

École Polytechnique  
Laboratoire d'Hydrodynamique

Thèse présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

Spécialité : Mécanique

par

**Ivan DELBENDE**

---

*Réponse impulsionnelle dans les jets tournants  
et les sillages plans : analyse spatio-temporelle  
par simulation numérique directe*

---

soutenue le 8 janvier 1998  
devant le jury composé de :

M. J.-M. Chomaz	Examineur	Chargé de Recherche, LadHyX, Palaiseau
M. U. Ehrenstein	Examineur	Professeur, Université de Lille I
M. P. Huerre	Examineur	Professeur, École Polytechnique
M. P. Le Quéré	Examineur	Directeur de Recherche, LIMSI, Orsay
M. H. K. Moffatt	Président	Professeur, École Polytechnique/University of Cambridge
M. M. Provansal	Rapporteur	Professeur, Université d'Aix-Marseille III
M. J. Scott	Rapporteur	Professeur, École Centrale, Lyon



École Polytechnique  
Laboratoire d'Hydrodynamique

Thèse présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

Spécialité : Mécanique

par

**Ivan DELBENDE**

---

*Réponse impulsionnelle dans les jets tournants  
et les sillages plans : analyse spatio-temporelle  
par simulation numérique directe*

---

soutenue le 8 janvier 1998  
devant le jury composé de :

M. J.-M. Chomaz	Examineur	Chargé de Recherche, LadHyX, Palaiseau
M. U. Ehrenstein	Examineur	Professeur, Université de Lille I
M. P. Huerre	Examineur	Professeur, École Polytechnique
M. P. Le Quéré	Examineur	Directeur de Recherche, LIMSI, Orsay
M. H. K. Moffatt	Président	Professeur, École Polytechnique/University of Cambridge
M. M. Provansal	Rapporteur	Professeur, Université d'Aix-Marseille III
M. J. Scott	Rapporteur	Professeur, École Centrale, Lyon



## *Remerciements*

*Ce travail a été entièrement effectué au LadHyX, le Laboratoire d'Hydrodynamique de l'École Polytechnique, dans des conditions exceptionnelles de convivialité et de bonne humeur. Ce cadre dynamique n'est pas le fait du hasard, et je tiens à en remercier tous les auteurs et acteurs. Merci à mon directeur de thèse, Patrick Huerre, de m'avoir accueilli au labo, d'avoir suivi mes travaux et de m'avoir poussé à les présenter à de nombreuses occasions en France et à l'étranger. Merci à Jean-Marc Chomaz, directeur de thèse adjoint, pour sa vision poético-artistique de la vie en général et de la méca-flu en particulier. Merci à tous deux pour votre dynamisme, votre gentillesse et votre disponibilité. Merci à Pierre Brancher pour l'aide qu'il m'a apportée sous forme de codes numériques, collaborations et recommandations... Merci à Tati Thérèse pour sa verve, sa gentillesse et sa redoutable lanterne psychanalytique; à Tonio pour son humeur ensoleillée et ses manipes lumineuses; à Jack pour avoir maintenu et développé tout un parc de moogwais, de gremlins, d'aliens, de shadoks et de gibis pendant plusieurs années avec beaucoup de doigté. Merci à mes co-thésards Pierre (encore), Paul et son appart de L.A., Thomas pour sa collaboration dynamique, Cornel et Claudiu pour leur collaboration aérodynamique, Anaël, Benoît et Christian pour leurs expérimentations gastronomiques, Arnaud et Stéphanie de San Diego pour leur cohabitation pacifique. Merci aux *post-dottoranti italiani* Stefanella et Michela pour leur tiramisu, ainsi qu'à Carlo pour ne pas en avoir fait. Merci aux jazzmen de la bande Max, Olivier et Momo (aussi pour son palais vénitien), à Burt, Sabine, Antoine, Emmanuel et l'Oncle Paul. Merci à vous tous qui avez insufflé ce bouillonnement constant au pré-fa.*

*Je tiens également à remercier Raymonde Drouot de l'Université de Versailles et Jean Delery de l'ONERA à Meudon pour leur gentillesse et leur extrême souplesse; c'est un plaisir d'enseigner avec eux. Je voudrais remercier l'IDRIS/CNRS qui a fourni des heures et des heures de calcul (sous les projets n° 95/96/970173 du CP2) ainsi que l'assistance IDRIS pour son accueil et son efficacité.*

*Tous mes remerciements aux rapporteurs Michel Provansal et Julian Scott pour leur examen minutieux de ce travail. Merci aux membres du jury, Uwe Ehrenstein et Patrick Le Quéré, ainsi qu'à Keith Moffatt qui m'a fait l'honneur de le présider.*

*Et surtout, merci à mes amis et à mes proches — à Estelle pour son impatience de voir cette thèse enfin terminée — de pouvoir si bien prolonger dans les vacances, les week-ends, les soirées (et les répétitions), ces instants euphorisants.*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
	Références bibliographiques de l'introduction . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Fonction de Green : expression et analyse</b>	<b>17</b>
2.1	Fonction de Green et relation de dispersion . . . . .	17
2.1.1	Écoulement de base . . . . .	17
2.1.2	Fonction de Green . . . . .	18
2.1.3	Comportement asymptotique aux temps longs . . . . .	20
2.1.4	Structure des paquets d'ondes . . . . .	24
2.2	Analyse de la fonction de Green analytique . . . . .	26
2.2.1	Exploitation des invariances et symétries de l'opér. d'Orr–Sommerfeld . . . . .	26
2.2.2	Analyse spatio-temporelle des paquets d'ondes . . . . .	29
2.2.3	Analyse temporelle . . . . .	31
2.3	Analyse du paquet d'ondes réel . . . . .	32
2.3.1	Principe de la décomposition . . . . .	32
2.3.2	Paquets d'ondes dans les sillages plans — Cas linéaire . . . . .	34
2.3.3	Paquets d'ondes dans les sillages plans — Cas non linéaire . . . . .	35
	Références bibliographiques du chapitre . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Schéma numérique</b>	<b>39</b>
3.1	Méthode pseudo-spectrale en domaine périodique . . . . .	39
3.1.1	Décomposition en série de Fourier . . . . .	39
3.1.2	Termes linéaires . . . . .	40
3.1.3	Termes non linéaires . . . . .	41
3.1.4	Généralisation à plusieurs dimensions . . . . .	44
3.2	Application aux équations de Navier–Stokes . . . . .	44
3.2.1	Formulation spectrale . . . . .	45
3.2.2	Intégration en temps . . . . .	46
	Références bibliographiques du chapitre . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Instabilités spatio-temporelles dans les jets et sillages tournants</b>	<b>49</b>
4.1	Jets tournants et éclatement tourbillonnaire . . . . .	49
4.1.1	Principales configurations expérimentales . . . . .	49
4.1.2	Phénoménologie de l'éclatement . . . . .	52
4.2	Le tourbillon de Batchelor . . . . .	57
4.2.1	Obtention du profil de base . . . . .	57
4.2.2	Pertinence du modèle . . . . .	58

4.3	Réponse impulsionnelle linéaire du tourbillon de Batchelor . . . . .	61
1.	Introduction . . . . .	63
2.	Problem formulation . . . . .	66
3.	Numerical method . . . . .	68
4.	Wavepacket response and modal decomposition . . . . .	69
5.	Convective/absolute prop. of the Batchelor vortex with external flow . . .	79
6.	Conclusions and discussion . . . . .	85
	Appendix . . . . .	87
	Article references . . . . .	87
	Références bibliographiques du chapitre (hors article 4.3) . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Réponse impulsionnelle non linéaire dans les sillages plans parallèles</b>	<b>91</b>
5.1	Introduction . . . . .	93
5.2	Numerical aspects . . . . .	98
5.2.1	Direct numerical simulation technique . . . . .	98
5.2.2	Decomposition procedure for linear simulations . . . . .	99
5.2.3	Analysis of nonlinear simulations . . . . .	101
5.3	Linear impulse response . . . . .	102
5.3.1	Strongly confined periodic wake ( $L_y = 4.8$ ) . . . . .	102
5.3.2	Weakly confined wake ( $L_y = 25.6$ ) . . . . .	105
5.4	Nonlinear impulse response . . . . .	107
5.4.1	Strongly confined periodic wake ( $L_y = 4.8$ ) . . . . .	107
5.4.2	Weakly confined wake ( $L_y = 25.6$ ) . . . . .	110
5.5	Concluding remarks . . . . .	113
	Chapter references . . . . .	115
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>119</b>
	Références bibliographiques de la conclusion . . . . .	125



LE SOLDAT  
*(accordant le violon)*

On voit que c'est du bon marché,  
Il faut tout le temps l'accorder...

RAMUZ – STRAVINSKI  
*L'Histoire du Soldat (1918).*



## Chapitre 1

# Introduction

### Instabilités spatio-temporelles

Les écoulements «ouverts» regroupent les mouvements de fluides lors de leur passage à travers une certaine région de l'espace où ils sont observés et étudiés, sans qu'il y ait recyclage des particules fluides dans cette région. Les configurations d'écoulements et les problèmes qu'ils soulèvent sont extrêmement variés, et peuvent aller du «simple» écoulement dans un tuyau à l'écoulement complexe qui se développe autour d'une aile d'avion. Le point commun à ces écoulements est que leurs caractéristiques peuvent changer d'un point à l'autre du système — le long du tuyau ou de l'aile d'avion. Souvent ils entrent laminaires, c'est-à-dire réguliers et stationnaires, et ils sortent instationnaires, par exemple dans un état d'oscillations périodiques (comme un filet d'eau qui se brise spontanément en gouttelettes régulières), ou encore de turbulence développée (comme le panache d'une cheminée d'usine). Le système change de régime parce que l'écoulement perd sa stabilité : en général, la forme laminaire de l'écoulement est encore une solution des équations du mouvement, mais elle n'est plus observable car toute déviation, toute fluctuation, inévitable, est amplifiée et conduit le système vers une autre solution, plus complexe. L'étude des instabilités consiste à décrire et à prévoir sous quelles conditions et par quel mécanisme l'écoulement passe d'un état à un autre.

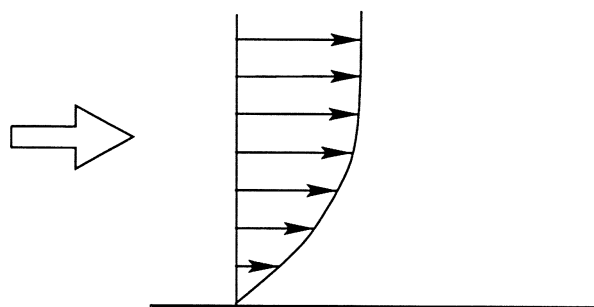


FIG. 1.1 – *Allure du profil de vitesse dans l'écoulement de couche limite sur une plaque plane.*

Ces considérations trouvent leur illustration dans l'écoulement le long d'une plaque plane. L'adhérence du fluide au niveau de la plaque provoque le développement d'une couche limite à sa surface, région qui assure la transition entre la vitesse nulle à la paroi et la vitesse du fluide incident quand on s'en éloigne (voir le schéma, figure 1.1). Ce type de profil donne précisément lieu à une séquence d'instabilités et d'interactions non linéaires d'ondes instables — toujours à

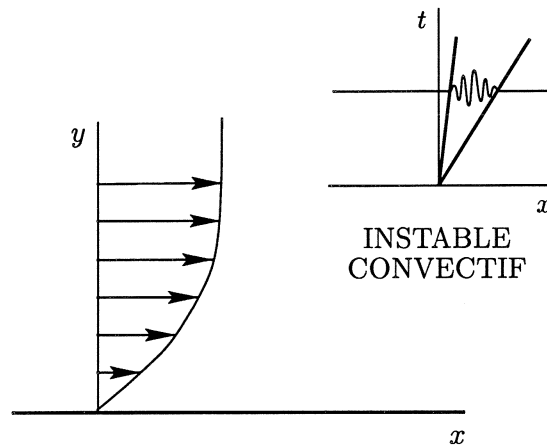


FIG. 1.2 – L'écoulement de couche limite sur une plaque plane est instable convectif, si toutefois la vitesse du fluide incident est suffisamment élevée pour qu'il soit instable. Cette propriété est schématisée par le diagramme spatio-temporel  $x-t$ . Le paquet d'ondes instable se développe à l'intérieur du secteur représenté.

l'étude aujourd'hui — qui conduisent à une dynamique turbulente suffisamment loin en aval. Pour étudier cette transition, Gaster & Grant (1975) ont perturbé localement une couche limite laminaire expérimentale au moyen d'un petit jet à la paroi et ont observé la réponse de la couche limite à cette petite impulsion localisée, la *réponse impulsionnelle* de l'écoulement. Celle-ci prend la forme d'un petit paquet d'ondes qui croît en amplitude tout en s'étalant dans la direction de l'écoulement. Au-delà d'un certain temps, le paquet d'ondes quitte le milieu, balayé par le fluide. L'écoulement de couche limite est *instable convectif* (Briggs, 1964 ; Bers, 1975) : les petites perturbations y croissent mais sont emportées par le courant. Cette propriété est souvent illustrée par le diagramme spatio-temporel  $x-t$  de la figure 1.2 où  $x$  est une coordonnée d'espace qui croît dans le sens de l'écoulement, et  $t$  est le temps.

Une expérience très similaire a été récemment conduite par Lingwood (1996) sur la couche-limite d'un disque tournant. Dans cette configuration, le fluide est aspiré vers le disque et éjecté radialement, comme le schématise la figure 1.3. Dans une certaine gamme de vitesses de rotation, la couche limite est turbulente au sein d'une couronne qui s'étend jusqu'au bord du disque. Lingwood a étudié l'évolution d'un petit jet impulsionnel créé près du centre. Comme pour la

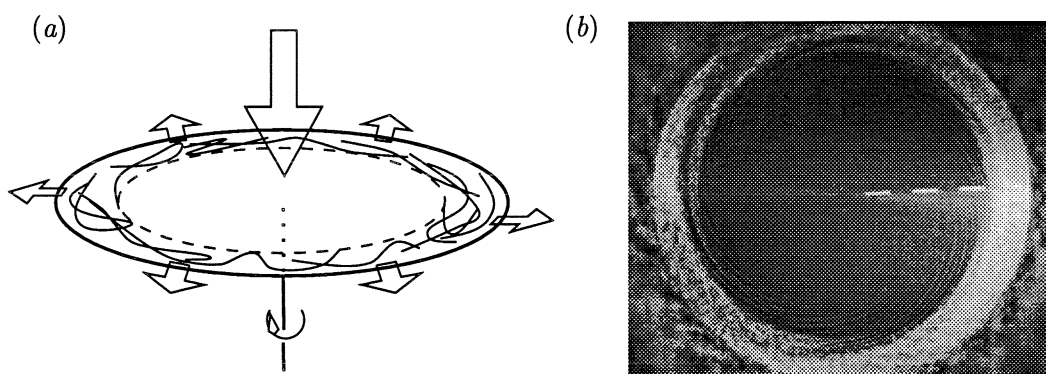


FIG. 1.3 – Écoulement de couche limite sur un disque tournant. (a) Schéma de l'écoulement. (b) Vue de dessus de l'expérience de Kobayashi, Kohama & Takamadate (1980). Dans une certaine gamme de vitesses de rotation, on observe une couronne turbulente au bord du disque.

couche limite, il se développe en paquet d'ondes qui tourne avec l'écoulement et qui est entraîné vers l'extérieur. Cependant, au fur et à mesure qu'il s'éloigne, il ralentit (plus exactement, son bord intérieur ralentit). Le paquet d'ondes parvient même, à une certaine distance du centre, à s'opposer exactement au mouvement centrifuge du fluide (son bord intérieur ne progresse plus radialement, il s'arrête). Sa position correspond alors précisément au bord intérieur de la couronne turbulente, et la présence de cette dernière est du même coup élucidée ! En effet, au sein de la couronne turbulente, les perturbations sont capables de remonter l'écoulement. On dit que l'instabilité *y* est *absolue* (Briggs, 1964 ; Bers, 1975). Au bord de la couronne, on a une transition entre le milieu interne, instable convectif, qui éjecte les perturbations radialement, et le milieu périphérique où une partie de ces perturbations reste piégée et dégénère en turbulence (voir figure 1.4).

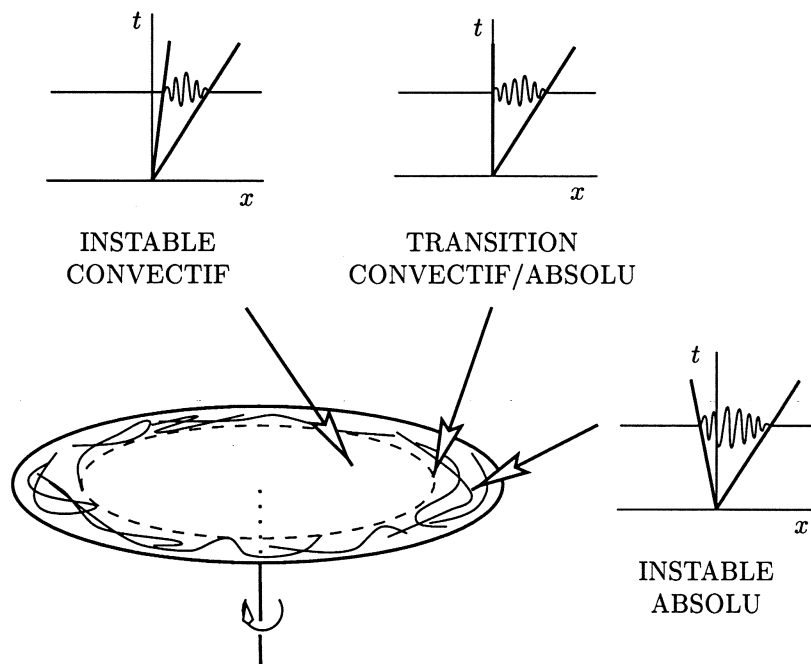


FIG. 1.4 – L'écoulement de couche limite sur un disque tournant présente une région d'instabilité convective au centre, et une région d'instabilité absolue à la périphérie. La position de la transition convectif/absolu détermine l'extension de la couronne turbulente.

Il ne faut toutefois pas assimiler instabilité absolue et turbulence, car la présence d'une zone d'instabilité absolue au sein d'un écoulement peut avoir un tout autre effet, celui de résonateur hydrodynamique. Cette situation est illustrée par le sillage tourbillonnaire à l'aval d'un cylindre, figure 1.5. Lorsque l'écoulement incident est suffisamment fort, le sillage devient le siège d'oscillations spontanées (cette transition a été étudiée par Provansal, Mathis & Boyer, 1987). C'est la présence d'une région située juste à l'aval de l'obstacle, dans laquelle l'écoulement est instable absolu, qui joue le rôle d'excitateur harmonique et qui est responsable de la bifurcation de l'écoulement initial, laminaire, vers l'état périodique que constitue la double allée tourbillonnaire de von Kármán. Ces exemples montrent l'importance de distinguer la nature convective ou absolue de l'instabilité car l'évolution des systèmes en dépend fortement.

La capacité d'une perturbation à remonter un écoulement instable absolu est liée à l'existence d'ondes dont l'énergie peut remonter le fluide incident. En d'autres termes, leur vitesse de groupe est opposée au sens de l'écoulement. Si l'on applique, à  $t = 0$  en un point  $x = 0$ , une petite impulsion, les ondes de vitesse de groupe  $v_g$  donnée s'éloignent de la source à la vitesse  $v_g$  ; on

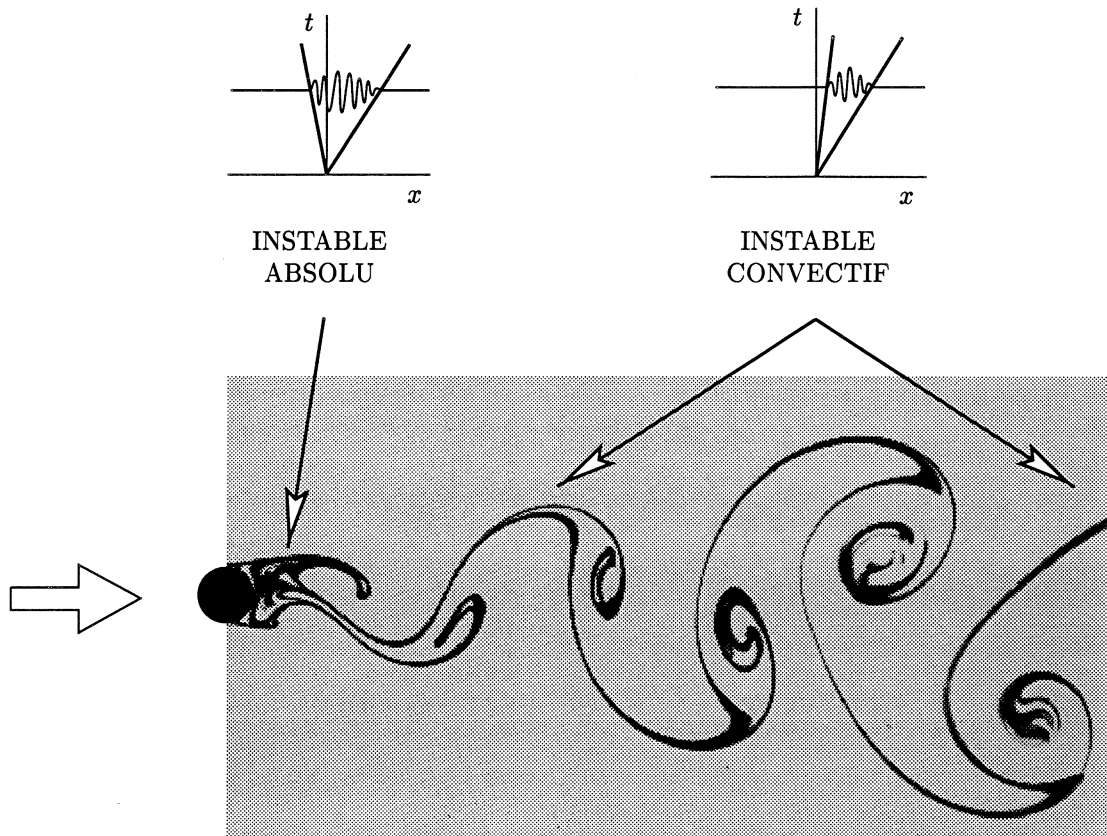


FIG. 1.5 – Écoulement derrière un cylindre en régime périodique. Les oscillations sont provoquées par la présence d'une zone d'instabilité absolue située juste à l'aval du cylindre (photo d'après Taneda).

peut donc les suivre sur le rayon spatio-temporel  $x/t = v_g$ . Parmi ces ondes, celles de vitesse de groupe nulle  $v_g = 0$  vont dominer la dynamique du système aux temps longs, car elles se développent sur place : si elles sont amplifiées, l'instabilité est absolue et l'écoulement bifurque vers un autre état. Si elles sont atténuées, l'instabilité est convective et quitte le milieu.

La méthode rigoureuse communément utilisée pour déterminer la nature convective ou absolue de l'instabilité consiste à rechercher les ondes de vitesse de groupe nulle à partir de la relation de dispersion. Cette dernière lie la fréquence  $\omega$ , complexe, au nombre d'onde  $k$ , également complexe, par la fonction

$$\omega = \omega(k) \quad (1.1)$$

généralement multiforme. Les ondes de vitesse de groupe nulle sont les ondes  $k_0$  telles que

$$v_g \equiv \frac{d\omega}{dk}(k_0) = 0, \quad (1.2)$$

c'est-à-dire les points-selle de la relation de dispersion. Le taux d'amplification de ces ondes,  $\Im m[\omega(k_0)]$  renseigne alors sur la nature convective (l'onde qui se développe sur place est atténuée :  $\Im m[\omega(k_0)] < 0$ ) ou absolue (l'onde qui se développe sur place est amplifiée :  $\Im m[\omega(k_0)] > 0$ ) de l'instabilité.<sup>1</sup>

1. De plus, cette procédure passe par le tri des points-selle en suivant la prescription proposée par Briggs et Bers, voir Huerre & Monkewitz, 1990.

Lingwood (1995) a ainsi étudié les propriétés locales, relatives à chaque position radiale  $r$ , du profil de vitesse de couche limite sur le disque tournant (solution auto-similaire de von Kármán). Le tri et la recherche des points-selle de la relation de dispersion lui ont permis de montrer que l'écoulement devient instable absolu à partir d'une certaine distance du centre, distance qui correspond avec une bonne précision au rayon intérieur de la couronne turbulente des expériences. Ceci confirme la pertinence de la transition convectif/absolu pour décrire le changement d'état du fluide dans ce système.

Cette procédure peut cependant s'avérer extrêmement lourde suivant la complexité de l'écoulement considéré et celle de la relation de dispersion associée. Pour déterminer la nature convective/absolue de l'instabilité, on a adopté ici une méthode plus proche de sa manifestation physique. On réalise en fait numériquement l'expérience de réponse impulsionnelle. L'atout de l'outil numérique est double : on dispose d'une part d'un contrôle total (puisque numérique) sur l'écoulement de base, et éventuellement sur ses lois d'évolution. D'autre part, on connaît la totalité du champ de vitesse à autant d'instantaneés que l'on souhaite. On simule donc l'évolution d'une perturbation localisée, prise comme condition initiale, par intégration des équations de Navier–Stokes perturbées autour de l'écoulement de base choisi. Le paquet d'ondes obtenu, qui contient toutes les informations sur les instabilités spatio-temporelles, est ensuite analysé. À l'aide d'une seule simulation, on accède ainsi à toutes les grandeurs caractérisant les ondes pour *toutes* les valeurs de la vitesse de groupe, et en particulier au taux de croissance de l'onde de vitesse de groupe nulle, qui influe sur la dynamique du système (chapitre 2).

### Jets/sillages tournants

Quand leur débit est suffisamment élevé, les écoulements de jet sont des systèmes instables convectifs. Lorsqu'on les met en rotation, ils sont sujets au phénomène d'éclatement tourbillonnaire, processus au cours duquel un point d'arrêt et une zone de recirculation apparaissent en leur sein (figure 1.6). Benjamin (1962) a proposé une analogie séduisante avec le ressaut hydraulique que subissent les écoulements en eau peu profonde : ce dernier est une transition entre un écoulement «sur-critique» où les ondes se propagent uniquement vers l'aval, et un écoulement «sous-critique» que les ondes peuvent remonter. On sait depuis que, contrairement aux écoulements en eau peu profonde qui sont stables, les jets tournants sont fortement instables et que l'on doit prendre en compte la propagation de ces ondes d'instabilité, et les études précédentes suggèrent de déterminer leur nature convective ou absolue (chapitre 4). Pour le modèle du tourbillon de Batchelor (1964) adopté ici (§4.2), la relation de dispersion, exprimée par Howard & Gupta (1962) dans la limite non-visqueuse, est extrêmement complexe. La méthode de simulation numérique directe d'une impulsion localisée est donc particulièrement adaptée à cette configuration. De plus, par changement de référentiel galiléen, on a accès aux propriétés de toute une gamme de profils de jets et de sillages tournants avec courant ou contre-courant externe.

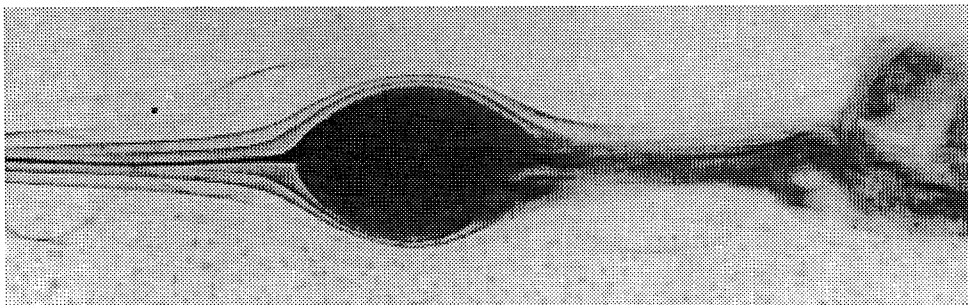


FIG. 1.6 – Éclatement tourbillonnaire de type bulle dans un écoulement tournant venant de la gauche (Sarpkaya, 1971).

### Sillages plans parallèles

La prédiction de la fréquence des oscillations spontanées que présente le sillage d'un cylindre (figure 1.5) est un problème complexe. La fréquence des ondes de vitesse de groupe nulle à l'intérieur de la région d'instabilité absolue est proche de la fréquence d'oscillation du sillage. Hammond & Redekopp (1997) ont montré récemment que les propriétés locales des ondes pouvant croître sur place permettent de déduire très précisément, par une procédure non exposée ici, la fréquence des oscillations du sillage dont elles sont à l'origine. Or, cette approche est basée sur l'hypothèse de petites perturbations, donc sur une formulation linéarisée des lois du mouvement, alors que l'allée de von Kármán présente des tourbillons très développés, dont le comportement n'a a priori aucune raison d'être le même que celui de petites perturbations. L'effet induit par ces tourbillons intenses sur eux-mêmes, décrit dans les équations par des termes *non linéaires*, est susceptible d'affecter leur propre comportement. Ici, encore, l'outil numérique est particulièrement bien adapté à l'étude. En particulier, des réponses impulsionnelles obtenues en *absence* et en *présence* des termes non linéaires sont simulées et comparées (chapitre 5). Cette procédure permet d'évaluer l'effet éventuel des non-linéarités dans ce système dans le cadre d'instabilités convectives/absolues non linéaires (Chomaz, 1992).

### Organisation du mémoire

Le mémoire de thèse est organisé de la façon suivante. Après le présent chapitre introductif (chapitre 1), le cadre mathématique des instabilités spatio-temporelles est dressé par l'intermédiaire des propriétés de la réponse impulsionnelle, ou fonction de Green. Son expression est redémontrée, et le principe des méthodes utilisées pour son analyse est exposé (chapitre 2). Le schéma numérique adopté pour les simulations numériques est présenté et discuté au chapitre 3. La simulation numérique directe de la réponse impulsionnelle linéarisée d'une famille de jets et de sillages tournants, le tourbillon de Batchelor (1964) est mise en œuvre au chapitre 4. Le chapitre 5 est consacré à l'étude d'une réponse impulsionnelle non linéaire dans le cadre d'une famille de sillages plans parallèles élaborée par Monkewitz & Nguyen (1987). Le chapitre 6 présente les conclusions ainsi que des perspectives ouvertes par ces travaux.



## Références bibliographiques de l'introduction

- BATCHELOR, G. K. 1964 Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.* **20**, 645–658.
- BENJAMIN, T. B. 1962 Theory of the vortex breakdown phenomenon. *J. Fluid Mech.* **14**, 529–551.
- BERS, A. 1975 Linear waves and instabilities. In *Physique des plasmas*. Eds. DeWitt, C. & Peyraud, J. New York, Gordon & Breach.
- BRIGGS, R. J. 1964 *Electron-Stream Interaction With Plasmas*. Cambridge, Mass. MIT Press.
- CHOMAZ, J.-M. 1992 Absolute and convective instabilities in nonlinear systems. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1931–1934.
- GASTER, M. & GRANT, I. 1975 An experimental investigation of the formation and development of a wave packet in a laminar boundary layer. *Proc. R. Soc. Lond. A* **347**, 253–269.
- HAMMOND, D. A. & REDEKOPP, L. G. 1997 Global dynamics of symmetric and asymmetric wakes. *J. Fluid Mech.* **331**, 231–260.
- HOWARD, L. N. & GUPTA, A. S. 1962 On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows. *J. Fluid Mech.* **14**, 463–476.
- HUERRE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473–537.
- KOBAYASHI, R., KOHAMA, Y. & TAKAMADATE, CH. 1980 Spiral vortices in boundary layer transition regime on a rotating disk. *Acta Mech.* **35**, 71–82.
- LINGWOOD, R. J. 1995 Absolute instability of the boundary layer on a rotating disk. *J. Fluid Mech.* **299**, 17–33.
- LINGWOOD, R. J. 1996 An experimental study of absolute instability of the rotating-disk boundary-layer flow. *J. Fluid Mech.* **314**, 373–405.
- MONKEWITZ, P. A. & NGUYEN, L. N. 1987 Absolute instability in the near-wake of two-dimensional bluff bodies. *J. Fluids Struct.* **1**, 165–184.
- PROVANSAL, M., MATHIS, C. & BOYER, L. 1987 Bénard-von Kármán instability: transient and forced regimes. *J. Fluid Mech.* **182**, 1–22.
- SARPKAYA, T. 1971 On stationary and travelling vortex breakdown. *J. Fluid Mech.* **45**, 545–559.



## Chapitre 2

# Fonction de Green : expression et analyse

Dans ce chapitre, on expose comment on peut, par l'exploitation de la réponse impulsionnelle d'un écoulement instable, accéder aux principales propriétés spatio-temporelles de l'instabilité. La fonction de Green complexe est introduite et exprimée à l'aide des variables – fréquence et nombre d'onde – et des fonctions qui caractérisent les ondes d'instabilité (§2.1). On présente ensuite les techniques d'analyse qui en découlent (§2.2). La procédure utilisée pour générer la fonction de Green complexe à partir du paquet d'ondes issu de la simulation à l'aide d'une transformation de Hilbert est exposée et illustrée dans le cadre des sillages plans (§2.3).

### 2.1 Fonction de Green et relation de dispersion

On se place ici dans le contexte d'écoulements bidimensionnels ouverts en domaine infini. Les grandeurs sont toutes adimensionnées par une échelle de longueur  $L$  et une vitesse  $U$  typiques de l'écoulement. Le développement suivant est tiré des travaux de Drazin & Howard (1966), Gaster (1968), Huerre & Monkewitz (1985, 1990), et Huerre & Rossi (1998).

#### 2.1.1 Écoulement de base

On considère un écoulement de fluide visqueux incompressible dans un domaine infini, de composantes de vitesse  $(U(x, y, t), V(x, y, t))$  en coordonnées cartésiennes. Pour un tel écoulement, la vorticité est orthogonale au plan du mouvement et peut donc être décrite par le champ scalaire

$$\Omega(x, y, t) \equiv \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Son évolution sous l'effet de l'advection et de la diffusion visqueuse est régie par l'équation de Helmholtz :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + U(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} + V(x, y, t) \frac{\partial}{\partial y} \right] \Omega(x, y, t) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \Omega(x, y, t), \quad (2.2)$$

où  $Re = UL/\nu$  désigne le nombre de Reynolds, et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. Le caractère bidimensionnel de l'écoulement permet d'introduire la fonction de courant  $\Psi(x, y, t)$

telle que, à tout instant :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Omega = \nabla^2 \Psi. \quad (2.3)$$

L'équation (2.2) se ramène alors à une équation aux dérivées partielles non linéaire du quatrième ordre pour la seule fonction de courant :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \right] \nabla^2 \Psi(x, y, t) = 0. \quad (2.4)$$

On se restreint ici à l'étude des propriétés d'écoulements cisailés parallèles à la direction  $x$ , pour lesquels  $U(x, y, t) = U_0(y)$  et  $V(x, y, t) = 0$ . Pour qu'un tel écoulement soit solution de (2.4), il faut que sa fonction de courant  $\Psi_0$ , qui ne dépend que de  $y$  d'après (2.3), vérifie :

$$\frac{d^4}{dy^4} \Psi_0(y) = 0. \quad (2.5)$$

Par conséquent,  $\Psi_0(y)$  est un polynôme de degré trois au plus en  $y$ , et  $U_0(y)$  un polynôme de degré deux au plus. Seuls les écoulements constants ( $U_0(y) = \text{const}$ ), de Couette ( $U_0(y) = \alpha y$ ), de Poiseuille ( $U_0(y) = \beta y^2$ ) et leurs combinaisons sont des solutions parallèles stationnaires de (2.4).

Cette restriction est sévère, et l'on aimerait étudier des écoulements pour lesquels  $U_0(y)$  puisse être choisi librement, comme il est possible de le faire pour un fluide non visqueux. Si l'on se restreint toujours à des écoulements parallèles, il faut alors permettre une dépendance de  $U_0$  et de  $\Psi_0$  avec le temps, et l'équation (2.4) se réduit à :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi_0(y, t) = 0. \quad (2.6)$$

On voit alors qu'un profil de vitesse initial  $U_0(y, t = 0)$  *quelconque* évolue de manière significative sur le temps caractéristique de diffusion visqueuse  $\tau_v \sim Re$ . Pour des temps petits devant ce temps caractéristique ( $t \ll \tau_v$ ), il est légitime de faire l'hypothèse de régime quasi-stationnaire pour l'écoulement de base, c'est-à-dire de considérer que la diffusion visqueuse  $y$  est quasiment gelée :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi_0(y, t) = \frac{1}{Re} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \Psi_0(y, t) \approx 0. \quad (2.7)$$

Cette hypothèse n'est justifiée que si le temps  $\tau_i$  caractéristique de l'évolution des instabilités est bien négligeable devant le temps  $\tau_v$  de diffusion visqueuse ( $\tau_i \ll \tau_v$ ).

### 2.1.2 Fonction de Green

On s'intéresse maintenant à la stabilité de l'écoulement stationnaire ou quasi-stationnaire  $U_0(y)$  (on suppose donc que les relations (2.7) sont vérifiées). Pour cela, on superpose à la fonction de courant  $\Psi_0(y)$  une perturbation  $\psi(x, y, t)$  quelconque de petite amplitude dont on étudie l'évolution dans le temps et l'espace. La fonction de courant totale  $\Psi(x, y, t) = \Psi_0(y) + \psi(x, y, t)$  est donc reportée dans l'équation de Helmholtz (2.4) et la relation (2.7) de quasi-stationnarité de l'écoulement de base est invoquée. L'équation résultante est linéarisée, c'est-à-dire que seuls les termes d'ordre unité en  $\psi$  sont conservés, les termes d'ordre supérieur étant négligés. En faisant apparaître la vitesse de base  $U(y)$  et ses dérivées par rapport à  $y$ , on arrive à l'équation :

$$\mathcal{L}[\psi] \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial t} + U(y) \frac{\partial}{\partial x} \right] \nabla^2 \psi - U''(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0, \quad (2.8)$$

à laquelle on adjoint la condition initiale  $\psi(x, y, t = 0) = \psi_0(x, y)$ . Celle-ci peut être incluse dans (2.8) qui prend la forme :

$$\mathcal{L}[\psi] = \psi_0(x, y) \delta(t), \quad (2.9)$$

où  $\delta(\cdot)$  désigne la distribution de Dirac.

### Fonction de Green réelle

Pour résoudre les problèmes linéarisés de ce type, il est utile d'introduire une fonction particulière, la fonction de Green réelle  $g(x, y, t; y_0)$  associée à l'opérateur  $\mathcal{L}$ , qui est solution de :

$$\mathcal{L}[g] = \delta(x)\delta(y - y_0)\delta(t). \quad (2.10)$$

Par analogie avec (2.9), on voit que  $g(x, y, t; y_0)$  est solution de (2.8) pour des conditions initiales particulières  $\psi_0(x, y) = \delta(x)\delta(y - y_0)$ , infiniment concentrées en  $x = 0, y = y_0$ . La fonction  $g$  décrit la réponse de l'écoulement à une impulsion spatialement localisée, c'est sa *réponse impulsionnelle*. D'un point de vue physique, elle décrit la manière dont l'énergie de la perturbation se propage dans le système et s'échange avec celle de l'écoulement de base. Dans ce cadre linéarisé, l'intérêt de la fonction de Green est aussi d'ordre mathématique : en effet, une fois la réponse impulsionnelle  $g(x, y, t; y_0)$  déterminée, la solution  $\psi(x, y, t)$ , pour une condition initiale  $\psi_0(x, y)$  quelconque, s'obtient simplement comme la convolution spatiale de la condition initiale  $\psi_0(x, y)$  avec la fonction de Green  $g(x, y, t; y_0)$  :

$$\psi(x, y, t) = \iint \psi_0(\xi, y_0)g(x - \xi, y, t; y_0) d\xi dy_0. \quad (2.11)$$

### Fonction de Green analytique

Avant d'aller plus loin, et pour retrouver la notation complexe habituelle dans les études d'instabilité linéarisée, on introduit la fonction de Green complexe  $\tilde{g}(x, y, t; y_0)$ .

On remarque tout d'abord sur l'équation (2.8) que les coefficients de  $\psi$  et de ses dérivées partielles sont indépendants du temps et de  $x$  (grâce aux hypothèses d'homogénéité selon  $x$  et de stationnarité faites sur l'écoulement de base  $\Psi_0$ ). Les transformations de Fourier spatiale suivant  $x$  et temporelle :

$$\hat{g}(k, y, t; y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y, t; y_0)e^{-ikx} dx \quad (2.12)$$

$$\hat{\hat{g}}(k, y, \omega; y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(k, y, t; y_0)e^{i\omega t} dt, \quad (2.13)$$

vont permettre une simplification considérable du problème.

Dans l'espace de Fourier, on obtient la fonction de Green complexe  $\hat{\hat{g}}$  à partir de la fonction de Green réelle  $\hat{g}$  en mettant à zéro toute la contribution des nombres d'onde négatifs  $k < 0$  :

$$\hat{\hat{g}}(k, y, t; y_0) = 2H(k)\hat{g}(k, y, t; y_0), \quad (2.14)$$

où  $H(k)$  est la fonction échelon de Heaviside. Notons que cette opération ne détruit aucune information puisque,  $g(x, y, t; y_0)$  étant une fonction réelle,  $\hat{g}(k, y, t; y_0)$  et  $\hat{g}(-k, y, t; y_0)$  sont complexes conjugués. Dans l'espace physique, la partie imaginaire du signal est construite de manière équivalente à l'aide de la transformée de Hilbert de la partie réelle, ce qui s'écrit :

$$\hat{\hat{g}}(x, y, t; y_0) = \left(1 + \frac{i}{\pi x} * \right) \hat{g}(x, y, t; y_0). \quad (2.15)$$

Dans cette dernière relation,  $*$  désigne l'opérateur de convolution selon  $x$ . On peut inversement retrouver  $g$  connaissant  $\tilde{g}$  en en prenant la partie réelle :

$$g = \text{Re} \{ \tilde{g} \}. \quad (2.16)$$

### 2.1.3 Comportement asymptotique aux temps longs

Par transformation de Fourier spatiale (2.12) et temporelle (2.13), l'équation (2.8) écrite pour  $\tilde{g}$  en tenant compte de (2.14) s'écrit :

$$L[\hat{\tilde{g}}] \equiv \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) - \frac{U''(y)}{U(y) - \omega/k} \right] \hat{\tilde{g}}(k, y, \omega; y_0) = -\frac{2H(k)\delta(y - y_0)}{i[kU(y_0) - \omega]}, \quad (2.17)$$

à laquelle on adjoint les conditions aux limites :

$$\hat{\tilde{g}}(k, y, \omega; y_0) \rightarrow 0 \quad \text{quand } y \rightarrow \pm\infty. \quad (2.18)$$

Dans l'expression (2.17) de  $L$ , le terme visqueux a été omis par souci de simplification.

On obtient ainsi une équation différentielle ordinaire en  $y$  dont les coefficients et le second membre dépendent de  $y$ .

#### Résolution de l'équation différentielle ordinaire

L'équation homogène associée  $L[\hat{\tilde{g}}] = 0$  est appelée équation de Rayleigh. Pour des écoulements de base de type sillage, jet ou couche de mélange, les zones de cisaillement sont situées dans un domaine de taille  $O(1)$  suivant  $y$  autour de l'origine  $y = 0$ . En dehors de ce domaine, par définition, la vitesse  $U(y)$  est pratiquement constante et  $U''(y)$  très proche de zéro.

Pour ces raisons, à  $k$  donné ( $k > 0$ ), et  $\omega$  fixé arbitrairement pour l'instant, l'équation de Rayleigh admet en général deux solutions linéairement indépendantes  $\Phi_+(k, y, \omega)$  et  $\Phi_-(k, y, \omega)$  telles que :

$$\Phi_+(k, y, \omega) \sim e^{-ky}, \quad y \rightarrow \pm\infty \quad (2.19)$$

$$\Phi_-(k, y, \omega) \sim e^{ky}, \quad y \rightarrow \pm\infty. \quad (2.20)$$

On peut donc chercher une solution à l'équation de Rayleigh forcée (2.17) de chaque côté du point source  $y = y_0$  sous la forme :

$$\hat{\tilde{g}}(k, y, \omega; y_0) = a_- \Phi_-(k, y, \omega) + a_+ \Phi_+(k, y, \omega), \quad y < y_0, \quad (2.21)$$

$$\hat{\tilde{g}}(k, y, \omega; y_0) = b_- \Phi_-(k, y, \omega) + b_+ \Phi_+(k, y, \omega), \quad y > y_0, \quad (2.22)$$

où  $a_-$ ,  $a_+$ ,  $b_-$  et  $b_+$  sont quatre coefficients à déterminer. Les conditions aux limites (2.18) quand  $y \rightarrow \pm\infty$  impliquent la nullité de  $a_+$  et  $b_-$ . La condition de continuité de  $\hat{\tilde{g}}$  en  $y_0$  s'écrit alors :

$$a_- \Phi_-(k, y, \omega; y_0) - b_+ \Phi_+(k, y, \omega; y_0) = 0. \quad (2.23)$$

Par ailleurs, l'intégration de (2.17) sur un voisinage de  $y_0$  mène à la relation de saut :

$$a_- \frac{\partial \Phi_-}{\partial y}(k, y_0, \omega) - b_+ \frac{\partial \Phi_+}{\partial y}(k, y_0, \omega) = -1. \quad (2.24)$$

Les relations (2.23)–(2.24) constituent un système d'équations linéaires qui permettent de déterminer  $a_-$  et  $b_+$  :

$$a_- = \Phi_+(k, y_0, \omega)/D(k, \omega), \quad (2.25)$$

$$b_+ = \Phi_-(k, y_0, \omega)/D(k, \omega), \quad (2.26)$$

où apparaît le Wronskien de  $\Phi_-$  et  $\Phi_+$ , indépendant de  $y$  :

$$D(k, \omega) \equiv \frac{\partial \Phi_-}{\partial y}(k, y_0, \omega)\Phi_+(k, y_0, \omega) - \frac{\partial \Phi_+}{\partial y}(k, y_0, \omega)\Phi_-(k, y_0, \omega). \quad (2.27)$$

La solution de l'équation de Rayleigh forcée (2.17) pour les conditions aux limites (2.18) s'écrit donc, quand  $D(k, \omega) \neq 0$  :

$$\widehat{\widehat{g}}(k, y, \omega; y_0) = \frac{-2H(k)}{i[kU(y_0) - \omega]D(k, \omega)} \begin{cases} \Phi_-(k, y_0, \omega)\Phi_-(k, y, \omega) & y > y_0, \\ \Phi_+(k, y_0, \omega)\Phi_+(k, y, \omega) & y < y_0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Cependant, pour  $k$  donné, le Wronskien  $D(k, \omega)$  s'annule en des fréquences  $\omega_p(k)$  bien définies appelées «valeurs propres» du problème de Rayleigh (c'est en fait  $i\omega_p(k)$  qui sont valeurs propres de la partie spatiale de l'opérateur de Rayleigh, cf. (2.41)–(2.42)). Pour ces fréquences,  $\widehat{\widehat{g}}$  s'écrit, au sens des distributions :

$$\widehat{\widehat{g}}(k, y, \omega_p(k); y_0) = \frac{-2H(k)\phi_p(y_0, k)\phi_p(y, k)}{i[kU(y_0) - \omega_p(k)]D(k, \omega_p(k))}, \quad (2.29)$$

où  $\phi_p(y, k)$  est la fonction propre associée à la valeur propre  $\omega_p(k)$ , c'est-à-dire la solution de l'équation de Rayleigh satisfaisant les conditions aux limites (2.18). En d'autres termes,  $D(\omega, k) = 0$  est la relation de dispersion vérifiée par les valeurs propres discrètes de l'équation de Rayleigh.

Pour évaluer  $\tilde{g}(x, y, t; y_0)$ , il reste à effectuer successivement les transformations de Fourier temporelle et spatiale inverses suivant les formules :

$$\widehat{\widehat{g}}(k, y, t; y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \widehat{\widehat{g}}(k, y, \omega; y_0) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.30)$$

$$\tilde{g}(x, y, t; y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_F \widehat{\widehat{g}}(k, y, t; y_0) e^{ikx} dk. \quad (2.31)$$

$L$  et  $F$  sont des chemins d'intégration dans les plans complexes respectifs  $\omega$  et  $k$ .

### Transformation temporelle inverse

La première inversion (2.30) s'effectue dans le plan complexe  $\omega$  suivant le chemin  $L$ . Ce chemin d'intégration doit être choisi en prenant en compte les singularités de la fonction intégrée. Pour  $k$  donné, la fonction  $\widehat{\widehat{g}}(k, y, \omega; y_0)$  présente plusieurs types de singularités. Tout d'abord, les fonctions  $\Phi_{\pm}$  présentent en général une singularité logarithmique au point dit critique  $\bar{\omega}$  tel que  $\bar{\omega}(k, y) = kU(y)$ . D'autres points de branchement existent sur l'axe réel  $\omega_r$ , correspondant aux extréma de  $kU(y)$ , dont peuvent découler plusieurs coupures<sup>1</sup>. Ensuite, les zéros  $\omega_p(k)$  de la relation de dispersion  $D(k, \omega) = 0$  indexés par  $p$  sont des pôles simples de  $\widehat{\widehat{g}}$ . Le chemin d'intégration  $L$  doit être choisi au-dessus de tous ces pôles, comme schématisé sur la figure 2.1. Quand  $t < 0$ , on peut refermer  $L$  à l'infini  $\omega_i \rightarrow +\infty$ , où l'on a  $|e^{-i\omega t}| \rightarrow 0$ . Ainsi, la contribution supplémentaire à l'intégrale (2.30) est effectivement nulle. Le contour  $L$  ainsi formé n'encercle aucune singularité, ni ne contient la coupure. Le résultat de l'intégration est donc nul : la réponse à une impulsion donnée à  $t = 0$  est bien nulle pour  $t < 0$ , conformément au principe de causalité. En revanche, pour  $t > 0$ ,  $L$  doit être refermé dans le demi-plan opposé  $\omega_i \rightarrow -\infty$  (de telle sorte qu'on ait encore  $|e^{-i\omega t}| \rightarrow 0$ ). Il englobe ainsi toutes les singularités  $\omega_p(k)$ .

La non-analyticité de  $\widehat{\widehat{g}}$  au passage des coupures issues de l'axe réel impose à  $L$  de contourner les points de branchement comme  $\bar{\omega}$  de la manière schématisée figure 2.1. La quantité supplémentaire ainsi introduite le long de  $L_c$  doit être retranchée du résultat de l'intégration. Elle apparaît dans la fonction de Green comme une contribution à spectre continu :

$$\widehat{\widehat{g}}_{\text{cont}}(k, y, t; y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_c} \widehat{\widehat{g}}(k, y, \omega; y_0) e^{-i\omega t} d\omega, \quad t > 0, \quad (2.32)$$

1. C'est la vigilance de Julian Scott qui a mis cette structure complexe de points de branchement en évidence.

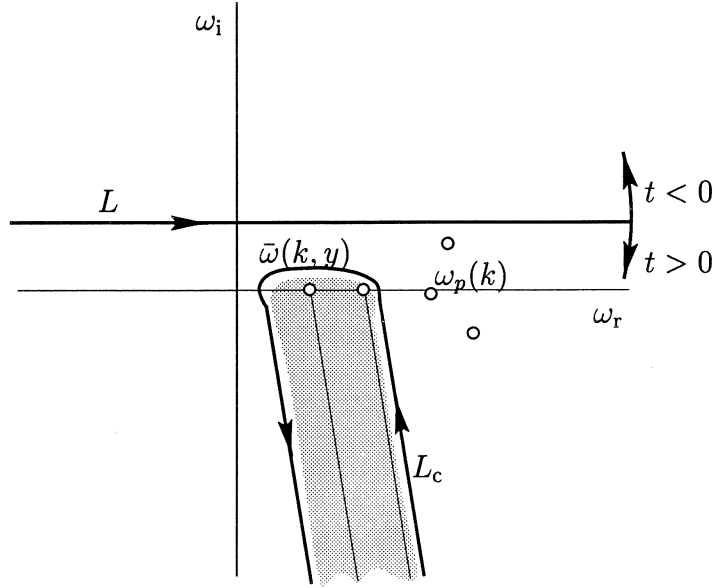


FIG. 2.1 – Contour  $L$  dans le plan des fréquences complexes  $\omega$  pour l'inversion de la transformée de Fourier temporelle.

où l'intégration est effectuée le long de  $L_c$ . Les coupures doivent donc bien être choisies tournées vers  $\omega_i \rightarrow -\infty$  si l'on veut satisfaire le principe de causalité. Par ailleurs, on peut montrer que la fonction  $\hat{g}_{\text{cont}}$  décroît algébriquement dans le temps comme  $t^{-2}$  [1, 2].

L'autre contribution à l'intégration le long de  $L$  est la somme des résidus aux pôles  $\omega_p(k)$  :

$$\hat{g}_{\text{disc}}(k, y, t; y_0) = 2H(k) \sum_p \frac{\phi_p(y_0; k) \phi_p(y; k) e^{-i\omega_p(k)t}}{[kU(y_0) - \omega_p(k)] \partial D / \partial \omega(k, \omega_p(k))}. \quad (2.33)$$

Dans cette dernière équation, la fonction propre  $\phi_p(y; k)$  associée à la valeur propre  $\omega_p(k)$  du problème de Rayleigh n'est autre que  $\Phi_+(k, y, \omega_p(k))$  ou  $\Phi_-(k, y, \omega_p(k))$  (ces deux fonctions sont égales à un facteur multiplicatif près quand la relation de dispersion est vérifiée, i.e. à  $k$  fixé, quand  $\omega = \omega_p(k)$ ).

### Transformation spatiale inverse

On obtient la fonction de Green discrète  $\tilde{g}_{\text{disc}}(x, y, t; y_0)$  dans l'espace physique par la transformation inverse (2.31). On est donc amené à évaluer les intégrales le long du chemin d'intégration  $F$  :

$$\tilde{g}_{\text{disc}}(x, y, t; y_0) = \frac{1}{\pi} \sum_p \int_F \frac{\phi_p(y_0; k) \phi_p(y; k)}{kU(y_0) - \omega_p(k)} \frac{e^{i[kx - \omega_p(k)t]}}{\partial D / \partial \omega(k, \omega_p(k))} dk. \quad (2.34)$$

Jusqu'à ce point,  $k$  est réel, et le chemin  $F$  coïncide avec le demi-axe réel  $k > 0$ . La fonction de Green (2.34) est exprimée ici à l'aide des modes purement *temporels*. La dynamique du paquet d'ondes (partie continue mise à part) est donc entièrement contenue dans l'analyse temporelle de stabilité. Cette propriété sera utilisée plus tard pour extraire les propriétés temporelles de l'instabilité de la réponse impulsionnelle obtenue numériquement (cf. §2.2.3).

Pour estimer l'intégrale (2.34), il est pratique de déformer  $F$  dans le plan complexe (figure 2.2) en un contour  $F_p^*$  passant par le point  $k_p^*$  qui, pour  $x$  et  $t$  donnés, rend l'argument de l'exponentielle stationnaire :

$$\frac{d}{dk} (kx - \omega_p(k)t) (k_p^*) = 0, \quad (2.35)$$



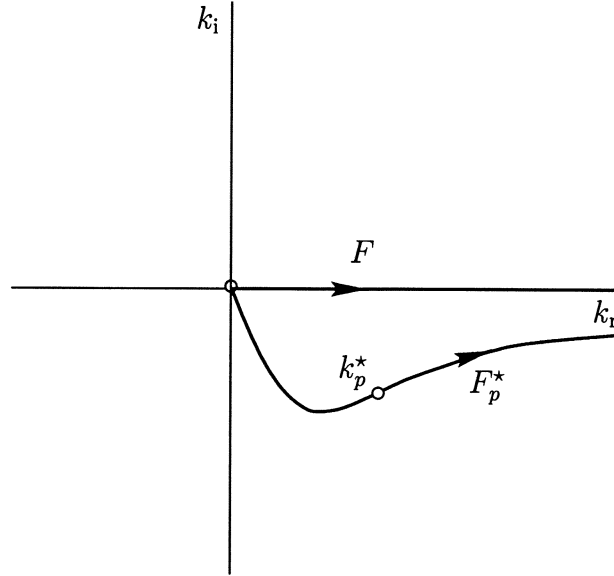


FIG. 2.2 – Contours  $F$  et  $F_p^*$  dans le plan des nombres d'onde complexes  $k$  pour l'inversion de la transformée de Fourier spatiale.  $k_p^*$  et  $F_p^*$  ne dépendent que de  $x/t$ .

ou encore

$$\frac{d\omega_p}{dk}(k_p^*) = \frac{x}{t}. \quad (2.36)$$

L'existence d'un tel point et l'autorisation de déformation de contour passe par un suivi des branches spatiales  $k_q(\omega)$  lorsque le contour  $L$  est abaissé dans le plan  $\omega$  jusqu'à la première singularité rencontrée  $\omega_p(k)$ . Cette procédure est décrite en détail dans Huerre & Monkewitz (1990). On voit sur l'expression (2.36) que  $k_p^*$  et donc le contour  $F_p^*$  ne dépendent de  $x$  et  $t$  que par l'intermédiaire de  $x/t$ . Par ailleurs,  $k_p^*$  et  $\omega_p(k_p^*)$  sont tous deux complexes : les modes intervenant dans l'expression de la fonction de Green ne sont en général plus des modes temporels, mais des modes dits «spatio-temporels».

Pour un rayon spatio-temporel fixé  $x/t = \text{const}$ , il est possible d'évaluer le comportement asymptotique de  $\tilde{g}_{\text{disc}}$  quand  $t \rightarrow \infty$  par la méthode du col (voir Huerre & Rossi, 1998). On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\text{disc}}(x, y, t; y_0) \sim & \sum_p \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{e^{i\pi/4} \phi_p(y_0; k_p^*) \phi_p(y; k_p^*) e^{i[k_p^* x - \omega_p(k_p^*) t]}}{[k_p^* U(y_0) - \omega_p(k_p^*)] \frac{\partial D}{\partial \omega}(k_p^*, \omega_p(k_p^*)) \left[\frac{d^2 \omega_p}{dk^2}(k_p^*) t\right]^{1/2}} \\ & + \frac{i}{\pi} \frac{\phi_p(y_0; 0) \phi_p(y; 0) e^{-i\omega_p(0)t}}{[U(y_0) - c(0)][x - c(0)t] \frac{\partial D}{\partial c}(0, c(0))}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

où  $c \equiv \omega/k$  désigne la «vitesse de phase» complexe, et où  $c(0)$  doit se comprendre comme la limite de  $\omega/k$  quand  $k \rightarrow 0$ . Cette valeur est en général finie, et donc  $\omega_p(0)$  est nulle. Le second terme de (2.37) décroît donc algébriquement, ou, au pire, reste constant si  $c(0) = 0$ . Sa contribution sera écartée dans la suite.

La contribution du premier terme peut être réécrite sous la forme :

$$\tilde{g}_{\text{disc}}(x, y, t; y_0) \sim \sum_p f_p(y_0; k_p^*) \phi_p(y; k_p^*) \frac{e^{i[k_p^* x/t - \omega_p(k_p^*)]t}}{\sqrt{t}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.38)$$

Ainsi, la réponse impulsionnelle linéarisée, décroissances algébriques mises à part, prend la forme d'une superposition de paquets d'ondes qui se propagent suivant  $x$ .

### 2.1.4 Structure des paquets d'ondes

On décrit ici brièvement la structure de chaque paquet d'ondes composant la réponse impulsionnelle. On suppose donc  $p$  fixé, et on omettra provisoirement de le placer en indice des différentes grandeurs.

#### Comportement temporel sur un rayon $x/t = \text{const}$

Rappelons d'abord que le nombre d'onde complexe  $k^*$  dépend uniquement de  $x/t$ , d'après sa définition (2.36). Le système adopte, pour chaque rayon spatio-temporel  $x/t = \text{const}$ , un nombre d'onde  $k^*$  et la fréquence associée  $\omega(k^*)$ . Toujours d'après (2.36), on voit que le mode qui se développe le long du rayon  $x/t = \text{const}$  est précisément celui qui a pour vitesse de groupe  $v_g = x/t$ , d'ailleurs réelle. On peut donc considérer que le nombre d'onde et la fréquence sont des fonctions de la vitesse de groupe, prescrite réelle. Dans toute la suite, on omet l'exposant  $*$  et ces variables seront notées  $k(v_g)$  et  $\omega(v_g)$ . Le long de chaque rayon spatio-temporel,  $\tilde{g}_{\text{disc}}$  évolue, à  $y$  fixé, comme  $t^{-1/2} \exp\{i[k(v_g)v_g - \omega(v_g)]t\}$ . Il s'agit donc d'une onde spatio-temporelle de taux de croissance :

$$\sigma(v_g) = \omega_i(v_g) - k_i(v_g)v_g \quad (2.39)$$

mesuré le long du rayon  $x/t = \text{const}$ .

#### Lien avec le mode temporel le plus amplifié

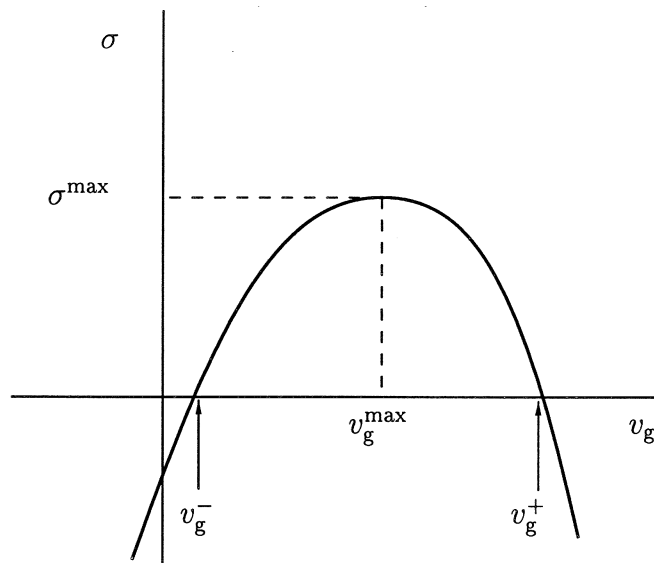


FIG. 2.3 – Allure typique du taux de croissance  $\sigma$  en fonction de la vitesse de groupe  $v_g$ .

Le taux de croissance  $\sigma(v_g)$  a l'allure typique schématisée figure 2.3. Il atteint un maximum  $\sigma^{\text{max}}$  pour une certaine valeur de la vitesse de groupe  $v_g^{\text{max}}$ . Le nombre d'onde  $k(v_g^{\text{max}})$  qui prévaut pour le rayon spatio-temporel le plus amplifié  $x/t = v_g^{\text{max}}$  est réel. Il est facile de s'en convaincre en notant que l'amplitude du paquet d'ondes  $y$  atteint un extrêmu, ce qui implique que  $k_i(v_g^{\text{max}}) = 0$ . On peut s'en convaincre encore mieux en se reportant à la démonstration donnée en annexe de l'article (§4.3). Le nombre d'onde  $k(v_g^{\text{max}})$  étant réel, le mode spatio-temporel correspondant est aussi un mode temporel. C'est d'ailleurs le mode temporel le plus amplifié puisque le mode temporel le plus amplifié est le seul dont la vitesse de groupe soit réelle... Notons  $k^{\text{max}}$  son nombre d'onde (réel).

On a donc le résultat suivant : le long du rayon spatio-temporel le plus amplifié se développe le mode temporel le plus amplifié, et

$$\sigma(v_g^{\max}) = \omega_i(k^{\max}). \quad (2.40)$$

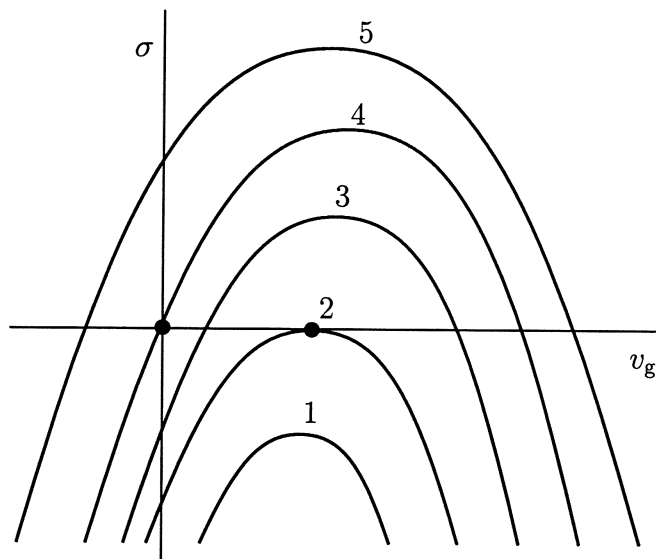


FIG. 2.4 – Allure de la courbe  $\sigma(v_g)$  dans les différentes situations où l'écoulement est : (1) stable, (2) marginalement stable, (3) instable convectif, (4) marginalement instable absolu, (5) instable absolu.

Les trois situations suivantes peuvent se produire, illustrées sur la figure 2.4 :

- Si  $\sigma(v_g^{\max}) < 0$ , l'écoulement est stable (cas 1).
- Si  $\sigma(v_g^{\max}) = 0$ , l'écoulement est marginalement stable (cas 2).
- Si  $\sigma(v_g^{\max}) > 0$ , l'écoulement est instable (cas 3–5).

### Bords du paquet d'ondes

Quand l'écoulement est instable, il existe dans la plupart des cas deux rayons particuliers  $x/t = v_g^\pm$  le long desquels se développe une onde marginale :  $\sigma(v_g) = 0$  (voir figure 2.3). Plus précisément, le signal décroît algébriquement en  $t^{-1/2}$  le long de ces deux rayons. Ce sont par définition les bords du paquet d'ondes.

Plusieurs situations peuvent se présenter suivant les valeurs de  $v_g^-$  relativement à 0 (voir figure 2.4).

- Si  $0 < v_g^- < v_g^+$ , l'écoulement est instable convectif. La réponse impulsionnelle diverge en s'éloignant de la source. Le milieu relaxe vers son état de base, mais de manière non uniforme (cas 3).
- Si  $0 = v_g^- < v_g^+$ , l'écoulement est marginalement instable absolu. C'est le passage par cette situation qu'on appelle «transition convectif/absolu» (cas 4).
- Si  $v_g^- < 0 < v_g^+$ , l'écoulement est instable absolu. La réponse impulsionnelle croît en envahissant le milieu. L'information peut remonter l'écoulement qui bifurque alors vers un autre état (cas 5).

Ces situations doivent être tempérées par le fait qu'en pratique, les écoulements de base sont rarement parallèles et jamais infinis. Les notions présentées ici sont des notions linéaires locales, sur lesquelles s'appuient des théories plus élaborées incluant conditions aux limites, non-parallélisme, et non-linéarités.

### Structure transverse

La structure transverse en  $y$  du paquet d'ondes apparaît dans la formule (2.38) par le biais du facteur  $\phi_p(y; k_p^*)$ , qui n'est autre que la fonction propre associée à  $k_p^*$ . Ce facteur de forme, en régime asymptotique, reste le même le long d'un rayon donné, mais change d'un rayon à l'autre.

### Réceptivité

Finalement, la réponse impulsionnelle (2.37)–(2.38) est pondérée par le facteur  $f_p(y_0; k_p^*)$  proportionnel à  $\phi_p(y_0; k_p^*)$ . La réponse le long d'un rayon  $x/t = \text{const}$  est donc d'autant plus grande que l'amplitude de la fonction propre associée est grande au point d'impact initial  $y_0$ . Ceci n'est rien d'autre que la propriété générale selon laquelle la réceptivité du système est régie par les fonctions propres de l'opérateur adjoint à  $L$ , qui ici, est  $L$  lui-même. Il faudra donc appliquer la perturbation au sein d'une région réceptive, proche du maximum des fonctions propres si possible, typiquement dans les zones inflexionnelles.

### En bref...

Nous avons donc montré que, sur chaque rayon spatio-temporel  $x/t = \text{const}$ , les modes de vitesse de groupe (réelle)  $v_g = x/t$  se développent avec la structure transverse des fonctions propres associées. Ces dernières régissent également la réceptivité du milieu.

## 2.2 Analyse de la fonction de Green analytique

Dans le paragraphe précédent (§2.1), nous avons établi l'expression de la fonction de Green en fonction des modes propres de l'opérateur de Rayleigh. On expose ici les méthodes permettant d'extraire de la réponse impulsionnelle de l'écoulement, calculée par simulation numérique directe, le maximum d'informations sur les propriétés spatio-temporelles de l'instabilité.

### 2.2.1 Exploitation des invariances et symétries de l'opérateur d'Orr–Sommerfeld

Le long d'un rayon spatio-temporel  $x/t = \text{const}$  se développe un ensemble discret, indexé par  $p$ , de modes spatio-temporels de vitesse de groupe  $v_g = x/t$ . Chaque mode est caractérisé par un nombre d'onde complexe  $k_p(v_g)$ , une fréquence complexe  $\omega_p(v_g)$  et une fonction propre complexe  $\phi_p(v_g, y)$ . Le taux de croissance observé le long du rayon  $x/t = v_g$  est  $\sigma_p(v_g) = \omega_{p,i}(v_g) - k_{p,i}(v_g)v_g$ .

Asymptotiquement, quand  $t \rightarrow \infty$ , le mode de plus grand taux de croissance  $\sup_p \sigma_p(v_g)$  domine la dynamique de la réponse impulsionnelle le long du rayon  $x/t = v_g$ . Cependant, quand on passe d'un rayon à l'autre, il se peut que le mode dominant saute d'une branche  $p$  à l'autre. Ceci est schématisé figure 2.5, où sont représentées trois courbes  $\sigma_p(v_g)$ ,  $p = 1, 2, 3$ . Suivant la valeur de  $v_g$ , c'est le mode  $p = 1$  ou  $p = 2$  qui domine la réponse impulsionnelle, le mode  $p = 3$  étant toujours dominé. Ceci se répercute sur la structure du paquet d'ondes à une date  $t$  donnée : celui-ci est dominé par des modes provenant de branches différentes suivant la position  $x$ , et qui possèdent des facteurs de forme transverse  $\phi_p(y)$  aux structures différentes. À ce stade, l'analyse de la réponse impulsionnelle renseigne sur le mode de plus grand taux de croissance à  $v_g$  donné,

et elle permet d'accéder à la courbe représentée en gras figure 2.5. Par ailleurs, dans la région où deux branches se croisent (région grisée de la figure 2.5), l'interférence des deux modes aux amplitudes comparables empêche de déterminer les caractéristiques de l'un comme de l'autre.

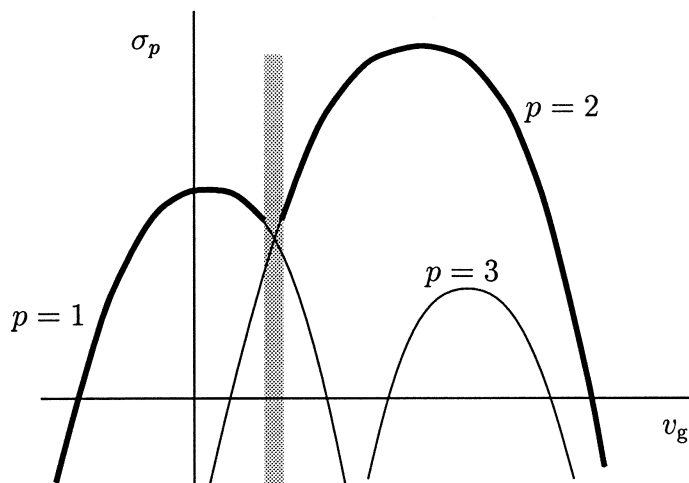


FIG. 2.5 – Schéma représentant le taux de croissance spatio-temporel  $\sigma_p$  de trois modes distincts en fonction de la vitesse de groupe  $v_g$ . L'analyse de la fonction de Green totale sans décomposition modale ne donnerait accès qu'aux caractéristiques des modes dominants représentés en traits épais.

Si l'on veut étudier de manière plus complète les propriétés des instabilités et accéder à la description des modes dominés, il est nécessaire de mettre en œuvre une procédure capable d'isoler les différents modes. Le moyen systématique pour y parvenir serait de projeter la réponse impulsionnelle observée le long d'un rayon  $x/t = v_g$  sur chacune des directions propres de l'opérateur d'Orr–Sommerfeld  $\mathcal{L}$  correspondant à la vitesse de groupe  $v_g$ . Bien entendu, cette solution n'est pas retenue ici, car elle passe par la résolution du problème aux valeurs propres que, précisément, on cherche à éviter...

On peut néanmoins tirer parti des invariances et des symétries de l'écoulement considéré, et celles de l'opérateur d'Orr–Sommerfeld associé, pour décomposer la réponse impulsionnelle en somme de contributions regroupant des classes de modes (pairs, impairs, ...). Le cas des deux écoulements étudiés, sillage plan et jet tournant, sont considérés successivement.

### Symétrie de réflexion suivant $y$ : cas du sillage plan

Pour le sillage plan de vitesse de base  $U(y)$ , la partie spatiale  $\mathcal{S}_y$  de l'opérateur différentiel d'Orr–Sommerfeld s'écrit :

$$\mathcal{S}_y \equiv U(y) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 - U''(y) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \nabla^2. \quad (2.41)$$

Ses coefficients ne dépendent ni de  $x$ , ni du temps. Cette propriété a déjà été exploitée en §2.1.2 et a permis une représentation en modes de Fourier suivant ces deux variables. Pour  $k$  et  $p$  fixés, une fonction propre  $\phi_p(y; k)$  associée à la fréquence propre  $\omega_p(k)$ , supposée non dégénérée, satisfait :

$$\mathcal{S}_y[\phi_p(y; k)] = i\omega_p(k) \phi_p(y; k). \quad (2.42)$$

Pour un sillage symétrique, pour lequel  $U(y) = U(-y)$ , l'opérateur  $\mathcal{S}_y$  est invariant par transformation  $y \rightarrow -y$ . Cette propriété implique que :

$$\mathcal{S}_y[\phi_p(-y; k)] = i\omega_p(k) \phi_p(-y; k). \quad (2.43)$$

La fonction  $\phi_p(-y; k)$  est donc également fonction propre de  $\mathcal{S}_y$  pour la fréquence propre  $\omega_p(k)$ . Cette dernière étant supposée non dégénérée, les fonctions propres  $\phi_p(y; k)$  et  $\phi_p(-y; k)$  sont proportionnelles :

$$\phi_p(-y; k) = \alpha \phi_p(y; k), \quad (2.44)$$

ce qui implique également que :

$$\phi_p(y; k) = \alpha \phi_p(-y; k). \quad (2.45)$$

On a donc  $\alpha^2 = 1$  : chaque fonction propre  $\phi_p(y; k)$  a une parité bien définie, suivant que  $\alpha = 1$  ou  $-1$ , paire [ $\phi_p(y; k) = \phi_p(-y; k)$ ] ou impaire [ $\phi_p(y; k) = -\phi_p(-y; k)$ ].

Dans le cas des jets et sillages plans, on utilise plutôt les dénominations de modes «sinueux» et «variqueux» pour lever l'ambiguïté des qualificatifs «pair» et «impair» dont on ne sait pas s'ils s'appliquent à la fonction propre de vorticité, de fonction de courant, de vitesse axiale ou de vitesse transverse. Le tableau ci-dessous résume la parité (suivant  $y$ ) des fonctions propres pour chaque type de mode.

mode	fonction de courant $\psi$	vitesse axiale $u_x$	vitesse transverse $u_y$	vorticité $\omega$
SINUEUX	paire	impaire	paire	paire
VARIQUEUX	impaire	paire	impaire	impaire

La fonction de Green  $\tilde{g}_{\text{disc}}$  peut donc être scindée en partie sinueuse et partie variqueuse, sous la forme de deux sommes portant sur les modes sinueux et sur les modes variqueux. Il suffit pour cela d'extraire respectivement les parties paire  $\tilde{g}_{\text{sin}}$  et impaire  $\tilde{g}_{\text{var}}$  de la fonction de Green (définie par rapport à la fonction de courant) :

$$\tilde{g}_{\text{sin}}(x, y, t) = \frac{1}{2} [\tilde{g}(x, y, t) + \tilde{g}(x, -y, t)], \quad (2.46)$$

$$\tilde{g}_{\text{var}}(x, y, t) = \frac{1}{2} [\tilde{g}(x, y, t) - \tilde{g}(x, -y, t)]. \quad (2.47)$$

On peut ensuite traiter indépendamment les deux contributions et obtenir, sur chaque rayon  $x/t = v_g$ , les propriétés du mode sinueux dominant, ainsi que celles du mode variqueux dominant.

### Invariance par rotation autour de l'axe : cas du jet tournant

Le profil de jet tournant étudié ici est axisymétrique : les composantes de la vitesse de base ne dépendent que de la coordonnée radiale  $r$ . Les coefficients de l'opérateur  $\mathcal{S}_y$  correspondant ne dépendent donc pas de  $\theta$ , et une représentation en série de Fourier de la forme :

$$\tilde{g}(x, r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_m(x, r, t) e^{im\theta} \quad (2.48)$$

est bien adaptée au problème. La contribution  $\tilde{g}_m$  de chaque nombre d'onde azimutal  $m$  appar it comme le coefficient de Fourier :

$$\tilde{g}_m(x, r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(x, r, \theta, t) e^{-im\theta} d\theta. \quad (2.49)$$

Les modes à  $m = 0$  sont des modes axisymétriques. Les modes  $m = 1, 2, \dots$  sont des modes hélicoïdaux «co-rotatifs» c'est-à-dire que leur structure spatiale en  $e^{i[kx+m\theta]}$  est hélicoïdale et s'enroule dans le même sens que l'écoulement de base (sens trigonométrique). Les modes  $m = -1, -2, \dots$  sont des modes hélicoïdaux «contra-rotatifs», et s'enroulent dans le sens inverse.

On peut donc isoler la contribution  $\tilde{g}_m$  de chaque nombre d'onde azimutal  $m$  en appliquant la formule (2.49), puis accéder aux caractéristiques du mode dominant la dynamique le long de tous les rayons  $x/t = \text{const}$  pour le nombre azimutal  $m$ .

## 2.2.2 Analyse spatio-temporelle des paquets d'ondes

On se replace ici dans le cadre des écoulements bidimensionnels infinis. Les méthodes exposées sont directement transposables aux écoulements étudiés dans la thèse. La contribution du mode étudié à la fonction de Green est notée  $\tilde{g}(x, y, t)$ , les indices  $m$ ,  $\sin$  ou  $\text{var}$  sont omis. On cherche à déterminer les grandeurs qui caractérisent les ondes d'instabilité: taux de croissance spatio-temporel, fréquence et nombre d'onde complexe.

### Grandeurs liées à l'amplitude

Les grandeurs citées ci-dessus ne dépendent pas de la coordonnée transverse  $y$ . On peut tout de même tirer parti du développement transversal de la perturbation pour construire une fonction amplitude:

$$A(x, t) = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{g}(x, y, t)|^2 dy \right)^{1/2}. \quad (2.50)$$

Par intégration de (2.38), on voit que  $A(x, t)$  évolue le long de tout rayon spatio-temporel  $x/t = \text{const} = v_g$  comme :

$$A(x = v_g t, t) \propto \frac{e^{\sigma(v_g)t}}{\sqrt{t}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.51)$$

où apparaît le taux de croissance spatio-temporel

$$\sigma(v_g) = \omega_i(v_g) - k_i(v_g)v_g. \quad (2.52)$$

Le taux de croissance qui prévaut le long du rayon  $x/t = v_g$  peut donc être obtenu en inversant (2.51) :

$$\sigma(v_g) \sim \frac{d}{dt} \ln A(v_g t, t) + \frac{1}{2t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.53)$$

La connaissance de  $\sigma(v_g)$  permet ensuite d'obtenir la partie imaginaire  $k_i(v_g)$  du nombre d'onde complexe par la relation :

$$k_i(v_g) = -\frac{d\sigma}{dv_g}(v_g), \quad (2.54)$$

où l'on se restreint à des vitesses de groupe  $v_g$  réelles (cette relation est démontrée en appendice de l'article, en §4.3).

On obtient finalement la partie imaginaire  $\omega_i(v_g)$  de la fréquence grâce à (2.52) :

$$\omega_i(v_g) = \sigma(v_g) + k_i(v_g)v_g. \quad (2.55)$$

### Grandeurs liées à la phase

La définition la plus simple d'une fonction  $\Phi(x, t)$  reflétant la phase du paquet d'ondes est :

$$\Phi(x, t) = \arg \tilde{g}(x, y_m, t), \quad 0 \leq \Phi(x, t) < 2\pi, \quad (2.56)$$

où  $y_m$  est un point de mesure éventuellement distinct du point d'impact  $y_0$ .

Les parties réelles  $k_r(v_g)$  et  $\omega_r(v_g)$  du nombre d'onde et de la fréquence complexe sont obtenues à partir de leurs définitions respectives :

$$k_r(v_g) \sim \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x = v_g t, t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.57)$$

et

$$\omega_r(v_g) \sim -\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x = v_g t, t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.58)$$

qui ne dépendent effectivement pas de  $y_m$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

### Fonction propre

On obtient la fonction propre associée  $\phi(y; v_g)$  en normalisant  $\tilde{g}(x = v_g t, y, t)$ , par exemple :

$$\phi(y; v_g) \sim \frac{\tilde{g}(x = v_g t, y, t)}{A(x = v_g t, t)e^{i\Phi(x=v_g t, t)}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.59)$$

### Méthode alternative pour déterminer le nombre d'onde

Cette méthode est utilisée dans l'étude linéaire de la réponse impulsionnelle des sillages plans (chapitre 5).

Le traitement de la fréquence et celui du nombre d'onde ne sont pas identiques en pratique, parce que l'on a accès à la grandeur  $\tilde{g}(x, y, t)$  en tout point  $(x, y)$ , mais souvent à des instants  $t$  relativement éloignés, pour des raisons pratiques de volume de stockage. Cette bonne résolution en  $x$  permet d'exploiter la relation suivante pour obtenir simultanément parties réelle et complexe du nombre d'onde  $k(v_g)$  :

$$k(v_g) \sim \frac{1}{i\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x = v_g t, y_m, t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.60)$$

Asymptotiquement aux temps longs, le résultat ne dépend pas du point de mesure  $y_m$ . Cette procédure a été appliquée à plusieurs valeurs de  $y_m$  pour vérifier la convergence de la méthode.

### Implémentation numérique de ces relations

L'implémentation numérique des relations (2.53), (2.54), (2.57) et (2.58) est détaillée aux chapitres 4 et 5 pour chaque configuration d'écoulement. On résume ici par un schéma explicatif le principe de la discrétisation.

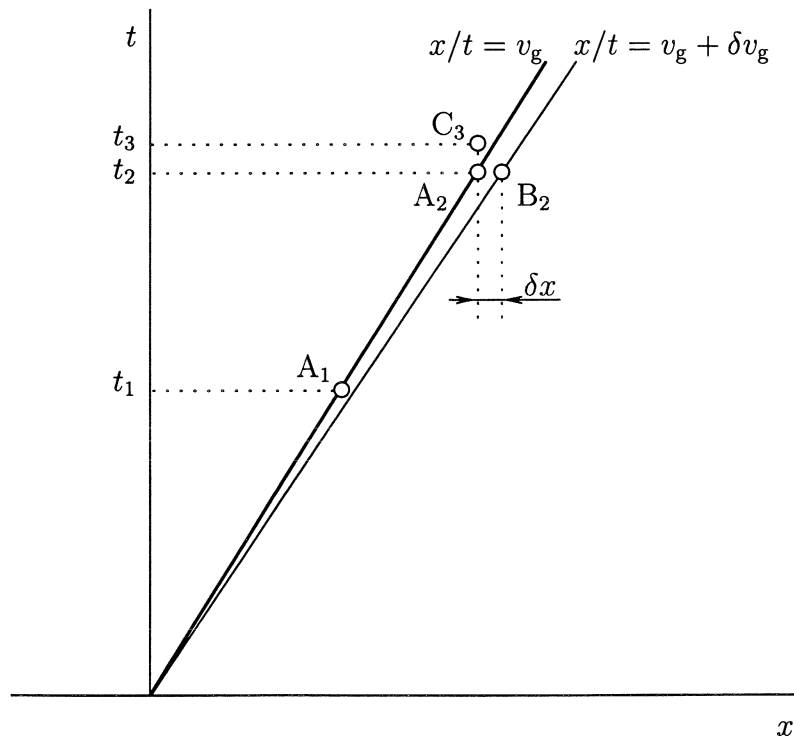


FIG. 2.6 – Diagramme spatio-temporel définissant les points particuliers utilisés pour l'approximation aux différences finies des diverses variables le long du rayon  $x/t = v_g$ .



Les variables liées à l'amplitude telles que taux de croissance ou partie imaginaire de la fréquence sont, dans la plupart des cas étudiés, d'un ordre de grandeur inférieur à celles qui sont liées à la phase, comme la partie réelle de la fréquence. Par conséquent, deux intervalles temporels distincts sont adoptés pour estimer les unes et les autres. Le taux de croissance  $\sigma(v_g)$  est calculé entre deux dates relativement éloignées  $t_1$  et  $t_2$ , alors que la fréquence réelle est calculée entre deux instants proches  $t_2$  et  $t_3$ . La proximité de  $t_2$  et  $t_3$  est en outre indispensable en raison du caractère périodique de la phase  $\Phi(x, t)$  nécessairement comprise entre 0 et  $2\pi$  : un intervalle de temps  $t_3 - t_2$  choisi trop grand ne permettrait pas de lever l'ambiguïté qui règne sur la phase après plusieurs rotations. Par ailleurs, cette étude nécessite un soin particulier car  $\Phi(x, t)$  est discontinue chaque fois qu'elle atteint la valeur 0 ou  $2\pi$ . En résumé, les diverses variables sont évaluées par différences finies entre divers points définis sur la figure 2.6 :

- $\sigma(v_g)$  est estimé entre les points  $A_1$  et  $A_2$ ,
- $k_i(v_g)$  est évalué entre les rayons  $x/t = v_g$  et  $x/t = v_g + \delta v_g$ , où  $\delta v_g = \delta x/t_2$ ,
- $\omega_i(v_g)$  est obtenue directement par la relation (2.55),
- $k_r(v_g)$  est estimé entre les points  $B_2$  et  $A_2$ ,
- $\omega_r(v_g)$  est estimée entre les points  $C_3$  et  $A_2$ .

Dans l'étude des sillages plans (chapitre 5), le nombre d'onde est obtenu par la relation alternative (2.60). La dérivation suivant  $x$  est effectuée dans l'espace de Fourier où elle se résume à une multiplication par  $ik$ . Cette méthode, complètement équivalente, permet toutefois d'accéder directement à la partie réelle  $k_r(v_g)$  du nombre d'onde sans passer par la fonction  $\Phi(x, t)$ , ce qui évite le problème de phase discontinue mentionné plus haut.

### 2.2.3 Analyse temporelle

L'expression (2.34) exprime le fait que l'évolution de la partie discrète de la fonction de Green est entièrement déterminée par la connaissance des modes temporels. Inversement, étant donnée la contribution  $\tilde{g}(x, y, t)$  d'un mode ou d'une classe de modes à la fonction de Green, il est possible de retrouver les caractéristiques des modes temporels dominants. Pour cela, il convient d'isoler chaque onde temporelle de nombre d'onde réel  $k$  par transformation de Fourier suivant  $x$  : on s'intéresse donc à l'onde d'amplitude complexe  $\hat{g}(k, y, t)$ .

De la même façon qu'en §2.2.2, on construit l'amplitude de cette onde en tirant parti de la dépendance transverse :

$$a(k, t) = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(k, y, t)|^2 dy \right)^{1/2}. \quad (2.61)$$

Cette grandeur évolue exponentiellement avec le taux de croissance temporel  $\omega_i(k)$  :

$$a(k, t) \propto e^{\omega_i(k)t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.62)$$

Inversement, on obtient le taux de croissance par :

$$\omega_i(k) \sim \frac{\partial}{\partial t} \ln a(k, t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.63)$$

La mesure de l'argument de  $\hat{g}$  en un point  $y_m$  fournit une information sur la phase  $\varphi(k, t)$  de l'onde considérée :

$$\varphi(k, t) = \arg \hat{g}(k, y_m, t), \quad 0 \leq \varphi(k, t) < 2\pi. \quad (2.64)$$

On obtient la partie réelle  $\omega_r(k)$  de la fréquence à partir de sa définition :

$$\omega_r(k) \sim -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(k, t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.65)$$

Finalement, la fonction propre associée  $\phi(y; k)$  peut être obtenue par normalisation de  $\widehat{g}$ , par exemple :

$$\phi(y; k) \sim \frac{\widehat{g}(k, y, t)}{a(k, t)e^{i\varphi(k, t)}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.66)$$

La mise en œuvre numérique de ces relations passe, comme en §2.2.2, par une approximation de type différences finies. Pour obtenir  $\omega_i$ , la relation (2.63) est discrétisée entre deux instants éloignés  $t_1$  et  $t_2$ . Pour obtenir  $\omega_r$ , la relation (2.65) est discrétisée entre deux instants proches  $t_2$  et  $t_3$ , pour des raisons déjà mentionnées.

## 2.3 Analyse du paquet d'ondes réel

L'objet de cette partie est de décrire le passage du paquet d'ondes réel (obtenu par simulation) à la fonction de Green analytique, à l'aide de la transformation de Hilbert. Le principe et les limites de son utilisation pour extraire amplitude et phase du paquet d'ondes sont présentés.

### 2.3.1 Principe de la décomposition

Le signal à analyser  $g(x)$  est donné, par exemple, par la vorticité  $\omega(x, y_m, t)$  mesurée en  $y = y_m$  à un instant  $t$  fixé. Supposons tout d'abord que ce signal soit monochromatique, soit  $g(x) = \cos(k_0 x)$ , où  $k_0$  est un nombre d'onde réel positif. L'intuition suggère que l'amplitude associée à ce signal est  $A(x) = 1$  et sa phase  $\Phi(x) = k_0 x$ , de telle manière que l'on retrouve bien le signal de départ  $g(x)$  en prenant la partie réelle du signal complexe  $A(x)e^{i\Phi(x)}$  :

$$\operatorname{Re} \{A(x)e^{i\Phi(x)}\} = \operatorname{Re} \{e^{ik_0 x}\} = \cos(k_0 x) = g(x). \quad (2.67)$$

Toutefois, d'autres décompositions, par exemple  $A(x) = \cos(k_0 x)$  et  $\Phi(x) = 0$  conduisent également à  $\operatorname{Re} \{A(x)e^{i\Phi(x)}\} = \cos(k_0 x) = g(x)$ . L'extraction d'une amplitude  $A(x)$  et d'une phase  $\Phi(x)$  se fait de façon unique si l'on considère la fonction complexe ou *signal analytique* associé  $\tilde{g}(x)$ . Cette dernière s'obtient par la suppression de tous les modes négatifs  $k < 0$  du spectre  $\widehat{g}(k)$  :

$$\widehat{g}(k) = 2\widehat{g}(k)H(k), \quad (2.68)$$

où  $H(k)$  désigne l'échelon unité de Heaviside. Bien entendu,  $g(x)$  étant réel,  $\widehat{g}(k)$  et  $\widehat{g}(-k)$  sont complexes conjugués, et cette procédure ne détruit aucune information. L'amplitude  $A(x)$  et la phase  $\Phi(x)$  s'obtiennent alors respectivement comme le module et l'argument de  $\tilde{g}(x)$ .

Reprenons le signal monochromatique  $g(x) = \cos(k_0 x)$ , que l'on peut écrire sous la forme :

$$g(x) = \frac{e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x}}{2}. \quad (2.69)$$

La suppression de la partie du spectre pour laquelle  $k < 0$ , en l'occurrence de l'onde  $e^{-ik_0 x}$ , mène au signal analytique :

$$\tilde{g}(x) = e^{ik_0 x}, \quad (2.70)$$

dont on peut extraire amplitude et phase :

$$A(x) \equiv |e^{ik_0 x}| = 1, \quad \Phi(x) \equiv \arg[e^{ik_0 x}] = k_0 x \pmod{2\pi}. \quad (2.71)$$

Intuitivement, une telle procédure ne peut être mise en œuvre que si une onde «porteuse» aux oscillations spatiales rapides est présente, modulée en amplitude par une enveloppe variant sur une échelle spatiale plus grande. Pour l'onde monochromatique précédemment traitée, cette condition est vérifiée, puisque l'échelle de variation spatiale de la modulation est infinie. Dans le cas général, cette restriction peut se comprendre formellement dans l'espace spectral sur l'exemple suivant.

Le signal à analyser n'est plus monochromatique :  $g(x) = \exp[-(x/\Delta x)^2] \cos(k_0 x)$ . L'échelle de variation du cosinus (la porteuse) est  $1/k_0$ , celle de la gaussienne (la modulation) est  $\Delta x$ . Les conditions ci-dessus ne sont vérifiées que si  $\Delta x \gg 1/k_0$ , ce qui se traduit sur le spectre  $\hat{g}(k)$  par la séparation nette des deux pics symétriques centrés en  $-k_0$  et en  $k_0$ , comme le schématise la figure 2.7a. La suppression de la partie  $k < 0$  du spectre (en grisé) élimine la contribution du pic centré en  $-k_0$  et conduit au signal analytique auquel seul contribue le pic centré en  $k_0$  :

$$\tilde{g}(x) \approx e^{-\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2} e^{ik_0 x}. \quad (2.72)$$

L'amplitude et la phase correspondantes sont donc bien, dans ce cas,

$$A(x) = e^{-\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = k_0 x \pmod{2\pi}. \quad (2.73)$$

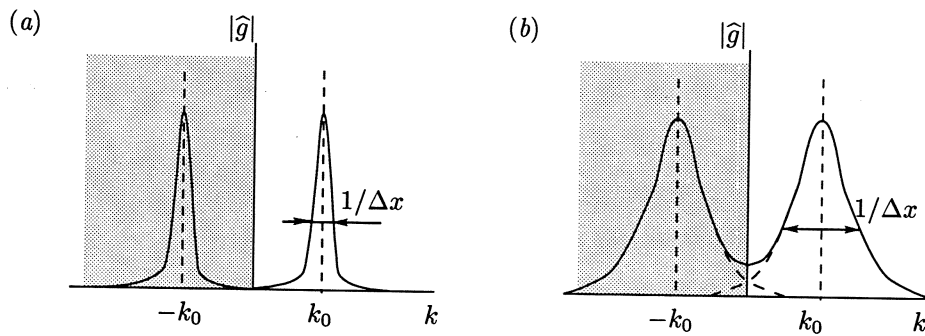


FIG. 2.7 – Allure du spectre  $|\hat{g}(k)|$  dans deux cas : (a) quand la modulation varie plus lentement que la porteuse ( $\Delta x > 1/k_0$ ), et (b) dans le cas inverse ( $\Delta x < 1/k_0$ ).

En revanche, si  $\Delta x \ll 1/k_0$ , c'est-à-dire si la gaussienne varie plus vite que le cosinus, on ne peut dissocier amplitude et phase. En effet, la figure 2.7b illustre le recouvrement qui se produit dans ce cas. Le pic du spectre  $|\hat{g}(k)|$  centré en  $k_0$ , ne peut alors être isolé par simple mise à zéro des modes  $k < 0$ .

De manière rigoureuse [8], l'amplitude et la phase d'un paquet d'ondes ne peuvent être définies de façon unique respectivement comme module et argument du signal analytique associé que si le spectre du paquet d'ondes présente une structure de bande autour d'une porteuse  $k_0$ , et que la demi-largeur de bande  $\Delta k$  est telle que :

$$\Delta k \leq k_0. \quad (2.74)$$

Pour les paquets d'ondes dans les écoulements ouverts en général, ainsi que pour l'exemple précédent, le spectre n'a pas cette structure de bande, car les spectres sont rarement à support compact. La condition (2.74) est alors remplacée par la condition un peu plus restrictive de «bande étroite» : il faut que le spectre soit piqué autour de  $k_0$ , i.e. que sa demi-largeur  $\Delta k \sim 1/\Delta x$  vérifie :

$$\Delta k \ll k_0. \quad (2.75)$$

Ces considérations sont illustrées ci-dessous dans le cas du paquet d'ondes qui se développe au sein de sillages plans parallèles instables (étudiés en §5), successivement dans le cadre de la réponse impulsionnelle linéarisée (cf. §5.2) pour laquelle cette analyse peut être mise en œuvre, et non linéaire (cf. §5.3) pour laquelle elle échoue.

### 2.3.2 Paquets d'ondes dans les sillages plans — Cas linéaire

Le paquet d'ondes est celui que l'on obtient par la simulation numérique directe de la réponse impulsionnelle *linéarisée* d'un sillage confiné pour  $Re = 40$ ,  $N = 2$ ,  $\Lambda = -1$  et  $L_y = 4.8$  à la date  $t = 40$  (voir au chapitre 5 pour la signification de ces paramètres). On s'intéresse à la perturbation de vorticité  $\omega(x, y_m = 0, t)$  mesurée sur l'axe  $y = 0$ , qui reflète la composante sinuieuse du paquet d'ondes<sup>2</sup>. Dans ce contexte d'ondes linéaires, les spectres des signaux pour

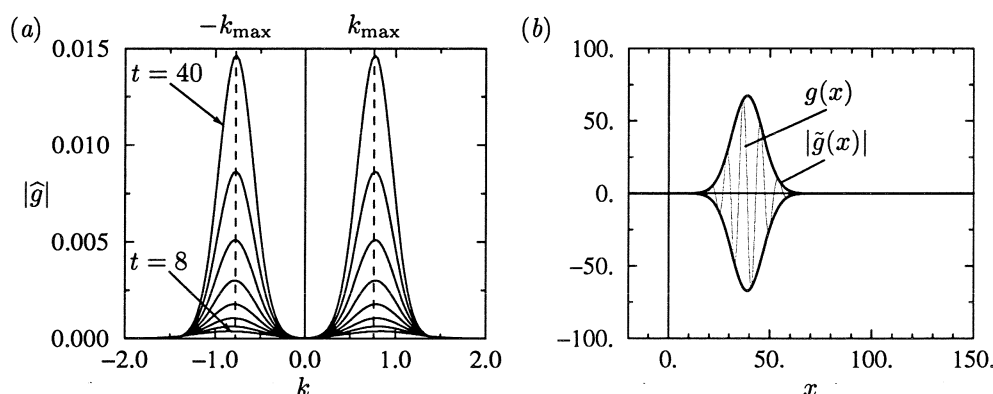


FIG. 2.8 – Paquet d'ondes obtenu par simulation numérique directe de la réponse impulsionnelle linéarisée dans un sillage confiné pour  $Re = 40$ ,  $N = 2$ ,  $\Lambda = -1$  et  $L_y = 4.8$ . (a) : spectre  $|\hat{g}(k)|$  à  $t = 8, 12, \dots, 40$ . (b) : signal de départ  $g(x)$  et son enveloppe  $|\tilde{g}(x)|$  à  $t = 40$ .

différents instants prennent la forme représentée figure 2.8a. Chaque spectre comporte deux pics centrés aux nombres d'onde les plus instables,  $\pm k_{\max}$ , de demi-largeur nettement inférieure à  $k_{\max}$ . Pour le paquet d'ondes dans l'espace physique, ceci traduit la séparation des échelles d'évolution de l'enveloppe ( $> 1/k_{\max}$ ) et de la phase ( $1/k_{\max}$ ). En supposant l'hypothèse de bande étroite vérifiée, la transformation de Hilbert conduit à l'enveloppe  $|\tilde{g}(x)|$  représentée en trait gras sur la figure 2.8b, parfaitement tangente au signal de départ  $g(x)$ .

Au-delà de cet exemple, on peut apprécier la généralité de cette approche pour les paquets d'ondes qui se développent dans les écoulements cisailés au stade linéaire. Ceux-ci présentent souvent une structure analogue, de pic centré en un nombre d'onde  $k = k_{\max}$  et sont modulés spatialement de plus en plus doucement au fur et à mesure que le temps passe, tandis que le spectre se pique progressivement. Notons toutefois qu'il est nécessaire qu'aucune instabilité ne se manifeste pour  $k = 0$ , ceci pour assurer la séparation des deux pics symétriques du spectre.

Enfin, rappelons que l'amplitude utilisée dans les études suivantes prend en compte la forme transverse suivant  $y$  (suivant  $y$  pour les sillages plans, suivant  $r$  pour les jets/sillages axisymétriques) des fonctions propres : on considère alors

$$A(x) = \left( \int_{-L_y/2}^{L_y/2} |\hat{g}(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \quad (2.76)$$

pour l'amplitude, alors que la phase est simplement mesurée à une position fixée  $y = y_m$  :

$$\Phi(x) = \arg[\hat{g}(x, y_m)]. \quad (2.77)$$

2. En effet, pour les modes variqueux, la perturbation de vorticité est impaire et s'annule sur l'axe  $y = 0$ .

### 2.3.3 Paquets d'ondes dans les sillages plans — Cas non linéaire

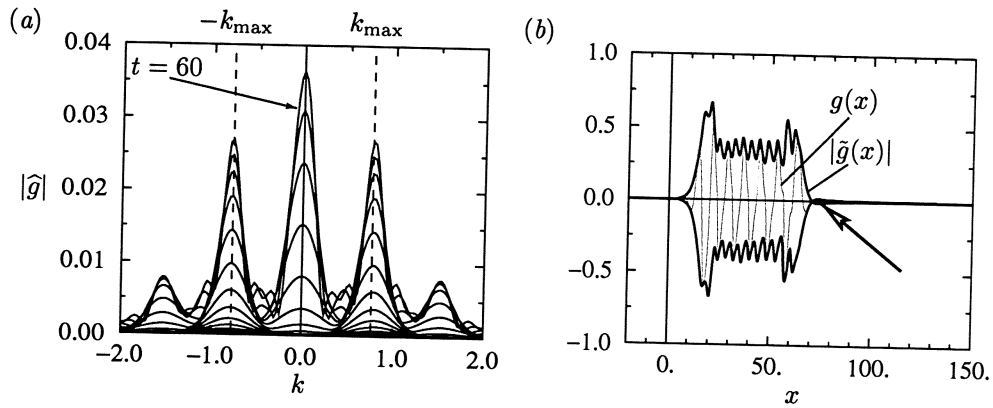


FIG. 2.9 – Paquet d'ondes obtenu par simulation numérique directe de la réponse impulsionnelle non linéaire dans un sillage confiné pour  $Re = 40$ ,  $N = 2$ ,  $\Lambda = -1$  et  $L_y = 4.8$ . (a) : spectre  $|\hat{g}(k)|$  à  $t = 8, 12, \dots, 60$ . (b) : signal de départ  $g(x)$  et son enveloppe  $|\tilde{g}(x)|$  à  $t = 80$ .

En revanche, cette procédure ne permet pas l'analyse des paquets d'ondes issus des simulations non linéaires. En effet, la séparation des échelles de variation spatiale est détruite par la présence de modes à grande longueur d'onde générés par les termes non linéaires. Ces modes apparaissent sous la forme d'un pic centré à  $k = 0$  sur les spectres de la figure 2.9a. Ils sont responsables de l'extraction erronée de l'amplitude illustrée figure 2.9b. Dans ce cas, la fonction  $|\tilde{g}(x)|$  (courbe grasse) est fortement sensible aux oscillations du paquet d'ondes (courbe fine) et n'en constitue plus l'enveloppe. De manière plus flagrante, la figure 2.10, en représentation semi-log, met en évidence la présence d'une «queue» pour  $|\tilde{g}(x)|$ , indiquée par la flèche. L'étendue du paquet d'ondes est ainsi surestimée : dans le signal, il n'y a pas d'énergie associée à cette queue.

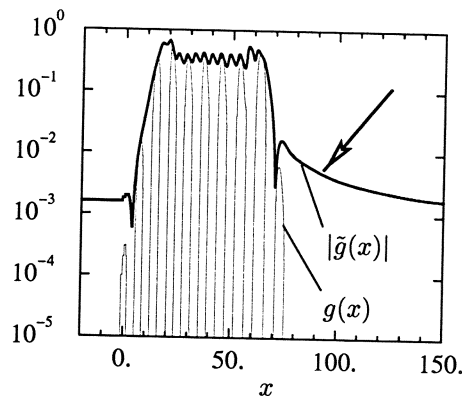


FIG. 2.10 – Fonctions de la figure 2.9b en représentation semi-log. La flèche pointe vers une région où un décalage important se produit entre  $g(x)$  et  $|\tilde{g}(x)|$ .

Dans l'étude des sillages plans parallèles, on se contente donc d'une grandeur plus proche de la physique du signal : la densité d'entrophie  $\eta$  en  $x$  donné (ici,  $g$  est la vorticité) :

$$\eta(x) = \left( \int_{-L_y/2}^{L_y/2} g^2(x, y) dy \right)^{1/2}, \quad (2.78)$$

qui reflète de façon satisfaisante l'amplitude du paquet d'ondes.

La définition d'une phase étant plus délicate, on se contente au chapitre 5 de localiser les points où  $g(x, y_m)$  s'annule. Ces points prolongent dans le régime non linéaire les points où la phase  $\Phi(x)$  vaut 0 ou  $\pi$  dans le régime linéaire. Ils informent sur la taille des structures, sur la longueur d'onde non linéaire.

## Références bibliographiques du chapitre

- [1] BILLEY, E. 1997 Private communication.
- [2] BROWN, S. N. & STEWARTSON, K. 1980 On the algebraic decay of disturbances in a stratified linear shear flow. *J. Fluid Mech.* **100**, 811–816.
- [3] DRAZIN, P. G. & HOWARD, L. N. 1966 Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid. *Adv. Appl. Mech.* **9**, 1–89.
- [4] GASTER, M. 1968 Growth of disturbances in both space and time. *Phys. Fluids* **11**, 723–727.
- [5] HUERRE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1985 Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.* **159**, 151–168.
- [6] HUERRE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473–537.
- [7] HUERRE, P. & ROSSI, M. 1998 Hydrodynamic instabilities in open flows, in *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*. Eds. Godrèche, C. & Manneville, P. Cambridge University Press.
- [8] SCHWARTZ, M., BENNETT, W. R. & STEIN, S. 1966 *Communication systems and techniques*, 29–38. McGraw-Hill.





## Chapitre 3

# Schéma numérique

Pour les simulations numériques présentées aux chapitres 4 et 5, la résolution des équations de Navier–Stokes pour un fluide visqueux incompressible est mise en œuvre par une méthode numérique pseudo-spectrale.

Utiliser une méthode spectrale consiste à rechercher la solution d'un problème aux dérivées partielles sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions régulières de base. On parvient ainsi à se ramener à un système d'équations différentielles ordinaires pouvant être résolu par des méthodes directes. La convergence des méthodes spectrales est en général sensiblement meilleure que celle des schémas aux différences finies. Cette excellente précision est contrebalancée par le fait que le choix des fonctions de base est indissociable de la géométrie et des conditions aux limites, ce qui rend ce type de méthodes très peu modulables.

Les méthodes pseudo-spectrales en constituent une classe pour laquelle les termes non-linéaires sont évalués dans l'espace physique, où ils s'expriment de manière plus simple. Le développement de ces méthodes est fortement lié à celui d'algorithmes performants de transformation rapide entre l'espace physique et l'espace spectral, comme la transformation de Fourier rapide de Cooley & Tuckey (1965). Elles trouvent leur application en mécanique des fluides où elles sont particulièrement bien adaptées aux études de transition vers la turbulence (voir par exemple Brancher, 1996) et de turbulence développée (Vincent & Meneguzzi, 1991), car la décomposition spectrale intrinsèque à leur formulation a une signification physique directe en terme d'ondes d'instabilité, ou d'échelles de la turbulence.

Dans la présentation qui suit, on se restreint à la description de la méthode pseudo-spectrale en représentation Fourier (§3.1). Son application à la résolution des équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible en domaine périodique est ensuite présentée (§3.2).

### 3.1 Méthode pseudo-spectrale en domaine périodique

#### 3.1.1 Décomposition en série de Fourier

On considère dans un premier temps, pour simplifier, un domaine unidimensionnel de longueur  $2\pi$ . On se propose d'y résoudre le problème aux dérivées partielles suivant dans la variable  $u(x, t)$ , où  $x$  est la variable d'espace et  $t$  le temps :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \mathcal{L}[u](x, t) + \mathcal{N}[u](x, t) + f(x, t). \quad (3.1)$$

auquel on associe des conditions aux limites périodiques

$$u(x + 2\pi, t) = u(x, t). \quad (3.2)$$

Dans la relation (3.1) apparaissent les opérateurs intégral-différentiels linéaire  $\mathcal{L}$  et non linéaire  $\mathcal{N}$ , ainsi que  $f$ , un terme de source donné et  $2\pi$ -périodique en  $x$ . L'opérateur  $\mathcal{N}$  regroupe les non-linéarités, mais aussi les produits avec des facteurs non homogènes en espace.

Toute fonction continue périodique est somme de sa série de Fourier :

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k(t) e^{ikx}, \quad (3.3)$$

où  $\hat{u}_k(t)$  désigne le coefficient de Fourier relatif au nombre d'onde  $k$ , donné par

$$\hat{u}_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (3.4)$$

En domaine périodique, on adopte donc naturellement la décomposition en ondes planes sur les fonctions de base  $\varphi_k(x) = e^{ikx}$ . Cette décomposition présente l'avantage que les coefficients  $\hat{u}_k$  ont un contenu physique familier : ils constituent ce qu'on appelle couramment le spectre de Fourier de  $u$  ou, plus simplement, le spectre de  $u$ . La fonction  $u(x, t)$  étant réelle,  $\hat{u}_k$  et  $\hat{u}_{-k}$  sont complexes conjugués. Pour cette raison, ces termes seront toujours associés par la suite dans les différentes formules d'approximation de (3.3).

L'«espace physique» est repéré par la coordonnée spatiale  $x$ . L'espace repéré par le nombre d'onde  $k$  est appelé «espace spectral».

En appliquant la «transformation de Fourier» (3.4) à l'équation (3.1), on obtient les équations qui régissent l'évolution temporelle de chaque composante spectrale  $\hat{u}_k(t)$  :

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt}(t) = \widehat{\mathcal{L}[u]}_k(t) + \widehat{\mathcal{N}[u]}_k(t) + \hat{f}_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

et qui constituent un système couplé infini, qu'on se propose de résoudre.

### 3.1.2 Termes linéaires

$\mathcal{L}$  étant un opérateur linéaire à coefficients constants, les fonctions  $\varphi_k(x) = e^{ikx}$  sont fonctions propres de  $\mathcal{L}$ , avec la valeur propre associée  $\lambda_k$  :

$$\mathcal{L}[e^{ikx}] = \lambda_k e^{ikx}. \quad (3.6)$$

En particulier, à l'opérateur différentiel  $\mathcal{L} = \partial/\partial x$  sont associées les valeurs propres  $\lambda_k = ik$ , et, plus généralement, à  $\mathcal{L} = \partial^n/\partial x^n$  sont associées les valeurs propres  $\lambda_k = (ik)^n$ . L'évaluation des termes linéaires se fait donc de manière immédiate dans l'espace de Fourier, par simple multiplication de  $\hat{u}_k$  par le scalaire  $\lambda_k$  associé à  $\mathcal{L}$ .

On remarque qu'en l'absence de terme non linéaire ( $\mathcal{N} \equiv 0$ ), le système (3.5) se découple pour devenir :

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt}(t) = \lambda_k \hat{u}_k(t) + \hat{f}_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.7)$$

Dans ce cas, on peut résoudre *de manière exacte* le problème linéaire mode par mode. Par combinaison, on peut s'approcher de la solution exacte puisque

$$\sum_{k=-K}^K \hat{u}_k(t) e^{ikx} \longrightarrow u(x, t), \quad K \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Cette méthode purement spectrale est donc, comme la transformation de Fourier, parfaitement adaptée aux problèmes périodiques, linéaires et homogènes en espace.

En revanche, la présence de termes multiplicatifs comme une non-linéarité ou un facteur inhomogène introduit un couplage des équations, car le terme  $\widehat{\mathcal{N}}[u]$  contient alors un produit de convolution dans l'espace spectral. On recourt alors plutôt à une méthode mixte espace physique/espace spectral, pour réduire le nombre d'opérations impliquées par les produits de convolution. Cette méthode dite pseudo-spectrale est décrite ici, toujours dans le cadre de conditions aux limites périodiques.

### 3.1.3 Termes non linéaires

Dans le cas général, on ne peut résoudre le système (3.5) couplé d'ordre infini. On est donc amené à tronquer la série (3.3) en n'en conservant que  $N$  termes, centrés autour de  $k = 0$  pour conserver les couples de termes conjugués. On recherche ainsi les solutions de (3.1) sous la forme d'une suite partielle :

$$u^N(x, t) = \sum_{k=-K}^K \hat{u}_k^N(t) e^{ikx}, \quad (3.9)$$

où  $N = 2K + 1$  est fixé.

On introduit les  $N$  «points de collocation» :

$$x_j = 2\pi j/N, \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (3.10)$$

disposés dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ . Ces points sont choisis de manière à ce que la matrice  $T$  définie par ses éléments  $T_{jk} = \varphi_k(x_j) = e^{ikx_j}$  soit inversible. C'est le cas ici, puisque le déterminant de  $T$  est de type van der Monde, il vaut

$$\det T = \prod_{\substack{-K \leq l, p \leq K \\ l < p}} (e^{2i\pi l/N} - e^{2i\pi p/N}) \neq 0. \quad (3.11)$$

### Méthode pseudo-spectrale

On recherche une approximation de la solution de (3.1) sous la forme d'une somme partielle  $u^N(x, t)$  qui vérifie (3.1) en tous les points de collocation à tout instant :

$$\frac{\partial u^N}{\partial t}(x_j, t) = \mathcal{L}[u^N](x_j, t) + \mathcal{N}[u^N](x_j, t) + f(x_j, t), \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (3.12)$$

Dans cette formulation, l'expression des termes non linéaires est naturelle, car si par exemple  $\mathcal{N}[u] = uU$ ,  $U(x)$  étant une fonction non homogène en espace, on a :

$$\mathcal{N}[u](x_j, t) = u(x_j, t) U(x_j), \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (3.13)$$

Les méthodes pseudo-spectrales tirent parti de cette simplification et le calcul des termes non linéaires y est effectué aux points de collocation. La somme partielle  $u^N(x_j, t)$  est préalablement obtenue à partir des coefficients  $\hat{u}_k^N(t)$  par la transformation :

$$u^N(x_j, t) = \sum_{k=-K}^K T_{jk} \hat{u}_k^N(t) = \sum_{k=-K}^K \hat{u}_k^N(t) e^{ikx_j}, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (3.14)$$

Les produits du type (3.13) contenus dans le terme non linéaire  $\mathcal{N}[u^N]$  sont calculés aux points de collocation, puis la transformation inverse est appliquée :

$$\widehat{\mathcal{N}[u^N]}_k(t) = \sum_{j=0}^{N-1} T_{jk}^{-1} \mathcal{N}[u^N](x_j, t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ikx_j} \mathcal{N}[u^N](x_j, t), \quad k = -K, \dots, K. \quad (3.15)$$

Il est donc nécessaire d'avoir à disposition un algorithme permettant de passer de l'espace physique à l'espace spectral et vice-versa en effectuant moins d'opérations que ne nécessite le calcul du produit de convolution pour tous les modes.

Un tel algorithme existe : c'est la transformation de Fourier rapide (Fast Fourier Transform, Cooley & Tuckey, 1965) qui permet de réduire considérablement le nombre d'opérations à effectuer par un jeu de factorisations successives des coefficients exponentiels, pour peu que le nombre  $N$  de modes impliqués soit décomposable en petits facteurs premiers. L'algorithme est le plus performant quand  $N$  est une puissance de deux. Le calcul de  $N$  produits de convolution pour  $N$  modes nécessite  $O(N^2)$  multiplications. La transformation de Fourier rapide, si  $N$  est une puissance de 2, en nécessite  $O(N \ln_2 N)$ . Pour  $N = 64$ , on gagne déjà un facteur  $O(10)$  en nombre d'opérations. Pour les simulations effectuées au §5, pour lesquelles  $N = 2048$ , on gagne alors un facteur  $O(100)$ . Dans la présente implémentation du code numérique, les routines de transformation de Fourier rapide de la librairie scientifique Cray (SciLib) sont utilisées.

### Repliement spectral (aliasing)

Néanmoins, ce passage par l'espace physique induit un mélange de modes dans l'espace de Fourier, appelé repliement spectral. En effet, si une fonction  $u$  est donnée par sa série de Fourier  $u(x) = \sum_{k \in Z} \hat{u}_k e^{ikx}$ , et que l'on impose à la série tronquée à  $N$  termes  $u^N(x)$  de prendre les mêmes valeurs que  $u(x)$  aux points de collocation, il vient :

$$\sum_{k=-K}^K \hat{u}_k^N e^{ikx_j} = u(x_j) = \sum_{k \in Z} \hat{u}_k e^{ikx_j}, \quad (3.16)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=-K}^K \hat{u}_k^N e^{ikx_j} = \sum_{k=-K}^K \left( \sum_{p \in Z} \hat{u}_{k+pN} \right) e^{ikx_j}, \quad (3.17)$$

ou encore

$$\hat{u}_k^N = \sum_{p \in Z} \hat{u}_{k+pN}. \quad (3.18)$$

Le coefficient  $\hat{u}_k^N$  contient donc  $\hat{u}_k$ , mais également tous les termes «repliés»  $\hat{u}_{k+pN}$  ( $p = \pm 1, \dots, \pm \infty$ ), que la méthode de collocation est incapable de distinguer.

Ce phénomène est gênant car il intervient dès lors que des termes non linéaires sont présents, comme schématisé sur la colonne de gauche de la figure 3.1. Sur la figure 3.1a est tracé le spectre d'une fonction  $u$ , représentée sur les  $N$  modes de nombre d'onde  $k$  tel que  $|k| \leq K$ . Le spectre du carré de cette fonction est schématisé figure 3.1b, et contient les modes  $k$  tels que  $|k| \leq 2K$ . La méthode de collocation est incapable de distinguer un mode  $k$  d'un mode  $k \pm N$  et mélange ces différents modes. La résolution numérique du problème est donc entachée de l'erreur provenant de ce repliement spectral, comme le montre la figure 3.1c.

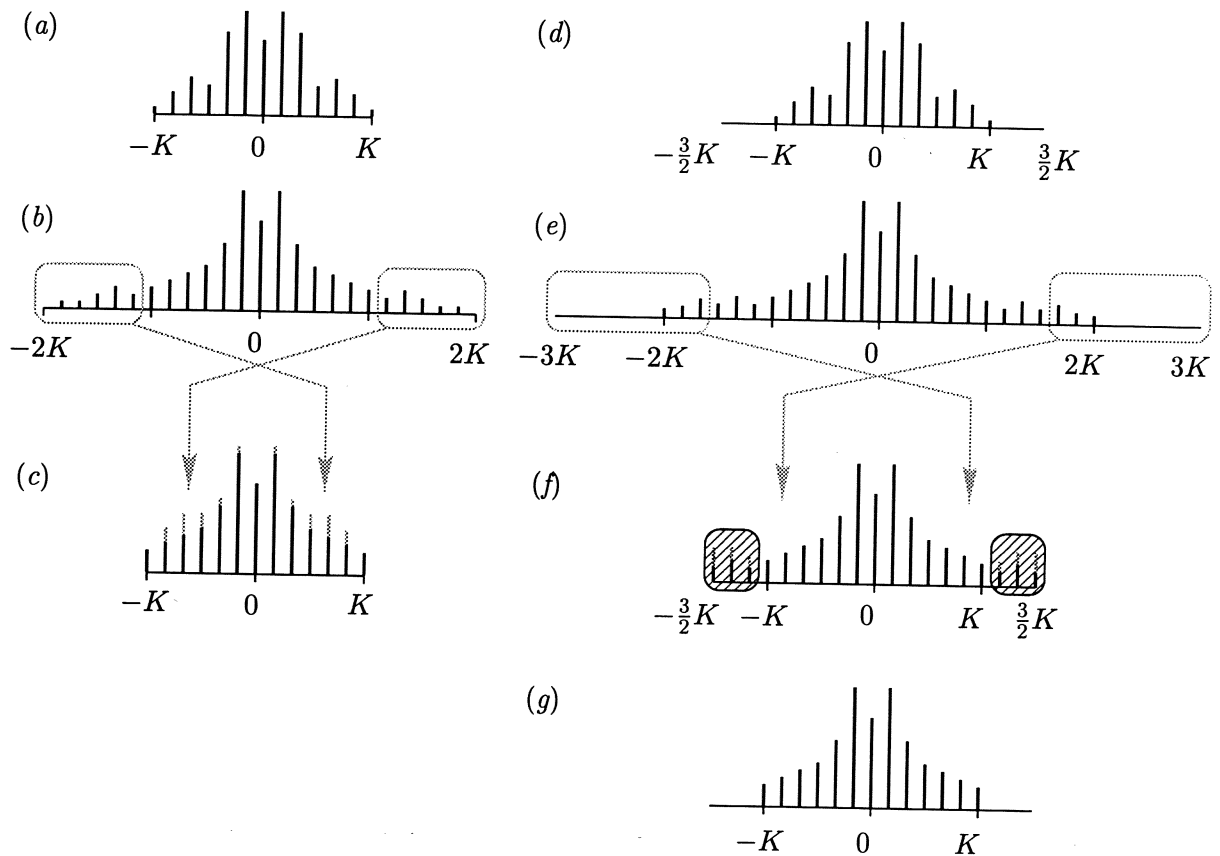


FIG. 3.1 – Schéma illustrant (a)–(c) le phénomène de repliement spectral et (d)–(g) sa suppression grâce à un sur-échantillonnage de moitié. Sont représentés les spectres (a,d) : d'une fonction, (b,e) : de son carré, (c,f) : de son carré après repliement spectral et (g) : de son carré après repliement et troncature.

### Anti-aliasing

On remédie à ce problème en sur-échantillonnant la fonction de moitié, de la manière présentée figure 3.1, colonne de droite. La même fonction que précédemment présente le même spectre de modes  $|k| \leq K$  (figure 3.1d), mais maintenant, l'espace spectral s'étend sur une plage plus large de moitié, i.e.  $|k| \leq 3K/2$ . Le spectre du terme non linéaire (figure 3.1e) s'étend toujours sur la plage de nombre d'ondes  $|k| \leq 2K$ , mais, cette fois, ce sont les modes tels que  $|k| > 3K/2$  qui sont repliés. Parmi eux, seuls les modes  $|k| \leq 2K$  sont non nuls, et sont repliés sur les modes  $|k| > K$ , (voir schéma figure 3.1f). Ces modes affectés par le repliement sont ensuite détruits par troncature (les modes  $|k| > K$  sont mis à zéro). Seuls restent les modes exempts de repliement (figure 3.1g). Bien entendu, l'intégration ainsi effectuée est également entachée d'erreur, à cause de la suppression systématique des modes de grand nombre d'onde. Néanmoins, le repliement est contrôlé, ce qui permet d'éviter une accumulation d'énergie aux plus petites échelles. En pratique, on s'arrange pour que la troncature affecte des modes de très faible énergie, dans la queue du spectre.

### 3.1.4 Généralisation à plusieurs dimensions

Les notions de transformation de Fourier se généralisent immédiatement à  $d = 2, 3$  dimensions. La fonction vectorielle  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  est maintenant donnée par la série multiple

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (3.19)$$

où le coefficient de Fourier  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t)$  est relatif au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  à  $d$  composantes  $(k_x, k_y, \dots)$ . Le coefficient de Fourier est donné par

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (3.20)$$

On peut de même étendre toutes les considérations de §3.1.2 et §3.1.3 au cas multidimensionnel en domaine carré ou cubique.

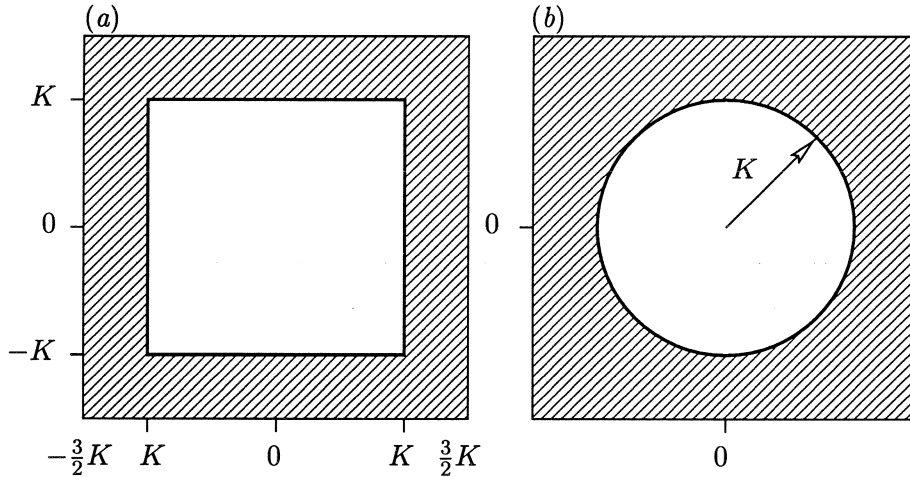


FIG. 3.2 – Schéma illustrant dans un domaine spectral bidimensionnel (a) : la troncature (zone hachurée) qui élimine le repliement spectral tout en affectant le nombre minimal de modes, (b) : la troncature isotrope, adoptée dans la suite.

Pour ce qui concerne la troncature, il faut noter que le sur-échantillonnage de moitié suivant chaque direction, associé à une troncature pour  $|k_x| < K$ ,  $|k_y| < K$ , ..., élimine la contamination due au repliement spectral (voir schéma figure 3.2a). Néanmoins, une telle troncature n'est pas isotrope dans l'espace spectral, et on lui préfère, pour des raisons physiques, une troncature isotrope par laquelle on met à zéro la contribution des modes  $\mathbf{k}$  tels que  $|\mathbf{k}| < K$  (voir figure 3.2b). Ces procédures de sur-échantillonnage entraînent un sur-coût important en volume mémoire. En domaine monodimensionnel, 67% des modes sont conservés après troncature, mais ce pourcentage tombe à 35% en domaine bidimensionnel. En géométrie tridimensionnelle, seuls 16% des modes sont épargnés par la troncature...

## 3.2 Application aux équations de Navier–Stokes

Le fluide est supposé newtonien, incompressible, de masse volumique  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . Son mouvement est régi par les équations de Navier–Stokes écrites ici en formulation

vitesse  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ /vorticité  $\mathbf{rot}\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{V} \times \mathbf{rot} \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} \left( P + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \nu \Delta \mathbf{V}, \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $P(\mathbf{x}, t)$  désigne la pression. Soit un écoulement stationnaire de base, de vitesse  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ , de vorticité  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$ , pour lequel on effectue l'hypothèse de quasi-stationnarité. L'évolution des perturbations de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , de vorticité  $\omega(\mathbf{x}, t)$  et de pression  $p(\mathbf{x}, t)$  à cet écoulement de base est régie par le système :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \mathbf{\Omega} + \mathbf{U} \times \omega + \mathbf{u} \times \omega - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} \left[ p + \mathbf{U} \cdot \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right] + \nu \Delta \mathbf{u}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Dans l'hypothèse de petites perturbations, on peut négliger les termes quadratiques  $\mathbf{u} \times \omega$  et  $\mathbf{u}^2/2$ . On obtient alors les équations de Navier–Stokes linéarisées au voisinage de l'écoulement de base. Ce sont ces équations qui sont intégrées dans le chapitre 4 où est présentée l'étude de la réponse impulsionnelle linéarisée du tourbillon de Batchelor. Elles sont aussi utilisées dans le chapitre 5 pour l'étude de la réponse impulsionnelle de sillages plans. Toutefois, dans ce dernier chapitre, on effectue également des simulations où ces termes non linéaires sont inclus, précisément pour étudier leur effet sur la propagation de la réponse impulsionnelle.

Il faut noter que, pour ces équations de Navier–Stokes en formulation perturbative, même la variante linéarisée ne peut être résolue dans l'espace spectral. En effet, les termes  $\mathbf{u} \times \mathbf{\Omega}$ ,  $\mathbf{U} \times \omega$  et  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}$ , linéaires en la perturbation, sont des produits où interviennent  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$ , fonctions inhomogènes en espace. L'opérateur  $\mathcal{N}$  est donc non nul, et il faut adopter la méthode pseudo-spectrale présentée plus haut (§3.1.3).

### 3.2.1 Formulation spectrale

Dans l'espace spectral, le système (3.22) s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = 0, \\ \frac{d\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{dt} = \left( \mathbf{u} \times \mathbf{\Omega} + \widehat{\mathbf{U}} \times \omega + \mathbf{u} \times \omega \right)_{\mathbf{k}} - \frac{i\mathbf{k}}{\rho} \left[ \hat{p}_{\mathbf{k}} + \left( \widehat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)_{\mathbf{k}} \right] - \nu \mathbf{k}^2 \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}. \end{cases} \quad (3.23)$$

La condition d'incompressibilité, qui se traduit dans l'espace physique par la nullité de la divergence du champ de vitesse, s'exprime dans l'espace spectral par l'orthogonalité de la composante spectrale  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$  avec le vecteur d'onde associé  $\mathbf{k}$  (première équation du système 3.23). On peut donc se restreindre à l'étude de la composante de  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$  orthogonale à  $\mathbf{k}$ , et projeter le système (3.23) à l'aide de l'opérateur de projection  $\mathbf{P}^{\mathbf{k}}$  sur le sous-espace orthogonal à  $\mathbf{k}$ , d'éléments

$$\mathbf{P}_{ij}^{\mathbf{k}} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}. \quad (3.24)$$

La projection de (3.23) s'écrit, sachant que  $\mathbf{P}^{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = 0, \\ \frac{d\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{dt} = \mathbf{P}^{\mathbf{k}} \left[ \mathbf{u} \times \mathbf{\Omega} + \widehat{\mathbf{U}} \times \omega + \mathbf{u} \times \omega \right]_{\mathbf{k}} - \nu \mathbf{k}^2 \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Le terme présent dans (3.23), qui contient la pression dynamique, proportionnel à  $\mathbf{k}$ , disparaît du problème. La pression n'est ici qu'une fonction asservie à la vitesse, qui s'ajuste de telle sorte que cette dernière reste à divergence nulle. Il est donc naturel qu'elle n'intervienne plus dès lors qu'on se restreint au sous-espace des fonctions à divergence nulle.

### 3.2.2 Intégration en temps

L'équation (3.25) est intégrée temporellement à l'aide d'un schéma d'Adams–Bashforth d'ordre 2 dans lequel le terme de diffusion a été intégré exactement. Ce schéma est construit de la façon suivante. Si on note  $\hat{P}_{\mathbf{k}}(t)$  la somme des termes «non linéaires» projetée orthogonalement à  $\mathbf{k}$  :

$$\hat{P}_{\mathbf{k}} \equiv \mathcal{P}^{\mathbf{k}} \left[ \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} + \widehat{\mathbf{U}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \right]_{\mathbf{k}}, \quad (3.26)$$

le problème se réduit à l'intégration de l'équation :

$$\left( \frac{d}{dt} + \nu \mathbf{k}^2 \right) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}(t) = \hat{P}_{\mathbf{k}}(t), \quad (3.27)$$

que l'on peut récrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left( \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} e^{\nu \mathbf{k}^2 t} \right) = \hat{P}_{\mathbf{k}} e^{\nu \mathbf{k}^2 t}, \quad (3.28)$$

ce qui revient à intégrer exactement le terme de diffusion visqueuse. À partir de l'équation (3.28), on peut obtenir le schéma numérique comme combinaison de trois approximations de (3.28) aux différences finies :

– entre  $t = n\delta t$  et  $t = (n+1)\delta t$ , il vient

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{n+1} e^{\nu \mathbf{k}^2 \delta t} = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^n + \hat{P}_{\mathbf{k}}^n \delta t, \quad (3.29)$$

– entre  $t = (n-1)\delta t$  et  $t = n\delta t$ , il vient

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^n = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{n-1} e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t} + \hat{P}_{\mathbf{k}}^{n-1} \delta t e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t}, \quad (3.30)$$

– entre  $t = (n-1)\delta t$  et  $t = (n+1)\delta t$ , il vient

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{n+1} e^{\nu \mathbf{k}^2 \delta t} = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{n-1} e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t} + 2\hat{P}_{\mathbf{k}}^n \delta t. \quad (3.31)$$

Dans les relations (3.29)–(3.31),  $\delta t$  désigne le pas de temps, et l'exposant  $n$  fait référence à l'instant  $t = n\delta t$ . On construit le schéma explicite d'Adams–Bashforth d'ordre 2 en faisant la demi-somme des relations (3.29)–(3.31) :

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^n e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t} + \left[ \frac{3}{2} \hat{P}_{\mathbf{k}}^n e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t} - \frac{1}{2} \hat{P}_{\mathbf{k}}^{n-1} e^{-2\nu \mathbf{k}^2 \delta t} \right] \delta t. \quad (3.32)$$

Ce schéma est stable pour  $\delta t = O((\delta x/U)^{4/3})$ , où  $\delta x$  désigne le pas en espace, et  $U$  une vitesse caractéristique de l'écoulement [2].

Le premier pas de temps, ainsi que l'éventuel «raccrochage» lors de la reprise d'une simulation, est effectué à l'aide d'un schéma de Runge–Kutta du second ordre :

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{1/2} = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^0 e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t/2} + \left( \frac{1 - e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t/2}}{\nu \mathbf{k}^2} \right) \hat{P}_{\mathbf{k}}^0, \quad (3.33)$$

puis

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^1 = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^0 e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t} + \left( \frac{1 - e^{-\nu \mathbf{k}^2 \delta t}}{\nu \mathbf{k}^2} \right) \hat{P}_{\mathbf{k}}^{1/2}. \quad (3.34)$$

Le code numérique a été écrit par Vincent & Meneguzzi (1991) pour l'étude de la turbulence homogène isotrope en domaine cubique périodique. Il a été adapté, en collaboration avec Pierre Brancher, à une géométrie parallélépipédique, puis optimisé pour le Cray C90 de l'IDRIS sur lequel ont été effectuées toutes les simulations.



## Références bibliographiques du chapitre

- [1] BRANCHER, P. 1996 Étude numérique des instabilités secondaires de jets. Thèse de l'École Polytechnique, France.
- [2] CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T. A. 1988 *Spectral methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin. Voir pages 102–3.
- [3] COOLEY, J. W. & TUCKEY, J. W. 1965 An algorithm for the machine computation of complex Fourier series. *Math. Comp.* **19**, 297.
- [4] VINCENT, A. & MENEGUZZI, M. 1991 The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.* **225**, 1–20.



## Chapitre 4

# Instabilités spatio-temporelles dans les jets et sillages tournants

Ce chapitre est consacré à l'étude des instabilités spatio-temporelles d'une famille d'écoulements de jets et de sillages tourbillonnaires par l'analyse de leur réponse impulsionnelle obtenue à l'aide de simulations numériques directes. On présente d'abord les principales configurations expérimentales d'écoulements tournants de la littérature, ainsi que quelques unes de leurs propriétés, liées aux phénomènes d'éclatement tourbillonnaire (§4.1). On expose ensuite l'origine du modèle adopté ici, le «tourbillon de Batchelor» (1964), et on discute de sa pertinence pour décrire ce type d'écoulements (§4.2). On présente ensuite l'étude de sa réponse impulsionnelle linéaire par simulation numérique directe pour analyser les propriétés spatio-temporelles de l'instabilité (§4.3). Cette dernière partie contient les conclusions du chapitre.

### 4.1 Jets tournants et éclatement tourbillonnaire

Les jets tournants se présentent comme la superposition d'un jet et d'un tourbillon coaxiaux, ce qui leur confère un comportement original que ne présentent ni les jets purs, ni les tourbillons purs. En effet, lorsque le tourbillon induit une composante de rotation suffisamment forte, l'écoulement est sujet au phénomène d'éclatement tourbillonnaire (*vortex breakdown*). À une certaine position sur l'axe, le jet change de structure en s'évasant brutalement. Ce phénomène a motivé de très nombreuses études depuis sa découverte en 1957 [24]. Une synthèse des travaux sur le sujet peut être trouvée dans les articles de revue [16, 17, 28, 10, 7]... On se restreint ici à la présentation des principales configurations expérimentales, ainsi que des résultats les plus importants, sur la base desquels on pourra évaluer la pertinence de l'étude des instabilités spatio-temporelles présentée en §4.3.

#### 4.1.1 Principales configurations expérimentales

##### L'aile delta

Le phénomène d'éclatement tourbillonnaire a été observé par Peckham et Atkinson (1957) dans l'écoulement sur une aile gothique en incidence, comme celle utilisée par le bombardier britannique Vulcan. Depuis, les études ont plutôt porté sur l'aile delta, préférée à sa gothique cousine. Dans ces configurations (figure 4.1), deux tourbillons nourris à partir du bord d'attaque de chacune des ailes se développent au-dessus de la voilure. Ils présentent un cœur tourbillonnaire

concentré — de plus en plus intense à mesure que l'on progresse le long des tourbillons — dans lequel l'écoulement axial accélère sous l'effet du déficit croissant de pression. L'avantage évident de ce dispositif est qu'il simule de manière fidèle les voilures d'avions supersoniques, sur lesquelles le phénomène intervient. L'inconvénient en est que les paramètres de l'écoulement tourbillonnaire sont contrôlés indirectement via l'angle d'incidence et l'angle de dérapage de l'aile.

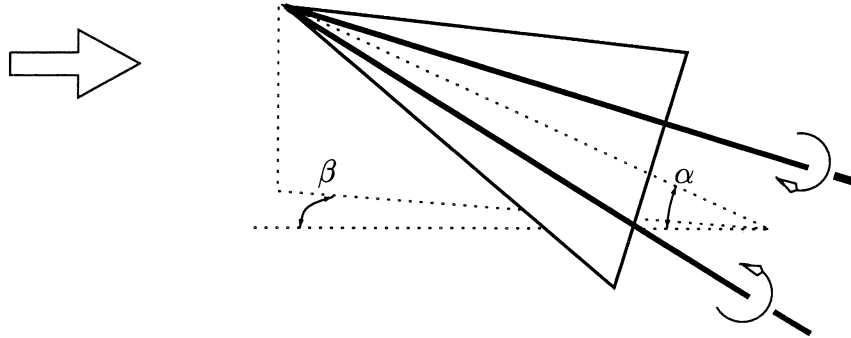


FIG. 4.1 – Principe de l'étude expérimentale des tourbillons d'apex d'une aile delta en soufflerie. L'écoulement vient de la gauche. La position de l'aile est repérée par l'angle d'incidence  $\alpha$  et l'angle de dérapage  $\beta$ .

### Les conduites quasi-cylindriques

Des efforts ont été faits pour isoler un seul jet tourbillonnaire, et en contrôler plus facilement les composantes. Harvey (1960) a conçu un dispositif dans lequel le fluide s'écoule à travers une conduite axisymétrique ; la rotation est provoquée en entrée par un dispositif statique de chicanes inclinables (figure 4.2). Pour conserver l'état éclaté à l'intérieur de la section d'étude, il a été nécessaire d'adopter une conduite dont le rayon croît linéairement dans le sens de l'écoulement. Sarpkaya (1971) a effectué de nombreuses mesures de la position axiale de l'éclatement dans ce système, mais le lien avec la valeur locale du paramètre de rotation (qui varie avec la section de la conduite) n'a pas été analysé.

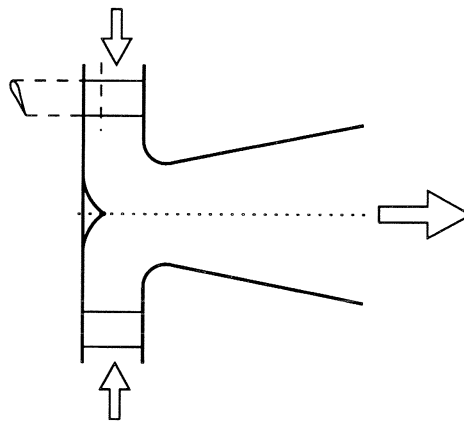


FIG. 4.2 – Principe de l'étude du jet tournant en conduite axisymétrique à section variable. La composante de rotation est imposée au fluide à son entrée grâce à de nombreuses chicanes semblables à celle qui figure en coupe.

Une variante de ce dispositif a été utilisée par Escudier (1980). La rotation est imposée par injection tangentielle de fluide dans la conduite (figure 4.3). Le cœur tourbillonnaire est alors

très fin, et les effets de confinement latéral moins sensibles, si bien que l'écoulement étudié est plus fidèle à celui du problème initial. Toutefois, ce dispositif permet un contrôle assez faible de l'écoulement car le débit et la rotation sont liés, et le tourbillon résultant est en outre légèrement asymétrique.

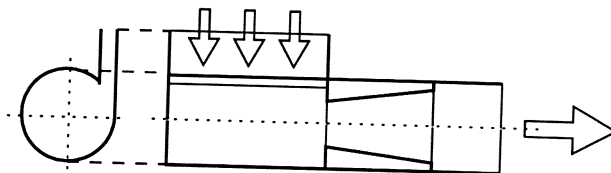


FIG. 4.3 – Principe de la création d'un jet tournant par injection tangentielle (d'après Escudier, 1980).

### Le jet tournant libre

Dans le but de contrôler indépendamment la composante axiale et la composante azimutale de la vitesse de l'écoulement tout en conservant une configuration faiblement confinée, le dispositif de la figure 4.4 a été réalisé au LadHyX [4]. L'écoulement d'eau acquiert une composante de rotation lors de son passage à travers un nid d'abeille tournant à vitesse angulaire constante. La cuve rectangulaire remplie d'eau, où l'éclatement se produit, permet une visualisation aisée par nappes laser, ainsi que la mesure des profils de vitesse par vélocimétrie laser-Doppler. Une expérience similaire a été réalisée indépendamment par Panda & MacLaughlin (1994) avec de l'air, le nid d'abeille étant toutefois remplacé par des chicanes comme celles de la figure 4.2.

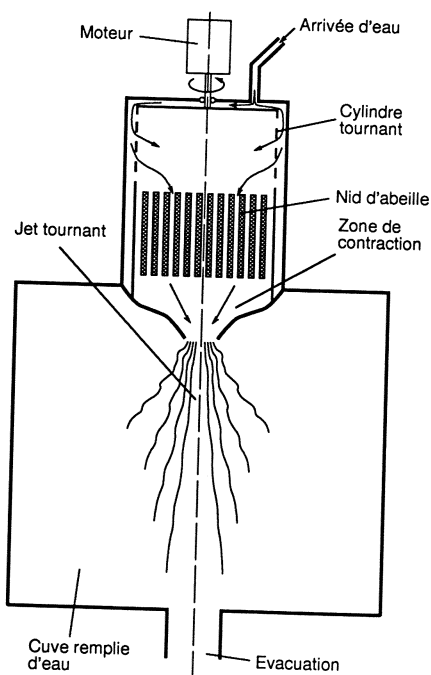


FIG. 4.4 – Principe de l'expérience de jet tournant en milieu faiblement confiné. Merci aux Pauls Manneville et Billant.

### Les mini-tornades

À l'opposé, des expériences de mini-tornades dans des configurations fermées et très confinées (Vogel, 1968 ; Escudier, 1984) ont été réalisées, complétant utilement les études sur le sujet. L'écoulement à l'intérieur d'une petite cuve cylindrique est provoqué par la rotation uniforme de son couvercle (ou de manière équivalente, du fond) (figure 4.5). La circulation créée par le pompage d'Ekman au niveau de l'extrémité tournante prend la forme, sur l'axe, d'un jet tourbillonnaire. Les paramètres de cette expérience sont la vitesse de rotation du couvercle, ainsi que le rapport d'aspect de la cuve. Son intérêt réside dans l'aspect fermé de l'écoulement, qui se prête alors bien à la simulation numérique, les conditions aux limites pouvant toutes être formulées sans approximation.

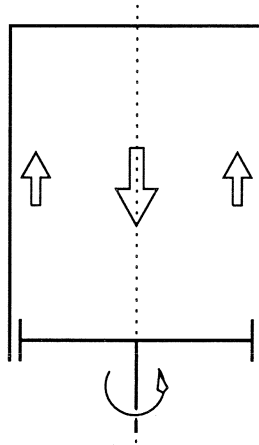


FIG. 4.5 – Principe de la cuve cylindrique à fond tournant. L'écoulement obtenu prend la forme, au voisinage de l'axe, d'un jet tourbillonnaire intense.

#### 4.1.2 Phénoménologie de l'éclatement

##### Bulles, spirales... et cône

L'état éclaté peut prendre diverses formes, mais deux situations prédominent :

- celle d'un état éclaté *axisymétrique*, au moins au voisinage de l'éclatement. La vitesse présente un point d'arrêt sur l'axe, en aval duquel se situe une zone de recirculation du fluide, comme schématisé figure 4.6.

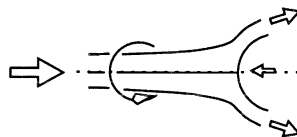


FIG. 4.6 – Point d'arrêt et structure de l'écoulement à son voisinage.

Plus loin encore en aval, la zone de recirculation peut se refermer de manière axisymétrique et stationnaire (type *bulle*) (figure 4.7, Lopez, 1990) ; elle peut se refermer en admettant et refoulant du fluide de manière instationnaire (type *bulle instationnaire*) (figure 4.8, Sarpkaya, 1971) ; elle peut encore, dans les configurations non confinées, s'évaser sous la forme d'un hyperboloïde de révolution (type *cône*) (figure 4.9, Billant *et al.*, 1998).

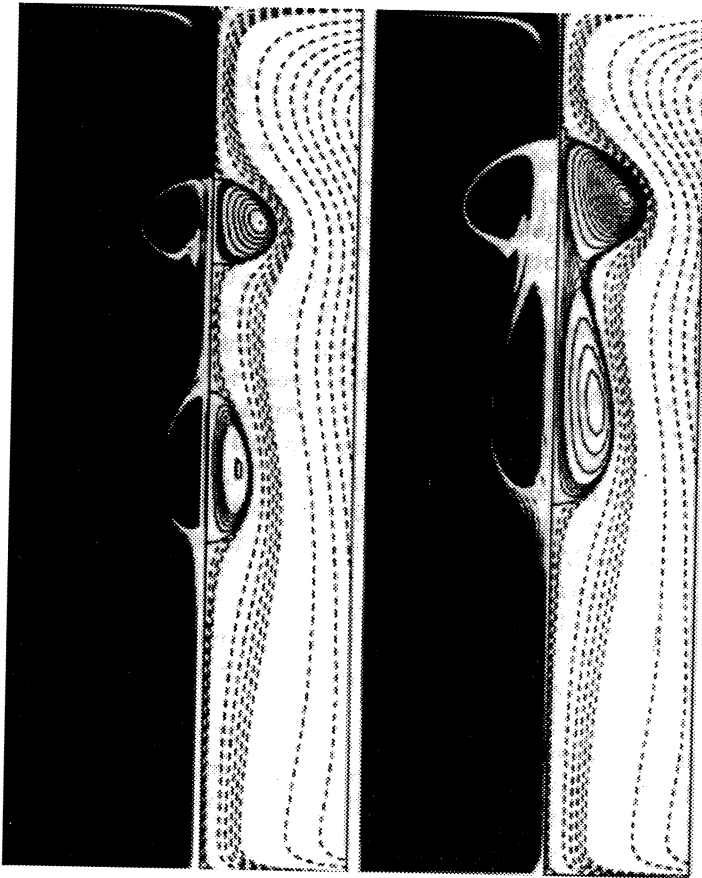


FIG. 4.7 – Double éclatement stationnaire dans une cuve à grand rapport d'aspect, pour deux vitesses angulaires différentes ( $Re = 2126$  et  $Re = 2494$  où  $Re \equiv \Omega R^2 / \nu$ ). L'écoulement central descend vers le fond tournant du cylindre. Sur la moitié gauche des figures sont présentées des photographies des expériences d'Escudier (1984); sur la moitié droite sont présentées les simulations axisymétriques de Lopez (1990) au même nombre de Reynolds.

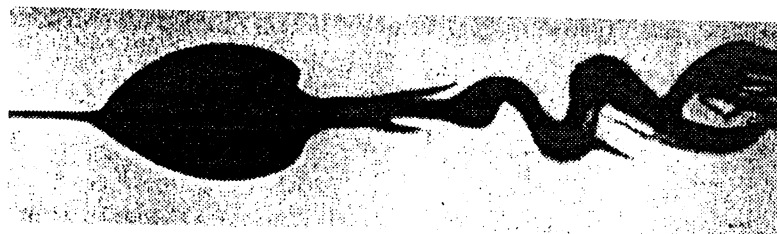


FIG. 4.8 – Éclatement de type bulle instationnaire en conduite axisymétrique légèrement divergente (Sarpkaya, 1971). L'écoulement vient de la gauche. Le sillage de la bulle présente une forte déformation hélicoïdale.

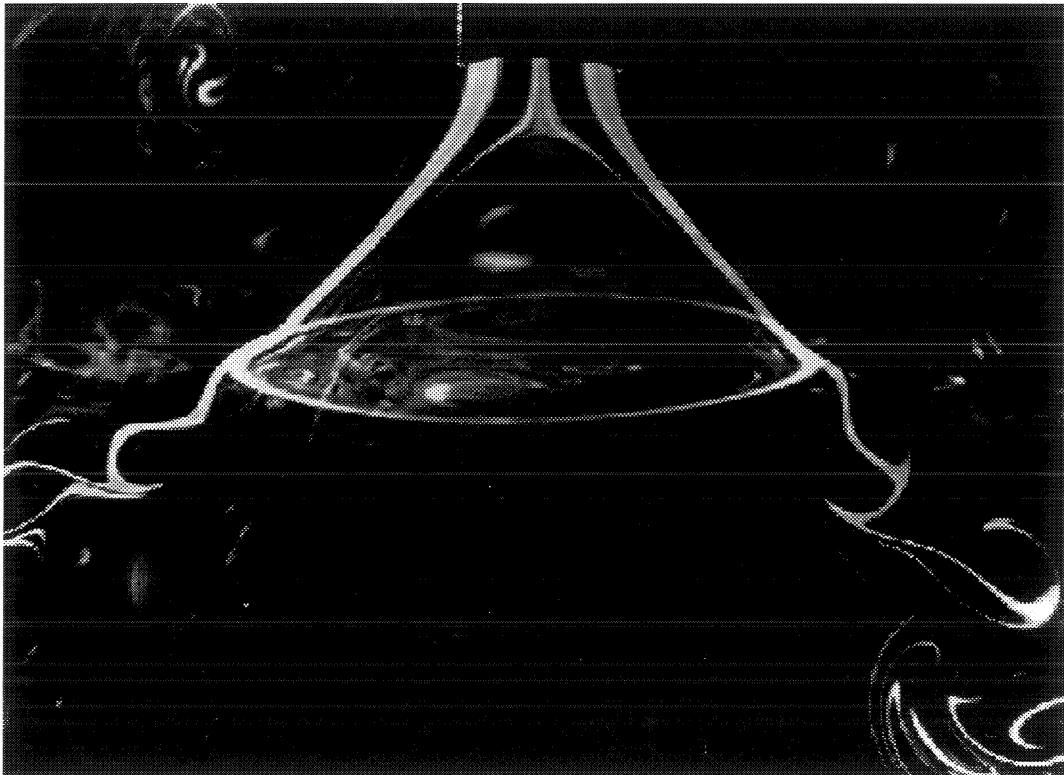


FIG. 4.9 – Éclatement de type cône en configuration faiblement confinée. L'écoulement vient du haut. Il est visualisé à son intersection avec une nappe laser dans un plan méridien et une autre dans un plan légèrement incliné par rapport à l'horizontale pour rendre visible le caractère axisymétrique de cet éclatement (Billant et al., 1998).



- celle d'un état de type *spiral*, pour lequel la composante de vitesse axiale présente un point d'arrêt en précession régulière autour de l'axe (figure 4.10, Brücker, 1993). Ceci a pour effet d'enrouler le cœur tourbillonnaire, rectiligne à l'amont de l'éclatement, en une hélice de même axe.

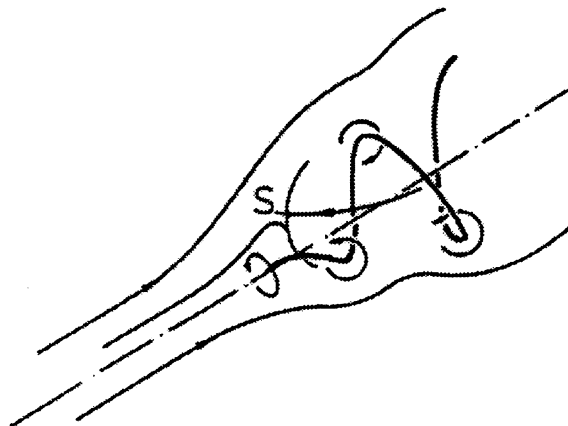


FIG. 4.10 – Schéma de la structure de l'éclatement de type *spiral* (Brücker, 1993).

### Axisymétrie et stationarité

Dans l'expérience en cavité cylindrique à extrémité tournante, l'écoulement axisymétrique stationnaire se referme en aval de la bulle d'éclatement pour reconstituer un jet tournant qui peut être sujet à de nouveaux éclatements — jusqu'à trois observés en régime stationnaire (Escudier, 1984). Par des simulations numériques en formulation axisymétrique et en régime stationnaire, Lopez (1990) a reproduit précisément les écoulements expérimentaux d'Escudier (1984). La figure 4.7 présente cette comparaison. Lopez (1989), et Daube & Sørensen (1989) ont mis en évidence des solutions périodiques pour des rotations plus élevées. Toujours en configuration axisymétrique, une transition vers le chaos par le scénario de Ruelle-Takens a été identifiée pour des rotations supérieures par Sørensen & Christensen (1995). Par ailleurs, Kasarherou (1993) a mis en œuvre une simulation tridimensionnelle de l'écoulement. Il a montré que l'écoulement de base (non éclaté) était linéairement stable à toute perturbation, axisymétrique ou non. De plus, il n'a pu déterminer de solution tridimensionnelle bifurquée sur la gamme de vitesses angulaires considérée. Dans ces études en milieu très confiné, on observe donc un type d'éclatement épuré, axisymétrique et stationnaire, qui, par bifurcations successives, conduit le système à un comportement chaotique.

### Bi-stabilité

Dans les configurations ouvertes, il a été observé que, pour le même écoulement, l'une ou l'autre forme d'éclatement se produise indifféremment. Sur l'aile delta de Lambourne & Bryer (1961) présentée figure 4.11, les deux tourbillons d'apex, initialement symétriques l'un de l'autre, éclatent sous la forme bulle axisymétrique instationnaire et la forme spirale simultanément. Les deux états peuvent donc coexister dans les mêmes conditions d'écoulement.

Plus généralement, le caractère capricieux et la forte instationnarité des éclatements, même de type identique, nuisent gravement à la portance, à la manœuvrabilité et au contrôle des avions à aile delta. Sur un avion supersonique en phase d'approche, la forte cambrure de l'appareil peut provoquer l'éclatement des tourbillons d'apex. Une dissymétrie des états éclatés et, par



FIG. 4.11 – Visualisation des tourbillons d'apex par injection de colorant au voisinage du sommet de l'aile delta. L'écoulement vient de gauche, et l'aile, vue du dessus, est en forte incidence. Les deux tourbillons, initialement symétriques l'un de l'autre, éclatent cependant sous des formes différentes, forme bulle en haut, forme spirale en bas (Lambourne & Bryer, 1961).

conséquent, de la distribution de pression entre les parties gauche et droite de la voilure peut induire un moment de roulis et... un décrochage en vrille.

### Effet du paramètre de rotation

Les écoulements en conduite conique ont été étudiés particulièrement par Sarpkaya (1971). Quand on augmente progressivement l'intensité de la rotation tout en maintenant le débit constant, la forme spirale de l'éclatement est la première à apparaître. Son point d'arrêt remonte l'écoulement (en moyenne, car sa position fluctue dans le temps) au fur et à mesure que l'écoulement tourne plus vite. Puis la forme axisymétrique se développe brutalement, à une position nettement en amont. Pour cette gamme de vitesse de rotation, on observe la coexistence des deux états et, dans le temps, l'écoulement saute de l'un à l'autre, spontanément. Pour des rotations plus élevées, l'état spiral devient de plus en plus rare, jusqu'à n'être plus observé du tout. Ces résultats confirment l'existence d'une plage de bi-stabilité. De plus, ils mettent en évidence l'effet du paramètre local de rotation  $S(x)$ , rapport entre une vitesse azimutale et une vitesse axiale typiques à la position axiale  $x$ . Il est probable que ce paramètre croisse le long de l'écoulement, puisque l'écoulement axial ralentit a priori plus vite que la rotation<sup>1</sup>. On peut donc imaginer que l'éclatement se produise au point où ce paramètre atteint une valeur critique. Ce point serait alors d'autant plus proche de l'extrémité amont que la vitesse de rotation imposée est grande. Cette hypothèse semble confirmée par les travaux de Sarpkaya, et par ceux de Billant, Chomaz & Huerre (1998). Dans cette dernière étude, l'éclatement se produit à une valeur précise du paramètre de rotation, indépendante du débit.

1. si l'on invoque une auto-similarité de l'écoulement et des lois de conservation du débit et du moment cinétique.

## Instationnarité du sillage

Les expériences de Sarpkaya montrent qu'à l'aval d'une bulle axisymétrique instationnaire peut se développer un tourbillon spiral intense (voir figure 4.8). Le spectre temporel du signal mesuré dans cette zone présente un pic relativement marqué et le mode impliqué est le premier mode hélicoïdal contra-rotatif  $m = -1$  (Garg & Leibovitch, 1979). Une explication de ce phénomène, basée sur la présence d'une zone de sillage tourbillonnaire, est avancée à la fin de l'article.

## Analogie avec le ressaut hydraulique

Benjamin (1962) a émis l'hypothèse d'une analogie entre le ressaut hydraulique des écoulements en eau peu profonde et le phénomène d'éclatement tourbillonnaire. Dans cette optique, l'éclatement serait une transition entre un écoulement super-critique, c'est-à-dire dans lequel les ondes se propageraient vers l'aval seulement, et un écoulement sous-critique, pour lequel les ondes pourraient remonter l'écoulement. Cette théorie s'appuie sur le comportement des ondes neutralement stables de longueur d'onde infinie. Elle n'est a priori *pas* justifiée, car, contrairement à l'écoulement en eau peu profonde qui est stable, le jet tournant est en général sujet à de fortes instabilités. Il convient donc d'étudier ces ondes instables, en particulier en déterminant la nature convective (super-critique) ou absolue (sous-critique) de leur instabilité. Dans ce sens, la présente étude est le prolongement de l'étude de Benjamin.

## 4.2 Le tourbillon de Batchelor

Le modèle de jet/sillage tournant adopté ici est connu sous le nom de «tourbillon de Batchelor» ou « $q$ -vortex» en référence au paramètre de rotation qui intervient dans son expression, communément noté  $q$ . La simplicité et la pertinence de cette famille d'écoulements pour l'ajustement des profils de vitesse mesurés dans de nombreuses situations expérimentales ont fait oublier le cadre dans lequel l'expression a été obtenue par Batchelor (1964) pour rendre compte de la présence d'une composante axiale au cœur de l'écoulement tourbillonnaire. Il s'agit d'une solution «auto-similaire» stationnaire axisymétrique des équations de Navier–Stokes linéarisées, dont on présente ici l'origine.

### 4.2.1 Obtention du profil de base

On adopte les coordonnées cylindriques d'axe  $x$ , de rayon  $r$  et de d'angle polaire  $\theta$ ; les composantes associées de la vitesse sont  $u$ ,  $v$  et  $w$ . L'écoulement tourbillonnaire se développe dans le sillage d'une aile (c'est typiquement un tourbillon de bout d'aile) placée dans un écoulement amont uniforme de vitesse axiale  $U_\infty$ . On se place suffisamment loin en aval de l'aile, de telle manière que la diffusion visqueuse ait rendu l'écoulement axisymétrique. Le fluide est supposé newtonien, incompressible, de masse volumique  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . On recherche une solution stationnaire axisymétrique des équations de Navier–Stokes qui régissent l'écoulement :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad (4.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta v - \frac{v}{r^2} \right), \quad (4.2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} = \nu \left( \Delta w - \frac{w}{r^2} \right), \quad (4.3)$$

avec

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}. \quad (4.4)$$

On peut faire une approximation de type couche-limite en supposant les gradients axiaux et les vitesses radiales  $v$  faibles devant les gradients radiaux et les vitesses axiales  $u$  respectivement :

$$\partial/\partial x \ll \partial/\partial r, \quad v \ll u. \quad (4.5)$$

On suppose en outre l'écart à la vitesse amont  $u - U_\infty$  relativement faible :

$$|u - U_\infty| \ll U_\infty. \quad (4.6)$$

La circulation  $C(x, r) \equiv rw(x, r)$  obéit à l'équation linéarisée issue de (4.3) :

$$U_\infty \frac{\partial C}{\partial x} = \nu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right). \quad (4.7)$$

Cette équation de type équation de la chaleur exprime l'effet de la diffusion visqueuse sur la circulation tout au long de l'écoulement, ou, de manière équivalente, au cours du temps, si l'on invoque la transformation de Taylor sous-jacente  $t = x/U_\infty$ .

La solution asymptotique de (4.7) pour toute distribution de vitesse azimutale amont de circulation totale  $C_0$  est donnée par :

$$C(x, r) = rw(x, r) \sim C_0 \left( 1 - e^{-\frac{U_\infty}{4\nu} \frac{r^2}{x}} \right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

On peut ensuite accéder à la pression  $p(x, t)$  grâce à l'équation (4.2) tout en tenant compte de (4.5)–(4.6) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{C^2}{r^3}, \quad (4.9)$$

puis à la vitesse axiale  $u$  à l'aide de l'équation issue de (4.1) :

$$U_\infty \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (4.10)$$

On peut déterminer le comportement asymptotique de la perturbation axiale à l'écoulement incident,  $u(x, r) - U_\infty$ , loin à l'aval quand  $x \rightarrow \infty$ . Cette perturbation vérifie une équation du type équation de la chaleur (toujours avec la transformation de Taylor  $t = x/U_\infty$ ), avec une distribution de «source de chaleur» provenant du gradient axial de pression et se comportant comme  $x^{-2} f(r^2/x)$  quand  $x \rightarrow \infty$ . Des développements faisant intervenir une hypothèse d'auto-similarité de certains facteurs via la variable  $r^2/x$  mènent à :

$$u(x, r) - U_\infty \sim -\frac{C_0^2}{4\nu} \frac{\ln x}{x} e^{-\frac{U_\infty}{4\nu x} r^2}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

La perturbation de vitesse  $u(x, t) - U_\infty$  loin à l'aval apparaît donc comme un *défaut* de vitesse, et l'écoulement est un écoulement de sillage tourbillonnaire. C'est en fait le gradient adverse de pression dû à l'affaiblissement progressif de la rotation qui est à l'origine de ce phénomène. Cette situation est différente de celle des tourbillons d'apex des ailes delta pour lesquels on observe un excès de vitesse axiale dû au renforcement progressif du cœur tourbillonnaire.

#### 4.2.2 Pertinence du modèle

On peut adimensionner les expressions (4.8) et (4.11) par le rayon caractéristique du cœur  $R(x)$  et par l'amplitude (négative) du défaut de vitesse  $\Delta U(x)$  :

$$R(x) = \sqrt{\frac{4\nu x}{U_\infty}} \quad \text{et} \quad \Delta U(x) = -\frac{C_0^2}{4\nu} \frac{\ln x}{x}. \quad (4.12)$$

On obtient ainsi l'expression communément utilisée des composantes de vitesse axiale  $U(r)$  et azimutale  $W(r)$  de l'écoulement :

$$U(r) = a + e^{-r^2}, \quad W(r) = q \frac{1 - e^{-r^2}}{r}, \quad (4.13)$$

où apparaissent les paramètres sans dimension  $a$  et  $q$  qui correspondent respectivement à la vitesse à l'infini et à l'intensité de la rotation :

$$a \equiv \frac{U_\infty}{\Delta U}, \quad q \equiv \frac{C_0}{R\Delta U}. \quad (4.14)$$

Dans l'étude de Batchelor, les deux paramètres  $a$  et  $q$  sont liés par la relation :

$$a(x)C_0 = q(x)R(x)U_\infty. \quad (4.15)$$

Dans la suite, on étudie les instabilités du tourbillon de Batchelor sans se restreindre aux valeurs de  $\Delta U$  cohérentes avec les hypothèses du modèle ( $\Delta U < 0$ ,  $\Delta U \rightarrow 0$ , donc  $a \rightarrow -\infty$ ). En effet, de nombreux expérimentateurs, comme Faler & Leibovich (1978) pour les écoulements en conduite conique ou Pagan & Benay (1987) pour l'aile delta, ont montré que les expressions (4.13), par un choix approprié des paramètres  $a(x)$  et  $q(x)$ , permettent d'ajuster les profils de vitesse mesurés au cœur de jets tournants pleinement développés dans ces configurations. Il est donc utile de conserver les deux paramètres  $a$  et  $q$  indépendants dans l'étude d'instabilité. On est de ce fait amené à négliger la composante radiale  $V(r)$  de l'écoulement de base dont l'intensité est combinaison des dérivées  $a'(x)$  et  $q'(x)$ , inconnues a priori, et supposées faibles. L'éventuelle application des résultats à un écoulement particulier passera par la détermination de l'évolution spatiale des paramètres  $a(x)$ ,  $q(x)$  dans la configuration étudiée.

En revanche, pour les jets tournants libres, qui débouchent dans un milieu au repos et qu'on observe à la sortie d'une buse (Panda & McLaughlin, 1994 ; Billant, Chomaz & Huerre, 1998), les profils radiaux de vitesse axiale et azimutale présentent des gradients beaucoup plus forts. En outre, ces configurations imposent sur le pourtour du tourbillon une zone où la vorticité axiale est de signe opposé à celle du cœur. La décroissance radiale de la vitesse azimutale  $W(r)$  y est beaucoup plus rapide que dans le tourbillon de Batchelor (où elle est en  $1/r$ ). Ces écoulements présentent de ce fait des propriétés d'instabilité assez différentes (voir le modèle étudié par Martin & Meiburg, 1994), et le tourbillon de Batchelor n'est pas approprié pour représenter les profils observés.

Le tourbillon de Batchelor apparaît donc dans une vaste classe de jets tournants. Spall & Gatski (1991) l'ont utilisé comme écoulement de base pour rechercher numériquement des  tats éclatés axisymétriques ou non, et étudier leur topologie. Ils ont montré que *le tourbillon de Batchelor est sujet à éclatement*   condition d'être soumis à un gradient adverse de pression. Ce dernier est imposé pour  $x > l$  par la condition aux limites sur la vitesse axiale  $U(x)$  aux parois latérales :

$$U(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq l, \\ 1 - \delta \frac{x - l}{L - l}, & l \leq x \leq L, \end{cases} \quad (4.16)$$

où  $L$  est la taille du domaine dans la direction de l'écoulement,  $l$  et  $\delta$  deux paramètres correspondant respectivement à la position d'application du gradient et à son intensité.

Ce modèle — sans gradient adverse de pression — a été choisi comme écoulement de base dans l'étude numérique exposée en §4.3 pour plusieurs autres raisons. Ses propriétés d'instabilité temporelle non visqueuse et visqueuse ont fait l'objet de nombreuses études et sont bien documentées (surtout par l'étude de Lessen, Singh & Paillet, 1974). Par ailleurs, le caractère très doux des profils de vitesse en fait un écoulement de choix pour les simulations numériques directes. Les profils au caractère franchement plus abrupt, plus proches des situations expérimentales de jet tournant libre, exigent une définition numérique accrue, et des temps de calculs encore prohibitifs.



### 4.3 Réponse impulsionnelle linéaire du tourbillon de Batchelor

**Absolute/convective instabilities  
in the Batchelor vortex: a numerical study of  
the linear impulse response**

**Ivan DELBENDE, Jean-Marc CHOMAZ and Patrick HUERRE**

*Journal of Fluid Mechanics*, **355** (1998), 229–254.





*J. Fluid Mech.* (1998), vol. 355, pp. 229–254. Printed in the United Kingdom  
© 1998 Cambridge University Press

229

## **Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response**

By **IVAN DELBENDE, JEAN-MARC CHOMAZ  
AND PATRICK HUERRE**

Laboratoire d'Hydrodynamique, CNRS-UMR 156, École Polytechnique,  
F-91128 Palaiseau Cedex, France

(Received 23 December 1996 and in revised form 14 July 1997)

The absolute/convective instability properties of the Batchelor vortex are determined by direct numerical simulation of the linear impulse response. A novel decomposition procedure is applied to the computed wavepacket in order to retrieve the complex wavenumber and frequency prevailing along each spatio-temporal ray. In particular, the absolute wavenumber and frequency observed in the laboratory frame are determined as a function of swirl parameter and external flow. The introduction of a moderate amount of swirl is found to strongly promote absolute instability. In the case of wakes, the transitional helical mode that first undergoes a switch-over to absolute instability is found to be  $m = -1$  without requiring any external counterflow. In the case of jets, the transitional helical mode is very sensitive to swirl and varies in the range  $-5 \leq m \leq -1$ . Only a slight amount of external counterflow (1.5% of centreline velocity) is then necessary to trigger absolute instability. The results of this numerical procedure are in good qualitative and quantitative agreement with those obtained by direct application of the Briggs–Bers criterion to the inviscid dispersion relation (Olendraru *et al.* 1996). Implications for the dynamics of swirling jets and wakes are discussed.

---

### **1. Introduction**

Swirl is known drastically to affect the dynamics of a wide variety of free shear flows such as jets, wakes and mixing layers. The goal of the present study is to demonstrate that axisymmetric jets and wakes experience a transition from convective to absolute instability for moderate swirling levels. Instead of implementing the Briggs–Bers criterion directly on the dispersion relation (see the companion paper, Olendraru *et al.* 1996), we present a novel procedure which relies on a thorough treatment of the linear impulse (or Green) function as determined from direct numerical simulations. The analysis of the large-time asymptotic response leads to the determination of the complex wavenumber and frequency ‘observed’ for each helical mode along distinct spatio-temporal rays. The retrieval of this information is shown to be sufficient to ascertain the convective/absolute nature of the basic flow under consideration. This formulation is illustrated here on the Batchelor vortex which satisfactorily represents the velocity field of trailing line vortices (Batchelor 1964) with superimposed axial flow.

In the absence of any external axial stream, the Batchelor vortex depends on a single non-dimensional parameter, namely the swirl parameter  $q$  which is the ratio of the swirl velocity and axial velocity within the core (see equation (2.2) with  $a = 0$ ). To the present day, most linear instability analyses have been restricted to the temporal framework (real wavenumber, complex frequency). The inviscid instability properties were first examined by Lessen, Singh & Paillet (1974) and more recently by Mayer & Powell (1992). In both instances, the Howard & Gupta (1962) equation was solved numerically in order to determine the dispersion relation between wavenumber and frequency. The main features of inviscid modes may be summarized as follows. When  $q = 0$ , the basic state reduces to a fully developed axisymmetric jet and displays only two unstable helical modes with azimuthal wavenumber  $m = \pm 1$  and identical instability characteristics. Any finite swirl  $q > 0$  leads to the breaking of the reflectional symmetry  $\theta \rightarrow -\theta$ , where  $\theta$  denotes the azimuthal angle. Numerical results indeed indicate that the co-rotating  $m = 1$  mode becomes gradually attenuated. By contrast, as swirl  $q$  is increased, the counter-rotating  $m = -1$  mode is enhanced and higher-order counter-rotating helical modes  $m < -1$  are destabilized. Only modes with  $m < 0$  therefore remain unstable at moderate values of  $q$ . Furthermore, the maximum growth rate over all axial wavenumbers approaches a limiting value as  $m \rightarrow -\infty$  (Leibovich & Stewartson 1983). In this asymptotic régime, the overall maximum growth rate is reached near  $q = 0.87$ . Larger swirl values gradually dampen all helical modes until complete stabilization of the flow for  $q \approx 1.5$ . Similar trends have been observed in the spatial instability (real frequency, complex wavenumber) calculations of Olendraru *et al.* (1996). Corresponding viscous temporal calculations have been performed by Lessen & Paillet (1974), Khorrami (1991) and Mayer & Powell (1992). These investigators have revealed the existence of distinct families of purely viscous modes displaying growth rates that are orders of magnitude below their inviscid counterparts.

These theoretical results have been compared to experimental observations, particularly within the context of vortex breakdown. For extensive discussions on this phenomenon and its manifold theoretical interpretations, the reader is referred to the review articles of Leibovich (1978, 1984), Stuart (1987), Escudier (1988) and Delery (1990), among others. The onset of breakdown in vortices with axial flow is signalled by the appearance of a stagnation point within the core, corresponding to a sudden streamwise deceleration. Time-averaged velocity distributions measured downstream of the stagnation point, in the wake region of the vortex breakdown state, yield  $q$  values below 1.5, which implies that they are temporally unstable (Garg & Leibovich 1979). Furthermore, the observed frequency of the  $m = -1$  instability mode displays good qualitative agreement with the inviscid temporal stability calculations of Lessen *et al.* (1974). Experiments also demonstrate that the velocity distributions measured upstream of the stagnation point, in the jet-like region, correspond to  $q$  values exceeding 1.5, thereby indicating that the incoming flow remains linearly stable (Garg & Leibovich 1979; Escudier, Bornstein & Maxworthy 1982).

Early modelling attempts by Benjamin (1962) have tended to view the occurrence of vortex breakdown as the analogue of hydraulic jumps in supercritical shallow-water layers. In this context, vortices with axial flow can be classified according to the propagating behaviour of the non-dispersive axisymmetric neutral Kelvin waves which they can support in the low-wavenumber limit. Such flows are said to be *supercritical* if they sustain only downstream-travelling waves and *subcritical* if they sustain both upstream and downstream-travelling waves. Vortex breakdown is then

*Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex*

231

considered as the transition region between an incoming supercritical flow and an outgoing subcritical flow as in a hydraulic jump. This interpretation is supported by the experimental study of Escudier *et al.* (1982): the upstream flow is indeed supercritical and the downstream flow subcritical with respect to low-wavenumber axisymmetric Kelvin disturbances.

These notions have subsequently been extended by Tsai & Widnall (1980) to non-axisymmetric temporal waves of arbitrary real axial wavenumber  $k$ . Whereas Benjamin (1962) used the *phase velocity* at zero wavenumber to discriminate between upstream- and downstream-travelling waves, Tsai & Widnall adopted an *ad-hoc* group velocity criterion based on  $\partial\omega/\partial k$  for neutrally stable waves.† Their analysis, applied to the experimental observations of Garg (1977), indicates that incoming swirling flows exhibiting vortex breakdown are supercritical with respect to helical modes  $m = 0, \pm 1$ . Furthermore, in the case of *axisymmetric* breakdown, the flow displays a transition from supercritical to subcritical with respect to helical modes  $m = 0$  and  $m = +1$ . Finally, in the case of *spiral* vortex breakdown, the supercritical–subcritical transition only occurs for the helical mode  $m = +1$ , the axisymmetric mode  $m = 0$  remaining supercritical throughout.

These ideas can be reinterpreted and generalized by invoking the now widely used concepts of absolute/convective instabilities (see Huerre & Monkewitz 1990 for a review). In this framework, the nature of the instability is determined by examining the linear impulse response of a given basic flow for large time. If the response wavepacket is convected away from the source location, the flow is said to be convectively unstable, i.e. supercritical. If it contaminates the entire medium both upstream and downstream of the source location, the flow is said to be absolutely unstable, i.e. subcritical. The objective of the present study is precisely to determine the absolute/convective nature of the instability in the axial direction for the Batchelor vortex family of swirling flows. In this sense, the investigation constitutes a fully spatio-temporal generalization of the above mentioned analyses.

The linear impulse response of various shear flows has already been examined in the past. The case of the laminar boundary layer on a flat plate was carefully treated both theoretically and experimentally by Gaster (1975) and Gaster & Grant (1975) with excellent agreement between computation and observations in the linear régime. More recently, Park (1990) reconstructed the impulse response wavepacket associated with the asymptotic suction boundary layer on a curved plate subjected to a Görtler instability. In these investigations boundary layers were effectively demonstrated to be convectively unstable with respect to both Tollmien–Schlichting and Görtler instabilities. The corresponding problem for the Kelvin–Helmholtz instability of a piecewise-linear mixing layer has been examined by Balsa (1989).

The paper is organized as follows. The two-parameter family of Batchelor vortices used as basic flows is defined in §2 together with the specification of the governing linearized Navier–Stokes equations and associated initial conditions. The numerical method is outlined in §3. In §4, we describe the local modal decomposition method used to retrieve the large-time asymptotics along each spatio-temporal ray. The absolute/convective nature of the instability is then deduced and mapped in the space of swirl and external flow parameters for each helical mode (§5). The main results and their implications in the vortex breakdown context are presented in a final section §6.

† Phase and group velocities coincide in the low-wavenumber régime where waves become non-dispersive and neutral.

232

*I. Delbende, J.-M. Chomaz and P. Huerre***2. Problem formulation**

A cylindrical coordinate system is adopted, whereby  $x$ ,  $r$  and  $\theta$  respectively denote axial (streamwise) distance, radial distance and azimuthal angle. The basic flow under consideration is chosen to be the steady Batchelor (1964) vortex which, in terms of dimensional variables indicated by a star superscript, admits the axial, radial and azimuthal velocity components

$$U^*(r^*) = U_\infty + (U_c - U_\infty) e^{-(r^*/R)^2}, \quad V^*(r^*) = 0, \quad W^*(r^*) = \Omega_c R \frac{1 - e^{-(r^*/R)^2}}{r^*/R}. \quad (2.1)$$

In the above expressions,  $U_c$  is the centreline axial velocity,  $U_\infty$  is the free-stream axial velocity,  $\Omega_c$  is the rotation rate on the axis and  $R$  is a measure of the core size. Since the basic velocity field is independent of  $x$ , viscous diffusion is assumed to be effectively compensated by a body force, as in all previous instability analyses of the Batchelor vortex. It is convenient to introduce non-dimensional variables (without a star superscript) by selecting as length scale the core size  $R$  and as velocity scale the velocity difference  $\Delta U \equiv U_c - U_\infty$ . In terms of these variables, the basic velocity components (2.1) become

$$U(r) = a + e^{-r^2}, \quad V(r) = 0, \quad W(r) = q \frac{1 - e^{-r^2}}{r}, \quad (2.2)$$

where

$$a \equiv \frac{U_\infty}{\Delta U} \quad \text{and} \quad q \equiv \frac{\Omega_c R}{\Delta U} \quad (2.3)$$

respectively designate the external flow and swirl parameters. The swirl parameter  $q$  is a non-dimensional measure of the core rotation rate whereas the external flow parameter  $a$  is a measure of the free-stream axial velocity far from the axis. When  $q = 0$ , one recovers a fully developed jet or wake velocity profile in the absence of rotation.

Typical axial and azimuthal velocity distributions are displayed on figure 1. The effect of varying the external flow parameter  $a$  is illustrated on figure 1(*a,b,c*). Coflowing jets correspond to  $a > 0$  (figure 1*a*), counterflowing jets or wakes to  $-1 < a < 0$  (figure 1*b*), coflowing wakes to  $a < -1$  (figure 1*c*).†

Throughout the study, we consider the evolution of infinitesimal disturbances superimposed on the basic flow profiles (2.2) and governed by the non-dimensional linearized incompressible Navier–Stokes equations for the perturbation velocity  $\mathbf{u}(x, t)$ , pressure  $p(x, t)$  and vorticity  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla [p + \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}] + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.5)$$

In the above expressions  $\mathbf{U}(r)$  denotes the basic velocity field specified in (2.2) and  $\boldsymbol{\Omega}(r) = \nabla \times \mathbf{U}$  the basic vorticity. The Reynolds number  $Re$  is defined as

$$Re = \frac{\Delta U R}{\nu}, \quad (2.6)$$

where  $\nu$  designates the kinematic viscosity. The viscous diffusion term  $Re^{-1} \nabla^2 \mathbf{u}$  acting on the basic flow has been removed by an effective body force as mentioned previously.

† For wake flows the streamwise direction points towards negative  $x$ .

## Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex

233

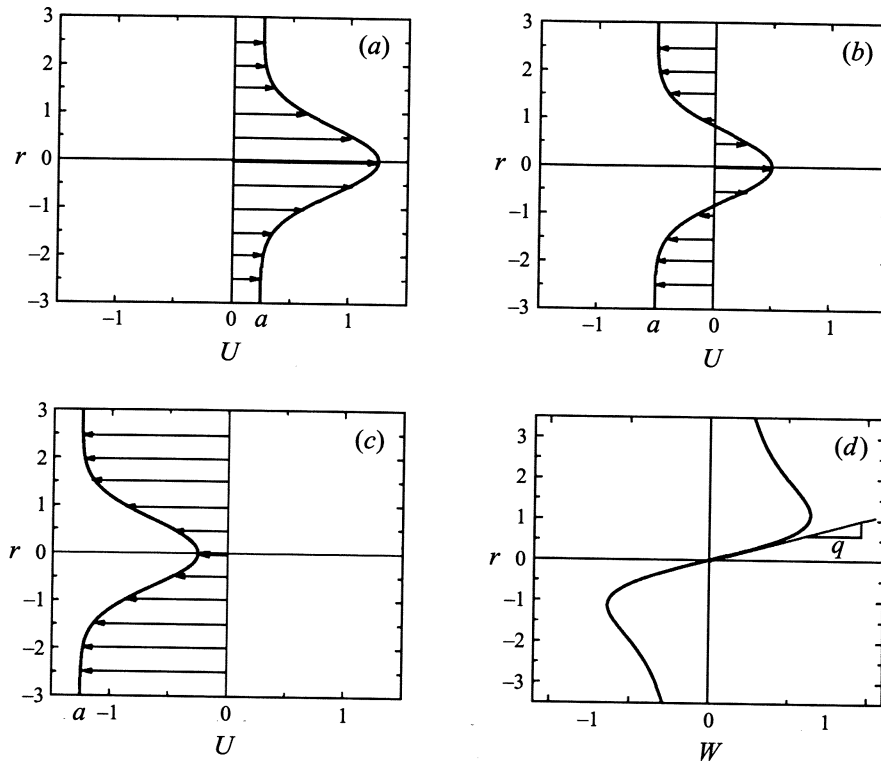


FIGURE 1. Axial velocity profiles: (a)  $a > 0$  coflowing jet, (b)  $-1 < a < 0$  counterflowing wake/jet, (c)  $a < -1$  coflowing wake. (d) Azimuthal velocity profile.

In order to mimic a delta-function forcing in space and time, the following initial conditions are imposed on the perturbations:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{v_0}{\rho_0} \begin{pmatrix} -(y - y_0) - (z - z_0) \\ x - x_0 \\ x - x_0 \end{pmatrix} \exp \left[ - \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\rho_0} \right)^2 \right], \quad (2.7)$$

where, for convenience, we have adopted the usual Cartesian coordinate system  $(x, y, z)$  and associated velocity components  $(u_x, u_y, u_z)$ . Such a velocity distribution satisfactorily represents a localized perturbation of characteristic velocity  $v_0$  concentrated around  $\mathbf{x}_0$  within a sphere of radius  $\rho_0$ . This functional form has been chosen so as to enforce the continuity equation (2.4). The objective of the study is then to analyse the spatio-temporal evolution of the impulse response wavepacket induced by this localized source field. In all that follows, the radial location of the source is chosen to be at  $r_0 = 0.75$ , close to the maximum of the azimuthal vorticity where the jet shear layer is expected to be the most receptive. The other initial condition parameters were chosen to be  $\rho_0 = 0.3$  and  $v_0 = 0.1$ . The selected value of  $\rho_0$  is somewhat of a compromise solution. It should be small enough so that the initial conditions mimic a localized impulse, but it should extend over a few grid points in order to avoid the Gibbs phenomenon arising from spectral truncation.

### 3. Numerical method

Equations (2.4)–(2.5) are effectively solved in Cartesian coordinates within a rectangular box periodically replicated in the three  $x$  (streamwise)-,  $y$ - and  $z$ -directions. A pseudo-spectral scheme has been implemented to integrate numerically this system subject to initial conditions (2.7). The code was originally written by Vincent & Meneguzzi (1991) and adapted to jet instability studies by Brancher, Chomaz & Huerre (1994) and Brancher (1996). The main steps of the numerical method are outlined below.

Let us introduce the usual Fourier transform

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

whereby the governing equations are transformed into

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{k})[\mathbf{u} \times \widehat{\boldsymbol{\Omega}} + \widehat{\mathbf{U}} \times \boldsymbol{\omega}](\mathbf{k}, t) - \frac{1}{Re} k^2 \hat{u}(\mathbf{k}, t). \quad (3.3)$$

The tensor  $\mathbf{P}(\mathbf{k})$  with Cartesian components  $P_{ij} \equiv \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$  designates the projection operator on the space of divergence-free fields.

Time integration between  $t = n\delta t$  and  $t = (n+1)\delta t$  is performed in spectral space via the second-order finite-difference Adams–Bashforth numerical scheme

$$\hat{u}^{n+1}(\mathbf{k}) = \hat{u}^n(\mathbf{k}) e^{-k^2 \delta t / Re} + \left( \frac{3}{2} \mathbf{P}^n(\mathbf{k}) e^{-k^2 \delta t / Re} - \frac{1}{2} \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{k}) e^{-2k^2 \delta t / Re} \right) \delta t \quad (3.4)$$

so that the viscous diffusion term in (3.3) is integrated exactly. In equation (3.4),  $\hat{u}^n(\mathbf{k})$  stands for  $\hat{u}(\mathbf{k}, n\delta t)$  and  $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$  for  $\mathbf{P}(\mathbf{k})[\mathbf{u}^n \times \widehat{\boldsymbol{\Omega}} + \widehat{\mathbf{U}} \times \boldsymbol{\omega}^n](\mathbf{k})$ . At each time step  $t = n\delta t$  the Fourier transform defined in (3.1) is evaluated. The transform  $\mathbf{u}^n \times \widehat{\boldsymbol{\Omega}} + \widehat{\mathbf{U}} \times \boldsymbol{\omega}^n$  of cross-terms is then calculated and projected via the operator  $\mathbf{P}(\mathbf{k})$ , thereby providing the data necessary to perform the temporal integration to the next time step  $t = (n+1)\delta t$ .

In all simulations, the periodic rectangular box is made up of  $N_x \times N_y \times N_z$  collocation points where  $N_x = 768$  and  $N_y = N_z = 96$ , equally spaced on a Cartesian mesh with  $\delta x = \delta y = \delta z = 0.15$ . The streamwise ( $L_x$ ) and cross-stream ( $L_y = L_z$ ) extent of the box therefore correspond to 115 and 14 jet radii respectively. Such an elongated box is necessary in order to avoid any spurious effects associated with the streamwise-periodic boundary conditions. Streamwise periodicity has indeed been checked to have no significant influence on the wavepacket evolution over the total selected integration time. In spite of the fact that the basic azimuthal velocity  $W(r)$  decays only algebraically fast as  $r \rightarrow \infty$ , the cross-stream periodicity does not introduce any undesirable effects: all computed quantities appearing in (3.3) are linear in the perturbation quantities and therefore decay exponentially when  $r \rightarrow \infty$ , as for all linearized eigenfunctions. A typical exponential decay is of the form  $e^{-kr}$  and it is sufficiently fast provided that the axial wavenumbers of interest are reasonably large: in most situations, these will satisfy the condition  $k > 0.6$  which, for the selected box size, ensures that  $e^{-kr} < 10^{-2}$  at the cross-stream boundaries. Finally, the time increment is chosen to be  $\delta t = 0.01$ , in such a way that the Courant condition  $\delta t < \delta x / U^{\max}$  is fulfilled, where  $U^{\max}$  is the maximum basic velocity. Throughout the study, the Reynolds number has been fixed at  $Re = 667$ , so that the associated grid and time steps lead to reasonable computational size and integration time (6h 40 of CPU time on a Cray 90 for a 3200 iteration run). As expected, lowering  $Re$  causes a

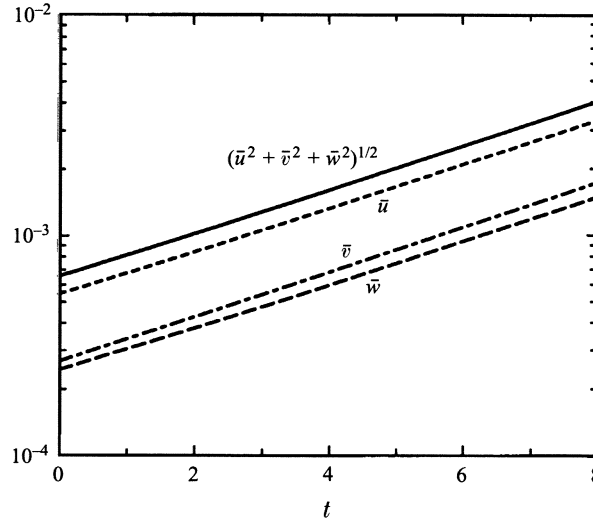


FIGURE 2. DNS code validation for  $a = 0$ ,  $q = 0.4$ ,  $Re = 667$ : temporal evolution of the root-mean-square perturbation velocity  $(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)^{1/2}$  and velocity components  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ . Initial conditions are chosen to coincide with the  $m = -2$  inviscid eigenmode at  $k = k^{\max} = 0.9$ .

global damping of the solution. However, this effect has not been investigated here, as it does not qualitatively affect the present results.

In order to validate the numerical code, a standard test simulation has been performed as in Brancher *et al.* (1994). Direct numerical simulations initialized by a linearized eigenmode distribution have been compared with the predictions of inviscid linear instability theory. A sample result is shown on figure 2, for a swirling jet at  $a = 0$ ,  $q = 0.4$  and  $Re = 667$ . The initial conditions have been chosen to coincide with the linearized eigenfunction of the (most amplified)  $m = -2$  mode of axial wavenumber  $k = k^{\max} = 0.9$ . The streamwise period of the computational box is therefore selected to be  $L_x = 2\pi/k^{\max}$ . The figure displays the computed temporal evolution of the r.m.s. axial ( $\bar{u}$ ), radial ( $\bar{v}$ ) and azimuthal ( $\bar{w}$ ) perturbation velocity components as well as the r.m.s. perturbation velocity  $(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)^{1/2}$ . Except at the very beginning of the simulation where a slight viscous smoothing takes place, these field variables increase exponentially with the growth rate  $\omega_i = 0.23$ , a result which agrees satisfactorily with the inviscid theoretical value 0.26 if one bears in mind the damping effect of viscosity.

#### 4. Wavepacket response and modal decomposition

Typical calculated impulse responses are displayed in figures 3 and 4 for a non-rotating jet ( $q = 0$ ) and a rotating jet ( $q \neq 0$ ) respectively. Isocontours of streamwise perturbation velocity have been represented to characterize the spatial distribution of the wavepacket. At this level of description, it is impossible to determine unambiguously the leading and trailing edges of the wavepacket: their location naturally depends on the perturbation level selected for the isosurfaces. It is therefore premature to draw any conclusion regarding the absolute or convective nature of the instability. However, such snapshot pictures provide valuable information on the spatial structure and modal content of the impulse response. In the non-rotating case (figure 3), the jet response is dominated by the superposition of counter-rotating helical modes  $m = \pm 1$

236

I. Delbende, J.-M. Chomaz and P. Huerre

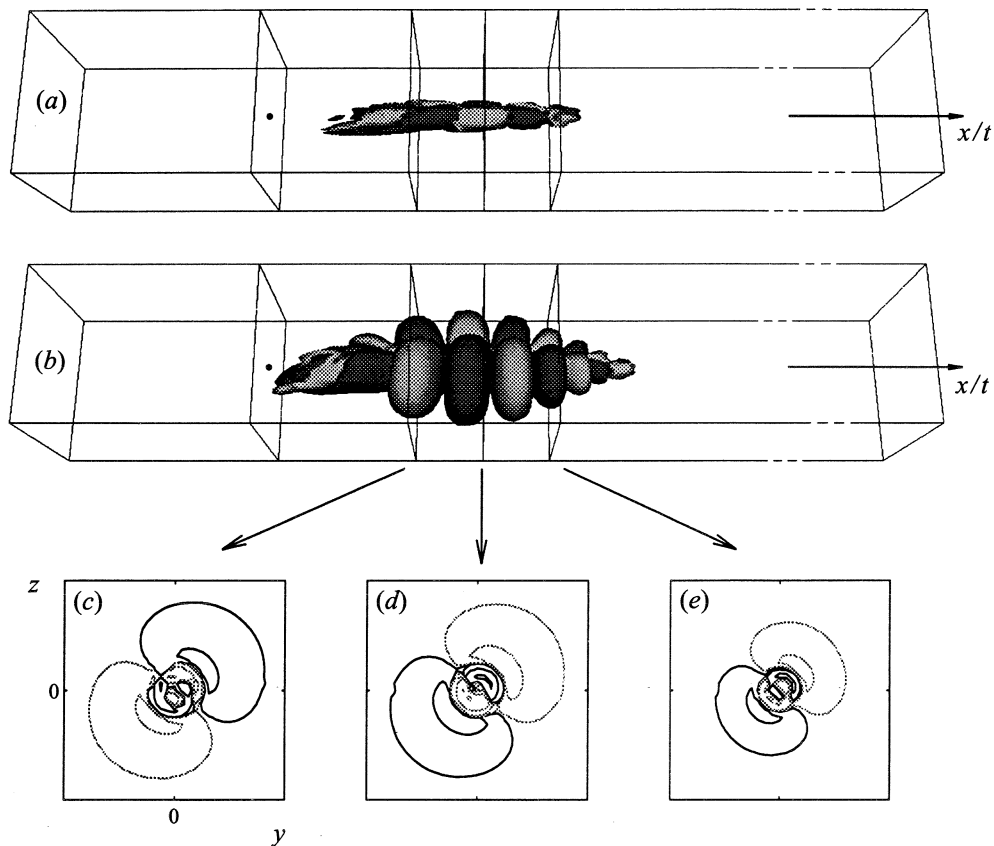


FIGURE 3. Wavepacket spatial distribution at  $t = 32$  for a non-rotating jet at  $a = 0$ ,  $q = 0$ ,  $Re = 667$ . Isosurfaces of axial perturbation velocity component  $u$ : (a)  $u = \pm u^{\max}/20$  and (b)  $u = \pm u^{\max}/1000$ , where  $u^{\max}$  is the maximum value of  $u$  in the entire domain. Isocontours of axial perturbation velocity component  $u$  at various cross-sections corresponding to distinct  $x/t$  stations: (c) at the wavepacket trailing edge  $x/t = 0.4$  for  $u = \pm 10^{-4,-5,-6}$ ; (d) at the wavepacket maximum  $x/t = 0.6$  for  $u = \pm 10^{-3,-4,-5,-6}$ ; (e) at the wavepacket leading edge  $x/t = 0.8$  for  $u = \pm 10^{-4,-5,-6}$ . In these plots, dark regions or lines correspond to positive values of  $u$ , grey regions or lines to negative values of  $u$ .

of equal intensity. The azimuthal standing wave patterns in the various cross-sections  $x/t = \text{const}$  corroborate this observation. This feature is consistent with the fact that the only unstable modes are precisely  $m = \pm 1$ . In the swirling case (figure 4), the impulse response is composed of helical waves which rotate in a direction opposite to that of the basic flow. According to the cross-sectional views (figure 4c,d,e), the azimuthal structure is complex and made up of a superposition of various helical modes of unknown wavenumber  $m$ .

The goal of the following two subsections is to apply appropriate decomposition procedures to the computed impulse response in order to retrieve the temporal instability characteristics for all real wavenumbers (§4.1) and more importantly the long-time asymptotics of the wavepacket (§4.2). In essence, all the observable features of the dispersion relation will be reconstructed from the knowledge of the impulse response. The steps common to these two procedures are outlined below for the axial perturbation velocity component  $u(x, y, z, t)$  generated by DNS.

It is first necessary to compute the velocity  $u(x, r, \theta, t)$  at the nodes of a grid in



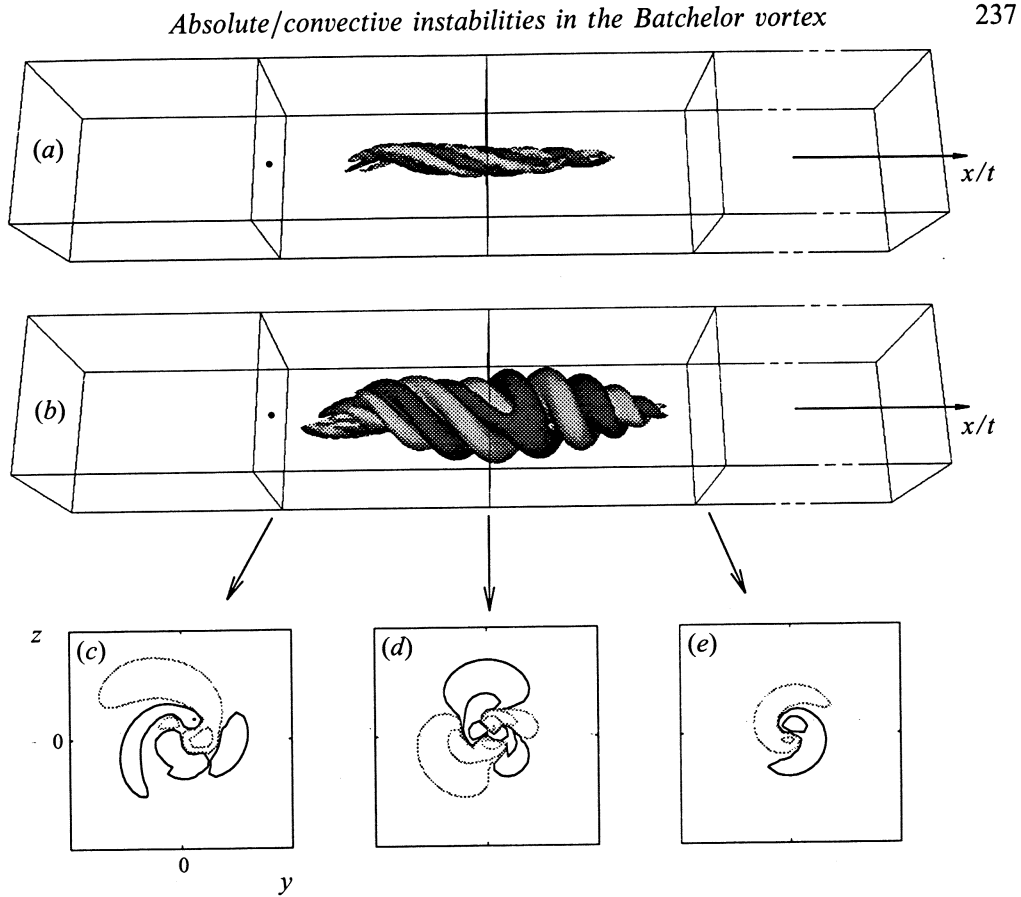


FIGURE 4. (a, b) As figure 3 but for a rotating jet at  $q = 0.4$ , and (c) at the wavepacket trailing-edge near  $x/t = 0$  for  $u = \pm 10^{-5,-6}$ ; (d) at the wavepacket maximum  $x/t = 0.6$  for  $u = \pm 10^{-1,-2,-3}$ ; (e) at the wavepacket leading-edge  $x/t = 0.12$  for  $u = \pm 10^{-5,-6}$ .

the cylindrical coordinate system  $(x, r, \theta)$ . Let  $\hat{u}_{\kappa lp}(t)$  denote the discrete Cartesian Fourier transform with wavenumber indices  $\kappa$ ,  $l$  and  $p$  in the  $x$ -,  $y$ - and  $z$ -directions respectively as generated by DNS. The velocity  $u(x, r, \theta, t)$  at each collocation point is then obtained via the 'slow' reverse Fourier transform

$$u(x, r, \theta, t) = \frac{1}{N_x N_y N_z} \sum_{\kappa lp} \hat{u}_{\kappa lp}(t) \exp 2i\pi \left( \kappa \frac{x}{L_x} + l \frac{r \cos \theta}{L_y} + p \frac{r \sin \theta}{L_z} \right) \quad (4.1)$$

over all Cartesian Fourier modes  $\kappa = -N_x/2, \dots, N_x/2 - 1$ ,  $l = -N_y/2, \dots, N_y/2 - 1$ ,  $p = -N_z/2, \dots, N_z/2 - 1$ .

To define the amplitude and phase of the wavepacket unambiguously, the analytical axial velocity  $\tilde{u}(x, r, \theta, t)$  is introduced through the convolution

$$\tilde{u}(x, r, \theta, t) = \left[ \delta(x) + \frac{i}{\pi x} \right] * u(x, r, \theta, t) \quad (4.2)$$

where symbol  $*$  designates the convolution operator with respect to  $x$ . Conversely  $u(x, r, \theta, t) = \text{Re } \tilde{u}(x, r, \theta, t)$ . In Fourier space, this amounts to setting all negative  $k$ -modes of  $u(x, r, \theta, t)$  to zero in order to recover the usual complex exponential representation.

Finally, each azimuthal component  $m$  is isolated by means of the azimuthal Fourier

238

I. Delbende, J.-M. Chomaz and P. Huerre

transform

$$\tilde{u}_m(x, r, t) = \int_0^{2\pi} \tilde{u}(x, r, \theta, t) e^{-im\theta} d\theta. \quad (4.3)$$

The above steps are implemented on a cylindrical grid with 768 points in the streamwise direction, 20 points in the radial direction and 32 points in the azimuthal direction. The azimuthal wavenumber is therefore restricted to the range  $|m| < 16$ .

#### 4.1. Temporal instability properties

As in Brancher (1996), the broad nature of the wavenumber spectrum defining the initially localized perturbation can effectively be used to extract the temporal history of each individual axial Fourier component  $k$  and to deduce its asymptotic temporal growth rate.

The axial Fourier transform of  $\tilde{u}_m(x, r, t)$  reads

$$\hat{u}_m(k, r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_m(x, r, t) e^{-ikx} dx. \quad (4.4)$$

A measure  $\hat{a}_m(k, t)$  of the real amplitude of each Fourier component pair  $(k, m)$  is then

$$\hat{a}_m(k, t) = \left( \int_0^{+\infty} |\hat{u}_m(k, r, t)|^2 r dr \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

A measure  $\varphi_m(k, t)$  of the associated phase distribution at the radial source location  $r_0$  may conveniently be chosen as

$$\varphi_m(k, t) = \arg \hat{u}_m(k, r_0, t), \quad 0 \leq \varphi_m(k, t) < 2\pi. \quad (4.6)$$

The temporal growth rate  $\omega_{m,i}(k)$  can then be obtained through the formula

$$\omega_{m,i}(k) \sim \frac{\partial}{\partial t} \ln \hat{a}_m(k, t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.7)$$

while the real part  $\omega_{m,r}(k)$  of the frequency is calculated according to the definition

$$\omega_{m,r}(k) \sim -\frac{\partial}{\partial t} \varphi_m(k, t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

In the numerical implementation of this procedure, the logarithmic derivative (4.7) is effectively taken to be

$$\omega_{m,i}(k) \approx \frac{\ln [\hat{a}_m(k, t_2) / \hat{a}_m(k, t_1)]}{t_2 - t_1}, \quad (4.9)$$

where  $t_1 = 16$  and  $t_2 = 32$ , while the derivative (4.8) is evaluated as

$$\omega_{m,r}(k) \approx -\frac{\varphi_m(k, t_3) - \varphi_m(k, t_2)}{t_3 - t_2}, \quad (4.10)$$

where  $t_3 = 32.5$ . Note that the phase function  $\varphi_m(k, t)$  defined in (4.6) is discontinuous whenever it reaches the value 0 or  $2\pi$ . In order to circumvent this difficulty, the time interval  $t_3 - t_2$  appearing in (4.10) is deliberately selected to be much shorter than  $t_2 - t_1$  in (4.9).

Overall results obtained via this procedure are displayed on figure 5 for the Batchelor vortex without external flow  $a = 0$ ,  $q = 0.8$ ,  $Re = 667$ . For this parameter setting, only the first twelve counter-rotating helical modes ( $-12 \leq m \leq -1$ ) are seen to be unstable. The most amplified disturbance is generated at  $m = -4$  and

## Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex

239

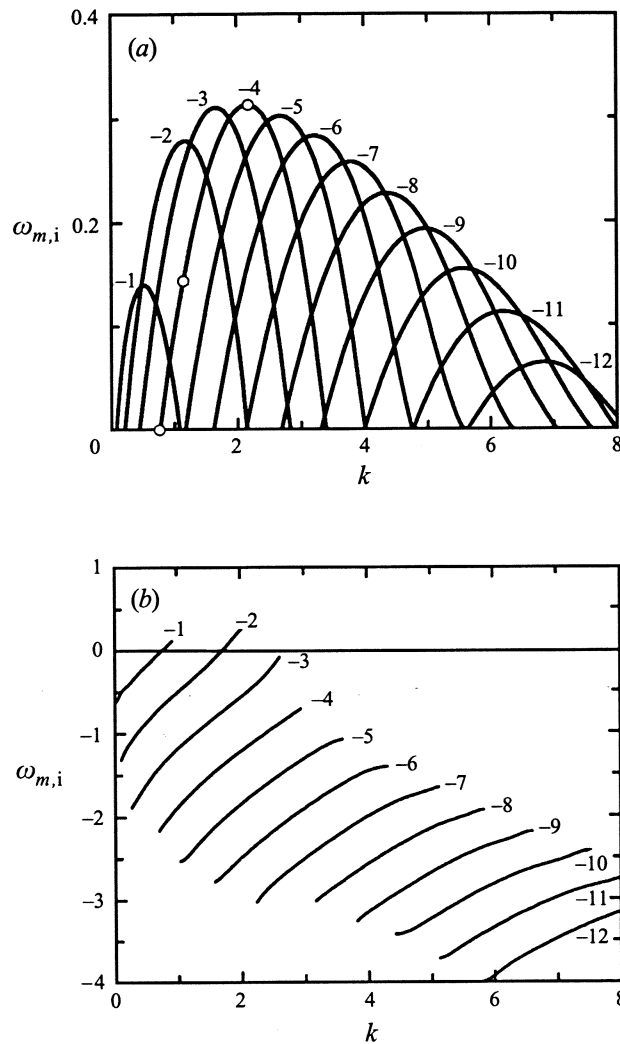


FIGURE 5. Dominant temporal instability modes for  $a = 0$ ,  $q = 0.8$  and  $Re = 667$  retrieved by DNS for each helical mode  $-12 \leq m \leq -1$ : (a) temporal growth rate  $\omega_{m,i}(k)$ ; (b) real part of the frequency  $\omega_{m,r}(k)$ .

$k_{-4}^{\max} = 2.15$ . The axisymmetric mode ( $m = 0$ ), as well as all co-rotating helical modes ( $m > 0$ ) are found to be stable. These results are in qualitative agreement with the linear instability analysis of Lessen *et al.* (1974) summarized in the introduction. According to the latter investigation, higher-order helical modes remain inviscidly unstable for large  $|m|$ ,  $m < 0$ , whereas viscosity is seen to stabilize all modes beyond  $m = -12$  when  $Re = 667$ .

A quantitative comparison between the viscous temporal (VT) instability properties retrieved in such a way and the inviscid temporal (IT) results of Lessen *et al.* (1974) is presented in table 1 for the first six counter-rotating helical modes. The most amplified axial wavenumbers  $k_m^{\max}$  are in excellent agreement. As expected from a fully viscous calculation, associated temporal growth rates  $\omega_{m,i}^{\max}$  are systematically lower than their inviscid counterparts.

$m$	$k_m^{\max}$			$\omega_{m,i}^{\max}$		
	IT	VT	WA	IT	VT	WA
-1	0.61	0.54	0.56	0.17	0.14	0.13
-2	1.22	1.18	1.15	0.31	0.27	0.25
-3	1.66	1.68	1.64	0.36	0.31	0.28
-4	2.14	2.17	2.13	0.37	0.31	0.28
-5	2.65	2.68	2.64	0.39	0.30	0.27
-6	3.20	3.22	3.17	0.40	0.28	0.25

TABLE 1. Most amplified wavenumber  $k_m^{\max}$  and associated growth rate  $\omega_{m,i}^{\max}$  for the Batchelor vortex without external flow at  $a = 0$ ,  $q = 0.8$ ,  $-6 \leq m \leq -1$ . IT: inviscid temporal instability calculations of Lessen *et al.* (1974); VT: viscous temporal instability properties retrieved by DNS as described in §4.1 for  $Re = 667$ ; WA: wavepacket asymptotics retrieved by DNS as described in §4.2 for  $Re = 667$ .

In order to verify that (4.9) leads to reliable estimates of the asymptotic temporal growth rate, it appears essential to check that the radial shape of the corresponding eigenfunction is approximately invariant with time, as shown on figure 6 for different axial wavenumbers at  $m = -4$ : for the most amplified wavenumber  $k_{-4}^{\max} = 2.15$ , the radial distributions  $|\hat{u}_m(k, r, t)|$  and  $\arg \hat{u}_m(k, r, t)$  of amplitude and phase at  $t_1$  and  $t_2$  are indeed invariant (figure 6a). As the wavenumber is lowered to  $k = 1.15$  and  $k = 0.75$  to reach neutral stability (figure 6b,c), the shape invariance gradually deteriorates and remains enforced only near the axis  $r = 0$  over a limited radial extent. For these selected values of  $t_1$  and  $t_2$ , quantitatively accurate results are therefore obtained only sufficiently far away from neutral whence transient effects have become negligible. In order to confirm the accuracy of the results near neutral, one would have to extend the computations over longer integration times and therefore longer axial distances.

#### 4.2. Large-time wavepacket asymptotics

The objective of the following procedure is to determine the complex streamwise wavenumber  $k_m(v_g)$  and complex frequency  $\omega_m(v_g)$  observed along each spatio-temporal ray  $x/t = v_g$  for different azimuthal modes  $m$  in the asymptotic régime  $t \rightarrow \infty$ . This is usually achieved analytically by resorting to steepest-descent arguments (Bers 1983), according to which each azimuthal mode is expected to evolve as

$$\tilde{u}_m(x, r, t) \sim F_m(v_g, r, t) e^{i[k_m(v_g)x - \omega_m(v_g)t]}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

In the above expression  $F_m(v_g, r, t)$  is an algebraically decaying function of time that involves the eigenfunction pertaining to  $k_m$ .

In what follows, it will prove useful to introduce the growth rate  $\sigma_m(v_g)$  ‘observed’ along a particular spatio-temporal ray  $x/t = v_g$  for the azimuthal mode  $m$ . According to (4.11),

$$\sigma_m(v_g) = \omega_{m,i}(v_g) - k_{m,i}(v_g)v_g. \quad (4.12)$$

Let

$$A_m(x, t) = \left( \int_0^{+\infty} |\tilde{u}_m(x, r, t)|^2 r \, dr \right)^{1/2} \quad (4.13)$$

denote the real amplitude pertaining to azimuthal mode  $m$ , and

$$\Phi_m(x, t) = \arg \tilde{u}_m(x, r_0, t), \quad 0 \leq \Phi_m(k, t) < 2\pi, \quad (4.14)$$

## Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex

241

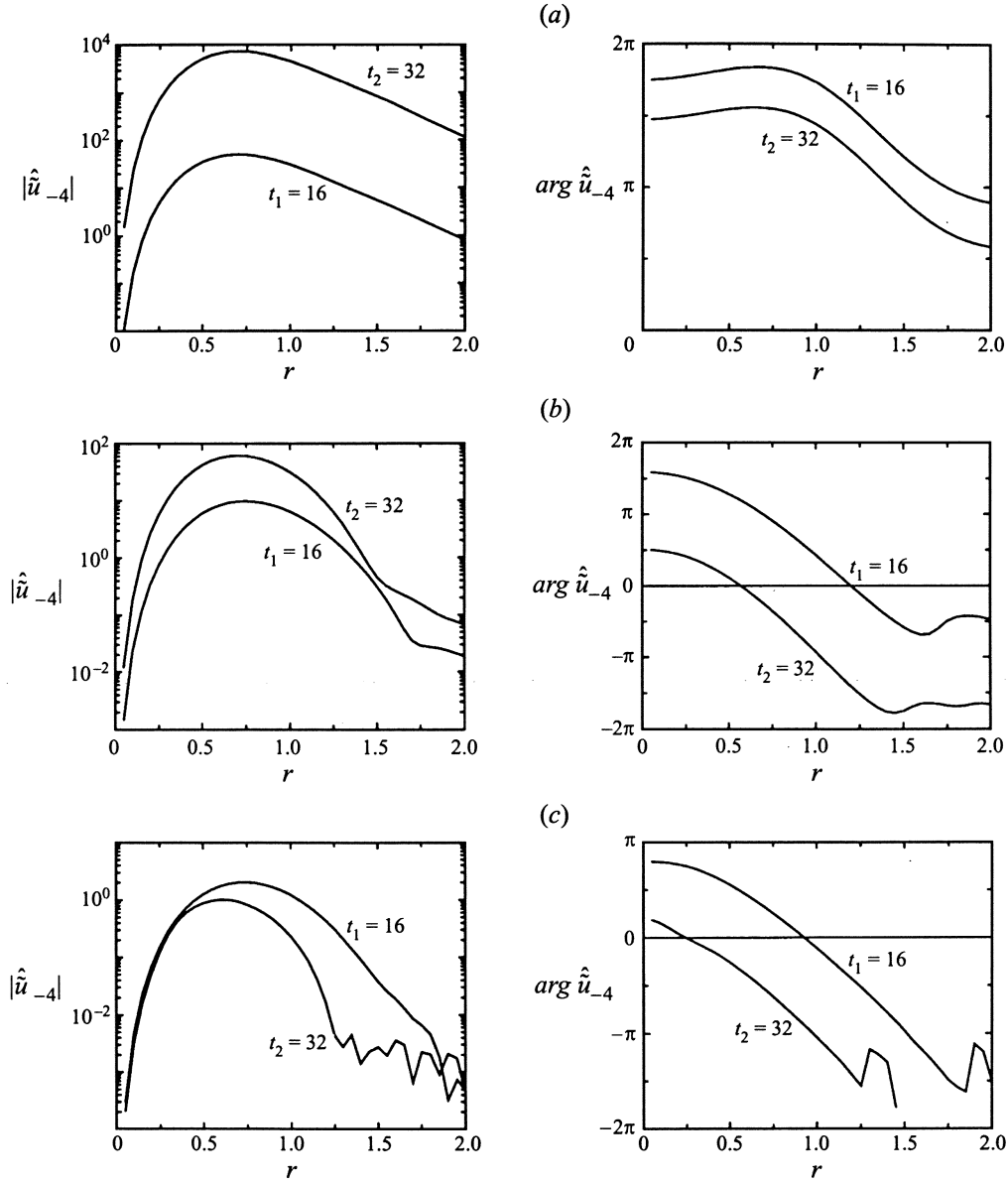


FIGURE 6. Radial distribution of temporal eigenfunction  $\hat{u}_m(r, k, t)$  for azimuthal mode  $m = -4$  retrieved by DNS from the perturbation axial velocity fields at  $t_1 = 16$  and  $t_2 = 32$  with  $a = 0$ ,  $q = 0.8$ ,  $Re = 667$ . The amplitude (left) is represented on a semi-log plot and the phase (right) on a linear plot at three values of the axial wavenumber  $k$  indicated by the symbols  $\circ$  on figure 5(a): (a)  $k = k_{-4}^{\max} = 2.15$ , (b)  $k = 1.15$  and (c) near neutral  $k = 0.75$ .

the associated phase function measured at the radial source location  $r_0$ . It is now possible to retrieve from (4.13)–(4.14) all the characteristics  $k_m(v_g)$ ,  $\omega_m(v_g)$  and  $\sigma_m(v_g)$  along  $x/t = v_g$ , as defined in (4.11)–(4.12).

The temporal growth rate  $\sigma_m(v_g)$  is given by

$$\sigma_m(v_g) \sim \frac{d}{dt} \ln A_m(v_g t, t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

As demonstrated in the Appendix, the imaginary part  $k_{m,i}$  of the wavenumber 'observed' along  $x/t = v_g$  is simply given by

$$-k_{m,i}(v_g) = \frac{d\sigma_m}{dv_g}(v_g), \quad (4.16)$$

where it is implied that  $v_g$  is real. Knowing  $\sigma_m(v_g)$  and  $k_{m,i}(v_g)$ , the corresponding imaginary part  $\omega_{m,i}$  of the frequency is calculated from (4.12) according to the formula

$$\omega_{m,i}(v_g) = \sigma_m(v_g) + k_{m,i}(v_g)v_g. \quad (4.17)$$

By definition, the real parts of  $k_m(v_g)$  and  $\omega_m(v_g)$  are related to the phase function  $\Phi_m(x, t)$  defined in (4.14) via the expressions

$$k_{m,r}(v_g) \sim \frac{\partial}{\partial x} \Phi_m(x = v_g t, t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.18)$$

and

$$\omega_{m,r}(v_g) \sim -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_m(x = v_g t, t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.19)$$

Thus the quantities  $\sigma_m$ ,  $-k_{m,i}$ ,  $\omega_{m,i}$ ,  $k_{m,r}$  and  $\omega_{m,r}$  may all be determined as a function of  $v_g$  by making use of expressions (4.15)–(4.19).

In the numerical evaluation of these functions, the logarithmic derivative appearing in (4.15) is taken to be

$$\sigma_m(v_g) \approx \frac{\ln[A_m(v_g t_2, t_2)/A_m(v_g t_1, t_1)]}{t_2 - t_1}, \quad (4.20)$$

with  $t_1 = 16$  and  $t_2 = 32$ . The function  $\sigma_m(v_g)$  is thereby evaluated in the range  $-0.625 \leq v_g \leq 2.972$  in successive steps of size  $\delta v_g = \delta x/t_2 \approx 4.7 \times 10^{-3}$ . Equation (4.16) is discretized into

$$-k_{m,i}(v_g) \approx \frac{\sigma_m(v_g + \delta v_g) - \sigma_m(v_g)}{\delta v_g}, \quad (4.21)$$

with the same step size  $\delta v_g$ . Finally, (4.18) and (4.19) are discretized into

$$k_{m,r}(v_g) \approx \frac{\Phi_m(v_g t_2 + \delta x, t_2) - \Phi_m(v_g t_2, t_2)}{\delta x}, \quad (4.22)$$

$$\omega_{m,r}(v_g) \approx -\frac{\Phi_m(v_g t_2, t_3) - \Phi_m(v_g t_2, t_2)}{t_3 - t_2}, \quad (4.23)$$

where  $t_3 = 32.5$ . Note that, in the same spirit as in §4.1, the growth rate  $\sigma_m(v_g)$  is estimated over the large time increment  $t_2 - t_1$  (equation (4.20)). By contrast,  $\omega_{m,r}(v_g)$  is evaluated over the small time increment  $t_3 - t_2$  (equation (4.23)) in order to account for possible phase discontinuities.

The above methodology leads to a complete determination of the wavepacket characteristics along each spatio-temporal ray  $x/t = v_g$ . A typical amplitude distribution of the various helical modes  $A_m(x, t)$  is illustrated on figure 7(a) for the Batchelor vortex without external flow. The associated growth rates  $\sigma_m(v_g)$  are displayed on figure 7(b), as a function of group velocity  $x/t = v_g$ .

The impulse response is seen to be composed of individual wavepackets pertaining to different azimuthal modes  $m$ . The curves  $\sigma_m(v_g)$  contain all the essential information necessary to characterize the spatio-temporal behaviour of each azimuthal mode. As sketched on figure 8, the streamwise extent of each wavepacket is delineated by rays

## Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex

243

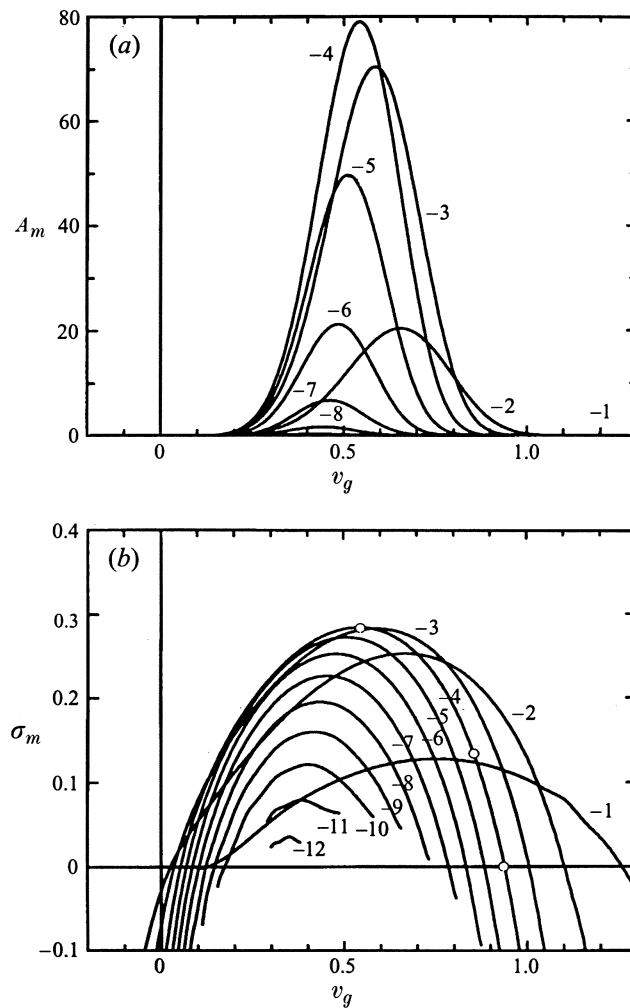


FIGURE 7. (a) Amplitude distribution  $A_m(x, t)$  of dominant azimuthal modes  $-8 \leq m \leq -1$  at  $t = 32$  for  $a = 0$ ,  $q = 0.8$  and  $Re = 667$ . Linear scale. (b) Corresponding growth rate  $\sigma_m(v_g)$  'observed' along each spatio-temporal ray  $x/t = v_g$  for  $-12 \leq m \leq -1$ .

$v_{g,m}^+$  and  $v_{g,m}^-$  such that  $\sigma_m(v_g) = 0$  and along which a neutral wave is observed. To each helical mode  $m$ , one may associate an absolute growth rate  $\omega_{0,m,i}$  observed in the laboratory frame, i.e. along the ray  $x/t = v_g = 0$ . The quantity  $\omega_{0,m,i}$  therefore coincides with  $\sigma_m(0)$ , as illustrated on figure 8.

Let  $v_{g,m}^{\max} \equiv \partial\omega_{m,i}/\partial k(k_m^{\max})$  denote the spatio-temporal ray along which one observes the most amplified wavenumber  $k_m^{\max}$  over all real axial wavenumbers, such that  $\partial\omega_{m,i}/\partial k(k_m^{\max}) = 0$ . Since  $k_{m,i}^{\max} = 0$ , (4.12) reduces to  $\sigma_m = \omega_{m,i}^{\max}$  and (4.16) yields  $d\sigma_m/dv_g(v_{g,m}^{\max}) = 0$ . It can therefore be concluded that  $\omega_{m,i}^{\max}$  is also the maximum growth rate over all ray directions  $x/t = v_g$ , as sketched on figure 8. The associated group velocity  $v_{g,m}^{\max}$  is therefore a measure of the velocity of the wavepacket of azimuthal mode  $m$ .

It is straightforward to extend these definitions to the full impulse response: its streamwise extent is delineated by the fastest leading edge  $v_g^+$  and the slowest trailing edge  $v_g^-$ , which may pertain to distinct helical modes  $m$ . Its overall absolute growth

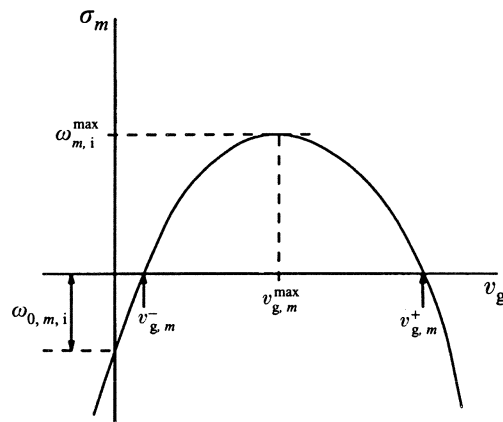


FIGURE 8. Characteristic quantities pertaining to the growth rate curve  $\sigma_m(v_g)$  for the wavepacket of azimuthal wavenumber  $m$ . The curve displays a maximum at the ray velocity  $v_{g,m}^{\max}$  whence  $\sigma_m(v_{g,m}^{\max}) = \omega_{m,i}^{\max}$ . Leading- and trailing-edge  $v_{g,m}^{\pm}$  velocities correspond to  $\sigma_m(v_g) = 0$ . The absolute growth rate  $\omega_{0,m,i}$  coincides with  $\sigma_m(0)$ .

rate  $\omega_{0,i}$  is the maximum absolute growth rate over all  $m$ . If it is positive (negative), the flow is absolutely (convectively) unstable.

For the parameter setting  $a = 0$ ,  $q = 0.8$  and  $Re = 667$ , the leading and trailing edges of the full wavepacket are associated with azimuthal modes  $m = -1$  and  $m = -2$  respectively (figure 7*b*) and they propagate with velocities  $v_g^+$  and  $v_g^-$  that are both positive. As a result, the overall absolute growth rate  $\omega_{0,i}$  is negative and the flow is convectively unstable.

In table 1, the maximum growth rate  $\omega_{m,i}^{\max}$  over all ray directions  $v_g$  obtained from the above wavepacket asymptotics (WA) is compared with its viscous temporal (VT) counterpart over all real wavenumbers  $k$ , as calculated in §4.1: these theoretically identical quantities as well as the associated wavenumbers  $k_m^{\max}$  are seen to coincide within 10% accuracy.

The above wavepacket decomposition has been applied to the DNS-generated impulse response of the Batchelor vortex without external flow at  $a = 0$ ,  $Re = 667$  and  $q = 0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5$ . For all swirl values, the leading- and trailing-edge velocities  $v_g^+$  and  $v_g^-$  are found to be both positive as in figure 7*(b)*. One may therefore conclude that the zero-external-flow Batchelor vortex is at most convectively unstable for  $Re = 667$ .

Although the curves  $\sigma_m(v_g)$  are sufficient to determine the absolute/convective nature of the instability, a complete specification of the wavepacket asymptotic behaviour requires the calculation of the complex frequency  $\omega_m(v_g)$  and wavenumber  $k_m(v_g)$  as given in (4.16)–(4.19). Corresponding results are displayed on figure 9 for the same parameter values as in figure 7. Smooth variations of  $k_m$  and  $\omega_m$  are obtained at all but the lowest azimuthal wavenumbers. Spurious oscillations are observed at  $m = -12$  and  $m = -11$ : the energy levels are then so small that there is contamination by the more energetic azimuthal modes. Note also the presence of a bump near  $v_g = 1.1$  in the curves relative to  $m = -1$ . This feature is possibly due to a shift in the most amplified mode at  $m = -1$ , as  $v_g$  is increased.

In the same spirit as in §4.1, it may be checked that for the selected times  $t_1 = 16$  and  $t_2 = 32$ , radial distributions are shape-invariant along each spatio-temporal ray  $x/t = v_g$ . Sample validation results are displayed on figure 10 for three particular



## Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex

245

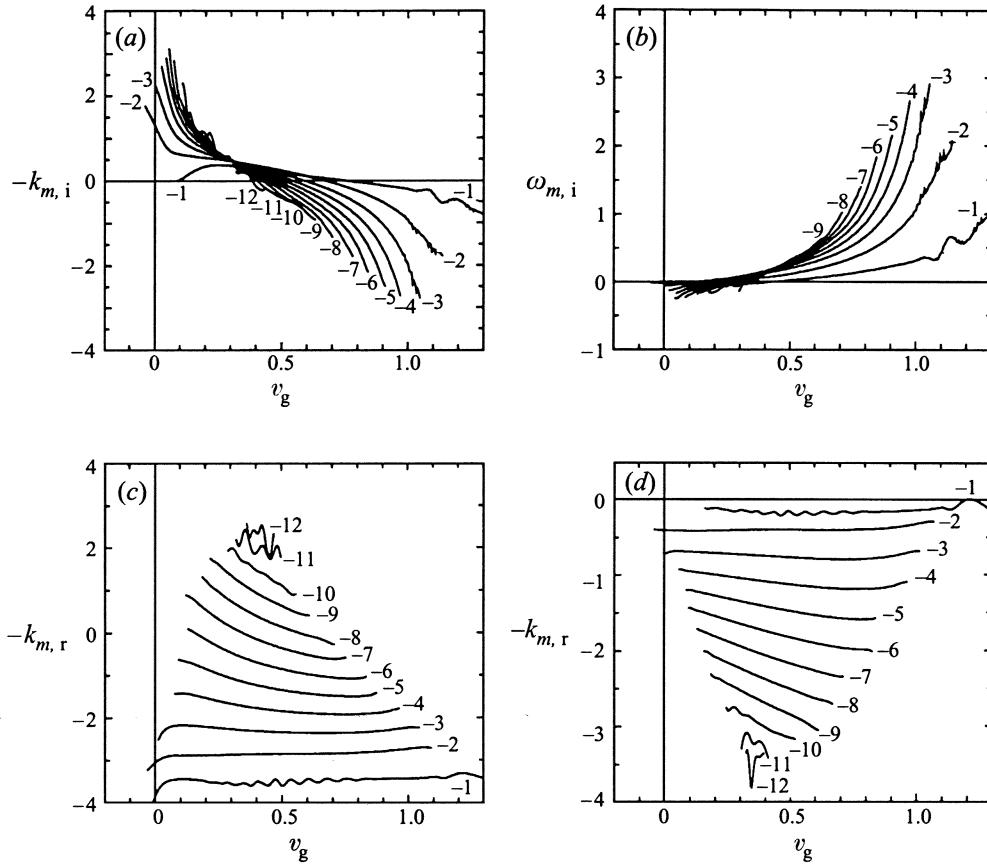


FIGURE 9. Distribution of (a)  $-k_{m,i}(v_g)$ , (b)  $\omega_{m,i}(v_g)$ , (c)  $k_{m,r}(v_g)$  and (d)  $\omega_{m,r}(v_g)$  relative to azimuthal modes  $-12 \leq m \leq -1$  at  $t = 32$  for  $a = 0$ ,  $q = 0.8$  and  $Re = 667$ .

group velocities indicated by open circles on figure 7(b): retrieved axial eigenfunctions are seen to preserve their shape between  $t_1$  and  $t_2$  so that transients have died out and asymptotic formula (4.11) indeed applies.

### 5. Convective/absolute properties of the Batchelor vortex with external flow

An essential feature of the present approach lies in its ability to deduce the absolute/convective nature of the instability for arbitrary values of the external flow parameter  $a$  solely from the results for zero external flow ( $a = 0$ ). We exploit the fact that, at a given value of  $q$ , the impulse response for  $a \neq 0$  may be obtained by applying a trivial Galilean transformation of velocity  $a$  to its zero-external-flow counterpart.

More specifically the Green function  $u(x, r, \theta, t; a)$  for finite external flow  $a$  is related to the Green function  $u(x, r, \theta, t; 0)$  for zero external flow via the change of variable

$$u(x, r, \theta, t; a) = u(x - at, r, \theta, t; 0). \quad (5.1)$$

Note that (5.1) remains applicable for obtaining the response to any initial distribution of perturbations. Equivalently, in terms of the group velocity  $x/t = v_g$ ,

$$u(v_g, r, \theta, t; a) = u(v_g - a, r, \theta, t; 0). \quad (5.2)$$

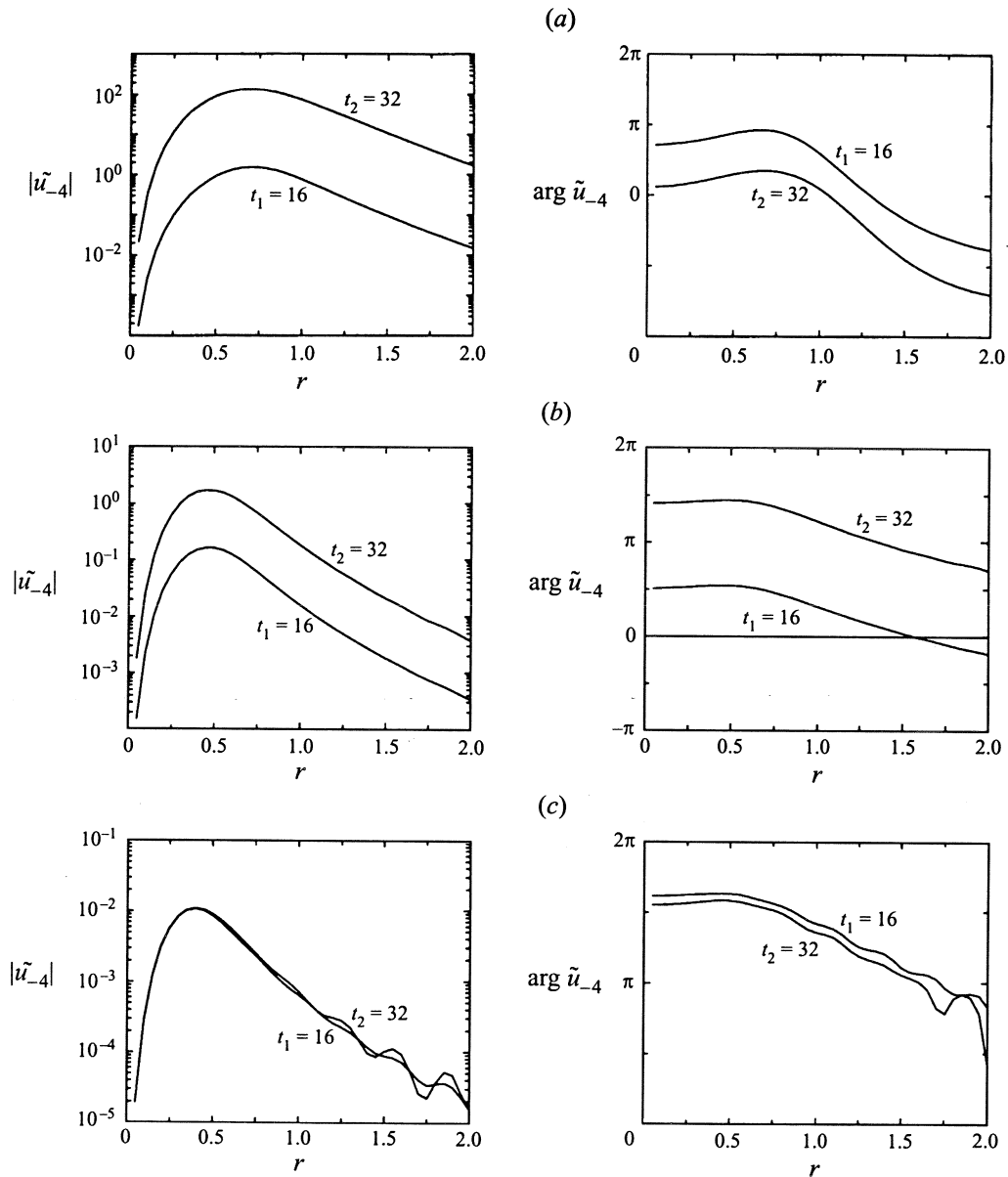


FIGURE 10. Radial distribution of spatio-temporal eigenfunction  $\tilde{u}_m(r, k, t)$  for azimuthal mode  $m = -4$  retrieved by DNS from the perturbation axial velocity fields at  $t_1 = 16$  and  $t_2 = 32$  with  $a = 0$ ,  $q = 0.8$ ,  $Re = 667$ . The amplitude (left) is represented on a semi-log plot and the phase (right) on a linear plot at three values of the group velocity  $v_g$  indicated by the symbols  $\circ$  on figure 7(b): (a)  $v_g = v_{g,-4}^{\max} = 0.55$ , (b)  $v_g = 0.84$  and (c) at the leading-edge  $v_g = v_{g,-4}^+ = 0.94$ .

In the context of expression (4.11), (5.2) implies that the complex wavenumber  $k_m$  and frequency  $\omega_m$  for finite external flow can be deduced from their zero-external-flow analogues through the Doppler shift transformation

$$k_m(v_g; a) = k_m(v_g - a; 0), \quad (5.3)$$

$$\omega_m(v_g; a) = a k_m(v_g - a; 0) + \omega_m(v_g - a; 0). \quad (5.4)$$

## Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex

247

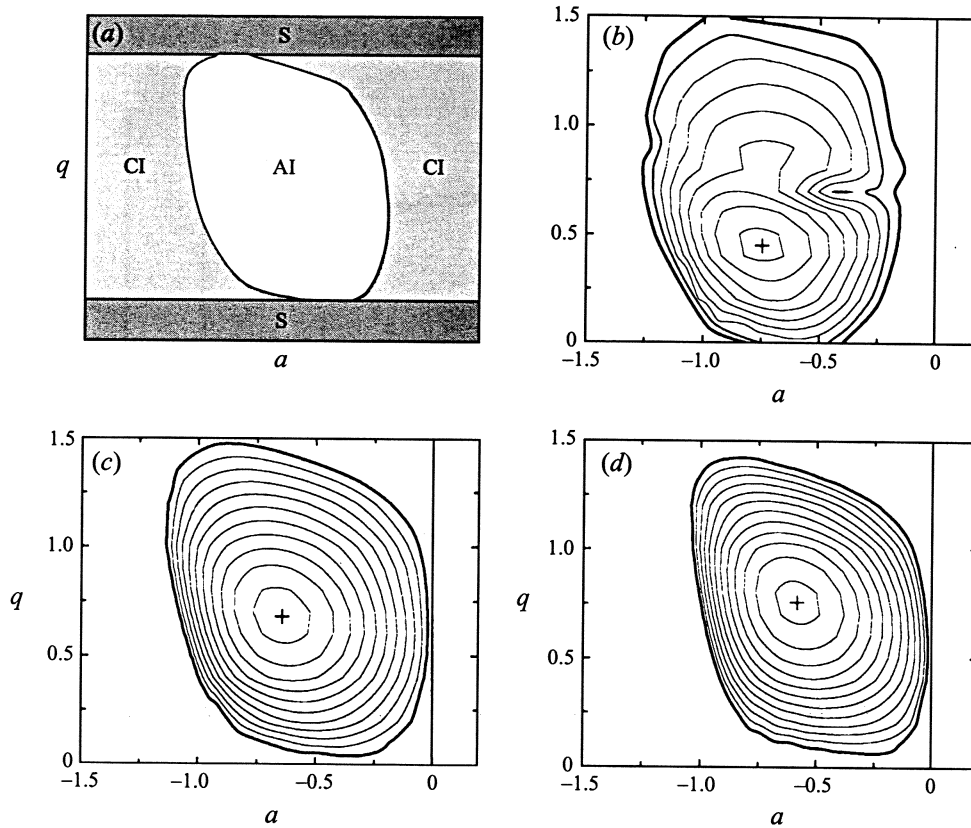


FIGURE 11. (a) Typical instability properties of each azimuthal mode: the absolute instability region (AI) is nested within the convectively unstable zone (CI); outside a horizontal band of finite height in  $q$  the azimuthal mode remains stable (S). (b–d) Isocontours of absolute growth rate  $\omega_{0,m,i}$  in parameter plane  $(a, q)$  for azimuthal modes (b)  $m = -1$ , (c)  $m = -2$  and (d)  $m = -3$ . The bold curve corresponds to  $\omega_{0,m,i} = 0$ . Isocontours of  $\omega_{0,m,i}$  in step increases of 0.025, for positive values only, have been reported in order to delineate clearly the absolute instability region.

As a result, the growth rate  $\sigma_m(v_g; a) = \omega_{m,i}(v_g; a) - k_{m,i}(v_g; a)v_g$  observed along the spatio-temporal ray  $x/t = v_g$  is transformed according to the rule

$$\sigma_m(v_g; a) = \sigma_m(v_g - a; 0). \quad (5.5)$$

The observed growth rate curves of figure 7(b) therefore experience a simple translation of amount  $a$  along the  $v_g$ -axis. The same reasoning may be invoked to obtain finite-external-flow results for all swirl parameter values  $q$  of interest. Thus, for each parameter setting  $(a, q)$ , the diagnostic quantities introduced in §4.2 and sketched in figure 8 may be calculated. In particular the absolute growth rate  $\omega_{0,m,i}$  satisfies  $\omega_{0,m,i} \equiv \sigma_m(0; a) = \sigma_m(-a; 0)$  and it may directly be read off figure 7(b) by setting  $v_g = -a$ . Remaining quantities such as  $k_{0,m,r}$  and  $\omega_{0,m,r}$  may similarly be calculated by applying (5.3) and (5.4).

Resulting isolines of absolute growth rate  $\omega_{0,m,i}$  in the  $(a, q)$ -plane are displayed on figure 11 for azimuthal wavenumbers  $m = -1, -2$  and  $-3$ . As sketched in figure 11(a), the particular contour  $\omega_{0,m,i} = 0$  typically delineates an oval domain within which  $\omega_{0,m,i} > 0$  and mode  $m$  therefore exhibits absolute instability (AI). Outside this region, mode  $m$  is either convectively unstable (CI) or stable (S). The neutral curves

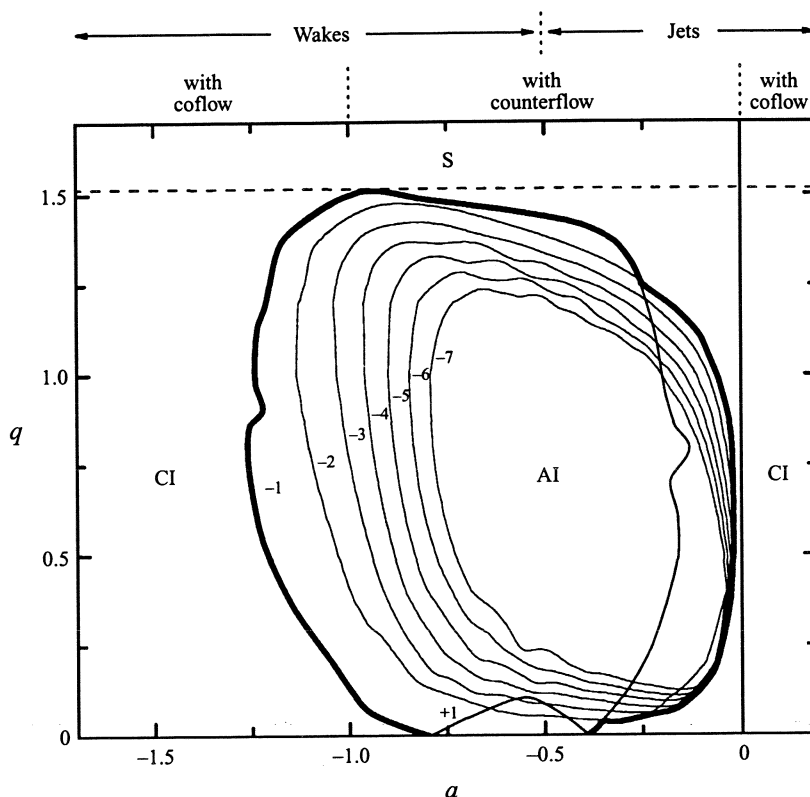


FIGURE 12. Regions of stability (S), convective instability (CI) and absolute instability (AI) in the  $(a, q)$  parameter plane for the Batchelor vortex at  $Re = 667$ . Thin lines indicate AI/CI transition curves for each azimuthal mode  $m = +1$  and  $m = -1, \dots, -7$ . Bold line denotes outermost boundary of AI region.

separating the CI, AI regions from the S region do not depend on the magnitude of the external flow parameter  $a$  and are therefore straight horizontal lines  $q = \text{const}$ . Typically each mode  $m$  becomes unstable in a horizontal band at intermediate values of the swirl parameter  $q$ . Note that  $m = \pm 1$  are the only unstable modes at  $q = 0$ . All other modes are stable at sufficiently low  $q$ . For large swirl values, all modes are ultimately stabilized. These results are entirely consistent with the temporal instability analyses of Lessen *et al.* (1974) and Mayer & Powell (1992) summarized in §1.

The AI region typically lies in the left half-plane  $a < 0$  which implies that negative external flow is a prerequisite for absolute instability. More specifically, for each swirl level  $q$  within the unstable horizontal band, there exists a range of negative external flow values giving rise to AI. As  $q$  is increased from the lower neutral value (from zero in the case  $m = -1$ ), the extent of the AI range gradually widens towards both the zero-external-flow axis and the large negative-external-flow values. The reverse trend is observed as the swirl  $q$  approaches the upper neutral curve. Furthermore the absolute growth rate  $\omega_{0,m,i}$  reaches a well defined maximum within the AI zone at a particular value of  $a$  and  $q$ .

In order to determine the overall instability properties, the various absolute/convective transition curves  $\omega_{0,m,i} = 0$  are overlaid on figure 12 for  $m = +1$  and  $m = -1, \dots, -7$ . The global AI/CI transition boundary is given by the outermost envelope

## Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex

249

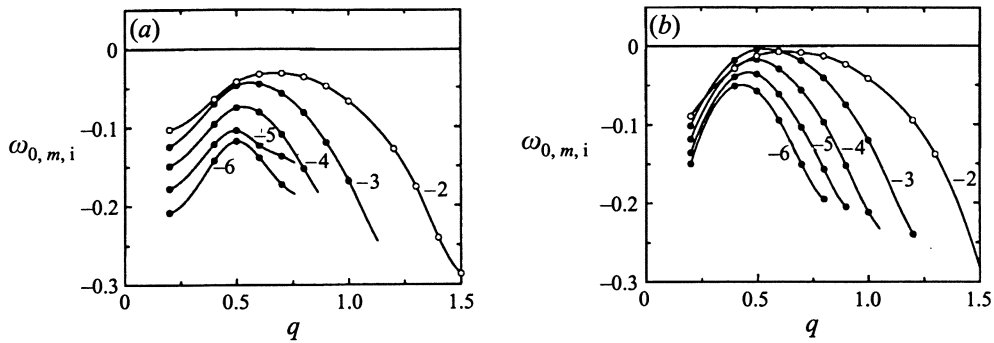


FIGURE 13. Absolute growth rate  $\omega_{0,m,i}$  as a function of  $q$ : (a) without external flow ( $a = 0$ ), and (b) at the minimum counterflow value giving rise to CI/AI transition  $a = -0.014$ .

of the individual transition curves pertaining to different values of  $m$ . If higher-order azimuthal modes  $m \leq -8$  are taken into consideration, corresponding transitional curves  $\omega_{0,m,i} = 0$  become nested one inside the other so that the outer CI/AI boundary remains unaffected.

In the no-swirl case ( $q = 0$ ), absolute instability is triggered by the  $m = \pm 1$  modes and it prevails in the range  $-0.80 < a < -0.39$ , i.e. for wake/jet configurations with sufficiently large counterflow (figure 1b). As  $q$  increases, the AI range widens towards  $a = 0$  (zero-counterflow jet) and  $a = -1$  (zero-counterflow wake).

On the wake side ( $a < -0.5$ ), the transitional mode leading to AI remains  $m = -1$  at all swirl values. It is essential to note that for swirl values as low as 0.13, wakes may undergo a transition to AI for  $a < -1$ , i.e. without requiring any external counterflow.

On the jet side ( $a > -0.5$ ), the transitional mode first leading to AI as  $q$  increases varies in discrete steps from  $m = -1$  to  $m = -2, -3, -4, -5, -4, -3, -2, -1$ . Crossover points from one azimuthal mode to another can only be very coarsely determined on account of the finite 0.1 step size in  $q$ . Furthermore, absolute instability may be triggered for a counterflow as small as  $a = -0.015 \pm 0.001$  provided that swirl is of order  $q = 0.55 \pm 0.05$ . The transitional AI/CI curve runs almost parallel to the  $q$ -axis and only a slight amount of counterflow is therefore necessary to provoke AI onset over an extended range  $0.2 < q < 1$ . Moreover, when  $0.2 < q < 0.5$ , AI/CI transition curves pertaining to  $m = -2, -3, \dots$  remain extremely close to each other. This is further confirmed by the absolute growth rate curves prevailing in the zero-external-flow jet ( $a = 0$ ) and the AI/CI transitional jet ( $a = -0.014$ ) as shown in figure 13. For such small external flows, the value of swirl that is optimum to promote AI is seen to lie in the range  $0.5 < q < 0.7$ . It should be noticed that this range of values of  $q$  does not include the most unstable swirl  $q \approx 0.87$  discussed in the introduction.

The same representation may be used for the real parts of the absolute wavenumber  $k_{0,m,r}$  and absolute frequency  $\omega_{0,m,r}$  resulting from the application of (5.3) and (5.4) at  $v_g = 0$ . Typical results are displayed on figure 14 for azimuthal modes  $m = -1, -2, -3$ . These results may be compared with those obtained in the context of non-rotating axisymmetric bluff body wakes by Monkewitz (1988a) for the family of parallel axial velocity profiles

$$U(r; A, N) = 1 - A + \frac{2A}{1 + (e^{r^2 \ln 2} - 1)^N}. \quad (5.6)$$

In the above equation,  $A$  denotes the velocity ratio  $A = (U_c - U_\infty)/(U_c + U_\infty)$

250

I. Delbende, J.-M. Chomaz and P. Huerre

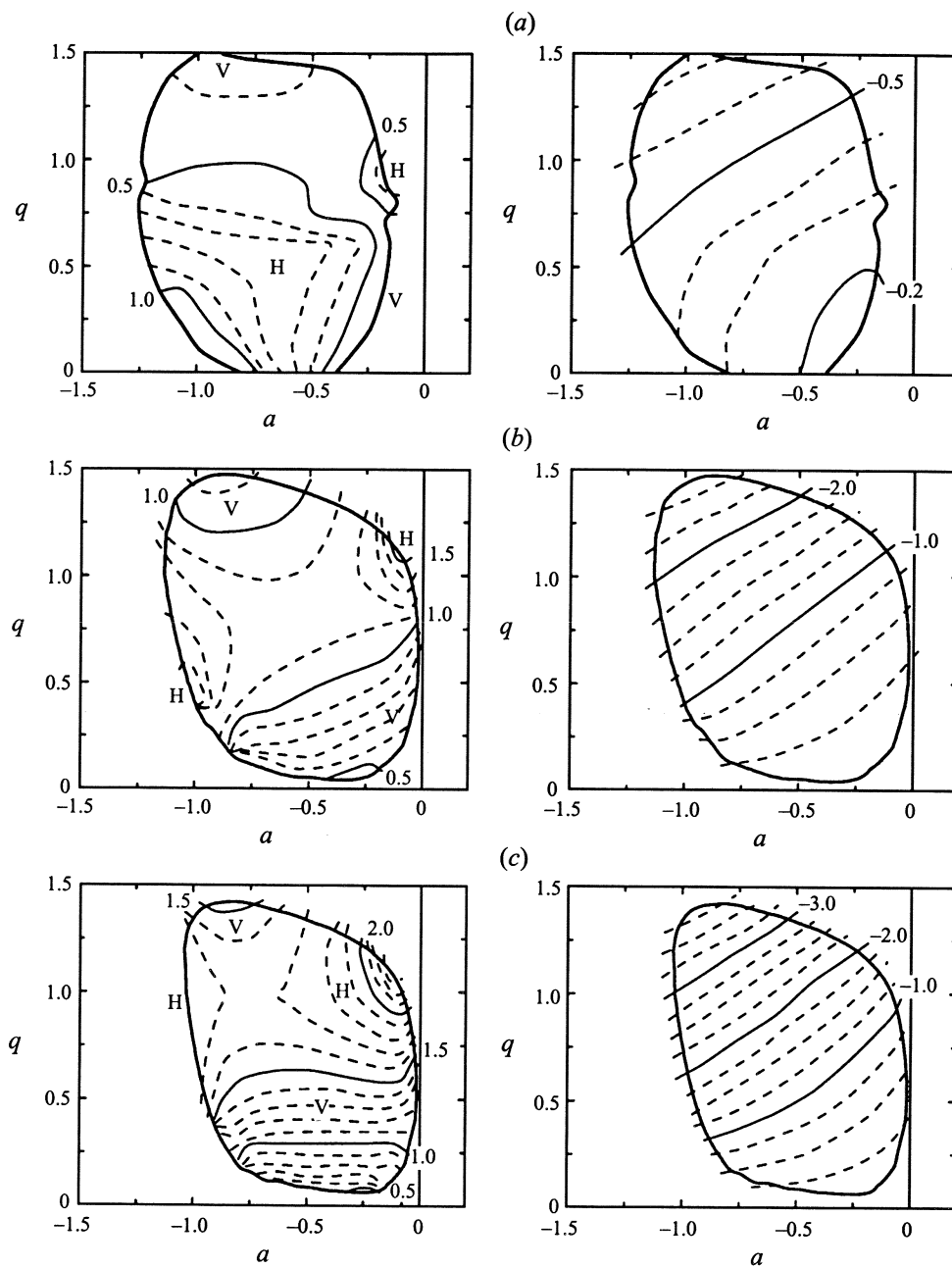


FIGURE 14. Isocontours of real absolute wavenumber  $k_{0,m,r}$  (left) and real absolute frequency  $\omega_{0,m,r}$  (right) in the  $(a, q)$  parameter plane for azimuthal modes (a)  $m = -1$ , (b)  $m = -2$  and (c)  $m = -3$ . The bold curve corresponds to  $\omega_{0,m,i} = 0$ . Isoline values are indicated on each contour plot. H and V denote 'hills' and 'valleys' of saddle points of surface  $k_{0,m,r}$ .

*Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex*

251

and  $N$  a shape parameter. In the particular case  $N = 1$ , one recovers our zero-swirl basic velocity field provided that  $a = (1 - A)/2A$  and  $q = 0$ . The complex absolute wavenumbers and frequencies  $k_{0,\pm 1}^{(M)}$  and  $\omega_{0,\pm 1}^{(M)}$  calculated by Monkewitz (1988a) for  $m = \pm 1$  at  $Re = \infty$  translate into the present  $k_{0,\pm 1}$  and  $\omega_{0,\pm 1}$  via the scaling relations  $k_{0,\pm 1} = k_{0,\pm 1}^{(M)}/(\ln 2)^{1/2}$  and  $\omega_{0,\pm 1} = \omega_{0,\pm 1}^{(M)}/(4A^2 \ln 2)^{1/2}$ . At  $A = -1$ , i.e.  $a = -1$ , Monkewitz found  $k_{0,\pm 1}^{(M)} = 1.04 - 0.85i$  and  $\omega_{0,\pm 1}^{(M)} = 0.75 - 0.20i$ , i.e.  $k_{0,\pm 1} = 1.25 - 1.02i$  and  $\omega_{0,\pm 1} = -0.45 - 0.12i$ . Extrapolated values from the results displayed in figures 11(b) and 14(a) yield  $k_{0,\pm 1} = 1.20 - 0.73i$  and  $\omega_{0,\pm 1} = -0.39 - 0.06i$ : real parts are in good quantitative agreement whereas imaginary parts noticeably differ on account of their smaller absolute values. Similar trends prevail for corresponding results obtained at  $A = -1.1$ , i.e.  $a \approx -0.95$ .

## 6. Conclusions and discussion

A detailed analysis of the transition from convective to absolute instability has been presented for the Batchelor vortex as a function of external flow  $a$  and swirl  $q$  for a fixed Reynolds number  $Re = 667$ . The application of swirl has been found to widen considerably the range of external flow values giving rise to absolute instability. In wakes ( $a < -0.5$ ), the 'critical' helical mode for absolute instability onset is  $m = -1$  and no counterflow is necessary to trigger absolute instability over almost the entire range of unstable  $q$ . In jets ( $a > -0.5$ ), the 'critical' helical mode is found to be extremely sensitive to swirl. A slight counterflow  $a \approx -0.015$  equivalent to 1.5% of the centreline axial velocity remains necessary in order to trigger absolute instability. This value is to be compared with  $a = -0.39$  corresponding to 64% of the centreline axial velocity in the absence of swirl.

A new method has been presented in order to retrieve the main features of the dispersion relation from direct numerical simulations of the linear impulse response. This procedure leads to the determination of the dominant complex frequency and wavenumber observed along each spatio-temporal ray  $x/t = v_g$ . In particular, one may calculate the complex absolute frequency and wavenumber and thereby identify domains of absolute and convective instability.

The results of the present investigation have been compared with a direct application of the zero-group-velocity criterion to the inviscid dispersion relation  $D[k, \omega; a, q] = 0$  as performed in Olendraru *et al.* (1996). AI/CI transition curves obtained via each method are overlaid on figure 15. There is good overall qualitative and quantitative agreement over a wide domain in the  $(a, q)$ -plane but the direct numerical simulation procedure yields a slightly smaller region of AI. In particular, the analysis of the inviscid dispersion relation predicts the occurrence of AI/CI transition on the co-flowing jet side  $a > 0$ . By contrast, the fully viscous numerical study of the linear impulse response slightly pushes AI/CI transition into the counterflow side  $a < 0$ .

The merits and disadvantages of the present procedure are as follows. In a single run, the direct simulation of the impulse response provides a global picture of all dominant modes along all spatio-temporal rays  $x/t = v_g$ . However, its successful implementation requires large computational domains in order to avoid end effects, which makes it costly in computer time. In addition, this methodology is incapable of isolating less-unstable modes. For instance, we have not determined the role, if any, played by the purely viscous modes of Khorrami (1991) and Mayer & Powell (1992). It may very well be that their effect is masked by faster growing inviscid-like

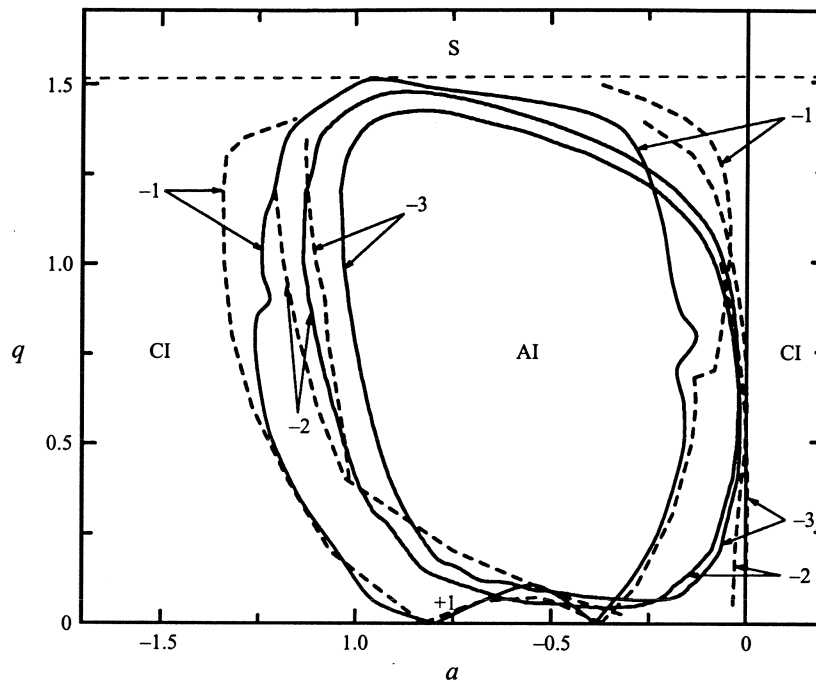


FIGURE 15. AI/CI transition curves in the  $(a, q)$  parameter plane for azimuthal modes  $m = \pm 1, -2, -3$ . Solid lines: present study at  $Re = 667$ . Dashed lines: results of Olendraru *et al.* (1996) obtained by application of the zero-group-velocity criterion to the inviscid dispersion relation of the Batchelor vortex.

modes. It is also important to emphasize that as a result of finite time integration, the method slightly underestimates the spatio-temporal growth rate and therefore the extent of the absolutely unstable region. Although high precision cannot be expected from the present method, the results provide excellent guess values, which considerably facilitates the hunt for pertinent saddle points as required in the Briggs–Bers criterion. More generally the procedure is most useful whenever the dispersion relation cannot be derived explicitly due to the complexity of the basic flow. For instance, it has successfully been applied by Brancher & Chomaz (1997) to the study of secondary instabilities in two-dimensional spatially periodic shear flows.

The presence of a sufficiently large region of absolute instability is known to encourage the onset of synchronized self-sustained oscillations commonly referred to as global modes (Chomaz, Huerre & Redekopp 1988). According to the present investigation, swirl is likely to increase drastically the extent of the absolutely unstable region and thereby the synchronization of spatially developing wakes and jets. For instance, helical vortex shedding behind non-rotating axisymmetric bluff bodies has been ascribed by Monkewitz (1988*a*) to the existence of an absolutely unstable ‘source’ region located in the near wake. Only the first helical mode  $m = \pm 1$  is then found to be absolutely unstable, in agreement with experimental observations. The results of the present investigation suggest that the application of swirl will rapidly single out  $m = -1$  as the dominant helical mode within such wake flows.

It is much more delicate to interpret the occurrence of breakdown in vortices with axial flow in the light of the present results. Experiments indicate that breakdown is either axisymmetric ( $m = 0$ ) or spiral ( $m = -1$ ), whereas in the jet range ( $a > -0.5$ )



our analysis shows higher-order helical modes ( $m = -2, -3, \dots$ ) to be favoured. However, the present results upstream and downstream of the stagnation point might very well prove to be pertinent in accounting for the unsteady behaviour of the observed breakdown states. Garg & Leibovich (1979) have emphasized that ‘vortex breakdown, of either the bubble or spiral form, act like solid objects in changing an upstream jet-like flow into a wake-like flow’. The observed dominant oscillations of the wake then correspond to the counter-rotating spiral mode  $m = -1$ , in agreement with the AI/CI analysis for wakes ( $a < -0.5$ ).

In order to reach a more definite conclusion, one would have to carry out a detailed investigation of the AI/CI nature of measured velocity profiles at each downstream station, as in the wake studies of Monkewitz (1988*a,b*).

The authors acknowledge financial support by the Direction des Recherches, Études et Techniques (DRET) of the French Ministry of Defence under Grant No 92-098, as well as the computational facilities of the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS/CNRS). The authors would like to thank P. Brancher, T. Loiseleux, C. Olendraru and L. Tuckerman for an efficient and stimulating collaboration. Thanks are warmly extended to T. Lescuyer, J. Webert and all the pre-fa-mily for maintaining a friendly and congenial atmosphere.

#### Appendix. Proof of relation (4.16)

Differentiation of (4.12) with respect to  $v_g$  leads to

$$\frac{d\sigma_m}{dv_g} = \frac{d\omega_{m,i}}{dv_g} - \frac{dk_{m,i}}{dv_g} v_g - k_{m,i}. \quad (\text{A } 1)$$

The Cauchy–Riemann conditions imply that

$$v_g \equiv \frac{d\omega_m}{dk} = \frac{\partial\omega_{m,r}}{\partial k_{m,r}} + i \frac{\partial\omega_{m,i}}{\partial k_{m,r}} = \frac{\partial\omega_{m,i}}{\partial k_{m,i}} + i \frac{\partial\omega_{m,i}}{\partial k_{m,r}}. \quad (\text{A } 2)$$

Only real values of the group velocity  $v_g = d\omega_m/dk$  are of interest here, in which case (A 2) reduces to the identities

$$v_g = \frac{\partial\omega_{m,i}}{\partial k_{m,i}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial\omega_{m,i}}{\partial k_{m,r}} = 0. \quad (\text{A } 3)$$

Under this real group velocity condition, the chain rule and (A 3) imply that

$$\frac{d\omega_{m,i}}{dv_g} = \frac{\partial\omega_{m,i}}{\partial k_{m,i}} \frac{dk_{m,i}}{dv_g} = v_g \frac{dk_{m,i}}{dv_g}, \quad (\text{A } 4)$$

and (A 1) effectively reduces to relation (4.16).

#### REFERENCES

- BALSA, T. F. 1989 Three-dimensional wave packets and instability waves in free shear layers and their receptivity. *J. Fluid Mech.* **201**, 77–97.
- BATCHELOR, G. K. 1964 Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.* **20**, 645–658.
- BENJAMIN, T. B. 1962 Theory of the vortex breakdown phenomenon. *J. Fluid Mech.* **14**, 529–551.
- BERS, A. 1983 Space-time evolution of plasma instabilities – absolute and convective. In *Handbook of Plasma Physics* (ed. M. N. Rosenbluth & R. Z. Sagdeev), vol. 1, pp. 451–517. North-Holland.
- BRANCHER, P. 1996 Étude numérique des instabilités secondaires de jets. PhD thesis, École Polytechnique, France.

254

I. Delbende, J.-M. Chomaz and P. Huerre

- BRANCHER, P. & CHOMAZ, J.-M. 1997 Absolute and convective secondary instabilities in spatially periodic shear flows. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 658–661.
- BRANCHER, P., CHOMAZ, J.-M. & HUERRE, P. 1994 Direct numerical simulations of round jets: vortex induction and side jets. *Phys. Fluids* **6**, 1768–1774.
- CHOMAZ, J.-M., HUERRE, P. & REDEKOPP, L. G. 1988 Bifurcations to local and global modes in spatially developing flows. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 25–29.
- DELERY, J. M. 1990 Aspects of vortex breakdown. *Prog. Aerospace Sci.* **30**, 1–59.
- ESCUDIER, M. P. 1988 Vortex breakdown: observations and explanations. *Prog. Aerospace Sci.* **25**, 189–229.
- ESCUDIER, M. P., BORNSTEIN, J. & MAXWORTHY, T. 1982 The dynamics of confined vortices. *Proc. R. Soc. Lond. A* **382**, 335–360.
- GARG, A. K. 1977 Oscillatory behavior in vortex breakdown flows: an experimental study using a laser anemometer. MS thesis, Cornell University.
- GARG, A. K. & LEIBOVICH, S. 1979 Spectral characteristics of vortex breakdown flowfields. *Phys. Fluids* **22**, 2053–2064.
- GASTER, M. 1975 A theoretical model of a wave packet in the boundary layer on a flat plate. *Proc. R. Soc. Lond. A* **347**, 271–289.
- GASTER, M. & GRANT, I. 1975 An experimental investigation of the formation and development of a wave packet in a laminar boundary layer. *Proc. R. Soc. Lond. A* **347**, 253–269.
- HOWARD, L. N. & GUPTA, A. S. 1962 On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows. *J. Fluid Mech.* **14**, 463–476.
- HUERRE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473–537.
- KHORRAMI, M. R. 1991 On the viscous modes of instability of a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.* **255**, 197–212.
- LEIBOVICH, S. 1978 The structure of vortex breakdown. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **10**, 221–246.
- LEIBOVICH, S. 1984 Vortex stability and breakdown: survey and extension. *AIAA J.* **22**, 1192–1206.
- LEIBOVICH, S. & STEWARTSON, K. 1983 A sufficient condition for the instability of columnar vortices. *J. Fluid Mech.* **126**, 335–356.
- LESSEN, M. & PAILLET, F. 1974 The stability of a trailing line vortex. Part 2. Viscous theory. *J. Fluid Mech.* **65**, 769–779.
- LESSEN, M., SINGH, P. J. & PAILLET, F. 1974 The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory. *J. Fluid Mech.* **63**, 753–763.
- MAYER, E. W. & POWELL, K. G. 1992 Viscous and inviscid instabilities of a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.* **245**, 91–114.
- MONKEWITZ, P. A. 1988a A note on vortex shedding from axisymmetric bluff bodies. *J. Fluid Mech.* **192**, 561–575.
- MONKEWITZ, P. A. 1988b The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wakes at low Reynolds numbers. *Phys. Fluids* **31**, 999–1006.
- OLENDRARU, C., SELIER, A., ROSSI, M. & HUERRE, P. 1996 Absolute/convective instability of the Batchelor vortex. *C. R. Acad. Sci. Paris* **323** (IIb), 153–159.
- PARK, D. S. 1990 The primary and secondary instabilities of Görtler flow. PhD Thesis, University of Southern California.
- STUART, J. T. 1987 A critical review of vortex-breakdown theory. *Vortex Control and Breakdown Behaviour, Second Intl Colloq. on Vortical Flows, Baden, Switzerland*, 6–7 April 1987.
- TSAI, C.-Y. & WIDNALL, S. E. 1980 Examination of a group-velocity criterion for breakdown of vortex flow in a divergent duct. *Phys. Fluids* **23**, 864–870.
- VINCENT, A. & MENEGUZZI, M. 1991 The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.* **225**, 1–20.

## Références bibliographiques du chapitre

- [1] BATCHELOR, G. K. 1964 Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.* **20**, 645–658.
- [2] BENJAMIN, T. B. 1962 Theory of the vortex breakdown phenomenon. *J. Fluid Mech.* **14**, 529–551.
- [3] BILLANT, P., CHOMAZ, J.-M. & HUERRE, P. 1998 Experimental study of vortex breakdown in swirling jets. *J. Fluid Mech.* In press.
- [4] BILLANT, P., CHOMAZ, J.-M., DELBENDE, I., GARCIA, T., HUERRE, P., LOISELEUX, T., POULIQUEN, O., WILLAIME, H., & WU, M.-M. ont participé tout au long des 1990's à l'élaboration de l'expérience de jet tournant et à sa réalisation.
- [5] BRÜCKER, CH. 1993 Study of vortex breakdown by particle tracking velocimetry (PTV). Part 2: spiral-type vortex breakdown. *Exp. Fluids* **13**, 339–349.
- [6] DAUBE, O. & SØRENSEN, J. N. 1989 Simulation numérique de l'écoulement périodique axisymétrique dans une cavité cylindrique. *C. R. Acad. Sci. Paris* **308**, 463–468.
- [7] DELERY, J. M. 1994 Aspects of vortex breakdown. *Prog. Aerospace Sci.* **30**, 1–59.
- [8] ESCUDIER, M. P. 1980 Observations of confined vortices. *Proc. International Symposium on Flow Visualization*, Sept. 9–12, Bochum, Germany, 539–543.
- [9] ESCUDIER, M. P. 1984 Observations of the flow produced in a cylindrical container by a rotating endwall. *Exp. Fluids* **2**(4), 189–196.
- [10] ESCUDIER, M. P. 1988 Vortex breakdown: observations and explanations. *Prog. Aerospace Sci.* **25**, 189–229.
- [11] FALER, J. H. & LEIBOVICH, S. 1978 An experimental map of the internal structure of a vortex breakdown. *J. Fluid Mech.* **86**(2), 313–335.
- [12] GARG, A. K. & LEIBOVICH, S. 1979 Spectral characteristics of vortex breakdown flowfields. *Phys. Fluids* **22**, 2053–2064.
- [13] HARVEY, J. K. 1962 Some observations of the vortex breakdown phenomenon. *J. Fluid Mech.* **14**(4), 585–592.
- [14] KASARHEROU, J. 1993 Contribution à l'étude de l'éclatement tourbillonnaire dans une cuve cylindrique par méthode spectrale. Thèse de l'Université de Paris VI.
- [15] LAMBOURNE, N. C. & BRYER, D. W. 1961 The bursting of leading-edge vortices — some observations and discussion of the phenomenon. Aeronautical Research Council, Reports & Memoranda R. & M. No. 3282, 1–36.
- [16] LEIBOVICH, S. 1978 The structure of vortex breakdown. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **10**, 221–246.

- [17] LEIBOVICH, S. 1984 Vortex stability and breakdown: Survey and extension. *AIAA J.* **22**, 1192–1206.
- [18] LESSEN, M., SINGH, P. J. & PAILLET, F. 1974 The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory. *J. Fluid Mech.* **63**, 753–763.
- [19] LOPEZ, J. M. 1989 Axisymmetric vortex breakdown in an enclosed cylinder flow. *Lect. Notes Phys.* **323**, 385.
- [20] LOPEZ, J. M. 1990 Axisymmetric vortex breakdown. Part 1. Confined swirling flow. *J. Fluid Mech.* **221**, 533–552.
- [21] MARTIN, J. E. & MEIBURG, E. 1994 On the stability of the swirling jet shear layer. *Phys. Fluids* **6**(1), 424–426.
- [22] PAGAN, D. & BENAY, R. 1987 Vortex breakdown induced by an adverse pressure gradient: experimental and numerical approaches. *AIAA 5th Appl. Aero. Conf.*, 17–19 August 1987, Monterey. Rapp. T. P. **1987**(119).
- [23] PANDA, J. & MACLAUGHLIN, D. K. 1994 Experiments on the instabilities of a swirling jet. *Phys. Fluids* **6**(1), 263–276.
- [24] PECKHAM, D. H. & ATKINSON, S. A. 1957 Preliminary results of low speed wind tunnel tests on a gothic wing of aspect ratio 1.0. A.R.C. Technical report C.P. No. 508. TN No. Aero. 2504
- [25] SARPKAYA, T. 1971 On stationary and travelling vortex breakdown. *J. Fluid Mech.* **45**, 545–559.
- [26] SØRENSEN, J. N. & CHRISTENSEN, E. A. 1995 Direct numerical simulation of rotating fluid flow in a closed cylinder. *Phys. Fluids* **7**(4), 764–778.
- [27] SPALL, R. E. & GATSKI, T. B. 1991 A computational study of the topology of vortex breakdown. *Proc. R. Soc. London A* **435**, 321–337.
- [28] STUART, J. T. 1987 A critical review of vortex-breakdown theory. *Vortex Control and Breakdown Behaviour*, Second International Colloquium on Vortical Flows, Baden, Switzerland, April 6–7, 1987.
- [29] VOGEL, H. U. 1968 Experimentelle Ergebnisse über die laminare Strömung in einem zylindrischen Gehäuse mit darin rotierender Scheibe. Max-Planck-Inst. für Strömungsforschung. Bericht 6.

## *Chapitre 5*

# Réponse impulsionnelle non linéaire dans les sillages plans parallèles

Nonlinear convective/absolute instabilities  
in parallel two-dimensional wakes

Ivan DELBENDE and Jean-Marc CHOMAZ

To appear in *Physics of Fluids*, 10 (october 1998).



### Abstract

The linear versus nonlinear convective/absolute instability of a family of plane wake profiles at low Reynolds number is investigated by numerically comparing the linearized and the fully nonlinear impulse responses. Through an analysis of the linear flow response obtained by direct numerical simulation (DNS), the linear temporal and spatio-temporal instability properties are retrieved, in excellent agreement with the properties obtained by Monkewitz [24] from the study of the associated viscous dispersion relation. Nonlinear terms are then shown to limit the amplitude to a saturation level within the response wavepacket, while leaving the trailing and leading edges unaffected. For this family of open shear flows, the velocities of the fronts, formed between the trailing or leading edge and the central saturated region, are thus selected according to the linear Dee & Langer criterion [7], whereas the front solutions are fully nonlinear. This property may be of importance in justifying the use of *linear* instability properties to predict the onset and the frequency of the von Kármán vortex street, as determined by Hammond & Redekopp [12].

## 5.1 Introduction

Front propagation in spatially extended systems occurs whenever two states with different stability properties coexist in contiguous spatial domains. The associated pattern selection problem is then tantamount to the determination of the behavior of the front separating these two domains. Front selection has been recently investigated in Taylor–Couette [3] and Rayleigh–Bénard [11] systems with small throughflow from a weakly nonlinear point of view. The goal of the present study is to extend these investigations to highly unstable open shear flows where fully nonlinear effects are predominant, in order to discriminate between linear and purely nonlinear mechanisms for the spreading of the saturated state. The study is conducted in the context of plane parallel wake flows, where the determination of the front-selection mechanism is of great importance in predicting the critical threshold and the characteristics of the von Kármán vortex street.

Open shear flows such as heated or low-density jets [27, 17] and bluff-body wakes [22] are known to sustain self-excited oscillations in a certain range of parameters. This resonance phenomenon is now commonly described by resorting to the concepts of linear convective/absolute instabilities and global modes [16]. The most celebrated example of such a behavior is provided by vortex shedding past two-dimensional bluff bodies: the flow distortion induced by the presence of a cylinder in the flow gives rise to the so-called Bénard–Kármán vortex street as soon as the Reynolds number  $Re^{(D)}$  based on diameter and free-stream velocity exceeds the critical value  $Re_G^{(D)} \sim 47$ .

This spectacular phenomenon has been ascribed by Mathis, Provansal & Boyer [22] to a supercritical Hopf bifurcation towards a limit cycle. Since then, many attempts have been made to link this global description to the local instability properties at each streamwise location. Monkewitz [24] has determined the convective/absolute nature of the instability for a family of profiles with different shear layer thicknesses (see equation 5.2) pertinent to the description of bluff-body wakes. Through a careful fit of experimental data measured at the location of greatest reverse flow intensity, he was able to describe the qualitative changes which occur as the Reynolds number  $Re^{(D)}$  is increased from zero. As summarized on figure 5.1, a transition from local stability to convective instability first occurs at  $Re^{(D)} \sim 5$ , then from convective to

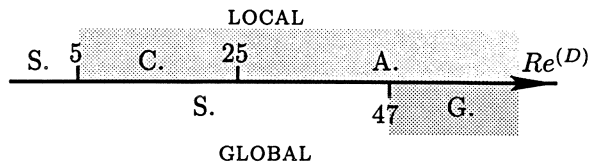


FIG. 5.1 – *Local vs global instability properties of the two-dimensional cylinder wake. S: stable, C: existence of a convective instability pocket, A: existence of an absolute instability pocket, G: globally unstable. Grey areas denote instability.*

absolute instability at  $Re^{(D)} \sim 25$ . However, the latter transition has no experimental trace as it is based on a fictitious parallel underlying basic flow [16]. The global bifurcation towards Kármán vortex shedding eventually takes place at  $Re^{(D)} \sim 47$ . This vision is corroborated by the numerical study of Hannemann & Örtel [14]. These authors simulated the basic wake flow and determined the local instability properties in order to discriminate between the shedding-frequency selection criteria proposed by several investigators [30, 19, 26]. It was found that a substantial region of the near wake is absolutely unstable at the onset of vortex shedding. The finding is qualitatively consistent with the model studies by Chomaz, Huerre & Redekopp [5], Le Dizès *et al.* [20] and Pier *et al.* [29]: absolute instability is a prerequisite for the occurrence of global oscillations, but it is not sufficient. This explains why the global instability threshold is usually located at higher control parameter values than the local instability threshold (figure 5.1).

Above the onset of vortex shedding, the growth of the global mode is well described by a Stuart–Landau model, as supported by the experiments of Provansal, Mathis & Boyer [22] and Schumm, Berger & Monkewitz [32]: the weakly nonlinear formalism appears to faithfully describe the wake dynamics even “unreasonably” [32] far above the global instability threshold for values of the bifurcation parameter  $(Re^{(D)} - Re_G^{(D)})/Re^{(D)}$  of order unity. More recently, Hammond & Redekopp [12] systematically investigated symmetric and asymmetric wakes past a blunt edged plate with or without blowing and suction. The properties of vortex shedding were predicted accurately via a numerical approach within the framework of the weakly non-parallel [25] approximation: the mean flow was obtained by direct numerical simulation and the local linear instability properties were determined at each downstream location  $X$ . The values of the linear growth rate and shedding frequency were determined by analytic continuation in the complex  $X$ -plane at the dominant saddle point of the complex absolute frequency  $\omega_0(X)$ .

That linear theory accounts so well for the wake dynamics is surprising for two main reasons. Firstly, the flow is strongly non-parallel and the commonly used WKBJ approximation may legitimately be questioned. Secondly, the flow near global instability onset is highly unstable in a substantial region of the wake as a result of the gap existing between local and global instability thresholds (figure 5.1): nonlinear effects are thus already strong when  $Re^{(D)}$  is close to  $Re_G^{(D)}$ , as illustrated on figure 5.2 in the context of the cylinder-wake experiment performed by Le Gal & Croquette [21]. In the subcritical régime, a small perturbation of the cylinder causes a wavepacket to grow, form a saturated vortex street which is ultimately advected downstream, as the system is below the global instability threshold. The passive tracer is strongly and rapidly displaced, indicating the presence of strongly nonlinear effects linked to the high local instability in the near-wake.

When strong nonlinearities intervene, linear convective/absolute instability concepts should



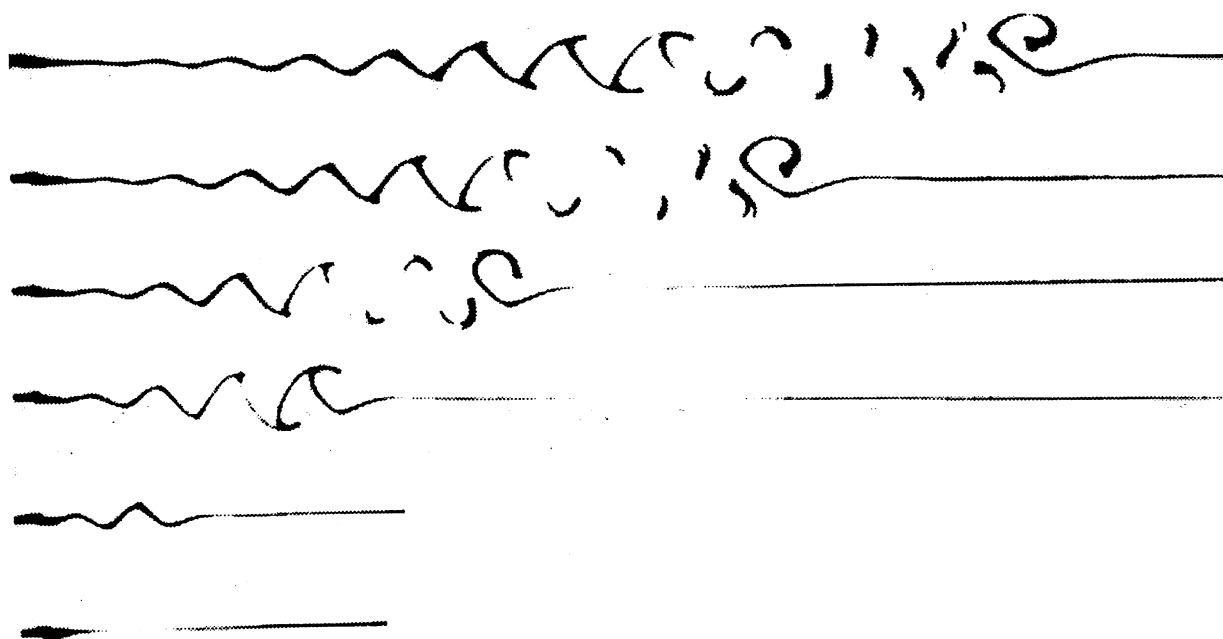


FIG. 5.2 – Streakline of a passive tracer visualizing the impulse response in a cylinder-wake at several times. In this waterfall presentation of an experiment by Le Gal & Croquette [21], time is running from bottom to top picture by regular step increases. The Reynolds number  $Re^{(D)} = 35$  is subcritical, but local instability causes a finite amplitude wavepacket to develop in space and time. The passive scalar is strongly and rapidly displaced. Courtesy of Le Gal & Croquette.

a priori be replaced by their nonlinear counterparts [4]. Both linear and nonlinear theories are outlined below.

*Linear* spatio-temporal instability properties are based on the behavior of the linear impulse response of the flow in a given reference frame. If the flow is unstable, any localized pulse develops along the  $x$ - (streamwise) direction into a wavepacket of spatio-temporal modes which grow exponentially along some rays  $x/t = v$  and decay along other rays. In most situations, the unstable modes are delineated by a pair of particular rays  $x/t = v_{\pm}$  or “edges” along which neutral waves propagate. The knowledge of the edge velocities  $v_{\pm}$  allows to discriminate between convective and absolute instabilities (see Huerre & Monkewitz [16] for a review). If  $v_{-}$  and  $v_{+}$  have the same sign (say positive), the linear response decays at each fixed location, indicating a convective type of instability. If by contrast  $v_{-}$  is negative and  $v_{+}$  is positive, the spatio-temporal ray  $x/t = 0$  lies in the range of exponentially growing modes, which indicates an absolute type of instability.

The extension of these concepts to the nonlinear régime [4] involves the evolution of localized perturbations of *finite* amplitude. The generated wavepackets may then be bounded by two fronts of fixed shape propagating at velocities  $v_{\pm}^{\text{NL}}$ . By analogy with the linear case, the instability is nonlinearly absolute if a wavepacket exists for which  $v_{-}^{\text{NL}}$  and  $v_{+}^{\text{NL}}$  have opposite signs. Otherwise, it is nonlinearly convective.

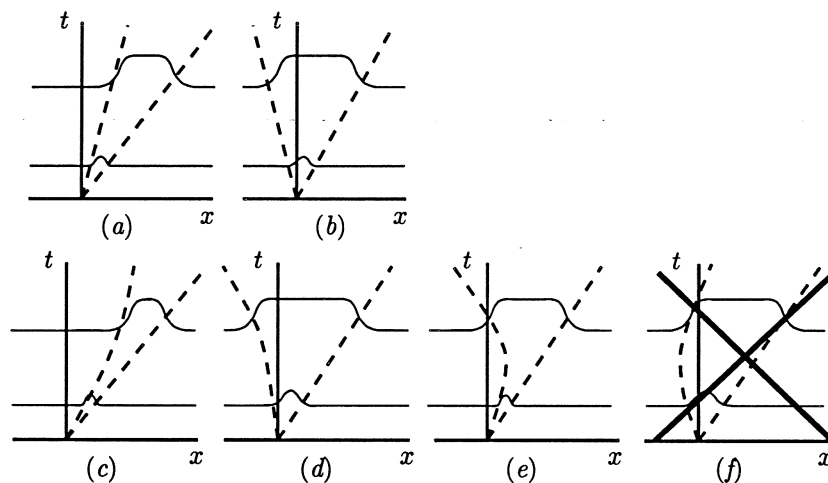


FIG. 5.3 – Typical impulse responses of a homogeneous medium illustrating (a)–(b) linear and (c)–(f) nonlinear velocity selection. In cases (a)–(d), the convective/absolute nature of the flow is preserved from the linear to nonlinear régime [convective for (a) and (c), absolute for (b) and (d)]. By contrast, case (e) illustrates linearly convective and nonlinearly absolute instability. The reverse (f), linearly absolute and nonlinearly convective instability, is impossible.

The relation between linear and nonlinear convective/absolute instability notions is nontrivial and can be associated with the concept of front-velocity selection which has been extensively studied in the past decade [18, 33, 34]. Consider a small amplitude perturbation initially localized within an unstable medium (figure 5.3). Initially, the disturbance grows according to linear instability theory, and its edges propagate at the linearly selected velocities  $v_{\pm}$ . As the exponential growth becomes compensated by nonlinear terms, the wavepacket saturates while the linear edges transform into nonlinear fronts. Dee & Langer [7] have proposed a “marginal stability” mechanism, also interpreted as a dynamical process for linear front-velocity selection

by van Saarloos [33], in which the fronts of the nonlinear wavepacket simply propagate at the same speed as the linear precursor edges ( $v_{\pm}^{\text{NL}} = v_{\pm}$ ), as sketched on figures 5.3(a)–(b). This mechanism is based on the assumption that the infinitesimal perturbations preceding the front necessarily comply with the linear dispersion relation and dictate the entire front dynamics. Nevertheless, in some situations, the wavepacket saturation causes a different front with higher velocity to emerge, as shown by van Saarloos [34]. The selection is then said to be *nonlinear* as it is imposed by the nonlinear saturated region. In the case of nonlinear velocity selection, which may a priori occur for the leading and/or the trailing front, the nonlinearly selected front velocity  $v_{\pm}^{\text{NL}}$  necessarily lies outside the range of velocities  $[v_-, v_+]$ , (i.e.  $v_-^{\text{NL}} < v_-$  and/or  $v_+^{\text{NL}} > v_+$ ), as sketched on figures 5.3(c)–(e). Otherwise, a linear front could emerge and propagate at the linear edge velocity  $v_{\pm}$ . This property implies in particular that the flow may be linearly convectively unstable ( $v_- > 0$ ) and nonlinearly absolutely unstable ( $v_-^{\text{NL}} < 0$ ) [figure 5.3(e)]. In such a situation, the flow may bifurcate towards another state such as a limit cycle although it is linearly convectively unstable. Note also that, since the nonlinear wavepacket contains the linear wavepacket, linear absolute instability necessarily implies nonlinear absolute instability, which for instance forbids the scenario sketched on figure 5.3(f).

The above notions have found an illustration in Taylor–Couette [3] and Rayleigh–Bénard [11] experiments in open flow configurations. The stream forced in the axial [3] or horizontal [11] direction, normal to the primary instability rolls (Ref. [3] accounts for a two-dimensional simulation while in Ref. [11] experimental results are reported). In both instances, the front selection was observed to be linear. These findings justify the use of linear criteria in the prediction of resonance in such systems.

However it should be noted that in the above studies [3, 11], the superimposed throughflow is small and that the behavior may thus be described in a weakly nonlinear framework by a Ginzburg–Landau amplitude equation. The validity of linear criteria for front selection is therefore not surprising. By contrast, shear flows such as bluff-body wakes present local instability growth rates of order unity, as advection and shear cannot be monitored independently. Their behavior should a priori be affected by strongly nonlinear effects, since at the threshold, the wave packet amplitude is also of order unity. It is hence worth examining the existence of fronts separating the basic unstable state from the saturated bifurcated stable state, and also to investigate the influence of *strong nonlinearities* on front-velocity selection in *open shear flows*. Such a study is undertaken here in the context of two-dimensional symmetric parallel wake profiles introduced by Monkewitz & Nguyen [26]. The strong non-parallelism of realistic bluff-body wake flows is deliberately ignored, since we wish to focus on the effects of nonlinear terms. We find that, for the selected family of wake profiles, front selection is governed by linear mechanisms. It should be emphasized that linear front velocity selection is *no* generic feature of nonlinear media and that nonlinear selection has been observed in other experimental situations, such as chemically reacting systems [13] and liquid crystals [28].

This paper is organized as follows. The numerical aspects of the simulation as well as investigation techniques are presented in §5.2. Linear temporal and spatio-temporal properties are retrieved from DNS in §5.3 for two different wake configurations: a strongly confined periodic wake and a weakly confined wake. The nonlinear wavepacket evolution in both configurations is presented in §5.4. Conclusions regarding the validity of linear theory at the global instability threshold are discussed in §5.5.

## 5.2 Numerical aspects

### 5.2.1 Direct numerical simulation technique

In all the following, the basic wake is assumed parallel in the streamwise  $x$ -direction and the streamwise velocity component  $U$  depends solely on the cross-stream coordinate  $y$ . The wake half-width  $D/2$  and the free-stream velocity  $U_\infty$  are used to make distances and velocities dimensionless. Let  $\mathbf{U} = U(y) \hat{\mathbf{x}}$  and  $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{U}$  denote the velocity and vorticity of the basic flow. The evolution of velocity ( $\mathbf{u}$ ), vorticity ( $\boldsymbol{\omega}$ ) and pressure ( $p$ ) disturbances is governed by the incompressible two-dimensional Navier–Stokes equations written here in velocity/vorticity formulation:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \left[ p + \mathbf{u} \cdot \mathbf{U} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right] + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5.1)$$

where  $Re$  designates the Reynolds number based on the above reference scales (the correspondence  $Re = Re^{(D)}/2$  holds). Note that the diffusion acting on the basic flow is assumed to be compensated by a body force and that the corresponding term  $Re^{-1} \nabla^2 \mathbf{U}$  has thus been removed in (5.1), as often done in theoretical studies in order to make the problem autonomous. In particular, it allows direct comparisons with the alternative branch-point analysis by Monkewitz [24], which relies on the same assumptions. The numerical procedure here consists of a pseudo-spectral code originally written by Vincent & Meneguzzi [35], adapted, optimized and validated by Brancher [1] to two-dimensional rectangular domains. Details on the numerical technique can be found in Ref. [8]. The Fourier formulation enforces periodicity of the system along both the streamwise  $x$ - and the cross-stream  $y$ - directions. Collocation points are distant by  $\delta x = \delta y = 0.1$ . The physical domain made up of 1024 or 2048 points along  $x$  is chosen long enough to ensure that the perturbation remains localized far away from the streamwise boundaries during the total simulation time and that the results are indeed unaffected by streamwise periodicity. In the following, two different cross-stream box widths are successively adopted. For the first one,  $L_y = 4.8$ , the wake is strongly confined between two adjacent (identical) wakes situated 2.4 diameters apart. For the second one,  $L_y = 25.6$ , the domain is wide enough, so that the computed solutions satisfactorily approximate the dynamics of a single wake in an infinite medium.

The basic wake profile adopted here has been elaborated by Monkewitz & Nguyen [26]. The streamwise component of velocity is given by:

$$U(y) = 1 - \Lambda + 2\Lambda \frac{1}{1 + \sinh^{2N} |y \sinh^{-1}(1)|}, \quad \text{with } N = 2. \quad (5.2)$$

Since the centerline velocity  $U_0$  is chosen to be zero, the velocity ratio  $\Lambda \equiv (U_0 - U_\infty)/(U_0 + U_\infty)$  is  $\Lambda = -1$  throughout the study. Results for other  $\Lambda$ -values can be obtained by Galilean transformation. For the selected value of  $N$ , each vorticity layer is (well) sampled on 10 mesh lines approximately. This wake profile has also been considered by Delfs *et al.* [9], who used a vortex blob method to simulate the inviscid and viscous response to a localized pulse for different values of the velocity ratio  $\Lambda$ .

The computational field is initialized by the divergence-free velocity disturbance  $\mathbf{u}(x, y, t = 0)$  with components:

$$\begin{cases} u_x &= -(y - y_0) \exp \left[ - \left( \frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right] \\ u_y &= \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} x \exp \left[ - \left( \frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right]. \end{cases} \quad (5.3)$$

The initial perturbation takes the form of a small vorticity spot located at  $(x = 0, y = y_0)$ . The distribution envelope is Gaussian and has a typical extent  $\sigma_x$  along the  $x$ -direction and  $\sigma_y$  along the  $y$ -direction. The length-scales  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  must *a priori* be taken as small as possible, as the initial conditions should take the form of a delta function. Nevertheless, the values  $\sigma_x = 0.4$ ,  $\sigma_y = 0.6$  have been chosen in order to ensure satisfactory sampling in the truncated spectral space. In this manner, the initial perturbation at least contains all the physically relevant wavenumbers, as checked *a posteriori*. Moreover, it is centered at  $y_0 = 0.5$  in one of the two wake shear layers, so that no particular symmetry is enforced on the solution by the initial conditions.

### 5.2.2 Decomposition procedure for linear simulations

A set of *linear* simulations is first performed, whereby the linear instability properties of the basic flow under investigation can be derived. The evolution of an initially localized perturbation is simulated according to the Navier–Stokes equation linearized in the vicinity of the basic state, i.e. equation (5.1) in which the terms  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$  and  $\mathbf{u}^2/2$  are omitted. Through the analysis of the simulated wavepacket described below, the linear temporal and spatio-temporal instability properties are retrieved.

The theoretical treatment of the associated Orr–Sommerfeld eigenvalue problem [10] associated to the symmetric velocity profile (5.2) reveals the existence of a discrete set of branches parameterized by the streamwise wavenumber  $k$ . They pertain either to varicose modes for which the vorticity eigenfunction is symmetric with respect to the  $x$ -axis, or to sinuous modes, for which the vorticity eigenfunction is antisymmetric. The contributions  $\omega_{\text{sin}}$  and  $\omega_{\text{var}}$ , of sinuous and varicose modes respectively, to the perturbation vorticity  $\omega$  can be separated easily by considering the even and odd components of  $\omega$ :

$$\omega_{\text{sin}}(x, y, t) = \frac{1}{2}[\omega(x, y, t) + \omega(x, -y, t)], \quad (5.4)$$

$$\omega_{\text{var}}(x, y, t) = \frac{1}{2}[\omega(x, y, t) - \omega(x, -y, t)]. \quad (5.5)$$

Each contribution can then be considered independently. The procedure is detailed below for the sinuous part, but the same holds for the varicose part.

#### Temporal instability, analysis in spectral space

In the temporal formulation of instability problems, a *real* wavenumber  $k$  in the  $x$ -direction is prescribed and the corresponding complex frequency  $\omega_{\text{sin}}(k)$  is sought. As explained in Brancher [1], the simulation of an initially localized impulse generates a wavepacket with a broad spectrum structure (see for instance figure 5.4). By considering the evolution of the spectrum in time, one may recover in a single run the leading temporal instability properties of the basic flow prevailing for each streamwise wavenumber  $k$ .

The procedure is applied here on the perturbation-enstrophy spectrum:

$$e_{\text{sin}}(k, t) = \left( \int_0^{+\infty} |\hat{\omega}_{\text{sin}}(k, y, t)|^2 dy \right)^{1/2}, \quad (5.6)$$

which measures the amplitude of the temporal wave under consideration. According to temporal instability theory, the above variable is known to evolve asymptotically for large times as:

$$e_{\text{sin}}(k, t) \propto e^{\omega_{i, \text{sin}}(k)t}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (5.7)$$

where  $\omega_{i,\sin}(k)$  denotes the leading temporal growth rate at wavenumber  $k$ . Conversely,  $\omega_{i,\sin}(k)$  can be expressed as:

$$\omega_{i,\sin}(k) \sim \frac{\partial}{\partial t} \ln e_{\sin}(k, t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (5.8)$$

If  $\omega_{i,\sin}(k)$  is well separated from the other eigenvalues of smaller growth-rate, it is possible to obtain its value from the computed spectrum distribution  $e_{\sin}(k, t)$  for large times, by making use of the discretized form of (5.8):

$$\omega_{i,\sin}(k) \approx \frac{\ln [e_{\sin}(k, t_2)/e_{\sin}(k, t_1)]}{t_2 - t_1}. \quad (5.9)$$

Due to the spatial discretization, the corresponding temporal growth rate  $\omega_{i,\sin}(k)$  can be numerically determined in the range  $-\pi/\delta x < k < \pi/\delta x$  in successive steps of size  $\delta k = 2\pi/L_x$ .

In order to validate the above procedure, one checks the convergence of  $\omega_{i,\sin}(k)$  for several  $t_{1,2}$  values. It is also necessary to make sure that the corresponding eigenfunction

$$\phi_{\sin}(k, y, t) = \frac{\hat{\omega}_{\sin}(k, y, t)}{e_{\sin}(k, t)} \quad (5.10)$$

is indeed shape-invariant in time.

### Spatio-temporal instability, ray analysis

The spatio-temporal formulation is concerned with the determination of the Green function, or equivalently, with the instability modes of given real group velocity  $v_g$ . It is thus necessary to investigate the wavepacket structure in physical space, as these modes develop along the spatio-temporal ray  $x/t = v_g$ . This can be done unambiguously since the impulse response consists of a spatially oscillating wave with a typical instability wavelength, smoothly modulated in space by an amplitude function (which is as smooth as desired provided that time  $t$  be taken sufficiently large). The perturbation spectrum then adopts a band structure which allows to carry out the following procedure. First, the contribution of all Fourier modes with negative wavenumber  $k < 0$  is set to zero in spectral space in such a way that one recovers the usual complex exponential formulation. In physical space, the imaginary part associated to the real signal  $\omega_{\sin}(x, y, t)$  is recovered by a spatial Hilbert transform along the streamwise  $x$ -direction, as in Ref. [1]:

$$\bar{\omega}_{\sin}(x, y, t) = \left[ \delta(x) + \frac{i}{\pi x} \right] * \omega_{\sin}(x, y, t) \equiv A_{\sin}(x, y, t) e^{i\varphi_{\sin}(x, y, t)}, \quad (5.11)$$

where  $*$  designates the convolution operator in  $x$ ,  $A_{\sin}(x, y, t)$  the amplitude and  $\varphi_{\sin}(x, y, t)$  the phase within the wavepacket.

The real amplitude function  $A_{\sin}(x, t)$  of the dominant sinuous mode is obtained by integration along the cross-stream  $y$ -direction according to the formula:

$$A_{\sin}(x, t) = \left( \int_0^{L_y/2} A_{\sin}^2(x, y, t) dy \right)^{1/2}. \quad (5.12)$$

This quantity can be shown [15] to behave asymptotically as:

$$A_{\sin}(x, t) \propto t^{-1/2} e^{\sigma_{\sin}(v_g)t}, \quad v_g = x/t = \text{const}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (5.13)$$

In the above equation,  $\sigma_{\sin}(v_g)$  designates the real growth rate of the sinuous mode dominating the dynamics along the ray  $x/t = v_g$ . It can be calculated as follows:

$$\sigma_{\sin}(v_g) \sim \frac{d}{dt} \ln[t^{1/2} A_{\sin}(v_g t, t)], \quad t \rightarrow \infty, \quad (5.14)$$

or, in discretized form:

$$\sigma_{\sin}(v_g) \approx \frac{\ln[A_{\sin}(v_g t_2, t_2)/A_{\sin}(v_g t_1, t_1)]}{t_2 - t_1} + \sigma_0(t_1, t_2), \quad (5.15)$$

where the term

$$\sigma_0(t_1, t_2) = \frac{\ln(t_2/t_1)}{2(t_2 - t_1)} \quad (5.16)$$

is a finite-time correction arising from the  $t^{-1/2}$  factor in equation (5.13). For the values of  $t_1$  and  $t_2$  adopted in the following,  $\sigma_0(t_1 = 36, t_2 = 40) \approx 0.013$ . This term was omitted in Ref. [8], thereby slightly under-estimating the spatio-temporal growth rates without however affecting the results qualitatively. It has been included here, because its contribution as a constant is not negligible in relative magnitude especially for nearly neutral modes.

At a given time  $t$ , the real part of the complex local wavenumber [36]  $k_{r,\sin}$  can be evaluated on the  $x$ -axis (at  $y = 0$ ) as follows:

$$k_{r,\sin}(x, t) = \frac{\partial \varphi_{\sin}}{\partial x}(x, 0, t) = \mathcal{R}e \left\{ \frac{1}{i \bar{\omega}_{\sin}} \frac{\partial \bar{\omega}_{\sin}}{\partial x}(x, 0, t) \right\}. \quad (5.17)$$

The calculation of the derivative with respect to  $x$  in (5.17) is implemented in spectral space where it reduces to a multiplication by  $ik$ . Asymptotically for large times,  $k_{\sin}$  depends solely on the group velocity  $v_g = x/t$ .

Again, the validation of the above procedure involves a convergence check when using relations (5.15) and (5.17). The time invariance of the normalized eigenfunction

$$\phi(v_g, y, t) = \frac{\omega_{\sin}(x = v_g t, y, t)}{A_{\sin}(x = v_g t, t) e^{i\varphi(x, 0, t)}} \quad (5.18)$$

must also be ensured.

### 5.2.3 Analysis of nonlinear simulations

Nonlinear effects, via the re-introduction of the term  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$  have two consequences. On the one hand, this product displays a symmetry opposite to that of the sinuous modes, which thus forces a varicose contribution to the impulse response. On the other hand, it generates small wavenumbers which destroy the previous band structure of the perturbation spectrum. In such cases, the Hilbert transform procedure (5.11) no longer leads to the retrieval of the wavepacket envelope [23] since it artificially expands the wavepacket. In order to circumvent this difficulty, it is convenient to study the behavior of the rms local enstrophy  $\eta(x, t)$  (hereafter simply called enstrophy) defined at each streamwise location  $x$  and time  $t$  by:

$$\eta(x, t) = \left( \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \omega^2(x, y, t) dy \right)^{1/2}. \quad (5.19)$$

This quantity satisfactorily accounts for the wavepacket amplitude<sup>1</sup>.

1. However, the carrier wave is thereby not fully filtered out. As a consequence,  $\eta$ -curves generally exhibit wiggles (see figures 5.15, 5.17 and 5.20) which may provide some information on the wavepacket phase.

### 5.3 Linear impulse response

#### 5.3.1 Strongly confined periodic wake ( $L_y = 4.8$ )

In the first simulation, the downstream and cross-stream sizes of the computational domain have respectively been selected to be  $L_x = 102.4$  and  $L_y = 4.8$ . For such a strong confinement ( $L_y/D = 2.4$ ), the periodic boundary conditions along  $y$  impose a strong coupling between adjacent wake images. The linear evolution of the initially localized disturbance (5.3) is computed up to time  $t = 40$ . The modal decomposition formulas (5.4)–(5.5) are applied to the perturbation field at several times during the simulation for both sinuous and varicose contributions. For the basic velocity profile under consideration (5.2), only the sinuous inviscid-like mode is found to be linearly unstable at the selected Reynolds number  $Re = 20$ . In the following, we therefore focus solely on this dominant sinuous mode.

#### Temporal instability

The perturbation spectrum  $e_{\text{sin}}(k, t)$  extracted from the simulation is plotted on figure 5.4 at several times  $t = 8, 12, \dots, 40$ : temporal modes are seen to grow or decay exponentially according to the magnitude of the wavenumber. The corresponding sinuous mode growth rate  $\omega_{i,\text{sin}}$  is obtained through formula (5.9) applied between  $t_1 = 36$  and  $t_2 = 40$ . The temporal

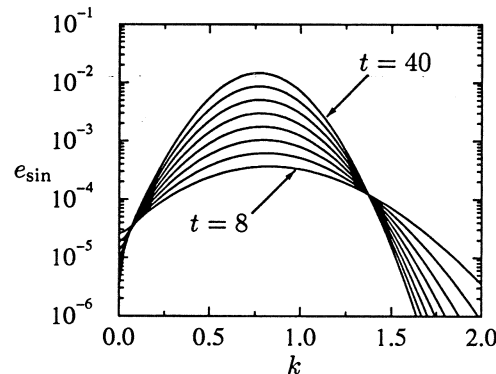


FIG. 5.4 – Perturbation spectrum  $e_{\text{sin}}$  of the dominant sinuous mode as a function of real stream-wise wavenumber  $k$ . The curves are extracted from the simulated wake impulse response at several times  $t = 8, 12, \dots, 40$  for  $Re = 20$  and  $L_y = 4.8$ .

growth rate  $\omega_{i,\text{sin}}$  is plotted as a function of wavenumber  $k$  on figure 5.5: the curve reaches its maximum value  $\omega_{i,\text{sin}}^{\text{max}} = 0.132$  at wavenumber  $k_{\text{sin}}^{\text{max}} = 0.750$ . All modes with wavenumbers larger than the “cut-off” wavenumber  $k_{\text{sin}}^{\text{c.o.}} = 1.374$  are damped.

#### Spatio-temporal instability

In order to determine the spatio-temporal instability properties of the flow, the physical perturbation vorticity field is observed on each spatio-temporal ray  $x/t = \text{const} = v_g$ . The evolution of the amplitude  $A_{\text{sin}}$  corrected by the factor  $t^{1/2}$  [see eq. (5.14)] is presented on figure 5.6 as a function of group velocity  $v_g$ . It can be seen that the set of amplitude curves exhibits two turning points, at  $v_-$  and  $v_+$ , indicating that the wavepacket grows between two well-defined edges  $x/t = v_-$  and  $x/t = v_+$ . The precise values of the edge velocities  $v_-$  and



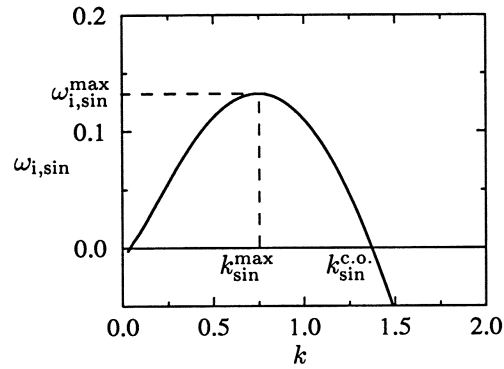


FIG. 5.5 – The temporal growth rate  $\omega_{i,\sin}$  of the sinuous mode, as determined from the wake impulse response for each Fourier component  $k$  at  $Re = 20$  and  $L_y = 4.8$ .

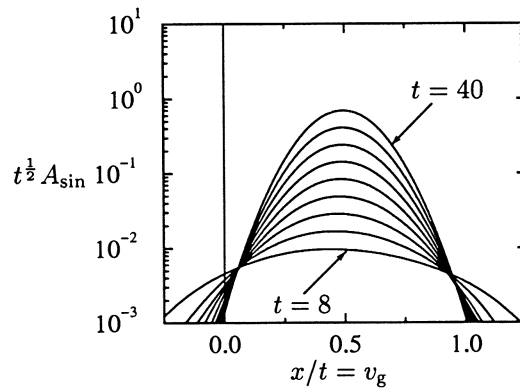


FIG. 5.6 – Time-corrected amplitude  $t^{\frac{1}{2}} A_{\sin}$  of the sinuous mode as a function of group velocity  $v_g$  at several times  $t = 8, 12, \dots, 40$ . The amplitude has been retrieved from the direct numerical simulation at  $Re = 20$  and  $L_y = 4.8$ .

$v_+$  are determined by computing the corresponding growth rate  $\sigma_{\sin}$  via formula (5.15) applied between  $t_1 = 36$  and  $t_2 = 40$ . The spatio-temporal growth rate of the sinuous mode  $\sigma_{\sin}$  is plotted on figure 5.7 as a function of group velocity  $v_g$ . The shape of the spatio-temporal growth-rate

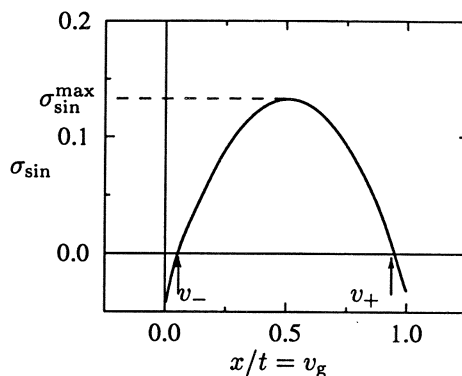


FIG. 5.7 – The spatio-temporal growth rate  $\sigma_{\sin}$  of the sinuous mode, as determined from the results of figure 5.6 at  $Re = 20$  and  $L_y = 4.8$ .

curve is very close to that of a parabola. The maximum  $\sigma_{\sin}^{\max} = 0.132$  is observed along the ray  $x/t = 0.51$ . The maximum value  $\sigma_{\sin}^{\max}$  can be shown by construction [16] to coincide with the maximum temporal growth rate  $\omega_{i,\sin}^{\max}$ . The agreement between the two values determined numerically is seen to be better than 1%, and constitutes an internal coherence check for the method. The trailing and leading edges, which by definition sustain neutral waves, are the spatio-temporal rays  $x/t = v_- = 0.053$  and  $x/t = v_+ = 0.95$ . The growth-rate curve is almost symmetrical with respect to the central ray  $x/t = 0.51$ . This feature can be explained by the fact that the cross-stream box size  $L_y = 4.8$  is close to the value  $L_y = 2D = 4$  for which the basic flow velocity is invariant under the transformation  $U \rightarrow 1 - U$ , which would enforce the reflectional symmetry of the impulse response with respect to the ray  $x/t = 1/2$ .

It is also possible to extract the streamwise wavenumber as a function of  $x/t$  via formula (5.17), as plotted on figure 5.8. The maximum amplification, obtained for  $v_g = 0.51$ ,

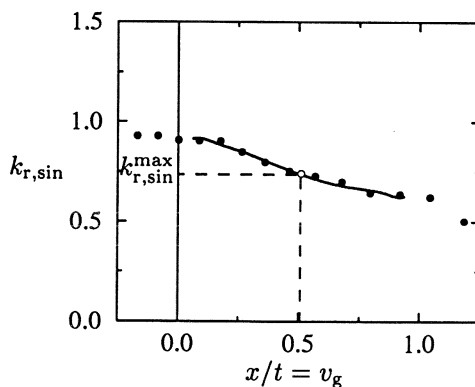


FIG. 5.8 – The real part  $k_{r,\sin}$  of streamwise wavenumber, as determined from the wake impulse response as a function of  $x/t = v_g$  at  $t = 40$ ,  $Re = 20$  and  $L_y = 4.8$ . —: extraction via formula (5.17); •: direct measurement on the vorticity field.

is associated with the wavenumber value  $k_{r,\sin}^{\max} = 0.74$ , in agreement with the value 0.75 previously obtained through the temporal approach. Furthermore, the wavenumber extracted by the Hilbert transform procedure was checked to coincide with direct wavelength measurements deduced from zero crossing of the perturbation vorticity along the symmetry  $x$ -axis at time  $t = 80$  (figure 5.8).

### 5.3.2 Weakly confined wake ( $L_y = 25.6$ )

In order to simulate the dynamics of an isolated wake, the cross-stream box size was widened to  $L_y = 25.6$  ( $L_y/D = 12.8$ ). A linear simulation is performed in this wider domain for the same initial perturbation field (5.3) and Reynolds number  $Re = 20$  as for the confined case. The perturbation was checked to decay rapidly enough with  $|y|$ , so that at the boundaries  $y = \pm L_y/2$  the velocity and the vorticity almost vanish. This check ascertained that  $y$ -periodicity induced negligible coupling between adjacent wake images. The same decomposition and analysis procedure as in §5.3.1 is applied. For the velocity profile (5.2) under study, only the sinuous mode is found to be unstable. The temporal growth rate  $\omega_{i,\sin}(k)$  slightly differs from the case  $L_y = 4.8$ , as displayed on figure 5.9 where both curves are plotted. The maximum growth rate is somewhat smaller  $\omega_{i,\sin}^{\max} = 0.107$  at  $k_{\sin}^{\max} = 0.710$ . The cut-off wavenumber is reduced to  $k_{\sin}^{\text{c.o.}} = 1.320$ .

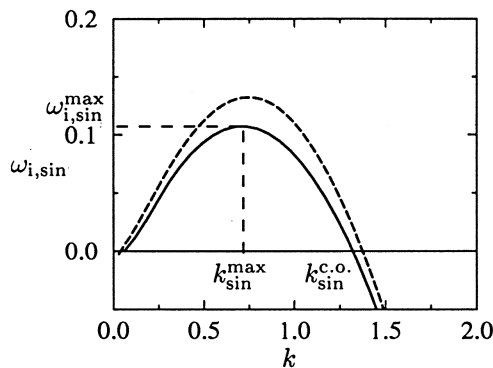


FIG. 5.9 – The temporal growth rate  $\omega_{i,\sin}$  of the sinuous mode, as determined from the wake impulse response for each Fourier component of wavenumber  $k$  at  $Re = 20$  and  $L_y = 25.6$ . The dashed curve pertains to the case  $L_y = 4.8$ , as plotted on figure 5.5.

The linear growth-rate on the spatio-temporal rays  $x/t = v_g$  determined with  $L_y = 25.6$  is compared to the curve obtained with  $L_y = 4.8$  (dashed line) on figure 5.10. The shape is still quasi-parabolic, but the wavepacket spatial extent is seen to be substantially reduced. Both trailing- and leading-edge velocities respectively decrease to  $v_- = 0.016$  and  $v_+ = 0.82$ . It is surprising that in spite of the fact that the mean basic velocity is larger in the case  $L_y = 25.6$  than in the case  $L_y = 4.8$ , group velocities have globally decreased. In particular, the trailing-edge velocity has decreased, thus promoting the absolute character of the instability. The ray  $x/t = 1/2$  is no longer a symmetry axis for the curve, as the invariance under the transformation  $U \rightarrow 1 - U$  no longer holds. Besides, the weakly confined wake is less unstable than the strongly confined one, since  $\sigma_{\sin}^{\max} = 0.107$  instead of 0.132.

The value of the trailing-edge velocity  $v_-$  can be compared with the result obtained by Monkewitz [24] by direct application of the Briggs–Bers criterion [2] on the viscous dispersion relation. From his figure 4, a critical velocity ratio for the occurrence of absolute instability

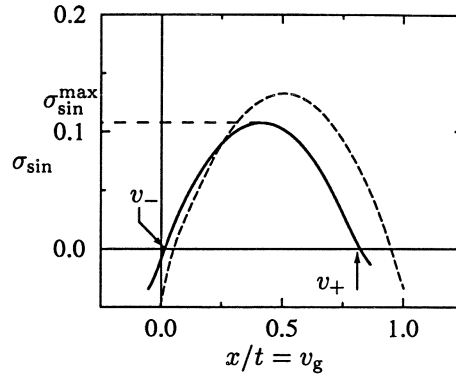


FIG. 5.10 – The spatio-temporal growth rate  $\sigma_{\sin}$  of the sinuous mode, as determined from the wake impulse response on each spatio-temporal ray  $x/t = v_g$  at  $Re = 20$  and  $L_y = 25.6$ . The dashed curve pertains to the case  $L_y = 4.8$ , as plotted on figure 5.7.

is  $\Lambda_c^{(M)} = -1.02$ . The relationship between the present  $v_-$  value and  $\Lambda_c$  is given by  $\Lambda_c = (2v_- - 1)^{-1}$ , which in our case yields  $\Lambda_c = -1.03$ . This  $\Lambda_c$  value only differs by 1% from  $\Lambda_c^{(M)}$ . The present method of investigation has been further validated by similar comparisons for different values of  $N$  and  $Re$ . The data obtained for  $N = 2, 4, 10, 20$  and for  $Re = 20, N = 1, 1.4, 2, 3$  have been superposed on the results obtained by Monkewitz on figure 5.11. In all cases, a satisfactory agreement is obtained. This confirms the validity and efficiency of the present procedure based on direct numerical simulations. It also confirms the convergence of the method, as well as the negligible effects of finite-time approximation and finite box size, particularly in the cross-stream direction.

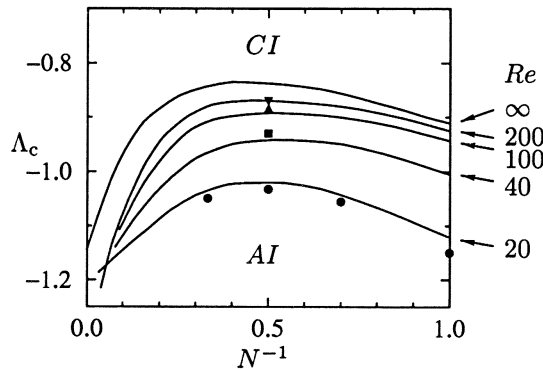


FIG. 5.11 – Critical values of the velocity ratio  $\Lambda_c$  for convective/absolute transition, for different values of  $N$  and  $Re$ . The continuous lines taken from the study by Monkewitz [24], figure 4, are obtained by saddle-point tracking. The symbols denote critical  $\Lambda_c$  values deduced from the trailing edge velocities  $v_-$  obtained by DNS for  $Re = 20$  ( $\bullet$ ),  $Re = 40$  ( $\blacksquare$ ),  $Re = 100$  ( $\blacktriangle$ ) and  $Re = 200$  ( $\blacktriangledown$ ).

The most important difference between the linear instability properties of the weakly and strongly confined wakes arises from the real part  $k_{r,\sin}$  of the wavenumber, as represented on figure 5.12. Near the leading edge  $v_+ = 0.82$ , the wavelength is seen to diverge — although strictly speaking the Hilbert transform procedure fails to separate phase and amplitude near such

points. The oscillatory behavior of the wavepacket ends near the leading edge, thus forbidding the formation of new vortices feeding the wavepacket from downstream.

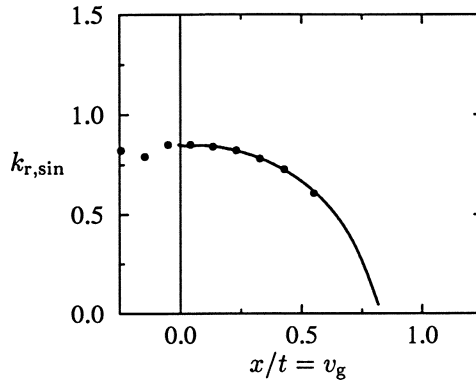


FIG. 5.12 – The real part  $k_{r,\sin}$  of streamwise wavenumber, as determined from the wake impulse response as a function of  $x/t = v_g$  at  $t = 40$ ,  $Re = 20$  for  $L_y = 25.6$ . —: extraction via formula (5.17); •: direct measurement on the vorticity field.

## 5.4 Nonlinear impulse response

*Nonlinear* simulations have been performed in each of the above cases for the same initial condition (5.3). The nonlinear term  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ , now included, causes the wavepacket to saturate after an initial exponential growth. The influence of the saturation on the edge dynamics is investigated successively in both configurations,  $L_y = 4.8$  and  $L_y = 25.6$ . The nonlinear term also breaks the symmetry  $y \rightarrow -y$  and sinuous and varicose modes cannot be treated separately. More precisely, a varicose wavepacket exists, but the sinuous wavepacket also generates a varicose perturbation.

### 5.4.1 Strongly confined periodic wake ( $L_y = 4.8$ )

The nonlinear evolution of an initially localized perturbation in the strongly confined wake ( $L_y = 4.8$ ) has been simulated at the same Reynolds number  $Re = 20$  up to time  $t = 80$ . Isocontours of the total vorticity  $\Omega(y) + \omega(x, y, t)$  are plotted on figure 5.13 at several times. Note that in the streamwise  $x$ -direction, only the central region of the domain has been represented. The initial pulse is merely visible on the bottom graph at  $x = 0$ . The perturbation both increases in amplitude and develops in space as may be seen from the oscillations of the isocontours. Near  $t = 40$ , the oscillations reach the amplitude of the basic flow, and vorticity begins to roll up into counter-rotating vortices. For  $t \geq 60$ , several wavelengths of a quasi-regular pattern can be distinguished, the number of which increases as the wavepacket spreads out along the streamwise  $x$ -direction. The time evolution of the rms perturbation vorticity over the entire domain

$$\varpi(t) = \left( \iint \omega^2(x, y, t) dx dy \right)^{1/2} \quad (5.20)$$

is presented on figure 5.14. After a transient period ( $t < 10$ ), the perturbation undergoes an exponential growth ( $10 < t < 35$ ). During both periods, the system evolution is governed by

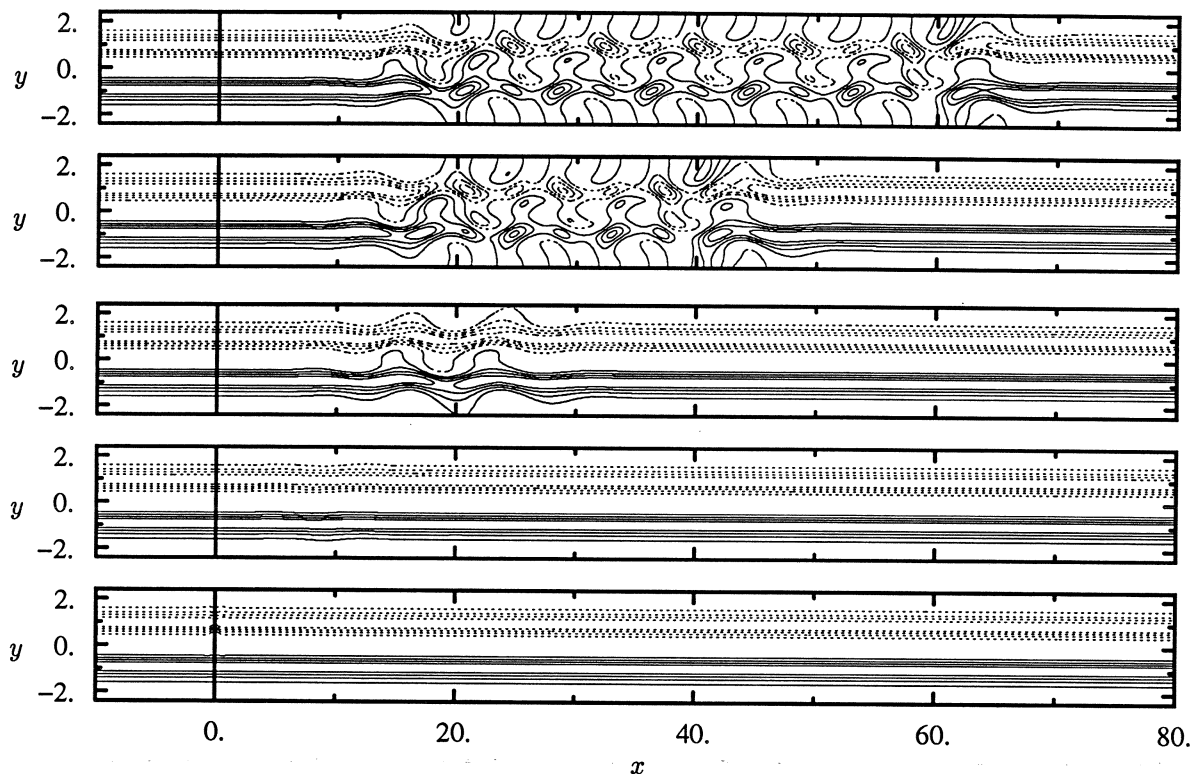


FIG. 5.13 – Isocontours of the total vorticity distribution  $\Omega(y) + \omega(x, y, t)$  at several times  $t = 0, 20, 40, 60$  and  $80$  (from bottom to top) for  $Re = 20$  and  $L_y = 4.8$ . Solid isolines pertain to positive levels  $0.25, 0.5, 0.75$  and  $1$ . Dotted isolines pertain to negative levels  $-0.25, -0.5, -0.75$  and  $-1$ . The computational domain has been cropped to a shorter streamwise extent  $-10 \leq x \leq 80$  (for the original domain,  $-20 \leq x \leq 184.8$ ).

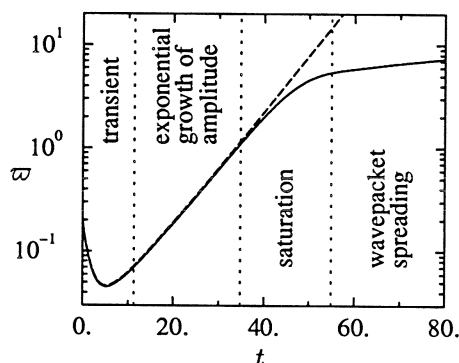


FIG. 5.14 – Temporal evolution of the rms perturbation vorticity  $\varpi$  for  $Re = 20$  and  $L_y = 4.8$ .

linear instability mechanisms, and the curve  $\varpi(t)$  follows the dashed curve obtained in the linear simulation presented in §5.3.1. The wavepacket then undergoes a saturation process ( $35 < t < 55$ ), during which the energy growth is substantially reduced. Eventually,  $\varpi$  grows linearly as a function of time while the saturated wavepacket spreads out at the constant extension rate  $v_+^{\text{NL}} - v_-^{\text{NL}}$ .

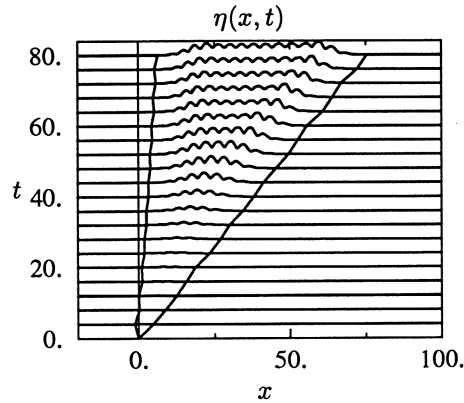


FIG. 5.15 – Waterfall plot of enstrophy  $\eta$  in the  $x$ - $t$  plane at  $Re = 20$  and  $L_y = 4.8$ . The wavepacket edges are also represented.

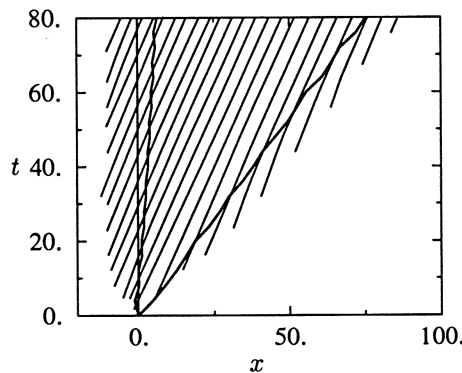


FIG. 5.16 – Spatio-temporal  $x$ - $t$  diagram presenting the isophase paths along which  $\varphi(x, y = 0, t) = 0, \pi$ , at  $Re = 20$  and  $L_y = 4.8$ . Bold lines represent wavepacket edges.

This saturation process may also be followed on the waterfall plot of figure 5.15 where the rms enstrophy  $\eta$  is plotted as a function of  $x$  at several times. The wavepacket spreading is clearly seen on the seven top curves. The two edges delimiting the wavepacket on figure 5.15 have been determined by following the constant  $\eta$ -levels prevailing at the linear stage ( $t \leq 35$ ). It can be observed that, in the nonlinear régime ( $t > 35$ ), the propagation of the two edges seems unaffected by the wavepacket amplitude saturation. The  $x$ - $t$  diagram of figure 5.16 displays the paths along which the centerline vorticity<sup>2</sup>  $\omega(x, 0, t)$  vanishes, i.e. along which the wavepacket phase  $\varphi(x, y = 0, t)$  is constant (and from one line to the next alternatively equals 0

2. As the antisymmetric part of the perturbation vorticity vanishes on the centerline, this procedure provides information on the sole symmetric part, i.e. the sinuous component.

and  $\pi$ ). Within the wavepacket, the phase velocity is seen to lie between the two front velocities. As a consequence, new vortices form at the trailing edge, *but also* at the leading edge of the wavepacket.

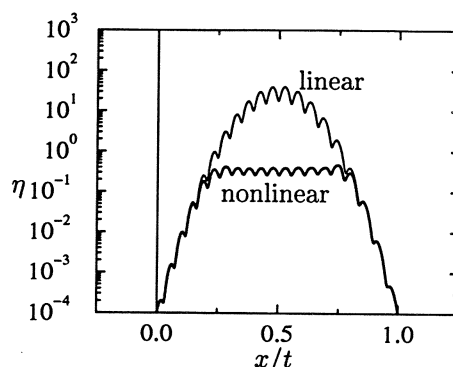


FIG. 5.17 – Enstrophy distribution as a function of  $x/t$  at time  $t = 80$  for linear (thin curve) and nonlinear (bold curve) simulations at  $Re = 20$  and  $L_y = 4.8$ .

In order to examine precisely the effect of nonlinear terms on the wavepacket edges, the enstrophy curves  $\eta(x, t = 80)$  obtained by linear and nonlinear simulations at  $t = 80$  are superposed on figure 5.17. The comparison of the two curves clearly demonstrates that both amplitude and phase obtained by linear and nonlinear simulations coincide accurately on each wavepacket edge over more than four enstrophy decades. This situation corresponds remarkably to scenarii (a)–(b) on figure 5.3. The nonlinear terms just cause the amplitude to saturate in the wavepacket core, while the phase is left unchanged from linear to nonlinear simulations, as could also be checked by direct comparison of the 2D vorticity fields. As a consequence, both front velocities  $v_{\pm}^{NL}$  are seen to be purely enforced by the linear instability properties of the medium. For the strongly confined periodic parallel wake, the linear front-velocity selection of Dee & Langer [7] holds:

$$v_{\pm}^{NL} = v_{\pm}. \quad (5.21)$$

Consequently, the convective/absolute nature of this flow is preserved from the linear to nonlinear régime.

#### 5.4.2 Weakly confined wake ( $L_y = 25.6$ )

Isocontours of the total vorticity field  $\Omega(y) + \omega(x, y, t)$ , obtained in the nonlinear simulation for the weakly confined wake at  $L_y = 25.6$ , are displayed on figure 5.18 at several times. Only the central region of the computational domain in  $x$  and  $y$  has been represented. As in the experiment of Le Gal & Croquette [21], passive tracer particles have been regularly spaced on the  $x$ -axis at  $t = 0$  and their evolution is followed by implementing a predictor/corrector algorithm. As seen from the plot at  $t = 80$  on figure 5.18, the separation of the initial line into small parts under the effect of roll-up is evident, as in figure 5.2. One should note, however, that contrary to experiments, the present wake profile is independent of the streamwise  $x$ -direction. Possibly as a consequence of this fact, the wavepacket is found to be far less regular than its experimental counterpart of figure 5.2, and the vortex street eventually becomes disorganized for large times, as can be seen in the neighborhood of the downstream front at  $t = 100$  on figure 5.18.



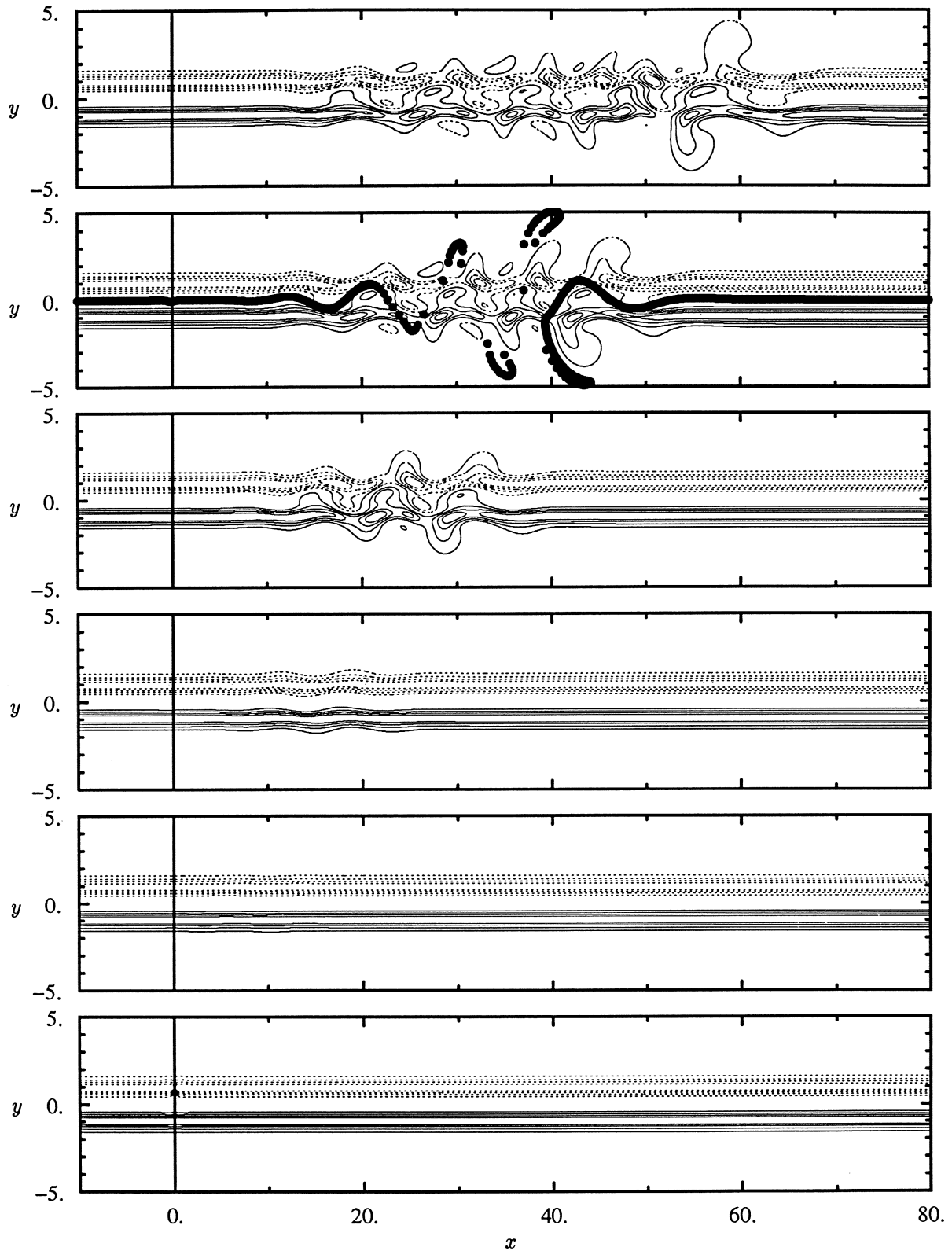


FIG. 5.18 – Isocontours of the total vorticity distribution  $\Omega(y) + \omega(x, y, t)$  at several times  $t = 0, 20, 40, 60, 80$  and  $100$  for  $Re = 20$  and  $L_y = 25.6$ . Solid isolines pertain to positive levels  $0.25, 0.5, 0.75$  and  $1$ . Dotted isolines pertain to negative levels  $-0.25, -0.5, -0.75$  and  $-1$ . The computational domain has been cropped to shorter streamwise and crosswise extents  $-10 \leq x \leq 80$  and  $-5 \leq y \leq 5$  (for the original domain,  $-20 \leq x \leq 184.8$  and  $-12.8 \leq y \leq 12.8$ ). For  $t = 80$ , the dispersion of passive tracer particles initially equispaced on the centerline has been represented.

The spatio-temporal  $x-t$  diagram of figure 5.19 confirms the existence of an instability in the saturated region. In this isophase representation, a vortex merging event corresponds to the loss of one wavelength, and appears as the annihilation of two adjacent lines. Such a vortex merging is seen to take place at  $t \approx 100$  (arrow C). Note that, contrary to what happens in the

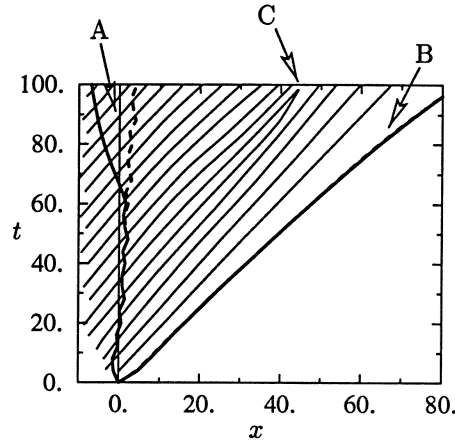


FIG. 5.19 – Spatio-temporal  $x-t$  diagram of isophase lines  $\varphi(x, y = 0, t) = 0, \pi$ . The wavepacket edges are represented in bold (solid line: full wavepacket; dashed line: “sinuous” component only). Arrows A and B point to the regions analyzed in figure 5.20. Arrow C points to the merging event.

strongly confined wake, no additional wavelength is created from the downstream side through the leading front of the wavepacket. This feature is also observed in the experiment of figure 5.2: the wavepacket ends abruptly in a fully developed vortex, which remains the same during the entire observation time. The steepness of the leading front is no nonlinear effect, but can be accounted for by linear considerations: as the linear wavelength becomes infinite at the leading edge (see figure 5.12), phase velocity  $c$  and group velocity  $v_g$  tend to coincide since:

$$c \equiv \frac{\omega}{k} \longrightarrow \frac{\partial \omega}{\partial k} = v_g \quad \text{when } \omega, k \rightarrow 0 \quad \text{and } c \neq 0. \quad (5.22)$$

This relation prevents the creation of new vortices at the leading edge where isophase lines become parallel to the edge.

On figure 19, the edges have been determined as previously. In the nonlinear régime ( $t > 60$ ), the leading edge seems to depart from its linear counterpart. This phenomenon is analyzed by comparison of the enstrophy distribution curves  $\eta(x, t = 80)$  obtained from linear and nonlinear simulations [figure 5.20(a)]. Figure 5.20(a) reveals three main differences with respect to the case  $L_y = 4.8$ , as indicated by the three arrows. A vortex-merging event can be spotted by the irregularity of the enstrophy curve (indicated by arrow C). Moreover, both nonlinear fronts are seen to differ from linear ones (arrows A and B) because of enstrophy excesses present at both wavepacket ends. These enstrophy excesses have both been observed to consist of zero-wavenumber perturbations but their symmetry differ. The perturbation at the leading edge (arrow B) displays the symmetry opposite to that of the basic flow: it consists of a slight shift of the shear layers. By contrast, the perturbation at the trailing edge (arrow A) has the same symmetry as the basic flow: it consists of a slight pinching of the basic wake.

It is of interest to further investigate the “sinuous” contribution to the wavepacket, which is known to give rise to the alternating vortices typical of the von Kármán street. The “sinuous”

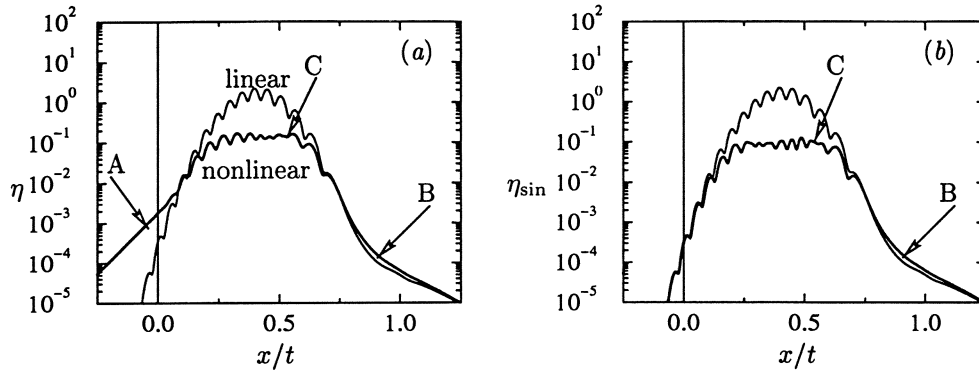


FIG. 5.20 – (a) Enstrophy  $\eta$  and (b) “sinuous” part  $\eta_{\text{sin}}$  of enstrophy distributions as a function of  $x/t$  at time  $t = 80$  for linear (thin curves) and nonlinear (bold curves) simulations at  $Re = 20$  and  $L_y = 25.6$ .

enstrophy computed by formula (5.19) where  $\omega$  is replaced by  $\omega_{\text{sin}}$  is plotted on figure 5.20(b). From the comparison with the enstrophy curve obtained from the linear simulation, also plotted, it is clear that the trailing front of the “sinuous” part of the wavepacket (the “vortex front”) is linearly selected, as both linear and nonlinear curves now strictly superpose at the trailing edge. This is also clearly seen on figure 5.19 where the vortex front represented by a dashed line exhibits a constant slope. This feature indicates that linear front-velocity selection  $v_- = v_-^{\text{NL}}$  holds when the sole sinuous contribution is considered. The upstream vortex front then follows the linear selection mechanism, even though the vortex street downstream of it displays strong nonlinearities, and though it is itself unstable and susceptible to merging events.

## 5.5 Concluding remarks

The linear and nonlinear impulse response of parallel wake flows has been investigated by direct numerical simulation. In the case of a strongly confined periodic wake, it has been shown by direct comparison of the linear and nonlinear wavepacket evolution that the upstream and downstream fronts are both linearly selected, according to the Dee & Langer [7] mechanism. In the case of a weakly confined wake, the wavepacket dynamics were found to be affected by long-wavelength perturbations and instabilities. However, the upstream *vortex front*, isolated by considering the “sinuous” component of the wavepacket only, was shown to be linearly selected. In that case, the vortex street was observed to be irregular and unstable to vortex merging. The drastic reduction of the cross-stream box size to  $L_y = 4.8$  effectively quenched the pairing instability and a regular stable vortex street was obtained. This study has presented the case of a system governed by the Navier–Stokes equations, which is highly unstable towards infinitesimal perturbations, and from which a stable saturated state arises in the form of a fully developed vortex street. The present configuration is the analogue for a real flow of the idealized front dynamics investigated until now in the context of amplitude evolution equations [33, 34, 4, 6, 29]. Nonlinear terms are found to limit the amplitude at some saturation level in the wavepacket core, but have no effect on the wavepacket propagation. The front-velocity selection is thus linear for both leading and trailing edges.

In the case of a weakly confined parallel wake, the situation is somewhat complicated by the vortex-street instability. The existence of a well-defined front traveling at constant velocity is

*a priori* not expected in that case. Indeed, a zero-wavenumber deformation (antisymmetric in vorticity) of the upstream front is observed, which does not seem to be linked directly to a vortex-pairing process. This deformation was checked not to depend on the grid step  $\delta x$  and cannot be attributed to a numerical artifact. It is likely that, in a realistic configuration, the presence of the bluff-body would suppress this deformation. Thus, it seems plausible to base the “vortex” front velocity on the sinuous component of the wavepacket. The application of the procedure shows that the vortex-front velocity is linearly selected also in the weakly confined configuration. Under these restrictions, the linear convective/absolute instability threshold corresponds to the nonlinear convective/absolute instability threshold.

The linear front-velocity selection has been found to take place for *all* values of  $N$  and  $Re$  (see §5.3.2), pertaining to far-wake ( $N = 1, 1.4$ ) as well as near-wake ( $N = 2, 3$ ) basic profiles and covering a relatively large range of advection levels. Therefore, in the family of profiles (5.2), the linear convective/absolute transition should coincide with the nonlinear one. Linear spatio-temporal instability properties have been recently shown [12] to successfully predict transition in non-parallel flows such as wakes. Although the present study is restricted to parallel flow instability, we conjecture that it explains this success qualitatively, as nonlinear effects do not affect the absolute instability threshold.

Front dynamics has previously been investigated in Taylor–Couette [3] and Rayleigh–Bénard [11] systems with a small superimposed throughflow. In such weakly nonlinear cases, an amplitude equation approach is legitimate and one expects to recover the front-velocity selection criterion proposed by Dee & Langer [7]. In the present study, conducted for a shear flow far away from the onset of instability, the same selection criterion has been shown to hold although strongly nonlinear mechanisms have been activated.

### Acknowledgements

The authors would like to warmly thank Pierre Brancher who generously made the numerical code available. We enjoyed many fruitful discussions with the gentle people at LadHyX, in particular with Carlo Cossu, Arnaud Couairon and Patrick Huerre. Thanks are extended to Thérèse Lescuyer and Jack Webert for their kind and efficient assistance. The use of the computational facilities on the Cray C94/98 at IDRIS/CNRS under grant No. 970173 is acknowledged.

## Chapter references

- [1] BRANCHER, P. AND CHOMAZ, J.-M. 1997 Absolute and convective secondary instabilities in spatially periodic shear flows. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 658–661; BRANCHER, P. 1996 Étude numérique des instabilités secondaires de jets. *Ph.D. Thesis*, École Polytechnique, France.
- [2] BRIGGS, R. J. 1964 *Electron-Stream Interaction With Plasmas*. Cambridge, Mass. MIT Press.
- [3] BÜCHEL, P., LÜCKE, M., ROTH, D., SCHMITZ, R. 1996 Pattern selection in the absolutely unstable regime as a nonlinear eigenvalue problem: Taylor vortices in axial flow. *Phys. Rev. E* **53**, 4764–4777.
- [4] CHOMAZ, J.-M. 1992 Absolute and convective instabilities in nonlinear systems. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1931–1934.
- [5] CHOMAZ, J.-M., HUERRE, P. AND REDEKOPP, L. G. 1988 Bifurcations to local and global modes in spatially developing flows. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 25–28.
- [6] COUAIRO, A. AND CHOMAZ, J.-M. 1996 Global instability in fully nonlinear systems. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4015–4018; Couairon, A. 1997 Modes globaux fortement non-linéaires dans les écoulements ouverts. *Ph.D. Thesis*, École Polytechnique, France.
- [7] DEE, G. AND LANGER, J. S. 1983 Propagating pattern selection. *Phys. Rev. Lett.* **50**, 383–386.
- [8] DELBENDE, I., CHOMAZ, J.-M. AND HUERRE, P. 1998 Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response. *J. Fluid Mech.* **355**, 229–254.
- [9] DELFS, J., EHRHARD, J., MEIBURG, E. AND ÖRTEL, H. JR. 1997 Lagrange identification of absolutely unstable regimes in wakes. *Acta Mech.* **122**, 89–97.
- [10] DRAZIN, P. G. AND REID, W. H. 1981 *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- [11] FINEBERG, J. AND STEINBERG, V. 1987 Vortex-front propagation in Rayleigh–Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1332–1335.
- [12] HAMMOND, D. A. AND REDEKOPP, L. G. 1997 Global dynamics of symmetric and asymmetric wakes. *J. Fluid Mech.* **331**, 231–260.
- [13] HANNA, A., SAUL, A. AND SHOWALTER, K. 1982 Detailed studies of propagating fronts in the iodate oxidation of arsenous acid. *J. Am. Chem. Soc.* **104**, 3838–3844.

- [14] HANNEMANN, K. AND OERTEL, H. JR. 1989 Numerical simulation of the absolutely and convectively unstable wake. *J. Fluid Mech.* **199**, 55–88.
- [15] HUERRE, P. AND MONKEWITZ, P. A. 1985 Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.* **159**, 151–168.
- [16] HUERRE, P. AND MONKEWITZ, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473–537.
- [17] JENDOUBI, S. AND STRYKOWSKI, P. J. 1994 Absolute and convective instability of axisymmetric jets with external flow. *Phys. Fluids* **6**(9), 3000–3009.
- [18] KOLMOGOROV, A., PETROVSKY, I. AND PISKUNOV, N. 1937 Investigation of a diffusion equation connected to the growth of materials, and application to a problem in biology. *Bull. Univ. Moscow, Ser. Int. Sec. A* **1**, in *Selected works of A. N. Kolmogorov*, V.M. Tikhomirov (Ed.), Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [19] KOCH, W. 1985 Local instability characteristics and frequency determination of self-excited wake flows. *J. Sound Vib.* **99**, 53–83.
- [20] LE DIZÈS, S., HUERRE, P., CHOMAZ, J.-M. AND MONKEWITZ, P. A. 1996 Linear global modes in spatially developing media. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **354**, 169–212.
- [21] LE GAL, P. AND CROQUETTE, V. 1991 Analyse en temps réel d'un sillage. Congrès SFP 1991, Caen, France. *Bull. SFP* **81**, 29.
- [22] MATHIS, C., PROVANSAL, M. AND BOYER, L. 1984 The Bénard-von Kármán instability: An experimental study near the threshold. *J. Phys. Lett. (France)* **45**, L483–L491; PROVANSAL, M., MATHIS, C. AND BOYER, L. 1987 Bénard-von Kármán instability: transient and forced regimes. *J. Fluid Mech.* **182**, 1–22.
- [23] MELVILLE, W. K. 1983 Wave modulation and breakdown. *J. Fluid Mech.* **128**, 489–506.
- [24] MONKEWITZ, P. A. 1988 The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wakes at low Reynolds numbers. *Phys. Fluids* **31**, 999–1006.
- [25] MONKEWITZ, P. A., HUERRE, P. AND CHOMAZ, J.-M. 1993 Global linear stability analysis of weakly non-parallel shear flows. *J. Fluid Mech.* **251**, 1–20.
- [26] MONKEWITZ, P. A. AND NGUYEN, L. N. 1987 Absolute instability in the near-wake of two-dimensional bluff bodies. *J. Fluids Struct.* **1**, 165–184.
- [27] MONKEWITZ, P. A. AND SOHN, K. D. 1988 Absolute instability in hot jets. *AIAA J.* **26**, 911–916.
- [28] PALFFY-MUHORAY, P., YUAN, H. J., FRISKEN, B. J. AND VAN SAARLOOS, W. in *Non-linear evolution of spatio-temporal structures in dissipative continuous systems*. Eds. F. H. Busse and L. Kramer, (Plenum Press, New-York, 1990).
- [29] PIER, B., HUERRE, P., CHOMAZ, J.-M. AND COUAIRON, A. Selection criteria for soft and steep nonlinear global modes in spatially developing media. *Phys. Fluids*. In press.
- [30] PIERREHUMBERT, R. T. 1984 Local and global baroclinic instability of zonally varying flow. *J. Atmos. Sci.* **41**, 2141–2162.

- [31] PROVANSAL, M., MATHIS, C. AND BOYER, L. 1987 Bénard-von Kármán instability: transient and forced regimes. *J. Fluid Mech.* **182**, 1–22.
- [32] SCHUMM, M., BERGER, E. AND MONKEWITZ, P. A. 1994 Self-excited oscillations in the wake of two-dimensional bluff bodies and their control. *J. Fluid Mech.* **271**, 17–53.
- [33] VAN SAARLOOS, W. 1988 Front propagation into unstable states: Marginal stability as a dynamical mechanism for velocity selection. *Phys. Rev. A* **37**, 211–229.
- [34] VAN SAARLOOS, W. 1989 Front propagation into unstable states. II. Linear versus nonlinear marginal stability and rate of convergence. *Phys. Rev. A* **39**, 6367–6390.
- [35] VINCENT, A. AND MENEGUZZI, M. 1991 The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.* **225**, 1–20.
- [36] WHITHAM, G. B. Linear and nonlinear waves. John Wiley & Sons, 1974.





## Chapitre 6

# Conclusion et perspectives

Cette thèse est une contribution à l'étude des instabilités spatio-temporelles dans les écoulements ouverts. La simulation numérique directe y est employée pour calculer la réponse impulsionnelle des écoulements, ce qui, moyennant une procédure de décomposition et d'analyse des paquets d'ondes générés, donne accès à la nature convective ou absolue de l'instabilité et aux grandeurs qui la caractérisent — fréquences complexes, nombres d'onde complexes et fonctions propres. Deux systèmes ont été étudiés.

Au chapitre 4, on détermine les propriétés convectives/absolues linéaires de l'instabilité dans un modèle de jet/sillage tournant parallèle, le tourbillon de Batchelor (1964). On montre que l'introduction de rotation dans un jet/sillage a un effet de très forte promotion du caractère absolu de l'instabilité, et ce, sur une large gamme de valeurs du paramètre de rotation. Ceci fournit une explication qualitative du phénomène d'éclatement tourbillonnaire qui affecte ce type d'écoulements, mais un désaccord quantitatif subsiste. Cette étude permet en outre certaines prévisions sur la structure des sillages tournants axisymétriques, comme les sillages d'objets en rotation.

Au chapitre 5, la procédure est mise en œuvre dans le cadre des sillages plans, toujours dans l'approximation d'écoulements parallèles. Dans ce cas, on étudie en outre l'effet des termes non linéaires responsables de la saturation du paquet d'ondes. On montre que, bien que fortes, ces non-linéarités n'influent pas sur la vitesse de propagation des fronts qui bornent spatialement le paquet d'ondes. De ce point de vue, il semble donc légitime de s'appuyer sur les propriétés linéaires de stabilité pour effectuer des prédictions concernant le seuil d'apparition de l'allée tourbillonnaire de Bénard-Kármán dans les sillages, ainsi que la fréquence associée.

Dans la suite, on résume les principaux résultats obtenus, et on en évoque des prolongements possibles.

## Dynamique des perturbations dans les jets/sillages tournants

### Analyse linéaire

Le phénomène d'éclatement tourbillonnaire qui a motivé ce travail défie les interprétations simples à la fois par la diversité de ses manifestations et par la complexité de son comportement en fonction des paramètres de l'écoulement, d'ailleurs non encore pleinement identifiés... Selon la première hypothèse formulée par Benjamin (1962), l'éclatement serait une sorte de ressaut hydraulique entre un écoulement amont super-critique et un écoulement aval sous-critique. Les études visant à valider cette hypothèse ont toujours porté sur des ondes neutres, comme celles qui sont responsables des ressauts. Par ailleurs, de nombreux travaux ont été dévolus à l'instabilité des jets/sillages tournants, en particulier à celle du tourbillon de Batchelor (Lessen *et al.*, 1974). La présente contribution se situe au carrefour de ces deux voies, en ce que l'hypothèse de ressaut est ici testée sur les ondes d'instabilité qui se développent dans le tourbillon de Batchelor. Le cadre naturel d'une telle étude est celui des instabilités convectives/absolues (Huerre & Monkewitz, 1990).

La méthode utilisée consiste à calculer par *simulation numérique directe* l'évolution d'une petite perturbation initialement localisée au sein du tourbillon de Batchelor, régie par les équations de Navier-Stokes linéarisées au voisinage de cet écoulement de base. La perturbation donne naissance à un paquet d'ondes qui se développe dans le temps et l'espace. Sa décomposition en modes de nombre d'onde azimutal  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  permet de déterminer mode par mode les caractéristiques de l'instabilité sur chaque rayon spatio-temporel  $x/t = \text{cte}$  issu de la perturbation initiale. En particulier, quand l'écoulement est instable, les vitesses des deux fronts du paquet d'ondes générés sont déterminées. Elles bornent inférieurement et supérieurement la vitesse de groupe des ondes instables, et renseignent sur la vitesse de propagation de l'énergie, donc de l'information<sup>1</sup> le long du jet tournant.

On démontre par cette procédure que l'introduction d'une rotation modérée dans le système élargit considérablement l'éventail des vitesses de propagation de l'énergie des perturbations. Pour un jet tournant sans écoulement axial extérieur, leur vitesse minimale décroît rapidement vers zéro quand on augmente le taux de rotation, situation propice à une bifurcation de l'écoulement. Les modes instables de vitesses de groupe les plus faibles sont des modes hélicoïdaux  $m = -2, \dots, -5$  et dépendent du taux de rotation. Si l'on peut dire que l'introduction de rotation dans un jet tend à le rendre absolument instable, il est encore prématuré pour prétendre relier le phénomène d'éclatement tourbillonnaire, fondamentalement axisymétrique ( $m = 0$ ), à cette propriété.

Une des originalités de la méthode employée est qu'elle permet d'obtenir en une seule simulation les propriétés spatio-temporelles relatives à tous les écoulements que l'on peut obtenir par changement de référentiel galiléen  $x \rightarrow x - at$  et/ou symétrie  $x \rightarrow -x$  ( $x$  est la direction de l'écoulement,  $t$  le temps et  $a$  une constante). En particulier, dans le cas d'un sillage axisymétrique, la mise en rotation de l'écoulement particularise le mode  $m = -1$  comme mode absolu dominant, et ce sur une large gamme du paramètre de rotation. On prévoit ainsi que la dynamique du sillage d'objets tournants doit être dominée par un tourbillon hélicoïdal simple contra-rotatif. Naturellement, il faut s'assurer que le sillage tournant de Batchelor est bien pertinent pour décrire l'écoulement qui règne effectivement à l'aval d'un tel objet – on sait par exemple que, dans le cas de la sphère *sans rotation*, l'état de base n'est même pas axisymétrique (Provansal & Ormières, 1998) et le sillage tel qu'il est décrit par le modèle de Batchelor est alors inadapté. Par ailleurs, la structure tourbillonnaire intense observée à l'aval de certains états éclatés (cf. figure 4.8) pourrait être liée à la présence d'une zone d'instabilité absolue du mode  $m = -1$  à l'aval de l'éclatement où l'écoulement présente des caractéristiques de sillage tourbillonnaire. Cette conjecture est *a priori* difficile à tester car cet écoulement est mal caractérisé, l'état éclaté étant souvent générateur de fortes instationnarités.

---

1. transmise de manière non évanescence

Perspectives — Quand on considère les études de l'instabilité convective/absolue du tourbillon de Batchelor et d'autres modèles de jet/sillage tournant (Loiseleux *et al.*, 1998 ; Loiseleux & Delbende), il apparaît clairement qu'il reste un pas à franchir pour prétendre interpréter le phénomène d'éclatement tourbillonnaire. On propose ici plusieurs directions d'investigation qui pourraient aider à réduire ce fossé.

Une étude numérique de Spall & Gatski (1991) a montré que le tourbillon de Batchelor éclate effectivement à condition qu'on lui applique un gradient adverse de pression suffisamment fort. Il serait intéressant d'introduire ce gradient *via* l'écoulement de base, le milieu devenant alors inhomogène, afin d'étudier la déformation des modes d'instabilité et des faisceaux spatio-temporels sous-jacents. Cette étude devrait aider à élucider le lien supposé entre instabilité primaire de jet tournant et éclatement tourbillonnaire.

Il serait par ailleurs instructif, dans un dispositif expérimental de jet en rotation avec contre-courant analogue à celui qu'ont utilisé Strykowski & Niccum (1991) pour le jet sans rotation, de dépasser les valeurs de contre-courant pour lesquelles les modes d'instabilité deviennent instables absolus. L'étude de la transition convectif/absolu provoquée par ce contre-courant devrait permettre de déterminer si la bifurcation et l'évolution de l'écoulement vers un autre état se fait par le phénomène d'éclatement tourbillonnaire, ou non.

Enfin, l'étude expérimentale du sillage d'un objet tournant mérite d'être entreprise, tant du point de vue de la caractérisation de l'écoulement de base créé par l'objet que de celui de la dynamique des instabilités générées. Ces travaux pourraient permettre de valider la prédiction faite ici d'une structure hélicoïdale contra-rotative synchronisée pour le sillage.

## Dynamique des perturbations dans les sillages plans Analyse linéaire et non linéaire

La double allée tourbillonnaire de von Kármán est la manifestation spectaculaire de la déstabilisation globale des écoulements de sillage d'objets non profilés. Cette dynamique trouve son origine dans la présence, juste à l'aval de l'objet, d'une zone d'instabilité absolue, où, localement, des ondes de vitesse de groupe nulle croissent et jouent le rôle d'excitateur pour tout le sillage. Cette hypothèse a été pleinement confirmée par la prédiction théorique de la fréquence des oscillations par Hammond & Redekopp (1997) : ces auteurs construisent le mode global le plus instable à partir des propriétés *linéaires* locales d'instabilité dans l'hypothèse d'un écoulement faiblement inhomogène. Cette procédure, menée dans le cadre du sillage d'une plaque plane, conduit à prédire la fréquence d'oscillations et le seuil d'instabilité avec une précision remarquable.

En dessous du seuil, le sillage présente un aspect stationnaire, mais est en fait très instable vis-à-vis des perturbations (cf. figure 5.2). Celles-ci se développent sous la forme de paquets d'ondes qui finissent par quitter le milieu : le sillage légèrement sous-critique est globalement stable, mais localement très instable. Lors de la déstabilisation du mode global, les non-linéarités sont *a priori* suffisamment fortes pour que la propagation de l'énergie dans le système ne soit plus imposée par l'instabilité linéaire de l'état de base (critère de sélection linéaire de Dee & Langer, 1983), mais par le paquet d'ondes saturées lui-même (sélection non linéaire, van Saarloos, 1989). Ce dernier scénario (sélection non linéaire) est courant dans d'autres domaines tels que les cristaux liquides, les fronts de flamme, les fronts de réaction chimique... On ne peut, dans ce cas, exploiter les résultats basés sur une théorie linéaire que pour borner le seuil d'instabilité, sa détermination précise devenant impossible. Contrairement au cas étudiés ces dernières années, écoulements de Taylor-Couette (Büchel *et al.*, 1991) ou de Rayleigh-Bénard (Fineberg & Steinberg, 1987) avec faible advection, pour lesquels l'écoulement est déplacé juste au-dessus de son seuil d'instabilité

et peut être décrit par une équation d'amplitude faiblement non linéaire, les écoulements de sillage plan sont fortement instables à la transition vers l'état oscillant. Le but de cette partie est de montrer que, dans le cas des sillages plans, recourir aux théories d'instabilité *linéaire* est quand même justifié.

Comme pour le jet tournant, la réponse impulsionnelle régie par les équations de Navier–Stokes linéarisées au voisinage d'un écoulement de base parallèle<sup>2</sup>, ici de profils de sillages plans élaborés par Monkewitz & Nguyen (1987), est simulée directement. Les propriétés de l'instabilité linéaire sont ainsi déterminées et comparées avec les résultats de l'étude de la relation de dispersion (Monkewitz, 1989). Les deux approches diffèrent de moins de 1%, ce qui permet de valider la procédure numérique.

On simule ensuite la réponse impulsionnelle *non linéaire* de ces mêmes sillages régie par les équations de Navier–Stokes où les termes non linéaires sont inclus, mais toujours en négligeant la diffusion du sillage de base. Par cette formulation, il est possible de comparer directement les résultats des simulations linéarisées et ceux des simulations pleinement non linéaires. On peut ainsi évaluer l'impact des effets non linéaires sur la dynamique spatio-temporelle de l'instabilité et caractériser cette dernière en termes d'instabilité non linéaire convective/absolue (Chomaz, 1992).

Deux configurations ont été particulièrement étudiées. La première est celle d'un sillage dit «fortement confiné», périodique dans la direction perpendiculaire à l'écoulement avec une période  $L_y$  relativement faible ( $L_y/R = 4.8$  où  $R$  est la demi-largeur du sillage). Pour le nombre de Reynolds adopté  $Re^{(2R)} = 40$ , ce système est fortement instable. Néanmoins, le seul effet des termes non linéaires est un effet de saturation sur l'amplitude du paquet d'ondes, *qui n'a aucune influence* sur le comportement des fronts qui séparent le paquet d'ondes saturé de l'écoulement de base instable. La nature convective/absolue de l'instabilité est donc conservée quand on passe du régime linéaire au régime non linéaire.

La deuxième configuration considérée est celle d'un sillage plus faiblement confiné transversalement ( $L_y/R = 25.6$ ). Dans ce cas, la dynamique du paquet d'ondes est plus complexe, mais est analogue au cas précédent si l'on prend en compte la composante sinueuse de la perturbation — sa composante variqueuse se trouvant être le siège de modes de très grande longueur d'ondes, vraisemblablement non pertinents dans un écoulement réel inhomogène. Ce résultat confirme que l'on peut faire appel aux propriétés linéaires d'instabilité pour effectuer des prédictions de seuil de bifurcation, aucun effet non linéaire ne venant modifier la dynamique des fronts.

Perspectives — Ce type d'étude apparaît donc comme un passage nécessaire entre une étude linéaire d'instabilité et son exploitation dans le cadre fortement non linéaire. Il faut toutefois mentionner que, contrairement à la réponse impulsionnelle linéaire, la réponse impulsionnelle non linéaire n'est pour l'instant caractérisée que géométriquement par la trajectoire de ses fronts. Seuls des cas simples se prêtent à une étude quantitative: ce sont ceux où, comme pour le sillage confiné, l'état saturé émergent de l'instabilité primaire est stable. En revanche, l'étude du sillage faiblement confiné a révélé un problème d'instabilité de l'allée tourbillonnaire. L'existence d'un front de forme fixée progressant dans l'écoulement à vitesse constante n'est a priori plus attendue dans ce cas.<sup>3</sup> Des situations plus complexes peuvent apparaître, pour lesquelles l'état saturé est très fortement instable vis-à-vis d'instabilités secondaires qui détruisent complètement sa structure: le cas d'une couche de mélange en est un exemple (cf. sa réponse impulsionnelle non linéaire, Brancher, 1996) car l'allée de tourbillons co-rotatifs saturés est fortement instable vis-à-vis de l'appariement (pairing). On peut imaginer des cas encore plus complexes dans lequel l'écoulement se déstabilise par plusieurs modes d'instabilité de structure différente, comme pour

2. La diffusion de l'écoulement de base est gelée durant toute la simulation.

3. Il semble néanmoins que, dans le cas présent, le front amont du paquet d'ondes ne soit pas affecté par les instabilités secondaires qui se produisent plus loin en aval, et se propage donc à vitesse constante.

le jet tournant. Il faudrait alors considérer l'effet de l'interaction non linéaire entre modes sur la propagation de la réponse impulsionnelle...

L'origine la plus probable des instabilités secondaires rencontrées dans le cas du sillage faiblement confiné réside dans le parallélisme que l'on impose à l'écoulement de base. Il serait instructif d'adopter un sillage de base non parallèle, obtenu par exemple par simulation spatiale où la symétrie variqueuse serait forcée, inhibant ainsi le développement de l'allée tourbillonnaire. On peut alors s'attendre à ce que la réponse impulsionnelle non linéaire de ce sillage inhomogène ne présente pas d'instabilité secondaire, ce qui faciliterait grandement la comparaison des dynamiques linéaires et non linéaires, en particulier celles du front amont.

Plus généralement, pour des systèmes hydrodynamiques ouverts complexes tels que les sillages confinés dans le sens de l'envergure, les sillages avec surface libre, les couches limites de tous types, on peut substituer à l'étude de la relation de dispersion, extrêmement ardue, le calcul par simulation numérique directe linéaire et non linéaire de la réponse impulsionnelle. L'intérêt réside dans l'utilisation de codes numériques souvent préexistants, adaptés à la configuration expérimentale étudiée et validés, au service de l'interprétation de la dynamique de ces écoulements par la théorie locale des instabilités spatio-temporelles. Cette méthode, qui se fonde sur l'examen de fronts de perturbations, requiert par ailleurs une excellente précision... et donc une formulation numérique très soignée.<sup>4</sup>

---

4. Les discrétisations en temps et en espace peuvent considérablement altérer les propriétés spatio-temporelles des systèmes instables (Cossu & Loiseleux, 1998).



## Références bibliographiques de la conclusion

- BATCHELOR, G. K. 1964 Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.* **20**, 645–658.
- BENJAMIN, T. B. 1962 Theory of the vortex breakdown phenomenon. *J. Fluid Mech.* **14**, 529–551.
- BRANCHER, P. 1996 Étude numérique des instabilités secondaires de jets. Thèse de l'École Polytechnique, France.
- BÜCHEL, P., LÜCKE, M., ROTH, D. & SCHMITZ, R. 1996 Pattern selection in the absolutely unstable regime as a nonlinear eigenvalue problem: Taylor vortices in axial flow. *Phys. Rev. E* **53**, 4764–4777.
- CHOMAZ, J.-M. 1992 Absolute and convective instabilities in nonlinear systems. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1931–1934.
- COSSU, C. & LOISELEUX, T. 1998 On the convective and absolute nature of instabilities in finite difference numerical simulations of open flows. *J. Comp. Phys.* **144**(1), 98–108.
- DEE, G. AND LANGER, J. S. 1983 Propagating pattern selection. *Phys. Rev. Lett.* **50**, 383–386.
- FINEBERG, J. & STEINBERG, V. 1987 Vortex-front propagation in Rayleigh–Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1332–1335.
- HAMMOND, D. A. & REDEKOPP, L. G. 1997 Global dynamics of symmetric and asymmetric wakes. *J. Fluid Mech.* **331**, 231–260.
- HUERRE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473–537.
- LESSEN, M., SINGH, P. J. & PAILLET, F. 1974 The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory. *J. Fluid Mech.* **63**, 753–763.
- LOISELEUX, T., CHOMAZ, J.-M. & HUERRE, P. 1998 The effect of swirl on jets and wakes: Linear instability of the Rankine vortex with axial flow. *Phys. Fluids* **10**(5), 1120–1134.
- LOISELEUX, T. & DELBENDE, I. Absolute and convective instabilities of a swirling jet shear layer. En préparation.
- MONKEWITZ, P. A. & NGUYEN, L. N. 1987 Absolute instability in the near-wake of two-dimensional bluff bodies. *J. Fluids Struct.* **1**, 165–184.
- PROVANSAL, M. & ORMIÈRES, D. 1998 Étude expérimentale du sillage d'une sphère. *C. R. Acad. Sci. Paris* **326**, Iib. À paraître.
- SPALL, R. E. & GATSKI, T. B. 1991 A computational study of the topology of vortex breakdown. *Proc. R. Soc. London A* **435**, 321–337.
- STRYKOWSKI, P. J. & NICCUM, D. L. 1991 The stability of countercurrent mixing layers in circular jets. *J. Fluid Mech.* **227**, 309–343.
- VAN SAARLOOS, W. 1989 Front propagation into unstable states. II. Linear versus nonlinear marginal stability and rate of convergence. *Phys. Rev. A* **39**, 6367–6390.







# Réponse impulsionnelle dans les jets tournants et les sillages plans : analyse spatio-temporelle par simulation numérique directe

La dynamique des écoulements cisailés ouverts (amplificateurs de bruit ou oscillateurs auto-entretenus) dépend fortement du caractère convectif ou absolu des instabilités qui s'y développent. L'objectif de cette thèse est d'étudier, par une nouvelle méthode mettant en œuvre la simulation numérique directe des équations de Navier–Stokes, l'évolution de perturbations initialement localisées au sein de ces écoulements pour extraire les propriétés spatio-temporelles de leur instabilité, en particulier leur nature convective/absolue. Deux familles d'écoulements sont considérées successivement. Pour la famille de jets/sillages tournants parallèles de Batchelor, on montre la forte promotion du caractère absolu de l'instabilité linéaire par l'introduction de la rotation, pour tous les modes azimutaux contra-rotatifs instables. Pour une famille de sillages plans parallèles, la procédure permet de retrouver les propriétés spatio-temporelles linéaires de l'instabilité. On montre en outre que le caractère convectif/absolu linéaire de l'instabilité est conservé lorsque l'on passe au régime non linéaire. Ce résultat est important si l'on veut prédire la fréquence et le seuil d'instabilité de l'allée de von Kármán, fortement non linéaire, à l'aide de propriétés locales d'instabilité *linéaire*.

**Mots-clés :** écoulements cisailés ouverts, instabilités convective/absolue, réponse impulsionnelle, simulation numérique directe, jets tournants, sillages tournants, sillages plans.

## Impulse response in swirling jets and plane wakes: spatiotemporal analysis by direct numerical simulation

The dynamics of open shear flows (noise amplifiers or self-sustained oscillators) strongly depends on the convective or absolute nature of their instability. The goal of this dissertation is to investigate the evolution of initially localized disturbances in open shear flows by a new method involving direct numerical simulations of the Navier–Stokes equations in order to extract their spatiotemporal instability properties, in particular their convective/absolute nature. Two flow families have been considered. For the Batchelor family of parallel swirling jets/wakes, the absolute instability of all counter-rotating unstable azimuthal modes is shown to be strongly promoted in the linearized approximation. For a family of parallel plane wakes, the procedure also leads to the retrieval of the linear spatiotemporal instability properties. The convective/absolute nature of the instability is then shown to be preserved from the linear to nonlinear régime. This result is important in the prediction, *via local linear* instability properties, of the frequency and instability threshold for the strongly nonlinear von Kármán vortex street.

**Keywords:** open shear flows, convective/absolute instabilities, impulse response, direct numerical simulation, swirling jets, swirling wakes, plane wakes.