

École Polytechnique
Laboratoire d'Hydrodynamique

Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

spécialité : Mécanique

par

Karen AMRAM

*Étude numérique des instabilités
dans les couches de mélange compressibles*

soutenue le **30 Juin 1995** devant le jury composé de :

Messieurs

Jean-Marc	CHOMAZ	
Jean	COUSTEIX	Président
Tran Khoa	DANG	
Patrick	HUERRE	
Patrick	LE QUÉRÉ	
Thierry	POINSOT	Rapporteur
Yves	POMEAU	Rapporteur

Table des matières

1	Introduction	3
2	Le point de vue des instabilités hydrodynamiques : fondements théoriques	11
2.1	Problème physique et formulation	12
2.2	Instabilité linéaire	17
2.2.1	Fluide parfait	18
2.2.2	Fluide visqueux	22
2.3	Instabilité faiblement non-linéaire.	24
2.3.1	Équations d'amplitude et bifurcations	24
2.3.2	Méthodologie : couche de mélange compressible en régime de couche critique visqueuse	28
3	Mise au point des méthodes numériques	35
3.1	Instabilité linéaire de fluide parfait	36
3.2	Simulation numérique directe	41
3.2.1	Équations de Navier-Stokes	41
3.2.2	Discrétisation	43
3.3	Grandeurs caractéristiques et moyens d'analyse	56
3.3.1	Instabilité linéaire de fluide parfait	57
3.3.2	Instabilité linéaire de fluide visqueux	58
3.3.3	Instabilité non linéaire de fluide visqueux	58
3.3.4	Simulation numérique directe	59
4	Évolution linéaire des ondes d'instabilité	63
4.1	Instabilité linéaire de fluide parfait	64
4.1.1	Couche de mélange incompressible	64
4.1.2	Couche de mélange compressible isotherme	65
4.1.3	Couche de mélange compressible	72
4.2	Comparaison avec les résultats de la simulation numérique directe	74
4.2.1	Couche de mélange compressible isotherme	76
4.2.2	Couche de mélange compressible	84
4.2.3	Évaluation numérique du nombre d'onde neutre	87
4.2.4	Influence des paramètres numériques sur le taux de croissance linéaire effectif	88
4.2.5	Influence de la force volumique "anti-diffusive"	90

5	Évolution non-linéaire des ondes d'instabilité	93
5.1	Couche de mélange isotherme	94
5.1.1	Analyse modale	98
5.1.2	Étude quantitative de la constante de Landau	105
5.1.3	Influence des paramètres numériques sur la valeur de la constante de Landau	111
5.1.4	Régimes atténués : analyse modale	114
5.1.5	Diagramme de bifurcation	120
5.2	Couche de mélange refroidie	121
5.2.1	Analyse modale	125
5.2.2	Diagramme de bifurcation	128
6	Conclusion	131
	Annexe	134

Chapitre 1

INTRODUCTION

La couche de mélange séparant deux écoulements parallèles de vitesses opposées et de densités différentes est le siège d'instabilités donnant lieu à une grande variété de régimes spatio-temporels. De nombreuses études théoriques, expérimentales et numériques ont été entreprises depuis une cinquantaine d'années afin de déterminer les différents mécanismes mis en jeu et de comprendre l'organisation des structures cohérentes. Ce grand intérêt provient du fait que ces processus sont représentatifs d'un grand nombre d'écoulements observés aussi bien dans la nature que dans le domaine industriel. Les couches de mélange planes sont, en effet, des prototypes simples d'écoulements cisailés. Ces derniers sont d'une importance fondamentale dans l'étude de la turbulence. Ils existent dans les phénomènes naturels tels que les écoulements atmosphériques, les éruptions volcaniques, et, en ce qui concerne les applications industrielles, ils interviennent dans l'étude et la conception de nouveaux modes de propulsion adaptés aux engins supersoniques ou hypersoniques. Par exemple, dans les phénomènes de combustion, il y a lieu d'optimiser les processus de mélange par la connaissance de la dynamique des grosses structures. De la même façon, des modèles perfectionnés de mélange permettront de mieux prévoir, par exemple, les réactions chimiques et le contrôle des émissions polluantes issues des brûleurs d'huile et de gaz des centrales électriques.

La couche de mélange appartient à la classe des systèmes ouverts qui échangent de la matière avec l'extérieur par opposition aux systèmes fermés. L'instabilité qui la caractérise et qui induit l'apparition des structures cohérentes a été observée pour la première fois par Helmholtz (1868) et sa première description a été faite par Kelvin (1871). Aussi lui associe-t-on le nom d'**instabilité de Kelvin-Helmholtz**. Son mécanisme peut être décrit simplement en considérant une couche de mélange mince modélisée par une nappe de vorticités (figure 1.1a). Une petite perturbation de l'interface conduit à la déformation de la nappe (figure 1.1b). Sur chaque crête, les vitesses normales induites par les deux creux qui la cerrent (loi de Biot & Savart) engendrent une vitesse tangentielle dont le sens, identique sur chaque crête, dépend du sens de rotation de la nappe. Dans le cas présenté, la vitesse induite aux crêtes va de gauche à droite. En revanche, avec les mêmes considérations, on montre que la vitesse en chaque creux est de sens opposé. Entre une crête et un col (figure 1.1c), il y a donc soit accumulation de vorticités, soit diminution, et ainsi de suite. La déformation initiale est alors accentuée : l'écoulement est instable et

la perturbation va croître pour former des tourbillons séparés par des “tresses” (*braids*) (figure 1.1d).

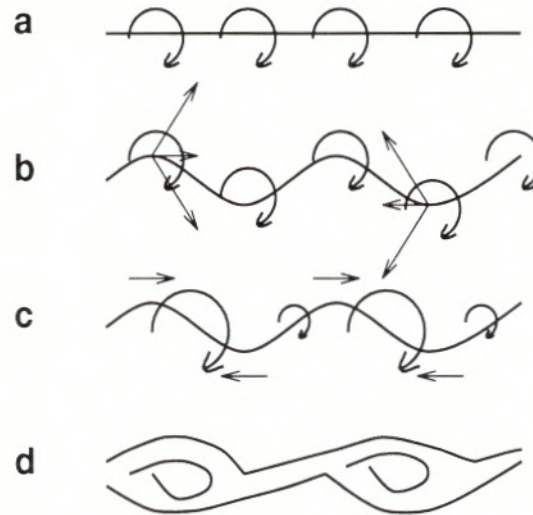


FIG. 1.1 - Principe de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

L'écoulement représenté par la figure 1.2 est obtenu en injectant de part et d'autre d'une plaque plane deux fluides animés de vitesses différentes. La couche de mélange résultante a une épaisseur qui est fonction de la distance au bord de la plaque et qui ne dépend pas du temps. Il s'agit du cas classique de couche de mélange **spatiale**. Il convient de la distinguer de la couche de mélange **temporelle** étudiée pour la première fois par Reynolds (1883) dans son expérience du tube basculant (figure 1.3) et pour laquelle l'épaisseur est une fonction du temps uniforme dans l'espace. Soulignons que les couches de mélange temporelles se rencontrent dans de nombreuses situations géophysiques.



FIG. 1.2 - Couche de mélange spatiale ; photo issue de Brown & Roshko (1974)



FIG. 1.3 - Expérience du réservoir basculant : exemple d'une couche de mélange temporelle. Ici, la couche de mélange est forcée à longueurs d'onde régulières; Photographie d'après Pouliquen (1993).

La couche de mélange spatiale sur la figure 1.2 met en évidence la croissance de grosses structures bidimensionnelles. Celles-ci correspondent au développement du mode fondamental. Ce dernier croît rapidement et atteint son amplitude maximale quand la couche de mélange s'enroule (Freythuth (1966), Miksad (1972)). Pendant ce processus non-linéaire, la composante sous-harmonique s'amplifie. Son interaction avec le mode fondamental conduit à l'appariement de deux structures voisines (Browand (1966)). Les grosses structures décrites par l'expérience de Brown & Roshko (1974) ont été observées par de nombreux chercheurs. Notamment, Dimotakis & Brown (1976) ont montré qu'elles se maintenaient même à grand nombre de Reynolds.

Des structures tridimensionnelles apparaissent après un temps très long ont également été mises en évidence expérimentalement par Brown & Roshko (1974), révélant des tourbillons longitudinaux dans les tresses. Ces mécanismes sont accompagnés d'autres phénomènes complexes induits par les non-linéarités. Browand & Troutt (1980) ont par exemple observé des dislocations du cœur des tourbillons.

Il convient de se demander si les structures dominantes bidimensionnelles, qui existent pour des nombres de Mach faibles, sont sensibles aux effets de compressibilité. De nombreux expérimentateurs ont mesuré des taux de croissance s'y rapportant. La notion de nombre de Mach convectif M_c (Papamoschou & Roshko (1988), Bogdanoff (1983)) a permis de concentrer grossièrement ces données en une courbe unique. Les expériences de Clemens *et al* (1990) montrent qu'il devient très difficile d'identifier des structures cohérentes lorsque M_c devient supérieur à 0.6. Samimy & Elliot (1990) confirment cette observation et mettent en évidence une diminution du niveau de turbulence lorsque M_c augmente. Les expériences de couches de mélange spatiales de Papamoschou (1991), Papamoschou & Roshko (1986,1988) font apparaître que le taux de croissance pour un nombre de Mach convectif supersonique est inférieur à son homologue dans le cas subsonique. D'après Dimotakis (1991) et Papamoschou (1989,1991), le modèle bidimensionnel n'est plus valable dans les couches de mélange fortement compressibles où les effets tridimensionnels deviennent dominants et où des chocs peuvent apparaître.

Du point de vue numérique, deux types de couches de mélange peuvent être traités.

La couche de mélange spatiale utilise le même référentiel que l'expérience du même nom, avec des conditions limites d'entrée-sortie de la boîte de calcul qui dépendent des traitements particuliers. La couche de mélange temporelle est simulée en reliant le référentiel aux structures. L'écoulement se développe alors en temps plutôt qu'en espace, à partir d'une condition initiale spécifiée et des conditions limites périodiques sont appliquées dans le sens de l'écoulement.

Les premiers calculs relatifs aux couches de mélange ont été menés avec des méthodes de simulation des grandes échelles (Large-Eddy Simulation, LES) dans le cas temporel (Mansour *et al* (1978), Cain *et al* (1984)) et ont mis en évidence les grosses structures. Les premiers résultats de simulation numérique directe (DNS) ont été présentés par Riley & Metcalfe (1980) dans le cas d'une couche de mélange incompressible. Ces derniers utilisent une méthode pseudo-spectrale développée par Orszag & Pao (1974) et obtiennent pour des simulations bidimensionnelles, les phénomènes d'appariement observés expérimentalement. Les travaux de Metcalfe *et al* (1987) et Rogers & Moser (1989) ont montré que les petites structures qui apparaissent dans les tresses sont également observables numériquement.

Les simulations de couches de mélange compressibles sont plus récentes. Les études bidimensionnelles de Lele (1988,1989) et Sandham & Reynolds (1990) confirment la réduction du taux de croissance quand le nombre de Mach convectif augmente. En outre, des petits chocs sont observés (Soetrino *et al* (1989)) dès que le nombre de Mach convectif est supérieur à 0,8. Dans le cas tridimensionnel, (Sandham & Reynolds (1991), Chen (1993)) ceux-ci n'apparaissent qu'au-delà de la valeur $M_c = 1$.

Soulignons que, bien que les méthodes spectrales soient *a priori* mieux adaptées à l'étude des instabilités, Lesieur et coll. (1988) et Lesieur (1989) ont montré, en étudiant les effets de compressibilité de couches de mélange spatiale et temporelle, que l'utilisation de schémas aux différences finies fournit des résultats en accord avec l'expérience et la théorie linéaire de l'instabilité.

La théorie linéaire de l'instabilité des couches de mélange spatiale ou temporelle a vu le jour il y a environ cinquante ans. Lees & Lin (1946) ont obtenu le critère général d'instabilité des écoulements cisailés bidimensionnels subsoniques. L'existence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse est une condition nécessaire d'instabilité. Le profil en tangente hyperbolique possède cette propriété et, de ce fait, il est très souvent utilisé comme modèle simplifié de couche de mélange. Bien qu'il soit solution, non pas des équations de Navier-Stokes mais seulement de leurs homologues en fluide parfait, ce profil constitue une bonne approximation des vitesses mesurées expérimentalement, à condition de négliger les variations de l'épaisseur de la couche sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde.

Au début des années soixante, Michalke (1964,1965a,1965b) a résolu l'équation de Rayleigh de la théorie linéaire pour une couche de mélange incompressible en tangente hyperbolique dans l'approximation de fluide parfait. Il a déterminé une gamme de nombres d'onde instables pour lesquels les ondes croissent de façon exponentielle. Il a également mis en évidence l'existence d'un taux de croissance maximal et, reprenant l'analyse de Garcia (1956), il a fait une étude particulière

au nombre d'onde neutre de croissance nulle.

Lessen *et al* (1965,1966) ont étendu la théorie linéaire aux couches de mélanges compressibles et ont montré que l'écoulement demeure instable pour des perturbations tridimensionnelles même à très grand nombre de Mach, bien que l'accroissement de ce dernier tend à stabiliser la couche de mélange. Des études systématiques utilisant la théorie linéaire bidimensionnelle de fluide parfait ont ensuite été menées par Blumen (1970), Blumen *et al* (1975) et Drazin & Davey (1977). Ces auteurs ont montré que la couche de mélange compressible isotherme est instable pour des perturbations bidimensionnelles quel que soit le nombre de Mach. Des modes plus complexes apparaissent lorsque le nombre de Mach est proche de l'unité. En outre, le nombre de Mach a un fort effet stabilisant. Enfin, le refroidissement symétrique du centre de la couche de mélange déstabilise celle-ci dans le cas de grands nombres de Mach subsoniques mais la stabilise si ces derniers sont faibles (Djordjevic & Redekopp (1988)).

La croissance exponentielle des ondes instables restreint le domaine de validité de la théorie linéaire à des temps et des distances très courts. Aussi, afin de comprendre les processus de transition observés expérimentalement, divers travaux se sont orientés vers l'étude du régime d'instabilité non-linéaire. Faisant suite à la théorie de Landau (1944) qui décrit l'évolution de l'instabilité par une équation d'amplitude du mode dominant, Stuart (1960) et Watson (1960) ont proposé une méthode permettant de décrire l'évolution non-linéaire des écoulements cisailés parallèles dans le cas de perturbations faiblement amplifiées. Ce formalisme a été appliqué avec succès à l'écoulement de Poiseuille plan (Stewartson & Stuart (1971)).

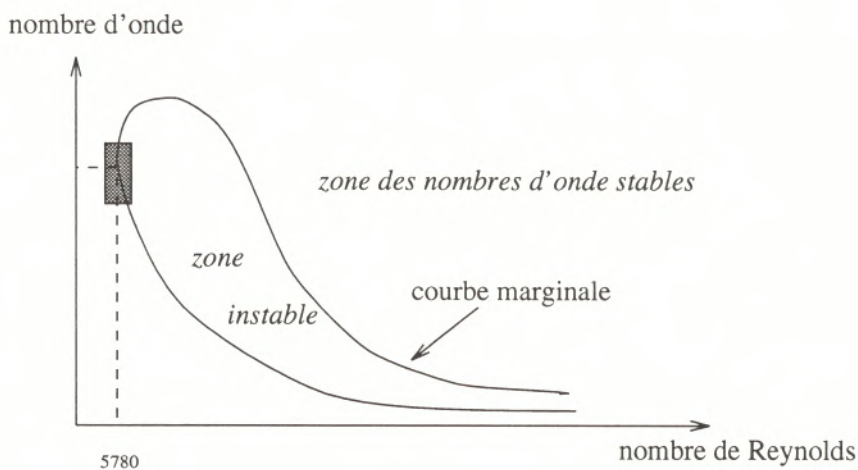


FIG. 1.4 - Courbe de stabilité marginale de l'écoulement de Poiseuille plan.

Cet écoulement possède un nombre de Reynolds critique (figure 1.4) en-deçà duquel il est stable et au-delà duquel il existe une bande de nombres d'onde instables. Pour

cette valeur du nombre de Reynolds, le nombre d'onde neutre est donc proche de celui de croissance maximale. De ce fait, en faisant une analyse pour laquelle le nombre de Reynolds est supposé proche de la valeur critique et où les ondes sont faiblement amplifiées (zone assombrie de la figure 1.4), on peut étudier l'évolution de toutes les ondes instables. La comparaison avec l'expérience est alors possible, sachant que le mode naturellement amplifié correspond au mode théorique de croissance maximale (Crighton & Gaster (1976)).

Dans le cas de la couche de mélange, Betchov & Szewczyk (1963) ont montré qu'il n'existe pas de nombre de Reynolds critique (figure 1.5). De plus, pour les petits nombres de Reynolds, les échelles de temps visqueux devenant trop courtes, le profil en tangente hyperbolique diffuse et n'est plus représentatif de la couche de mélange expérimentale. Ainsi, on ne peut que faire une étude faiblement non-linéaire dans l'hypothèse de grands nombres de Reynolds au voisinage de la courbe marginale (zone assombrie de la figure 1.5).

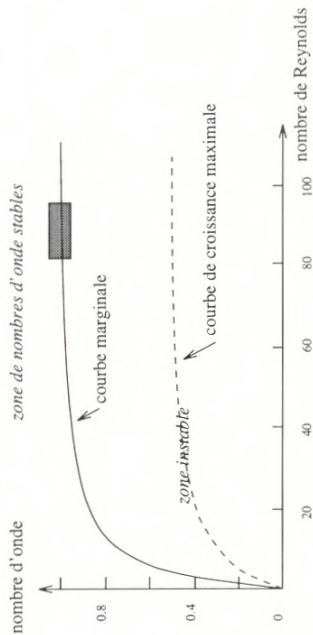


FIG. 1.5 - Courbe de stabilité marginale d'une couche de mélange incompressible en tangente hyperbolique.

Schade (1964) a ainsi appliqué la méthodologie de Stuart (1960) et Watson (1960) aux couches de mélange incompressibles. Ses travaux ont montré que les ondes faiblement amplifiées au voisinage de la courbe marginale atteignent une amplitude finie stable (bifurcation supercritique), ce qui est en accord avec les expériences déjà mentionnées. Néanmoins, à cause de la présence d'une singularité au point d'inflexion du profil de vitesse, Schade (1964) néglige la viscosité sauf en une couche mince au voisinage de ce point, dite couche critique. Les études de Benney & Bergeron (1969) puis de Haberman (1972) ont permis de rendre compte des effets non-linéaires et visqueux à l'intérieur de la couche critique par l'intermédiaire d'un nombre de Reynolds Re_d basé sur l'épaisseur de cette dernière. Quand Re_d est très petit devant l'unité, la couche critique est dominée par les effets visqueux. Dans cette hypothèse, Huerre (1980, 1987) a reconsidéré le cas étudié par Schade (1964) en tenant compte de la viscosité dans tout l'écoulement. Ses travaux confirment l'effet stabilisant des non-linéarités mais conduisent à une valeur différente de la constante de Landau (qui multiplie le terme non-linéaire de l'équation d'amplitude).

Le formalisme de Huerre (1980, 1987) a été étendu par Djordjevic & Redekopp (1989a, 1989b) à une couche de mélange subsonique soumise ou non à un gradient symétrique de température. Dans le cas isotherme ou réchauffé, l'effet stabilisant obtenu en incompressible perdure. Lorsque la couche est refroidie suffisamment et pour des grandes valeurs subsoniques du nombre de Mach, Djordjevic & Redekopp ont démontré que les non-linéarités deviennent alors déstabilisantes (bifurcation sous-critique).

Ces analyses constituent un premier pas vers la compréhension des phénomènes non-linéaires pour des ondes faiblement amplifiées. Cependant, leur confrontation avec l'expérience est très difficilement réalisable, voire impossible, du fait de l'amplification du mode de croissance maximale pour des nombres de Reynolds élevés (figure 1.5). Néanmoins, il est essentiel de retrouver cet ensemble de résultats théoriques par une autre approche. Dans cette thèse, on utilise la simulation numérique dans le cas temporel : en agissant sur la taille de la boîte de calcul, on peut filtrer le mode d'amplification maximale pour ne laisser passer que les nombres d'onde dans le voisinage immédiat du nombre d'onde neutre. Ainsi, contrairement à la démarche habituelle, l'outil numérique est utilisé, non pas pour reproduire des résultats expérimentaux, mais pour conforter, ou au contraire rejeter certaines de ces analyses théoriques.

Précisons que notre étude est bidimensionnelle et que, dans la gamme de nombres de Mach et aux temps considérés, il ne se produit ni chocs, ni phénomènes tridimensionnels dominants, les ondes 2D étant les plus amplifiées.

Nous consacrons le chapitre 2 à la mise en équation du problème. Les fondements de la théorie linéaire des instabilités hydrodynamiques sont décrits dans le cas d'une couche de mélange temporelle en tangente hyperbolique soumise ou non à un gradient symétrique de température. Nous proposons ensuite une revue détaillée des principaux résultats relatifs aux analyses théoriques faiblement non-linéaires. Le chapitre 3 se rapporte à la mise au point des méthodes numériques permettant d'obtenir les caractéristiques des ondes d'instabilité et décrit le schéma numérique retenu. À la fin du chapitre 3 une description de toutes les grands caractéristiques et des moyens d'analyse utilisés dans les deux chapitres suivants est proposée. Les résultats relatifs à l'évolution linéaire des ondes d'instabilité sont décrits et analysés dans le chapitre 4. Enfin, le chapitre 5 constitue le "cœur" de ce travail puisqu'il traite de l'évolution non-linéaire des ondes d'instabilité dans le cas isotherme et non-isotherme. Le chapitre 6 conclut cette thèse et présente des extensions possibles de ce travail.

Chapitre 2

LE POINT DE VUE DES INSTABILITÉS HYDRODYNAMIQUES : Fondements théoriques

Ce chapitre présente le problème physique étudié et les équations qui le régissent. Il décrit aussi les fondements de la théorie de l'instabilité linéaire. Enfin, il introduit la démarche et les résultats de la théorie de l'instabilité faiblement non-linéaire à laquelle notre étude se rattache principalement.

2.1 Problème physique et formulation

Il s'agit d'étudier le développement temporel des ondes d'instabilité dans une couche de mélange bidimensionnelle dont le profil de vitesse de base, en l'absence de perturbations, est une fonction en tangente hyperbolique, soumise ou non à un gradient de température transverse et à une pression uniforme. Le phénomène étudié est supposé périodique dans la direction de l'écoulement, de période $2\pi/k^*$, où k^* est le nombre d'onde du mode fondamental. Ainsi,

$$\phi^*(x^* + \frac{2\pi}{k^*}, y^*, t^*) = \phi^*(x^*, y^*, t^*),$$

pour toutes les fonctions de champs ϕ^* . Les limites supérieure ($y^* = L_y^*/2$) et inférieure ($y^* = -L_y^*/2$) sont des surfaces libres et athermanes où la composante de vitesse normale à l'écoulement, les contraintes visqueuses et les transferts de chaleur sont nuls.

Chaque grandeur est repérée par ses coordonnées d'espace et de temps (x^*, y^*, t^*) dans le repère cartésien orthonormé $(0, \underline{i}, \underline{j})$ (figure 2.1).

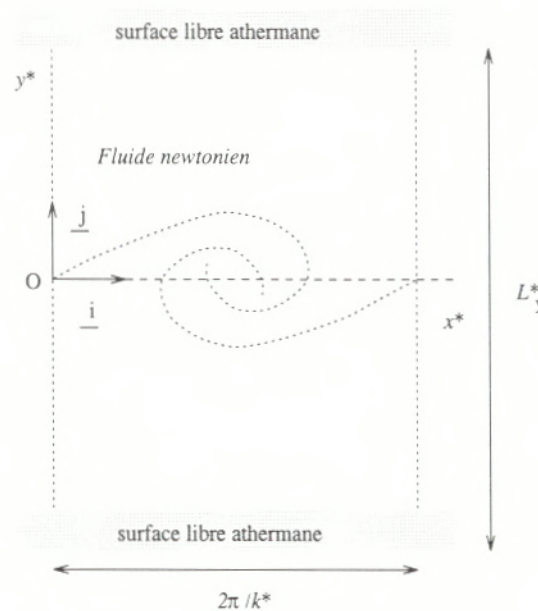


FIG. 2.1 - Domaine physique

On fait, de plus, les **hypothèses** suivantes :

Le fluide est newtonien, caractérisé par le vecteur vitesse \underline{v}^* de composantes (u^*, v^*) et par le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\tau}}^*$. Les coefficients de viscosité de Lamé

λ^* et μ^* sont reliés par la relation de Stokes, $3\lambda^* + 2\mu^* = 0$. Le vecteur flux de chaleur \underline{q}^* vérifie la loi de Fourier $\underline{q}^* = -\text{grad } T^*$ et le fluide est un gaz caloriquement et thermiquement parfait. La viscosité dynamique μ^* et la conductibilité thermique κ^* sont des constantes indépendantes de la température T^* et le nombre de Prandtl Pr est égal à 1. Enfin, la pesanteur est négligée.

L'état de base que nous considérons pour ce travail est défini en **variables dimensionnées** par les profils (figure 2.2) suivants :

$$\underline{U}_0^*(y^*) = \frac{\Delta U^*}{2} \tanh\left(\frac{2y^*}{\delta^*}\right) \mathbf{i}, \quad (2.1)$$

$$T_0^*(y^*) = T_\infty^* + \Delta T^* \text{sech}^{\text{Ma}^2}\left(\frac{2y^*}{\delta^*}\right), \quad (2.2)$$

$$P_0^* = \rho_\infty^* T_\infty^* R^*, \quad (2.3)$$

$$\rho_0^*(y^*) = \frac{P_0^*}{R^* T_0^*(y^*)}, \quad (2.4)$$

avec

$$-L_y^*/2 < y^* < L_y^*/2 \quad \text{et} \quad \text{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}.$$

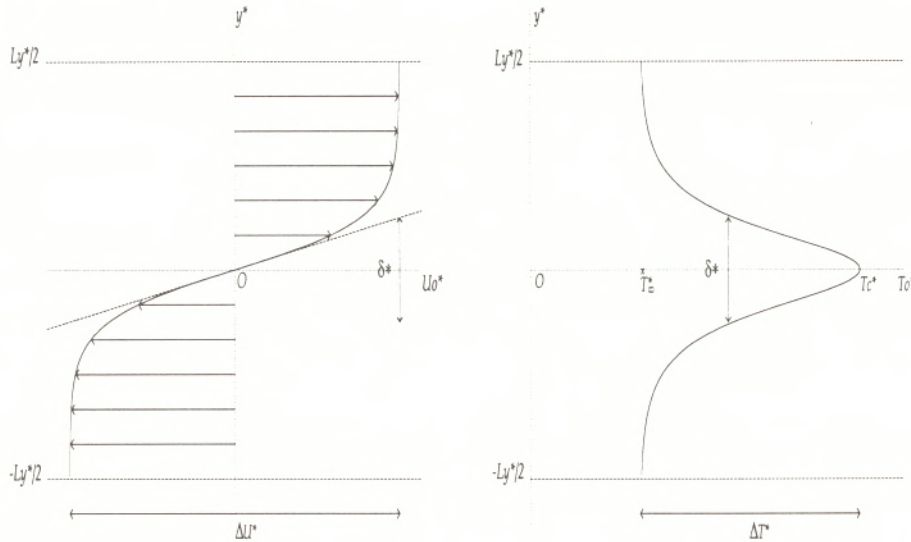


FIG. 2.2 - Profils dimensionnés de base pour la vitesse $U_0^*(y^*)$ et la température $T_0^*(y^*)$.

Les grandeurs U_0^* , T_0^* , ρ_0^* désignent respectivement les profils de vitesse, de température, de masse volumique, P_0^* est la pression de base supposée uniforme et Ma est le nombre de Mach basé sur la demi-différence de vitesse $\frac{\Delta U^*}{2}$ à travers la couche de cisaillement :

$$\text{Ma} = \frac{\Delta U^*}{2a_\infty^*}. \quad (2.5)$$

La grandeur a_∞^* représente la vitesse du son à l'infini

$$a_\infty^* = \sqrt{\gamma R^* T_\infty^*}, \quad (2.6)$$

où $\gamma = C_p/C_v$ est le rapport des chaleurs spécifiques et R^* est la constante universelle des gaz parfaits. Enfin, le paramètre $\delta^* = \Delta U^*/(\partial U_0/\partial y)_0$ est l'épaisseur de vorticité de la couche de mélange et la grandeur $\Delta T^* = T_c^* - T_\infty^*$ est la différence de température entre $y = 0$ et $y = \pm L_y/2$.

Le choix du profil de température T_0 est motivé par le fait qu'il permet d'obtenir une expression analytique du mode neutre régulier (cf §2.3, relations (2.90)). Idéalement, on voudrait pouvoir relier U_0   T_0 par la relation de Crocco-Busemann (Schlichting (1968)). Djordjevic & Redekopp (1988) ont montré que cela conduit à un ensemble de profils peu différents de notre choix.

Il est important de noter en outre que U_0^* et T_0^* ont la même échelle de longueur transversale δ^* . Ceci est cohérent avec l'hypothèse de nombre de Prandtl unité.

Nous verrons par la suite qu'il est utile de connaître l'expression du profil de base d'énergie totale $E_0^*(y^*)$. Avec l'hypothèse de fluide caloriquement parfait, on peut écrire

$$E_0^*(y^*) = C_v T_0^*(y^*) + \frac{U_0^{*2}(y)}{2}. \quad (2.7)$$

On introduit les variables adimensionnées suivantes :

$$U_0 = \frac{2U_0^*}{\Delta U^*}, \quad T_0 = \frac{T_0^*}{T_\infty^*}, \quad \rho_0 = \frac{\rho_0^*}{\rho_\infty^*}, \quad P_0 = \frac{4P_0^*}{\rho_\infty^* \Delta U^{*2}}, \quad E_0 = \frac{4E_0^*}{\Delta U^{*2}}, \quad (2.8)$$

$$y = \frac{2y^*}{\delta^*}, \quad L_y = \frac{2L_y^*}{\delta^*}. \quad (2.9)$$

Dans ces conditions, l'état de base en variables adimensionnées (figure 2.3) est exprimé par :

$$U_0(y) = \tanh y, \quad (2.10)$$

$$T_0(y) = 1 + b \operatorname{sech}^{\operatorname{Ma}^2} y, \quad b > -1, \quad (2.11)$$

$$\rho_0(y) = \frac{1}{T_0(y)}, \quad (2.12)$$

$$P_0 = \frac{1}{\gamma \operatorname{Ma}^2}, \quad (2.13)$$

$$E_0(y) = \frac{T_0(y)}{\gamma(\gamma - 1) \operatorname{Ma}^2} + \frac{U_0^2(y)}{2}, \quad (2.14)$$

avec

$$-L_y/2 < y < L_y/2.$$

Le paramètre b est le rapport de température

$$b = \frac{\Delta T^*}{T_\infty^*}, \quad b > -1. \quad (2.15)$$

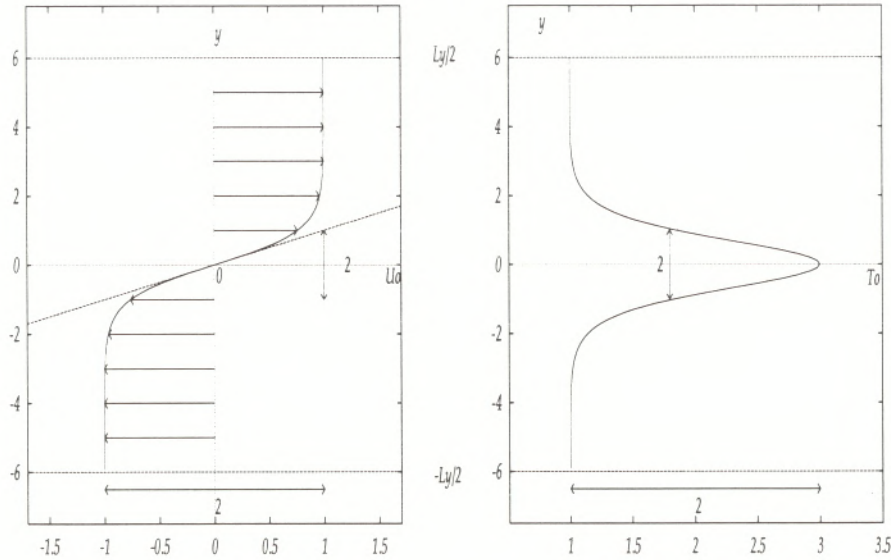


FIG. 2.3 - Profils de base adimensionnés pour la vitesse $U_0(y)$ et la température $T_0(y)$ pour le cas réchauffé $b = 2$.

Le fait de spécifier la température de base à travers le paramètre b donne la liberté de choisir un réchauffement ($b > 0$) ou un refroidissement symétrique ($-1 < b < 0$) de la région de fort cisaillement. De plus, il est facile de se mettre dans le cas d'un état de base isotherme correspondant à $b = 0$, dont les propriétés de stabilité linéaire ont été étudiées par Blumen (1970).

Afin d'éviter toute ambiguïté, précisons que l'on parlera de **couche de mélange incompressible** lorsque l'état de base sera isotherme ($b = 0$) de nombre de Mach nul ($Ma = 0$). On parlera de **couche de mélange compressible isotherme** lorsque l'état de base sera isotherme ($b = 0$) et le nombre de Mach différent de zéro ($Ma \neq 0$). Enfin, on dira simplement **couche de mélange compressible** pour décrire un état de base non isotherme ($b \neq 0$) à nombre de Mach non nul ($Ma \neq 0$).

Nous disposons, à ce stade de l'étude, de l'expression des profils caractérisant l'état de base de l'écoulement dont nous allons étudier la déstabilisation. Les équations qui décrivent cet écoulement sont les **équations de Navier-Stokes**. En introduisant les variables adimensionnées suivantes

$$t = \frac{t^* \Delta U^*}{\delta^*}, \quad \underline{x} = \frac{2x^*}{\delta^*},$$

$$\underline{y} = \frac{2y^*}{\Delta U^*}, \quad T = \frac{T^*}{T_\infty^*}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*}, \quad p = \frac{4p^*}{\rho_\infty^* \Delta U^{*2}}, \quad E = \frac{4E^*}{\Delta U^{*2}},$$

elles peuvent s'écrire sous **forme conservative adimensionnelle** à l'aide des fonctions de champ ρ , $\rho \underline{v}$ et ρE (Anderson *et al* (1984)) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \underline{v} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v} \otimes \underline{v}) = -\underline{\operatorname{grad}} p + \operatorname{div} \underline{\tau} , \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}[(\rho E + p)\underline{v}] = \operatorname{div}(\underline{\tau} \cdot \underline{v}) - \operatorname{div} \underline{q} , \quad (2.18)$$

avec

$$\underline{\tau} = \frac{1}{\operatorname{Re}} [(\underline{\operatorname{grad}} \underline{v} + {}^t \underline{\operatorname{grad}} \underline{v}) - \frac{2}{3}(\operatorname{div} \underline{v}) \underline{\mathbb{I}}] , \quad (2.19)$$

$$\underline{q} = -\frac{1}{(\gamma - 1)\operatorname{Re} \operatorname{Pr} \operatorname{Ma}^2} \operatorname{div}(\underline{\operatorname{grad}} T) ,$$

où le rapport des chaleurs spécifiques, les nombres de Reynolds, Prandtl et Mach sont définis respectivement par

$$\gamma = \frac{C_p^*}{C_v^*} = 1,4 \quad , \quad \operatorname{Re} = \frac{\rho_\infty^* \delta^* \Delta U^*}{4\mu^*} , \quad (2.20)$$

$$\operatorname{Pr} = \frac{C_p^* \mu^*}{\kappa^*} = 1 \quad , \quad \operatorname{Ma} = \frac{\Delta U^*}{2a_\infty^*} . \quad (2.21)$$

Associées au nombre d'onde adimensionnel

$$k = \frac{k^* \delta^*}{2} , \quad (2.22)$$

les grandeurs définies en (2.20) et (2.21) constituent les paramètres de contrôle du problème. La pression et l'énergie totale sont données par

$$p = \frac{\rho T}{\gamma \operatorname{Ma}^2} , \quad (2.23)$$

$$E = \frac{T}{\gamma(\gamma - 1)\operatorname{Ma}^2} + \frac{v^2}{2} . \quad (2.24)$$

Enfin, les **conditions limites** associées sont

$$\phi(x + \frac{2\pi}{k}, y, t) = \phi(x, y, t) , \quad (2.25)$$

pour toutes les fonctions de champ ϕ et

$$v(x, \pm L_y/2, t) = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, \pm L_y/2, t) = 0 , \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, \pm L_y/2, t) = 0 . \quad (2.27)$$

Les profils de base $U_0(y)$ et $T_0(y)$ définis en (2.10)-(2.14) ne vérifient ni les équations de Naviers-Stokes (2.16)-(2.19), ni les conditions aux limites (2.26) et (2.27),

mais seulement leurs homologues de fluide parfait (2.31)-(2.35). Comme dans de nombreux travaux antérieurs (Huerre (1980), Huang (1992)), on choisit d'introduire dans les équations (2.16)-(2.19) et dans les conditions aux limites (2.26) et (2.27), des termes "anti-diffusifs" de façon à compenser l'effet de la diffusion visqueuse et à maintenir les profils $U_0(y)$ et $T_0(y)$ au cours du temps. Cet artifice est légitime dans la mesure où le temps caractéristique d'évolution des ondes d'instabilités $\tau_i^* = \delta^*/\Delta U^*$ est beaucoup plus court que le temps caractéristique de diffusion $\tau_v = \delta^{*2}/(4\nu^*)$. Ceci n'est pas toujours le cas comme nous le verrons en §2.3. Dans les équations (2.16)-(2.19) projetées et écrites sous forme matricielle, les termes suivants sont donc rajoutés au second membre :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} \\ 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial U_0}{\partial y} U_0 \right) - \frac{1}{(\gamma-1) \text{Re} \text{Ma}^2} \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Les conditions limites (2.26) et (2.27) deviennent :

$$v(x, \pm L_y/2, t) = 0, \quad \frac{\partial(u - U_0)}{\partial y}(x, \pm L_y/2, t) = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial(T - T_0)}{\partial y}(x, \pm L_y/2, t) = 0. \quad (2.30)$$

Au chapitre 4, un exemple illustrera la nécessité de l'utilisation de cette technique pour que notre étude soit compatible avec la théorie de l'instabilité à laquelle nous nous référons. Les équations résultantes (2.16)-(2.24), couplées aux conditions limites (2.25), (2.29) et (2.30), sont celles retenues dans le code de simulation numérique directe. Nous allons auparavant introduire les éléments relatifs à la théorie de l'instabilité qui nous permettront de choisir judicieusement les conditions initiales sur les fonctions de champ perturbées. On pourra ensuite confronter les résultats ainsi obtenus à ceux de la simulation.

2.2 Instabilité linéaire

Une approche habituelle en hydrodynamique consiste à considérer des petites perturbations. Le problème aux perturbations peut alors être résolu par décomposition en modes indépendants et les équations peuvent être linéarisées. On peut alors s'attendre à ce que, pour chaque mode, les solutions du système d'équations résultant aient une dépendance temporelle de la forme σt , où le taux de croissance σ est en général complexe. Si la partie réelle de σ est positive, le système est alors instable. La connaissance du taux de croissance est l'objet principal de la théorie de l'instabilité linéaire. Dans ce qui suit, nous présentons certains éléments nécessaires à l'examen des propriétés d'instabilité linéaire pour la famille de couches de mélange compressibles définies en (2.10)-(2.14).

2.2.1 Fluide parfait

Dans le système (2.16)-(2.19), on impose :

$$\underline{\tau} = 0 \quad , \quad \underline{q} = 0,$$

et on fait apparaître l'énergie interne e au lieu de l'énergie totale E . Ceci conduit au système :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad , \quad (2.31)$$

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} + \underline{\operatorname{grad}} p = 0 \quad , \quad (2.32)$$

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad , \quad (2.33)$$

$$p = \frac{\rho T}{\gamma \operatorname{Ma}^2} \quad , \quad (2.34)$$

$$e = \frac{T}{\gamma(\gamma - 1)\operatorname{Ma}^2} \quad . \quad (2.35)$$

où $d/dt = \partial/\partial t + \underline{v} \cdot \underline{\operatorname{grad}}$ est la dérivée particulaire.

L'élimination de la masse volumique et de l'énergie interne permet d'obtenir un système équivalent pour les variables \underline{v} , T et p :

$$\frac{d}{dt}(\ln p) + \gamma \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad , \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{v} + \frac{T}{\gamma \operatorname{Ma}^2} \underline{\operatorname{grad}} p = 0 \quad , \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{dt}(\ln T) + (\gamma - 1) \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad , \quad (2.38)$$

Les expressions pour la pression (2.34) et l'énergie interne (2.35) demeurent inchangées. Les conditions limites associées (2.25), (2.29) et (2.30) deviennent :

$$\phi\left(x + \frac{2\pi}{k}, y, t\right) = \phi(x, y, t) \quad \text{pour tout } \phi \text{ et} \quad (2.39)$$

$$v(x, \pm L_y/2, t) = 0 \quad . \quad (2.40)$$

La théorie de l'instabilité linéaire repose sur la résolution des équations écrites en termes de perturbations puis linéarisées. Aussi, introduit-on les perturbations ¹ de vitesse $\underline{v}'_1 = {}^t(u'_1, v'_1)$, de masse volumique ρ'_1 , de pression p'_1 et de température

¹L'indice 1 indique qu'il s'agit du mode fondamental introduit par la suite. Le prime indique la partie fluctuante.

T'_1 , dans le système (2.36)-(2.38), dans les expressions (2.34) et (2.35) et dans les conditions limites (2.39), (2.40), par les changements de variables :

$$u = U_0(y) + u'_1, \quad v = v'_1, \quad (2.41)$$

$$T = T_0(y) + T'_1, \quad \rho = \rho_0(y) + \rho'_1, \quad (2.42)$$

$$p = P_0 + p'_1 = 1/\gamma\text{Ma}^2 + p'_1. \quad (2.43)$$

Après linéarisation, on est conduit aux équations projetées suivantes :

$$\frac{dp'_1}{dt} + \frac{1}{\text{Ma}^2} \text{div } \underline{v}'_1 = 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{du'_1}{dt} + \frac{\partial U_0}{\partial y} v'_1 + T_0 \frac{\partial p'_1}{\partial x} = 0, \quad (2.45)$$

$$\frac{dv'_1}{dt} + T_0 \frac{\partial p'_1}{\partial y} = 0, \quad (2.46)$$

$$\frac{dT'_1}{dt} + v'_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} + (\gamma - 1) T_0 \text{div } \underline{v}'_1 = 0, \quad (2.47)$$

où l'opérateur $d/dt = \partial/\partial t + U_0 \partial/\partial x$ est la dérivée particulaire linéarisée, avec

$$p'_1 = \frac{1}{\gamma\text{Ma}^2} \left[\frac{T'_1}{T_0} + T_0 \rho'_1 \right]. \quad (2.48)$$

Les conditions limites (2.39) et (2.40) deviennent :

$$\phi'_1(x + 2\pi/k, y, t) = \phi'_1(x, y, t) \quad \text{pour tout } \phi, \quad (2.49)$$

$$v'_1(x, \pm L_y/2, t) = 0. \quad (2.50)$$

On déduit de la condition (2.50) et de l'équation (2.46) que

$$\frac{\partial p'_1}{\partial y}(x, \pm L_y/2, t) = 0. \quad (2.51)$$

Nous cherchons à résoudre le problème (2.44)-(2.51) en terme de pression p'_1 . En appliquant l'opérateur linéarisé $\frac{d}{dt}$ à l'équation (2.44), on obtient l'équation

$$\frac{d^2 p'_1}{dt^2} + \frac{1}{\text{Ma}^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{du'_1}{dt} \right] + \frac{1}{\text{Ma}^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{dv'_1}{dt} \right] - \frac{\partial v'_1}{\partial x} \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) = 0,$$

dans laquelle on substitue

$$\frac{du'_1}{dt} = -v'_1 \frac{\partial U_0}{\partial y} - T_0 \frac{\partial p'_1}{\partial x},$$

extrait de (2.45). À l'équation ainsi obtenue est appliqué une deuxième fois l'opérateur $\frac{d}{dt}$, ce qui donne la relation :

$$\frac{d^3 p'_1}{dt^2} - \frac{2}{\text{Ma}^2} \frac{\partial U_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{dv'_1}{dt} \right] - \frac{T_0}{\text{Ma}^2} \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 p'_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Ma}^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{dv'_1}{dt} \right] \right) = 0 .$$

Enfin, en reportant

$$\frac{dv'_1}{dt} = -T_0 \frac{\partial p'_1}{\partial y} ,$$

extrait de (2.46), on est conduit à une équation pour les perturbations en pression de la forme :

$$\frac{d^3 p'_1}{dt^3} - \frac{T_0}{\text{Ma}^2} \frac{d}{dt} \Delta p'_1 - \frac{\partial T_0 / \partial y}{\text{Ma}^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p'_1}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial T_0 / \partial y}{\text{Ma}^2} \frac{\partial U_0 / \partial y}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 p'_1}{\partial x \partial y} = 0 , \quad (2.52)$$

avec les conditions limites :

$$p'_1(x + 2\pi/k, y, t) = p'_1(x, y, t) , \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial p'_1}{\partial y}(x, y \pm L_y/2, t) = 0 . \quad (2.54)$$

La résolution de (2.52) est effectuée en recherchant les modes normaux sous la forme complexe :

$$p'_1(x, y, t) = p_1(y) e^{i(kx - \omega^\infty t)} , \quad (2.55)$$

où k représente le nombre d'onde et $\omega^\infty = kc$ la pulsation ², c étant la vitesse de phase. Comme on considère une perturbation évoluant en temps, k est réel et $\omega^\infty = \omega_r^\infty + i\omega_i^\infty$ ainsi que $c = c_r + ic_i$ sont complexes. Les fonctions propres $p_1(y)$ sont solutions de l'équation de Rayleigh³ (Lin (1955)) obtenue en substituant (2.55) dans (2.52) :

$$\frac{d^2 p_1}{dy^2} - \left(\frac{2dU_0/dy}{U_0 - c} - \frac{dT_0/dy}{T_0} \right) \frac{dp_1}{dy} - k^2 \left(1 - \frac{\text{Ma}^2 (U_0 - c)^2}{T_0} \right) p_1 = 0 , \quad (2.56)$$

avec

$$p_1(x + 2\pi/k, y, t) = p_1(x, y, t) , \quad (2.57)$$

$$\frac{dp_1}{dy}(x, \pm L_y/2, t) = 0 . \quad (2.58)$$

En conséquence, un problème aux valeurs propres est à résoudre : à un état de base (U_0, T_0) , un nombre de Mach Ma , un rapport de température b et un nombre d'onde k donnés, correspond un couple de solutions (ω^∞, p_1) . La fonction propre

²L'exposant ∞ rappelle que l'étude est à nombre de Reynolds infini.

³L'appellation "équation de Rayleigh" est plus exactement réservée à l'équation équivalente obtenue dans le cas incompressible (2.61).

p_1 sera calculée à partir de (2.56) pour une valeur propre ω^∞ reliée à k par la relation de dispersion :

$$D(k, \omega^\infty; \text{Ma}, b) = 0, \quad (2.59)$$

où le nombre de Mach Ma et le rapport de température b sont les paramètres de contrôle du problème. On observe immédiatement que l'équation (2.56) possède un point singulier-régulier (Bender & Orszag (1978)) appelé **point critique** en y_c tel que $U_0(y_c) = c$. Pour des perturbations neutres ($c_i = 0$), on peut effectivement s'attendre à des complications, comme nous le verrons plus bas, mais pour $c_i > 0$, l'équation (2.56) est non-singulière sur l'axe réel. Comme le profil de vitesse U_0 est antisymétrique par rapport au point d'inflexion ($y = 0$), il s'ensuit (Tatsumi & Gotoh 1960), en supposant que la fonction propre instable $p_1(y)$ est unique, que la vitesse de phase c_r est identiquement nulle :

$$c_r = U_0(0) = 0. \quad (2.60)$$

À titre d'exemple, est tracée sur la figure 2.4 la courbe des taux de croissance temporels $\omega_i^\infty(k)$ typique de l'état de base étudié (2.10)-(2.14). Il s'agit d'une courbe en cloche caractérisée par un taux de croissance maximal $\omega_{i_{max}}^\infty$ en k_{max} et par un nombre d'onde neutre α correspondant au taux de croissance nul.

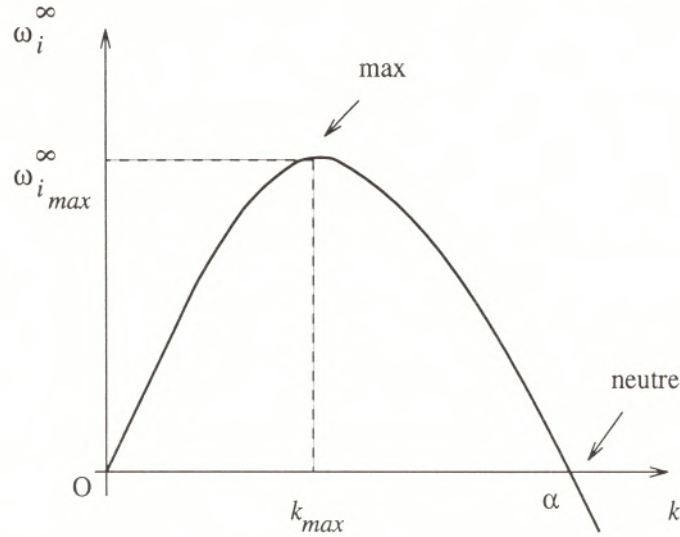


FIG. 2.4 - Courbe des taux de croissance temporels $\omega_i^\infty(k)$ typique d'un profil de vitesse en tangente hyperbolique ; analyse de stabilité linéaire en fluide parfait.

Dans le cas **incompressible** ($\text{Ma}=0, b = 0$), la méthode usuelle consiste à écrire l'équation de Rayleigh en terme de fonction de courant $\Phi_1(y)$:

$$\Phi_1'' - k^2 \Phi_1 - \frac{U_0''}{U_0 - c} \Phi_1 = 0, \quad (2.61)$$

où le prime désigne la dérivée par rapport à y . Examinons les solutions au point critique y_c où $U_0(y_c) = c$. La méthode de Frobenius (Bender & Orszag (1978)) permet d'obtenir deux solutions pour $|y - y_c| \rightarrow 0$ sous la forme :

$$\Phi_1^{(1)} = (y - y_c) + \frac{U_0''(y_c)}{2U_0'(y_c)}(y - y_c)^2 + \dots, \quad (2.62)$$

$$\Phi_1^{(2)} = 1 + \left(\frac{k^2}{2} + \frac{U_0'''(y_c)}{2U_0'(y_c)} - \frac{U_0''(y_c)^2}{U_0'(y_c)^2} \right) (y - y_c)^2 + \dots + \frac{U_0''(y_c)}{U_0'(y_c)} \Phi_1^{(1)} \log(y - y_c). \quad (2.63)$$

La solution $\Phi_1^{(1)}$ est régulière mais $\Phi_1^{(2)}$ présente une singularité logarithmique qui disparaît si $U_0''(y_c) = 0$, c'est-à-dire lorsque le point critique coïncide avec le point d'inflexion $y = 0$. Partant de la solution analytique régulière au nombre d'onde neutre $\alpha = 1$ donnée par Garcia (1956) pour le profil $U_0(y) = \tanh y$:

$$\Phi_1(y) = p_1(y) = \operatorname{sech} y, \quad c_r = U_0(0) = 0, \quad c_i = 0, \quad (2.64)$$

Blumen (1970) a obtenu la solution analytique au nombre d'onde neutre α de (2.56) dans le cas **compressible isotherme** ($b = 0$):

$$p_1(y) = \operatorname{sech}^{\alpha^2} y, \quad c_r = U_0(0) = 0, \quad c_i = 0, \quad (2.65)$$

avec

$$\alpha^2 + \operatorname{Ma}^2 = 1. \quad (2.66)$$

Enfin, dans le cas **compressible** général ($b \neq 0$), Djordjevic & Redekopp (1988) ont montré que, pour le profil de température défini en (2.11), la solution (2.65) demeure valable.

2.2.2 Fluide visqueux

Dans le cas visqueux, la théorie linéaire de l'instabilité conduit à un problème aux valeurs propres représenté par l'équation de Orr-Sommerfeld (Drazin & Reid (1981)). Betchov & Szewczyk (1963) en ont fait l'étude en fluide incompressible ($\operatorname{Ma}=0, b = 0$) pour des valeurs du nombre de Reynolds Re comprises entre 0 et 40. Nous présentons sur la figure 2.5 les courbes de stabilité qu'ils ont obtenues numériquement pour ces différentes valeurs du nombre de Reynolds ainsi que pour le cas de fluide parfait ($\operatorname{Re} = \infty$). On constate que la viscosité a un effet stabilisant tendant à diminuer la valeur du taux de croissance maximal et la gamme des nombres d'onde instables.

Dans le cas **compressible**, l'étude au neutre de Djordjevic & Redekopp (1989a) a permis de montrer que la solution neutre en pression (2.65) était encore valable à l'ordre dominant pour l'état de base étudié et que le nombre d'onde neutre k_n pouvait s'exprimer par :

$$k_n \sim \sqrt{1 - \operatorname{Ma}^2} - \frac{2\pi}{\operatorname{Re}} \frac{r(\operatorname{Ma}, b, \operatorname{Pr})}{s(\operatorname{Ma}, b)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\operatorname{Re}}\right)^2, \quad (2.67)$$

pour des valeurs de Re supposées grandes et où les fonctions $r(\operatorname{Ma}, \operatorname{Pr}, b)$ et $s(\operatorname{Ma}, b)$, sont données en Annexe.

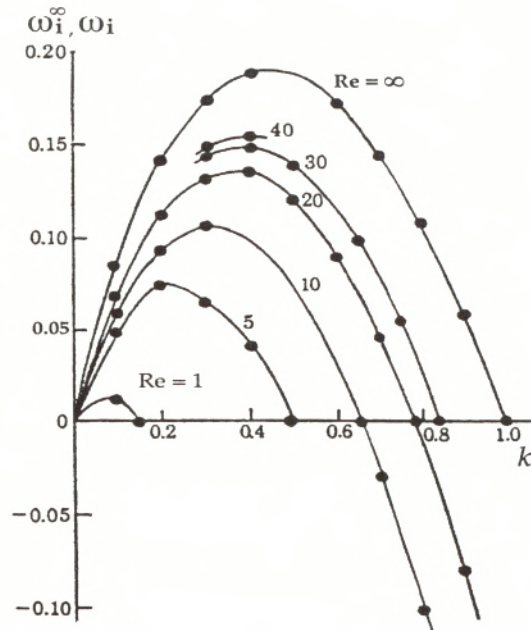


FIG. 2.5 - Courbes des taux de croissance temporels $\omega_i(k; Ma = 0, Re \neq \infty, b = 0)$ et $\omega_i^\infty(k; Ma = 0, b = 0)$; graphe issu de Betchov & Szewczyk (1963); analyse de stabilité linéaire en fluide visqueux.

Pour préciser les notations, trois courbes de stabilité sont représentées sur la figure 2.6 : $\omega_i^\infty(k)$ à $Ma=0$ et $Ma \neq 0$ et $\omega_i(k)$ à $Ma \neq 0$, courbes typiques de l'état de base étudié, sur lesquelles le "neutre" et le "max" sont mis en évidence.

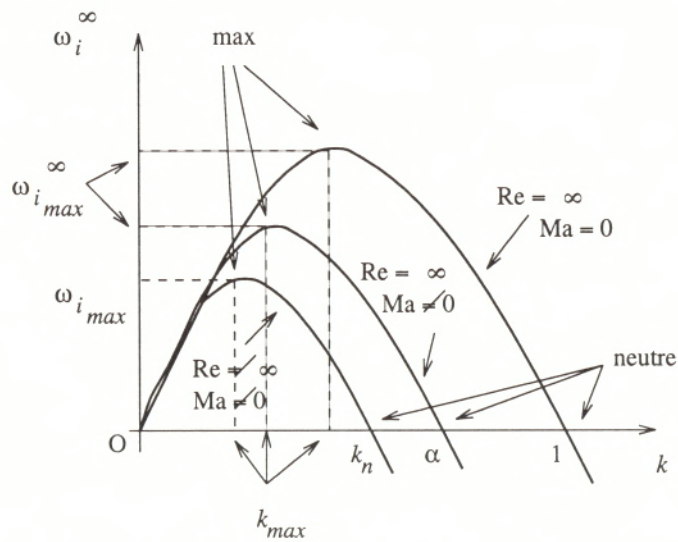


FIG. 2.6 - Courbes des taux de croissance temporels $\omega_i^\infty(k; Ma = 0, b = 0)$, $\omega_i^\infty(k; Ma \neq 0, b = 0)$ et $\omega_i(k; Ma \neq 0, b = 0)$ typiques d'un profil de vitesse en tangente hyperbolique; analyse de stabilité linéaire en fluide parfait et en fluide visqueux.

2.3 Instabilité faiblement non-linéaire.

2.3.1 Équations d'amplitude et bifurcations

La théorie faiblement non-linéaire peut être résumée pour les couches de mélange **incompressibles** en tangente hyperbolique en faisant référence aux travaux de Huerre (1980, 1987) et Churilov & Shukmann (1987). Ces auteurs ont étudié l'évolution spatio-temporelle d'un mode marginal dans le cas où le nombre de Reynolds Re est grand et où les effets visqueux prédominent dans une couche mince située de part et d'autre du point d'inflexion $y = 0$ du profil de vitesse. Cette zone, appelée **couche critique**, joue un rôle essentiel dans la dynamique de perturbations faiblement amplifiées au voisinage du nombre d'onde neutre k_n . Lors de la recherche de tels modes, on l'introduit en vue de lisser la singularité logarithmique (cf. équation (2.63)) dont les effets se font sentir sur l'axe réel pour $k \neq k_n$ avec $|k_n - k| \ll 1$.

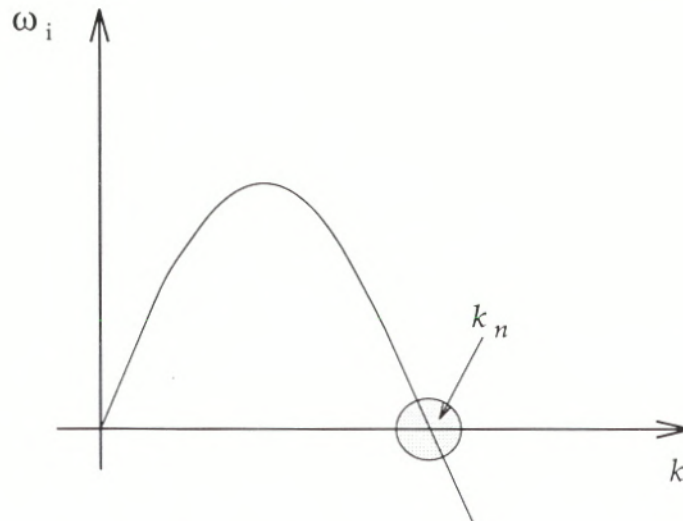


FIG. 2.7 - Domaine de validité de la théorie faiblement non-linéaire : le nombre d'onde k doit se trouver au voisinage du nombre d'onde neutre k_n .

Le principal objectif de l'analyse faiblement non-linéaire est de déterminer l'équation d'évolution pour l'amplitude complexe A d'une onde faiblement amplifiée au voisinage de k_n (figure 2.7). Le principe est de développer en puissances de ϵ toutes les fonctions de champs, où ϵ désigne l'ordre de grandeur des perturbations. En isolant les différents ordres en ϵ , on arrive à une suite de problèmes linéaires qui, excepté pour le premier, sont inhomogènes. Il convient en général, en vue de résoudre chaque équation, d'utiliser la condition d'orthogonalité, également appelée *alternative de Fredholm*, pour que l'équation ait des solutions : le terme inhomogène à chaque ordre en ϵ doit être orthogonal, au sens d'un produit scalaire approprié mettant en jeu une intégrale en y , à la fonction propre de l'opérateur adjoint associé au problème linéaire. Cette condition permet alors d'obtenir

l'équation d'amplitude pour A . Du fait de l'existence du point critique, l'intégrale en y n'est en général pas convergente et, dans le cas présent, il est préférable, pour obtenir l'équation d'amplitude, d'imposer les conditions limites à l'infini et d'appliquer les conditions de raccordement de part et d'autre de la couche critique.

L'influence capitale qu'exerce la structure de la couche critique sur le comportement asymptotiquement long des ondes marginalement instables a été résumée par Huerre & Redekopp (1983). Dans un régime de couche critique visqueuse (cf. §2.3.2), Huerre (1980, 1987) a démontré, par une méthode de raccordement asymptotique, que l'évolution des perturbations est décrite par un développement en amplitude de type Landau (Landau & Lifchitz (1953)) :

$$\frac{dA}{dt} = \omega_{i_{inc}} A + L_{inc} |A|^2 A, \tag{2.68}$$

où les coefficients $\omega_{i_{inc}}$ et L_{inc} sont réels. Le taux de croissance linéaire $\omega_{i_{inc}}$ est proportionnel à l'écart au neutre Δk :

$$\omega_{i_{inc}} = \frac{2}{\pi} \Delta k. \tag{2.69}$$

La constante de Landau L_{inc} , qui multiplie la non-linéarité cubique $|A|^2 A$, est dans le cas présent négative, donc stabilisante, et $\mathcal{O}(\text{Re}^{\frac{1}{3}})$:

$$L_{inc} = -\frac{4}{\pi} \text{Re}^{\frac{1}{3}} I_L \quad \text{avec } I_L = 1,606. \tag{2.70}$$

Les effets non-linéaires se manifestent par une déformation de l'écoulement moyen dans la couche critique et par l'existence d'un état d'équilibre d'amplitude finie $|A(\infty)|$. Lorsque $t \rightarrow \infty$, les ondes linéairement amplifiées atteignent le niveau d'amplitude finie stable :

$$|A(\infty)| = \sqrt{\frac{-\omega_{i_{inc}}}{L_{inc}}}. \tag{2.71}$$

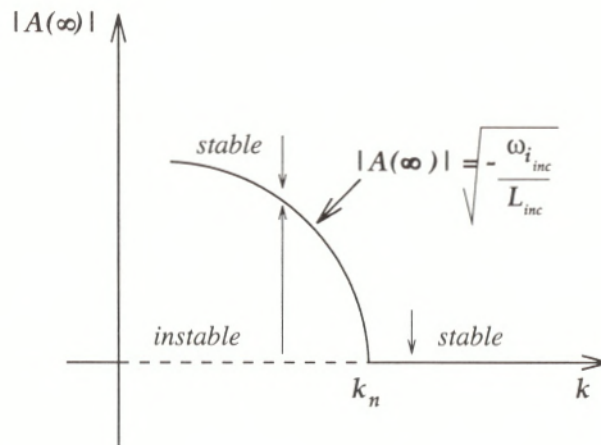


FIG. 2.8 - Amplitude A en fonction du nombre d'onde k : exemple d'une bifurcation supercritique; trait continu : état stable, pointillés : état instable.

L'écoulement subit ainsi une **bifurcation stationnaire supercritique** (ou surcritique) schématisée sur la figure 2.8. On a représenté sur ce diagramme de bifurcation l'amplitude de saturation $|A(\infty)|$ en fonction du nombre d'onde k . Pour tout nombre d'onde k linéairement instable et proche de k_n , la perturbation associée tend sous les effets non-linéaires vers un état stable indépendant de son amplitude initiale. En revanche, toute onde associée à un nombre d'onde k linéairement stable est amortie et l'écoulement retourne vers l'état de base.

Djordjevic & Redekopp (1989a, 1989b) ont étendu l'approche faiblement non-linéaire à la couche de mélange **compressible subsonique** définie par l'état de base (2.10)-(2.14). Dans ces analyses, le nombre de Reynolds est supposé grand et la couche critique est dominée par la viscosité et par la diffusion thermique. Une équation de Landau est également obtenue :

$$\frac{dA}{dt} = \omega_{i_{comp}} A + L_{comp} |A|^2 A, \quad (2.72)$$

où les coefficients $\omega_{i_{comp}}$ et L_{comp} sont réels pour le cas du profil (2.10)-(2.14). Le taux de croissance $\omega_{i_{comp}}$ est donné par

$$\omega_{i_{comp}} = \frac{2\Delta k s(\text{Ma}, b)}{\pi}, \quad (2.73)$$

où la fonction $s(\text{Ma}, b)$ est définie en Annexe. La constante de Landau s'exprime analytiquement par

$$L_{comp} = -\frac{4}{\pi} \text{Re}^{\frac{1}{2}} I_L \ell(\text{Ma}, \text{Pr}, b), \quad (2.74)$$

où la fonction $\ell(\text{Ma}, \text{Pr}, b)$ est introduite en Annexe. La constante de Landau L_{comp} ne diffère de L_{inc} qu'à travers la fonction multiplicative $\ell(\text{Ma}, \text{Pr}, b)$, dont la variation en fonction de b est représentée sur la figure 2.9. Il apparaît que le rapport de température b ainsi que le nombre de Mach Ma influencent fortement la dynamique non-linéaire des perturbations puisqu'ils peuvent modifier le signe de ℓ et par conséquent, de la constante de Landau L_{comp} . Ce phénomène se produit quand la couche de mélange est refroidie (pour b compris environ entre -1 et -0,7) et quand le nombre de Mach est grand (l'effet est remarquable dès que $\text{Ma}=0,7$). Dans cette gamme de valeurs, la bifurcation prend alors une **nature sous-critique**.

Le diagramme de bifurcation 2.10 représentant l'amplitude de saturation $|A(\infty)|$ en fonction du nombre d'onde k est typique d'une bifurcation sous-critique. Toute onde marginale de nombre d'onde k linéairement instable subit également l'effet déstabilisant de la non-linéarité. Comme indiqué sur la figure, on peut imaginer l'existence d'un état stable ultérieur dû aux effets fortement non-linéaires et inaccessible par un schéma aux perturbations. Pour des nombres d'ondes linéairement stables suffisamment proches de k_n , il existe un seuil d'amplitude au-delà duquel la non-linéarité déstabilise l'écoulement. En-deçà de ce seuil, les effets non-linéaires sont insuffisants pour compenser le taux d'atténuation linéaire et l'écoulement de base est observé. Ces résultats et l'hypothèse de l'existence d'un état stable ultérieur nous amènent à supposer la présence d'une boucle d'hystérésis, couramment associée aux bifurcations sous-critiques (ligne en pointillés et flèches de la figure 2.10).

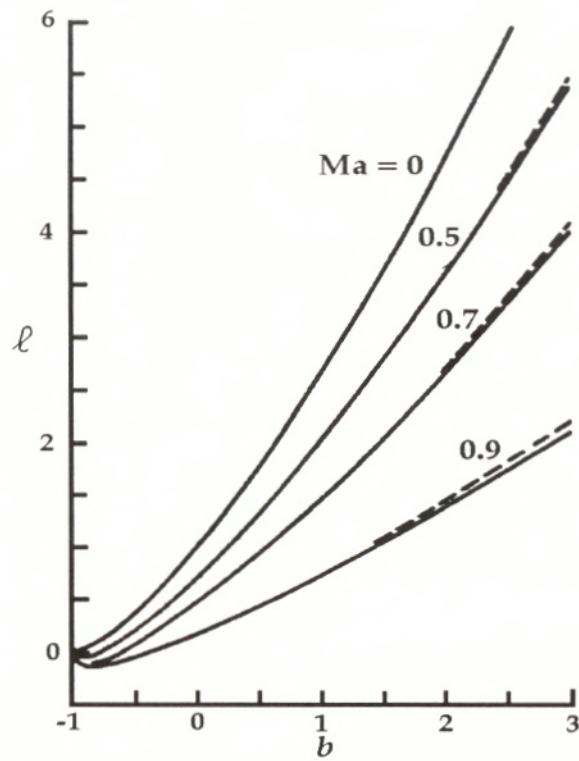


FIG. 2.9 - Variation de ℓ en fonction du rapport de température b pour différents nombres de Mach Ma ; trait continu: $Pr = 0,76$, pointillés: $Pr = 1$; graphe issu de Djordjevic & Redekopp (1989a); analyse de stabilité faiblement non-linéaire.

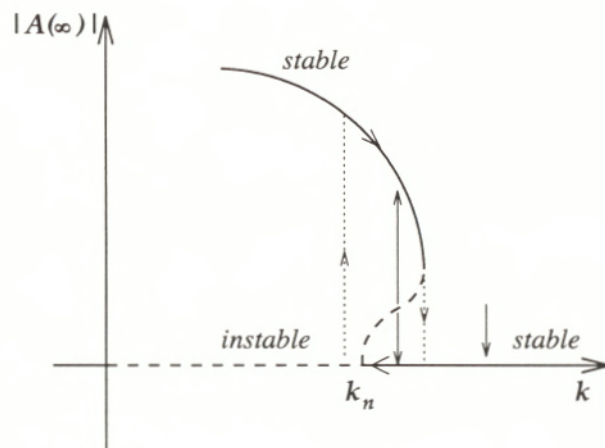


FIG. 2.10 - Amplitude $|A(\infty)|$ en fonction du nombre d'onde k : exemple d'une bifurcation sous-critique; trait continu: état stable, pointillés: état instable.

2.3.2 Méthodologie : couche de mélange compressible en régime de couche critique visqueuse

Nous présentons ci-après les grandes lignes de la méthode élaborée par Huerre (1980, 1987) dans le cas incompressible et étendue à la couche de mélange compressible par Djordjevic & Redekopp (1989a, 1989b).

Afin de se conformer au choix de Djordjevic & Redekopp (1989a), les équations de Navier-Stokes (2.16)-(2.19) possédant les termes anti-diffusifs (2.28) sont réécrites en fonction des variables p , u , v et T . Dans le système (S) ainsi obtenu, on effectue les changements de variables suivants :

$$p(x, y, t) = p_0 + \epsilon p'(x, y, t), \quad (2.75)$$

$$u(x, y, t) = U_0(y) + \epsilon u'(x, y, t), \quad (2.76)$$

$$v(x, y, t) = \epsilon v'(x, y, t), \quad (2.77)$$

$$T(x, y, t) = T_0(y) + \epsilon T'(x, y, t), \quad (2.78)$$

où les grandeurs ϕ_0 représentent les profils de base définis en (2.10)-(2.14), les variables ϕ' sont les perturbations, les champs ϕ indiquent les variables globales et le paramètre ϵ , supposé petit, est une mesure de l'amplitude.

Les travaux pionniers de Benney & Bergeron (1969) et Haberman (1972) ont montré que, pour un écoulement incompressible, la relation reliant les deux petits paramètres ϵ et $1/Re$ joue un rôle important dans l'évolution d'une onde marginale. On se place dans l'hypothèse des grands nombres de Reynolds $Re \gg 1$. Le paramètre qu'il convient de définir est le **nombre de Reynolds dans la couche critique** Re_{cl} basé sur son épaisseur δ_{cl} et sur la vitesse transversale $\epsilon v'$.

Dans le cas général d'une couche critique non-linéaire, l'ordre de grandeur de δ_{cl} est obtenu en équilibrant, dans l'équation de la quantité de mouvement selon Ox , le terme d'advection $\epsilon U_0(y) \frac{\partial u'}{\partial x}$ et le terme non-linéaire $\epsilon^2 v' \frac{\partial u'}{\partial y}$. Compte-tenu du fait que

$$U_0(y) \sim \frac{dU_0}{dy}(0)y = \mathcal{O}(\delta_{cl}) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} = \mathcal{O}(\delta_{cl}^{-1}),$$

on obtient

$$\delta_{cl} = \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}}). \quad (2.79)$$

Le nombre de Reynolds Re_{cl} a donc pour expression

$$Re_{cl} = Re \epsilon^{\frac{1}{2}} \epsilon = Re \epsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (2.80)$$

Les différents régimes dans le cas incompressible sont décrits par Huerre & Redekopp (1983).

En particulier, quand

$$Re_{cl} \ll 1, \quad (2.81)$$

les effets visqueux sont prépondérants dans la couche critique⁴. Dans cette limite de **couche critique visqueuse** considérée ici, Huerre (1980, 1987) a fait l'hypothèse

$$Re^{-1} = \lambda \epsilon, \quad \lambda = \mathcal{O}(1). \quad (2.82)$$

⁴Quand $Re_{cl} \gg 1$, les effets non-linéaires prédominent dans la dynamique de la couche critique. Huerre & Scott (1980) ont étudié le développement faiblement non-linéaire d'un mode neutre régulier dans les cas où les contributions non-linéaire et visqueuse sont du même ordre, c'est-à-dire $Re_{cl} = \mathcal{O}(1)$.

D'après (2.80), l'ordre de grandeur de Re_{cl} est alors :

$$Re_{cl} = Re\epsilon^{\frac{3}{2}} = \lambda\epsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda = \mathcal{O}(1). \quad (2.83)$$

Cette loi d'échelle particulière a été utilisée par Huerre (1980, 1987) et Gotoh (1968) dans leur étude des couches de mélange incompressibles.

Lorsque la couche critique est dominée par la diffusion visqueuse, son épaisseur caractéristique δ_v n'est plus donnée par (2.79) : il faut maintenant équilibrer le terme d'advection $\epsilon U_o(y) \frac{\partial u'}{\partial x}$ et le terme de diffusion visqueuse $\frac{\epsilon}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}$. Compte-tenu du fait que

$$U_o(y) \sim \frac{dU_o}{dy}(0)y = \mathcal{O}(\delta_v) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} = \mathcal{O}(\delta_v^{-1}),$$

on obtient

$$\delta_v = \mathcal{O}(Re^{-\frac{1}{3}}), \quad (2.84)$$

c'est-à-dire, d'après (2.82)

$$\delta_v = \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{3}}). \quad (2.85)$$

L'analyse faiblement non-linéaire des équations (S) se poursuit avec un développement asymptotique des perturbations de la forme :

$$\epsilon\phi' = \epsilon\phi'_1 + \epsilon^2\phi'_2 + \epsilon^{\frac{8}{3}}\phi'_{\frac{8}{3}} + \epsilon^3\phi'_3 + \dots, \quad (2.86)$$

pour chaque variable $\phi = \{p, u, \dots\}$. L'expression (2.86) est ensuite substituée dans le système (S) et les coefficients correspondant aux puissances successives de ϵ sont identifiés à zéro. À l'ordre principal, on obtient des équations linéaires de type Rayleigh (cf. (2.61)). On s'intéresse alors au mode neutre $\{p'_1, u'_1, \dots\}$ de nombre d'onde α et de vitesse de phase réelle c et on utilise une méthode de développement en échelles multiples :

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ u'_1 \\ v'_1 \\ T'_1 \end{pmatrix} = Re \begin{pmatrix} p_{1n}(y) \\ u_{1n}(y) \\ v_{1n}(y) \\ T_{1n}(y) \end{pmatrix} A(\xi_1, \tau_1, \dots) e^{i\alpha(x-ct)}, \quad (2.87)$$

où l'amplitude A est une fonction des échelles lentes d'espace et de temps (ξ_i, τ_i) qui sera déterminée aux ordres supérieurs et le symbole Re désigne la partie réelle. Comme Huerre (1987) l'a montré, les échelles lentes requises sont :

$$(\xi_1, \tau_1) = \epsilon(x, t), \quad (\xi_{\frac{5}{3}}, \tau_{\frac{5}{3}}) = \epsilon^{\frac{5}{3}}(x, t). \quad (2.88)$$

La méthode consiste alors à séparer le problème en deux parties : l'une concernant l'écoulement extérieur à la couche critique, l'autre résolvant les équations

à l'intérieur de la couche critique (figure 2.11). À chaque étape, le problème est résolu ordre par ordre. Dans une dernière étape, les solutions dans chaque zone extérieure sont raccordées à celle de la couche critique.

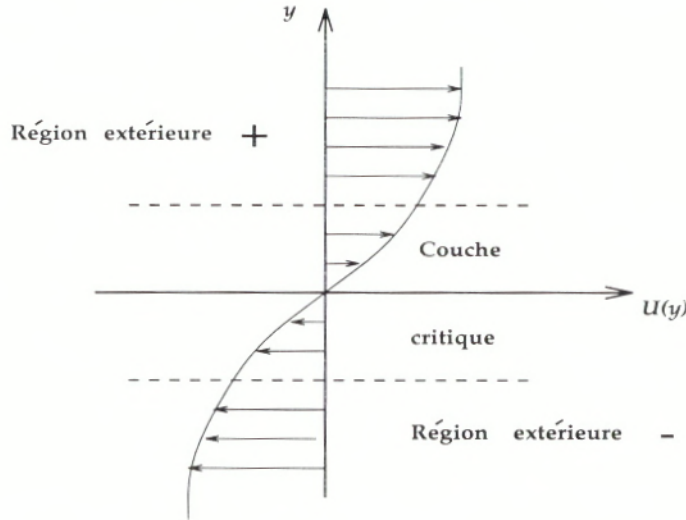


FIG. 2.11 - Couche critique et régions extérieures.

La région extérieure

La recherche de la solution extérieure passe par la résolution du problème neutre linéaire que nous avons mentionné précédemment et auquel on associe la condition limite

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial p_{1n}}{\partial y} = 0 . \tag{2.89}$$

Les solutions propres résultantes sont :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + Ma^2 &= 1 , \quad c_r = 0 , \\ p_{1n}(y) &= \operatorname{sech}^{\alpha^2} y , \\ u_{1n}(y) &= -T_0 \gamma^{-1} Ma^{-2} \operatorname{sech}^{\alpha^2} y \tanh y , \\ v_{1n}(y) &= -i \alpha T_0 \gamma^{-1} Ma^{-2} \operatorname{sech}^{\alpha^2} y \tanh y , \\ T_{1n} &= \gamma^{-1} (\gamma - T_0) T_0 \operatorname{sech}^{\alpha^2} y . \end{aligned} \tag{2.90}$$

La solution (2.90) correspond à un mode neutre régulier pour lequel il n'y a pas de singularité logarithmique en $y = 0$ (cf (2.62)).

La poursuite à l'ordre ϵ^2 conduit pour chaque variable $\phi = \{p, u, \dots\}$ à une solution de la forme :

$$\begin{aligned} \phi'_2 = & \underbrace{\Phi_2^{(\phi_0)}(y, \xi_i, \tau_i)}_{\text{Ecoulement moyen}} + \underbrace{\{Re \phi_{2n}^{(2)}(y) A^2 e^{2i\alpha x}\}}_{\text{Harmonique}} \\ & + \underbrace{\{Re [a_2^\pm \phi_{1n} + b_2^\pm \mathcal{F}_1(y) + A_{\tau_1} \phi_{2n}^{(\tau)}(y) + A_{\xi_1} \phi_{2n}^{(\xi)} + \lambda A \phi_{2n}^{(\lambda)}] e^{i\alpha x}\}}_{\text{Fondamental}} , \end{aligned} \tag{2.91}$$

dans laquelle apparaissent la correction de l'écoulement moyen, l'harmonique et la correction du fondamental. La solution pour chacune de ces contributions est étudiée en détail par Djordjevic & Redekopp (1989a) dans l'ordre de leur apparition. Nous présentons seulement dans ce qui suit une ébauche de la démarche conduisant à l'obtention des équations d'amplitude.

Les fonctions a_2^\pm et b_2^\pm dépendent des échelles lentes et peuvent prendre des valeurs différentes de chaque côté de la couche critique. La condition limite de gradient de pression nul à l'infini de type (2.89) conduit à l'"embryon" de la première équation d'évolution :

$$[[b_2]] \equiv b_2^+ - b_2^- = -4i\alpha(1 - \text{Ma}^2(I_1 + bI_2))A_{\xi_1} , \quad (2.92)$$

où les intégrales I_1 et I_2 sont données en Annexe. Afin d'obtenir l'équation d'amplitude sur les échelles (ξ_1, τ_1) , le saut de la fonction b_2 à travers le niveau critique, déterminé ici à partir de la solution extérieure, doit être identifié au même saut calculé à l'intérieur de la couche critique. Pour évaluer cette condition de saut dans la couche critique, on a besoin de connaître le comportement des fonctions $\phi_{2n}^{(\tau)}$, $\phi_{2n}^{(\xi)}$, $\phi_{2n}^{(\lambda)}$ au voisinage du niveau critique $y = 0$. La grandeur $\phi_{2n}^{(\xi)}$ y est trouvée régulière, alors que les deux autres sont singulières. Par exemple pour $\phi = p$, on peut écrire symboliquement que la variation résultante est :

$$p_{2n}^{(\bullet)} = P_{21}^{(\bullet)}y + P_{23}^{(\bullet)} + \dots + \log |y| \{ \dots \} , \quad (2.93)$$

pour (\bullet) égal à τ et λ et

$$p_{2n}^{(\xi)} = P_{22}^{(\xi)}y^2 + P_{24}^{(\xi)}y^4 + \dots \quad (2.94)$$

La solution en $\mathcal{O}(\epsilon^{\frac{8}{3}})$ comporte seulement une contribution de l'écoulement moyen et une correction du fondamental qui peut s'exprimer en termes des fonctions déjà déterminées pour l'ordre en ϵ^2 . Par exemple, la solution pour la pression prend la forme :

$$p'_{\frac{8}{3}} = \underbrace{\Phi_{\frac{8}{3}}^{(p)}}_{\text{Écoulement moyen}} + \underbrace{\text{Re}\{a_{\frac{8}{3}}^\pm p_{1n}(y) + b_{\frac{8}{3}}^\pm \mathcal{P}_1(y) + (\partial A / \partial \tau_{\frac{8}{3}}) p_{2n}^{(\tau)}(y) + (\partial A / \partial \xi_{\frac{8}{3}}) p_{2n}^{(\xi)}(y)\}}_{\text{Fondamental}} e^{i\alpha x} . \quad (2.95)$$

L'application de la condition de gradient de perturbation de pression nul à l'infini conduit à l'"embryon" de la seconde équation d'évolution :

$$[[b_{\frac{8}{3}}]] \equiv b_{\frac{8}{3}}^+ - b_{\frac{8}{3}}^- = -4i\alpha(1 - \text{Ma}^2(I_1 + bI_2)) \frac{\partial A}{\partial \xi_{\frac{8}{3}}} . \quad (2.96)$$

Dans la partie suivante, nous décrivons brièvement l'analyse dans la couche critique qui permet la détermination des sauts dans les deux "embryons" d'équations d'évolution (2.92) et (2.96).

La couche critique

Les équations (2.93)-(2.94) montrent que la solution extérieure sous la forme (2.86)-(2.88) est singulière au niveau critique $y = 0$. Pour lisser cette singularité, une variable intérieure Y doit être introduite :

$$Y = \frac{y}{\delta_v} = \mathcal{O}(1) , \quad (2.97)$$

où δ_v est l'épaisseur de la couche critique visqueuse calculée en (2.84)-(2.85)

La forme du développement asymptotique de la solution dans la couche critique est obtenue en écrivant la solution extérieure en termes de Y et en prenant la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$. La résolution à chaque ordre permet d'obtenir les conditions de saut pour $[[b_2]]$, $[[b_{\frac{2}{3}}]]$ et de démontrer que le saut $[[a_2]]$ est nul.

Équations d'amplitude

Les équations qui décrivent l'évolution spatio-temporelle de l'amplitude du mode fondamental au voisinage du nombre d'onde neutre sont obtenues en identifiant les conditions de saut issues de l'analyse de l'écoulement extérieur avec celles de la couche critique.

La première équation d'amplitude découle de $[[b_2]]$ et s'écrit :

$$\frac{\partial A}{\partial \tau_1} - \frac{2is(\text{Ma}, b)}{\pi} \frac{\partial A}{\partial \xi_1} + 4\lambda r(\text{Ma}, \text{Pr}, b)A = 0 , \quad (2.98)$$

où les fonctions $s(\text{Ma}, b)$ et $r(\text{Ma}, \text{Pr}, b)$ sont données en Annexe. Cette équation est associée aux effets du nombre de Reynolds : le nombre d'onde neutre passe de α dans la limite de fluide parfait à sa vraie valeur k_n donnée par la relation (2.67).

La seconde équation d'amplitude provient de l'utilisation de $[[b_{\frac{2}{3}}]]$ et se met sous la forme :

$$\frac{\partial A}{\partial \tau_{\frac{2}{3}}} - \frac{2i}{\pi} s \frac{\partial A}{\partial \xi_{\frac{2}{3}}} + \frac{I_L}{2\pi\lambda^{\frac{4}{3}}} \nu A \left(\frac{\partial |A|^2}{\partial \tau_1} - \frac{2i}{\pi} s \frac{\partial |A|^2}{\partial \xi_1} \right) = 0, \quad (2.99)$$

où la fonction ℓ est donnée en Annexe et le coefficient ν dépend de Ma , Pr et b . Cette équation décrit l'évolution non-linéaire de A sur les échelles lentes $\tau_{\frac{2}{3}}$ et $\xi_{\frac{2}{3}}$. L'apparition des termes non-linéaires est due à l'interaction entre la déformation de l'écoulement moyen et le fondamental à l'intérieur de la couche critique.

Comme cette étude est faite dans le but d'une comparaison avec les résultats de la simulation (chapitre 5), il est légitime de simplifier les notations en utilisant de nouveau les variables x et t . Pour la même raison, on peut fixer le "faux" petit paramètre d'amplitude ϵ à la valeur $\epsilon = 1$. On utilise alors les équations d'évolution pour analyser le développement d'une onde faiblement amplifiée

$$\phi'_1(x, y, t) = \text{Re}\{\phi_{1n} B(x, t) e^{ik_n x}\} ,$$

à des nombres d'onde au voisinage du neutre k_n . La fonction d'amplitude A est alors reliée à B par

$$A(x, y) = B(x, t) e^{-2\pi i \lambda \frac{r}{s} x} ,$$

de telle sorte que la première équation d'amplitude (2.98) soit vérifiée. Pour une perturbation de nombre d'onde $k = k_n - \Delta k$, on peut choisir :

$$B(x, t) = C(t)e^{ikx} ,$$

de sorte que

$$\phi'_1(x, y, t) = Re\{\phi_{1n} C(t)e^{ikx}\} , \tag{2.100}$$

et C vérifie alors l'équation de Landau présentée en (2.72), la constante de Landau étant donnée par (2.74).

Remarquons que la limite incompressible étudiée par Huerre (1980,1987), pour l'ensemble de ces résultats, est obtenue en prenant :

$$Ma \rightarrow 0 , \quad b = 0 , \quad r = s = \ell = 1 .$$

* * * * *

En conclusion de ce chapitre il est maintenant possible de définir précisément les objectifs de cette étude :

La théorie linéaire présentée en §2.2 fournit de nombreux résultats qui feront l'objet du chapitre 4. Nous devons vérifier en particulier si la simulation rend bien compte de la phase de croissance exponentielle des ondes d'instabilité aussi bien pour une couche de mélange isotherme que non-isotherme.

Dans une deuxième étape (chapitre 5), nous nous intéresserons à l'évolution non-linéaire des ondes faiblement amplifiées proches du nombre d'onde neutre. La simulation nous permettra-t-elle de retrouver la bifurcation supercritique de l'écoulement induite par la non-linéarité dans le cas isotherme? Dans le cas d'une couche de mélange refroidie à grand nombre de Mach fini, obtiendrons-nous la bifurcation sous-critique prévue par la théorie? Dans l'affirmative, isolerons-nous l'existence d'un état d'amplitude finie stable et la présence d'une boucle d'hystérésis sur le diagramme de bifurcation? Seule une étude numérique est à même de répondre à ces questions.

Auparavant, nous détaillons dans le chapitre 3 l'élaboration des méthodes numériques relatives à l'étude de stabilité linéaire et à la simulation numérique directe.

Chapitre 3

MISE AU POINT DES MÉTHODES NUMÉRIQUES

Ce chapitre décrit les méthodes numériques mises au point

d'une part, pour le calcul des caractéristiques de stabilité linéaire en fluide parfait de l'état de base défini en (2.10)-(2.14),

d'autre part, pour la simulation numérique directe de la couche de mélange temporelle perturbée.

3.1 Instabilité linéaire de fluide parfait

Un code d'instabilité linéaire résolvant l'équation de Rayleigh (2.56) a été développé pour le calcul des valeurs propres et fonctions propres relatives à un nombre d'onde k , un nombre de Mach Ma et un profil de température b .

Résolution du problème aux valeurs propres en pression

La méthode suivante a été élaborée par Huerre (1992). L'équation différentielle du second ordre (2.56) est d'abord écrite sous la forme d'un système de deux équations du premier ordre pour les variables complexes p_1 et p_1^* :

$$\frac{dp_1}{dy} = p_1^* , \quad (3.1)$$

$$\frac{dp_1^*}{dy} = \frac{[2dU_0/dy + d(\ln\rho_0)/dy](U_0 - c)p_1 - (U_0 - c)^2[\text{Ma}^2\rho_0(U_0 - c)^2 - 1]p_1^*}{U_0 - c} , \quad (3.2)$$

avec les conditions limites

$$p_1^*(L_y/2) = p_1^*(-L_y/2) = 0 ,$$

La méthode de tir adoptée est la suivante : pour une valeur approchée initiale de la pulsation complexe ω^∞ , le système (3.1)-(3.2) est intégré le long de deux chemins AC et BC dans le plan complexe (y, p_1) (figure 3.1), menant de $A(L_y/2, 0)$ à $C(0, \frac{-\pi}{4})$ d'une part et de $B(-L_y/2, 0)$ au même point C d'autre part.

Ce choix de contour demande quelques explications (cf. Lin (1955)). Il convient de distinguer plusieurs zones dans le plan complexe y comme indiqué sur la figure 3.2. La solution de type Rayleigh est singulière au point critique y_c tel que $U_0(y_c) = c$. Pour lisser la singularité, on introduit une zone critique dans son voisinage, représentée par le disque en gris foncé sur les figures. Dans cette région, les effets visqueux sont naturellement dominants. Cependant, il faut également identifier différents secteurs autour de y_c , délimités par les trois lignes de Stokes issues de ce point. Dans les deux secteurs en clair (figure 3.2), les solutions de type Rayleigh sont bien les limites de solutions de type Orr-Sommerfeld. Par contre, dans le troisième secteur en grisé, on démontre que les effets visqueux demeurent prépondérants. Afin de s'assurer que l'on se situe bien dans des secteurs où l'équation de Rayleigh est pertinente, il faut donc choisir un contour d'intégration qui contourne le point critique de sorte à rester dans les zones claires. De cette façon, on obtiendra des valeurs propres en fluide parfait qui sont bien la limite de leurs

homologues de fluide visqueux lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini. Pour cette raison, on a choisi le contour d'intégration schématisé sur la figure 3.1. L'ordonnée du point C peut être ajustée de telle sorte que le point critique y_c soit dans tous les cas situé au-dessus du contour BCA. Comme on le voit sur la figure 3.2, le choix d'un tel contour est indispensable si l'on souhaite calculer correctement les caractéristiques des modes atténués ou faiblement amplifiés.

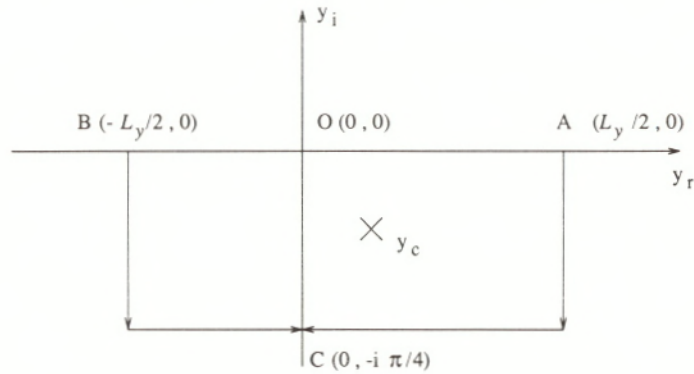


FIG. 3.1 - Contour d'intégration de l'équation de Rayleigh dans le plan complexe.

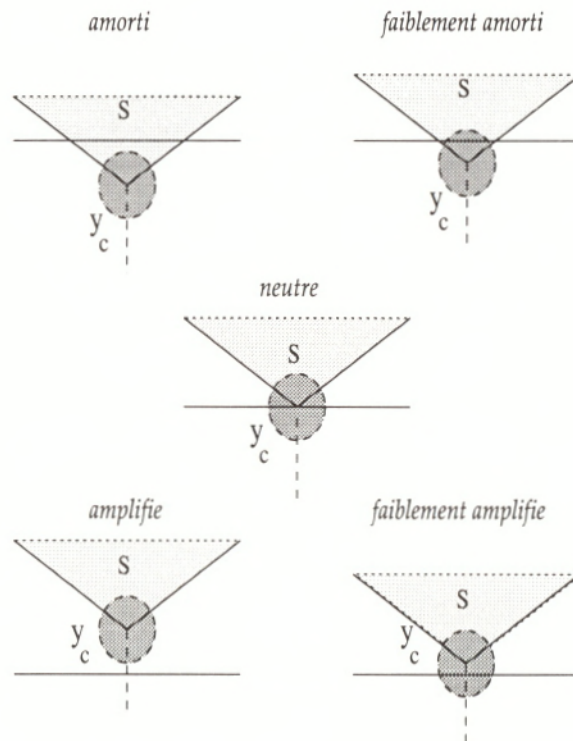


FIG. 3.2 - Géométrie au voisinage du point critique y_c dans le plan complexe y : la zone S est la région visqueuse, le cercle représente la couche critique autour de y_c .

On fait appel, pour l'intégration spatiale, au sous programme IVPAG de la bibliothèque IMSL, utilisant un schéma d'intégration explicite d'Adams-Moulton ou de Gear (Hirsch 1987).

Tant que ω^∞ n'est pas la valeur propre, les solutions calculées de A à C et de B à C ne se raccordent pas en C. Si l'on normalise les fonctions par leur valeurs en C, les pentes normalisées calculées en arrivant par la droite ou par la gauche de C valent respectivement :

$$\frac{p_{1y}^+(C)}{p_1^+(C)}, \quad \frac{p_{1y}^-(C)}{p_1^-(C)}.$$

La différence entre des deux pentes constitue le Wronskien normalisé $W(k, \omega^\infty; Ma, b)$. Pour trouver la bonne valeur de ω^∞ , il suffit d'annuler W . Son annulation conduit au système de deux équations non-linéaires à deux inconnues ($\omega_r^\infty, \omega_i^\infty$):¹

$$W_r(k, \omega_r^\infty, \omega_i^\infty; Ma, b) = 0,$$

$$W_i(k, \omega_r^\infty, \omega_i^\infty; Ma, b) = 0.$$

On emploie alors le sous programme NEQNF de la bibliothèque IMSL, qui utilise un processus itératif pour chercher le zéro de W par un algorithme hybride de type Powel (Hirsch 1987).

On obtient ainsi pour chaque nombre d'onde k , une valeur approchée de la valeur propre ω^∞ . La fonction propre en pression correspondante est alors calculée en intégrant le système (3.1)-(3.2) le long de l'axe réel de A à O(0,0) puis de B à O. Du fait de l'existence de la zone "visqueuse" (figure 3.3), remarquons que dans le cas des modes amortis, la fonction propre obtenue ne sera pas valable sur tout l'axe réel y mais seulement dans les secteurs Rayleigh.

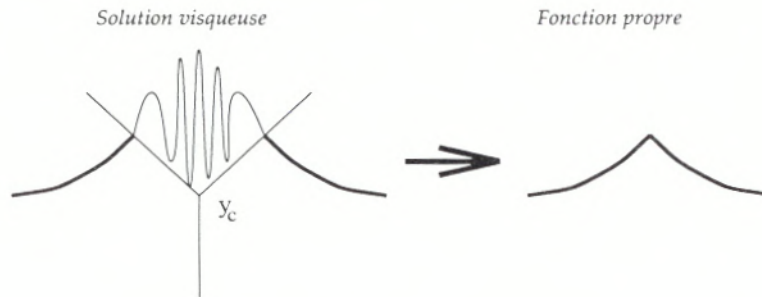


FIG. 3.3 - Fonctions propres en régime amorti : la fonction propre obtenue numériquement par intégration de l'équation de Rayleigh ne "voit" pas le zone visqueuse et n'est pas représentative d'une solution de l'équation de Orr-Sommerfeld.

Une condition de normalisation est choisie pour p_1 . Dans son étude du cas incompressible, Michalke (1964) a utilisé la condition

$$Re p_1(0) = 1, \quad Im p_1(0) = 0. \quad (3.3)$$

¹où $\omega_r^\infty = Re(\omega^\infty)$ et $\omega_i^\infty = Im(\omega^\infty)$.

Blumen (1970) dans son étude du cas compressible a choisi

$$Re p_1(0) = \alpha^2, Im p_1(0) = 0, \text{ avec } \alpha^2 + Ma^2 = 1, \quad (3.4)$$

où Re et Im indiquent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire. Pour l'ensemble de nos calculs, on a préféré la normalisation (3.3) à (3.4), excepté au §4.1.2 où l'on compare les fonctions propres que l'on obtient avec le code d'instabilité aux fonctions propres obtenues par Blumen (1970).

Obtention des autres fonctions propres

Connaissant p_1 (intégration de (3.1)-(3.2)), les autres fonctions propres sont déterminées à partir

- des équations (2.44) à (2.47) pour u_1, v_1 et T_1 ,
- de l'équation (2.48) pour ρ_1 ,

dans lesquelles on a effectué le changement de variable

$$\phi_1'(x, y, t) = \phi_1(y)e^{i(kx - \omega t)}, \text{ pour tout } \phi. \quad (3.5)$$

Comme nous le verrons en §3.2, nous aurons également besoin de l'expression de la fonction propre en énergie totale E_1 . Pour l'obtenir, il suffit d'introduire les perturbations en faisant $T = T_0 + T'_1, u = U_0 + u'_1$ et $v = v'_1$ dans l'énergie totale (2.24). Après linéarisation de l'expression obtenue, on est conduit à la relation

$$E = \underbrace{\frac{T_0(y)}{\gamma(\gamma - 1)Ma^2} + \frac{U_0(y)^2}{2}}_{E_0(y)} + \underbrace{\frac{T'_1}{\gamma(\gamma - 1)Ma^2} + u'_1 U_0(y)}_{E'_1}, \quad (3.6)$$

dans laquelle on reconnaît le profil de base (2.7) d'énergie totale $E_0(y)$, et où on isole la perturbation E'_1 . Pour obtenir E_1 , on utilise alors (3.5) dans l'expression de E'_1 . On est conduit finalement à :

$$v_1(y) = \frac{ik^{-1}T_0 dp_1/dy}{U_0 - c}, \quad (3.7)$$

$$u_1(y) = \frac{ik^{-1} dU_0/dy v_1 - T_0 p_1}{U_0 - c}, \quad (3.8)$$

$$T_1(y) = T_0[(\gamma - 1)Ma^2 p_1 - \frac{k^{-2}}{(U_0 - c)^2} dT_0/dy dp_1/dy], \quad (3.9)$$

$$\rho_1(y) = \rho_0 \left[Ma^2 p_1 + \frac{dT_0/dy dp_1/dy k^{-2}}{(U_0 - c)^2} \right], \quad (3.10)$$

$$E_1(y) = \frac{T_1}{\gamma(\gamma - 1)Ma^2} + U_0 u_1. \quad (3.11)$$

Ce calcul a été programmé dans le code d'instabilité après la détermination de $p_1(y)$. Il est important de noter que, même si l'écoulement est isotherme ($dT_0/dy = 0$), il y a des fluctuations de température ($T_1(y) \neq 0$). Remarquons aussi que connaissant la solution analytique en pression au neutre (2.65), on a les solutions analytiques au neutre ($k = \alpha$, $\omega^\infty(\alpha) = 0$) pour les autres variables en utilisant ces relations. Par exemple, les solutions neutres de pression et vitesse sont :

$$p_1(y) = \operatorname{sech}^{\alpha^2} y, \quad \alpha^2 + \operatorname{Ma}^2 = 1, \quad (3.12)$$

$$u_1(y) = -T_0(y)U_0(y)p_1(y), \quad (3.13)$$

$$v_1(y) = -i\alpha T_0(y)p_1(y). \quad (3.14)$$

Cette méthode nous permet de calculer les fonctions propres $\phi_1(y)$ relatives à chaque variable pour un nombre de Mach Ma , un nombre d'onde k et un rapport de température b fixés. On dispose alors des modes propres $\phi_1'(x, y, t)$ que l'on va utiliser pour perturber l'état de base (2.10)-(2.14) à l'instant initial $t = 0$ de la simulation directe.

3.2 Simulation numérique directe

Le code PEGASE est développé dans la division de l'Aérodynamique théorique 2 de l'ONERA depuis 1991. La version compressible mise au point pour le présent travail est utilisée pour l'étude temporelle des instabilités dans la couche de mélange. L'état de base (2.10)-(2.14) est initialement perturbé par les fonctions propres de la théorie linéaire calculées à partir de la méthode numérique décrite en §3.1.

3.2.1 Équations de Navier-Stokes

La méthode consiste à résoudre les équations de Navier Stokes écrites en variables conservatives (2.16)-(2.18). Les inconnues sont la masse volumique, les deux composantes de la quantité de mouvement et l'énergie totale volumique :

$$\rho, \rho u, \rho v, \rho E.$$

Il s'agit de les déterminer, à chaque instant, dans tout le domaine représenté sur la figure 2.1. Deux jeux d'équations sont donc à résoudre :

1. les équations relatives au domaine sans les frontières, qu'on appellera **équations des points courants**,
2. les équations relatives aux frontières, qu'on appellera **équations des points frontières**.

Équations des points courants

Les équations (2.16)-(2.18) sont réécrites sous forme de composantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} \\ - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u - U_0)}{\partial y^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p) \\ - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(\rho E + p)) &= \frac{\partial}{\partial y}(v(\rho E + p)) \\
+ \frac{2}{3\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
+ \frac{2}{3\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
- \frac{4}{3\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \\
- \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(U_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) \right) \\
- \frac{1}{(\gamma - 1)\text{Re Ma}^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (T - T_0)}{\partial y^2} \right) = 0 . \tag{3.18}
\end{aligned}$$

La connaissance des grandeurs T et p est nécessaire pour le calcul, à chaque instant, des inconnues ρ , ρu , ρv , ρE . Elles sont données par les relations déduites de (2.23) et (2.24) :

$$p = \frac{\rho T}{\gamma \text{Ma}^2} , \tag{3.19}$$

$$T = \gamma(\gamma - 1)\text{Ma}^2 \left(E - \frac{u^2 + v^2}{2} \right) . \tag{3.20}$$

Équations des points frontières

Dans la direction de l'écoulement, la condition de périodicité (2.25)

$$\phi \left(x + \frac{2\pi}{k}, y, t \right) = \phi(x, y, t) \text{ pour } \phi = \rho, \rho u, \rho v, \rho E , \tag{3.21}$$

est intégrée dans la construction du maillage et dans le calcul des dérivées spatiales, comme cela est expliqué en §3.2.2.

Dans la direction normale à l'écoulement, les conditions limites (2.29) et (2.30) données au §2.1 impliquent, pour le calcul des variables ρ , ρu , ρv , ρE aux frontières $y = \pm L_y/2$, la résolution du système suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial (u - U_0)}{\partial y} = 0 , \tag{3.23}$$

$$\rho v = 0 , \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial (T - T_0)}{\partial y} = 0 , \tag{3.25}$$

$$E = \frac{T}{\gamma(\gamma - 1)\text{Ma}^2} + \frac{u^2}{2} . \tag{3.26}$$

- L'équation (3.22) est obtenue à partir de l'équation (3.15) dans laquelle la condition de glissement $v = 0$ a été imposée et elle permet d'obtenir ρ aux frontières $y = \pm L_y/2$.
- L'équation (3.23) exprime la condition de contrainte visqueuse nulle et permet d'obtenir u aux frontières $y = \pm L_y/2$. Couplée avec (3.22), elle permet le calcul de ρu aux frontières $y = \pm L_y/2$.
- L'équation (3.24), est une conséquence de la condition de glissement $v = 0$ aux frontières $y = \pm L_y/2$.
- L'équation (3.25), qui exprime la condition de paroi athermane, permet avec l'équation (3.26) de calculer ρE aux frontières $y = \pm L_y/2$.
- L'équation (3.26) est la relation de l'énergie (2.24) dans laquelle on a imposé la condition de glissement $v = 0$.

À l'ensemble d'équations (3.15)-(3.26) est associé un jeu de conditions initiales.

Conditions initiales

Les modes propres $\phi_1'(x, y, t)$ de la théorie d'instabilité linéaire de fluide parfait calculés, pour un nombre de Mach Ma , un nombre d'onde k et un rapport de température b fixés, à l'aide de la méthode numérique définie au §3.1, sont utilisés pour perturber, à l'instant $t=0$, l'état de base $U_0(y), T_0(y), \rho_0(y), E_0(y)$ de la façon suivante :

$$\rho(x, y, 0) = \rho_0 + \epsilon Re \rho'_1(x, y, 0) , \quad (3.27)$$

$$\rho u(x, y, 0) = \rho(x, y, 0) \{U_0 + \epsilon Re u'_1(x, y, 0)\} , \quad (3.28)$$

$$\rho v(x, y, 0) = \rho(x, y, 0) \{\epsilon Re v'_1(x, y, 0)\} , \quad (3.29)$$

$$\rho E(x, y, 0) = \rho(x, y, 0) \{E_0 + \epsilon Re E'_1(x, y, 0)\} , \quad (3.30)$$

où ϵ représente l'amplitude initiale des perturbations et Re signifie partie réelle.

Rappelons que l'état de base est défini dans un domaine périodique dans le sens de l'écoulement, de période $2\pi/k$ (figure 2.1). Ainsi, le mode fondamental est imposé à la fois par les fonctions propres et par la taille du domaine.

3.2.2 Discrétisation

Les équations (3.15)-(3.26) sont résolues numériquement par une méthode de différences finies (Hirsch (1987)) dans un domaine rectangulaire de dimensions (L_x, L_y) (figure 3.4) sur un maillage cartésien à pas constants Δx et Δy , comportant $M_x \times M_y$ nœuds. Chaque nœud du maillage est repéré par ses coordonnées :

$$[x_i, y_j] , \quad i = 1, M_x, \quad j = 1, M_y$$

La variable Φ calculée au point (x_i, y_j) et à l'instant $t = n\Delta t$, où Δt est le pas de temps, est notée $\Phi_{i,j}^n$. Enfin, la disposition des variables est collocative, c'est-à-dire que toutes les inconnues sont calculées à chaque itération n au même nœud.

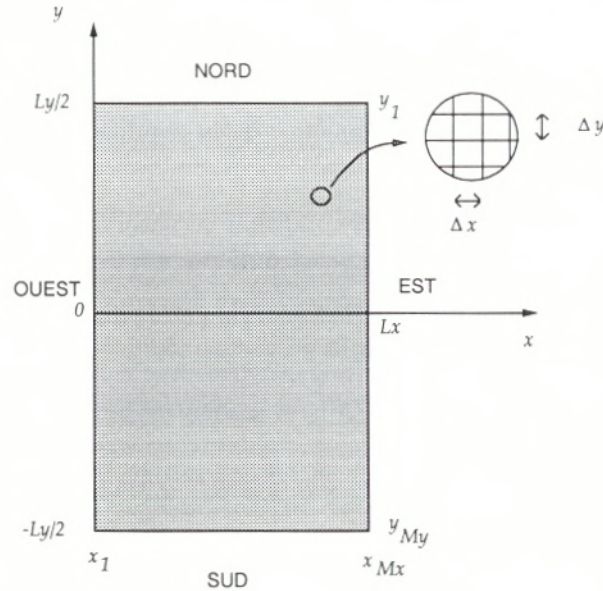


FIG. 3.4 - Domaine de calcul discrétisé

Pour la discrétisation spatiale des équations (3.15) à (3.26), nous avons choisi, afin d'évaluer la robustesse du code, d'utiliser deux méthodes :

- une méthode **classique** : approximation par des différences finies centrées classiques d'ordre 2 (Hirsch (1987)),
- une méthode **hybride** : approximation à l'aide d'opérateurs centrés d'ordre 2 hybrides basés sur des techniques de différences finies et d'éléments finis (Q1) (Troff et coll. (1994)).

Les sections suivantes présentent la description des opérateurs relatifs à chacune des deux méthodes. Afin de faciliter la compréhension de ces opérateurs, chacun d'entre eux est représenté par une **figure**. La figure 3.5, par exemple, symbolise l'opérateur $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ élaboré pour la méthode classique, aux points courants et aux frontières du domaine de calcul. À gauche, la pondération des points, ici 1 et -1, est indiquée à côté des nœuds repérés par leur position par rapport à i et j . La pondération globale en fonction du pas d'espace, ici $1/2\Delta x$, est aussi notée près du noyau. Enfin, à droite est représentée la boîte de calcul et les noyaux utilisés pour l'élaboration de l'opérateur aux frontières.

Discrétisation spatiale des opérateurs de dérivées : méthode classique

- **Opérateurs de dérivées premières** $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]$ (figures 3.5 et 3.6) : Ces opérateurs sont utilisés dans l'évaluation des termes de convection et de pression. Ils sont obtenus en utilisant le schéma aux différences finies centrées classique d'ordre 2. L'opérateur de dérivée première $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ dans la direction x est défini par :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x} (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}) + \mathcal{O}(\Delta x^2) . \quad (3.31)$$

L'opérateur $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ dans la direction y est défini de façon analogue.

Aux frontières OUEST et EST (figure 3.5), la formule (3.31) est appliquée en tenant compte de la périodicité.

Aux frontières NORD et SUD (figure 3.6), on utilise des formules décentrées à trois points :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{i,1} = \frac{1}{2\Delta y} (-3\Phi_{i,1} + 4\Phi_{i,2} - \Phi_{i,3}) + \mathcal{O}(\Delta y^2) ,$$

et

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{i,M_y} = \frac{1}{2\Delta y} (3\Phi_{i,M_y} - 4\Phi_{i,M_y-1} - \Phi_{i,M_y-2}) + \mathcal{O}(\Delta y^2) .$$

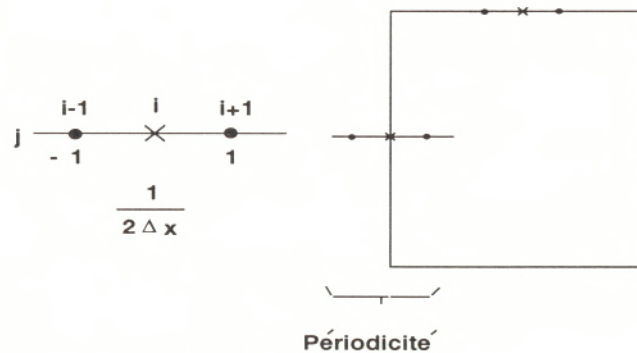


FIG. 3.5 - Opérateur $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, points courants et frontières : méthode classique

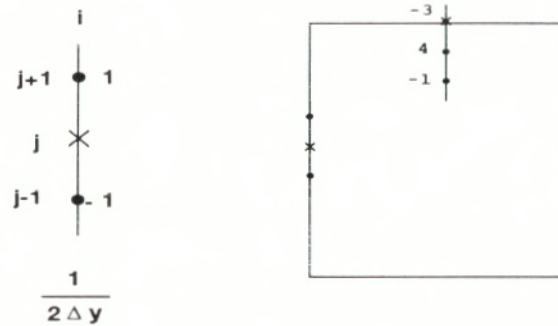


FIG. 3.6 - Opérateur $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$, points courants et frontières : méthode classique

- **Opérateurs de dérivées secondes** $\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right]$ (figures 3.7 et 3.8) : Ces opérateurs sont utilisés dans l'évaluation des termes de diffusion. Dans la direction x , $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ est obtenu en utilisant le schéma aux différences finies classique d'ordre 2 :

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2} (\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}) + \mathcal{O}(\Delta x^2) . \quad (3.32)$$

L'opérateur $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ dans la direction y est défini de façon analogue.

Aux frontières OUEST et EST (figure 3.7), la formule (3.32) est appliquée en tenant compte de la périodicité.

Aux frontières NORD et SUD (figure 3.8), les conditions limites imposées (§3.2.2) ne nécessitent pas le calcul de dérivées secondes.

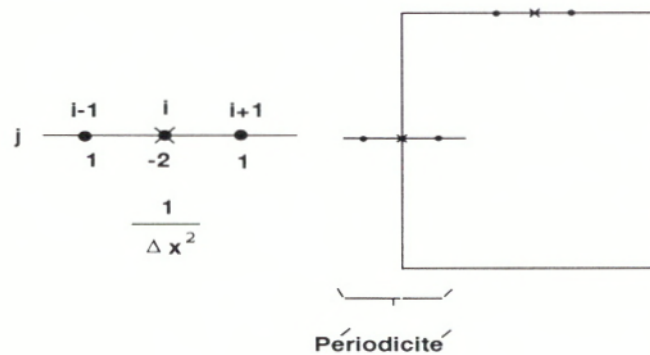


FIG. 3.7 - Opérateur $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$, points courants et frontières : méthode classique

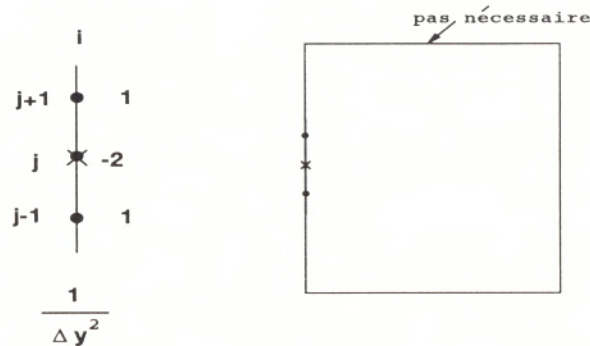


FIG. 3.8 - Opérateur $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$, points courants et frontières : méthode classique

- Opérateurs assimilés à des dérivées secondes $\frac{\partial}{\partial x}(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x}), \frac{\partial}{\partial y}(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y})$

(figures 3.9 et 3.10) : Ces opérateurs sont utilisés dans l'évaluation des termes de flux de l'équation de conservation de l'énergie. Il sont obtenus à partir d'un schéma aux différences finies utilisant les points-moitiés. Dans la direction x , il s'exprime par :

$$[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x})]_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x^2}(\Phi_{i+1,j}^2 - 2\Phi_{i,j}^2 + \Phi_{i-1,j}^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) . \quad (3.33)$$

L'opérateur $\frac{\partial}{\partial y}(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y})$, dans la direction y , est obtenu de façon analogue.

Aux frontières OUEST et EST (figure 3.9), la formule (3.33) est appliquée en tenant compte de la périodicité.

Aux frontières NORD et SUD (figure 3.10), les conditions limites imposées (§3.2.2) ne nécessitent pas le calcul de dérivées secondes.

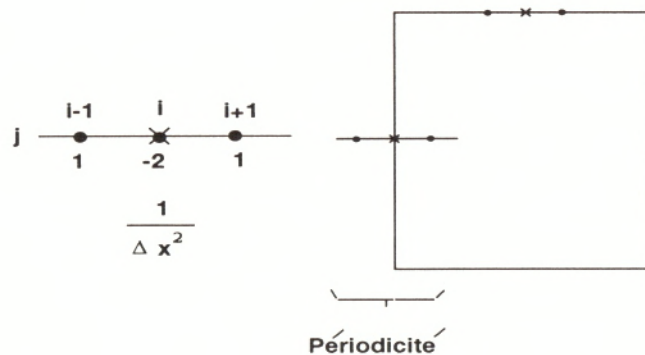


FIG. 3.9 - Opérateur $\frac{\partial}{\partial x}(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x})$, points courants et frontières : méthode classique

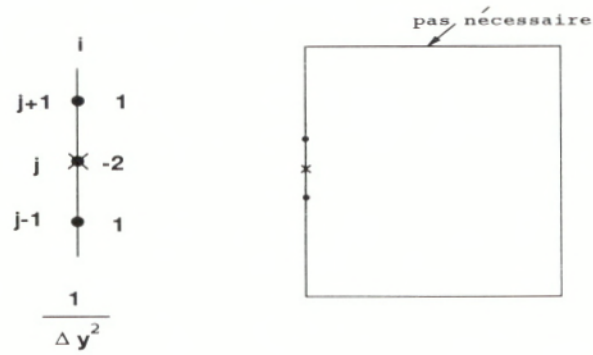


FIG. 3.10 - Opérateur $\frac{\partial}{\partial y}(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y})$, points courants et frontières : méthode classique

- **Opérateurs de dérivées croisées** $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x}(\phi \frac{\partial \Phi}{\partial y})$: Ces opérateurs sont utilisés dans l'évaluation des termes de diffusion de l'équation de quantité de mouvement. Ils sont obtenus par application successive des opérateurs de dérivées premières $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ (3.31).

Discrétisation spatiale des opérateurs de dérivées : Méthode hybride

La méthode classique n'utilise que des noyaux à trois points. La méthode hybride (Troff et coll. 1994) fait appel à des molécules plus élaborées comprenant plus de points. Ceci lui donne une propriété régularisante et elle peut fournir des résultats plus précis.

- **Opérateurs de dérivées premières** $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]$ (figure 3.11), (figure 3.12) :
Ces opérateurs sont utilisés dans l'évaluation des termes de convection et de pression et sont définis par un schéma centré du second ordre, issu d'une approche discrète de type Éléments Finis (Q1) (Troff et coll. 1994). Ils font intervenir une combinaison d'opérations entre les nœuds de molécules à six points. Dans la direction x , l'opérateur $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ est défini par :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{1}{12\Delta x} [4(\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}) + \Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i-1,j+1} + \Phi_{i+1,j-1} - \Phi_{i-1,j-1}] + \mathcal{O}(\Delta x^2) . \quad (3.34)$$

Dans la direction y , l'opérateur $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ est obtenu de façon analogue.

Aux frontières OUEST et EST (figure 3.11), la formule (3.34) est appliquée en tenant compte de la périodicité.

Aux frontières NORD et SUD (figure 3.12), on applique des formules déduites de (3.34) qui n'utilisent que les demi-molécules :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{i,M_x} = \frac{1}{6\Delta x} [2(\Phi_{i+1,M_x} - \Phi_{i-1,M_x}) + \Phi_{i+1,M_x-1} - \Phi_{i-1,M_x-1}] + \mathcal{O}(\Delta x^2) ,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{i,1} = \frac{1}{6\Delta y} [4(\Phi_{i,2} - \Phi_{i,1}) + \Phi_{i+1,2} - \Phi_{i+1,1} + \Phi_{i-1,2} - \Phi_{i-1,1}] + \mathcal{O}(\Delta y^2) ,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{i,M_y} = \frac{1}{6\Delta y} [4(\Phi_{i,M_y} - \Phi_{i,M_y-1}) + \Phi_{i+1,M_y} - \Phi_{i+1,M_y-1} + \Phi_{i-1,M_y} - \Phi_{i-1,M_y-1}] + \mathcal{O}(\Delta y^2) .$$

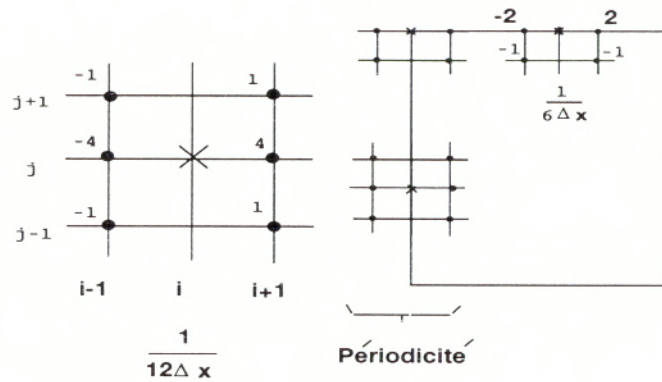


FIG. 3.11 - Opérateur $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, points courants et frontières : méthode hybride

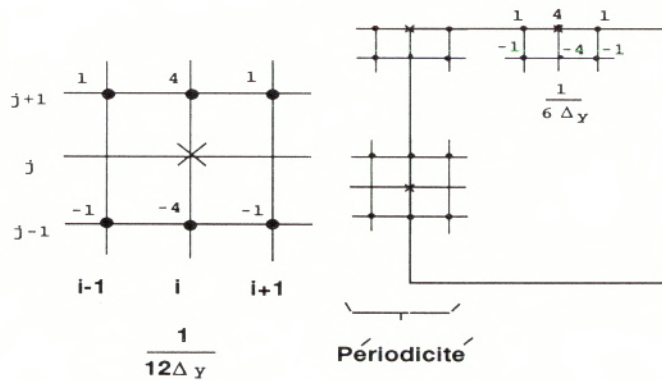


FIG. 3.12 - Opérateur $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, points courants et frontières : méthode hybride

- **Opérateurs de dérivées secondes** $\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right]$ (figures 3.13 et 3.14) : Ces opérateurs sont utilisés dans l'évaluation des termes de diffusion. Dans la direction x , $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ est obtenu en utilisant le schéma aux différences finies classique d'ordre 2. Remarquons qu'il s'agit du même opérateur que celui utilisé dans la méthode classique.

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2} (\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.35)$$

Dans la direction y , l'opérateur $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ est obtenu de façon analogue.

Aux frontières OUEST et EST (figure 3.13), la formule (3.35) est appliquée en tenant compte de la périodicité.

Aux frontières NORD et SUD (figure 3.14), les conditions limites imposées (§3.2.2) ne nécessitent pas le calcul de dérivées secondes.

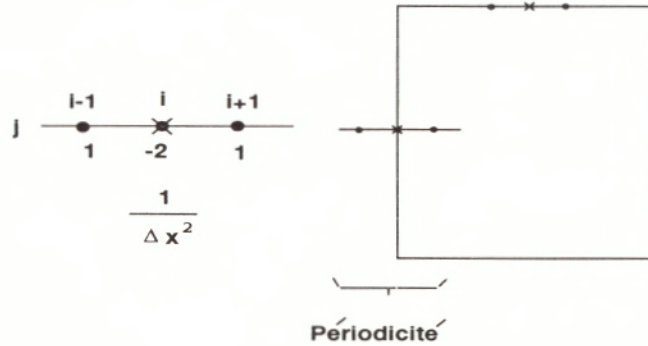


FIG. 3.13 - Opérateur $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$, points courants et frontières : méthode hybride

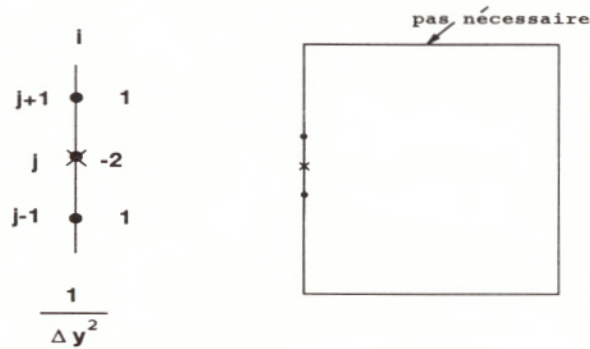


FIG. 3.14 - Opérateur $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$, points courants et frontières : méthode hybride

- **Opérateurs assimilés à des dérivées secondes** $\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right]$ (figures 3.15 et 3.16) : Ces opérateurs sont utilisés dans l'évaluation des termes de diffusion de l'équation de l'énergie. Ils sont issus d'une approche aux Différences Finies. Dans la direction x :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right]_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2} [0.5\Phi_{i+1,j}(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}) + 0.5\Phi_{i-1,j}(\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}) - \Phi_{i,j}(\phi_{i,j} + 0.5\{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j}\})] + \mathcal{O}(\Delta x^2) . \quad (3.36)$$

L'opérateur $\frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$ est obtenu de manière analogue.

Aux frontières OUEST et EST (figure 3.15), la formule (3.36) est appliquée en

tenant compte de la périodicité.

Aux frontières NORD et SUD (figure 3.16), les conditions limites imposées (§3.2.2) ne nécessitent pas le calcul de dérivées secondes.

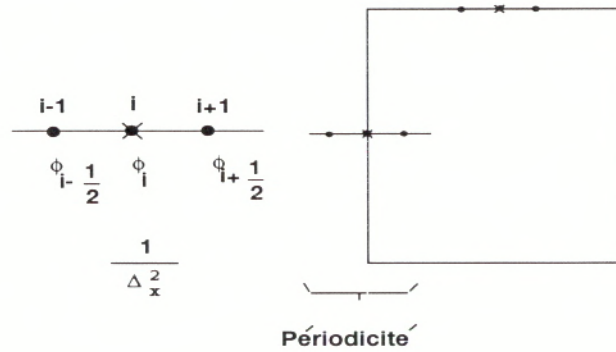


FIG. 3.15 - Opérateur $\frac{\partial}{\partial x}(\phi \frac{\partial \Phi}{\partial x})$, points courants et frontières : méthode hybride. $\phi_{i-\frac{1}{2}}$ symbolise $0.5(\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j})$, ϕ_i symbolise $-(\phi_{i,j} + 0.5\{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j}\})$ et $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ symbolise $0.5(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j})$.

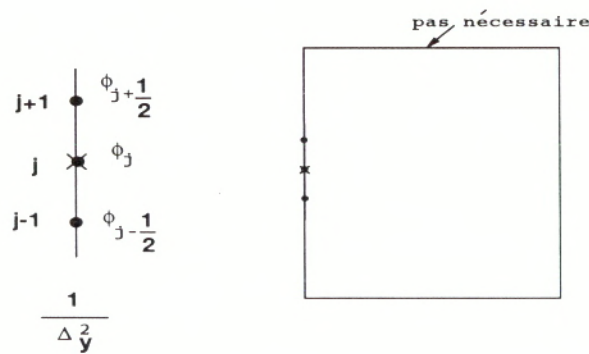


FIG. 3.16 - Opérateur $\frac{\partial}{\partial y}(\phi \frac{\partial \Phi}{\partial y})$, points courants et frontières : méthode hybride. Les notations $\phi_{j-\frac{1}{2}}$, ϕ_j et $\phi_{j+\frac{1}{2}}$ sont analogues à celles de la figure 3.13.

- **Opérateurs de dérivées croisées** $\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right]$ (figure 3.17) : Ces opérateurs sont utilisés dans l'évaluation des termes de diffusion de l'équation de quantité de mouvement. Ils utilisent une approche discrète de type Éléments Finis quadrangulaires (Troff et coll. 1994) et font intervenir une combinaison d'opérations entre les nœuds de molécules à quatre points :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right]_{i,j} = \frac{1}{4\Delta x\Delta y}[\Phi_{i-1,j-1} - \Phi_{i-1,j+1} + \Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i+1,j-1}] + \mathcal{O}(\Delta x\Delta y). \quad (3.37)$$

L'opérateur $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$ est identique.

Aux frontières OUEST et EST (figure 3.17), la formule (3.37) est appliquée en tenant compte de la périodicité.

Aux frontières NORD et SUD (figure 3.17), les conditions limites imposées (§3.2.2) ne nécessitent pas le calcul de dérivées secondes.

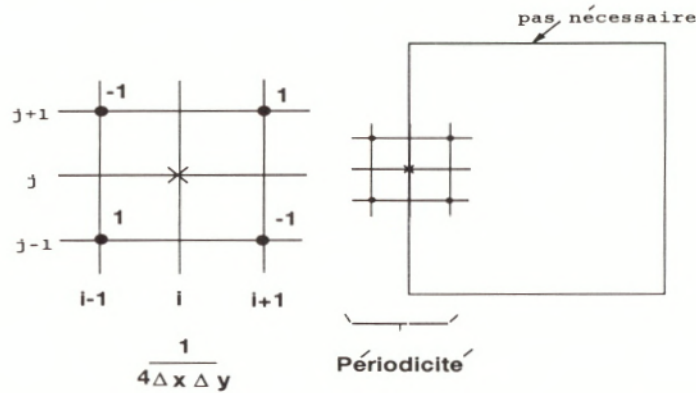


FIG. 3.17 - Opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$, points courants et frontières : méthode hybride

- **Opérateurs assimilés à des dérivées croisées** $\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right]$ (figure 3.18 et 3.19) : Ces opérateurs sont utilisés pour l'équation de l'énergie et utilisent une approche discrète de type Éléments Finis quadrangulaires. Ils font intervenir une combinaison d'opérations entre les nœuds de deux molécules à quatre points.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right]_{i,j} = \frac{1}{4\Delta x\Delta y}[\phi_{i-1,j}(\Phi_{i-1,j-1} - \Phi_{i-1,j+1}) + \phi_{i+1,j}(\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i+1,j-1})] + \mathcal{O}(\Delta x\Delta y). \quad (3.38)$$

L'opérateur $\frac{\partial}{\partial y}\left(\phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$ est obtenu de façon analogue.

Aux frontières OUEST et EST, la formule (3.38) est appliquée en tenant compte de la périodicité.

Aux frontières NORD et SUD, les conditions limites imposées (§3.2.2) ne nécessitent pas le calcul de dérivées secondes.

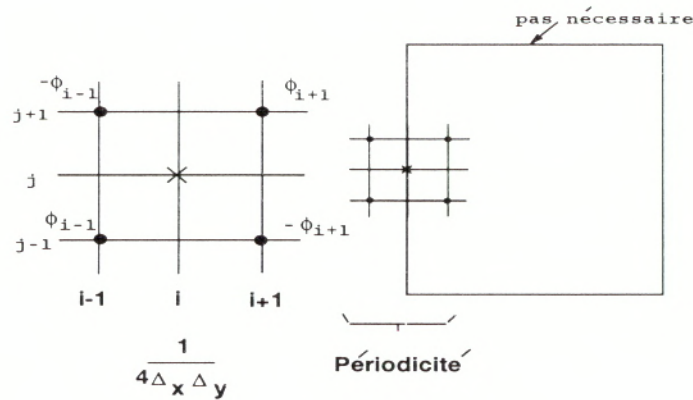


FIG. 3.18 - Opérateur $\frac{\partial}{\partial x}(\phi \frac{\partial \Phi}{\partial y})$, points courants et frontières : méthode hybride

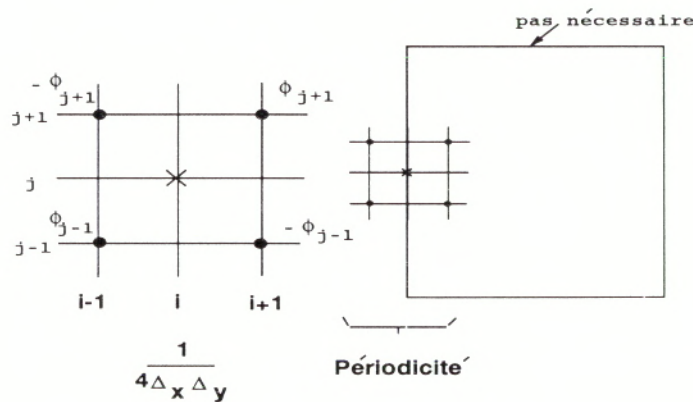


FIG. 3.19 - Opérateur $\frac{\partial}{\partial y}(\phi \frac{\partial \Phi}{\partial x})$, points courants et frontières : méthode hybride

La description des opérateurs relatifs aux schémas de discrétisation spatiale se termine ici. À l'issue des tests décrits au chapitre 4, il s'est avéré que les résultats observés étaient très peu dépendants du choix de la discrétisation spatiale.

Discrétisation spatiale des équations des points frontières

À chaque type de discrétisation spatiale du problème continu (3.15)-(3.18) est associée la même manière de discrétiser les conditions limites (3.21)-(3.26) :

Dans la direction de l'écoulement, la condition de périodicité (3.21) aux frontières OUEST et EST du domaine de calcul est imposée à la fois dans la construction du maillage et dans le calcul des dérivées spatiales par rapport à x , par la condition :

$$x_{M_x+1} = x_1.$$

Dans la direction normale à l'écoulement, une fois calculés $\rho_{i,1}$ et ρ_{i,M_y} à l'aide de l'équation (3.22) discrétisée à l'aide de la méthode classique ou hybride, les champs aux points frontières NORD et SUD sont calculés à l'aide du système (3.23)-(3.26) discrétisé, ce qui conduit aux relations suivantes :

$$\rho_{i,1}v_{i,1} = \rho_{i,M_y}v_{i,M_y} = 0 , \quad (3.39)$$

$$\rho_{i,1}u_{i,1} = \rho_{i,1}u_{i,2} - U_{0,i,2} + U_{0,i,1} , \quad (3.40)$$

$$\rho_{i,M_y}u_{i,M_y} = \rho_{i,M_y}u_{i,M_y-1}U_{0,i,M_y-1} + U_{0,i,M_y} , \quad (3.41)$$

$$T_{i,1} = T_{i,2} - T_{0,i,2} + T_{0,i,1} , \quad (3.42)$$

$$T_{i,M_y} = T_{i,M_y-1} - T_{0,i,M_y-1} + T_{0,i,M_y} , \quad (3.43)$$

$$\rho_{i,1}E_{i,1} = \rho_{i,1} \frac{T_{i,1}}{(\gamma - 1)\gamma Ma^2} + \rho_{i,1} \frac{u_{i,2}^2}{2} , \quad (3.44)$$

$$\rho_{i,M_y}E_{i,M_y} = \rho_{i,M_y} \frac{T_{i,M_y}}{(\gamma - 1)\gamma Ma^2} + \rho_{i,M_y} \frac{u_{i,M_y-1}^2}{2} . \quad (3.45)$$

Ces grandeurs sont calculées à chaque itération, après le calcul des grandeurs aux points courants.

Discrétisation temporelle

Deux méthodes de discrétisation temporelle ont été testées pour intégrer les équations (3.15)-(3.18) que l'on peut formellement écrire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = F .$$

- Pour la première, **tous les termes sont évalués à partir d'un schéma explicite Euler d'ordre 1** : les grandeurs Φ^{n+1} à l'instant $n + 1$ sont calculées à partir des grandeurs à l'instant n par :

$$\Phi^{n+1} - \Phi^n + \Delta t(F^n) = 0 ,$$

où Φ représente les variables ρ , ρu , ρv , ρE , et F les termes de convection, de pression et de diffusion des équations (3.15)-(3.18) discrétisées.

- pour la seconde, **tous les termes sont évalués à partir d'un schéma explicite de type Adams-Bashforth d'ordre 2** : les grandeurs Φ^{n+1} à l'instant $n + 1$ sont calculées à partir des grandeurs à l'instant n par :

$$\Phi^{n+1} - \Phi^n + \Delta t(F^*) = 0 ,$$

avec,

$$F^* = 1.5F^n - .5F^{n-1} .$$

A l'issue des test décrits au chapitre 4, il s'est avéré que les résultats observés étaient très peu dépendants du choix du schéma en temps.

Critère de stabilité des schémas

À chaque couple de discrétisation spatio-temporelle est associé un critère de stabilité numérique. Il existe plusieurs façon de mener une analyse de stabilité : la méthode classique de Von Neumann, et des méthodes plus fines (équation différentielle équivalente, analyse matricielle). Nous avons choisi d'utiliser le critère le plus restrictif obtenu par une méthode matricielle (Hirsch (1987)) pour le schéma le plus instable (Euler-classique). Ce critère s'exprime par le relation :

$$\Delta t \leq \text{Min}\left\{\frac{2\beta}{\text{Max}(|v| + c)}, \frac{\Delta x^2}{4\beta}\right\}, \quad (3.46)$$

avec $\beta = \frac{1}{\text{Re}}$.

Discrétisation des conditions initiales

Les conditions initiales (3.27)-(3.30) s'écrivent de façon discrète de la manière suivante :²

$$\rho_{i,j}^0 = \rho_0(y_j) + \epsilon(\text{Re}(\rho_{1j}) \cos kx_i - \text{Im}(\rho_{1j}) \sin kx_i), \quad (3.47)$$

$$\rho_{i,j}^0 u_{i,j}^0 = \rho_{i,j}^0 \{U_0(y_j) + \epsilon(\text{Re}(u_{1j}) \cos kx_i - \text{Im}(u_{1j}) \sin kx_i)\}, \quad (3.48)$$

$$\rho_{i,j}^0 v_{i,j}^0 = \rho_{i,j}^0 \{\epsilon(\text{Re}(v_{1j}) \cos kx_i - \text{Im}(v_{1j}) \sin kx_i)\}, \quad (3.49)$$

$$\rho_{i,j}^0 E_{i,j}^0 = \rho_{i,j}^0 \{E_0(y_j) + \epsilon(\text{Re}(E_{1j}) \cos kx_i - \text{Im}(E_{1j}) \sin kx_i)\}. \quad (3.50)$$

où Re et Im symbolisent respectivement les parties réelles et imaginaires.

3.3 Grandeurs caractéristiques et moyens d'analyse

Cette section définit toutes les grandeurs caractéristiques qui seront analysées aux chapitres 4 et 5. Ceci constitue à la fois un rappel de la définition de certaines grandeurs et aussi l'introduction de nouvelles grandeurs caractéristiques des ondes d'instabilité dans la couche de mélange étudiée.

²Ne pas confondre Φ^0 , valeur de Φ à l'instant $t = 0$, avec Φ_0 , profil de l'état de base.

3.3.1 Instabilité linéaire de fluide parfait

Taux de croissance linéaire en fluide parfait

Le code d'instabilité linéaire (§3.1) permet d'obtenir le taux de croissance ω_i^∞ du mode fondamental en fonction du nombre d'onde k et des paramètres physiques que sont le nombre de Mach Ma et le rapport de température b :

$$\omega_i^\infty = \omega_i^\infty(k; Ma, b) . \quad (3.51)$$

L'exposant ∞ indique qu'il s'agit d'un résultat à nombre de Reynolds infini.

Rappelons que, associés aux nombres d'onde k , les taux de croissance ω_i^∞ sont les parties imaginaires des valeurs propres du problème (2.56).

Nombre d'onde neutre en fluide parfait

Le nombre d'onde neutre α en fluide parfait est défini par :

$$\omega_i^\infty(\alpha; Ma, b) = 0 . \quad (3.52)$$

L'étude de la solution analytique au nombre d'onde neutre (Blumen 1970, Djordjevic & Redekopp 1988) permet d'évaluer α (cf. (2.66)).

Fonctions propres en fluide parfait

Pour un état de base donné et à chaque couple de valeurs propres (k, ω^∞) correspond un vecteur propre de composantes complexes

$$p_1(y) , u_1(y) , v_1(y) , \rho_1(y) , T_1(y) , E_1(y) . \quad (3.53)$$

Modes propres en fluide parfait

À chaque fonction propre $\phi_1(y)$ est associé le mode propre

$$\phi'_1(x, y, t) = \phi_1(y)e^{i(kx - \omega^\infty t)} , \quad (3.54)$$

utilisé comme conditions initiales de perturbation dans le code de simulation numérique directe (cf. (3.27)-(3.30)).

Tension de Reynolds

Afin de comparer les résultats avec la littérature (Djordjevic & Redekopp 1988), on définit la tension de Reynolds $\tau(y, t)$:

$$\tau(y, t) = -\frac{1}{T_0(y)} \frac{k}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{2\pi}{k}} u'_1 v'_1 dx \right) = -\frac{e^{2kc_it}}{2T_0(y)} \text{Re}(u_1 v_1^*) = e^{2kc_it} \tau_0(y) . \quad (3.55)$$

D'après les équations d'Euler en perturbations linéarisées (2.44)-(2.47), on peut obtenir une équation de l'énergie fluctuante de la forme :

$$\frac{1}{2} \iint \left(\frac{u_1'^2 + v_1'^2}{T_0} + \frac{p'^2}{\gamma^2 \text{Ma}^2} \right) dx dy = - \iint \frac{dU_0}{dy} \frac{u_1' v_1'}{T_0} dx dy . \quad (3.56)$$

La tension de Reynolds représente donc la production d'énergie fluctuante.

3.3.2 Instabilité linéaire de fluide visqueux

Taux de croissance linéaire en fluide visqueux

Le taux de croissance linéaire en fluide visqueux est défini par

$$\omega_i = \omega_i(k; \text{Ma}, \text{Re}, b) . \quad (3.57)$$

Dans le cas d'un état de base incompressible ($\text{Ma}=0$, $b = 0$), ω_i est donné par l'étude de Betchov & Szewczyk (1963) dont les courbes de stabilité à différents nombres de Reynolds sont données sur la figure 2.5.

Dans le cas d'un état de base compressible, et pour une étude restreinte à des nombres d'onde proches du nombre d'onde neutre k_n défini en (3.58), on établira en §5.1.2 une relation permettant d'évaluer ω_i à partir de l'analyse en perturbations de Djordjevic & Redekopp (1989a,1989b) (cf. (5.26)).

Nombre d'onde neutre en fluide visqueux

Le nombre d'onde neutre en fluide visqueux k_n est défini par :

$$\omega_i(k_n, \text{Ma}, \text{Re}, b) = 0 . \quad (3.58)$$

Il est donné à l'issue d'une analyse en perturbation asymptotique (Djordjevic & Redekopp (1989a,1989b) en §2.2.2 par la relation (2.67). On définit l'écart au neutre par

$$\Delta k = k_n - k . \quad (3.59)$$

3.3.3 Instabilité non linéaire de fluide visqueux

Constante de Landau "théorique"

La constante de Landau est la grandeur qui multiplie le terme cubique de l'équation de Landau (cf §2.3.1). Nous établirons en §5.1.2, à partir des résultats de Djordjevic & Redekopp (1989a,1989b), une relation permettant d'exprimer la constante de Landau théorique L_t en fonction des paramètres de l'écoulement (cf. (5.27)).

3.3.4 Simulation numérique directe

Grandeurs globales

Le code de simulation numérique directe calcule à chaque itération les grandeurs globales ρ , ρu , ρv et ρE . On peut donc à tout moment disposer des champs de masse volumique $\rho(x, y, t)$, vitesse $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et énergie totale $E(x, y, t)$, ainsi que des variables intermédiaires, pression $p(x, y, t)$ et température $T(x, y, t)$.

Grandeurs moyennes

La grandeur moyenne $\bar{\phi}(y, t)$, pour toute fonction de champ $\phi(x, y, t)$, est définie par :

$$\bar{\phi}(y, t) = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \phi(x, y, t) dx , \quad (3.60)$$

De façon discrète, elle s'exprime par :

$$\bar{\phi}_j^n = \frac{1}{M_x} \sum_{i=1}^{M_x} \phi_{i,j}^n . \quad (3.61)$$

Grandeurs fluctuantes

La grandeur fluctuante $\phi'(x, y, t)$, pour toute fonction de champ $\phi(x, y, t)$, est définie par :

$$\phi'(x, y, t) = \phi(x, y, t) - \bar{\phi}(y, t) , \quad (3.62)$$

où $\bar{\phi}(y, t)$ est la moyenne définie en (3.60).

De façon discrète, elle s'exprime par :

$$\phi'_{i,j}{}^n = \phi_{i,j}^n - \bar{\phi}_j^n , \quad (3.63)$$

où $\bar{\phi}_j^n$ est défini en (3.61).

Déformation des grandeurs moyennes

La déformation $\phi_0(y, t)$ de la grandeur moyenne $\bar{\phi}(y, t)$ désigne la différence au cours du temps entre la grandeur moyenne $\bar{\phi}(y, t)$ définie en (3.60) et le profil de base $\phi_0(y)$:

$$\phi_0(y, t) = \bar{\phi}(y, t) - \phi_0(y) . \quad (3.64)$$

Plus particulièrement, la relation (3.64) sera utilisée pour déterminer la déformation $u_0(y, t)$ de l'écoulement moyen $\bar{u}(y, t)$:

$$u_0(y, t) = \bar{u}(y, t) - U_0(y) . \quad (3.65)$$

Grandeurs fluctuantes modales

Dans l'espace spectral la grandeur fluctuante modale $\phi_l(y, t)$ avec l entier positif ou nul, est définie, pour toute fonction de champ $\phi(x, y, t)$, par le coefficient de la série de Fourier en x :

$$\phi_l(y, t) = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} \Phi(x, y, t) e^{-iK_l x} dx, \quad (3.66)$$

où $\Phi(x, y, t)$ est la grandeur globale $\phi(x, y, t)$ à laquelle on a soustrait le profil de base $\phi_0(y)$. Le nombre d'onde K_l de chaque harmonique est relié au nombre d'onde k du fondamental ($l = 1$) par la relation :

$$K_l = lk, \quad \text{pour } l > 0.$$

et on rappelle que $L_x = 2\pi/k$.

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{l=0}^{M_x-1} \phi_l(y, t) e^{iK_l x}, \quad (3.67)$$

Soulignons que pour $l = 0$, on n'obtient pas le mode traditionnel correspondant à la grandeur moyenne $\bar{\phi}$, puisque l'on a soustrait l'écoulement de base ϕ_0 . Aussi, le mode $l = 0$ correspond à la déformation de la grandeur moyenne définie en (3.64). On s'intéressera plus particulièrement à la déformation de l'écoulement moyen $u_0(y, t)$. De même, les grandeurs $u_1(y, t)$ et $v_1(y, t)$ représentent les profils des vitesses fluctuantes du mode fondamental k ($l = 1$) au cours du temps.

De façon discrète, les définitions (3.66) et (3.67) s'écrivent :

$$\phi_{l_j}^n = \frac{1}{M_x} \sum_{i=1}^{M_x} \Phi_{i,j}^n e^{-i\frac{2\pi}{M}il}, \quad (3.68)$$

$$\Phi_{i,j}^n = \sum_{l=0}^{M-1} \phi_{l_j}^n e^{i\frac{2\pi}{M}il}. \quad (3.69)$$

Pour calculer les coefficients complexes $\phi_{l_j}^n$, on utilise le programme de Transformation de Fourier Rapide FFTRF de la bibliothèque IMSL.

Champs de vortacité

Pour caractériser physiquement l'écoulement, il est intéressant de visualiser les lignes d'isovortacité au cours de la simulation. On peut alors suivre l'évolution de la structure tourbillonnaire qui se développe dans la boîte de calcul. La vortacité totale est définie par le pseudo-vecteur tourbillon :

$$\underline{\Omega} = \underline{\text{rot}} \underline{v},$$

soit,

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.70)$$

Énergie fluctuante

L'énergie fluctuante $\mathcal{E}(t)$ est définie par :

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^{L_x} \int_{-\frac{L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} (u'(x, y, t)^2 + v'(x, y, t)^2) dy dx , \quad (3.71)$$

soit, sous forme discrète,

$$\mathcal{E}^n = \frac{L_x L_y}{M_x M_y} \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} (u'_{i,j}{}^2 + v'_{i,j}{}^2) . \quad (3.72)$$

L'énergie fluctuante va être utilisée, comme cela sera décrit aux chapitres 4 et 5, pour caractériser à la fois l'évolution linéaire et non-linéaire des ondes d'instabilité dans la couche de mélange.

Plus particulièrement, l'énergie fluctuante sera étudiée sous la forme :

$$\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}(t) . \quad (3.73)$$

Enfin, à partir de l'énergie fluctuante, on calculera la quantité :

$$\Delta \mathcal{E}(t) = \frac{1}{\mathcal{E}(t)} \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \ln \mathcal{E}(t) . \quad (3.74)$$

Cette quantité a la dimension de l'inverse d'un temps et elle mesure le taux de croissance instantané de l'énergie fluctuante.

De manière discrète, $\Delta \mathcal{E}$ est calculé à partir des valeurs discrètes de \mathcal{E} :

$$[\Delta \mathcal{E}]^n = \frac{1}{\mathcal{E}^n} \frac{\mathcal{E}^{n+m} - \mathcal{E}^{n-m}}{2m \Delta t} , \quad (3.75)$$

où $m > 1$ est la période d'appel du calcul de l'énergie fluctuante lors de la simulation. En général, on prendra $m = 100$.

Énergie modale de perturbation

L'énergie contenue dans l'harmonique l est définie par :

$$E_l(t) = \int_{-\frac{L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} |u_l(y, t)|^2 dy , \quad l > 0 , \quad (3.76)$$

où $u_l(y, t)$, pour $l > 0$, sont les coefficients complexes des transformées de Fourier définis en (3.66).

Dans le cas $l = 0$, la définition (3.76) est utilisable mais l'énergie obtenue, du fait de la définition des coefficients de Fourier (3.66) est l'énergie due à la déformation de l'écoulement moyen.

Taux de croissance linéaire numérique

Il sera aussi vu, au §4, que le code de simulation numérique directe permet, avec l'étude faite sur l'énergie fluctuante (3.74) de mesurer le taux de croissance linéaire en fluide visqueux σ :

$$\sigma = \sigma(k; \text{Ma}, \text{Re}, b, \text{discrétisation}) = \Delta \mathcal{E}(t = 0^+) , \quad (3.77)$$

où l'instant $t = 0^+$ correspond à la fin d'une phase transitoire dont les détails seront explicités en §4.2.1.

Nombre d'onde neutre numérique

Les simulations vont permettre en outre (cf. §4.2.3) d'évaluer le nombre d'onde neutre numérique k_{num} défini par :

$$\sigma(k_{num}; \text{Ma}, \text{Re}, b, \text{discrétisation}) = 0 . \quad (3.78)$$

On définit l'écart au neutre numérique par

$$\Delta k_{num} = k_{num} - k . \quad (3.79)$$

Constante de Landau numérique

Enfin (cf §5.1.2), pour des simulations effectuées à des nombres d'onde proches du nombre d'onde neutre numérique k_{num} définie en (3.78), on pourra déterminer la constante de Landau numérique L :

$$L = L(k, \text{Ma}, \text{Re}, b, \text{discrétisation}) . \quad (3.80)$$

Chapitre 4

ÉVOLUTION LINÉAIRE DES ONDES D'INSTABILITÉ

Ce chapitre décrit et analyse les résultats relatifs à l'évolution linéaire des ondes d'instabilité dans une couche de mélange temporelle dont l'état de base a été défini au chapitre 2 par (2.10)-(2.14). La première partie a trait au problème aux valeurs propres associé à l'instabilité linéaire de fluide parfait dont la méthode de résolution a été exposée en §3.1. La seconde partie est relative à la simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes en régime linéaire par la méthode aux différences finies présentée en §3.2. Dans ces deux parties, toutes les grandeurs analysées ont été définies en §3.3.

4.1 Instabilité linéaire de fluide parfait

Le code d'instabilité (§3.1) a été validé par comparaison avec les résultats disponibles dans la littérature comme exposé ci-dessous.

4.1.1 Couche de mélange incompressible

L'instabilité linéaire de l'écoulement de base incompressible avec

$$\text{Ma} = 0 \quad , \quad b = 0 \quad ,$$

a été étudiée par Michalke (1964)¹.

Les valeurs obtenues pour c_i et pour le **taux de croissance temporel** $\omega_i^\infty = kc_i$ (tableau 4.1) coïncident avec celles de Michalke (1964) avec une erreur maximale de l'ordre du millièmè :

k	ω_i^∞ (Code d'instabilité)	ω_i^∞ (Michalke (1964))
0.	0.	0.
0,1	0,08376	0,08368
0,2	0,13914	0,13950
0,3	0,17296	0,17308
0,4	0,18816	0,18820
0,5	0,18750	0,18752
0,6	0,17298	0,17300
0,7	0,14604	0,14610
0,8	0,10772	0,10776
0,9	0,05884	0,05884
1.	0.	0.

Tab. 4.1 - Taux de croissance temporel ω_i^∞ , présente étude et résultats issus de Michalke (1964).

La figure 4.1 donne l'allure des courbes $\omega_i^\infty(k)$ et $c_i(k)$.

¹Plus exactement, le profil de vitesse de base étudié par Michalke a un coefficient multiplicatif de 0,5. Par commodité, ses résultats ont été renormalisés pour se conformer à notre adimensionnement.

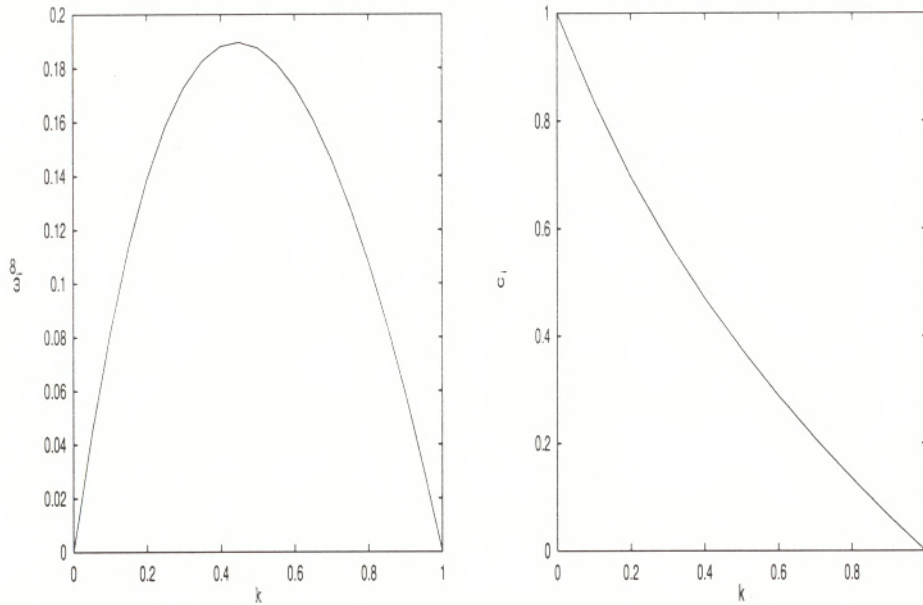


FIG. 4.1 - Taux de croissance temporel ω_i^∞ et vitesse de phase c_i en fonction du nombre d'onde k ; $Ma=0$, $b=0$; analyse de stabilité linéaire.

Comme nous l'avons présenté en §2.2.1, la courbe des taux de croissance temporels $\omega_i^\infty(k)$ est une courbe en cloche qui délimite un intervalle de nombres d'onde instables compris entre $k=0$ et $k=\alpha=1$.

4.1.2 Couche de mélange compressible isotherme

L'instabilité linéaire de l'écoulement de base compressible isotherme avec

$$Ma \neq 0, \quad b = 0,$$

a été étudiée par Blumen (1970) et Djordjevic & Redekopp (1989).

Un premier test a consisté à calculer le taux de croissance temporel ω_i^∞ en fonction du nombre d'onde k , pour divers nombres de Mach. Les résultats obtenus sont en accord avec les résultats publiés par Blumen (1970) : on retrouve (tableau 4.2) les valeurs des maxima $\omega_{i_{max}}^\infty$ des courbes d'amplification à l'erreur d'arrondi près.

Ma	k_{max}	$\omega_{i_{max}}^\infty$ (Code d'instabilité)	$\omega_{i_{max}}^\infty$ (Blumen (1970))
0.0	0,445	0,1897	0,190
0,3	0,417	0,1712	0,171
0,5	0,397	0,1411	0,141
0,7	0,326	0,1005	0,101
0,9	0,055	0,0550	0,055

Tab 4.2 - Taux de croissance maximum $\omega_{i_{max}}^\infty$, présente étude et résultats issus de Blumen (1970).

La figure 4.2 représente les courbes de stabilité obtenues.

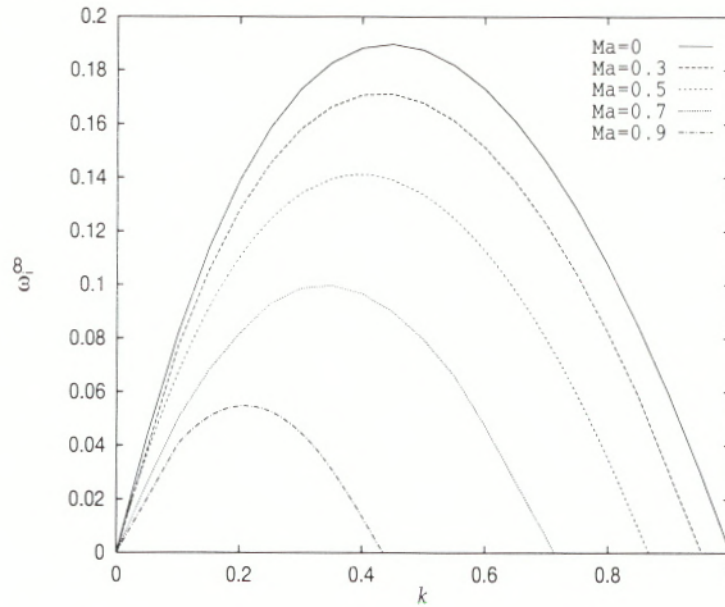


FIG. 4.2 - Taux de croissance temporel ω_i^∞ en fonction du nombre d'onde k pour divers nombres de Mach Ma ; $b = 0$; analyse de stabilité linéaire.

Il apparaît que le nombre de Mach a un effet stabilisant : plus il augmente, plus l'intervalle de nombres d'onde instables se rétrécit et plus la valeur du taux de croissance maximum $\omega_{i_{max}}^\infty$ diminue.

Un second test a consisté à calculer les fonctions propres associées aux nombres d'onde d'amplification maximale k_{max} donnés par le tableau 4.2. Pour comparer les résultats du calcul à ceux de Blumen (1970), donnés seulement sous forme de graphe, la normalisation en pression suivante a été adoptée ² :

$$Re p_1(0) = k^2, Im p_1(0) = 0 .$$

Les figures 4.3 et 4.4 représentent les parties réelle et imaginaire des fonctions propres en pression obtenues pour différents nombres de Mach au nombre d'onde le plus instable. Les résultats sont similaires aux tracés donnés par Djordjevic & Redekopp (1989) mais présentent des légères différences aux bords $\pm L_y/2$ du domaine de calcul. Celles-ci sont certainement dues à la valeur de L_y choisie par Djordjevic & Redekopp (1988). Cette dernière doit différer du choix effectué ici, $L_y = 12$.

²Partout ailleurs, comme cela a été précisé au §3.1, la normalisation choisie est $Re p_1(0) = 1$ et $Im p_1(0) = 0$.

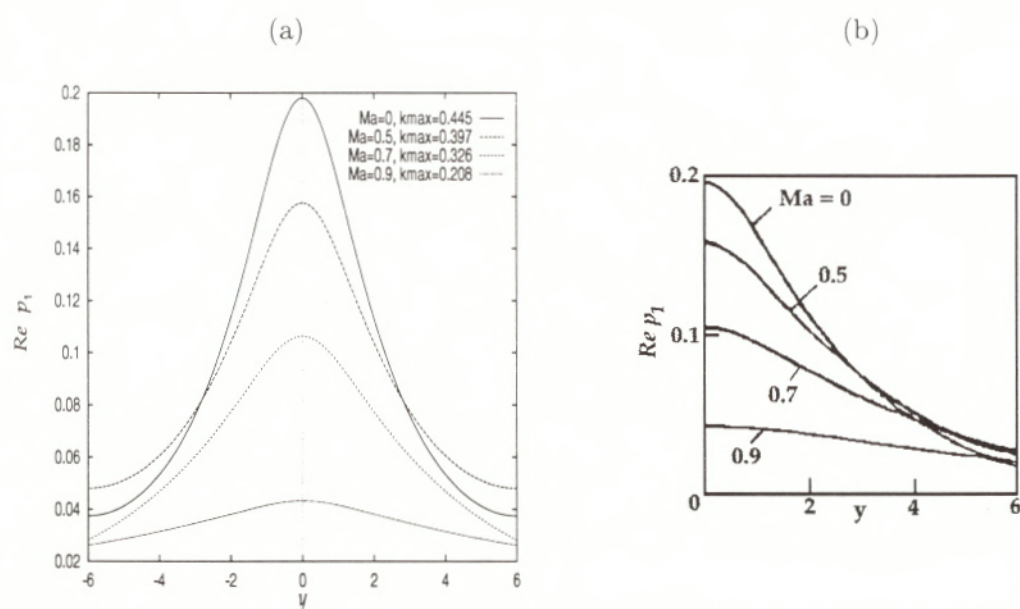


FIG. 4.3 - Parties réelles des fonctions propres en pression $Re p_1(y)$ pour divers nombres de Mach Ma et les nombres d'onde d'amplification maximale k_{max} ; $b = 0$; analyse de stabilité linéaire. (a): présente étude, (b): résultats issus de Djordjevic & Redekopp (1988).

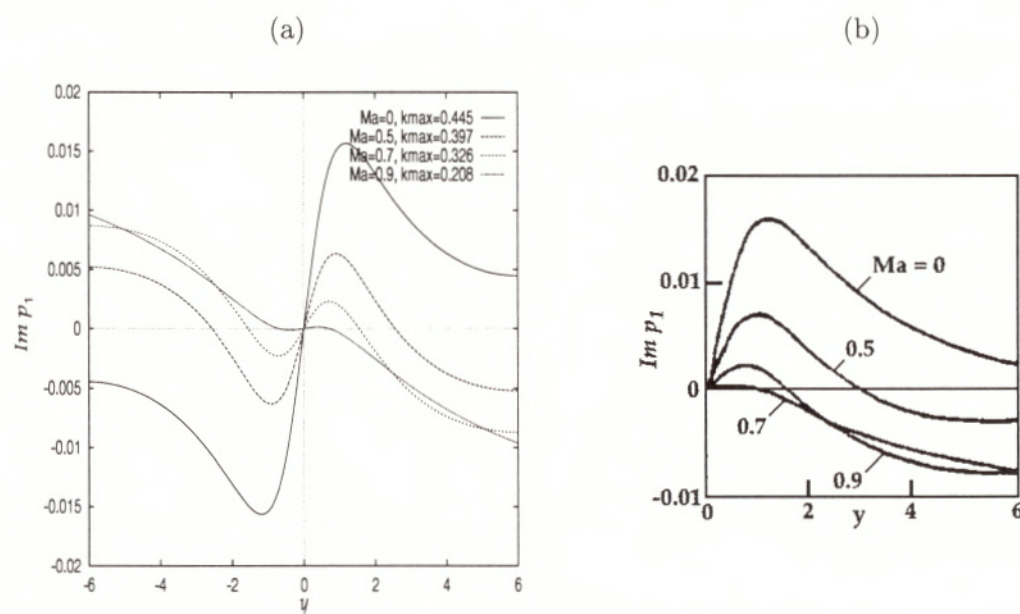


FIG. 4.4 - Parties imaginaires des fonctions propres en pression $Im p_1(y)$ pour divers nombre de Mach Ma et les nombres d'onde d'amplification maximale k_{max} ; $b = 0$; analyse de stabilité linéaire. (a): présente étude, (b): résultats issus de Djordjevic & Redekopp (1988).

Les figures 4.5 à 4.10 présentent les fonctions propres en vitesse, température, masse volumique et énergie totale calculées d'après les relations (3.7)-(3.11), avec

la normalisation en pression (3.3) pour $Ma = 0,5$ et $k = 0,8$ soit $\Delta k = 0,06$.

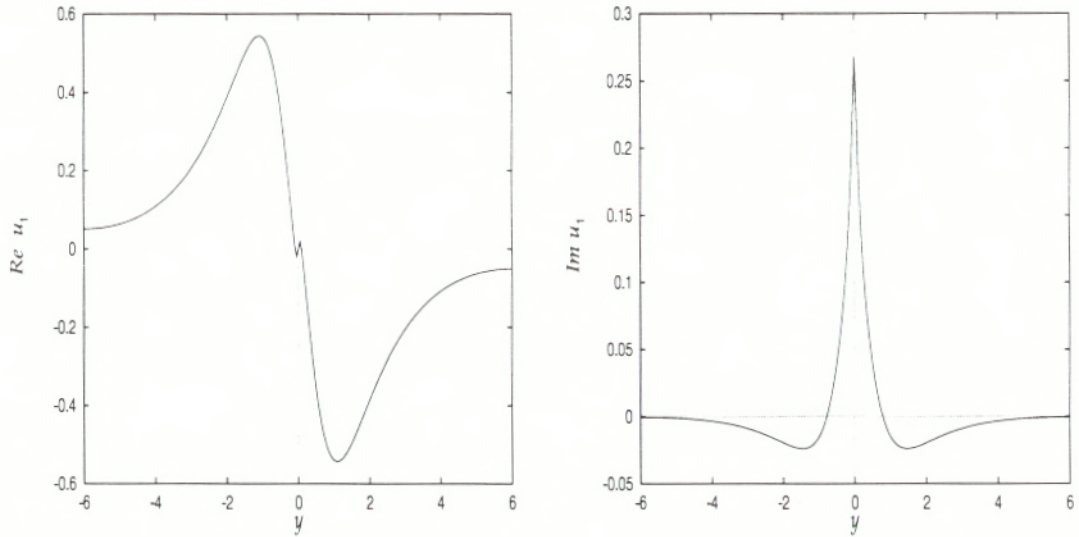


FIG. 4.5 - Parties réelle et imaginaire des fonctions propres en vitesse longitudinale $Re u_1(y)$, $Im u_1(y)$; $Ma = 0,5$, $b = 0$, $k = 0,8$; analyse de stabilité linéaire.

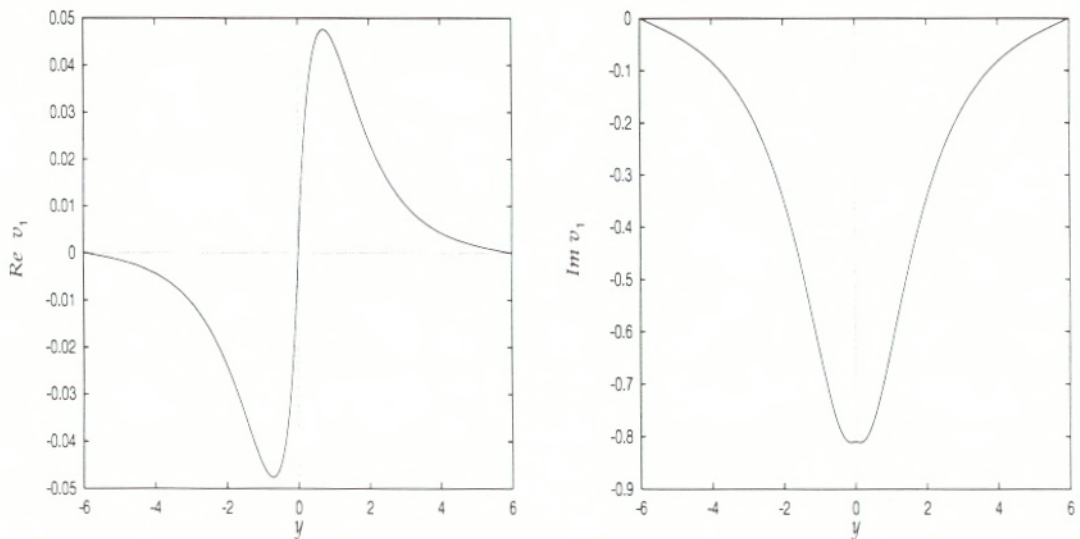


FIG. 4.6 - Parties réelle et imaginaire des fonctions propres en vitesse transversale $Re v_1(y)$, $Im v_1(y)$; $Ma = 0,5$, $b = 0$, $k = 0,8$; analyse de stabilité linéaire.

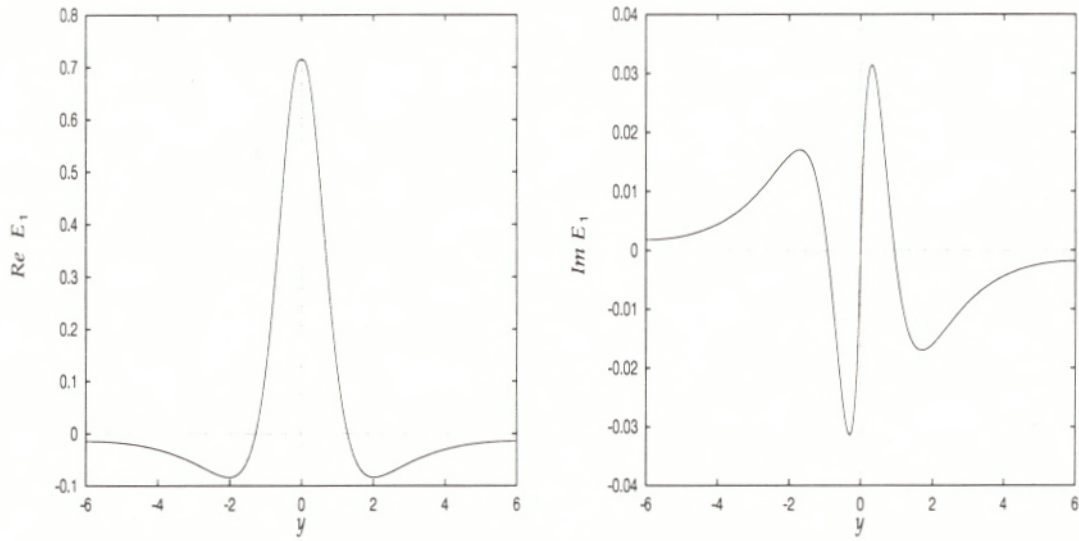


FIG. 4.7 - Parties réelle et imaginaire des fonctions propres en énergie totale $Re E_1(y)$, $Im E_1(y)$; $Ma=0,5$, $b=0$, $k=0,8$; analyse de stabilité linéaire.

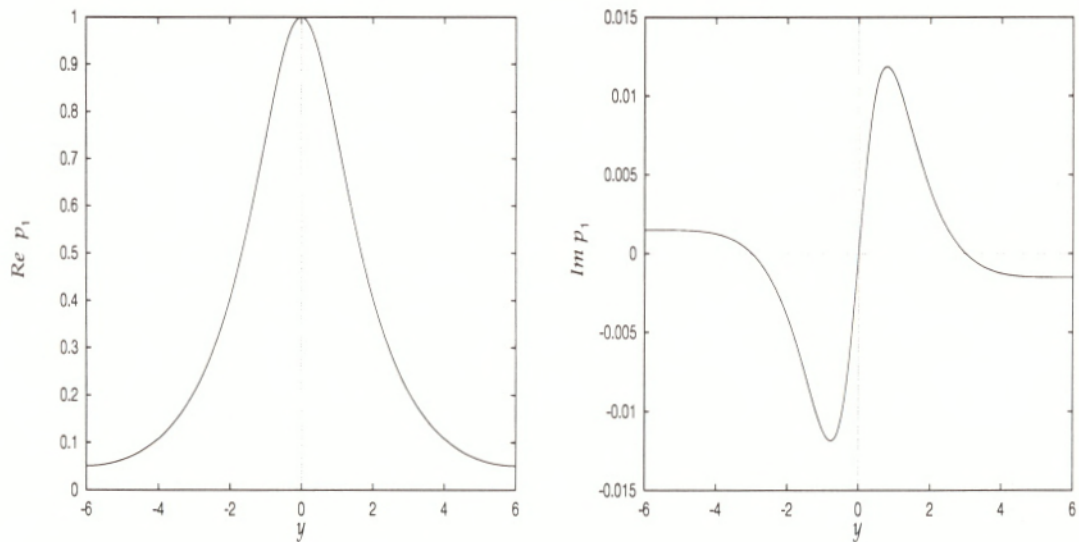


FIG. 4.8 - Parties réelle et imaginaire des fonctions propres en pression $Re p_1(y)$, $Im p_1(y)$; $Ma=0,5$, $b=0$, $k=0,8$; analyse de stabilité linéaire.

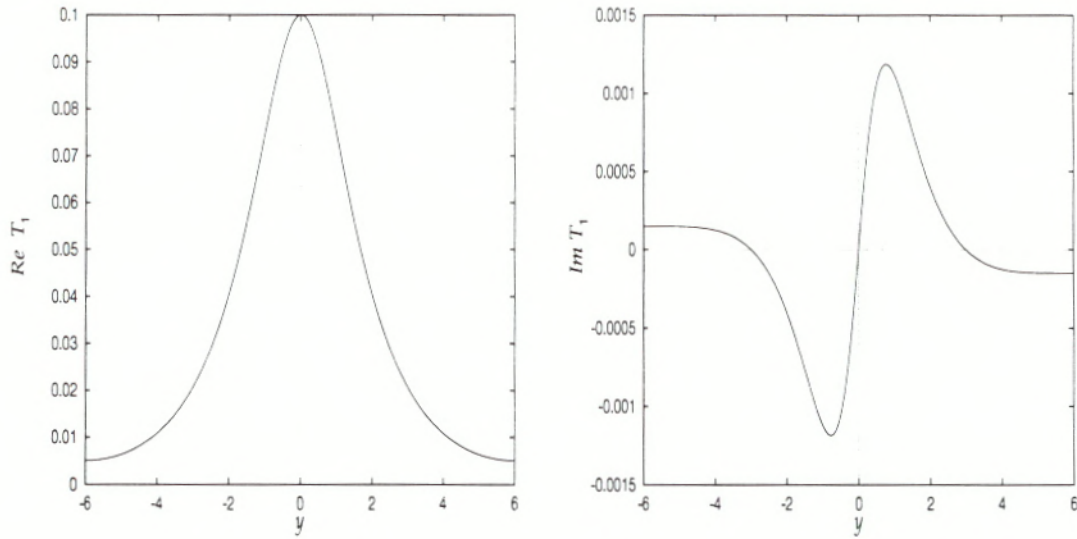


FIG. 4.9 - Parties réelle et imaginaire des fonctions propres en température $Re T_1(y)$, $Im T_1(y)$; $Ma=0,5$, $b=0$, $k=0,8$; analyse de stabilité linéaire.

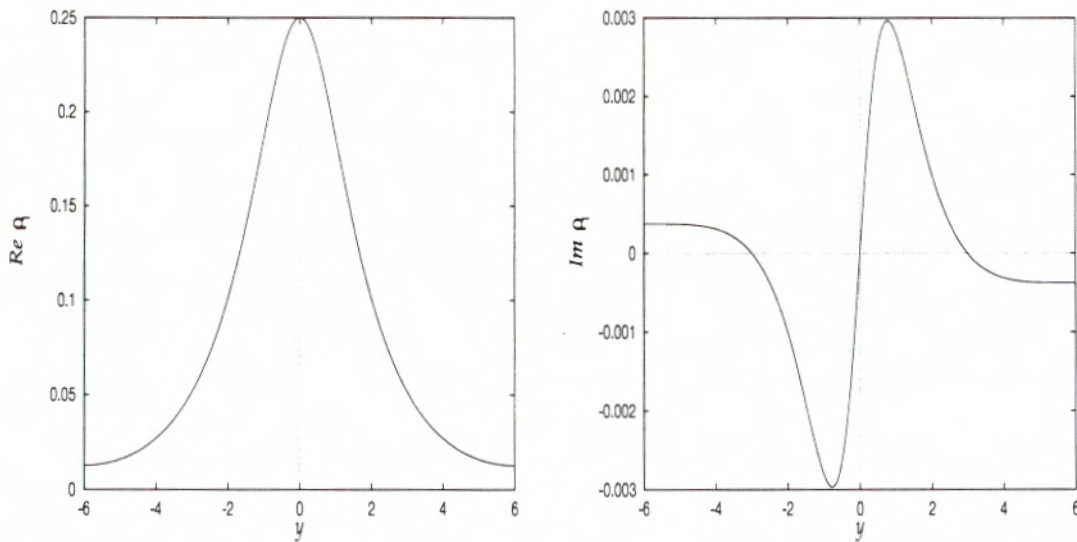


FIG. 4.10 - Parties réelle et imaginaire des fonctions propres en masse volumique, $Re \rho_1(y)$, $Im \rho_1(y)$; $Ma=0,5$, $b=0$, $k=0,8$; analyse de stabilité linéaire

Il apparaît que la partie réelle de la fonction propre en vitesse $Re u_1(y)$ présente une petite oscillation en son centre (figure 4.5). Cette particularité n'est pas un artefact numérique mais est bien réelle et subsiste pour des calculs à résolution plus fine. De plus, on constate que les fonctions propres $\rho_1(y)$ et $T_1(y)$ ne diffèrent de $p_1(y)$ que d'une constante multiplicative (figures 4.10, 4.9 et 4.8). Dans ce cas isotherme ce résultat est attendu, étant donnée la nature des expressions (3.9) et (3.10) lorsque $\partial T_0/\partial y$ est nul.

Pour comparer les fonctions propres en vitesse aux résultats de Djordjevic & Redekopp (1988), la tension de Reynolds $\tau_0(y)$ définie en (4.11) a été calculée de

deux façons différentes:

- directement, à partir des vitesses :

$$\tau_0(y) = -\frac{1}{2T_0} \text{Re}(u_1 v_1^*) \quad (4.1)$$

- à partir de la pression :

La relation (4.1) peut se réécrire :

$$\tau_0(y) = -\frac{1}{2T_0} (\text{Re } u_1 \text{Re } v_1 + \text{Im } u_1 \text{Im } v_1) \quad (4.2)$$

Dans (4.2), on remplace u_1 et v_1 par leurs expressions (3.8) et (3.7) en fonction de p_1 et $\partial p_1 / \partial y$. Ceci conduit à l'expression

$$\tau_0(y) = \frac{T_0}{2k|U_0 - c|^2} \left(\frac{c_i}{k^2|U_0 - c|^2} |\partial p_1 / \partial y|^2 + \text{Im}(p_1 \partial p_1^* / \partial y) \right) \quad (4.3)$$

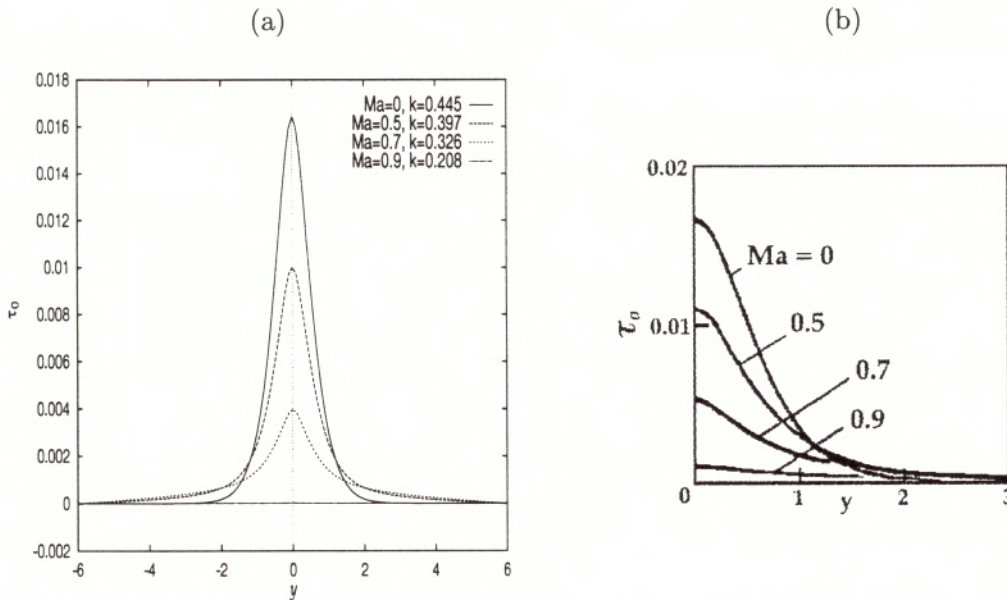


FIG. 4.11 - Tension de Reynolds $\tau_0(y)$ pour divers nombres de Mach Ma et au nombre d'onde maximum k_{max} correspondant ; $b = 0$; analyse de stabilité linéaire. (a): présente étude, (b): résultats issus de Djordjevic & Redekopp (1988).

Comme l'indique la figure 4.11(a) (où les courbes relatives à (4.1) et (4.3) sont confondues), les deux formules donnent exactement les mêmes résultats pour différentes valeurs du nombre de Mach Ma et du nombre d'onde k_{max} . Cela prouve qu'il n'y a pas d'erreur sur le calcul des vitesses. Les profils obtenus sont similaires à ceux de Djordjevic & Redekopp (1988) présentés sur la figure 4.11(b), dont le calcul a été effectué à partir de la pression. On remarque que l'amplitude de $\tau_0(y)$ diminue avec le nombre de Mach. D'après l'équation de l'énergie fluctuante (3.56), ce résultat est en accord qualitatif avec les courbes d'amplification présentées sur la figure 4.2.

4.1.3 Couche de mélange compressible

L'écoulement de base associé aux profils adimensionnés (2.10)-(2.14) avec $Ma \neq 0$ et $b \neq 0$ a été étudié par Djordjevic & Redekopp (1988).

La présente étude a porté sur deux jeux de paramètres particuliers.

– État de base refroidi :

$$Ma = 0,5 \quad , \quad b = -0,95 \quad .$$

– État de base réchauffé :

$$Ma = 0,5 \quad , \quad b = 5 \quad .$$

La figure 4.12(a) compare les courbes de stabilité obtenues à celle du cas isotherme. Elles sont semblables à celles de Djordjevic & Redekopp (1988) présentées sur la figure 4.12(b).

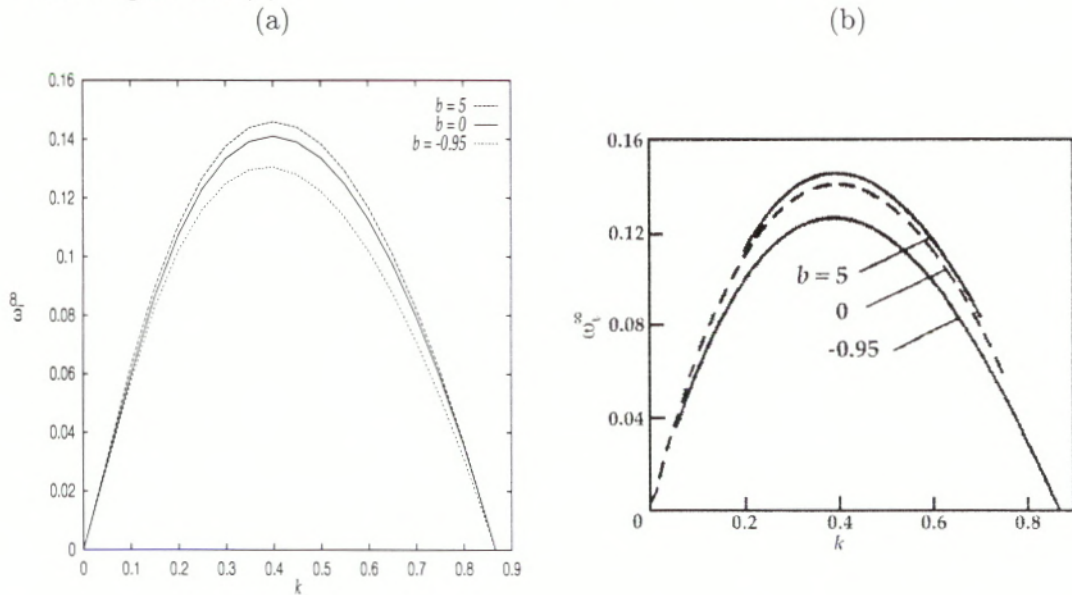


FIG. 4.12 - Taux de croissance temporel ω_i^∞ en fonction du nombre d'onde k pour différentes valeurs du rapport de température b ; $Ma=0,5$; analyse de stabilité linéaire. (a): présente étude, (b): résultats issus de Djordjevic & Redekopp (1988).

Il apparaît que $\omega_{i_{max}}^\infty$ est peu sensible aux variations du rapport de température b . Ce dernier est stabilisant dans le cas refroidi ($b = -0,95$) et déstabilisant dans le cas réchauffé ($b = 5$). L'effet de b ne modifie pas l'intervalle des nombres d'onde instables. Ceci est également confirmé par le calcul asymptotique du nombre d'onde neutre k_n de Djordjevic & Redekopp (1989).

Sur les figures 4.13(a) et 4.14(a) sont représentées les parties réelle et imaginaire des fonctions propres en pression pour les cas isotherme, refroidi et réchauffé. Ces résultats sont en très bon accord avec ceux de Djordjevic & Redekopp (1988) (figures 4.13(b) et 4.14(b)).

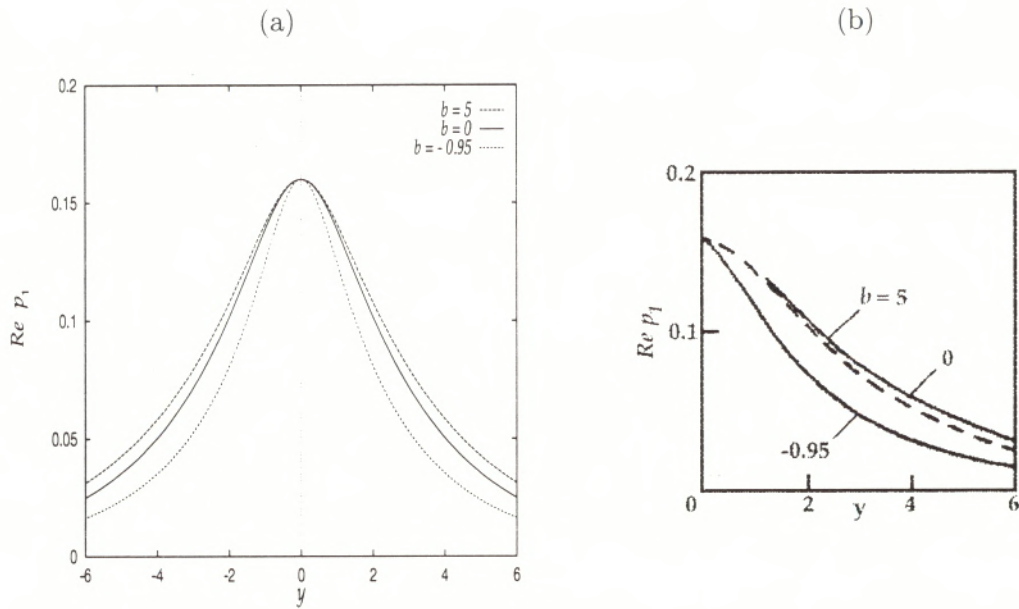


FIG. 4.13 - Parties réelles des fonctions propres en pression $Re p_1(y)$ pour différentes valeurs du rapport de température b ; $Ma= 0, 5$, $k = 0, 4$; analyse de stabilité linéaire. (a): présente étude, (b): résultats issus de Djordjevic & Redekopp (1988).

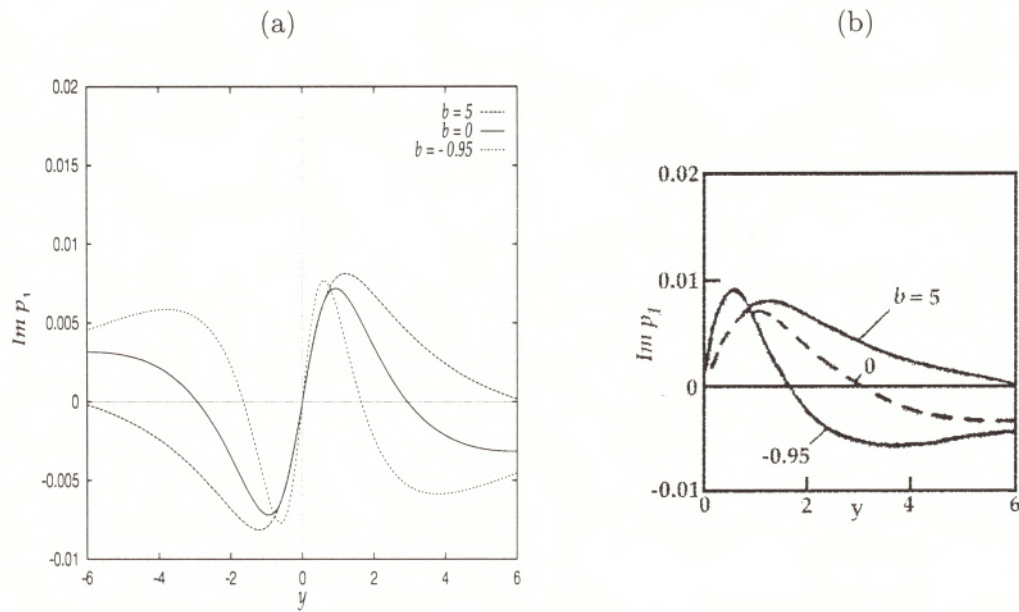


FIG. 4.14 - Parties imaginaires des fonctions propres en pression $Im p_1(y)$ pour différentes valeurs du rapport de température b ; $Ma= 0, 5$, $k = 0, 4$; analyse de stabilité linéaire. (a): présente étude, (b): résultats issus de Djordjevic & Redekopp (1988).

Enfin, les fonctions propres en vitesse ont été validées en calculant de deux façons différentes (cf. (4.1) et (4.3)) la tension de Reynolds $\tau_0(y)$ (courbes confondues pour les deux calculs sur la figure 4.15(a)). Ces résultats sont en bon accord

avec ceux de Djordjevic & Redekopp (1988) (figure 4.15(b)).

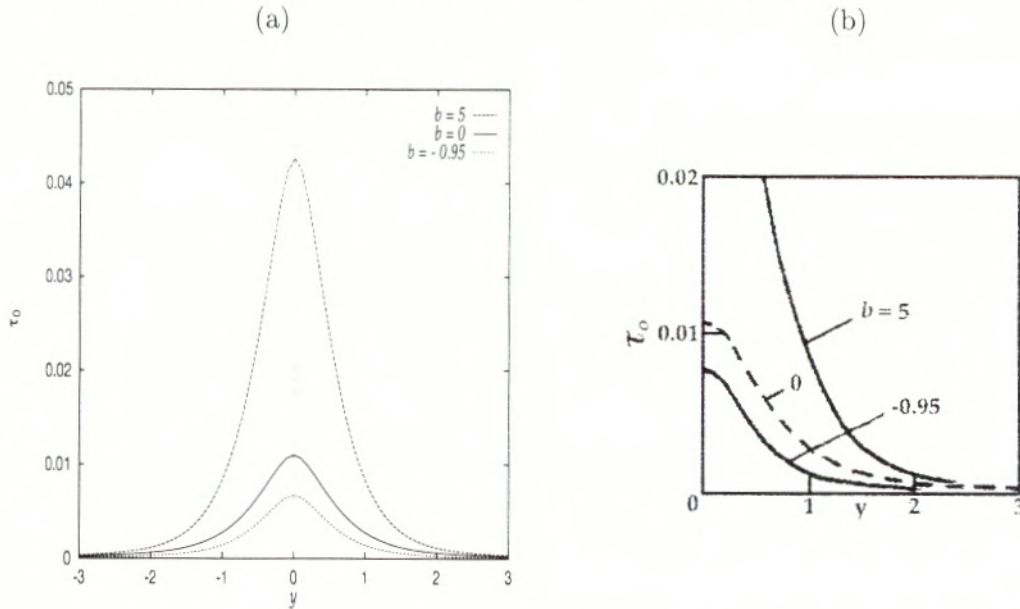


FIG. 4.15 - Tension de Reynolds $\tau_0(y)$ pour différentes valeurs du rapport de température b ; $Ma = 0,5$, $k = 0,4$; analyse de stabilité linéaire. (a): présente étude, (b): résultats issus de Djordjevic & Redekopp (1988).

On constate que la tension de Reynolds $\tau_{0,max}$ est beaucoup plus sensible aux variations du profil de température b que le taux de croissance $\omega_{i,max}^\infty$. Ce résultat provient de la présence du facteur $T_0(y)$ dans la définition (4.1) de τ_0 et n'est pas incohérent avec l'équation de l'énergie fluctuante (3.56).

Ces résultats montrent que le code d'instabilité linéaire de fluide parfait est satisfaisant. Les taux de croissance obtenus ainsi que les fonctions propres en pression et en vitesse sont en très bon accord avec les études précédentes. Le temps de calcul typique sur CRAY-YMP pour l'obtention d'une série de fonctions propres $\{p_1(y), u_1(y), v_1(y), T_1(y), \rho_1(y), E_1(y)\}$ à un nombre de Mach Ma , un rapport de température b et un nombre d'onde k donnés est inférieur à 3 secondes CPU. Ainsi, on dispose d'un moyen rapide de calcul permettant d'initialiser le code de simulation numérique directe.

4.2 Comparaison avec les résultats de la simulation numérique directe

Notre démarche est désormais la suivante (figure 4.16) : il s'agit de mesurer le **taux de croissance linéaire** σ fourni par la simulation numérique directe pour le comparer avec ω_i ou ω_i^∞ .

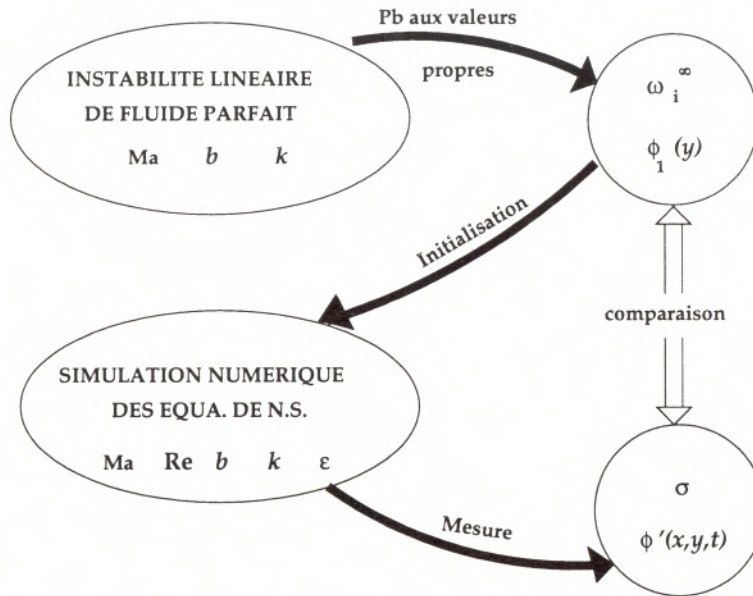


FIG. 4.16 - Illustration du principe et de l'objectif relatifs au §4.2

Pour un nombre de Mach Ma , un rapport de température b et un nombre d'onde k fixé, la résolution du problème aux valeurs propres permet de calculer d'une part le taux de croissance temporel ω_i^∞ correspondant. Il conduit d'autre part, à la détermination des fonctions propres $\{u_1(y), v_1(y), T_1(y), \rho_1(y), E_1(y)\}$ que l'on utilise comme conditions initiales (cf. (3.47)-(3.50)) dans la simulation numérique directe. De la simulation, effectuée pour les mêmes valeurs de Ma , b et k , à un nombre de Reynolds Re et pour un taux initial d'énergie ϵ fixés, on extrait le taux de croissance numérique σ ainsi que les grandeurs fluctuantes $\phi'(x, y, t)$ relatives à chaque fonction de champ que l'on compare respectivement au taux de croissance temporel ω_i^∞ et aux fonctions propres initiales $\phi_1(y)$.

La grandeur étudiée pour la mesure du taux de croissance σ est l'énergie fluctuante \mathcal{E} déjà définie en (3.71). Si la simulation numérique met en évidence un régime linéaire dans un certain intervalle de temps, les perturbations u' , v' , ρ' , E' doivent suivre une loi exponentielle avec un taux de croissance "mesuré" σ . L'énergie fluctuante doit être de la forme :

$$\mathcal{E}(t) = e^{2\sigma t} ,$$

soit

$$\frac{1}{2} \ln \mathcal{E} = \sigma t . \quad (4.4)$$

Le taux de croissance instantané $\Delta \mathcal{E}$ est alors indépendant de \mathcal{E} :

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\ln \mathcal{E}) \sim 2\sigma . \quad (4.5)$$

4.2.1 Couche de mélange compressible isotherme

L'écoulement de base est isotherme avec

$$b = 0 .$$

Les nombres de Mach Ma et de Reynolds Re sont tels que

$$Ma = 0,5 , \quad Re = 300 .$$

Ces valeurs correspondent à un cas de simulation étudié par Huang (1992). La valeur du nombre d'onde k varie à chaque simulation et balaie la plage des nombres d'onde linéairement instables (figure 4.2). L'amplitude initiale des perturbations ϵ est telle que

$$\epsilon = 0,01 .$$

On utilise un schéma Euler en temps (§3.2.2) et le schéma classique en espace. On dira, pour simplifier, qu'il s'agit de la discrétisation "Euler-classique". La boîte de calcul a pour dimensions

$$L_x = \frac{2\pi}{k} , \quad L_y = 12 .$$

La résolution est telle que

$$M_y = 241 , \quad \text{soit } \Delta y = 0,05 ,$$

et le nombre de points M_x est impair et tel que les pas d'espace Δx et Δy soient peu différents :

$$M_x \simeq \frac{2\pi}{k\Delta y} .$$

Enfin, le pas de temps est fixé à

$$\Delta t = 0,001 ,$$

ce qui satisfait le critère de stabilité (3.46) du schéma Euler-classique.

La figure 4.17 représente l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante obtenue à partir de ces simulations.

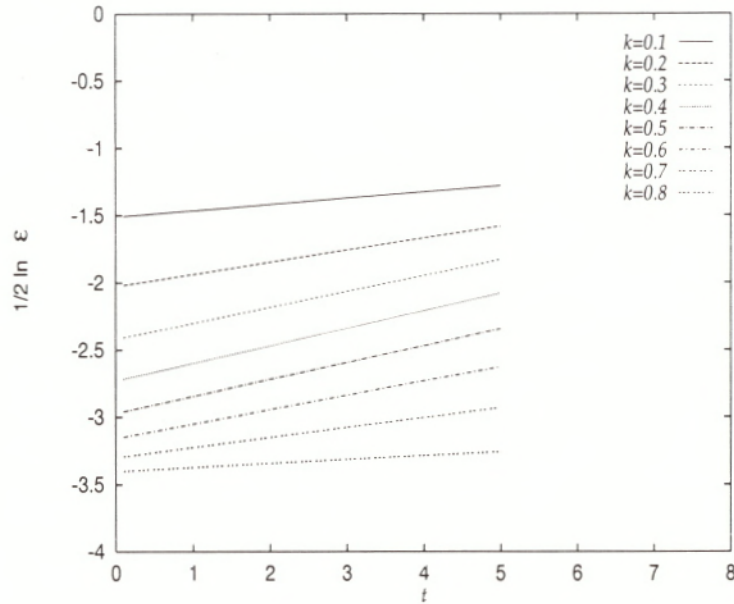


FIG. 4.17 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ pour divers nombres d'onde k dans la plage instable ; $Ma= 0,5$, $Re= 300$, $b = 0$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

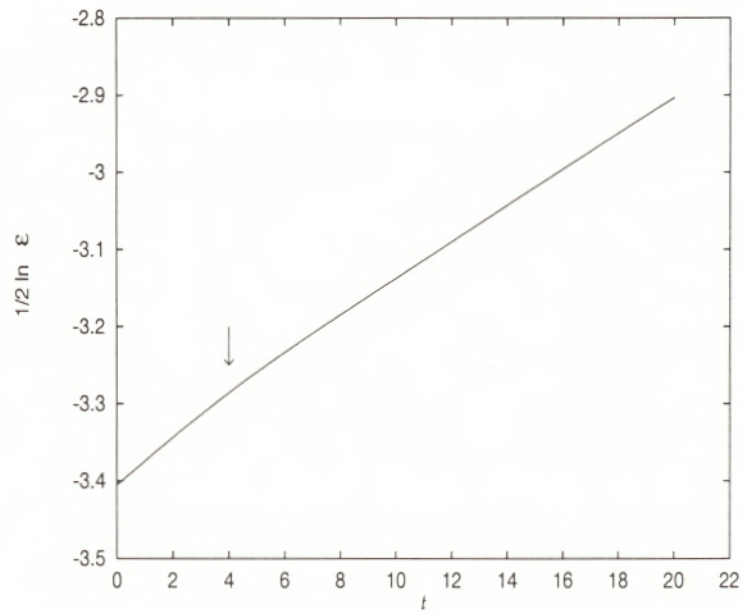


FIG. 4.18 - Évolution temporelle de \mathcal{E} ; $Ma= 0,5$, $Re=300$, $b = 0$, $k = 0,8$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

Comme le prévoit la théorie de stabilité linéaire, on obtient des droites (figure 4.17). Néanmoins, une simulation plus longue effectuée pour $k = 0,8$, c'est à dire près du nombre d'onde neutre k_n , met en évidence un changement de pente progressif (figure 4.18) dès l'instant $t = 4$ environ. Ceci est étonnant mais compré-

hensible. En effet, l'initialisation du calcul est faite avec les fonctions propres de fluide parfait. Comme explicité ci-dessous, il existe une phase transitoire durant laquelle la simulation corrige l'état initial pour prendre en compte les effets de viscosité.

Il est tout d'abord important de remarquer que le changement de pente sur la figure 4.18 ne peut pas être attribué à des effets non linéaires : on bascule, en effet, d'une droite à une autre droite et, de plus, pour ces temps faibles et ces valeurs de l'amplitude initiale ϵ , les harmoniques sont négligeables, comme on le vérifiera au §5.

Le tracé de $\Delta\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\ln \mathcal{E})$ en fonction de \mathcal{E} présenté sur la figure 4.19 corrobore cette interprétation. L'ordonnée à l'origine $2\sigma_0$ coïncide à $4 \cdot 10^{-3}$ près avec le taux de croissance $2\omega_i^\infty$ prévu par l'analyse d'instabilité linéaire en fluide parfait :

$$\sigma_0 = 0,031 ; \quad \omega_i^\infty = 0,035 .$$

Remarquons que le calcul de \mathcal{E} lors de la simulation n'est effectué que toutes les 100 itérations : la dérivée discrète (3.75) associée à $\frac{\partial}{\partial t}(\ln \mathcal{E})$ est donc moyennée en temps et l'ordonnée à l'origine correspond en fait à l'instant $t = 0,2$.

Démontrons maintenant que le taux de croissance σ_1 repéré par le changement de pente sur la figure 4.19 correspond au taux de croissance linéaire $\omega_i^{\text{Re}=300}$ prévu par la théorie d'instabilité linéaire visqueuse. En s'inspirant de l'analyse asymptotique de Djordjevic & Redekopp (1989), on peut exprimer le taux de croissance ω_i (cf. §5.1.2) au voisinage du nombre d'onde neutre k_n sous la forme :

$$\omega_i = \frac{2\Delta k s(\text{Ma}, b)}{\pi} , \quad (4.6)$$

où Δk représente l'écart au neutre :

$$\Delta k = k_n - k , \quad \omega_i(k_n) = 0 ,$$

et la fonction $s(\text{Ma}, b)$ est donnée en Annexe. En utilisant les figures 4.18, 4.19 et la relation (4.6), on obtient :

$$\sigma_1 = 0,024 ; \quad \omega_i^{\text{Re}=300} = 0,026 .$$

On constate que le taux de croissance "mesuré" σ_1 coïncide à $2 \cdot 10^{-3}$ près avec celui prévu par la théorie d'instabilité linéaire visqueuse $\omega_i^{\text{Re}=300}$. Pendant la phase transitoire, il y a donc décroissance progressive du σ "mesuré" et ceci est en accord avec Betchov & Szewczyk (1963) (figure 2.5) qui prévoit que $\omega_i^\infty > \omega_i^{\text{Re}=300}$.

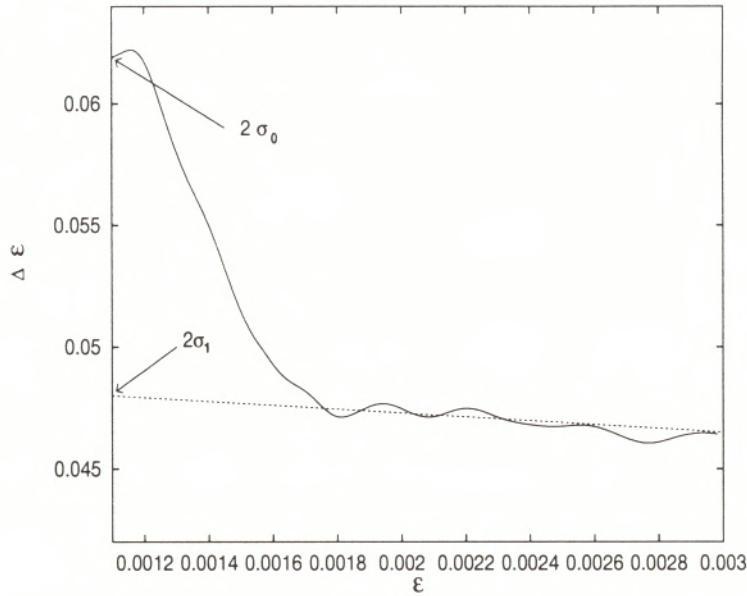


FIG. 4.19 - Taux de croissance instantané $\Delta\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\ln \mathcal{E})$ en fonction de \mathcal{E} ; $Ma=0,5$, $Re=300$, $b=0$, $k=0,8$, $\epsilon=0,01$; simulation numérique directe.

L'analyse qui suit compare **la forme et l'amplitude** des profils de grandeurs fluctuantes $\phi'(x, y, t)$ au cours du temps avec les fonctions propres initiales $\phi_1(y)$.

Rappelons qu'à l'instant initial,

$$\begin{aligned}\phi(x, y, 0) &= \phi_0(y) + \phi'(x, y, 0) \\ &= \phi_0(y) + \epsilon Re \phi'_1(x, y, 0) \\ &= \phi_0(y) + \epsilon(\{Re \phi_1\} \cos(kx) - \{Im \phi_1\} \sin(kx)) .\end{aligned}$$

Comme les profils de base sont maintenus parallèles (cf. §2.1), on a :

$$\bar{\phi}(y) \sim \phi_0(y), \text{ soit, } \phi'(x, y, t) \sim \phi(x, y, t) - \phi_0(y) ,$$

ou encore,

$$\phi'(x, y, t) \sim \epsilon(\{Re \phi_1\} \cos(kx) - \{Im \phi_1\} \sin(kx)) e^{\sigma t} .$$

Ainsi,

$$\phi'(L_x/2, y, t) \sim -\epsilon Re \phi_1(y) e^{\sigma t} .$$

En se plaçant en $x = L_x/2$, on peut donc comparer **la forme** des profils de u' , v' , ρ' et E' définis en (3.62) aux fonctions propres u_1 , v_1 , ρ_1 et E_1 ³. Afin de superposer les profils de ϕ' et ϕ_1 , on choisit la normalisation qui rend leur maxima égaux à 1 en valeur absolue. C'est pourquoi on compare les grandeurs :

$$\Delta' = \frac{\phi'(x = L_x/2, y, t)}{[\phi'(x = L_x/2, y, t)]_{max}} , \quad (4.7)$$

³On aurait pu se placer en $x = L_x/4$, afin d'annuler le cosinus et de rendre le sinus égal à 1. On aurait alors comparé les grandeurs fluctuantes résultantes aux parties imaginaires des fonctions propres.

aux valeurs

$$\Delta_1 = \frac{Re \phi_1(y)}{[Re \phi_1(y)]_{max}} . \quad (4.8)$$

Pour les fonctions de champs vitesse, énergie totale et masse volumique, on a représenté Δ' et Δ_1 en fonction de y sur les figures 4.20 à 4.23.

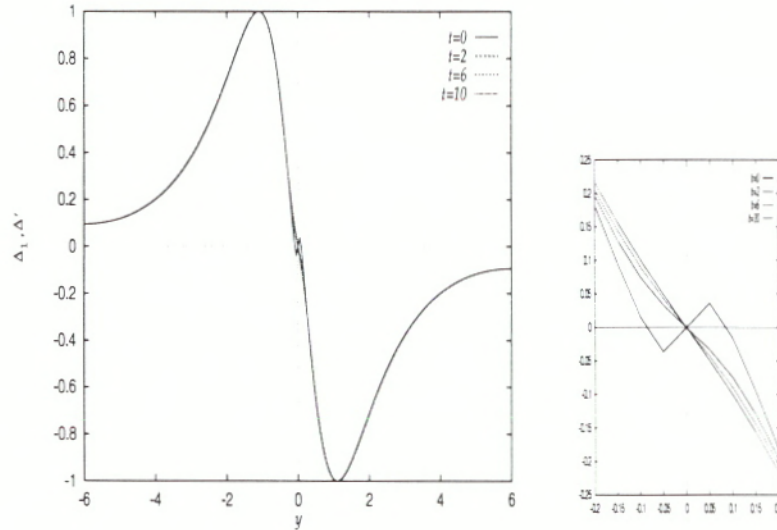


FIG. 4.20 - Δ_1 et Δ' en fonction de y pour divers instants t , vitesse longitudinale u' ; $Ma= 0,5$, $Re= 300$, $b = 0$, $k = 0,8$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe. Le cadre de droite est un "zoom" du voisinage de l'origine.

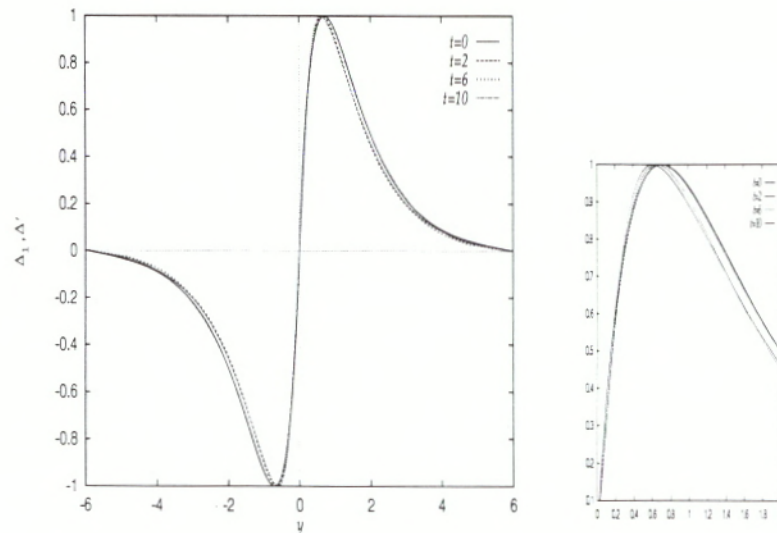


FIG. 4.21 - Δ_1 et Δ' en fonction de y pour divers instants t , vitesse transversale v' ; $Ma= 0,5$, $Re= 300$, $b = 0$, $k = 0,8$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe. Le cadre de droite est un "zoom" du voisinage du maximum.

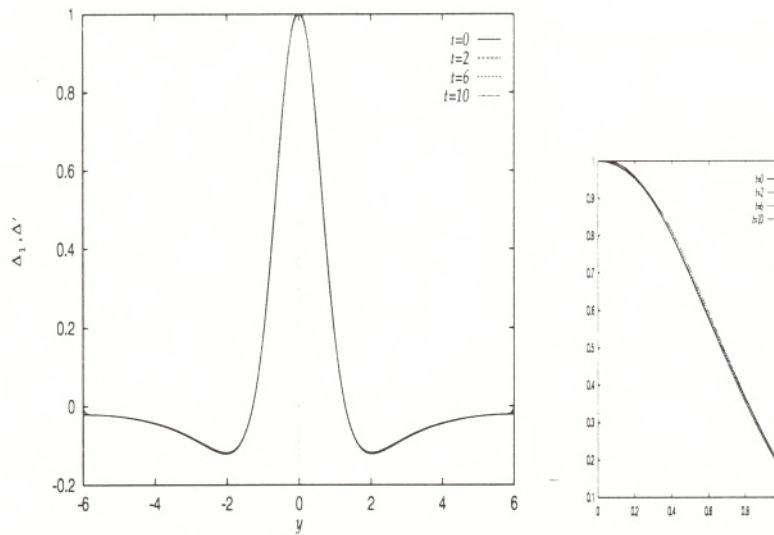


FIG. 4.22 - Δ_1 et Δ' en fonction de y pour divers instants t , énergie totale E' ; $Ma=0,5$, $Re=300$, $b=0$, $k=0,8$, $\epsilon=0,01$; simulation numérique directe. Le cadre de droite est un "zoom" du voisinage du maximum.

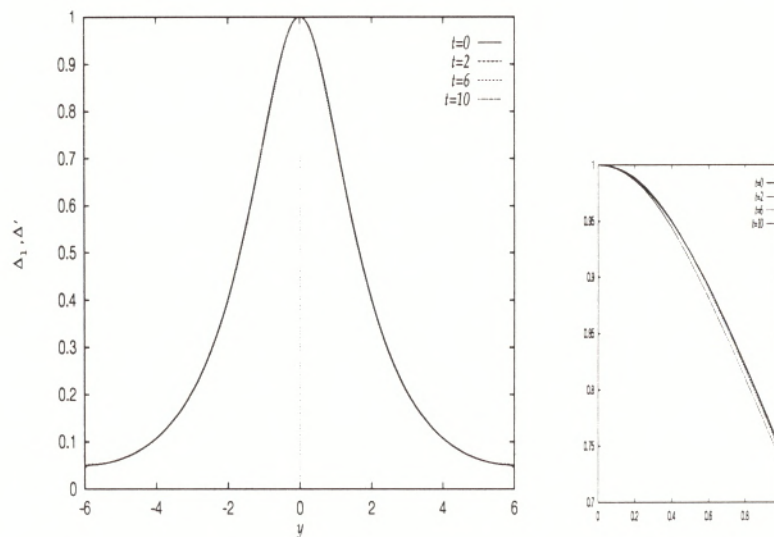


FIG. 4.23 - Δ_1 et Δ' en fonction de y pour divers instants t , masse volumique ρ' ; $Ma=0,5$, $Re=300$, $b=0$, $k=0,8$, $\epsilon=0,01$; simulation numérique directe. Le cadre de droite est un "zoom" du voisinage du maximum.

L'oscillation de $u'(L_x/2, y, t)$ au voisinage de $y=0$ est progressivement lissée au cours du temps (zoom de la figure 4.20) et, de même, les grandeurs fluctuantes $v'(L_x/2, y, t)$, $E'(L_x/2, y, t)$ et $\rho'(L_x/2, y, t)$ subissent de très légères modifications (zoom des figures 4.21, 4.22 et 4.23). Ce phénomène est probablement dû à la diffusion visqueuse et à l'ajustement de la fonction propre initiale pour un fluide parfait à celle qui prévaut pour un fluide visqueux.

Le développement en **amplitude** des grandeurs fluctuantes a été étudié entre

les instants

- $t_0 = 0$ (initialisation non visqueuse) et $t_1 = 14$ (fin de la phase transitoire)
- $t_1 = 14$ et $t_2 = 18$ (phase linéaire visqueuse),

par le calcul des facteurs d'amplification

$$\epsilon e^{\sigma(t_1-t_0)} \simeq \frac{[\phi'(L_x/2, y, t_1)]_{max}}{[Re \phi_1(y)]_{max}}, \quad (4.9)$$

$$e^{\sigma(t_2-t_1)} \simeq \frac{[\phi'(L_x/2, y, t_2)]_{max}}{[\phi'(L_x/2, y, t_1)]_{max}}, \quad (4.10)$$

qui sont donnés dans le tableau 4.3.

	$\phi = u$	$\phi = v$	$\phi = E$	$\phi = \rho$	écart relatif moyen
$\epsilon e^{\sigma(t_1-t_0)}$	$1,51 \cdot 10^{-2}$	$1,17 \cdot 10^{-2}$	$1,45 \cdot 10^{-2}$	$1,54 \cdot 10^{-2}$	20%
$e^{\sigma(t_2-t_1)}$	1,0474	1,0476	1,0473	1,0475	0,02%

Tab 4.3 - Croissance exponentielle des grandeurs fluctuantes u' , v' , E' et ρ' .

Il apparaît que, durant la première phase, de t_0 à t_1 , les coefficients d'une même ligne diffèrent entre eux avec une différence relative moyenne de l'ordre de 20% environ : pendant la phase de correction visqueuse où le taux de croissance "mesuré" passe de σ_0 à σ_1 , les profils des grandeurs fluctuantes s'ajustent également. De t_1 à t_2 , la différence relative moyenne est seulement de 0,02%. Dans cette phase de croissance linéaire visqueuse, toutes les grandeurs fluctuantes maintiennent leur poids respectif.

Notons que la phase transitoire existe pour tous les nombres d'onde instables k mais qu'elle n'est remarquable que dans le cas "difficile" d'une simulation effectuée pour k proche de k_n : les échelles de temps caractéristiques sont alors très longues puisque les taux de croissance linéaires sont très faibles.

Sur la figure 4.24, on compare les valeurs des taux de croissance linéaires σ extraits de la figure 4.17, pour $0,1 < k < 0,7$, et de la figure 4.18 pour $k = 0,8$, aux taux de croissance ω_i^∞ issus de l'analyse de stabilité linéaire en fluide parfait (cf. figure 4.2). Précisons que les valeurs de σ sont toujours obtenues par une mesure de pente effectuée à la main. Pour $0,1 < k < 0,7$, les pentes sont mesurées sur la figure 4.17 entre les instants $t = 0$ et $t = 5$. Pour $k = 0,8$ on a utilisé, en revanche, la simulation plus longue de la figure 4.18 entre $t = 14$ et $t = 18$. Notons que les valeurs de σ sont toujours inférieures à celles de ω_i^∞ qui correspondent. Ce résultat n'est pas surprenant : les effets visqueux sont stabilisants comme l'indiquent, par exemple, les courbes de stabilité en fluide visqueux obtenues par Betchov & Szewczyk (1963) et Huang (1992).

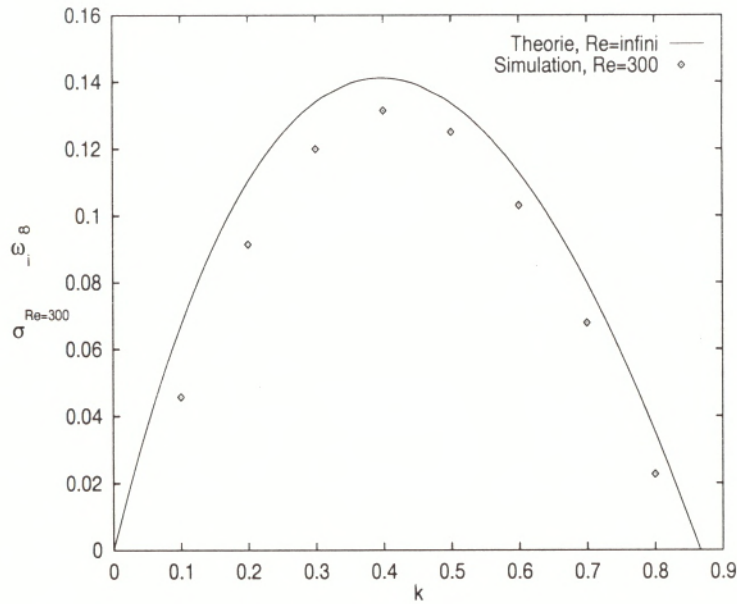


FIG. 4.24 - Taux de croissance temporels ω_i^∞ (trait continu) et $\sigma^{Re=300}$ (losanges) en fonction du nombre d'onde k ; $Ma = 0,5$, $b = 0$; instabilité de fluide parfait et simulation numérique directe.

Enfin, lorsque l'on fait tendre la valeur du nombre de Reynolds vers l'infini, en prenant soin d'ajuster la résolution et le pas de temps, le taux de croissance σ tend asymptotiquement vers la valeur théorique ω_i^∞ en fluide parfait (figure 4.25).

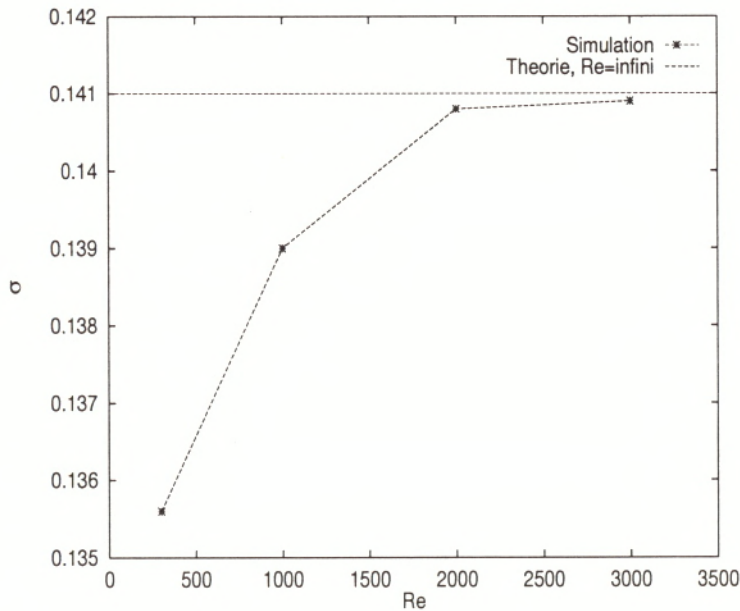


FIG. 4.25 - Taux de croissance σ en fonction du nombre de Reynolds Re ; $Ma=0,5$, $k = 0,397$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

4.2.2 Couche de mélange compressible

L'écoulement de base est étudié pour trois valeurs différentes du rapport de température :

$$b = -0,95 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad b = 5 \quad ,$$

qui correspondent aux cas traités au §4.1.3. Le nombre de Mach Ma est tel que

$$Ma = 0,5 \quad .$$

Comme du point de vue des instabilités de fluide parfait, l'effet de b n'est remarquable que près de k_{max} (figure 4.12), nous avons d'abord choisi, pour la comparaison avec les résultats du §4.1.3, de mesurer σ pour une grande valeur du nombre de Reynolds et pour un nombre d'onde k proche de k_{max} :

$$Re = 300 \quad , \quad k = 0,4 \quad . \quad (4.11)$$

Afin de comparer les valeurs de ω_i et σ près du neutre en utilisant, comme au §4.2.1, l'expression (4.6), nous avons également choisi d'effectuer trois autres simulations avec

$$Re = 50 \quad , \quad k = 0,6 \quad . \quad (4.12)$$

Enfin, dans tous les cas, l'amplitude initiale des perturbations vaut

$$\epsilon = 0,01 \quad .$$

Comme au §4.2.1, on utilise le schéma Euler-classique pour une boîte de calcul de dimensions

$$L_x = \frac{2\pi}{k} \quad , \quad L_y = 12 \quad ,$$

avec une résolution de

$$M_x = 157 \quad , \quad M_y = 121 \quad , \quad \text{pour } Re = 300 \quad ,$$

$$M_x = 105 \quad , \quad M_y = 121 \quad , \quad \text{pour } Re = 50 \quad ,$$

afin de vérifier

$$\Delta x \simeq \Delta y = 0,1 \quad .$$

Enfin, pour le respect du critère de stabilité (3.46), le pas de temps est fixé à

$$\Delta t = 0,001 \quad \text{pour } Re = 300 \quad ,$$

$$\Delta t = 0,002 \quad \text{pour } Re = 50 \quad .$$

Les figures 4.26 et 4.27 représentent l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ obtenue. Pour bien mettre en évidence les différences de taux de croissance linéaire σ , on a translaté les niveaux d'énergie initiaux des cas $b = -0,95$ et $b = 5$ pour qu'ils coïncident au niveau du cas $b = 0$.

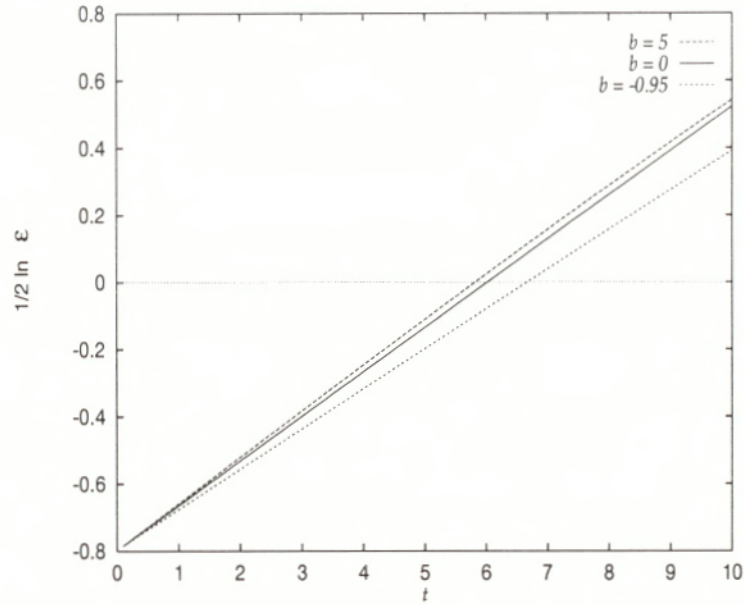


FIG. 4.26 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ pour trois valeurs du rapport de température b ; $Ma=0,5$, $Re=300$, $k=0,4$, $\epsilon=0,01$ pour le cas $b=0$; simulation numérique directe.

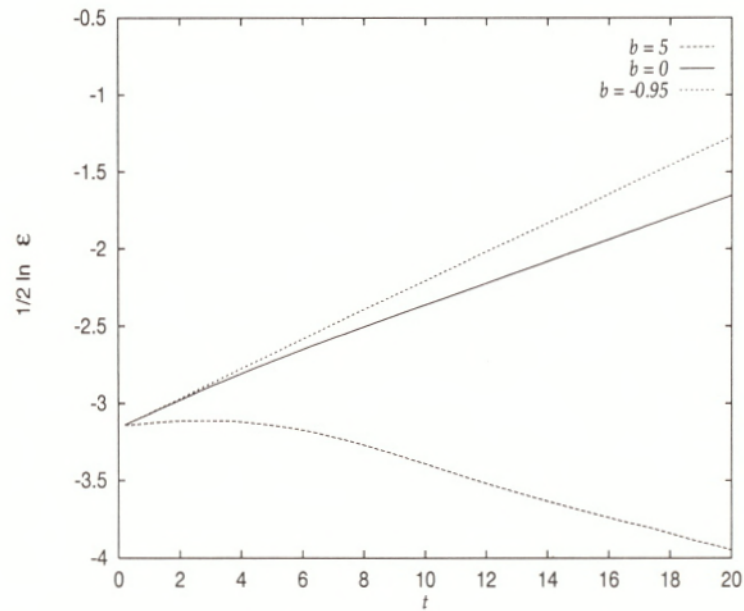


FIG. 4.27 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ pour trois valeurs du rapport de température b ; $Ma=0,5$, $Re=50$, $k=0,6$, $\epsilon=0,01$ pour le cas $b=0$; simulation numérique directe.

On constate sur la figure 4.26 que, pour $Re=300$ et $k=0,4 \simeq k_{max}$,

$$\sigma^{b=-0,95} < \sigma^{b=0} < \sigma^{b=5} . \quad (4.13)$$

Ce résultat est en accord avec la théorie de l'instabilité linéaire (figure 4.12). Les valeurs des taux de croissance ω_i^∞ et $\sigma^{\text{Re}=300}$ ainsi que les écarts relatifs $e = (\omega_i^\infty - \sigma^{\text{Re}=300})/\omega_i^\infty$ sont précisés dans le tableau 4.4

b	-0,95	0	5
ω_i^∞	0,130	0,141	0,146
$\sigma^{\text{Re}=300}$	0,119	0,130	0,142
e	8,5%	7,8%	2,7%

Tab 4.4 - Taux de croissance ω_i^∞ et $\sigma^{\text{Re}=300}$ dans les cas isotherme ($b = 0$), refroidi ($b = -0,95$) et réchauffé ($b = 5$).

On observe que l'écart relatif e diminue lorsque b augmente. Il semble que, à nombre de Reynolds fini, la couche de mélange est moins dissipative lorsque b augmente. Néanmoins, il faut se demander si les paramètres numériques ont une influence sur la valeur de σ . C'est pourquoi une étude sera faite au §4.2.3.

Les résultats obtenus (figure 4.27) au voisinage du nombre d'onde neutre du cas isotherme montrent que

$$\sigma^{b=5} < \sigma^{b=0} < \sigma^{b=-0,95} . \quad (4.14)$$

Ce comportement est opposé à celui obtenu près du nombre d'onde d'amplification maximale (4.13). Afin d'établir une comparaison quantitative (tableau 4.5), comme au §4.2.1, nous avons utilisé l'expression théorique (4.6) de ω_i .

b	-0,95	0	5
$\omega_i^{\text{Re}=50}$	0,133	0,083	-0,314
$\sigma^{\text{Re}=50}$	0,097	0,051	-0,055
e	27,5%	38,9%	82,4%

Tab 4.5 - Taux de croissance $\omega_i^{\text{Re}=50}$ et $\sigma^{\text{Re}=50}$ dans les cas isotherme ($b = 0$), refroidi ($b = -0,95$) et réchauffé ($b = 5$).

Il apparaît que le comportement (4.14) est aussi vérifié par $\omega_i^{\text{Re}=50}$. De ce fait, on peut penser que l'on se trouve dans un cas de régime qui entre dans le cadre de l'étude de Djordjevic & Redekopp (1989). Du point de vue qualitatif, on peut dire que ces résultats sont satisfaisants. D'autre part, l'écart relatif est plus grand que dans le cas précédent à $\text{Re}=300$; cela semble compréhensible car nous sommes ici dans un cas "difficile" (près du neutre). Enfin, l'écart relatif augmente lorsque b augmente probablement en raison d'une résolution insuffisante. Comme pour le cas précédent à $\text{Re} = 300$ et $k = 0,4$, on peut se demander si une meilleure résolution, ou des schémas de discrétisation plus précis, ou un pas de temps plus petit ne diminueraient pas les écarts relatifs. La partie §4.2.4 répond à cette question.

4.2.3 Évaluation numérique du nombre d'onde neutre

L'écart au neutre Δk défini par (3.59) est un paramètre important dont dépend le taux de croissance linéaire ω_i . Son équivalent numérique Δk_{num} est repéré par rapport au nombre d'onde neutre k_{num} défini en (3.78). Ce dernier peut être évalué de la manière exposée ci-dessous.

Prenons, par exemple, le cas :

$$Ma = 0,5 , \quad Re = 50 , \quad b = 0,$$

pour lequel une série de simulations a été réalisée avec

$$M_x = 91 , \quad M_y = 121 , \quad L_x = 2\pi/k , \quad L_y = 12 , \quad \Delta x \simeq \Delta y = 0,1 , \quad \Delta t = 0,002 ,$$

pour différents nombres d'onde k proches de la valeur théorique du nombre d'onde neutre k_n . Pour chaque simulation à k fixé, on a mesuré le taux de croissance σ qu'on a représenté sur la figure 4.28 en fonction de k .

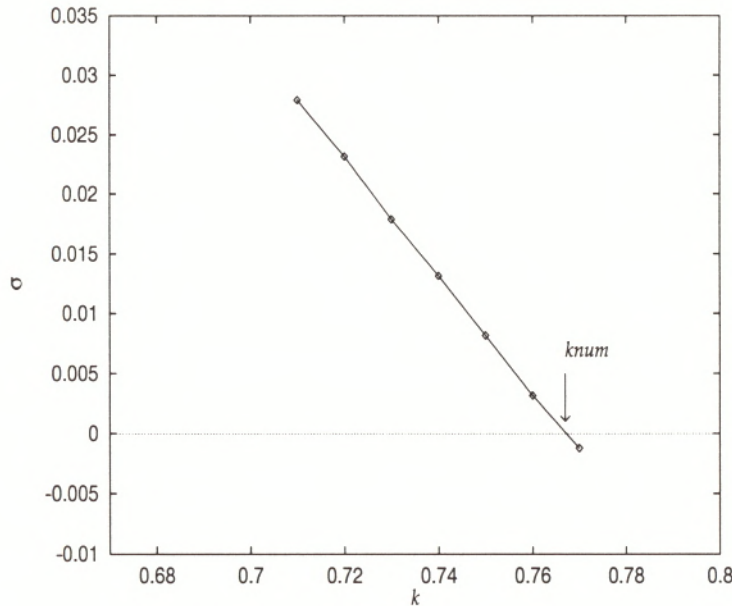


FIG. 4.28 - Taux de croissance linéaire σ en fonction du nombre d'onde k ; $Ma=0,5$, $Re=50$, $b = 0$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

On remarque que, conformément à la théorie (§2.3), $\sigma(k)$, pour k proche de k_n , est une droite. Le nombre d'onde neutre numérique k_{num} est le point de la figure 4.28 tel que $\sigma(k_{num}) = 0$:

$$k_{num} = 0,767 , \quad k_n = 0,746 .$$

Cette technique a permis d'évaluer les nombres d'onde neutres numériques pour différents nombres de Reynolds.

4.2.4 Influence des paramètres numériques sur le taux de croissance linéaire effectif

On peut se demander dans quelle mesure la discrétisation agit sur les valeurs du taux de croissance linéaire σ et, par conséquent, sur les valeurs des nombres d'onde neutre numériques k_{num} . Afin de répondre à cette question, on a d'abord évalué les deux types de **discrétisation spatiale**, classique et hybride, décrits au chapitre 3 pour deux simulations à

$$\text{Ma} = 0,5, \quad b = 0, \quad \text{Re} = 300,$$

l'une proche du nombre d'onde d'amplification maximale, $k = 0,4$, et l'autre près du neutre à $k = 0,7$. De même, on a comparé, pour ces mêmes paramètres, les deux **schémas temporels**, Euler, d'ordre 1 et Adams-Bashforth, d'ordre 2.

Pour ces simulations les paramètres numériques suivants sont retenus :

$$L_x = \frac{2\pi}{k}, \quad L_y = 12,$$

$$M_x = 157, \quad M_y = 121 \quad \text{pour } k = 0,4,$$

$$M_x = 91, \quad M_y = 121 \quad \text{pour } k = 0,7,$$

$$\Delta x \simeq \Delta y = 0,1,$$

$$\Delta t = 0,001.$$

La figure 4.29 donne l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante pour les cas Euler-classique, Adams-Bashforth-classique et Euler-hybride. Les droites Euler-classique et Adams-Bashforth-classique sont confondues dans les deux cas, $k = 0,4$ et $k = 0,7$. Ainsi, le taux de croissance σ est indépendant du schéma temporel, que le mode fondamental ait un taux de croissance élevé ou faible. En revanche, la valeur de la pente de la droite Euler-hybride est supérieure à celle de la droite Euler-classique avec une différence de pente plus faible pour $k = 0,4$ que pour $k = 0,7$. Rappelons que, dans tous les cas de simulations avec le schéma classique décrits auparavant (§4.2.1 et §4.2.2), les valeurs de σ sont toujours inférieures en valeur absolue à celles de ω_i . Aussi, ce résultat montre-t-il que le taux de croissance σ est plus proche de la valeur théorique ω_i lorsque l'on utilise un schéma plus précis de type hybride. De plus, il est satisfaisant de constater que la correction est plus grande là où les résultats sont les plus éloignés des valeurs théoriques (tableaux 4.4 et 4.5), c'est à dire près du neutre!

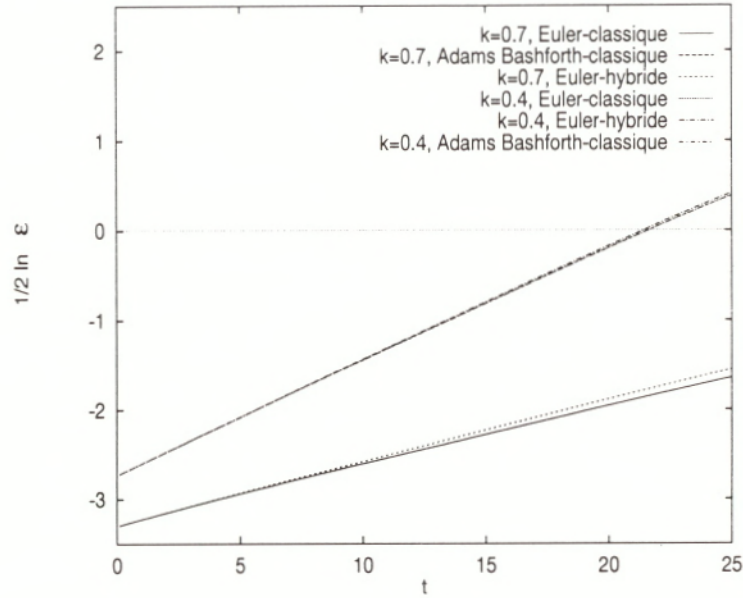


FIG. 4.29 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$; $Ma=0,5$, $Re=300$, $b=0$, $\epsilon=0,01$; simulation numérique directe.

L'influence de la **résolution spatiale** est étudiée pour le cas

$$Ma = 0,5, \quad b = 0, \quad Re = 50, \quad k = 0,6,$$

Le schéma de discrétisation est le schéma Adams-Bashforth-classique avec

$$L_x = \frac{2\pi}{k} \leq 10,47, \quad L_y = 12,$$

pour lequel on propose trois résolutions différentes :

$$M_x = 53, \quad M_y = 61, \quad \Delta x \leq \Delta y = 0,2,$$

$$M_x = 105, \quad M_y = 121, \quad \Delta x \leq \Delta y = 0,1,$$

$$M_x = 211, \quad M_y = 241, \quad \Delta x \leq \Delta y = 0,05,$$

avec dans tous les cas :

$$\Delta t = 0,002.$$

La figure 4.30 représente l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante obtenue pour les trois simulations.

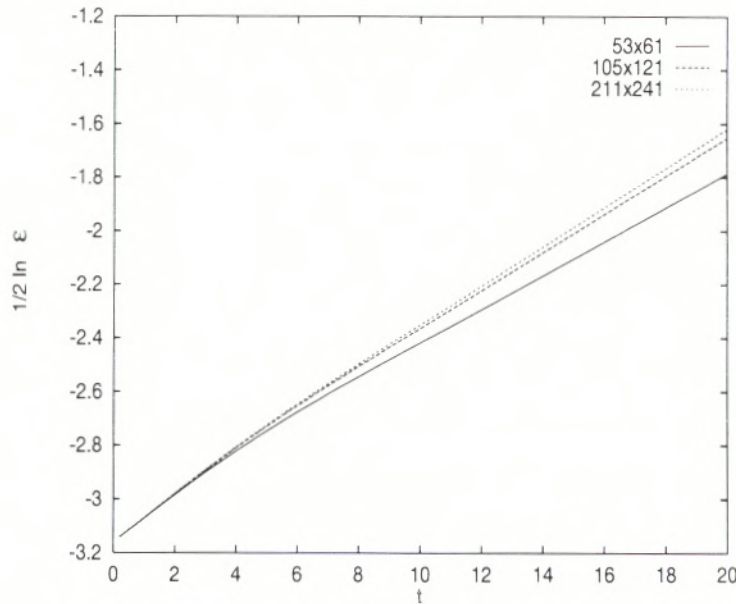


FIG. 4.30 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$; $Ma=0,5$, $Re=50$, $\epsilon=0,01$; simulation numérique directe.

On constate sur la figure 4.30 que le taux de croissance augmente lorsque la résolution augmente pour tendre vers une valeur asymptotique.

Enfin, on a vérifié que les effets de la variation de **hauteur de boîte** L_y et du **pas de temps** Δt sont négligeables sur la valeur de σ .

On peut conclure que les paramètres numériques ont une légère influence sur la valeur du taux de croissance σ . Un schéma spatial plus précis de type hybride rend l'écart entre σ et ω_i plus faible mais nécessite des temps de calcul plus longs. Bien que le schéma en temps ne modifie pas les valeurs de σ , on peut imaginer qu'il influencera l'évolution non linéaire ultérieure. C'est pourquoi, afin d'établir un bon compromis entre la précision des résultats et les temps de calcul, on a choisi, pour les simulations du §5 dans le régime non linéaire, d'utiliser le schéma Adams-Bashforth-classique.

4.2.5 Influence de la force volumique "anti-diffusive"

Au chapitre 2 a été introduite la notion de **force volumique anti-diffusive** dont la fonction est de maintenir le parallélisme de l'écoulement. La figure 4.31 illustre tout à fait la nécessité de cette technique si l'on désire être compatible avec les hypothèses de la théorie d'instabilité. On peut voir (tous les paramètres sont identiques à ceux du §4.2.1 avec $k=0,7$ et $Re=50$) que l'énergie fluctuante dans le cas non parallèle s'écarte progressivement de son homologue dans le cas parallèle. La figure 4.32 explique ce phénomène : l'effet de la diffusion a pour conséquence l'augmentation progressive de l'épaisseur de la couche de mélange. De ce fait, il est stabilisant. À chaque instant, le profil de base se modifie et la courbe d'amplification qui lui est relative se modifie : la plage des nombres d'onde instables

se rétrécit et le taux de croissance maximum décroît. Ainsi, au cours du temps t , le taux de croissance linéaire σ diminue progressivement jusqu'au temps t^* où le taux de croissance devient nul, pour ensuite devenir négatif. C'est pourquoi l'énergie fluctuante change de branche linéaire successivement au cours du temps.

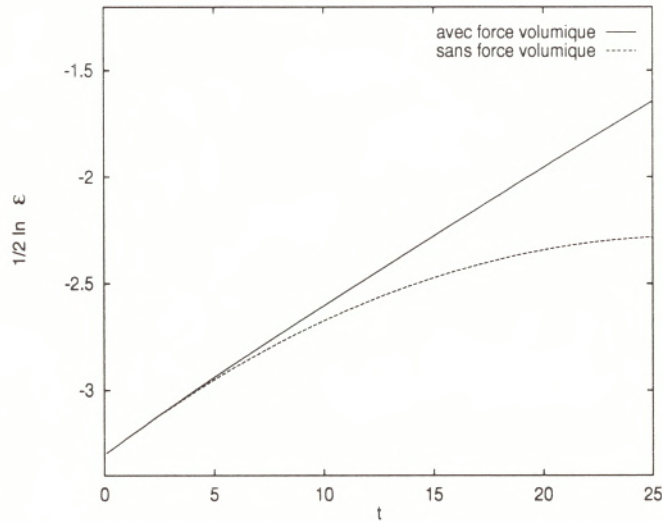


FIG. 4.31 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ dans les cas de profil de base diffusif (sans force volumique) et non diffusif (avec force volumique) ; $Ma= 0,5$, $Re= 50$, $b = 0$, $k = 0,7$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

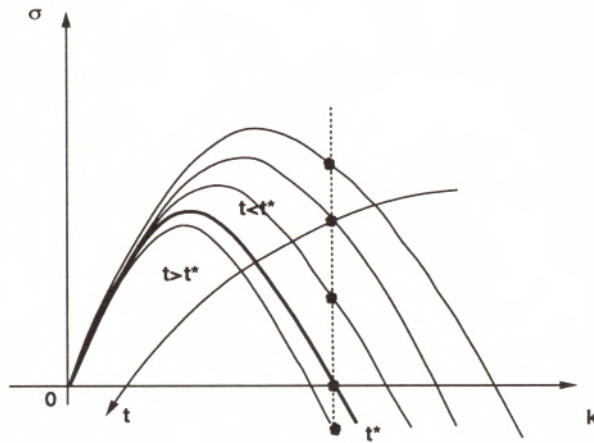


FIG. 4.32 - Illustration de l'évolution du taux de croissance linéaire d'une couche de mélange dont les profils de base diffusent au cours du temps (pas de force volumique anti-diffusive dans les équations de quantité de mouvement et d'énergie).

Ici se termine l'analyse du régime linéaire de l'évolution de la couche de mélange. La simulation est fidèle à la théorie de stabilité. Sans cette vérification, il n'aurait pas été légitime de poursuivre notre étude non-linéaire.

Chapitre 5

ÉVOLUTION NON-LINÉAIRE DES ONDES D'INSTABILITÉ

Ce chapitre décrit et analyse les résultats de simulation numérique directe relatifs à l'évolution non linéaire des ondes d'instabilités dans une couche de mélange temporelle dont l'état de base a été défini au chapitre 2 par (2.10)-(2.14).

La première partie (§5.1) concerne la couche de mélange compressible isotherme. La seconde partie (§5.2) analyse les résultats relatifs à la couche de mélange compressible refroidie.

Excepté pour les cas précisés, les simulations décrites dans ce chapitre sont effectuées à l'aide de la discrétisation Adams-Bashforth-classique pour les raisons indiquées au §4.2.4.

5.1 Couche de mélange isotherme

Les simulations décrites dans ce paragraphe ont pour but de confronter les résultats numériques avec ceux de la théorie faiblement non linéaire (cf §2.3). Plus précisément, il s'agit de vérifier si la non-linéarité induit une bifurcation supercritique comme le prévoit la théorie, dans le cas des modes proches du nombre d'onde neutre. Autrement dit, l'énergie fluctuante (3.71) vérifie-t-elle l'équation de Landau (cf §2.3) :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \sigma \mathcal{E} + L |\mathcal{E}|^2, \quad (5.1)$$

où la constante de Landau L est **négative**?

Pour un cas à

$$Ma = 0,7, \quad Re = 50, \quad b = 0, \quad k = 0,7, \quad \epsilon = 0,01, \quad (5.2)$$

et avec les paramètres numériques

$$L_x = \frac{2\pi}{k} \simeq 8,97, \quad L_y = 12, \quad (5.3)$$

$$M_x = 91, \quad M_y = 121, \quad \Delta x \simeq \Delta y = 0,1, \quad \Delta t = 0,002, \quad (5.4)$$

on a représenté sur la figure 5.1 l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante \mathcal{E} . On constate que le mode prépondérant croît d'abord de façon exponentielle puis sature dès l'instant $t \simeq 60$ sous l'effet de la non-linéarité. Remarquons que, d'après la formule (3.58), pour le cas paramétrisé par (5.2),

$$k_{num} = 0,767.$$

L'écart au neutre Δk_{num} défini en (3.79) vaut alors :

$$\Delta k = 6,7 \cdot 10^{-2},$$

ce qui est une valeur relativement faible devant la plage théorique des nombres d'ondes instables [$0 < k < 0,767$]. Afin de caractériser l'écoulement, on a également tracé sur la figure 5.1 les lignes d'isovorticité totale (cf. (3.70) pendant la phase de croissance ($t = 40$) et après la saturation ($t = 160$). La forme du tourbillon à l'instant $t = 160$ rappelle les images données par Kelvin (1880) et appelées "les

yeux de chats" (cat's eyes). Les photographies de Roberts *et al* (1982) présentées sur la figure 5.2 sont une illustration frappante de ce phénomène.

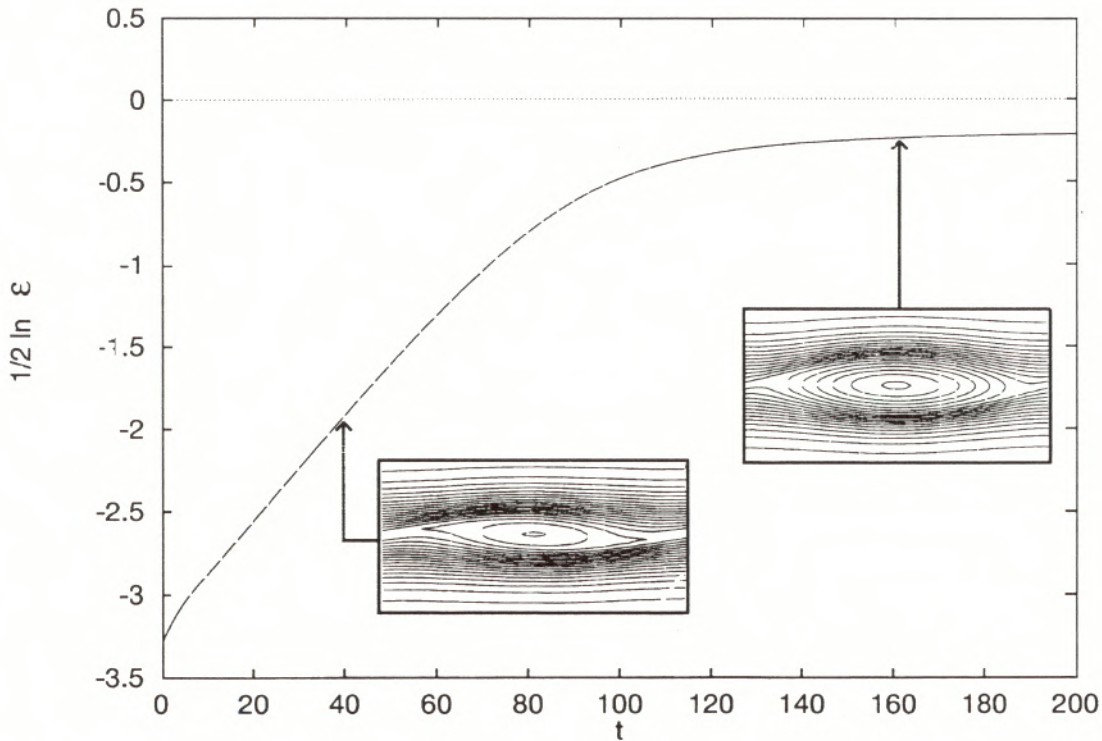


FIG. 5.1 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ et lignes d'isovorticité aux instants $t = 40$ et $t = 160$; $Ma = 0,5$, $Re = 50$, $b = 0$, $k = 0,7$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.



FIG. 5.2 - Enroulement de tourbillons - Instabilités de Kelvin-Helmholtz; Photographie de Roberts *et al* (1982).

Le comportement de l'énergie fluctuante de la figure 5.1 est d'ailleurs davantage mis en évidence sur la figure 5.3 où est représenté le taux de croissance instantané $\Delta \mathcal{E}$ en fonction de \mathcal{E} . En effet, en s'inspirant des travaux de Huang (1992), on extrait de (5.1) l'égalité :

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 2\sigma + 2L\mathcal{E} . \quad (5.5)$$

Dans cette représentation, le modèle de Landau doit donc se manifester par une variation linéaire de $\Delta \mathcal{E}$ en fonction de \mathcal{E} , avec une pente négative. D'après la figure 5.3, on constate bien que, au-delà de la phase transitoire due à l'adaptation

visqueuse (cf §4.2.1), l'évolution de type Landau est confirmée: on obtient une droite de pente $2L$. De façon générale, le graphe donnant $\Delta\mathcal{E}$ en fonction de \mathcal{E} permet donc la mesure des trois grandeurs caractéristiques du régime faiblement non linéaire (figure 5.3):

- le taux de croissance initial σ_0 ,
- le taux de croissance visqueux $\sigma^{(Re)}$,
- la constante de Landau L .

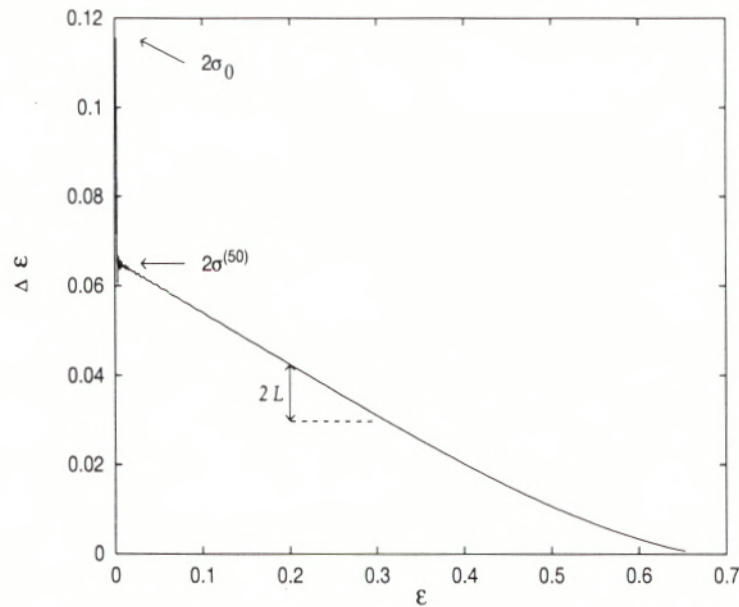


FIG. 5.3 - Taux de croissance instantané $\Delta\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\ln \mathcal{E})$ en fonction de \mathcal{E} ; $Ma=0,5$, $Re=50$, $b=0$, $k=0,7$, $\epsilon=0,01$; simulation numérique directe.

Vérifions que le modèle de Landau (5.1) est bien pertinent quelle que soit l'amplitude initiale d'énergie ϵ : le niveau d'énergie saturée est-il un point fixe de l'écoulement dans l'espace des phases?

Les figures 5.4 et 5.5 représentent respectivement l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante et son taux de croissance instantané $\Delta\mathcal{E}$ en fonction de \mathcal{E} pour trois simulations paramétrées par (5.2)-(5.4) de différentes amplitudes initiales de perturbation:

$$\epsilon = 0,01, \quad \epsilon = 0,05, \quad \epsilon = 0,1.$$

On observe sur la figure 5.4 que, quelle que soit la valeur de ϵ , l'énergie évolue vers un même niveau de saturation $\mathcal{E}(\infty)$. L'existence d'oscillations sur les courbes de la figure 5.5 lorsque $\epsilon = 0,05$ et $\epsilon = 0,01$ provient de la rapidité avec laquelle le niveau de saturation est atteint dans ces deux cas. Néanmoins, les trois courbes $\Delta\mathcal{E}(\mathcal{E})$ présentent une variation linéaire en moyenne, de même pente $2L$. Ce résultat atteste que l'on est en présence d'un point fixe, conformément aux prévisions du modèle de Landau.

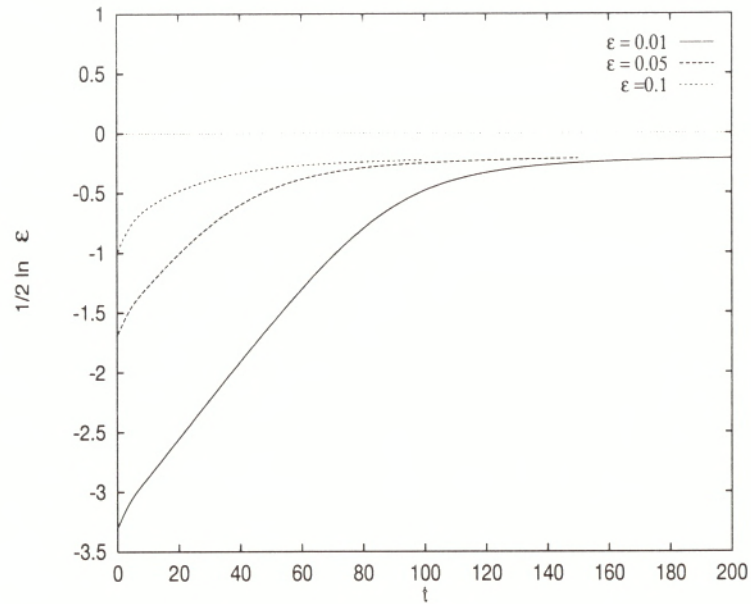


FIG. 5.4 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ pour diverses valeurs de l'amplitude initiale de perturbation ϵ ; $Ma= 0,5$, $Re= 50$, $b = 0$, $k = 0,7$; simulation numérique directe.

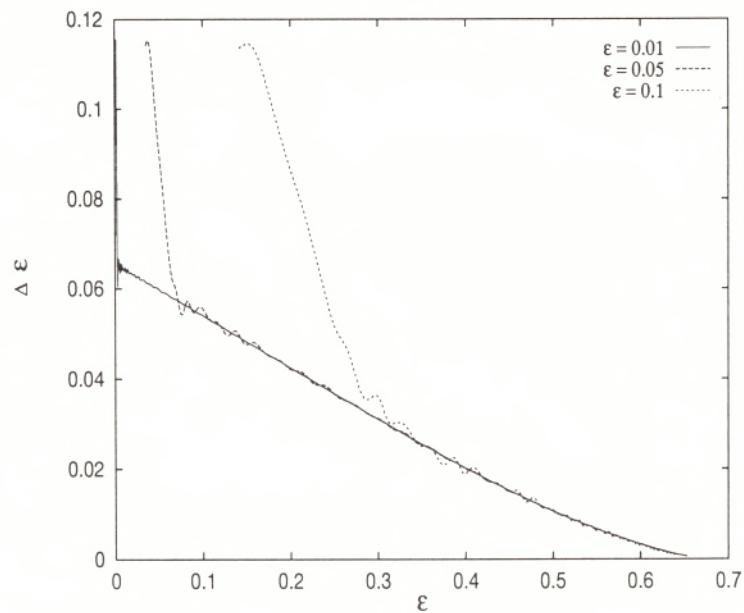


FIG. 5.5 - Taux de croissance instantané $\Delta \mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\ln \mathcal{E})$ en fonction de \mathcal{E} pour diverses valeurs du niveau initial de perturbation ϵ ; $Ma= 0,5$, $Re= 50$, $b = 0$, $k = 0,7$; simulation numérique directe.

5.1.1 Analyse modale

L'étude précédente concernait l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante définie par la relation (3.71) en tenant compte de tous les nombres d'onde. Notons que l'énergie fluctuante ne donne pas d'information sur la **déformation de l'écoulement moyen** induite par la tension de Reynolds (différence entre écoulement moyen et écoulement de base). Pour comparer plus finement ces résultats avec ceux de la théorie de l'instabilité, il est instructif d'effectuer une décomposition spectrale dans l'espace des nombres d'onde. On pourra ainsi suivre l'évolution de chacun des modes, y compris celui relatif à la déformation de l'écoulement moyen. La figure 5.6 représente l'évolution temporelle de l'énergie modale de perturbation $E_l(t)$ définie en (3.76), des modes $l = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ pour les valeurs des paramètres (5.2)-(5.4).

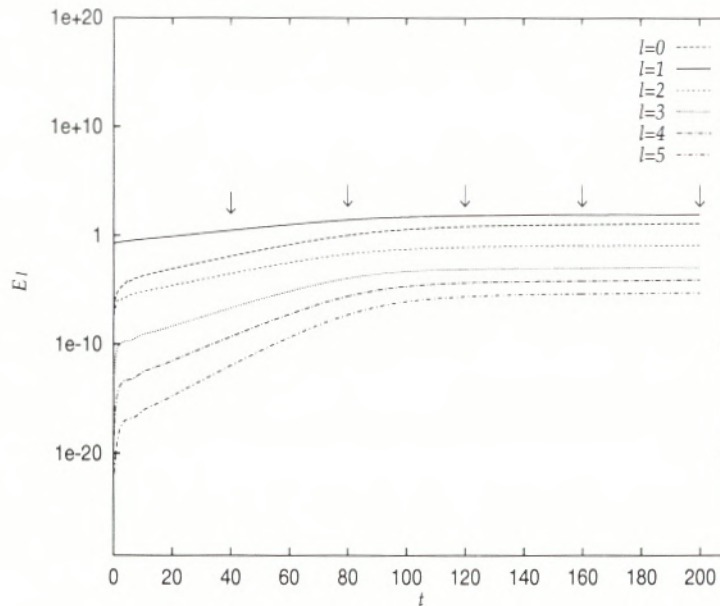


FIG. 5.6 - Évolution temporelle de l'énergie modale de perturbation $E_l(t)$ pour les modes $l = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $Ma=0,5$, $Re=50$, $b = 0$, $k = 0,7$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

On constate que l'énergie de chacun des modes l présente une phase de croissance exponentielle de taux $\sigma(l)$ suivie d'une saturation de niveau $E_l(\infty)$ à partir de l'instant $t = 100$ environ.

Afin d'étudier les lois d'échelles relatives au développement linéaire, les pentes $\sigma(l)$ ont été mesurées et sont portées dans le tableau 5.1. On y compare également les rapports $\sigma(l)/\sigma(1)$ entre le taux de croissance du mode l et le taux de croissance du mode 1, avec leurs correspondants théoriques $\omega_i(l)/\omega_i(1)$. Au vu des valeurs portées dans le tableau 5.1, il apparaît que le mode $l = 0$ croît de la même façon que l'harmonique $l = 2$ avec une pente $\sigma(l)$ très proche de $2\sigma(1)$. D'autre part, les harmoniques $l = 3, 4, 5$ se développent avec un taux environ 3 fois, 4 fois et 5 fois plus grand que celui du mode fondamental $\sigma(1)$. Ces résultats

sont conformes à la construction du modèle de Landau :

$$\sigma(l) = l\sigma(1) , \quad l > 0 ,$$

$$\sigma(0) = 2\sigma(1) ,$$

et signifient que les harmoniques et le fondamental sont “gelés”.

l	0	1	2	3	4	5
$\sigma(l)$	0,124	0,063	0,127	0,191	0,251	0,312
$\sigma(l)/\sigma(1)$	1,96	1	2,01	3,03	3,98	4,95
$\omega_i(l)/\omega_i(1)$	2	1	2	3	4	5

Tab 5.1 - Taux de croissance $\sigma(l)$ relatifs à chacun des modes l , rapport entre le taux de croissance du mode l et le taux de croissance du mode 1 $\sigma(l)/\sigma(1)$ et correspondant théorique $\omega_i(l)/\omega_i(1)$; simulation numérique directe et analyse de stabilité.

Nous nous proposons maintenant d'approfondir **les résultats numériques relatifs au niveau de saturation** de l'énergie de chacun des modes. Quatre simulations, effectuées près du nombre d'onde neutre numérique $^1k_{num} = 0,767$ pour :

$$k = 0,7 , \quad k = 0,72 , \quad k = 0,74 , \quad k = 0,75 , \quad (5.6)$$

et avec les valeurs des autres paramètres identiques à (5.2)-(5.4), ont permis de qualifier le comportement de l'énergie modale de saturation en fonction de l'écart au neutre.

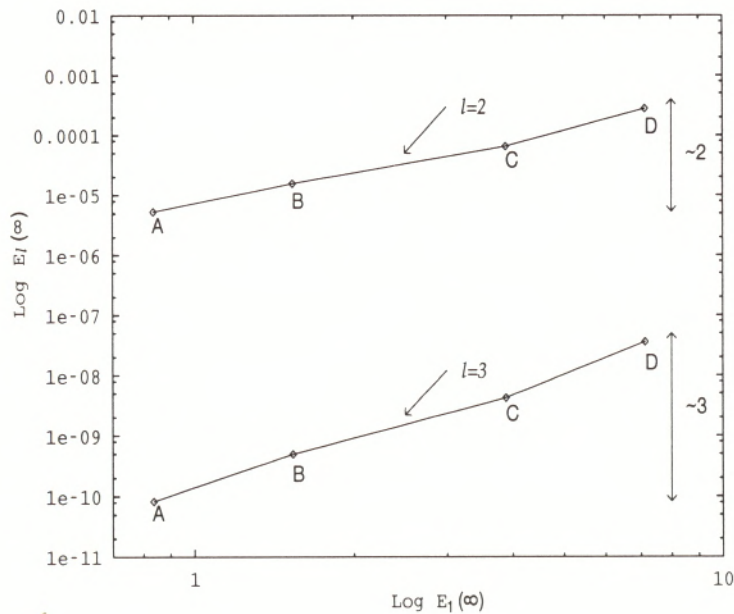


FIG. 5.7 - Énergie modale de saturation $\text{Log } E_l(\infty)$ pour $l = 2$ et $l = 3$ en fonction de l'énergie modale de saturation $\text{Log } E_1(\infty)$; $\text{Ma}=0,5$, $\text{Re}=50$, $b = 0$, $\epsilon = 0,01$; A: $k = 0,75$, B: $k = 0,74$, C: $k = 0,72$, D: $k = 0,7$; simulation numérique directe.

La figure 5.7 représente $\text{Log } E_2(\infty)$ et $\text{Log } E_3(\infty)$ en fonction de $\text{Log } E_1(\infty)$ pour les différentes valeurs (5.6) de k . Si $E_l(\infty)$ est l'énergie modale de saturation du mode l , la théorie de Landau prévoit que

$$E_l(\infty) = [E_1(\infty)]^l, \quad (5.7)$$

soit,

$$\text{Log } E_l(\infty) = l \text{Log } E_1(\infty). \quad (5.8)$$

On constate que la relation (5.8) est approximativement vérifiée par les résultats numériques pour les modes $l = 1$ et $l = 2$. Ceci confirme donc que la simulation rend compte des prévisions théoriques des lois d'échelle de l'énergie de saturation.

L'analyse modale permet également d'obtenir les profils des fluctuations pour chaque mode l à différents instants t : ce sont les coefficients de Fourier $\phi_l(y, t)$ définis en (3.66).

Pour $\phi = u$ et $l = 0$, on obtient la déformation de l'écoulement moyen

$$u_0(y, t) = \bar{u}(y, t) - U_0(y), \quad (5.9)$$

dont les profils sont représentés sur la figure 5.8 aux instants repérés par des flèches sur la figure 5.6.

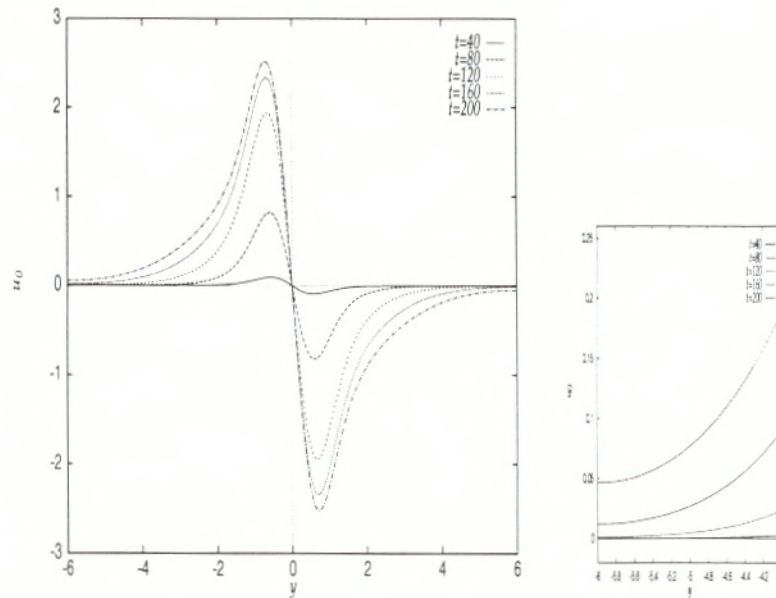


FIG. 5.8 - Déformation de l'écoulement moyen $u_0(y, t)$ à différents instants t ; $\text{Ma}=0,5$, $\text{Re}=50$, $b = 0$, $k = 0,7$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe. Le cadre de droite est un "zoom" du voisinage de $y = -L_y/2$.

¹évalué par la méthode expliquée au §4.2.3

Il apparaît que le profil de la déformation de l'écoulement moyen conserve sa forme au cours du temps et que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [u_0(y, t)]_{max} = \text{constante} , \quad (5.10)$$

ce qui est cohérent avec la saturation de l'énergie de perturbation. On remarque, en outre, que $u_0(y, t)$ ne tend pas vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$ et $y \rightarrow \pm\infty$, les limites étant effectuées dans cet ordre, soit :

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} u_0(y, t) \neq 0 . \quad (5.11)$$

Ce phénomène est comparable au résultat correspondant (figure 5.9) de Huerre (1980) pour une couche de mélange incompressible à grand nombre de Reynolds. La déformation de l'écoulement moyen $u_0(y, \infty)$ que Huerre (1980) obtient par une analyse asymptotique a une forme similaire à $u_0(y, t)$ et tend également vers une valeur non nulle quand $y \rightarrow \pm\infty$.

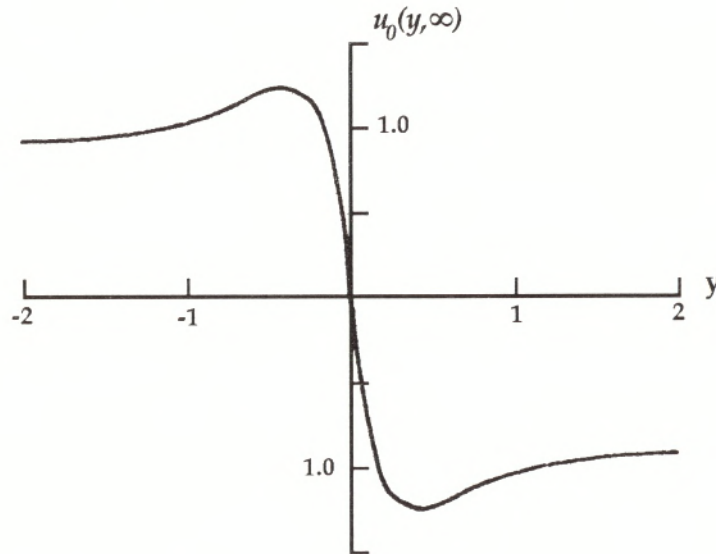


FIG. 5.9 - Déformation de l'écoulement moyen $u_0(y, \infty)$ dans un cas incompressible à grand nombre de Reynolds; graphe issu de l'analyse asymptotique de Huerre (1980).

La propriété (5.11) est la conséquence d'un phénomène de diffusion. On peut d'ailleurs faire une analogie avec le premier problème de Stokes qui caractérise la mise en mouvement progressive des différentes couches d'un fluide au-dessus d'une plaque en translation à la vitesse U_p . En résolvant l'équation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} ,$$

où ν est le coefficient de viscosité cinématique, les variations de vitesse sont obtenues sous la forme auto-semblable :

$$u(y, t) = U_p(1 - \text{erf}(\eta)) , \quad (5.12)$$

avec

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}, \quad \text{et } \operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta .$$

La distribution de vitesse en y en trois instants donnés t_1 , $t_2 > t_1$ et $t = \infty$ est représentée sur la figure 5.10.

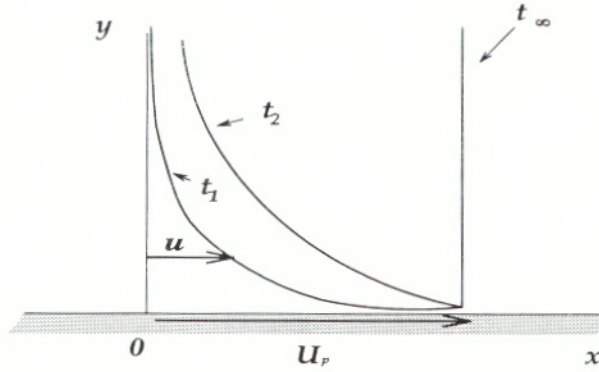


FIG. 5.10 - Profils de vitesse $u(y, t)$ aux instants t_1 , $t_2 > t_1$ et t_∞ de l'écoulement cisailé au dessus d'une plaque plane en mouvement de translation à la vitesse U_p .

On constate que $u(y, t)$ possède les propriétés suivantes :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(y, t) = 0 \quad \forall t \text{ fixé, et } \lim_{y \rightarrow \infty} u(y, \infty) \neq 0 ,$$

soit,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} u(y, t) = 0 \quad , \text{ et } \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} u(y, t) \neq 0 . \quad (5.13)$$

Les passages aux limites (5.13) sont analogues au comportement des profils de déformation de l'écoulement moyen $u_0(y, t)$ (figure 5.8) et $u_0(y, \infty)$ (figure 5.9).

Les **profils de vitesse longitudinale** $u_1(y, t)$ et **transversale** $v_1(y, t)$ **du mode fondamental** sont tracés sur les figures 5.11 et 5.12. Il apparaît dans les deux cas que les formes des profils restent régulières au cours du temps et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [u_1(y, t)]_{max} = \text{constante} ,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [v_1(y, t)]_{max} = \text{constante} .$$

L'amplitude maximale de la vitesse $u_1(y, t)$ atteint sa valeur limite de façon monotone, contrairement à l'amplitude $[v_1(y, t)]_{max}$ qui approche sa limite de manière non-monotone ; cette dernière est obtenue durant la phase de développement non-linéaire, de $t = 80$ à $t = 120$ environ.

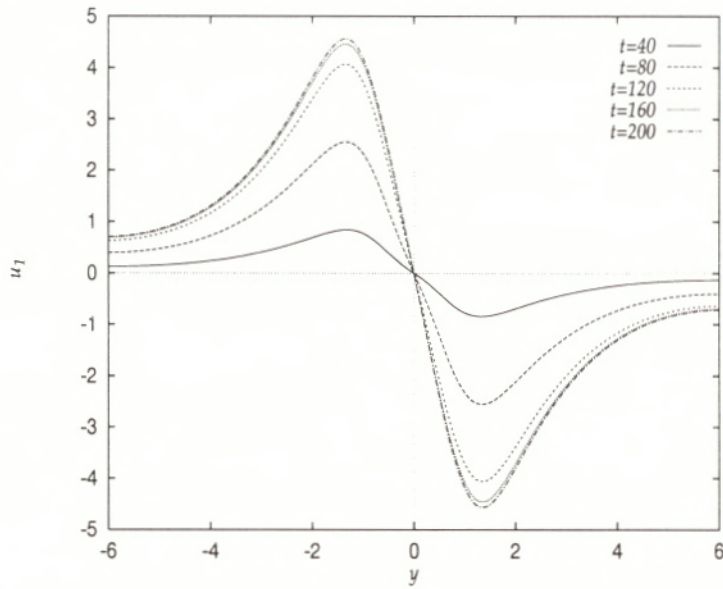


FIG. 5.11 - Profil de vitesse longitudinale $u_1(y, t)$ du mode fondamental $l = 1$ à divers instants t ; $Ma=0,5$, $Re=50$, $b = 0$, $k = 0,7$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

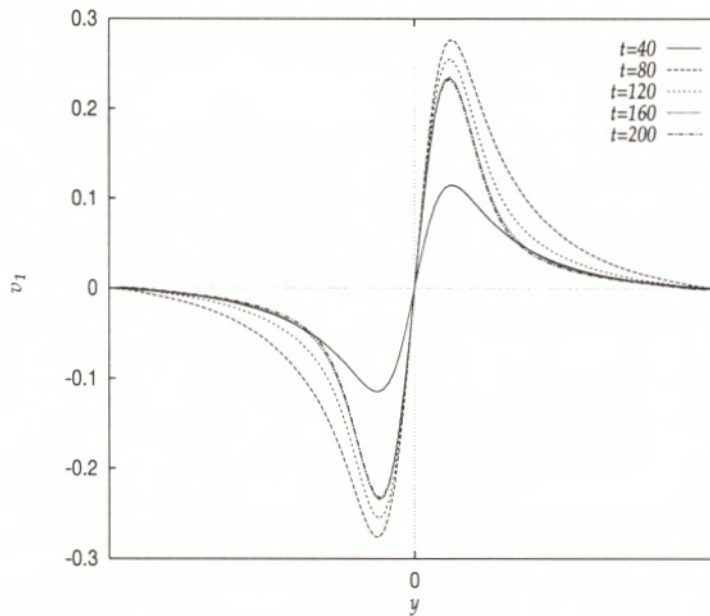


FIG. 5.12 - Profil de vitesse transversale $v_1(y, t)$ du mode fondamental $l = 1$ à divers instants t ; $Ma=0,5$, $Re=50$, $b = 0$, $k = 0,7$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

Afin de se rendre compte des modifications que subissent les fluctuations de vitesse au cours du temps, on les compare, aux instants $t = 40$ et $t = 200$, aux

solutions neutres $u_n(y)$ et $v_n(y)$ issues de l'analyse linéaire en fluide parfait de Djordjevic & Redekopp (1988) :

$$u_n(y) = \gamma^{-1} \text{Ma}^{-2} \text{sech}^{\alpha^2} y \tanh y, \quad (5.14)$$

$$v_n(y) = -i\alpha\gamma^{-1} \text{Ma}^{-2} \text{sech}^{\alpha^2} y \tanh y, \quad (5.15)$$

où α est le nombre d'onde neutre en fluide parfait. On a superposé respectivement sur les figures 5.13 et 5.14 les grandeurs renormalisées :

$$\frac{u_1(y, t)}{[u_1(y, t)]_{max}} \text{ à } t=40 \text{ et } t=200, \text{ et } \frac{u_n(y)}{[u_n(y)]_{max}},$$

et

$$\frac{v_1(y, t)}{[v_1(y, t)]_{max}} \text{ à } t=40 \text{ et } t=200, \text{ et } \frac{v_n(y)}{[v_n(y)]_{max}}.$$

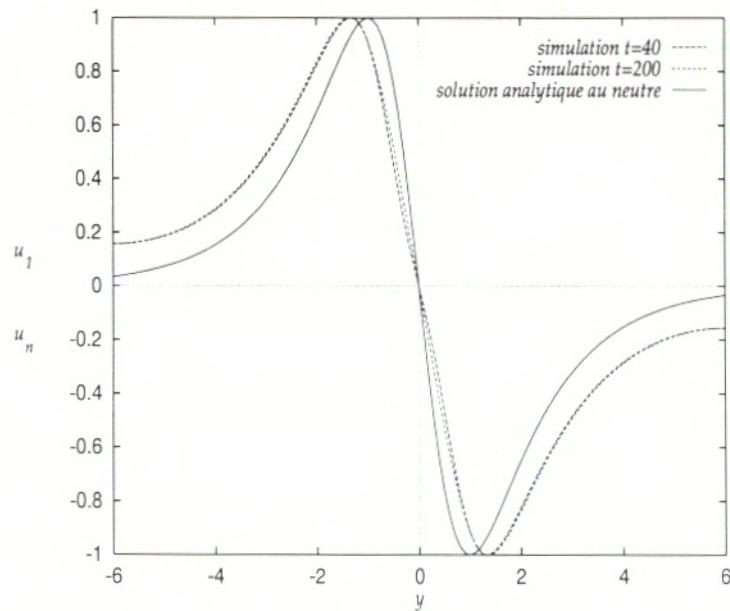


FIG. 5.13 - Profil de vitesse longitudinale $u_1(y, t)/[u_1(y, t)]_{max}$ aux instants $t = 40$ et $t = 200$: comparaison avec la solution analytique $u_n(y)/[u_n(y)]_{max}$ au nombre d'onde neutre k_n ; $\text{Ma}=0,5$, $\text{Re}=50$, $b = 0$, $k = 0,7$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe et analyse de stabilité linéaire.

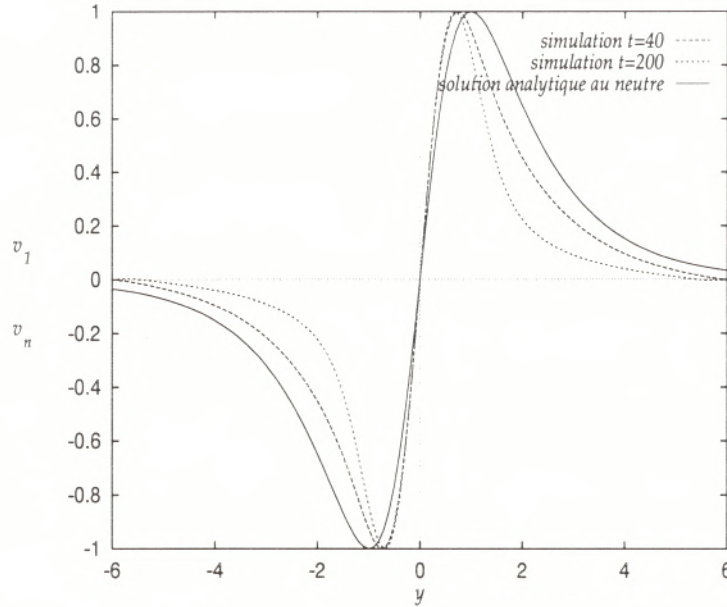


FIG. 5.14 - Profil de vitesse transversale $v_1(y,t)/[v_1(y,t)]_{max}$ aux instants $t = 40$ et $t = 200$: comparaison avec la solution analytique $v_n(y)/[v_n(y)]_{max}$ au nombre d'onde neutre k_n ; $Ma=0,5$, $Re=50$, $b = 0$, $k = 0,7$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe et analyse de stabilité linéaire.

On observe que $u_1(y,t)$ et $v_1(y,t)$ présentent une différence par rapport à la théorie qui perdure même pour $t = \infty$. Ceci résulte de l'effet de l'écart au neutre Δk .

5.1.2 Étude quantitative de la constante de Landau

L'étude quantitative de la constante de Landau est faite à partir des résultats que nous avons présentés en §2.3. Afin d'obtenir une expression donnant l'énergie fluctuante \mathcal{E} en fonction de l'amplitude A , considérons une onde faiblement amplifiée de la forme :

$$u'(x,y,t) = Re\{u_n(y)A(t)e^{ikx}\}, \quad (5.16)$$

$$v'(x,y,t) = Re\{v_n(y)A(t)e^{ikx}\}, \quad (5.17)$$

où $u_n(y)$ et $v_n(y)$ sont les solutions neutres (5.14) et (5.15). D'après les résultats du §2.3.2, l'amplitude complexe $A(t)$ vérifie l'équation de Landau :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2\Delta ks(Ma,b)}{\pi} A - \frac{4I_L \ell(Ma,Pr,b)}{\pi \lambda^{1/3}} |A|^2 A, \quad (5.18)$$

où les grandeurs I_L , $\ell(Ma,Pr,b)$ et $s(Ma,b)$ sont données dans l'Annexe et où $\lambda = 1/Re$. En multipliant (5.18) par le conjugué de A , et en lui rajoutant son équation conjuguée multipliée par A , on obtient l'équation pour $|A|^2$:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\frac{2\Delta ks}{\pi} |A|^2 - 2\frac{4I_L \ell}{\pi \lambda^{1/3}} |A|^4. \quad (5.19)$$

La grandeur $|A|^2$ est proportionnelle à l'énergie $E_1(t)$ du mode fondamental $l = 1$, elle-même peu différente de l'énergie fluctuante totale \mathcal{E} . Comme nous l'avons déjà écrit au §4.2, \mathcal{E} vérifie aussi l'équation de Landau :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E} = 2\omega_i\mathcal{E} + 2L_t|\mathcal{E}|^2 . \quad (5.20)$$

À partir des relations (5.14)-(5.17), on exprime $u'(x, y, t)$ et $v'(x, y, t)$ en fonction des parties réelle et imaginaire de A :

$$u' = -\gamma^{-1}\text{Ma}^{-2}\text{sech}^{\alpha^2} y \tanh y (A_r \cos kx - A_i \sin kx) , \quad (5.21)$$

$$v' = \alpha\gamma^{-1}\text{Ma}^{-2}\text{sech}^{\alpha^2} y \tanh y (A_i \cos kx + A_r \sin kx) . \quad (5.22)$$

En tenant compte de la définition de \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \int_0^{\frac{2\pi}{k_n}} \int_{-\infty}^{\infty} (u'^2(x, y, t) + v'^2(x, y, t)) dy dx , \quad (5.23)$$

on arrive à la relation cherchée :

$$|A|^2 = \frac{k_n \gamma^2 \text{Ma}^4}{\pi \text{I} (1 + \alpha^2)} \mathcal{E} . \quad (5.24)$$

avec

$$\text{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^{\alpha^2} y \tanh y dy .$$

On remplace alors, dans (5.19), $|A|^2$ par son expression (5.24). Ceci permet d'obtenir l'équation de Landau en terme de \mathcal{E} :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E} = 2\frac{2\Delta k s}{\pi}\mathcal{E} - 2\frac{4I_L \ell}{\pi \lambda^{1/3}} \frac{k_n \gamma^2 \text{Ma}^4}{\pi \text{I} (1 + \alpha^2)} |\mathcal{E}|^2 . \quad (5.25)$$

Ainsi, en identifiant les coefficients de cette équation avec (5.20), on isole les valeurs théoriques du taux de croissance ω_i et de la constante de Landau L_t :

$$\omega_i = \frac{2\Delta k s(\text{Ma}, b)}{\pi} , \quad (5.26)$$

$$L_t = -\frac{4I_L \ell}{\pi^2 \lambda^{1/3}} \frac{k_n \gamma^2 \text{Ma}^4}{\text{I} (1 + \alpha^2)} , \quad (5.27)$$

où les grandeurs s , I_L , λ , ℓ et I sont explicitées en Annexe. Celles-ci seront comparées aux grandeurs σ et L obtenues à partir des simulations numériques directes suivant la méthode exposée au §5.1 (figure 5.3).

Afin d'identifier les lois d'échelle relatives à la constante de Landau et de les comparer à celles de la théorie, nous avons effectué des simulations pour

$$\text{Ma} = 0,5 , \quad b = 0 , \quad \epsilon = 0,01 ,$$

$$25 \leq \text{Re} \leq 500 .$$

Les nombres d'ondes choisis, pour chaque nombre de Reynolds, sont proches des nombres d'onde neutres numériques, évalués par la méthode décrite au §4.2.3.

Les paramètres numériques sont indiqués dans le tableau 5.2.

	$25 \leq Re \leq 150$	$200 \leq Re \leq 300$	$Re=500$
$M_x \times M_y$	79 x 121	79 x 121	157 x 241
$L_x \times L_y$	$2\pi/k \times 12$	$2\pi/k \times 12$	$2\pi/k \times 12$
Δt	$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-4}$

Tab 5.2 - Paramètres numériques relatifs à l'étude quantitative de la constante de Landau du §5.1.2.

Dans tous les cas, on aura :

$$\Delta x \simeq \Delta y .$$

Les figures 5.15 et 5.16 donnent un exemple du réseau de courbes obtenues pour l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante \mathcal{E} et le taux de croissance instantané correspondant $\Delta \mathcal{E}$, relatives à une série de simulations à $Ma=0.5$ et $Re=300$.

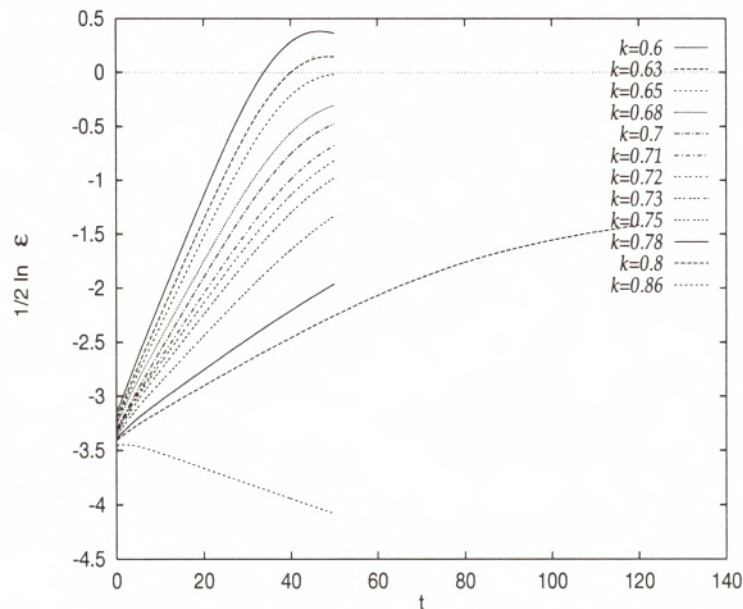


FIG. 5.15 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ pour divers nombres d'onde k proches du nombre d'onde neutre k_{num} ; $Ma=0,5$, $Re=300$, $b=0$, $\epsilon=0,01$; simulation numérique directe.

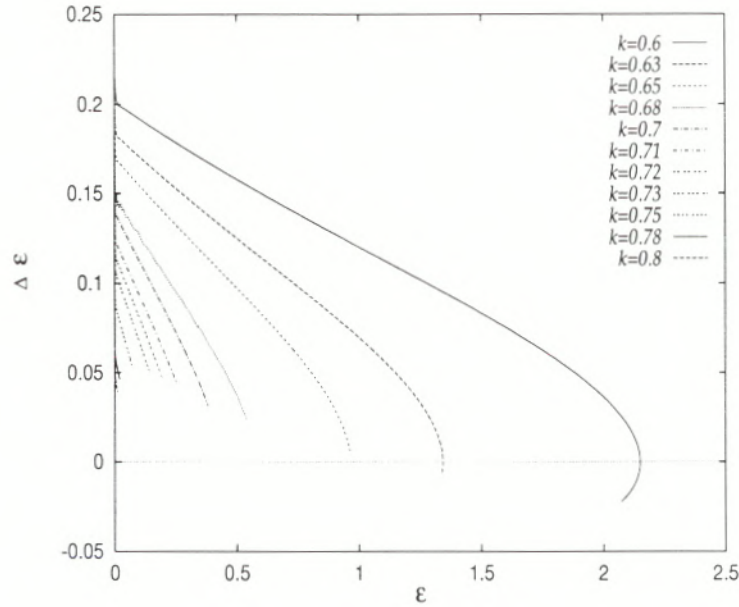


FIG. 5.16 - Taux de croissance instantané $\Delta\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\ln \mathcal{E})$ en fonction de \mathcal{E} pour divers nombre d'onde k proches du nombre d'onde neutre k_{num} ; $Ma=0,5$, $Re=300$, $b=0$, $\epsilon=0,01$; simulation numérique directe.

Comme cela a été expliqué au début du chapitre 5 (figure 5.3), pour chaque valeur du nombre d'onde k , on extrait de ces graphes (figure 5.15 et figure 5.16), la valeur du taux de croissance linéaire $\sigma^{(300)}(k)$ et celle de la constante de Landau $L^{(300)}(k)$. Remarquons que la figure 5.15 met en évidence le passage du régime amplifié ($\sigma^{(300)} > 0$) au régime atténué ($\sigma^{(300)} < 0$) pour $k = 0,86$. Il apparaît, en outre, sur la figure 5.15 que, plus l'écart au neutre Δk_{num} diminue, plus les échelles de temps caractéristiques sont longues et plus la simulation doit être poussée pour que la mesure de L soit réalisable (par exemple, $k = 0,8$).

Des réseaux de courbes analogues ont été constitués pour dix valeurs du nombre de Reynolds comprises entre 25 et 500. Pour chaque couple (Re, k) , les valeurs des taux de croissance σ et des constantes de Landau L ont été mesurées. Un diagramme comparatif représentant L en fonction de σ pour différents nombres de Reynolds est présenté sur la figure 5.17. Les valeurs théoriques L_t , valables pour $\Delta k_{num} = 0$ et obtenues avec la relation (5.27), sont repérées sur la bande verticale gauche du graphe.

Avant de commenter la figure 5.17, il est important de rappeler que la valeur de L qui nous intéresse est celle relative au cas de croissance nulle $\sigma = 0$. Il a déjà été noté que la mesure de L devient très difficile quand le nombre d'onde sélectionné est proche du nombre d'onde neutre. Cette difficulté, due au temps de calcul, est d'autant plus accrue que le nombre de Reynolds est grand car le respect du critère de stabilité nécessite alors une résolution plus grande et un pas de temps plus petit. La version Adams-Bashforth-classique, par exemple, demande environ un temps de calcul de $1,4 \mu s$ CPU par itération et par point sur le CRAY-YMP de l'ONERA. Ainsi, pour $k = 0,8$ de la figure 5.15, il a fallu 120000 itérations

pour atteindre l'instant $t = 120$ soit environ 3200 s CPU ². Pour un nombre de Reynolds plus petit, on peut doubler le pas de temps, et, par conséquent, faire des simulations à des nombres d'onde plus proches du neutre. Toutefois, pour ne pas atteindre des temps de calcul démesurés, et même pour des petits nombres de Reynolds, la valeur de L au neutre, $L(0)$, sera une valeur approchée obtenue par extrapolation des courbes $L(\sigma)$.

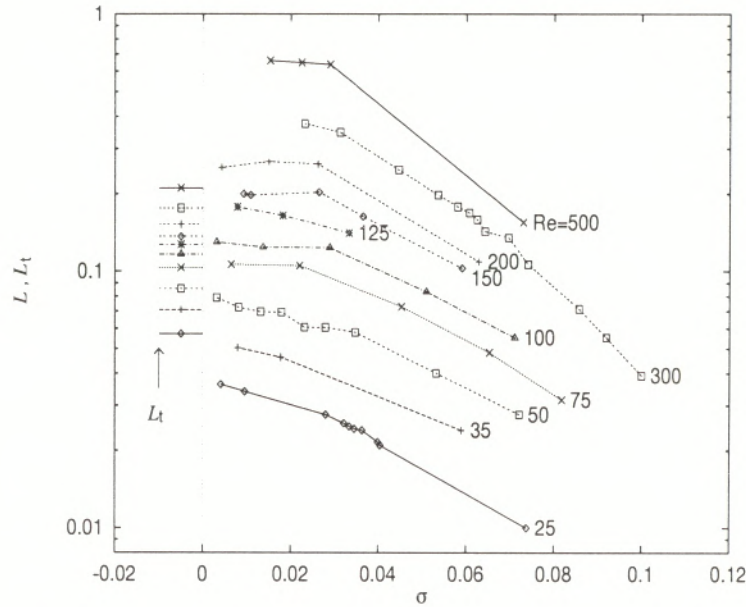


FIG. 5.17 - Constante de Landau théorique L_t et numérique L en fonction du taux de croissance numérique σ pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re ; $Ma = 0,5$, $b = 0$, $\epsilon = 0,01$; analyse de stabilité non linéaire et simulation numérique directe.

La figure 5.17 montre que L_t et L ont le même comportement quand le nombre de Reynolds augmente :

$$L_t^{Re=25} < L_t^{Re=35} < L_t^{Re=50} < \dots < L_t^{Re=300} ,$$

$$L^{Re=25} < L^{Re=35} < L^{Re=50} < \dots < L^{Re=300} .$$

D'autre part, la constante de Landau numérique approchée $L(0)$ est du même ordre de grandeur que la valeur théorique L_t : pour $25 < Re < 300$,

$$0,05 \leq L_t \leq 0,25 ,$$

$$0,04 \leq L(0) \leq 0,7 .$$

Enfin, il existe une plage de nombre de Reynolds pour laquelle $L(0)$, converge vers la valeur théorique L_t . Afin d'illustrer ce résultat, le graphe donnant $\text{Log}(-L(0))$ en fonction de $\text{Log} Re$ a été superposé, sur la figure 5.18, à la courbe théorique $\text{Log}(-L_t)$ en fonction de $\text{Log} Re$.

²La version Euler-classique est légèrement plus rapide. En revanche, les versions qui utilisent le schéma spatial hybride demandent environ $1,6\mu s$ par itération et par point.

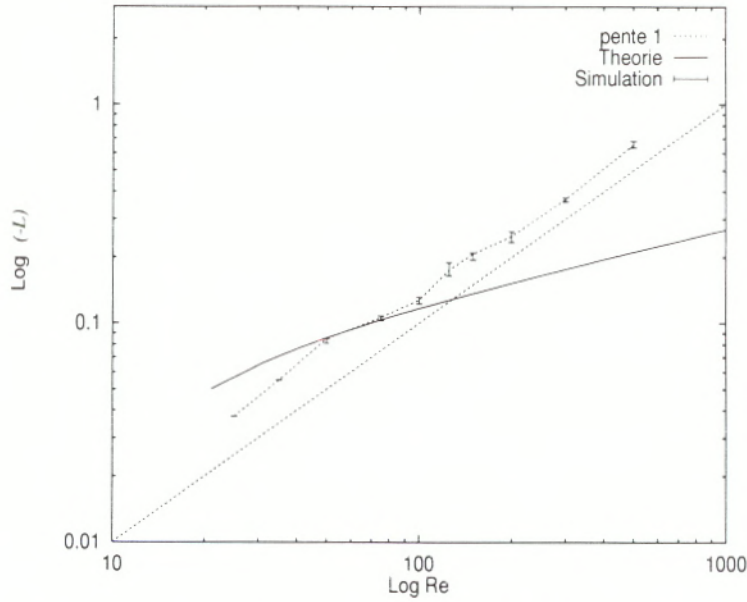


FIG. 5.18 - Constante de Landau numérique $\text{Log } L(\sigma = 0)$ et théorique $\text{Log } L_t$ en fonction du nombre de Reynolds $\text{Log } \text{Re}$; $\text{Ma} = 0,5$, $b = 0$, $\epsilon = 0,01$; analyse faiblement non linéaire de stabilité et simulation numérique directe.

Il apparaît que $L(0)$ et L_t coïncident pour des valeurs de nombres de Reynolds comprises environ entre 50 et 100. Ainsi, pour de telles valeurs, la constante de Landau varie en $\text{Re}^{1/3}$ comme le prévoit la théorie. On peut penser que, pour cette plage de nombres de Reynolds, les paramètres choisis pour les simulations correspondent au régime de couche critique visqueuse exigé pour la théorie (§2.3), c'est à dire

$$\text{Re}_{cl} \ll 1. \quad (5.28)$$

En deçà et au delà de cette gamme de valeurs, la constante de Landau numérique semble suivre une loi, non plus en $\text{Re}^{1/3}$ mais en Re . Il peut s'agir d'un autre régime de couche critique. Dans le tableau 5.3, on a porté des valeurs approximatives du nombre de Reynolds critique Re_{cl} calculées à partir de la relation :

$$\text{Re}_{cl} = \text{Re} \epsilon^{\frac{3}{2}},$$

où le paramètre ϵ est pris égal à la valeur de l'amplitude de saturation $\sqrt{\mathcal{E}(\infty)}$ obtenue par la simulation.

Re	50	100	150	300
Δk_{num}	$6 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$4,9 \cdot 10^{-2}$
Re_{cl}	4	6	15	37

Tab 5.3 - Valeurs approchées du nombre de Reynolds critique Re_{cl} pour un nombre de Reynolds Re et un écart au neutre Δk fixés; simulation numérique directe.

Il est difficile d'interpréter ces résultats étant donné qu'ils ne correspondent pas à la même valeur de Δk . Néanmoins, on constate que le nombre de Reynolds

critique Re_{cl} est d'autant plus faible que l'écart au neutre est plus petit. Ainsi, il semble qu'on s'écarte moins du régime de couche critique visqueuse pour $Re=50$ que pour des valeurs supérieures de Re . La condition (5.28) serait probablement mieux approchée si Δk était plus petit.

Enfin, on peut se demander si la discrétisation a une grande influence sur la valeur de la constante de Landau L . La section suivante étudie cette question.

5.1.3 Influence des paramètres numériques sur la valeur de la constante de Landau

Comme au §4.2.4, les deux types de **discrétisation spatiale**, classique et hybride, couplés aux deux **schémas temporels**, Euler et Adams-Bashforth, ont été comparés pour des simulations à :

$$Ma = 0,5, \quad b = 0, \quad Re = 50, \quad k = 0,7, \quad \epsilon = 0,01,$$

$$L_x = \frac{2\pi}{k}, \quad L_y = 12,$$

$$M_x = 79, \quad M_y = 121, \quad \Delta x \simeq \Delta y = 0,1, \quad \Delta t = 0,002.$$

La figure 5.19 représente l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante dans les cas Euler-classique, Euler-hybride et Adams-Bashforth-classique.

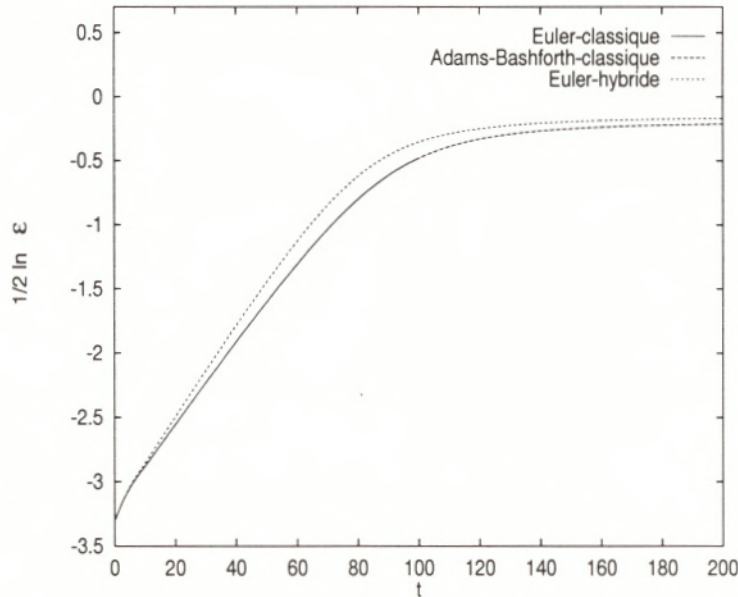


FIG. 5.19 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ pour différents schémas de discrétisation ; $Ma = 0,5$, $Re = 50$, $b = 0$, $k = 0,7$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

Comme cela avait été constaté au §4.2.4, les courbes Euler et Adams-Bashforth-classique sont confondues. On constate également une différence d'évolution entre l'énergie fluctuante obtenue par la méthode Euler-classique et celle obtenue par la méthode Euler-hybride. La valeur de la pente durant la phase linéaire et celle

du niveau de saturation est supérieure dans le cas Euler-hybride. Néanmoins, il apparaît sur la figure 5.20 que les parties linéaires des courbes sont quasiment parallèles. En conséquence, les valeurs de la constante de Landau L sont pratiquement identiques dans les deux cas.

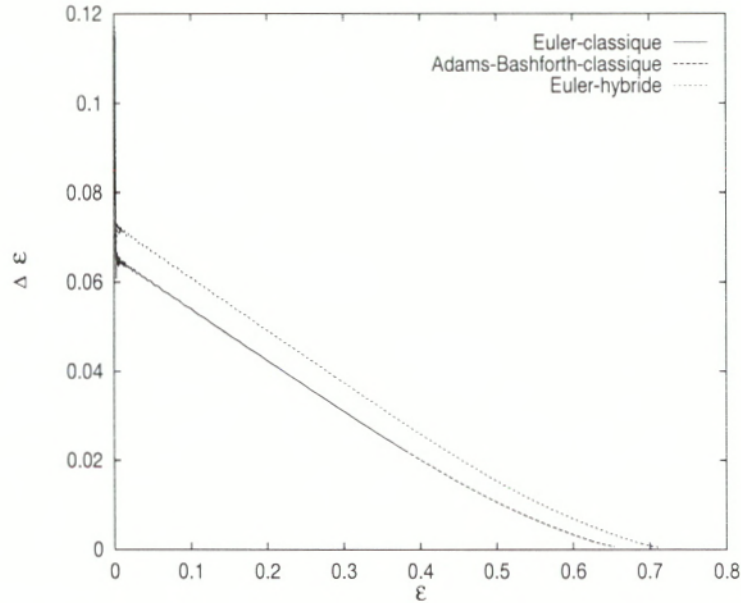


FIG. 5.20 - Taux de croissance instantané $\Delta\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\ln \mathcal{E})$ en fonction de \mathcal{E} pour différents schémas de discrétisation ; $Ma = 0,5$, $Re = 50$, $b = 0$, $k = 0,7$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

L'influence de la **résolution spatiale** est également étudiée pour le cas

$$Ma = 0,5, \quad b = 0, \quad Re = 50, \quad k = 0,7, \quad \epsilon = 0,01.$$

Le schéma de discrétisation est le schéma Adams-Bashforth-classique pour lequel

$$L_x = \frac{2\pi}{k} \simeq 8,97, \quad L_y = 12,$$

et trois résolutions différentes sont examinées :

$$M_x = 45, \quad M_y = 61, \quad \Delta x \simeq \Delta y = 0,2,$$

$$M_x = 91, \quad M_y = 121, \quad \Delta x \simeq \Delta y = 0,1,$$

$$M_x = 181, \quad M_y = 241, \quad \Delta x \simeq \Delta y = 0,05,$$

avec, dans chacun des cas :

$$\Delta t = 0,002.$$

Il faut souligner que, d'après la théorie, la contribution dominante d'ordre $Re^{\frac{1}{3}}$ à la valeur constante de Landau provient du voisinage de la couche critique centrée

en $y = 0$. Il est donc essentiel de s'assurer que la résolution de cette zone est suffisante. La couche critique est caractérisée (§2.3) par son épaisseur

$$\delta \sim \frac{1}{(kRe)^{\frac{1}{3}}}.$$

Ici δ vaut

$$\delta \simeq 0,3.$$

Ainsi, pour $M_y = 61$ il y a seulement un point dans la couche critique, pour $M_y = 121$, il y en a trois et pour $M_y = 241$, il y en a sept.

Sur la figure 5.21 on a représenté l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante obtenue pour ces différentes résolutions spatiales.

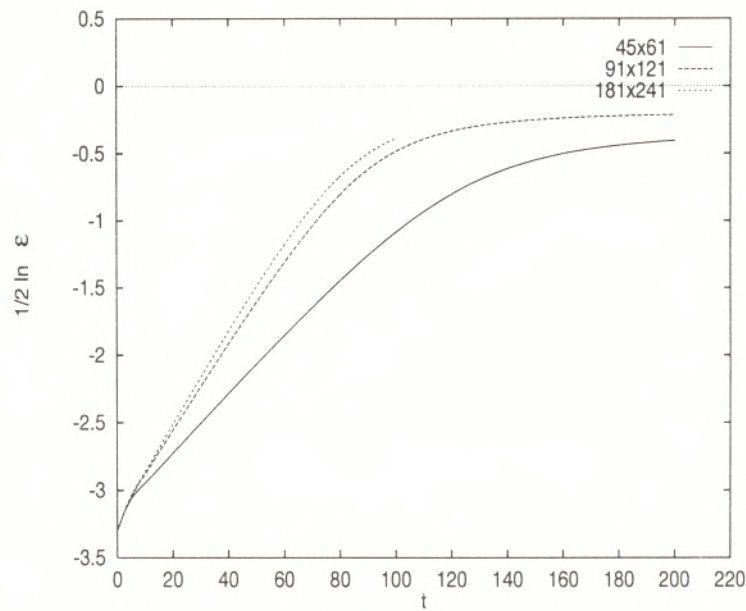


FIG. 5.21 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ pour différentes résolutions spatiales; $Ma = 0,5$, $Re = 50$, $b = 0$, $k = 0,7$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

Il apparaît que la résolution agit sur les phases d'évolution linéaire et non linéaire de l'énergie fluctuante : plus la résolution est grande et plus le taux de croissance et l'énergie de saturation sont élevés. On constate cependant sur la figure 5.22 que les pentes des courbes de $\Delta \mathcal{E}$ en fonction de \mathcal{E} ne varient que très peu, avec une plus grande différence lorsqu'il n'y a qu'un seul point dans la couche critique, c'est-à-dire pour $M_y = 61$. Par conséquent, la valeur de la constante de Landau L est très peu dépendante de la résolution discrète et converge vers une valeur asymptotique dès qu'il y a au moins trois points de maillage dans la couche critique.

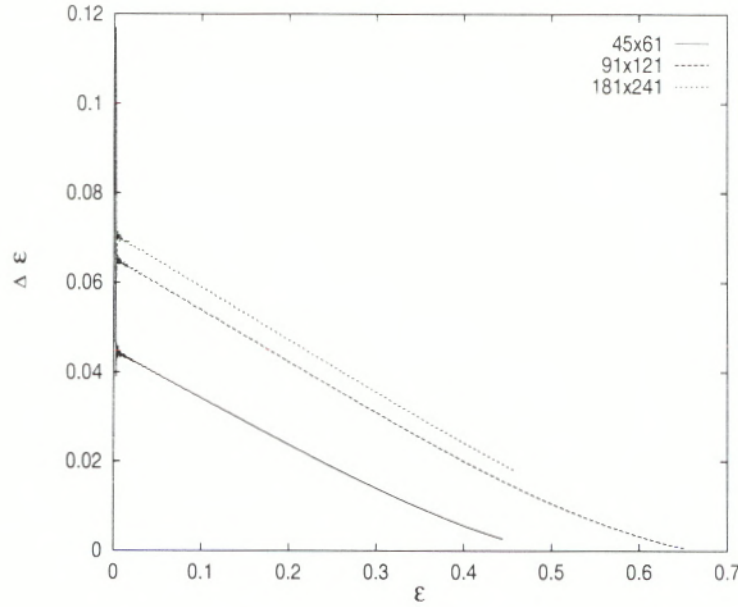


FIG. 5.22 - Taux de croissance instantané $\Delta\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\ln \mathcal{E})$ en fonction de \mathcal{E} pour différentes résolutions spatiales; $Ma = 0,5$, $Re = 50$, $b = 0$, $k = 0,7$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

Enfin, on a vérifié que la **hauteur de boîte** L_y et le **pas de temps** Δt ont un effet pratiquement négligeable sur la valeur de la constante de Landau L .

En conclusion, on peut remarquer que, même si les paramètres numériques ont une légère influence sur la valeur du taux de croissance σ (§4.2.4), ils n'agissent quasiment pas sur la valeur de la constante de Landau à condition qu'il y ait un minimum de points de maillage à l'intérieur de la couche critique.

5.1.4 Régimes atténués : analyse modale

La plupart des simulations numériques se limitent habituellement à l'étude des modes amplifiés et de leurs interactions. Il a semblé intéressant d'analyser le comportement de la couche lorsqu'elle est perturbée par des modes atténués au sens de la théorie linéaire. La figure 5.24 représente l'évolution temporelle de l'énergies des modes $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ pour une simulation à

$$Ma = 0,5, \quad Re = 50, \quad k = 0,8, \quad \Delta k_{num} = -0,031, \quad \epsilon = 0,01.$$

Les paramètres numériques sont :

$$L_x = \frac{2\pi}{k} \simeq 7,85, \quad L_y = 12, \quad M_x = 65, \quad M_y = 121,$$

$$\Delta x \simeq \Delta y = 0,1, \quad \Delta t = 0,002.$$

Remarquons que comme $M_x = 65$, la Transformation de Fourier Rapide (cf §3.3.4) sera faite sur 64 points et utilisera un algorithme de base 2. On s'attend, en effet, à ce que les phénomènes observés soient de très faible amplitude, c'est pourquoi il est préférable d'utiliser un algorithme de TFD le plus précis possible.

Il est important de rappeler que, contrairement au cas amplifié, les fonctions propres des modes amortis en fluide parfait sont très différentes de leurs homologues en fluide visqueux (cf. §3.1, figure 3.3). Ce résultat a été confirmé par les travaux de Tatsumi & Gotoh (1971) qui montrent que, dans la région, les fonctions propres à grand nombre de Reynolds prennent la forme d'un paquet d'ondes (figure 5.23) de période spatiale d'ordre $\mathcal{O}(k \operatorname{Re}|c_i|)^{-1/2}$.

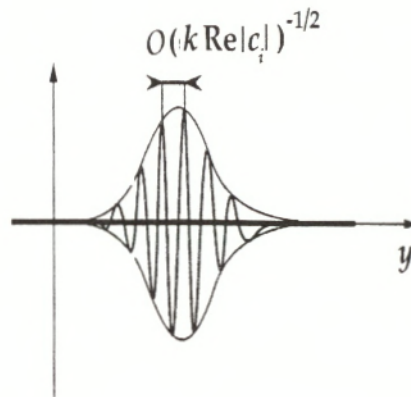


FIG. 5.23 - Forme des fonctions propres visqueuses en régime atténué ; graphe issu de Tatsumi & Gotoh (1971).

La figure 5.23 représente l'évolution temporelle de l'énergie modale de perturbation $E_l(t)$ (3.76) des modes $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, pour les paramètres indiqués ci-dessus.

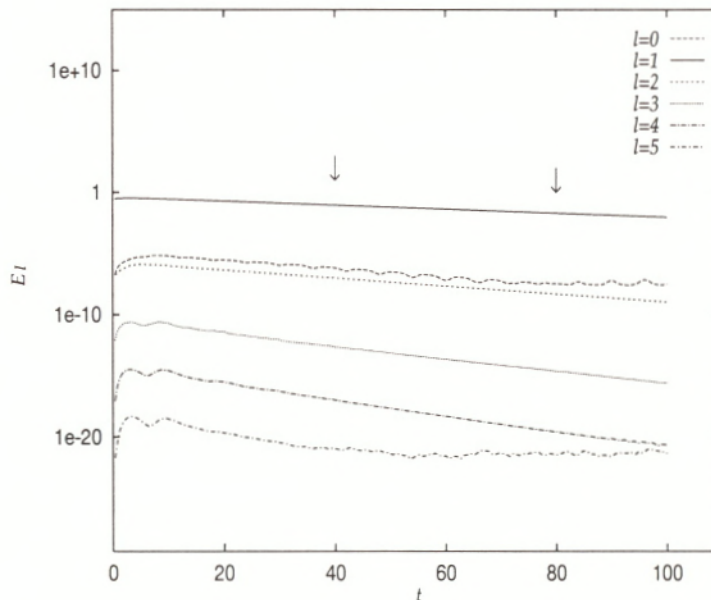


FIG. 5.24 - Évolution temporelle de l'énergie modale de perturbation $E_l(t)$ pour les modes $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; $\text{Ma}=0,5$, $\text{Re}=50$; $b = 0$, $k = 0,8$; $\epsilon = 0,01$;

simulation numérique directe.

On observe que les énergies décroissent en fonction de l'indice du mode jusqu'au bruit numérique de l'ordre de 10^{-20} . Comme dans le cas amplifié, on a mesuré les pentes $\sigma(l)$ que l'on a portées dans le tableau 5.4, où figurent également les rapports $\sigma(l)/\sigma(1)$ que l'on compare à leurs équivalents théoriques $\omega_i(l)/\omega_i(1)$. Remarquons que pour le mode $l = 5$, la mesure est imprécise compte tenu de la rapidité avec laquelle la saturation numérique est atteinte.

l	0	1	2	3	4	5
$\sigma(l)$	-0,0733	-0,0366	-0,0733	-0,1133	-0,1467	-0,1767
$\sigma(l)/\sigma(1)$	2	1	2	3,09	4,001	4,82
$\omega_i(l)/\omega_i(1)$	2	1	2	3	4	5

Tab 5.4 - Taux de croissance $\sigma(l)$ relatifs à chacun des modes l en régime atténué, rapport entre le taux de croissance du mode l et le taux de croissance du mode 1 $\sigma(l)/\sigma(1)$ et correspondant théorique $\omega_i(l)/\omega_i(1)$; simulation numérique directe et analyse de stabilité.

On constate que ces résultats sont en excellent accord avec les lois d'échelle attendues en régime non-linéaire :

$$\sigma(l) = l\sigma(1) , \quad l > 0 ,$$

$$\sigma(0) = 2\sigma(1) .$$

On remarque en outre, sur la figure 5.24, la présence d'oscillations affectant l'évolution de l'énergie du mode $l = 0$. Ceci est probablement dû aux conditions initiales retenues qui sont loin d'être proches des fonctions propres du problème linéaire visqueux comme évoqué ci-dessus. Ainsi, l'erreur commise initialement crée un bruit, qui, contrairement au cas du régime amplifié, n'est absolument pas masqué par la croissance exponentielle des perturbations. Par ailleurs, la discrétisation des conditions limites imposées aux bords supérieur et inférieur peut aussi induire un bruit et, de ce fait, jouer un rôle dans l'origine et le développement de cette oscillation. On observe sur la figure 5.24, que l'oscillation a une fréquence constante au cours du temps. On peut penser qu'elle est le témoin du passage répété d'une onde transversale qui se réfléchit sur les limites supérieure et inférieure de la boîte de calcul. Un test permet d'argumenter le bien fondé de cette interprétation : le calcul relatif à la figure 5.24 a été effectué dans un domaine de hauteur $L_y = 12$. La même simulation a été reproduite dans une boîte de hauteur double $L_y = 24$. La figure 5.25 démontre que pour $L_y = 24$, la période de l'oscillation a doublé. Il semble bien qu'une onde transversale se réfléchit sur les bords.

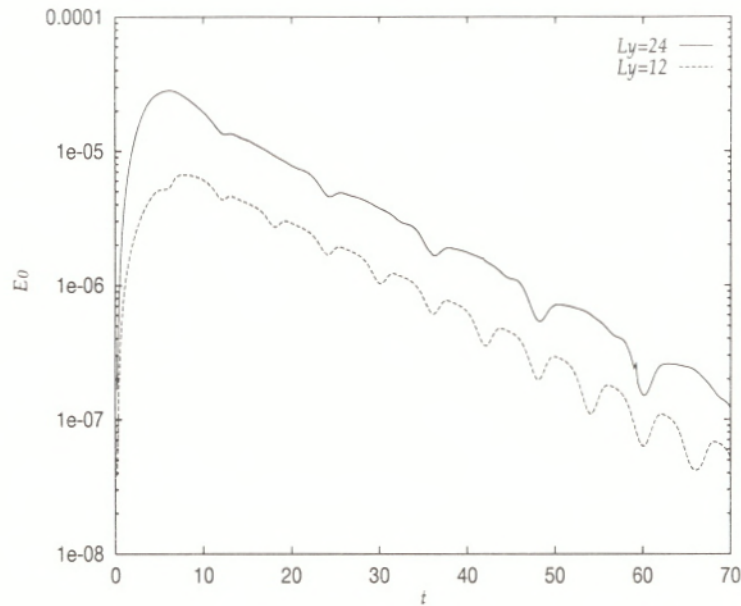


FIG. 5.25 - Évolution temporelle de l'énergie modale de perturbation $E_0(t)$ du mode $l=0$ pour un domaine de calcul de hauteur $L_y = 12$ et $L_y = 24$; $Ma=0,5$, $Re=50$, $b = 0$, $k = 0,8$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

Comme dans le cas des modes amplifiés, on a suivi la déformation de l'écoulement moyen et les formes des perturbations en vitesse au cours du temps.

La figure 5.26 présente $u_0(y, t)$ à différents instants t . Il apparaît que la forme des profils se conserve et que l'amplitude maximale diminue rapidement au cours du temps.

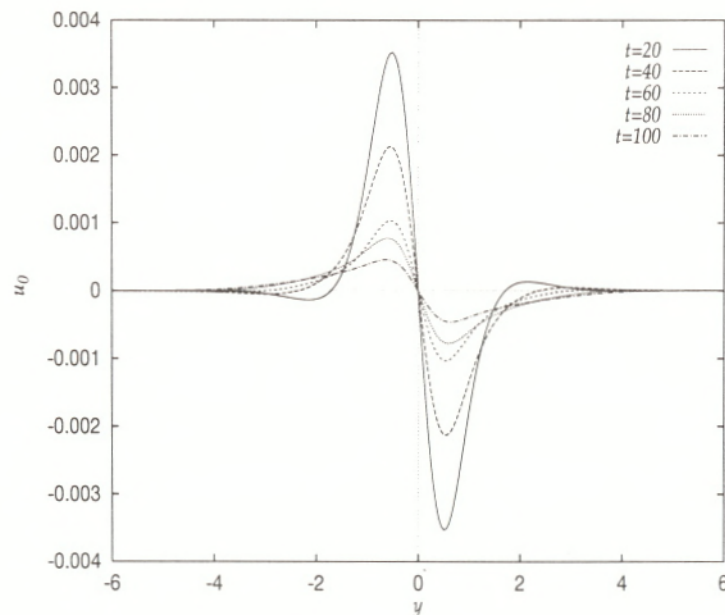


FIG. 5.26 - Déformation de l'écoulement moyen $u_0(y, t)$ à différents instants t ; $Ma=0,5$, $Re=50$, $b = 0$, $k = 0,8$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

Afin d'isoler l'onde transversale dont l'existence a été prouvée ci-dessus, il a semblé intéressant de tracer également la grandeur $v_0(y, t)$ (figure 5.27). On constate effectivement que $v_0(y, t)$ présente un profil d'épaisseur qui, bien que faible, est non nulle au sens numérique.

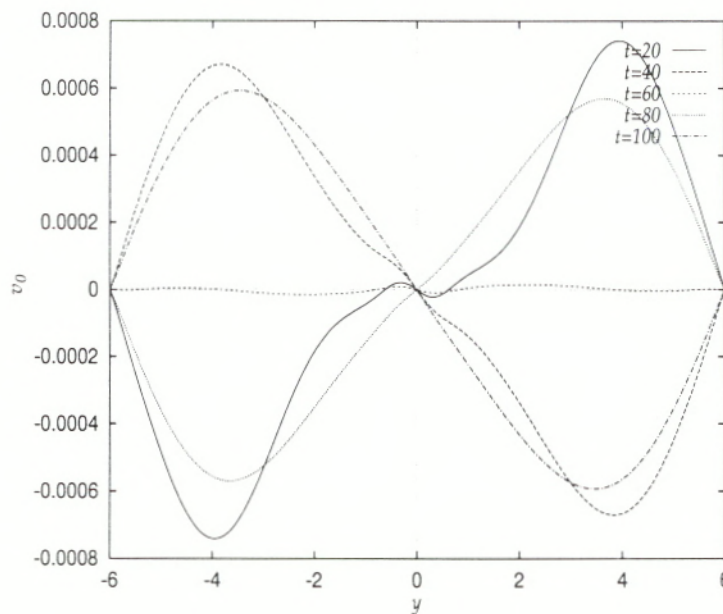


FIG. 5.27 - Déformation de l'écoulement moyen transversal $v_0(y, t)$ à différents instants t ; $Ma=0,5$, $Re=50$, $b=0$, $k = 0,8$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

Les figures 5.28 et 5.29 comparent les profils de $u_1(y, t)$ et $v_1(y, t)$ au cours du temps. Ceux-ci conservent leur forme et leur amplitude diminue rapidement. À la vue des profils de vitesse transversale $v_1(y, t)$, on peut penser qu'ils témoignent de l'amorce des oscillations spatiales prévues par Tatsumi & Gotoh (1971) illustrées à la figure 5.23. Par ailleurs, la période mesurée sur la figure 5.29 est proche de 1 et le calcul de la période théorique $\mathcal{O}([kRe|c_i|]^{1/2})$ conduit à un résultat d'ordre 3, ce qui ne contredit pas cette interprétation. En revanche, la vitesse $u_1(x, t)$ ne développe pas d'oscillations. Cela est probablement dû au fait que le régime est trop faiblement atténué.

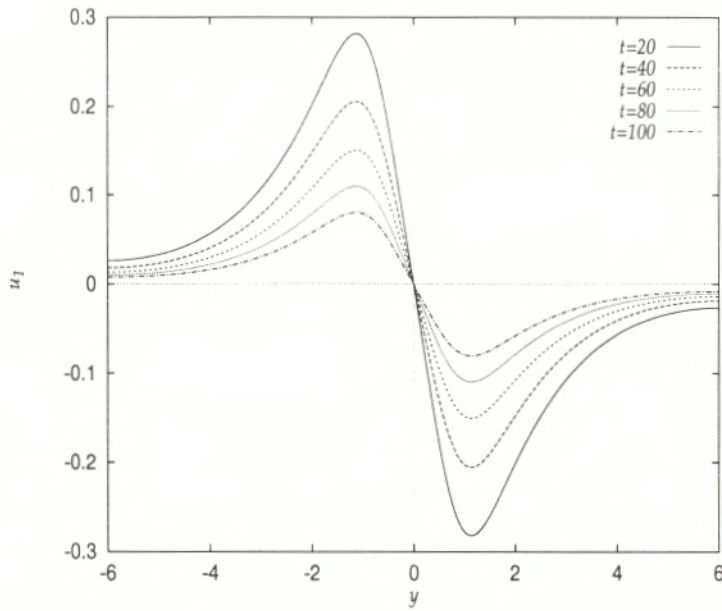


FIG. 5.28 - Profil de vitesse longitudinale $u_1(y, t)$ du mode fondamental $l = 1$ à divers instants t ; $Ma=0,5$, $Re=50$, $b = 0$, $k = 0,8$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

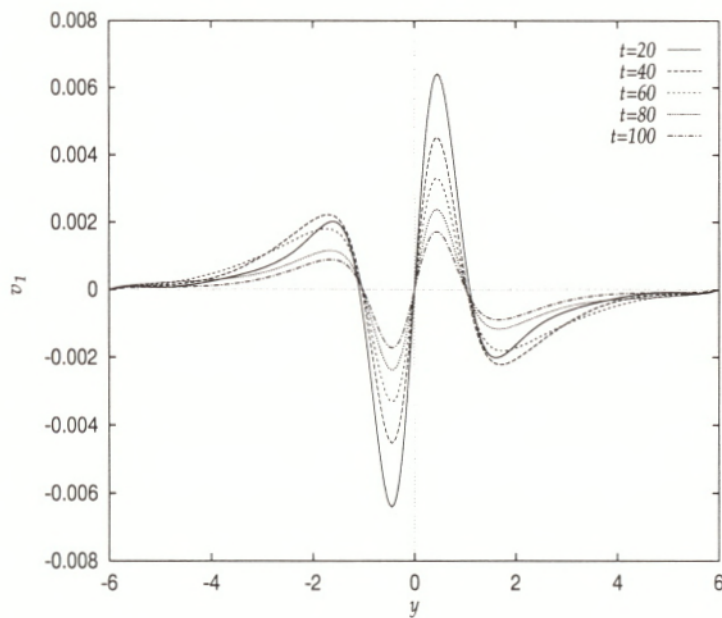


FIG. 5.29 - Profil de vitesse transversale $v_1(y, t)$ du mode fondamental $l = 1$ à divers instants t ; $Ma= 0,5$, $Re= 50$, $b = 0$, $k = 0,8$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

5.1.5 Diagramme de bifurcation

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la nature de la bifurcation en $k - k_n$ qui découle des résultats de la simulation numérique et de la confronter aux prévisions de l'analyse à la Landau (§2.3). On a choisi de représenter le diagramme de bifurcation, c'est à dire l'énergie de saturation $\mathcal{E}(\infty)$ en fonction de k (figure 5.30) pour les valeurs :

$$\text{Ma} = 0,5, \quad \text{Re} = 50, \quad b = 0, \quad \epsilon = 0,01,$$

à partir des courbes donnant $\Delta\mathcal{E}$ en fonction de \mathcal{E} . D'après (5.5), l'énergie de saturation $\mathcal{E}(\infty)$ est obtenue pour

$$\Delta\mathcal{E} = 0,$$

soit,

$$\mathcal{E}(\infty) = -\frac{\sigma}{L}.$$

Le diagramme de la figure 5.30 a été établi à partir des valeurs reportées sur la figure 5.17 pour $\text{Re}=50$.

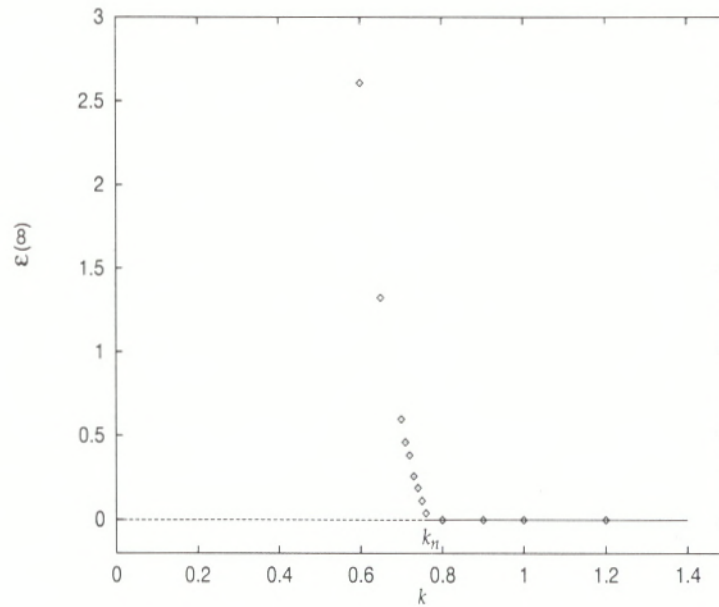


FIG. 5.30 - Diagramme de bifurcation $\mathcal{E}(\infty)$ en fonction de k ; $\text{Ma} = 0,5$, $\text{Re} = 50$, $b = 0$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

On constate que, conformément au modèle proposé par Landau, l'énergie de saturation $\mathcal{E}(\infty)$ varie proportionnellement à l'écart au seuil $\Delta k_{num} = k - k_{num}$ lorsque ce dernier est petit. De plus, la bifurcation est **supercritique et stationnaire**. À notre connaissance, ce résultat constitue le premier exemple de validation numérique du modèle à la Landau pour les ondes de Kelvin-Helmholtz dans une couche de mélange isotherme.

Le réchauffement de la couche de mélange pour une simulation effectuée à $b = 0,8$ n'a pas changé la nature supercritique de la bifurcation. Ceci est en

accord avec les résultats théoriques de Djordjevic & Redekopp (1989a,1989b). Que va-t-il se produire si l'on refroidit la couche de mélange? Les paragraphes suivants répondent à cette question...

5.2 Couche de mélange refroidie

Le but des simulations décrites dans ce paragraphe est de confronter les résultats numériques avec ceux de la théorie faiblement non linéaire dans le cas où la couche de mélange est refroidie. En particulier, il s'agit de voir si la non-linéarité induit une bifurcation souscritique dans le cas des nombres d'onde proches du nombre d'onde neutre. La constante de Landau L prend-elle des valeurs **positives** dans l'équation (5.1)?

La figure 5.31 représente l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante obtenue pour un cas à

$$\text{Ma} = 0,7, \quad \text{Re} = 50, \quad b = -0,8, \quad k = 0,65, \quad \epsilon = 0,01. \quad (5.29)$$

La valeur du nombre d'onde $k = 0,65$ correspond à l'écart au seuil :

$$\Delta k_{num} \simeq 0,02,$$

qui a été déterminé avec la méthode décrite au §4.2.3. Les paramètres numériques retenus sont :

$$L_x = \frac{2\pi}{k} \simeq 9,66, \quad L_y = 24, \quad (5.30)$$

$$M_x = 91, \quad M_y = 241, \quad \Delta x \simeq \Delta y = 0,1, \quad \Delta t = 0,002. \quad (5.31)$$

Les valeurs (5.29) des paramètres correspondent à une constante de Landau théorique positive (Djordjevic & Redekopp (1989a,1989b)). Sur la figure 5.31, on constate que l'énergie croît plus rapidement que dans le cas isotherme (figure 5.1) puis sature dès l'instant $t \simeq 180$. On a aussi tracé sur la figure 5.31 les lignes d'isovorticité totale de l'écoulement pendant la phase de croissance ($t = 40$) et après la saturation ($t = 200$). On observe à l'instant $t = 200$ l'existence d'un tourbillon dont la forme diffère de son homologue du cas supercritique (figure 5.1).

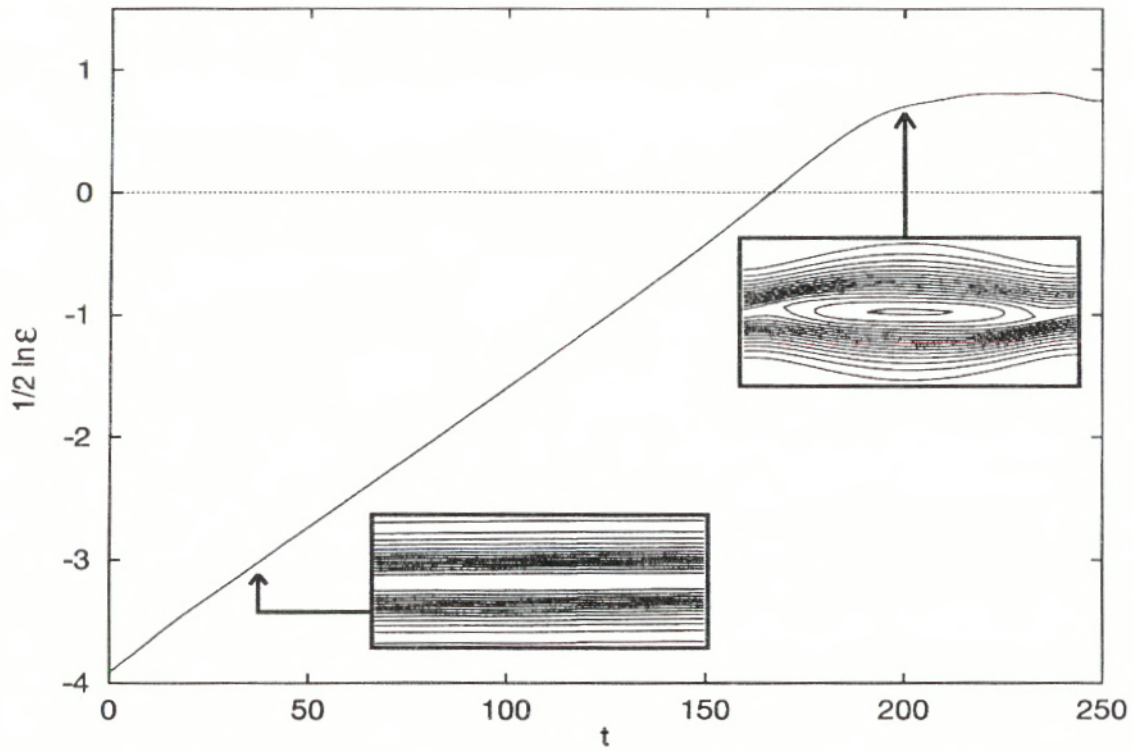


FIG. 5.31 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ et lignes d'isovorticité aux instants $t = 40$ et $t = 200$; $Ma = 0,7$, $Re = 50$, $b = -0,8$, $k = 0,65$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

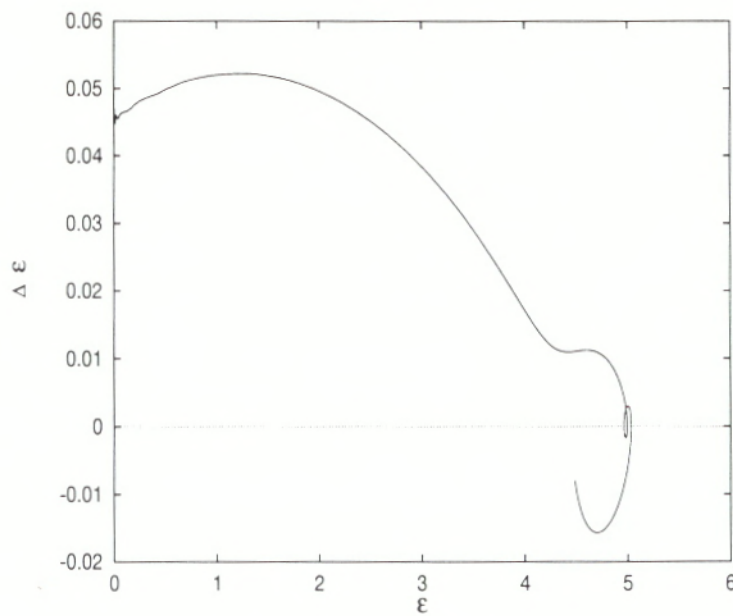


FIG. 5.32 - Taux de croissance instantané $\Delta \mathcal{E} = \frac{d}{dt}(\ln \mathcal{E})$ en fonction de \mathcal{E} ; $Ma = 0,7$, $Re = 50$, $b = -0,8$, $k = 0,65$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

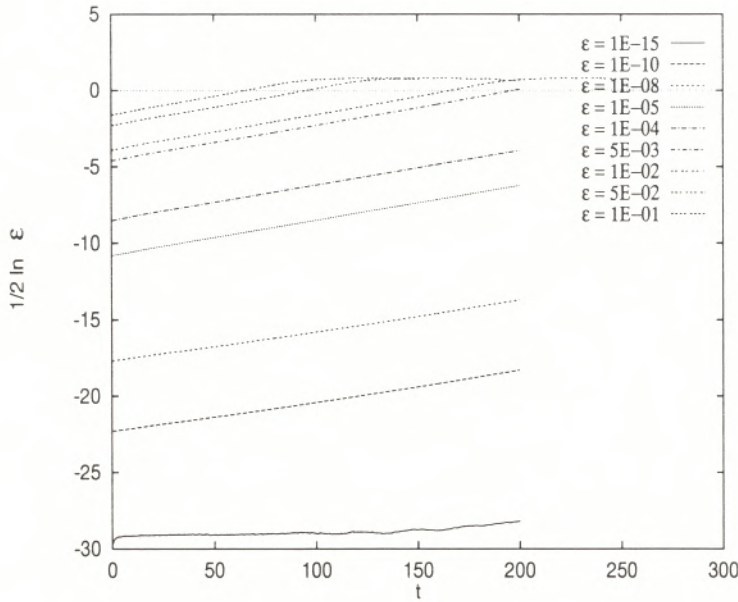


FIG. 5.33 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ pour différentes valeurs de ϵ ; $Ma = 0,7$, $Re = 50$, $b = -0,8$, $k = 0,65$; simulation numérique directe.

Comme dans le cas isotherme, on examine sur la figure 5.32 la variation du taux de croissance instantané $\Delta \mathcal{E}$ en fonction de \mathcal{E} . Dans cette représentation, il apparaît une différence fondamentale avec le cas supercritique: le modèle de Landau se manifeste par une variation linéaire de $\Delta \mathcal{E}$ en fonction de \mathcal{E} avec une pente positive. Cet état donne suite à un état non-linéaire stable dû à d'autres contributions non-linéaires. Le résultat de Djordjevic & Redekopp (1989a,1989b) est donc confirmé: le refroidissement de la couche de mélange à grand nombre de Mach change rend la première non-linéarité déstabilisante.

Vérifions que ce résultat est bien pertinent quelle que soit l'amplitude initiale d'énergie ϵ . Les figures 5.33 et 5.34 représentent respectivement l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante et sa variation relative $\Delta \mathcal{E}$ en fonction de \mathcal{E} pour neuf simulations paramétrées par (5.29)-(5.31) et des amplitudes initiales de perturbations ϵ comprises entre $\epsilon = 10^{-15}$ et $\epsilon = 10^{-1}$.

Il apparaît sur la figure 5.33 que, quel que soit le niveau initial d'énergie, et ce, jusqu'à l'atteinte du seuil numérique de l'ordre de e^{-30} , l'énergie fluctuante témoigne d'une déstabilisation due à la première non-linéarité puis évolue de la même façon vers un état non-linéaire stable. Ce résultat atteste que l'écoulement présente un point fixe dans l'espace des phases.

Peut-on isoler l'existence d'une boucle d'hystérésis en faisant une simulation à un nombre d'onde stable très proche du neutre?
Des simulations effectuées pour une telle valeur du nombre d'onde,

$$k = 0,7,$$

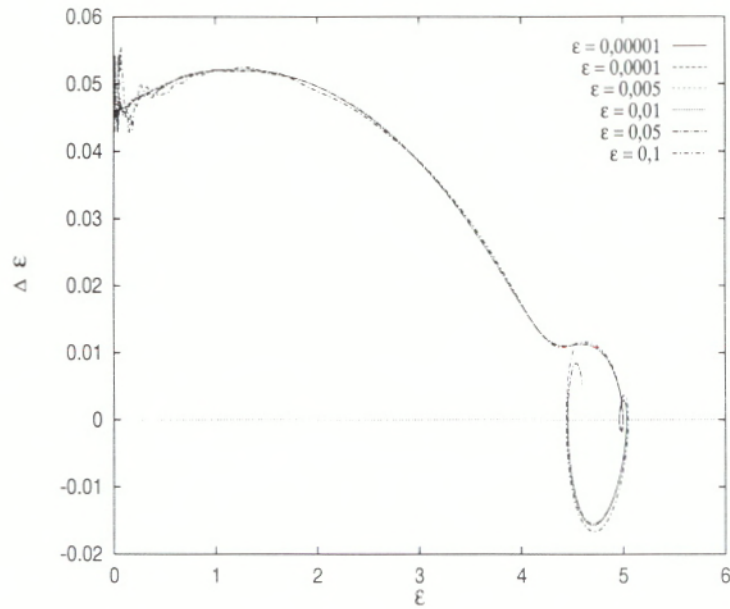


FIG. 5.34 - Taux de croissance instantané $\Delta \mathcal{E} = \frac{d}{dt}(\ln \mathcal{E})$ en fonction de \mathcal{E} pour différentes valeurs de ϵ ; $Ma = 0,7$, $Re = 50$, $b = -0,8$, $k = 0,65$; simulation numérique directe.

avec les autres paramètres définis en (5.29) et diverses amplitudes initiales de perturbations ont permis de répondre à cette question. La figure 5.35 illustre les différentes évolutions temporelles obtenues.

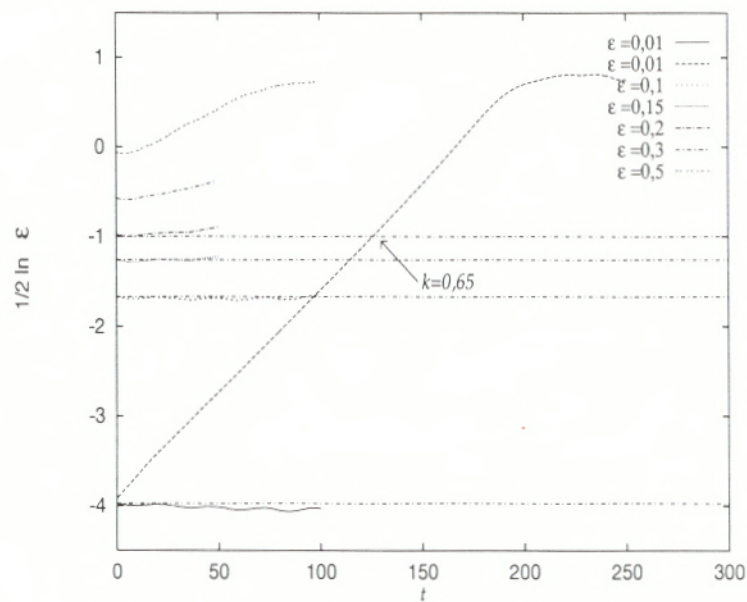


FIG. 5.35 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ pour différentes valeurs de ϵ ; $Ma = 0,7$, $Re = 50$, $b = -0,8$, $k = 0,7$; simulation numérique directe.

On constate qu'il existe un seuil initial d'énergie au dessus duquel l'effet non-linéaire déstabilise l'écoulement de base et en dessous duquel les perturbations imposées sont atténuées et font réapparaître l'écoulement de base. Ce résultat sera repris au §5.2.3 pour le tracé du diagramme de bifurcation relatif à la couche de mélange refroidie.

5.2.1 Analyse modale

Afin d'établir un parallèle avec le cas supercritique, on a également effectué une décomposition spectrale dans l'espace des nombres d'onde.

La figure 5.36 représente l'évolution temporelle de l'énergie modale de perturbation $E_l(t)$ définie en (3.76) des modes $l = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ pour les valeurs des paramètres (5.29) à (5.31).

On observe que l'énergie de chacun des modes l présente une phase de croissance suivie d'une saturation de niveau $E_l(\infty)$. On peut vérifier que la hiérarchie des modes ne suit pas des lois d'échelle à la Landau, ce qui indique un régime fortement non-linéaire par rapport à la figure analogue en supercritique (figure 5.6). En outre, on observe des oscillations de l'énergie de saturation des modes $l = 0$, $l = 1$ et $l = 2$.

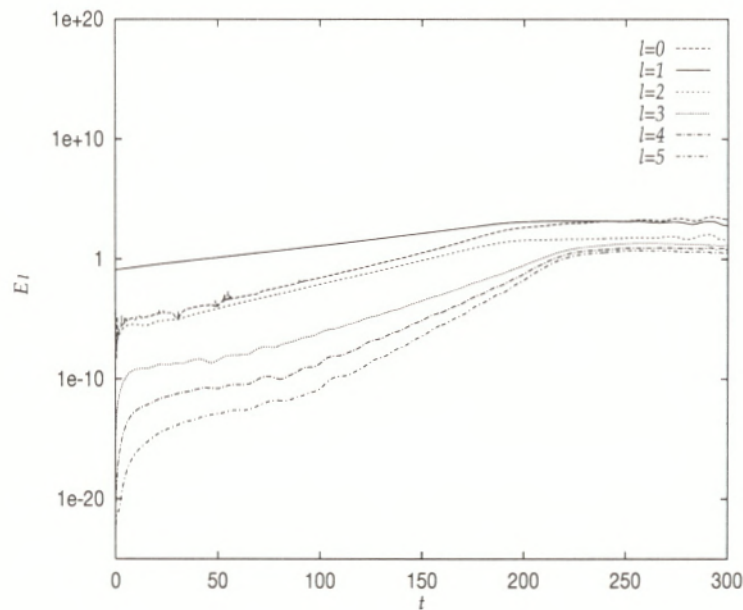


FIG. 5.36 - Évolution temporelle de l'énergie modale de perturbation pour les modes $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ dans le cas d'une couche de mélange refroidie ; $Ma=0,7$, $Re=50$, $b = -0,8$, $k = 0,65$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

L'analyse modale permet également d'obtenir les profils des fluctuations pour chaque mode l à différents instants t .

Les profils de déformation de l'écoulement moyen $u_0(y, t)$ sont représentés sur la figure 5.37. Ces profils conservent leur forme au cours du temps. Cette forme est semblable à celle obtenue dans le cas supercritique (figure 5.8) et on a également :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [u_0(y, t)]_{max} = \text{constante} . \quad (5.32)$$

En revanche, le caractère déstabilisant des non-linéarités est nettement mis en évidence par le fait que l'amplitude de $u_0(y, t)$ croît nettement plus que dans le cas supercritique : à la saturation, $Max[u_0(y, t)]_{max}$ vaut environ 20, alors qu'il approche seulement 2,5 dans le cas supercritique !

Par ailleurs l'effet de diffusion (5.11) observé dans le cas supercritique, quand $t \rightarrow \infty$ et $y \rightarrow \pm\infty$, est conservé.

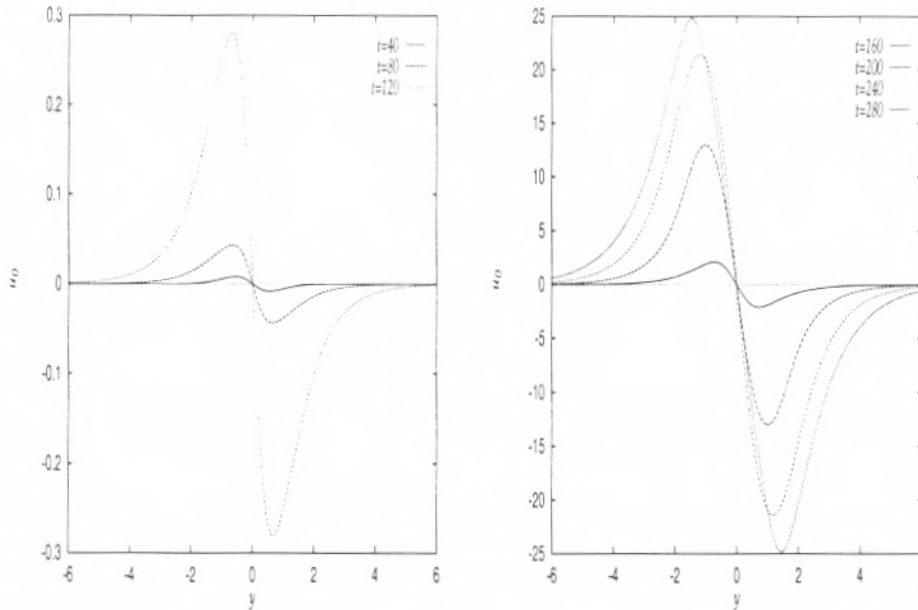


FIG. 5.37 - Déformation de l'écoulement moyen $u_0(y, t)$ à différents instants t pour une couche de mélange refroidie ; $Ma=0,7$, $Re=50$, $b = -0,8$, $k = 0,65$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

Les profils de vitesse longitudinale $u_1(y, t)$ et transversale $v_1(y, t)$ du mode fondamental sont présentés sur les figures 5.38 et 5.39. Comme $u_0(y, t)$, l'amplitude de la vitesse $u_1(y, t)$ est dans ce cas supérieure à son homologue supercritique de la figure 5.11 (environ 10 au lieu de 5 à la saturation). Ce phénomène est également ressenti pour la vitesse $v_1(y, t)$ qui atteint à la saturation une amplitude de 1 environ, au lieu de 0,3 dans le cas supercritique (figure 5.12).

La forme des profils de $u_1(y, t)$ et $v_1(y, t)$ reste régulière jusqu'à $t = 200$ environ. Au-delà de cet instant, des fluctuations apparaissent et sont plus marquées pour $v_1(y, t)$ que pour $u_1(y, t)$. Le profil de la vitesse $v_1(y, t)$ a une forme qui diffère davantage de son homologue supercritique que $u_1(y, t)$. Une simulation effectuée dans une boîte plus haute a permis de vérifier qu'il ne s'agissait pas d'un problème de conditions limites.

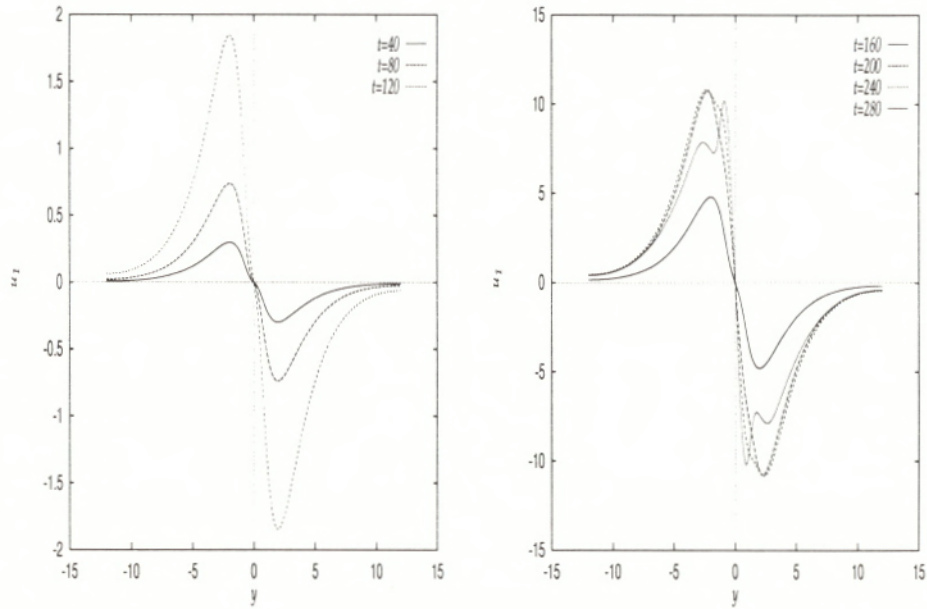


FIG. 5.38 - Perturbation en vitesse longitudinale pour $Ma=0,7$, $Re=50$, $b = -0,8$ et $k = 0,65$

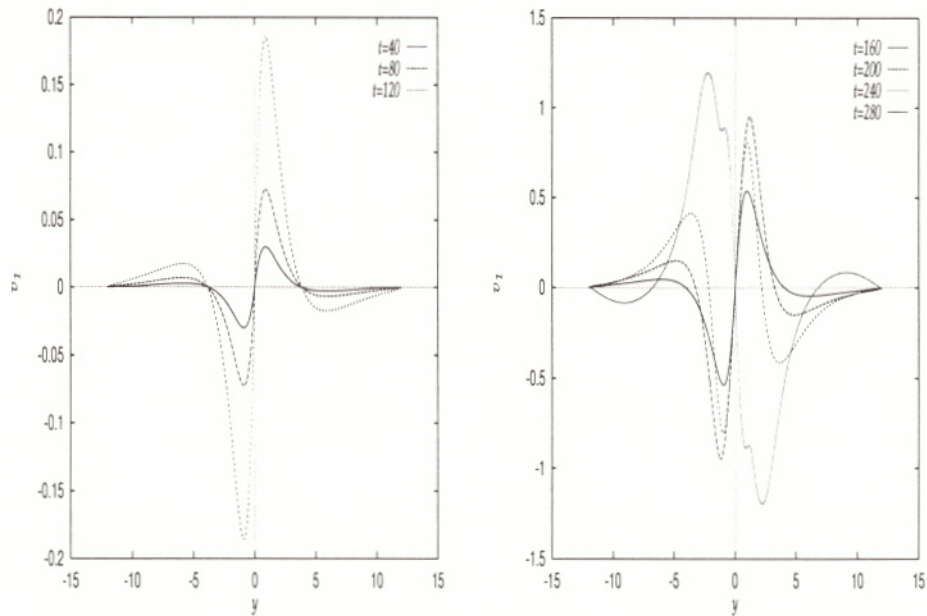


FIG. 5.39 - Perturbation en vitesse transversale pour $Ma=0,7$, $Re=50$, $b = -0,8$ et $k = 0,65$

5.2.2 Diagramme de bifurcation

Afin de tracer le diagramme de bifurcation de la couche de mélange refroidie, nous nous proposons d'affiner les résultats relatif à l'état stable qu'atteignent les modes (cf. figure 5.36). Le principe est le suivant : une simulation au nombre d'onde instable k_2 est effectuée en initialisant le calcul, à l'aide d'une simulation antérieure, par les champs obtenus à la saturation de l'onde de nombre d'onde k_1 , plus instable que k_2 . Une fois que l'onde k_2 sature, on utilise les champs résultants pour initialiser un nouveau calcul pour un nombre d'onde k_3 moins instable que k_2 . Ce processus est répété jusqu'à ce que le mode obtenu soit amorti.

Sur la figure 5.40 est tracée l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante obtenue à l'issue de cette série de simulations.³ Partant de $k = 0,65$ pour lequel une saturation a été obtenue (cf. figure 5.31), nous avons progressivement augmenté le nombre d'onde en réduisant la largeur de boîte de calcul $L_x = 2\pi/k$.

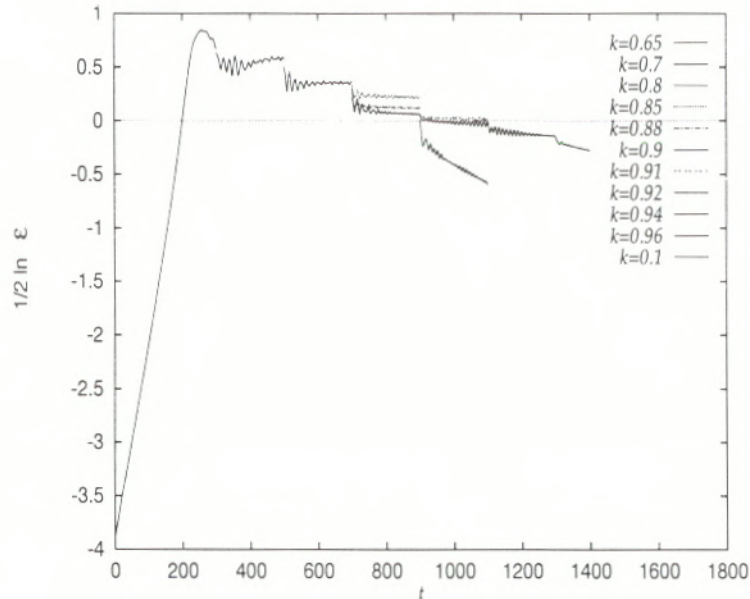


FIG. 5.40 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}(t)$ pour divers nombres d'onde k ; $Ma = 0,7$, $Re = 50$, $b = -0,8$; $\epsilon = 0,01$: simulation numérique directe.

On constate que de $k = 0,65$ à $k = 0,9$, l'énergie atteint un niveau de saturation $\mathcal{E}(\infty)$. Dès que $k = 0,91$, l'énergie décroît exponentiellement. Ce résultat est confirmé pour $k = 1$, valeur pour laquelle le taux d'atténuation est supérieur. Rappelons qu'au delà de la valeur $k_{num} = 0,67$, les nombres d'onde sont linéairement stables.

Ces résultats ainsi que l'existence du seuil illustré sur la figure 5.35 nous permettent maintenant de déterminer la nature de la bifurcation qui découle des résultats de la simulation et de la confronter aux résultats de l'analyse à la Landau (§2.3). La figure. 5.41 représente le diagramme de bifurcation ainsi obtenu.

³Les paramètres sont identiques aux valeurs (5.29)-(5.31).

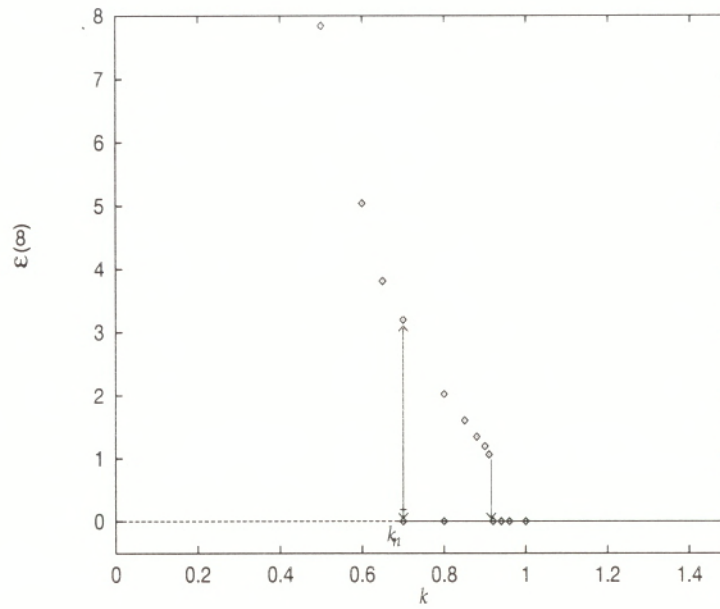


FIG. 5.41 - Diagramme de bifurcation $\mathcal{E}(\infty)$ en fonction de k ; $Ma = 0,7$, $Re = 50$, $b = -0,8$; simulation numérique directe.

Cette figure met en évidence la nature **sous-critique** de la bifurcation. On a pu tracer, grâce à la méthode explicitée ci-dessus, la branche stable vers laquelle tend l'écoulement sous l'effet des fortes non-linéarités. De ce fait, la présence d'une boucle d'hystérésis, indiquée par le parcours fléché sur la figure 5.41, est confirmée.

★ ★ ★ ★ ★

Chapitre 6

CONCLUSION

Le but de ce travail a été de confronter les modèles théoriques qui décrivent l'évolution faiblement non-linéaire des ondes d'instabilité dans les couches de mélange subsoniques, isothermes ou non-isothermes, avec les résultats de la simulation numérique directe.

Le code temporel que nous avons écrit a d'abord été utilisé pour l'étude du développement linéaire des ondes d'instabilité, non seulement par la mesure de leur taux de croissance, mais aussi par le suivi des fonctions propres au cours du temps. Ce premier travail a donc permis de valider la méthode numérique qui rend compte des caractéristiques de stabilité linéaire, que la couche de mélange soit isotherme ou non, et que l'onde soit fortement ou faiblement amplifiée.

Le développement non-linéaire des ondes d'instabilité faiblement amplifiées a constitué ensuite le "cœur" de cette étude.

Dans le cas d'une couche de mélange isotherme, on a trouvé que, conformément au modèle faiblement non-linéaire de Landau, le régime établi conduit à une bifurcation supercritique. Cela a pu être mis en évidence par l'existence d'une énergie de saturation à la fin de la phase linéaire qui varie proportionnellement à l'écart au neutre. Celle-ci est atteinte quel que soit le niveau initial de perturbation. Quantitativement, il existe une plage de nombre de Reynolds pour laquelle la valeur numérique de la constante de Landau, très peu dépendante des paramètres numériques, coïncide avec la valeur théorique obtenue à partir de l'analyse asymptotique de Djordjevic & Redekopp (1989a, 1989b). Cet intervalle correspond, par ailleurs, à l'unique zone où le régime de couche critique visqueuse implicite dans la théorie, peut être approché numériquement. L'analyse modale a également montré que, bien que les harmoniques soient de faible intensité, leur évolution temporelle par rapport au mode fondamental respecte les prévisions théoriques du modèle de Landau, aussi bien durant la phase de croissance linéaire que lors de la phase de saturation non-linéaire.

Enfin, la mesure de l'énergie de saturation des ondes relatives à différents nombres d'onde, a rendu possible le tracé du diagramme de bifurcation de la couche de mélange et a confirmé le caractère supercritique de la transition.

Dans le cas d'une couche de mélange dont l'état de base est refroidi symétriquement, la bifurcation souscritique prévue par l'analyse en perturbations de

Djordjevic & Redekopp a été confirmée pour des valeurs du nombre de Mach et du rapport de température entrant dans le cadre théorique.

Une analyse modale a permis de déterminer l'énergie des premières harmoniques dont le comportement ne suit plus les lois d'échelles relatives au cas supercritique (couche de mélange isotherme). Pour les nombres d'onde instables proches du neutre, il existe une énergie de saturation atteinte quel que soit le niveau initial de perturbation. En revanche, pour des nombres d'onde stables, il existe un seuil d'énergie initiale au delà duquel l'effet non-linéaire déstabilise la couche, et en deçà duquel il n'a aucun effet.

Cet ensemble de résultats a permis de tracer le diagramme de bifurcation de la couche de mélange refroidie et d'isoler la présence d'une boucle d'hystérésis étendue de part et d'autre du nombre d'onde neutre.

Cette thèse a donc démontré, pour la première fois, la pertinence des modèles asymptotiques de type Landau pour décrire l'évolution faiblement non-linéaire de la couche de mélange temporelle isotherme ou non-isotherme.

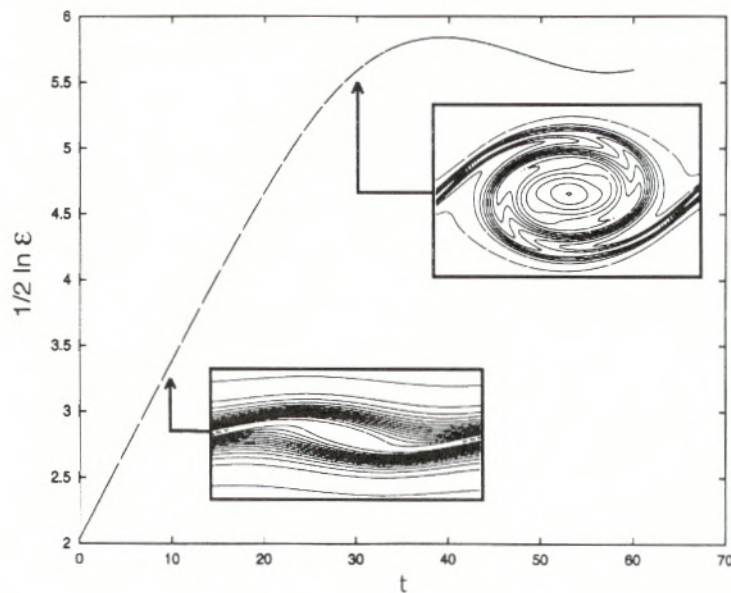


FIG. 6.1 - Évolution temporelle de l'énergie fluctuante $\frac{1}{2} \ln \mathcal{E}$ et lignes d'isovorticité aux instants $t = 10$ et $t = 40$; $Ma = 0,5$, $Re = 300$, $b = 0$, $k = 0,4$, $\epsilon = 0,01$; simulation numérique directe.

On voudrait pouvoir être capable de décrire l'évolution non-linéaire de l'onde la plus amplifiée qui, comme l'ont montré les calculs de stabilité linéaire de Michalke (1971) et Crighton & Gaster (1976), correspond à la fréquence dominante mesurée expérimentalement. Néanmoins, les analyses faiblement non-linéaires constituent un premier pas vers la compréhension de ces phénomènes.

On peut également reprocher à ces théories l'application limitée en nombre de Reynolds que le régime de couche critique visqueuse impose.

En outre, le fait que le profil en tangente hyperbolique ne soit pas solution des équations de Navier-Stokes nous conduit à y introduire des termes anti-diffusifs.

Pour les temps considérés, cependant, le modèle en tangente hyperbolique est fidèle aux profils mesurés en laboratoires. Soulignons que cette technique est commune à de nombreuses analyses de stabilité et simulations numériques.

L'utilisation d'une méthode de différences finies plutôt qu'une méthode spectrale peut sembler surprenant. Ce choix a été influencé par la collaboration engagée avec la division de l'Aérodynamique théorique 2 de l'ONERA dont l'expérience numérique réside principalement dans l'utilisation de schémas aux différences finies. En outre, un des avantages, *a priori*, de la programmation de ces schémas d'ordres peu élevés, est qu'elle ne nécessite pas l'utilisation d'outils mathématiques complexes. De plus, il s'est avéré qu'une résolution relativement faible nous a permis d'atteindre nos objectifs.

Comme on peut le constater sur la figure 6.1, où est représentée l'évolution temporelle de l'énergie fluctuante dans le cas d'un nombre d'onde de forte croissance linéaire, la simulation numérique limite clairement le domaine de validité de l'équation de Landau à des nombres d'ondes proches du neutre.

Une étude numérique des nombres d'onde proches du maximum est une extension naturelle de ce travail. Se pose alors la question de savoir si la simulation rendra compte du développement du mode sous-harmonique observé expérimentalement. En agissant sur la taille de la boîte de calcul, on peut également étudier les phénomènes d'appariement des grosses structures. Une telle étude permettrait alors de compléter le diagramme de bifurcation de la couche de mélange pour les petits nombres d'onde.

ANNEXE

EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA CONSTANTE DE LANDAU DE LA COUCHE DE MÉLANGE COMPRESSIBLE

La constante de Landau dépend d'un ensemble de fonctions dont les expressions analytiques sont données dans cette annexe. Ces résultats sont tous issus des travaux de Djordjevic & Redekopp (1989a,1989b).

$$T_{00} = 1 + b , \quad (1)$$

$$r = \frac{T_{00}^2 [8 - 2\text{Ma}^2(1 + \frac{1}{\text{Pr}}) + \text{Ma}^4] + \text{Ma}^2 T_{00} [2\frac{\gamma}{\text{Pr}} - 4 + \text{Ma}^2(2\gamma - 1)] - \text{Ma}^4 \frac{\gamma}{\text{Pr}}}{8T_{00} + 4(1 - T_{00})\text{Ma}^2} , \quad (2)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1 - \text{Ma}^2)}{\Gamma(\frac{3}{2} - \text{Ma}^2)} , \quad (3)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1 - \frac{1}{2}\text{Ma}^2)}{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\text{Ma}^2)} , \quad (4)$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction gamma.

$$s = 2(1 - \text{Ma}^2) \frac{I_1 + bI_2}{2T_{00} + (1 - T_{00})\text{Ma}^2} , \quad (5)$$

$$I_0 = -2(\gamma - 1)\text{Ma}^2 T_{00} + \frac{1}{\text{Pr}} \{2T_{00}^2 - T_{00}[2\gamma + \text{Ma}^2(2 - \gamma)] + \gamma\text{Ma}^2\} , \quad (6)$$

$$J_0 = -\frac{1}{6} \left(\frac{2}{1 + \text{Pr}}\right)^{4/3} - \frac{1 - \text{Pr}}{18} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{2}{1 + \text{Pr}}\right)^{4/3} - \left(\frac{2\text{Pr}}{1 + \text{Pr}}\right)^{7/3}\right] + \mathcal{O}(1 - \text{Pr})^2 , \quad (7)$$

$$\ell = (1 - \text{Ma}^2) T_{00}^{2/3} \left\{ r - \frac{I_0}{4} \frac{\text{Ma}^2 \text{Pr}^{1/3}}{2T_{00} + (1 - T_{00})\text{Ma}^2} \left[\text{Pr} \left(\frac{2}{1 + \text{Pr}}\right)^{1/3} + J_0 \right] \right\} , \quad (8)$$

$$I_L = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) . \quad (9)$$

RÉFÉRENCES

- ANDERSON D.A., TANNEHILL J.C. & PLETCHER R.H. (1984) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. McGraw-Hill Ed., New York.
- BENDER C.M. & ORSZAG S.A. (1978) *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill International Ed.
- BENNEY D.J. & BERGERON R.F. (1969) A new class of nonlinear waves in parallel flows. *Stud. appl. Math.* **48**, 181-204.
- BETCHOV R. & SZEWCZYK A. (1963) Stability of a shear layer between parallel streams. *Phys. Fluids* **6** 10, 1391-1396.
- BLUMEN W. (1970) Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. *J. Fluid Mech.* **40**, 769-781.
- BLUMEN W., DRAZIN P.G. & BILLINGS D.F. (1975) Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Part 2. *J. Fluid Mech.* **71**, 305-316.
- BOGDANOFF D.W. (1983) compressibility effects in turbulent shear layers. *AIAA Journal* **21**-6, 926-927.
- BROWAND F.K. (1966) An experimental investigation of the instability of an incompressible separated shear layers. *J. Fluid Mech.* **26**, 281-307.
- BROWAND F.K. & TROUTT (1980) A note on spanwise structure in the two-dimensional mixing layer. *J. Fluid Mech.* **917**, 4, 771-781.
- BROWN G.L. & ROSHKO A. (1974) On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.* **64**, 775-816.
- CAIN A.B., FERZIGER J.H. & REYNOLDS W.C. (1984) Discrete orthogonal function expansions for non-uniform grids using the Fast Fourier Transform. *J. Comp. Phys.* **56**, 272-286.
- CHEN J.H. (1993) The effect of compressibility on conserved scalar entrainment in a plane free shear layer. *Turbulent Shear Flows* **8**, Berlin Springer-Verlag, 297-311.
- CHURILOV S.M. & SHUKHMAN I.G. (1987) Note on weakly nonlinear stability theory of a free mixing layer. *Proc. R. Soc. Lond.* **A 409**, 351-367.
- CLEMENS N.T., MUNGAL M.G., BERGER T.E. & VANDSBURGER U. (1989) Visualisations of a compressible turbulent mixing layer. *Open Forum Abstract, Seventh Symposium on Turbulent Shear Flows*, Stanford, CA, August 21-23.

- CRIGHTON D.G. & GASTER M. (1976) Stability of slowly diverging jet flow. *J. Fluid Mech.* **77**, 397-413.
- DIMOTAKIS P.E. (1991) On the convection velocity of turbulent structure in supersonic shear layers. *AIAA Paper* **91-1724**.
- DIMOTAKIS P.E. & BROWN G.L. (1976) The mixing layer at high Reynolds number: large-structure dynamics and entrainment. *J. Fluids Mech.* **78**, 535-560.
- DJORDJEVIC V.D. & REDEKOPP L.G. (1988) Linear stability of nonhomotropic, inviscid compressible flows. *Phys. Fluids* **31** 11, 3239-3245.
- DJORDJEVIC V.D. & REDEKOPP L.G. (1989a) Nonlinear stability of subsonic mixing layers with symmetric temperature variations. *Proc. R. Soc. Lond. A* **426**, 287-330.
- DJORDJEVIC V.D. & REDEKOPP L.G. (1989b) Stability properties of subsonic mixing layers. *AIAA Paper* **89-1020**.
- DRAZIN P.G. & DAVEY A. (1977) Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Part 3. *J. Fluid Mech.* **82**, 255-260.
- DRAZIN P.G. & REID W. (1981) *Hydrodynamic Stability*. Cambridge
- FREYMUTH P. (1966) On transition in a separated laminar boundary layer. *J. Fluid Mech.* **25**, 683-704.
- GARCIA R.V. (1956) Barotropic waves in straight parallel flow with curved velocity profile. *Tellus* **8**, 82-93.
- GOTOH K. (1968) The equilibrium state of the finite disturbance in free flows. *J. Phys. Soc. Japan* **A** 293, 643-675.
- HABERMAN R. (1972) Critical layers in parallel flows. *Stud. appl. Math.* **51**, 139-161.
- HELMHOLTZ H. VON (1868) Über discontinuïliche Flüssigkeitsbewegungen. *Monats. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **23**, 215.
- HIRSCH C. (1987) *Numerical Computation of Internal and External Flows*. John Wiley & Sons Ed., 1-2.
- HUANG H.S. (1992) Transition to turbulence in confined compressible mixings layers. *PhD Thesis, University of Washington*.

- HUERRE P. (1977) Nonlinear instability of free shear layers. *AGARD Conference Proceedings No. 224 on Laminar-turbulent transition*, paper 5.
- HUERRE P. (1992) communication privée.
- HUERRE P. (1980) The nonlinear stability of a free shear layer in the viscous critical layer regime. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **A** 293, 643-675.
- HUERRE P. (1987) On the Landau constant in mixing layers. *Proc. R. Soc. Lond.* **A** 409, 369-381.
- HUERRE P. & SCOTT J.F. (1980) Effects of critical layer structure on the non-linear evolution of waves in free shear layers. *Proc. R. Soc. Lond.* **A** 371, 509-524.
- HUERRE P. & REDEKOPP L.G. (1983) Nonlinear evolution equations and critical layers. *Lectures appl. Math.* **20**, 79-96.
- KELVIN Lord (1871) Hydrokinetic solutions and observation. *Phil. Mag.* **42**, 362.
- KELVIN Lord (1880) On a disturbing infinity in Lord Rayleigh's solution for waves in a plane vortex stratum. *Nature* **23**, 45-46.
- LANDAU L.D. (1944) On the problem of turbulence. *C. R. Acad. Sci. URSS* **44**, 311-314.
- LANDAU L. & LIFCHITZ E. (1953) *Physique Théorique, Mécanique des fluides*, Éd. Mir Moscou, 2^e éd., 6.
- LEES L. & LIN C.C. (1946) Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. *Technical Note 1115, NACA*.
- LELE S. (1988) Vortex evolution in compressible free shear layers. *Workshop on The Physics of Compressible Turbulent Mixing*, Princeton, October.
- LELE S. (1989) Direct numerical simulation of compressible free shear flows. *AIAA Paper* **89-0374**.
- LESIEUR M., STAQUET C., LE ROY P. & COMTE P. (1988) The mixing layer and its coherence examined from the point of view of two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.* **192**, 360-380.
- LESIEUR M. (1989) Simulation numérique de couches de mélange bidimensionnelles compressibles. *Rapport final du Contrat ONERA 21.336/SAT.2.CDC*.

LESSEN M., FOX J.A. & ZIEN H.M. (1965) On the inviscid stability of the laminar mixing of two parallel streams of a compressible fluid. *J. Fluid Mech.* **23**, 355-367.

LESSEN M., FOX J.A. & ZIEN H.M. (1966) Stability of the laminar mixing of two parallel streams with respect to supersonic disturbances. *J. Fluid Mech.* **25**, 737-742.

LIN C.C. (1955) *The Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.

MANSOUR N.N., FERZIGER J.H. & REYNOLDS W.C. (1978) Large-eddy simulation of a turbulent mixing layer. *Report No. TF-11*, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, California.

METCALFE R.W., ORSZAG S.A., BRACHET M.E., MENON S. & RILEY J.J. (1987) Secondary instability of a temporally growing mixing layer. *J. Fluid Mech.* **184**, 207-243.

MICHALKE A. (1964) On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile. *J. Fluid Mech.* **19**, 543-556.

MICHALKE A. (1965a) Vortex formation in a free boundary layer according to stability theory. *J. Fluid Mech.* **22**, 371-383.

MICHALKE A. (1965b) On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *J. Fluid Mech.* **23**, 521-544.

MICHALKE A. (1971) Instabilität eines kompressiblen runden Freistrahls unter Berücksichtigung des Einflusses der Strahlgrenzschichtdicke. *Z. Flugwiss* **19**, 319-328.

MIKSAD R.W. (1972) Experiments on the nonlinear stages of free shear layers transition. *J. Fluid Mech.* **56**, 695-719.

ORSZAG S.A. & PAO (1974) Numerical computation of turbulent shear flows. *Advanced in Geophysics* **18A**, 225-236.

PAPAMOSCHOU D. (1989) Structure of the compressible turbulent shear layer. *AIAA Paper* **89-0126**.

PAPAMOSCHOU D. (1991) Structure of the compressible turbulent shear layer. *AIAA Journal* **29-5**.

PAPAMOSCHOU D. & ROSHKO A. (1986) Observations of supersonic free shear layers. *AIAA Paper* **86-0162**.

PAPAMOSCHOU D. & ROSHKO A. (1988) The compressible turbulent shear layer : An experimental study. *J. Fluid Mech.* **197**, 453-477.

POULIQUEN O. (1993) Instabilités et solitons de phase à l'interface de deux fluides non miscibles. *Thèse de l'École Polytechnique, Palaiseau*.

REYNOLDS O. (1883) An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the Law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **174**, 935.

RILEY J.J. & METCALFE R.W. (1980) Direct numerical simulation of a perturbed, turbulent mixing layer. *AIAA Paper* **80-0274**.

ROBERTS F.A., DIMOTAKIS P.E. & ROSHKO A. (1982) Kelvin-Helmholtz instability of superposed streams. *Album of Fluid Motion*, M. Van Dyke Ed., Stanford, Calif:Parabolic.

ROGERS M.M. & MOSER R.D. (1989) The development of three-dimensional temporally-evolving mixing layers. *Seventh Symposium on Turbulent Shear Flows*, Stanford University, California, August 21-23.

SANDHAM N.D. & REYNOLDS W.C. (1990) Compressible mixing layer : Linear theory and direct simulation. *AIAA Journal* **28-4**, 618-624.

SANDHAM N.D. & REYNOLDS W.C. (1991) Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer. *J. Fluid Mech.* **224**, 133-158.

SAMIMY M. & ELLIOTT (1990) Effects of compressibility on the characteristics of free shear layers. *AIAA Journal* **28-3**, 439-445.

SCHADE (1964) Contribution to the nonlinear stability theory of inviscid shear layers. *Phys. Fluids* **7**, 623-628.

SCHLICHTING H.(1968) *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill Ed, New York.

SOESTRINO M., GREENOUGH J.A., EBERHARDT D.S. & RILEY J.J. (1989) Confined compressible mixing layers : Part I. Three-dimensional instabilities. *AIAA Paper* **89-1810**.

STEWARTSON K. & STUART J.T. (1971) A nonlinear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **48**, 529-545.

STUART J.T. (1960) On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 1. *J. Fluid Mech.* **9**, 353-370.

TATSUMI T. & GOTOH K. (1960) The stability of free boundary layer between two uniform streams. *J. Fluid Mech.* **7**, 433-441.

TATSUMI T. & GOTOH K. (1971) The structure of the damping disturbances in the stability of unbounded laminar flows. *IUTAM Symposium on Instability of Continuous Systems*, September 8-12 1969, Springer-Verlag 1971, Ed. Leipholz, 368-375.

TROFF B., LÊ T.H., SAGAUT P. & LOC T.P. (1994) Simulation d'écoulements décollés. *74th FDP Meeting and Symposium on Application of Direct and Large Eddy Simulation to Transition and Turbulence, Chania, Crete, June 18-21, 1994* ONERA, Tiré à part 1994-57.

WATSON J. (1960) On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 2. *J. Fluid Mech.* **9**, 371-389.

Étude numérique des instabilités dans les couches de mélange compressibles

Karen AMRAM

La couche de mélange bidimensionnelle dont le profil de vitesse est une fonction en tangente hyperbolique constitue un modèle simplifié d'écoulement cisailé. Des études théoriques récentes ont permis de décrire l'évolution faiblement non-linéaire des nombres d'onde marginalement instables dans le régime de couche critique visqueuse, en termes d'un modèle asymptotique de type Landau.

Cette thèse utilise l'outil numérique pour démontrer la pertinence de ce modèle théorique en réalisant des configurations difficiles à reproduire en laboratoire. Les modes propres de la théorie de l'instabilité linéaire sont calculés dans l'approximation de fluide parfait par résolution numérique du problème aux valeurs propres de Rayleigh. Ceux-ci sont ensuite adoptés comme conditions initiales dans la simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes par une méthode de différences finies. La simulation reproduit effectivement l'évolution des ondes d'instabilité dans le régime linéaire. Conformément au modèle faiblement non-linéaire de Landau, le régime établi conduit à une bifurcation supercritique dans le cas d'une couche de mélange isotherme. Dans le cas d'une couche de mélange dont le cœur est refroidi symétriquement, la bifurcation sous-critique prévue par l'analyse en perturbations est confirmée et le diagramme de bifurcation présente une boucle d'hystérésis étendue de part et d'autre du nombre d'onde neutre.

Mots-clé : couche de mélange, simulation numérique directe, instabilité, bifurcation, écoulement compressible, équations de Navier-Stokes.

Numerical study of instabilities in compressible mixing layers

The two-dimensional mixing layer with a hyperbolic tangent velocity profile provides a simple prototype of free shear flows. Recent theoretical studies are known to describe the weakly nonlinear evolution of marginally unstable wave numbers in the viscous critical layer *regime* in terms of a Landau equation.

This study uses numerical techniques to demonstrate the relevance and range of validity of this theoretical model by simulating configurations that are not easily reproducible in laboratory experiments. Eigenmodes of linear instability theory are determined numerically in the inviscid approximation by solving the corresponding Rayleigh eigenvalue problem. These eigenfunctions are then used as initial conditions in Direct Numerical Simulations of the Navier-Stokes equations by finite differences. Simulations effectively reproduce the evolution of instability waves in the linear *regime*. In the case of isothermal mixing layers, the long-time dynamics lead to a supercritical bifurcation in full agreement with the weakly nonlinear Landau model. When the center of the mixing layer is symmetrically cooled, the subcritical bifurcation predicted by the perturbation analysis is confirmed. The bifurcation diagram presents an extended hysteresis loop located on either side of the neutral wave number.

Keywords : mixing layer, direct numerical simulation, instability, bifurcation, compressible flow, Navier-Stokes equations.