A. Benusiglio. On comprend bien alors que la proximité de la bille à la surface va affecter l’amplitude et la forme du sillage, et donc la résistance de vague [6]. Les mesures de la figure E.3 montrent en effet que la force diminue sensiblement quand la profondeur augmente : F_{vagues} est divisée par 3 quand δ passe de 2,7 à 5,5 mm, soit un facteur 2.

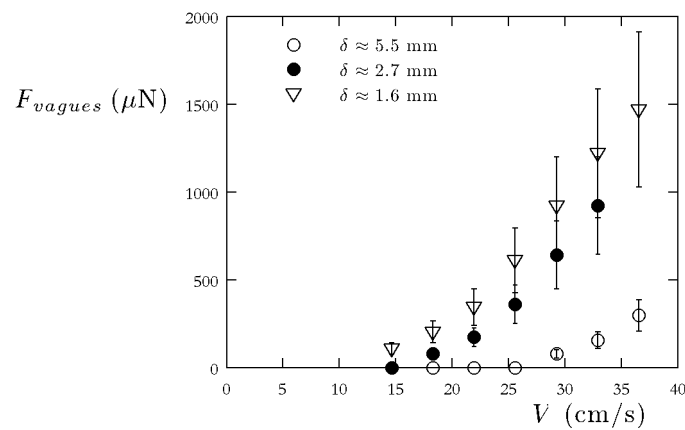


FIGURE E.3 – Résistance de vague mesurée F_{vagues} en fonction de la vitesse V , pour différentes profondeurs δ .

Bibliographie

- [1] P.W. Webb, D. Sims, and W.W. Schultz. The effects of an air/water surface on the fast-start performance of rainbow trout (*oncorhynchus mykiss*). *J Exp Biol*, 155(1) :219–226, 1991. 195
- [2] N.F. Hughes. The wave-drag hypothesis : an explanation for size-based lateral segregation during the upstream migration of salmonids. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 61(1) :103–109, 2004. 195
- [3] R. Perzynski J. Browaeys, J.-C. Bacri and M. I. Shliomis. Capillary-gravity wave resistance in ordinary and magnetic fluids. *Europhysics Letters*, 53 :209–215, 2001. 69, 195
- [4] T. Burghlea and V. Steinberg. Onset of wave drag due to generation of capillary-gravity waves by a moving object as a critical phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, 86(12) :2557–2560, 2001. 69, 195, 197
- [5] F. Chevy and E. Raphaël. Capillary gravity waves : A "fixed-depth" analysis. *Europhysics Letters*, 61(6) :796, 2003. 69, 196
- [6] A. D. Chepelianskii, M. Schindler, F. Chevy, and E. Raphaël. Self-consistent theory of capillary-gravity-wave generation by small moving objects. *Phys. Rev. E*, 81(1) :016306, Jan 2010. 197

Résumé

Au travers de plusieurs expériences, nous explorons le lien entre dissipation et mouvement d'interfaces liquides.

Dans une première partie, nous étudions le mouvement de gouttes en caléfaction sur différents substrats. Ce mouvement peut être accéléré, si le substrat est asymétrique, ou ralenti, s'il est symétrique. La décélération des gouttes nous permet alors d'étudier différents types de friction spéciale. Sur un solide lisse, celle-ci est très faible et essentiellement due à l'air environnant. Sur un solide crénelé, elle est due à l'impact du liquide sur les marches. Enfin, si la goutte glisse sur un autre liquide, elle ralentit à cause de la résistance de vague qui résulte du sillage qu'elle engendre.

La seconde partie de ce travail porte sur les déformations de filaments visqueux. Si ceux-ci sont comprimés ou tordus, nous mettons en évidence plusieurs phénomènes de flambage visqueux, que nous comparons à leurs analogues élastiques. Enfin, si les filaments sont libres de se déformer, leur forme et leur dynamique découlent d'une compétition entre viscosité, gravité et effets capillaires.

Mots-clés : interfaces, caléfaction, propulsion et friction sur surfaces texturées, résistance de vague, écoulements élongationnels, flambage visqueux, plectonèmes visqueux, analogie visco-élastique, chaînettes liquides.

Abstract

We investigate in several experiments the link between dissipation and deformable liquid interfaces.

First, we study Leidenfrost drops moving on various substrates. Their movement can be either accelerated — on a ratchet-like substrate — or slowed down. The deceleration allows us to study different types of friction. On a smooth solid, the drag is very low and mainly due to the surrounding air. On a square-decorated surface, it is a consequence of the liquid impacting the side of the squares. Last, a drop sliding on another liquid decelerates because of wave resistance arising from the wake it generates.

In a second part, we characterize viscous threads deformations. Compression and torsion of the filaments result into viscous buckling, which we compare to elastic buckling. However, if the thread is not forced to move, the evolution of its shape comes out of a balance between viscous, gravity and capillary effects.

Keywords : interfaces, Leidenfrost effect, propulsion and friction on decorated surfaces, wave resistance, elongational flow, viscous buckling, viscous plectonemes, visco-elastic analogy, liquid catenary.