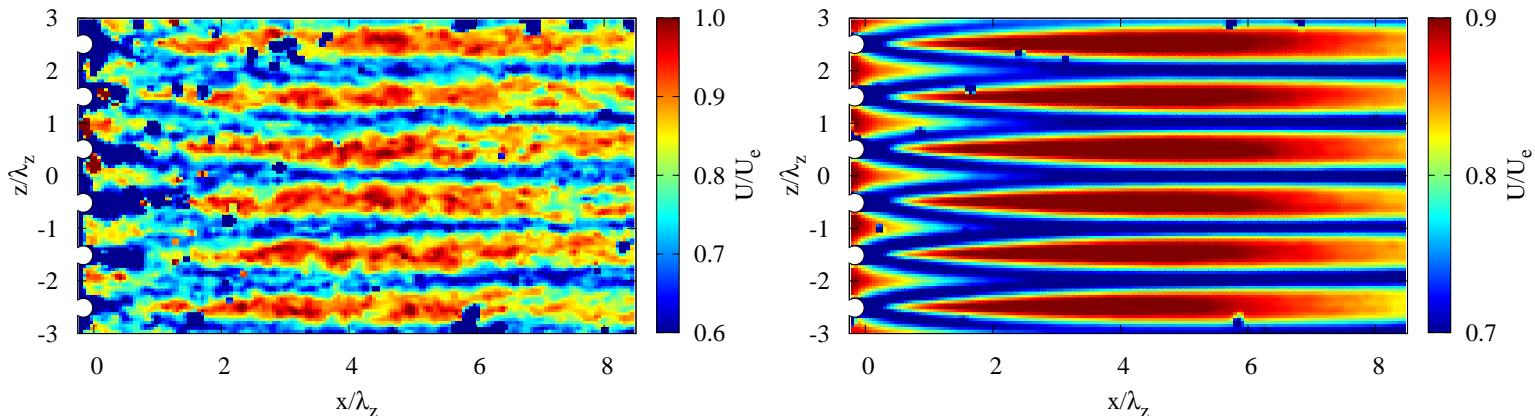


École Polytechnique  
 Laboratoire d'Hydrodynamique (LadHyX)  
 Thèse présentée pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**  
 spécialité : mécanique

par

GRÉGORY PUJALS

Perturbations optimales  
 dans les écoulements de paroi turbulents  
 et application au contrôle de décollement



Soutenue le 02 décembre 2009 devant le jury composé de:

M. Alessandro Bottaro	Président du jury	DICAT, Università di Genova, Italy
M. Olivier Cadot	Rapporteur	DFA, ENSTA, Palaiseau
M. Carlo Cossu	Directeur de thèse	LadHyX, Ecole Polytechnique, Palaiseau
M. Sébastien Depardon	Tuteur industriel	PSA Peugeot-Citroën, Vélizy-Villacoublay
M. Peter J. Schmid	Examinateur	LadHyX, Ecole Polytechnique, Palaiseau
Mme Laurette Tuckerman	Rapporteur	PMMH, ESPCI, Paris



GRÉGORY PUJALS

Perturbations optimales  
dans les écoulements de paroi turbulents  
et application au contrôle de décollement



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	i
<b>1 Motivations</b>	<b>1</b>
1 Contexte industriel . . . . .	1
2 Contrôle d'écoulements . . . . .	2
3 Lift-up, streaks et vaccination d'une couche limite laminaire . . . . .	3
4 But de cette étude . . . . .	4
<b>2 Perturbations optimales linéaires</b>	<b>7</b>
1 Non normalité et croissances transitoires . . . . .	7
2 Petites perturbations et opérateur d'Orr-Sommerfeld & Squire . . . . .	8
3 Croissances optimales dans les écoulements laminaires . . . . .	9
<b>3 Ecoulements turbulents de paroi</b>	<b>11</b>
1 Les équations RANS et l'hypothèse de Boussinesq . . . . .	11
2 Equations linéarisées pour des petites perturbations cohérentes d'un écoulement turbulent de paroi . . . . .	12
3 Ecoulement de base parallèle et théorie classique . . . . .	12
4 Modélisations utilisées . . . . .	14
<b>4 Les perturbations optimales dans l'écoulement de Poiseuille plan turbulent</b>	<b>17</b>
1 Ecoulement de base . . . . .	17
2 L'approche de Butler & Farrell . . . . .	18
3 L'approche de del Álamo & Jiménez, de l'importance de la viscosité turbulente $\nu_t$ . . . . .	19
4 Reformulation de l'opérateur de d'Orr-Sommerfeld & Squire généralisé . . . . .	20
<b>5 Les perturbations optimales dans une couche limite turbulente</b>	<b>25</b>
1 L'écoulement de base . . . . .	25
2 Formulation . . . . .	26
3 Perturbations optimales à nombre de Reynolds fixé . . . . .	26
4 Influence du nombre de Reynolds . . . . .	27
5 Discussion . . . . .	30
<b>6 Forçage expérimental de streaks cohérents turbulents</b>	<b>33</b>
1 Motivations . . . . .	33
2 Soufflerie BREATH et moyens de mesure . . . . .	33
3 Ecoulement de base . . . . .	34

4	Eléments de rugosité . . . . .	35
5	Streaks cohérents expérimentaux . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>41</b>
<b>Annexes</b>		<b>47</b>
	Annexe A: Méthode numérique pour le calcul des perturbations optimales . . . . .	47
	Annexe B: Description du système PIV . . . . .	49
	Annexe C: Méthode de prolongement du profil de vitesse moyenne pour un écoulement turbulent de paroi . . . . .	51
	Annexe D: Mesure de l'amplitude des streaks cohérents . . . . .	53
<b>Bibliographie</b>		<b>55</b>
<b>Articles</b>		<b>63</b>
A note on optimal transient growth in turbulent channel flows		65
Optimal transient growth and very large scale structures in turbulent boundary layers		79
Optimal transient growth and very large-scale structures in zero-pressure gradient turbulent boundary layers		101
Drag reduction of a 3D bluff body using coherent streamwise streaks		115

# Chapitre 1

## Motivations

### 1 Contexte industriel

Il est aujourd’hui admis que l’émission de polluants, tels que les oxydes d’azote (essentiellement  $NO$  et  $NO_2$ ), et de gaz à effet de serre ( $CO_2$ ), a un effet néfaste sur l’équilibre de l’écosystème terrestre (réchauffement climatique). C’est dans ce contexte que les états signataires du protocole de Kyoto (1997) se sont engagés à mettre en place des mécanismes pour réduire d’ici 2012 ces émissions de 5.2% par rapport au niveau de 1990. Même si la part du parc automobile ne représente que 5–6% de ces émissions, les constructeurs européens se sont engagés dans le CAFE (Corporate Averaged Fuel Emission) dont l’objectif visé est de réduire celles-ci à  $120g/km$  en 2012. A titre d’information, la moyenne d’émission de  $CO_2$  en l’an 2000 était de  $171g/km$ , en 2008 cette moyenne est descendue à  $140g/km$ .

Les efforts aérodynamiques sont responsables de plus de 70% de la consommation au-delà de  $90km/h$  et d’après Hucho (1998) une réduction de 10% de la traînée aérodynamique (la force qui s’oppose directement à l’avancée du véhicule) permettrait de réduire la consommation sur autoroute de près de 5% et ainsi de limiter les émissions de polluants. En aérodynamique externe, on distingue deux types de traînée : si l’écoulement présente un décollement (i.e. zone de basse pression), le déséquilibre entre la pression exercée sur l’avant et sur l’arrière du corps induit une traînée de pression. Si au contraire l’écoulement reste attaché, les frottements visqueux du fluide sur la paroi sont responsables de la traînée visqueuse. En raison de la topologie de l’écoulement autour d’une automobile ; qui présente de nombreux décollements ; la traînée de pression représente près de 80% de la traînée totale.

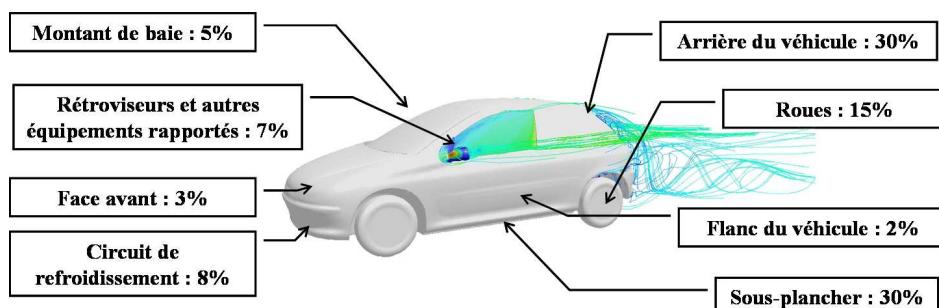


FIG. 1.1. Contributions relatives de chaque région du véhicule à la traînée globale. Source interne PSA.

Les travaux des aérodynamiciens ont permis d'isoler les principales sources de traînée ainsi que leur contribution à la traînée globale (voir Fig. 1.1). S'il est possible de réduire la contribution de certains organes, la marge de progression reste faible et c'est en travaillant sur la forme supérieure, et notamment sur la forme arrière, que l'on peut espérer obtenir une réduction significative.

Fort de ces observations, les grands principes de l'optimisation de forme se sont généralisés et les silhouettes des voitures ont commencé à changer. C'est ainsi qu'au cours des années 70 et 80 le coefficient de traînée  $C_d$  est passé de 0.44 à 0.3 (voir figure 1.2). Toutefois, l'application stricte de l'ensemble de ces principes se heurte à deux inconvénients majeurs. En premier lieu, l'optimisation de forme étant fondée sur la physique de l'écoulement, cela conduit à une uniformisation des lignes des véhicules. Ceci est très préjudiciable quand on sait que la ligne d'une voiture est un élément de séduction déterminant lors de l'achat. D'autre part, dans bien des cas, ce type d'optimisation s'oppose à des critères d'ordre plus pratiques tels que l'habitabilité intérieure, d'ordre économique ou qui risquent de pénaliser le compromis interprétations. Les limites de l'optimisation de forme sont donc entièrement dictées par des impératifs commerciaux : la recherche des performances aérodynamiques ne doit pas se faire au détriment de l'habitabilité, de la convivialité. Cela diminue d'autant le nombre de leviers sur lesquels on peut agir, tandis que les leviers restants ne doivent en aucun cas dicter la silhouette sous peine d'aboutir à une automobile sans réelle personnalité. C'est pourquoi les constructeurs sont à la recherche de nouvelles approches et ont commencé à développer des solutions de contrôle d'écoulement.

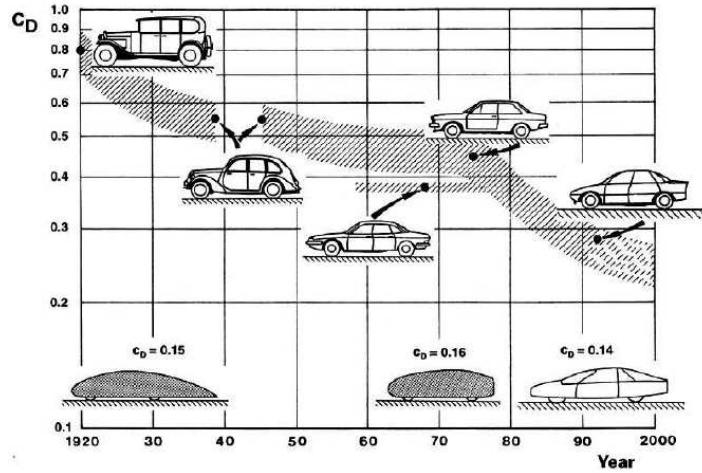


FIG. 1.2. Evolution du coefficient de traînée  $C_d$  au cours des dernières années. D'après Hucho (1998)

## 2 Contrôle d'écoulements

Le contrôle d'un écoulement a pour but d'en modifier les propriétés afin d'améliorer les performances aérodynamiques globales. Cela se fait en pratique grâce à des actionneurs qui perturbent localement l'écoulement de façon à induire une modification globale. On distingue deux types d'approches : le contrôle passif et le contrôle actif (en boucle fermée ou ouverte).

La première approche de contrôle, le contrôle passif, consiste à perturber l'écoulement par le biais d'appendices immobiles induisant localement des perturbations dans l'écoulement, ce qui différencie cette approche de l'optimisation de forme qui elle est une approche globale. Ce type de dispositif fonctionne sans apport d'énergie. Lorsque l'actionneur nécessite une source d'énergie pour fonctionner, on parle de contrôle actif. Suivant le type d'actionneur utilisé, on peut appliquer une ou plusieurs consignes, habituellement d'amplitude et/ou de fréquence. Le contrôle est alors dit en boucle ouverte si la consigne est déterminée *a priori*. L'inconvénient majeur de cette approche réside, bien entendu, dans l'utilisation d'une source d'alimentation auquel cas le rendement du dispositif est un paramètre primordial. Dans le cadre du contrôle actif en boucle fermée, la consigne est adaptée à l'écoulement par le biais de capteurs. Ce dernier type de contrôle, s'il semble être le plus efficace, est aussi le plus complexe à implémenter.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés au contrôle passif, approche qui reste la plus aisée à utiliser expérimentalement et celle qui pourrait vraisemblablement être mise en œuvre avec des coûts raisonnables dans un futur proche, avec pour objectif de lutter contre le décollement qui peut subvenir à l'arrière d'un véhicule.

### 3 Lift-up, streaks et vaccination d'une couche limite laminaire

Les écoulements cisaillés ont la capacité d'amplifier certaines perturbations privilégiées. Ainsi, Moffatt (1967) et Landahl (1980), parmi d'autres, ont montré que la présence de tourbillons contra-rotatifs longitudinaux dans un tel écoulement induit une perturbation longitudinale de vitesse appelée streak. Le mécanisme associé, appelé effet lift-up, est le suivant : du fluide rapide issu des couches extérieures de l'écoulement est transféré vers la paroi tandis que du fluide lent est transféré des zones voisines de la paroi vers les couches externes. Ceci conduit à la création d'une alternance de streaks rapides et de streaks lents.

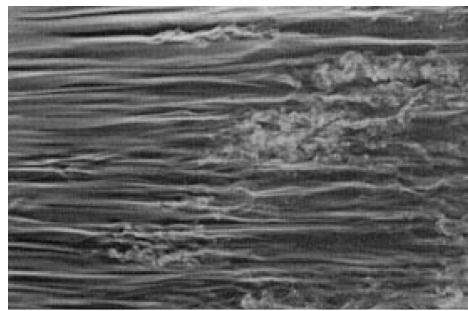


FIG. 1.3. Streaks présents dans une couche limite en phase de transisition. D'après Matsubara & Alfredsson (2001).

Des streaks sont observés dans les couches limite soumises à un taux de turbulence élevé (Matsubara & Alfredsson (2001), cf. figure 1.3). Ils sont alors responsables de la transition souscritique vers la turbulence dès lors que leur amplitude dépasse une valeur critique (Andersson *et al.*, 2001).

Les études de perturbations optimales linéaires montrent que si la forme des tourbillons introduits dans l'écoulement est optimisée, alors l'énergie cinétique contenue dans les streaks peut très grande comparée à l'énergie cinétique contenue dans les tourbillons initiaux (comme nous le verrons plus tard dans ce rapport, elle est de l'ordre du carré du nombre de Reynolds).

Cette très forte croissance a récemment été mise à profit par Fransson *et al.* (2006) pour retarder la transition vers la turbulence d'une couche limite de Blasius. Dans cette étude expérimentale, des éléments de rugosité cylindriques dimensionnés de façon à produire ces tourbillons optimaux sont placés dans l'écoulement amont. Les streaks qui s'en suivent sont amplifiés par effet lift-up au point de modifier à l'ordre dominant l'écoulement de base (i.e. la couche limite) le rendant ainsi plus résistant face à des perturbations qui provoqueraient, en l'absence de contrôle, sa transition (voir une illustration sur la figure 1.4). Ainsi, les mêmes structures qui, dans d'autres circonstances, sont à l'origine de la transition sont ici utilisées afin de retarder cette transition via une “vaccination” de l'écoulement de base.

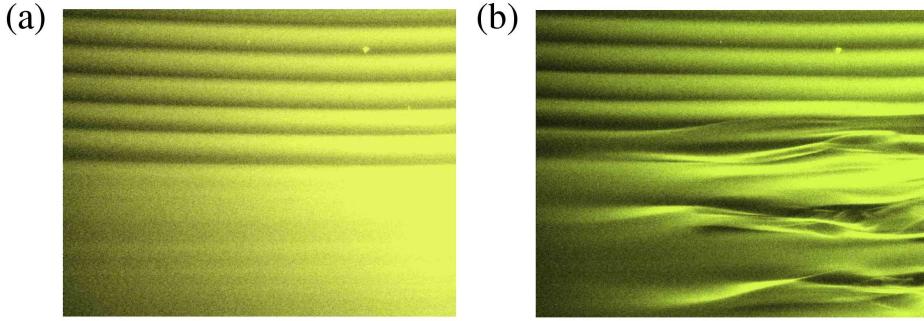


FIG. 1.4. Contrôle de la transition d'une couche limite de Blasius grâce à des streaks optimaux. Sur les deux figures, les streaks optimaux sont forcés sur la partie supérieure de l'image. (a) La transition n'est pas forcée et la couche limite reste laminaire (partie basse de l'image) tandis que des streaks stables sont observés dans la partie supérieure. (b) Le forçage est mis en route et la transition a lieu (partie basse de l'image). L'écoulement contrôlé reste organisé. D'après Fransson *et al.* (2006).

Les avantages d'une telle méthode de contrôle sont nombreux. En premier lieu, cette méthode repose sur l'introduction de perturbations qui sont fortement amplifiées par l'écoulement lui-même. L'amplitude des perturbations introduites artificiellement en est alors minimisée. De plus, cette approche passive requiert l'utilisation d'appendices extrêmement simples à réaliser, à mettre en œuvre : des cylindres dont la hauteur et le diamètre constituent les paramètres dimensionnants. Enfin, les actionneurs sont placés en amont de la zone à contrôler et non pas distribués sur l'ensemble de celle-ci, ce qui rend l'implémentation de ce type de contrôle moins onéreuse.

## 4 But de cette étude

Les écoulements rencontrés en aérodynamique automobile externe sont pleinement turbulents. Utiliser les streaks optimaux laminaires afin de relaminariser les écoulements semble *a priori* difficile à réaliser en raison des grands nombres de Reynolds et du niveau important de perturbations externes. En outre, le gain associé à une telle approche risque d'être très relatif puisque cela permettrait au mieux de réduire la traînée visqueuse, qui ne contribue que très peu à la traînée totale. La principale question qui motive cette thèse est alors la suivante : **peut-on manipuler efficacement les couches limite turbulentes avec des streaks ? Est-il notamment possible de retarder les décollements avec une telle approche ?**

Pour répondre à ces questions qui sont d'intérêt à la fois académique et industriel, il est nécessaire de répondre à des questions intermédiaires qui vont structurer cette thèse. La première

de ces questions est : **les streaks sont-ils amplifiés dans les écoulements turbulents de paroi ? Si oui, quelle est leur amplification maximale ? Quelles sont les échelles et la forme des perturbations amplifiées ?** De façon analogue au cas laminaire, les streaks sont des structures naturellement présentes dans les écoulements turbulents (voir figure 1.5) ; ceci est une première indication du fait qu'ils peuvent y être amplifiés. Au plus proche de la paroi, dans la couche visqueuse (i.e.  $y^+ \leq 100$ ) on a observé très tôt des streaks dont les dimensions sont de l'ordre de  $lx^+ \times lz^+ = 1000 \times 100$  (Kline *et al.*, 1967; Smith & Metzler, 1983) dont on pense qu'ils jouent un rôle prépondérant dans le mécanisme de production et d'entretien de la turbulence (Jiménez & Moin, 1991; Hamilton *et al.*, 1995; Waleffe, 1995). Plus récemment, la présence de structures à grande échelle a été mise à jour dans les couches externes des écoulements de paroi turbulents (Jimenez, 1998; Tomkins & Adrian, 2003; Hutchins & Marusic, 2007a). Celles-ci ont des dimensions de l'ordre de l'épaisseur de la couche cisaillée  $\delta$  et semblent contribuer activement à la dynamique des zones plus proches de la paroi (Hoyas & Jiménez, 2006).

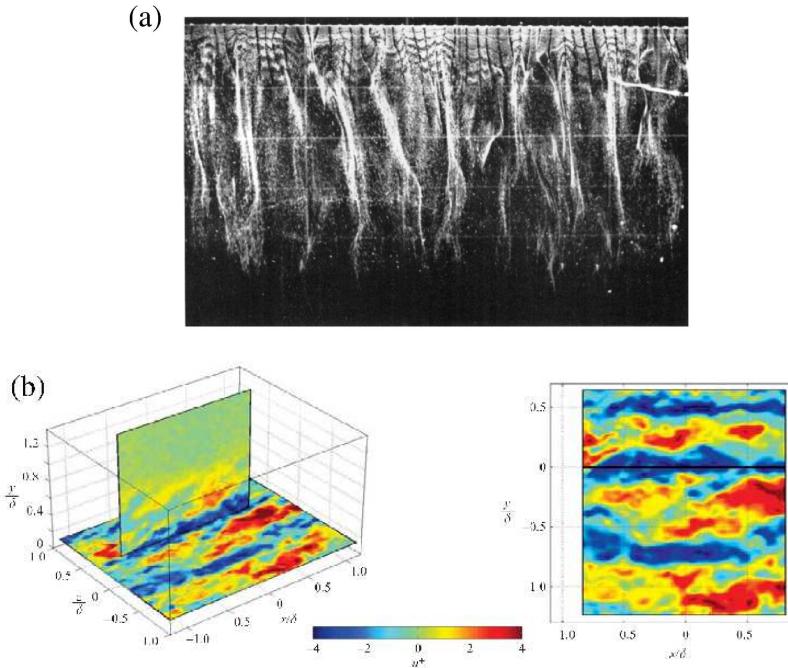


FIG. 1.5. Illustration des streaks naturels dans les écoulements de paroi turbulents. (a) Streaks de proche paroi. D'après Kline *et al.* (1967). (b) Streaks observés dans la zone logarithmique. D'après Hutchins & Marusic (2007a).

Rien ne garantit toutefois que ces structures, aussi importante que soit leur contribution à la dynamique de la turbulence, sont les plus amplifiées. En conséquence, nous avons dans un premier temps choisi d'étendre le formalisme des études de perturbations optimales linéaires aux cas des écoulements turbulents. Les questions suivantes sont soulevées : Quelles sont les longueurs d'onde les plus amplifiées ? Quelle est la forme des perturbations associées ? Quelle est la dépendance de ces résultats en fonction du nombre de Reynolds ?

Une fois ces réponses apportées, nous devons nous assurer que les prédictions de la théorie linéaire, obtenues avec plusieurs hypothèses simplificatrices, sont réalisables de manière satis-

faisante en présence des non-linéarités et de la “vraie” turbulence de paroi. La deuxième série de questions que l'on se pose est alors : **de telles structures peuvent-elles être effectivement forcées artificiellement dans un écoulement turbulent ? Sont-elles amplifiées malgré les non-linéarités et instationnarités inhérentes à ce type d'écoulement ? Dans quelle mesure le sont-elles ? Contribuent-elles à moduler l'écoulement de base ?**

Le présent mémoire est structuré comme suit : nous rappelons brièvement dans le chapitre 2 le formalisme relatif aux études de perturbations optimales dans les écoulements de paroi laminaires et dans le chapitre 3 les principales notions relatives aux écoulements turbulents de paroi. Dans les chapitres 4 et 5, nous présentons nos résultats relatifs aux perturbations optimales linéaires dans les écoulements de Poiseuille plan turbulent et de couche limite turbulente. Le chapitre 6 est une étude expérimentale sur la couche limite turbulente sur plaque plane. Cette étude vise à forcer les longueurs d'onde privilégiées issues de l'étude théorique décrite au chapitre précédent. Pour cela des éléments de rugosité cylindriques dont les dimensions et la forme sont optimisées sont utilisés. Enfin nous rappelons l'ensemble des résultats et les discutons dans le chapitre 7.

## Chapitre 2

# Perturbations optimales linéaires

Les analyses classiques de stabilité sont fondées sur des études modales (i.e. uniquement de valeurs propres) et donc concentrées sur le comportement des perturbations aux temps longs (Drazin & Reid, 1981). Une perturbation est stable si elle amortie et instable si son amplitude croît. Cette approche conduit néanmoins à une mauvaise estimation du nombre de Reynolds pour lequel la transition vers la turbulence intervient, notamment dans le cas des transitions sous-critiques. Dans les années 1990, les travaux de Butler & Farrell (1992); Trefethen *et al.* (1993); Reddy & Henningson (1993) et d'autres ont mis l'accent sur le comportement de ces perturbations durant des intervalles de temps plus courts (voir Schmid & Henningson (2001) pour une vue d'ensemble). On s'est alors rendu compte que même si l'écoulement étudié est linéairement stable (toutes les perturbations sont amorties pour les temps longs), certaines perturbations peuvent connaître de très fortes croissances sur des temps courts. On parle alors de croissances transitoires.

### 1 Non normalité et croissances transitoires

Pour illustrer ces propos, considérons le système suivant :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4Re} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{Re} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

avec  $q_1(0) = q_{10}$  et  $q_2(0) = q_{20}$  comme conditions initiales. Les valeurs propres de ce système sont  $-1/Re$  et  $-1/4Re$ . Celui-ci est donc linéairement stable pour tout  $Re$ . Les solutions de ce système sont :

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = (q_{10} + \frac{4}{3}Re \cdot q_{20}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-\frac{t}{4Re}) + \left( -\frac{4}{3}Re \cdot q_{20} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4Re} \end{pmatrix} \exp(-\frac{t}{Re}) \quad (2.2)$$

et sont amorties pour  $t \rightarrow \infty$ . Cependant, une perturbation  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  ayant une composante non nulle sur chaque vecteur propre  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  peut voir sa norme croître pour des temps finis (figure 2.1(a)). Ce phénomène s'explique par la non-normalité des vecteurs propres de ce système ; la norme d'une perturbation consistant en une superposition de vecteurs propres qui interagissent en coopération croît avant d'être amortie (figure 2.1(b)).

Afin d'estimer la croissance d'une perturbation, nous devons introduire une mesure de cette dernière. Dans le cas de cet exemple, nous utilisons la norme  $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ . On introduit

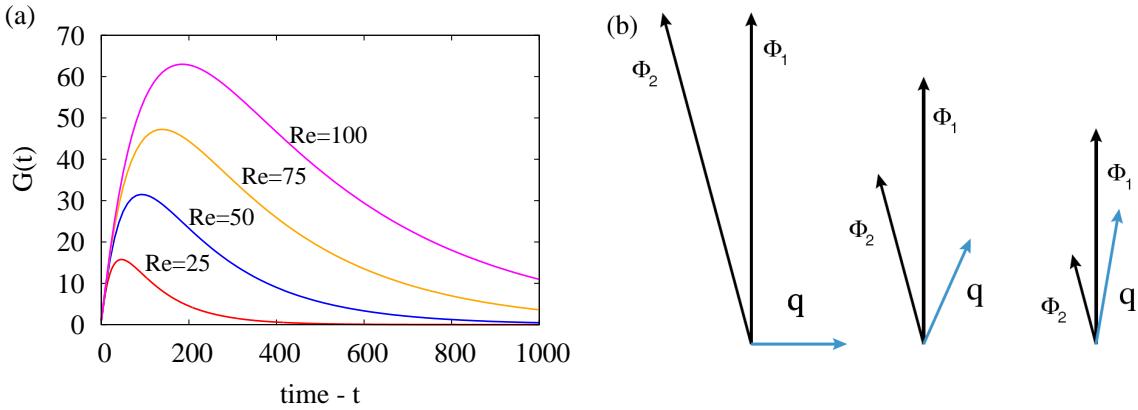


FIG. 2.1. (a) Evolution temporelle du gain optimal  $G(t)$  —  $Re = 25$ , —  $Re = 50$ , —  $Re = 75$  et —  $Re = 100$ . (b) Illustration de la croissance transitoire due à la non-normalité de deux vecteurs. Illustration issue de Schmid (2007).

alors le gain optimal  $G(t)$  comme le rapport de la norme de la perturbation à l'instant  $t$  sur la norme de la perturbation initiale, optimisé sur l'ensemble de toutes les perturbations initiales non nulles possibles :

$$G(t) = \sup_{\mathbf{q}_0 \neq 0} \frac{\|\mathbf{q}(t)\|}{\|\mathbf{q}_0\|} \quad (2.3)$$

La croissance optimale maximale est définie comme  $G_{max} = \max(G(t))$  et est atteinte à l'instant noté  $t_{max}$ . Sur la figure 2.1 (a) nous avons représenté la croissance temporelle optimale  $G(t)$  pour plusieurs valeurs du paramètre  $Re$ . On constate alors que  $G(t)$  croît avec  $Re$  et que  $G_{max} = 0.63Re$  est obtenu à  $t_{max} = 1.6Re$ . Ceci s'explique par le fait que le caractère non-normal de l'opérateur (2.1) devient plus prononcé à mesure que  $Re$  croît.

## 2 Petites perturbations et opérateur d'Orr-Sommerfeld & Squire

Les analyses de stabilité hydrodynamique linéaires reposent sur l'étude de l'évolution de perturbations infinitésimales superposées à un écoulement de base. Or les équations de Navier-Stokes linéarisées constituent un système non-normal qui est structurellement similaire au système modèle (2.1) (Trefethen *et al.*, 1993).

Pour un fluide incompressible, on considère un écoulement de base laminaire parallèle  $(\mathbf{U}, P) = ([U(y), 0, 0], P)$  (comme par exemple l'écoulement de Poiseuille plan) auquel on applique une petite perturbation  $\mathbf{u} = [(u, v, w), p]$ . Dans ce mémoire, nous désignons par  $x, y$  et  $z$  les directions longitudinale, normale et transverse et par  $u, v$  et  $w$  les composantes de vitesse associées. L'écoulement perturbé  $\mathbf{U} + \mathbf{u}$  et l'écoulement de base  $\mathbf{U}$  sont tous les deux solutions des équations de Navier-Stokes. L'évolution de petites perturbations est alors décrite par les équations de Navier-Stokes linéarisées :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + v U' \mathbf{e}_x = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.5)$$

L'écoulement de base étant homogène dans le plan  $(x, z)$ , on peut se réduire à l'étude de perturbations de la forme  $\mathbf{u}(x, y, z, t) = \widehat{\mathbf{u}}(\alpha, y, \beta, t) e^{i(\alpha x + \beta z)}$ . Les manipulations algébriques décrites dans Schmid & Henningson (2001) permettent de réduire ces équations au système d'Orr-Sommerfeld pour la composante de vitesse normale  $\widehat{v}(y, t)$  (Orr, 1907; Sommerfeld, 1908) et de Squire pour la vorticité normale  $\widehat{\omega_y}(y, t) = \partial u / \partial z - \partial w / \partial x$  (Squire, 1933).

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} D^2 - k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{\omega_y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{OS} & 0 \\ -i\beta U' & \mathcal{L}_{SQ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{\omega_y} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{OS} &= -i\alpha [U(D^2 - k^2) - U''] + \frac{1}{Re} (D^2 - k^2)^2 \\ \mathcal{L}_{SQ} &= -i\alpha U + \frac{1}{Re} (D^2 - k^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

où  $D$  et  $(')$  désignent  $\partial/\partial y$  et  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . Comme dans l'exemple précédent, cet opérateur est non-normal. Pour des perturbations tri-dimensionnelles (i.e.  $\beta \neq 0$ ) le terme  $-i\beta U'$  contribue au forçage de la vorticité normale  $\widehat{\omega_y}$  par la vitesse normale  $\widehat{v}$  et le cisaillement de l'écoulement de base  $U'$ . Ainsi une modulation transverse de la vitesse normale (e.g. des tourbillons longitudinaux) induit une réponse sous forme de perturbation de la vitesse longitudinale (i.e. un streak), c'est l'effet lift-up (Landahl, 1980).

Compte tenu de cette possible croissance transitoire, il peut être intéressant de déterminer quelles perturbations  $\widehat{\mathbf{u}}(\alpha, y, \beta, t)$  vont donner lieu aux plus fortes croissances pour un écoulement donné à un nombre de Reynolds fixé. Afin de quantifier la "taille" d'une perturbation il faut introduire une mesure de celle-ci. La mesure la plus communément utilisée est l'énergie cinétique contenue dans la perturbation  $\|\widehat{\mathbf{u}}\| = [\int_V |\widehat{\mathbf{u}}|^2, dV]^{1/2}$ . On définit alors simplement la croissance optimale, ou le gain optimal,  $G(\alpha, \beta, t)$  comme le rapport de l'énergie contenue par la perturbation  $\mathbf{u}$  à l'instant  $t$  sur l'énergie initiale  $\|\widehat{\mathbf{u}}_0\|$  optimisé selon l'ensemble des conditions initiales possibles.

$$G(\alpha, \beta, t) = \max_{\widehat{\mathbf{u}}_0 \neq 0} \frac{\|\widehat{\mathbf{u}}(t)\|^2}{\|\widehat{\mathbf{u}}_0\|^2} \quad (2.8)$$

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons essentiellement à la croissance optimale maximale  $G_{max}(\alpha, \beta) = \max_t (G(\alpha, \beta, t))$ . Les perturbations optimales sont alors les perturbations  $\widehat{\mathbf{u}}_0$  qui vont maximiser les croissances transitoires.

### 3 Croissances optimales dans les écoulements laminaires

Les croissances optimales et les perturbations associées ont été calculées pour tous les écoulements cisaillés laminaires canoniques : Poiseuille plan, Poiseuille dans une conduite circulaire,

Couette plan et couche limite de Blasius (Butler & Farrell, 1992; Reddy & Henningson, 1993; Trefethen *et al.*, 1993; Schmid & Henningson, 1994). Malgré les différences que présentent ces écoulements, les études de perturbations optimales font apparaître des tendances communes :

- Les perturbations optimales consistent en des tourbillons longitudinaux (i.e.  $\alpha = 0$ ) contra-rotatifs. Ces tourbillons amplifient des streaks rapides et lents.
- Les longueurs d'onde optimales globales (qui conduisent à  $G_{max}$ ) sont du même ordre de grandeur que la dimension normale de l'écoulement de base :  $\lambda_{zopt} = \mathcal{O}(\delta, h, R)$ . On a notamment  $\lambda_{zopt} = 3h$  pour Poiseuille,  $\lambda_{zopt} = 3.9h$  pour Couette et  $\lambda_{zopt} = 3.3\delta$  pour la couche limite de Blasius.
- Les croissances optimales maximales  $G_{max}$  voient leur valeur augmenter avec le carré du nombre de Reynolds, i.e.  $G_{max} \propto Re^2$ .
- L'instant  $t_{max}$  auquel l'amplification maximale est atteinte croît linéairement avec le nombre de Reynolds.

Ces travaux ont ouvert la voie à de nombreuses études de plus en plus fines par exemple prenant en compte de nouveaux paramètres comme un gradient de pression (par exemple Corbett & Bottaro (2000)), une viscosité stratifiée (Chikkadi *et al.*, 2005), ou s'affranchissant de l'hypothèse d'écoulement parallèle dans le cas de la couche limite (cf. Andersson *et al.* (1999); Luchini (2000)).

# Chapitre 3

## Ecoulements turbulents de paroi

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la stabilité non-modale d'écoulements de paroi turbulents. Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement les principales notions qui nous permettent de définir un écoulement moyen ainsi que les équations qui gouvernent l'évolution de petites perturbations cohérentes. Nous nous intéressons aux écoulements turbulents cisaillés au voisinage d'une paroi solide. Cette classe d'écoulements inclue la couche limite sur plaque plane, le mouvement d'un fluide dans une conduite cylindrique circulaire ou entre deux parois planes, et reste l'objet d'études intensives.

### 1 Les équations RANS et l'hypothèse de Boussinesq

Les écoulements turbulents sont caractérisés par d'importantes fluctuations incohérentes (i.e. de moyenne statistique nulle) des composantes de vitesse et de pression autour d'une valeur moyenne. En conséquence, l'étude de ceux-ci repose traditionnellement sur une approche statistique. Les composantes de vitesse et de pression sont alors décomposées en une valeur moyenne notée ici  $\bar{\mathbf{u}}$  et une partie fluctuante de moyenne nulle notée  $\mathbf{u}'$  :  $\mathbf{u}(x, y, z, t) = \bar{\mathbf{u}}(x, y, z, t) + \mathbf{u}'(x, y, z, t)$  et  $p(x, y, z, t) = \bar{p}(x, y, z, t) + p'(x, y, z, t)$ . Cette décomposition introduite dans les équations de Navier-Stokes conduit aux équations RANS pour les quantités moyennes (Reynolds Averaged Navier-Stokes, Pope (2001)) :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nabla \cdot [\nu (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) - \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}] \quad (3.1)$$

L'hypothèse de Boussinesq (1877) modélise le tenseur des contraintes turbulentes de Reynolds  $-\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$  via une viscosité turbulente  $\nu_t$  :

$$-\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = \nu_t (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) \quad (3.2)$$

Dès lors, toutes les fluctuations incohérentes dues aux structures présentes dans l'écoulement (streaks naturels, tourbillons en fer à cheval ou épingle à cheveux) sont prises en considération par l'intermédiaire de cette viscosité turbulente  $\nu_t$ .

## 2 Equations linéarisées pour des petites perturbations cohérentes d'un écoulement turbulent de paroi

Dans le cadre de l'étude de petites perturbations cohérentes superposées sur un écoulement de base turbulent  $\mathbf{U}$ , la viscosité turbulente nécessaire à maintenir cet écoulement de base doit être prise en compte (Reynolds & Hussain, 1972). Pour des écoulements de base turbulents pleinement développés, parallèles et stationnaires : l'écoulement moyen est statistiquement homogène en temps et dans les plans horizontaux  $(x, z)$  soit  $\mathbf{U} = [U(y), 0, 0]$ . La viscosité turbulente ne dépend donc elle aussi que de la direction normale  $\nu_t = \nu_t(y)$ . L'équation RANS pour cet écoulement de base se réduit alors à :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nabla \cdot [(\nu + \nu_t(y)) (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)] = 0 \quad (3.3)$$

Les perturbations que nous envisageons d'étudier sont statistiquement cohérentes ; c'est à dire que les valeurs moyennes des fluctuations de vitesse produites par ces perturbations sont non nulles. Nous étudions alors l'évolution de l'écoulement moyen défini  $\bar{\mathbf{u}}(x, y, z, t) = \mathbf{U}(y) + \varepsilon \mathbf{u}(x, y, z, t)$  où  $\varepsilon \mathbf{u}(x, y, z, t)$  désigne la petite ( $\varepsilon \ll 1$ ) perturbation étudiée. En raison de l'hypothèse de petite perturbation, et en considérant que les échelles spatiales et temporelles sur lesquelles évoluent la perturbation sont très grandes par rapport à celles associées aux fluctuations turbulentes, on peut supposer que la viscosité turbulente associée à l'écoulement moyen  $\mathbf{U}$  reste inchangée quand on applique la perturbation. Dans ce cadre, l'hypothèse de Boussinesq appliquée à l'ensemble de l'écoulement moyen  $\mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{u}$  devient :

$$-\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = \nu_t(y) (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) = \nu_t(y) (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) + \varepsilon \nu_t(y) (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (3.4)$$

L'équation linéarisée décrivant l'évolution des perturbations cohérentes  $\mathbf{u}$  est alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot [\nu_T(y) (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \quad (3.5)$$

où  $\nu_T(y) = \nu + \nu_t(y)$ .

## 3 Ecoulement de base parallèle et théorie classique

Le formalisme des études de perturbations optimales repose, on l'a vu dans le chapitre 2, sur l'hypothèse d'écoulement de base statistiquement parallèle et stationnaire  $\mathbf{U} = [U(y), 0, 0]$  et  $\nu_t = \nu_t(y)$ . Pour ces écoulements, les approches classiques de Prandtl (1927, 1932); van Kármán (1921, 1930) ou encore Millikan (1938) fournissent des approximations pour  $U(y)$  et  $\nu_t(y)$ .

Contrairement aux écoulements cisaillés laminaires, il n'existe pas de loi auto-semblable pour décrire l'ensemble du profil de vitesse  $U(y)$  ou pour  $\nu_t(y)$ . Pour palier à cela, la théorie classique propose de décomposer la couche limite turbulente en zones dans lesquelles des lois de similitude existent. Dans chacune de ces zones, on suppose que  $U(\mathcal{Y}) = \mathcal{F}(\mathcal{Y})$  et  $\nu_t(\mathcal{Y}) = \mathcal{G}(\mathcal{Y})$  où  $\mathcal{Y}$  désigne la distance à la paroi adimensionnée par l'échelle caractéristique de longueur de la zone étudiée.

### 3.1 La zone interne

La zone interne (la zone la plus proche de la paroi) a été décrite par Prandtl (1932). Dans cette zone, la vitesse moyenne dépend essentiellement de la distance à la paroi  $y$ , des propriétés du fluide (viscosité moléculaire  $\nu$ ), et du frottement pariétal  $\tau_p = \tau(y=0) = \nu \partial U / \partial y$  qui tient un rôle prédominant. L'échelle de vitesse associée est dite vitesse de frottement et est définie par  $u_\tau = \sqrt{\tau_p / \rho}$ . L'échelle de longueur est alors explicitée à partir de la viscosité et de la vitesse de frottement  $l = \nu / u_\tau$ . Cela permet d'introduire les grandeurs adimensionnées  $y^+ = y/l$  et  $U^+ = U/u_\tau$ .

Dans la sous-couche visqueuse (zone au plus proche de la paroi), ce sont les effets visqueux qui dominent la dynamique et l'on trouve que  $\nu_t = 0$  et  $U^+(y^+) = y^+$ . Les expériences (e.g. De Graaff & Eaton (2000)) et les simulations numériques (Kim *et al.*, 1987; Skote, 2001) confirment la validité de cette loi linéaire pour  $y^+ \lesssim 7$  (valeur qui définit donc la sous-couche visqueuse).

### 3.2 La zone externe

La dynamique de cette région éloignée de la paroi est dominée par les effets d'inertie et la diffusion turbulente. Dans cette région, l'échelle de longueur est  $\delta$ , où  $\delta$  désigne une mesure de l'épaisseur de l'écoulement de base (la demi-hauteur du canal  $h$  dans le cas du Poiseuille plan, le rayon  $R$  pour l'écoulement de conduite, une épaisseur intégrale dans le cas de la couche limite turbulente). On adimensionne donc  $y$  par  $\delta$  en définissant  $\eta = y/\delta$ . L'échelle caractéristique de vitesse reste la vitesse de frottement  $u_\tau$ .

On exprime généralement la vitesse sous forme déficitaire (van Kármán, 1930) ; l'idée étant que la paroi retarde l'écoulement, et donc que la vitesse  $U$  tend vers la vitesse infinie amont  $U_e$  par valeurs inférieures. On a donc  $U_e^+ - U^+(\eta) = U_w^+(\eta)$  (où  $U_w^+$  est appelée la vitesse de sillage) et  $\nu_t = G(\eta)$ .

### 3.3 La zone de recouvrement

Il s'agit de la zone où se rejoignent les profils de la zone interne et de la zone externe. On y impose une condition de raccordement asymptotique pour  $y^+ \rightarrow \infty$  et  $\eta \rightarrow 0$  pour le gradient de vitesse moyenne. L'approche classique suggère que la vitesse moyenne y suit un profil logarithmique :

$$U^+(y^+) = \frac{1}{\kappa} \log(y^+) + B \quad \text{et} \quad U_e^+ - U^+(\eta) = \frac{1}{\kappa} \log(\eta) - C \quad (3.6)$$

Cette zone, qui est aussi appelée zone logarithmique, s'étend approximativement de  $y^+ \approx 30$  jusqu'à  $\eta \approx 0.1$  suivant le nombre de Reynolds. La viscosité turbulente y croît progressivement depuis la paroi jusqu'à atteindre un plateau. L'obtention de cette loi a ensuite été critiquée et demeure un sujet de discorde entre plusieurs communautés de chercheurs. Nous renvoyons le lecteur aux revues de Panton (2005) ou Buschmann & Gad-el Hak (2003) pour une discussion complète de ce problème. Dans notre étude, nous utilisons néanmoins des profils de base de type (3.6) qui approchent bien les données expérimentales. La figure 3.1 compare les lois de la théorie classique à des profils issus des expériences de Österlund (1999) et De Graaff & Eaton (2000). Sur la figure 3.1(a), l'ensemble des profils est tracé en échelles de paroi  $U^+(y^+)$ . Les lois linéaire  $U^+ = y^+$  et logarithmique  $U^+ = \log(y^+)/\kappa + B$  sont représentées pour comparaison.

Les profils déficitaires  $U^+ (\eta) - U_e^+$  sont tracés sur la figure 3.1(b) avec la loi logarithmique  $\log(\eta) / \kappa - C$ .

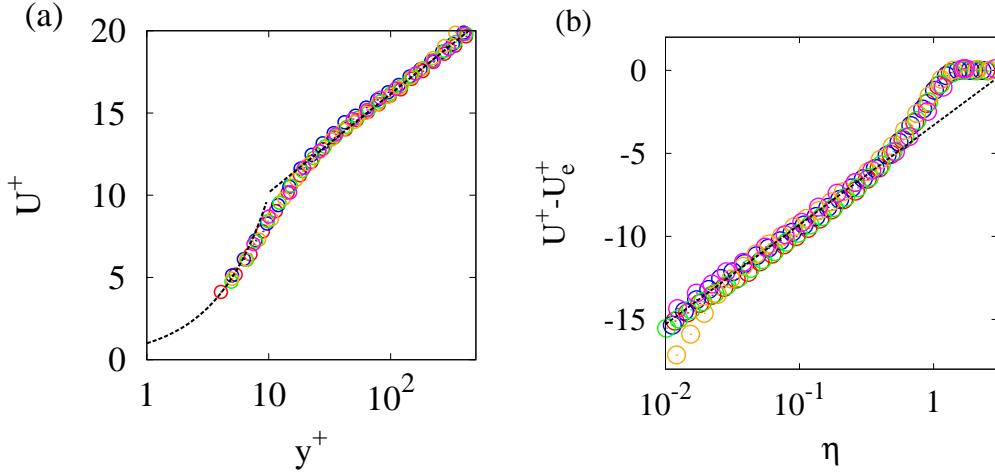


FIG. 3.1. Profils de vitesse moyenne en fonction de la distance à la paroi. (a) En échelle de paroi  $U^+ (y^+)$ . Les lignes pointillées noires représentent  $U^+ = y^+$  et  $U^+ = \log(y^+)/\kappa + B$ . (b) En échelle externe  $U^+(\eta) - U_e^+$ . La ligne pointillée noire représente  $U^+(\eta) - U_e^+ = \log(\eta)/\kappa - C$ . Données de Österlund (1999) O  $Re_\theta = U_e \theta / \nu = 12633$ , O  $Re_\theta = 6699$ , O  $Re_\theta = 15182$ , O  $Re_\theta = 2532$ . Données de De Graaff & Eaton (2000) O  $Re_\theta = 13000$ . Toutes ces données expérimentales ont été obtenues pour un écoulement de couche limite turbulente.

## 4 Modélisations utilisées

Les écoulements turbulents de paroi auxquels nous nous sommes intéressés sont l'écoulement de Poiseuille plan turbulent et la couche limite turbulente. Pour ces deux écoulements, il existe des approximations analytiques pour décrire les profils de vitesse moyenne et/ou viscosité turbulente.

Pour l'écoulement de Poiseuille plan turbulent, le profil de vitesse que nous avons utilisé est issu de la loi de Cess (1958). Cette loi décrit le profil de viscosité totale  $\nu_T(\eta) = \nu + \nu_t(\eta)$  :

$$\nu_T^+ (\eta) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\kappa^2 Re_\tau^2}{9} (1 - \eta^2)^2 (1 + 2\eta^2)^2 [1 - \exp((|\eta| - 1) Re_\tau / A)]^2 \right\}^{1/2} + \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

où  $\eta = y/h$ ,  $Re_\tau = u_\tau h / \nu$ . Dans cette expression  $\kappa$  et  $A$  désignent respectivement la constante de van Kármán et la constante de van Driest. Il est à noter que les valeurs utilisées pour ces “constantes” ne sont pas fixées et peuvent donc être modifiées en fonction du nombre de Reynolds utilisé. On obtient alors le profil de vitesse moyenne en intégrant  $dU^+ / d\eta = -Re_\tau \eta / \nu_T^+(\eta)$  (relation qui est dérivée de l'équation de conservation de la quantité de mouvement) comme décrit dans Reynolds & Tiederman (1967).

Pour la couche limite turbulente, nous avons utilisé le profil de vitesse moyenne récemment proposé par Monkewitz *et al.* (2007). Il s'agit d'un profil composite faisant intervenir les deux échelles de la turbulence  $y^+$  et  $\eta = y/\Delta$ ; où  $\Delta = \delta^* U_e / u_\tau$  désigne l'épaisseur de Rotta-Clauser ( $\delta^*$  étant l'épaisseur de déplacement). Ce profil a été validé pour une très large gamme de nombres de Reynolds à l'aide des mesures réalisées par Österlund (1999); De Graaff & Eaton

(2000) ou encore Nagib *et al.* (2004). Pour cette étude, nous avons choisi l'expression additive de profil qui est donnée par :

$$\frac{U}{u_\tau} = [U_i^+(y^+) - U_{log}^+(y^+) + U_e^+(Re_{\delta^*}) - U_w^+(\eta)] \quad (3.8)$$

Les fonctions  $U_i^+$ ,  $U_{log}^+$  et  $U_w^+$  sont données par les relations (A.4), (A.2) et (A.1) de l'Appendix A. de l'Article 2.



## Chapitre 4

# Les perturbations optimales dans l'écoulement de Poiseuille plan turbulent

Après ces deux chapitres essentiellement constitués de rappels, nous entrons avec ce chapitre dans le vif du sujet. Nous avons vu que, dans une couche limite laminaire, la transition peut être repoussée grâce à l'utilisation de perturbations optimales. Fransson *et al.* (2006) ont utilisé à bon escient la forte croissance des streaks créés par des générateurs de vortex cylindriques. Bien que la perturbation initiale soit très localisée et de faible amplitude (hauteur des générateurs de vortex de l'ordre du millimètre, faible niveau d'énergie dans les tourbillons forcés), l'écoulement de base est modifié à l'ordre dominant. Nous souhaitons étendre cette approche à la manipulation d'un écoulement de base *turbulent* à l'aide des perturbations qui y seraient les plus amplifiées. La première étape est alors de calculer les perturbations optimales associées à de tels écoulements. Nous commençons par l'étude des perturbations optimales linéaires dans l'écoulement de Poiseuille turbulent qui a l'avantage d'être parallèle et très bien documenté. Nous y présentons la méthode retenue pour prendre en compte la dynamique de la turbulence dans les équations linéarisées ; c'est à dire l'utilisation d'une viscosité turbulente. Dans un premier temps, ce principe est développé et validé sur l'écoulement de Poiseuille plan au regard des précédentes études de Butler & Farrell (1993) et del Álamo & Jiménez (2006). Cette première partie a donné lieu à une publication dans *Physics of Fluids* reportée dans ce manuscrit en tant qu'Article 1 (Pujals *et al.*, 2009b).

## 1 Ecoulement de base

Le premier écoulement turbulent de paroi à avoir fait l'objet d'une étude de perturbations optimales est celui de Poiseuille plan entre deux plaques planes supposées infinies dans la direction transverse et distantes de  $2h$ . Pour cette étude, on utilise le profil de vitesse moyenne de Reynolds & Tiederman (1967) issu de l'expression de Cess (1958) (voir équation (3.7)). Les profils de viscosité turbulente  $\nu_T^+(y^+)$  et vitesse  $U^+(y^+)$  associés sont tracés sur la figure 4.1 pour plusieurs nombres de Reynolds  $Re_\tau$ .

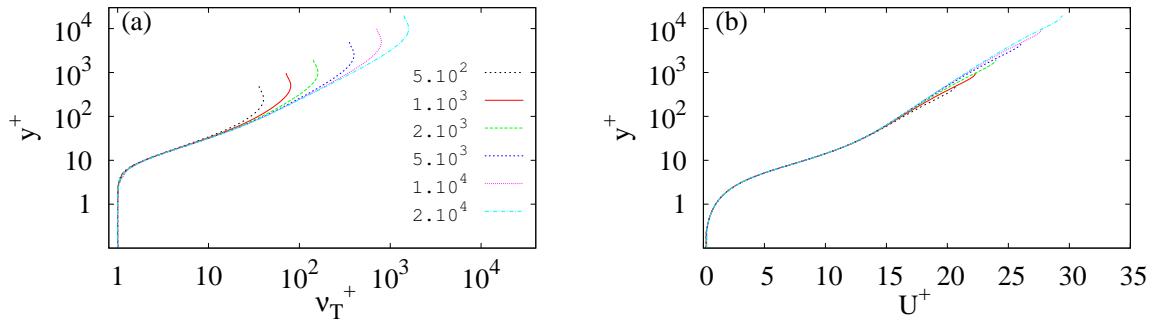


FIG. 4.1. Profils de (a) viscosité turbulente  $\nu_T^+ (y^+)$  selon l'expression de Cess (1958) (eq. (3.7)) et (b) de vitesse moyenne correspondante  $U^+ (y^+)$  pour  $Re_\tau = 500, 1000, 2000, 5000, 10000$  et 20000. Les profils ne sont représentés que sur un demi-canal.

## 2 L'approche de Butler & Farrell

Butler & Farrell (1993) ont étudié les croissances optimales de cet écoulement de base pour le nombre de Reynolds  $Re_\tau = u_\tau h/\nu = 180$ . En conservant la viscosité moléculaire  $\nu$  dans l'opérateur d'Orr-Sommerfeld & Squire (défini au chapitre 2 par l'équation (2.6)), ces auteurs ont établi que les perturbations optimales sont des tourbillons longitudinaux qui donnent naissance à des streaks longitudinaux. La longueur d'onde optimale est identique à celle obtenue dans le cas laminaire  $\beta_{opt} h = 2.1$  ( $\lambda_z \sim 3h$ ) et le gain associé à ces structures est de l'ordre de  $G_{max} = 235$ .

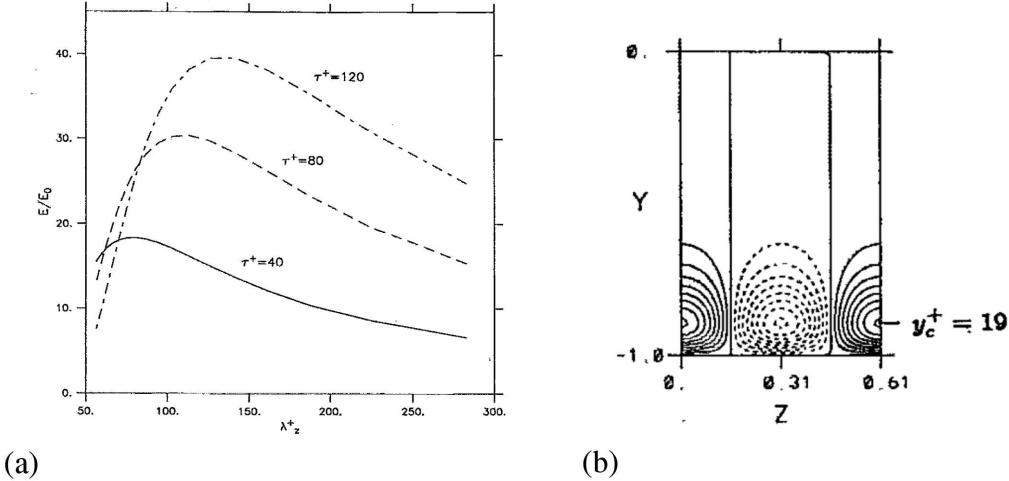


FIG. 4.2. (a) Croissances optimales en fonction de la longueur d'onde des perturbations appliquées. Le temps maximum d'optimisation est limité aux valeurs  $\tau^+ = 80, 100$  et 120 qui sont voisines du temps de retournement des structures tourbillonnaires situées en proche paroi. (b) Streaks optimaux associées à  $\lambda_z^+ = 110$  à l'instant d'amplification maximale  $t = t_{max}$ . D'après Butler & Farrell (1993).

En limitant artificiellement le temps d'optimisation  $\tau^+$  à des valeurs de l'ordre du temps de retournement (eddy turnover time,  $40 \leq \tau^+ \leq 80$ ), la longueur d'onde optimale est de

l'ordre de  $\lambda_z^+ \approx 100$  (voir figure 4.2(a)). Dans ce cas, les croissances optimales sont plus faibles ( $G_{max} = \mathcal{O}(10)$ ). Là encore, les perturbations optimales sont des tourbillons longitudinaux. Les streaks associés ressemblent à ceux observés dans la zone tampon des écoulements de paroi turbulents, leur vitesse maximum étant située à  $y^+ = 19$  (cf. figure 4.2(b)). Dans cette approche, l'élément déterminant est le temps de retournement qui est imposé dans le processus d'optimisation.

### 3 L'approche de del Álamo & Jiménez, de l'importance de la viscosité turbulente $\nu_t$

Plus récemment, del Álamo & Jiménez (2006) ont réitéré l'étude de Butler & Farrell en introduisant la viscosité turbulente<sup>1</sup> dans les équations pour les perturbations afin de prendre en compte la dynamique de la turbulence de paroi. Plusieurs nombres de Reynolds  $Re_\tau$  allant de  $Re_\tau = 200$  à 20000 ont été étudiés.

Il ressort de cette étude que les perturbations les plus amplifiées sont allongées dans la direction longitudinale. Avec l'introduction de  $\nu_t$  dans les équations aux perturbations, il n'est pas nécessaire d'imposer artificiellement un temps d'optimisation. Ce temps ressort automatiquement comme un résultat de la procédure d'optimisation. Deux gammes de longueur d'onde connaissent des croissances plus importantes comme illustré par la figure 4.3 : un pic de faible amplitude est obtenu pour  $\lambda_z^+ \approx 100$  (4.3 (a)) et un second de plus forte amplitude pour des longueurs d'onde de l'ordre de  $\lambda_z \approx 3h$ . Au delà de  $Re_\tau = 1000$ , le pic associé aux petites structures est d'amplitude constante  $G_{max}^{(inn)} \approx 3.5$  lorsque le nombre de Reynolds augmente. En revanche, l'amplitude du pic principal décroît à mesure que  $Re_\tau$  augmente.

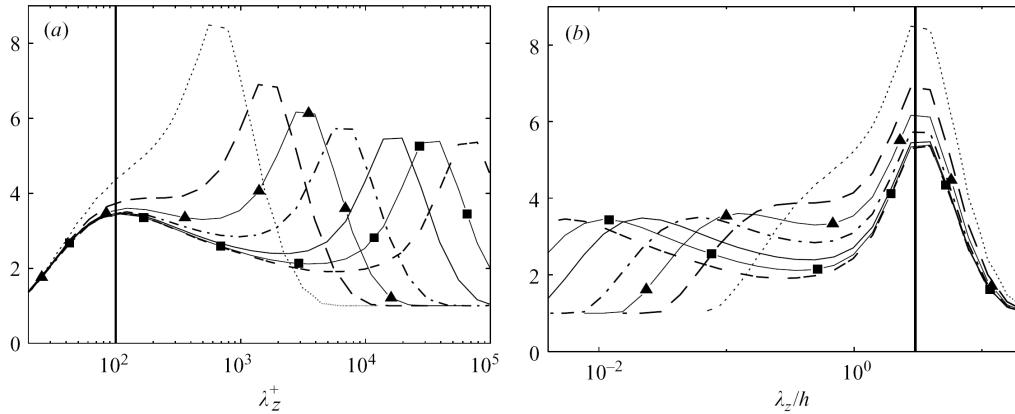


FIG. 4.3. Croissances optimales en fonction de la longueur d'onde des perturbations appliquées. On observe deux pics pour des gammes de longueur d'onde différentes. (a) la longueur d'onde  $\lambda_z$  est exprimée en unités de paroi  $\lambda_z^+ = \lambda_z u_\tau / \nu$  et le pic est centré autour de  $\lambda_z^+ = 100$ . (b) la longueur d'onde est adimensionnée par la demi-hauteur du canal  $h$ . Comme dans l'étude de Butler & Farrell (1993), le pic principal est centré autour de  $\lambda_z = 3h$ . ..... ,  $Re_\tau = 200$ ; —·—,  $Re_\tau = 500$ ; —▲—,  $Re_\tau = 1000$ ; —·—,  $Re_\tau = 2000$ ; ———,  $Re_\tau = 5000$ ; —■—,  $Re_\tau = 10000$ ; ---,  $Re_\tau = 20000$ . D'après del Álamo & Jiménez (2006).

<sup>1</sup>Dans cette référence, l'expression de la viscosité totale  $\nu_T$  comporte quelques erreurs de typographies qui sont détaillées dans l'Article 1. Cela n'affecte pas les résultats, le profil utilisé dans les calculs étant en revanche correct.

## 4 Reformulation de l'opérateur de d'Orr-Sommerfeld & Squire généralisé

La décroissance du pic principal (associé aux grandes échelles) avec  $Re_\tau$  trouvée par del Álamo & Jiménez est en désaccord avec les résultats obtenus dans le cadre des écoulements laminaires (Butler & Farrell, 1992; Reddy & Henningson, 1993). Cela nous a conduit à ré-examiner attentivement leur formulation. Nous avons ainsi constaté que les opérateurs d'Orr-Sommerfeld & Squire utilisés par del Álamo & Jiménez ne sont pas consistents avec ceux utilisés dans le cadre de précédentes études d'écoulements laminaires avec une viscosité variable (Chikkadi *et al.*, 2005; White, 2006). Les opérateurs corrects sont obtenus en introduisant la viscosité turbulente directement dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.5) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \left( v \frac{\partial U}{\partial y}, 0, 0 \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot [\nu_T(y) (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \quad (4.1)$$

En cherchant des perturbations de la forme  $\mathbf{u}(x, y, z, t) = \widehat{\mathbf{u}}(\alpha, y, \beta, t) e^{i(\alpha x + \beta z)}$  on obtient après quelques manipulations algébriques :

$$\begin{bmatrix} D^2 - k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{\omega_y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{OS} & 0 \\ -i\beta U' & \mathcal{L}_{SQ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{\omega_y} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

avec

$$\mathcal{L}_{OS} = -i\alpha [U(D^2 - k^2) - U''] + \nu_T (D^2 - k^2)^2 + 2\nu'_T (D^3 - k^2 D) + \nu''_T (D^2 + k^2) \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}_{SQ} = -i\alpha U + \nu_T (D^2 - k^2) + \nu'_T D \quad (4.4)$$

$D$  et  $(')$  désignent ici  $\partial/\partial y$  et  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . Ces opérateurs (4.3) et (4.4) sont différents de ceux de del Álamo & Jiménez et sont consistents par exemple avec ceux utilisés par Chikkadi *et al.* (2005); White (2006) dans le cas d'écoulements laminaires à viscosité variable.

### 4.1 Croissances optimales et perturbations optimales

Comme dans l'étude de del Álamo & Jiménez, la viscosité turbulente totale  $\nu_T = \nu + \nu_t$  définie par la relation (3.7) et la vitesse moyenne  $\mathbf{U}$  associée sont utilisées comme écoulement de base. De même, les constantes de von Kármán  $\kappa$  et de van Driest  $A$  utilisées dans del Álamo & Jiménez sont conservées. Les valeurs retenues ont été fixées de façon à coller au plus près des résultats obtenus par simulation numérique directe (DNS) à  $Re_\tau = 2000$  (Hoyas & Jiménez, 2006). Les nombres de Reynolds sélectionnés sont identiques à la différence près que le cas  $Re_\tau = 200$  n'a pas été conservé<sup>2</sup>.

Tous les profils de vitesse moyenne représentés sur la figure 4.1 sont linéairement stables quels que soient les nombres d'onde  $\alpha h$  et  $\beta h$  utilisés : toutes les perturbations sont amorties après un temps suffisamment long. Certaines perturbations connaissent toutefois une croissance transitoire avant d'être dissipées. Seules les perturbations allongées dans la direction de l'écoulement (i.e.  $\alpha h \lesssim \beta h$ ) sont amplifiées. Les plus forts taux d'amplification sont obtenus

---

<sup>2</sup>Ce nombre de Reynolds étant faible, la séparation des échelles  $y^+$  et  $\eta$  n'est pas nette. De plus, les constantes  $\kappa$  et  $A$  étant calibrées pour  $Re_\tau = 2000$ , la validité des résultats est contestable.

pour des perturbations uniformes dans la direction longitudinale ( $\alpha h = 0$ ). Il s'agit de tourbillons contra-rotatifs qui donnent naissance à des streaks rapides et lents par effet lift-up. Ces résultats sont en accord avec ceux de Butler & Farrell et de del Álamo & Jiménez. Ces perturbations sont illustrées sur la figure 4.4 pour  $Re_\tau = 5000$ . Les vecteurs représentent les composantes  $v - w$  des perturbations initiales et les contours désignent la composante  $u$  des streaks optimaux. Les contours noirs sont des streaks rapides et les contours gris des streaks lents. Les perturbations associées au pic secondaire reportées sur la figure 4.4 (a) restent confinées dans la zone tampon ( $y^+ \leq 40$ ) et présentent la même organisation que les structures décrites par Robinson (1991). En (b) les perturbations optimales associées au pic primaire sont représentées en utilisant le même formalisme. A l'instant  $t = 0$ , les tourbillons s'étendent sur toute la hauteur du canal et les streaks se développent sur les deux parois en  $\eta = \pm 1$  et s'étendent sur une demi-hauteur  $h$ .

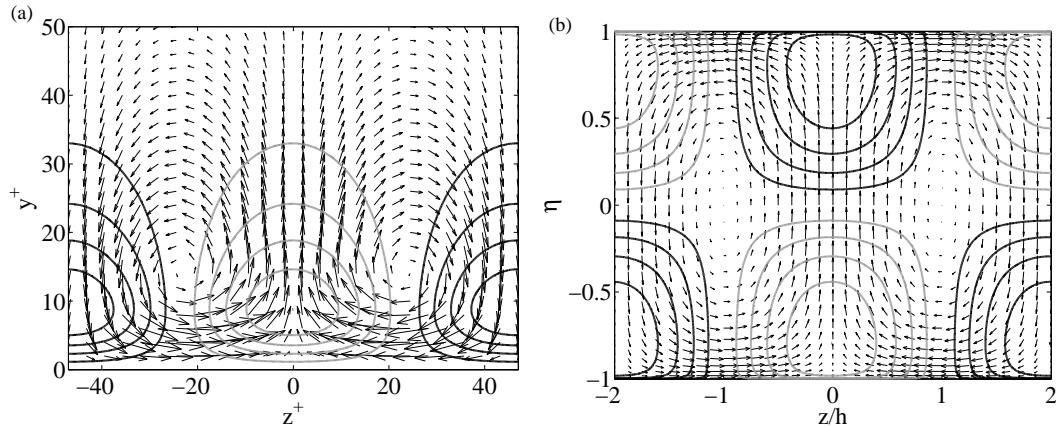


FIG. 4.4. Perturbations optimales vues dans le plan  $(z, y)$ . Les composantes  $v - w$  des tourbillons initiaux sont représentées par les vecteurs et la composante  $u$  des streaks est représentée par les contours pour  $Re_\tau = 5000$  et  $\alpha h = 0$ . (a) Les perturbations associées au pic secondaire sont tracées en échelles de proche paroi. (b) Les perturbations optimales associées au pic primaire sont tracées en échelles externes. Les contours noirs désignent  $u > 0$  et les contours gris  $u < 0$ .

Les croissances optimales  $G_{max}$  ( $\alpha h = 0, \beta h$ ) sont tracées sur la figure 4.5 pour différents  $Re_\tau$ . Pour tous ces nombres de Reynolds, deux pics sont présents. Les données sont tracées en fonction de  $\beta^+$  sur la figure 4.5 (b). Les différentes courbes se superposent et le pic secondaire atteint la valeur  $G_{max}^{(inn)} = 2.6$  pour  $\beta^+ = 0.0683$  (ce qui correspond à  $l_z^+ = 92$ ). Ceci est en accord avec les études expérimentales de Kline *et al.* (1967) ou Smith & Metzler (1983) qui font état d'une gamme de longueurs d'onde allant de  $\lambda_z^+ = 80$  à 110 pour les streaks de proche paroi.

Contrairement aux observations de del Álamo & Jiménez, le pic principal associé aux petits nombres d'onde (i.e. perturbations avec une grande longueur d'onde) voit sa valeur croître avec  $Re_\tau$ . Sa valeur est de l'ordre de 10 et est atteint pour  $\beta h = 1.5707$  ( $\lambda_z \approx 4h$  et non pas  $\lambda_z \approx 3h$ ). Les récentes DNS réalisées par le groupe de Jiménez à l'université de Madrid font état de la présence de structures quasi-uniformes dans la direction longitudinale  $\lambda_x \gg h$  et dont la longueur d'onde est voisine de  $\lambda_z = 4h$  dans le Poiseuille plan turbulent, même si celles-ci ne sont pas les plus énergétiques (del Álamo & Jiménez, 2003). Les simulations numériques tendent à montrer que les structures cohérentes les plus énergétiques ont une longueur d'onde longitudinale finie  $\lambda_x \sim 5 - 10h$  (soit  $\alpha h \sim 0.5 - 1$ ) et leur espacement transverse est proche de  $\lambda_z \sim 2 - 3h$ . Or, il apparaît que pour cette valeur  $\alpha h = 1$ , le nombre d'onde transverse

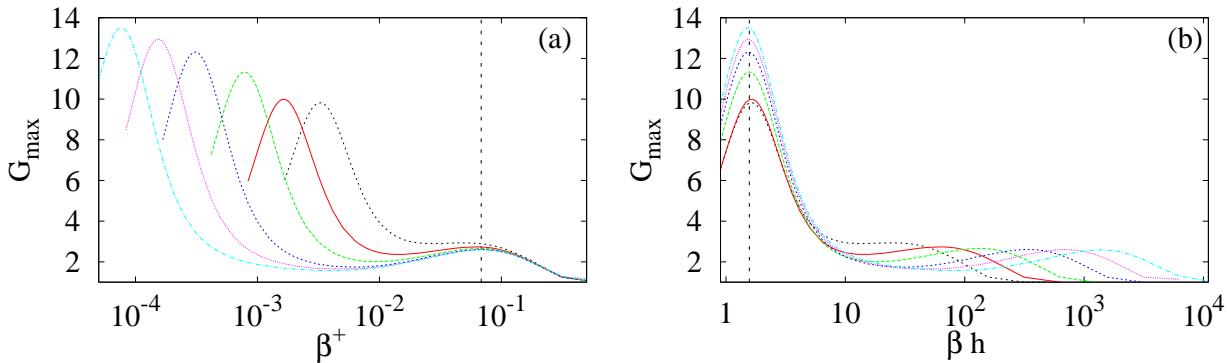


FIG. 4.5. Croissances optimales pour des perturbations uniformes dans la direction de l'écoulement ( $\alpha h = 0$ ) pour  $Re_\tau = 500, 1000, 2000, 5000, 10000$  et  $20000$  en fonction du nombre transverse exprimé en (a) unités de paroi  $\beta^+$ . La ligne pointillée verticale désigne  $\beta^+ = 0.0683$  soit  $\lambda_z^+ = 92$ . (b) unités externes  $\beta h$ . La ligne pointillée verticale désigne  $\beta h = 1.5707$  soit  $\lambda_z = 4h$ . Légende identique à celle de la figure 4.1.

conduisant à la plus forte croissance est  $\beta h \approx 2.5$  soit  $\lambda_z \approx 2.5h$ . Ces résultats prouvent que malgré la modélisation assez sommaire de la turbulence employée ici, l'apparition de structures préférentielles est relativement bien captée par l'étude de stabilité linéaire qui fournit les bonnes échelles de ces structures et des longueurs d'onde voisines de celles observées pour les structures naturelles.

## 4.2 Mise à l'échelle avec le nombre de Reynolds

Concernant le pic secondaire, nous avons déjà vu qu'il se met à l'échelle en unités de paroi (figure 4.5(a)) et que sa valeur reste constante lorsque le nombre de reynolds varie. Quant au pic principal, sa valeur croît avec  $Re_\tau$ . Dans le cadre de l'écoulement de Poiseuille plan turbulent, nous introduisons un nombre de Reynolds effectif externe noté  $Re_\bullet = U_e h / \nu_{T\max}$  et construit à partir de la vitesse au centre du canal  $U_e$ , la demi-hauteur du canal  $h$  et le maximum de viscosité totale  $\nu_{T\max} = \sup_y \nu_T(y)$ . Ce faisant, nous trouvons que la valeur du pic principal croît linéairement avec  $Re_\bullet$  suivant la loi  $G_{\max}^{(out)} \approx 0.03787 \cdot Re_\bullet$  (voir figure 4(a) de l'Article 1). Ceci diffère du cas des écoulements laminaires pour lesquels la valeur du pic de croissance optimale croît comme le carré du nombre de Reynolds  $Re = U_e h / \nu$  (voir par exemple Schmid & Henningson (2001)).

La figure 4.6 représente les profils de vitesse normale  $\tilde{v}$  des tourbillons optimaux à l'instant  $t = 0$  (a-c) et les profils de vitesse longitudinale  $\tilde{u}$  dans les streaks correspondants à  $t = t_{\max}$  (b-d). Les figures 4.6 (a) et (b) correspondent aux structures associées au pic secondaire et les vitesses sont donc tracées en fonction de  $y^+$ . Les figures 4.6 (c) et (d) correspondent quant à elles aux perturbations optimales liées au pic principal et les vitesses sont tracées en fonction de  $\eta = y/h$ . Toutes les vitesses sont normalisées, on constate alors que la forme des perturbations optimales est très peu dépendante du nombre de Reynolds  $Re_\tau$ .

Concernant les structures associées au pic secondaire, le maximum de vitesse  $\tilde{v}$ , qui donne la position du centre des tourbillons optimaux, est situé vers  $y^+ = 15$  et le maximum de vitesse  $\tilde{u}$  dans les streaks est atteint pour  $y^+ = 10$ , ce qui est aussi en accord avec les observations de streaks naturels de proche paroi. Pour les perturbations optimales macroscopiques, les tourbillons sont centrés autour du plan de symétrie du canal  $\eta = 0$  tandis que les streaks

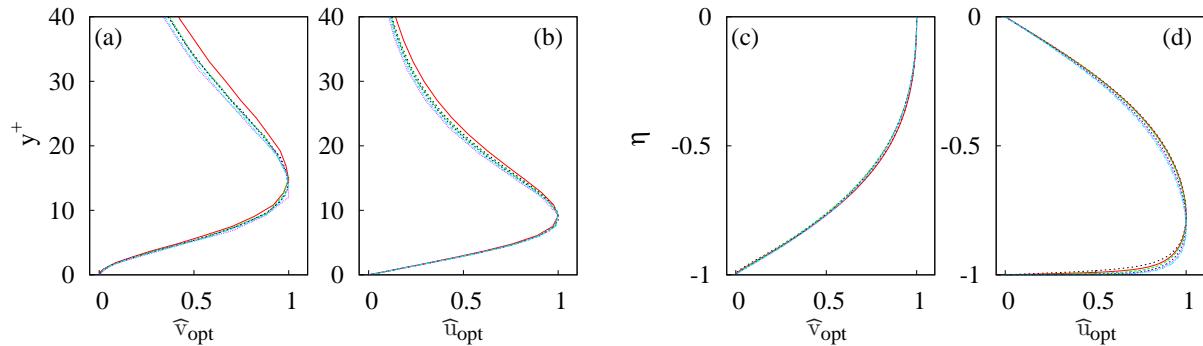


FIG. 4.6. Amplitudes normalisées de la composante de vitesse normale ( $\hat{v}$ ) des tourbillons optimaux (a)-(c) et de la composante de vitesse longitudinale ( $\hat{u}$ ) des streaks optimaux associés (b)-(d) pour les différents  $Re_\tau$  utilisés. (a)-(b) Perturbations optimales associées au pic secondaire tracées en fonction de  $y^+$ . (c)-(d) Perturbations optimales associées au pic primaire tracées en fonction de  $y/h$ .

atteignent leur maximum pour  $|\eta| = 0.8$ . Toutefois, ces streaks conservent une amplitude élevée jusqu'au très proche voisinage de la paroi. On peut, en effet, voir qu'à  $|\eta| = 0.95$  leur amplitude est de l'ordre de 80% de l'amplitude maximale.

La figure 4.7 reprend les données de la figure 4.6 (d) tracées cette fois-ci en fonction de  $y^+$ . L'accent est ici mis sur le comportement de ces streaks dans la zone logarithmique et en proche paroi. La ligne continue noire désigne le profil de vitesse moyenne  $U$  obtenu pour  $Re_\tau = 5 \times 10^3$ . Ce profil est normalisé de sorte qu'il soit superposé aux profils de vitesse issus des streaks. On peut alors constater que les streaks pénètrent très loin dans la région de proche paroi : à  $y^+ = 10$  leur amplitude atteint encore 50% de leur amplitude maximale.

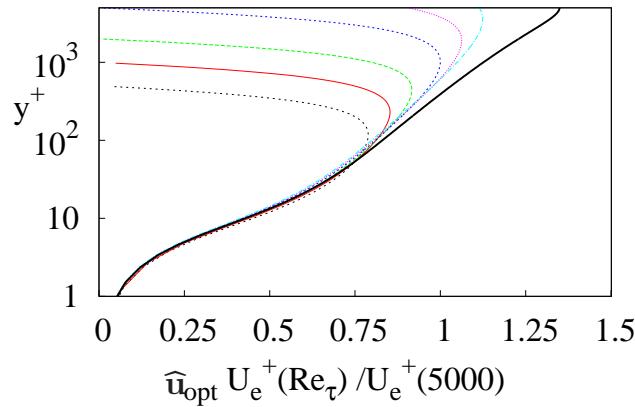


FIG. 4.7. Composante longitudinale  $\hat{u}$  normalisée des streaks optimaux associés au pic principal. Mêmes données que sur la figure 4.6 (d) représentées en fonction de  $y^+$  et adimensionnées par le profil obtenu pour  $Re_\tau = 5000$ . La ligne noire continue désigne le profil de vitesse moyenne  $U$  pour  $Re_\tau = 5000$  normalisé de façon à être confondu avec les profils de streaks optimaux. Seule la moitié du canal est représentée.



## Chapitre 5

# Les perturbations optimales dans une couche limite turbulente

Nous étendons à présent l'approche utilisée dans le chapitre précédent pour l'écoulement de Poiseuille plan turbulent au cas qui nous intéresse plus particulièrement : celui de la couche limite turbulente sur plaque plane. On peut en effet estimer qu'en première approximation, l'écoulement se développant sur le pavillon d'une automobile est assimilable à un couche limite turbulente sur plaque plane. Malgré son importance théorique et industrielle, la couche limite turbulente n'a pas été l'objet d'études de perturbations optimales. Bien que les écoulements de Poiseuille plan turbulent et de couche limite turbulente présentent de nombreux points communs (une grande partie du profil de vitesse moyenne est commune, présence de structures cohérentes semblables), l'absence de paroi supérieure confère à la couche limite certaines particularités qui justifient une étude de perturbations optimales dédiée. Notre démarche visant à utiliser les perturbations les plus amplifiées pour contrôler le décollement d'un tel écoulement, il est primordial de répondre à aux questions suivantes. Quelles sont les longueurs d'onde (dans les directions transverse et longitudinale) les plus amplifiées ? Comment varient-elles en fonction du nombre de Reynolds ? Quelle est la forme des perturbations optimales initiales et finales ? Cette partie a donné lieu à une publication dans le *Journal of Fluid Mechanics* reportée dans ce manuscrit en tant qu'Article 2 (Cossu *et al.*, 2009).

### 1 L'écoulement de base

La vitesse moyenne utilisée pour cette étude est décrite par le profil analytique introduit par Monkewitz *et al.* (2007) (voir relation (3.8)). Comme pour l'écoulement de Poiseuille plan turbulent, la viscosité turbulente associée à ce profil de vitesse est nécessaire au calcul des perturbations optimales. Son calcul est toutefois bien moins aisés que précédemment en raison du non-parallélisme de l'écoulement de base. Pour réaliser ce calcul, nous utilisons le fait que les contraintes de cisaillement associées au profil de vitesse moyenne  $U$  peuvent être obtenues par la relation suivante :

$$\frac{\tau(y)}{\rho} = u_\tau^2 + \int_0^y \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy \quad (5.1)$$

où la composante normale de vitesse  $V$  est déterminée grâce à l'équation de continuité  $V = - \int_0^y (\partial U / \partial x) dy$ . Les principaux détails du calcul étant présentés dans le second article de

ce manuscrit, nous n'y reviendrons pas ici. L'écoulement moyen utilisé est représenté sur la figure 5.1 pour une gamme de nombres de Reynolds  $Re_{\delta^*} = U_e \delta^* / \nu$ , où  $\delta^* = \int_0^\delta (1 - U/U_e) dy$  est l'épaisseur de déplacement. Afin de valider le profil des tensions de Reynolds  $-\langle u'v' \rangle^+ = (\tau/\rho - \nu U')/u_\tau^2$ , les données de De Graaff & Eaton (2000) pour  $Re_{\delta^*} = 17300$  sont aussi reportées pour comparaison.

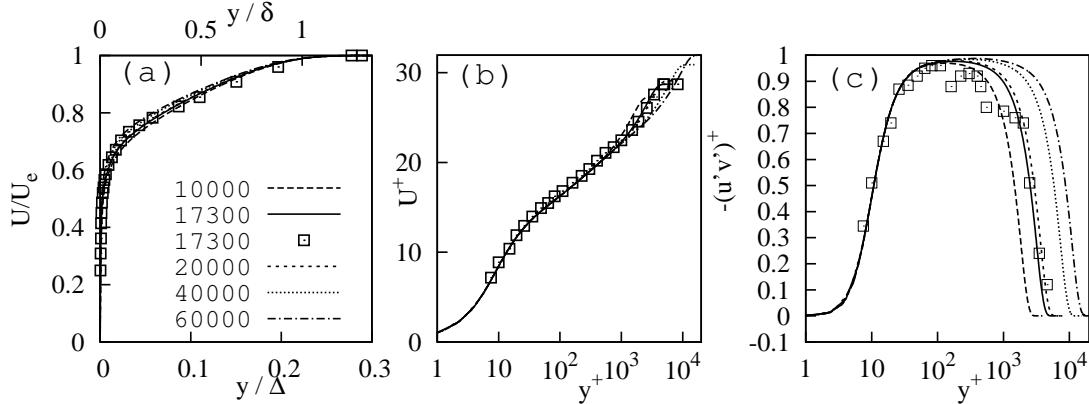


FIG. 5.1. Profil de vitesse moyenne  $U$  en fonction de la distance à la paroi tracée (a) en unités externes et (b) en unités de paroi. (c) Profil de tensions de Reynolds  $-\langle u'v' \rangle^+$  associées tracées en unités de paroi. Les données expérimentales de De Graaff & Eaton (2000) pour  $Re_{\delta^*} = 17300$  sont reportées pour comparaison.

## 2 Formulation

Contrairement à l'écoulement de Poiseuille plan turbulent, la couche limite turbulente est faiblement non-parallèle : la vitesse moyenne est fonction de la direction normale  $y$  et de la direction de l'écoulement  $x$ . L'épaisseur de la couche limite turbulente  $\delta$  double sur une distance de  $50 \sim 100\delta$  suivant le nombre de Reynolds. Toutefois, une approche localement parallèle est maintenue dans cette étude car elle s'est avérée appropriée dans des études similaires. Par exemple, dans le cas de la couche limite laminaire de Blasius, Butler & Farrell (1992) avec la même approche ont trouvé des optimaux pour  $\alpha\delta^* = 0$ ,  $\beta\delta^* = 0.65$  qui connaissent une croissance de  $G_{max} = 1.5 \cdot 10^{-3} Re_{\delta^*}$ . Avec une approche non-parallèle, Andersson *et al.* (1999) et Luchini (2000) ont trouvé  $\alpha\delta^* = 0$ ,  $\beta\delta^* = 0.77$  et  $G_{max} = 0.784 \cdot 10^{-3} Re_{\delta^*}$ . Cela prouve que dans le cas laminaire, l'analyse avec l'hypothèse parallèle permet de prédire au moins qualitativement les principales caractéristiques des perturbations optimales. Dans le cas turbulent, la mise en place de calculs suivant l'approche non-parallèle s'avérerait de surcroît très coûteuse en ressources et complexe à développer (voir Article 2).

## 3 Perturbations optimales à nombre de Reynolds fixé

Dans un premier temps, les perturbations optimales sont calculées à  $Re_{\delta^*} = 17300$  pour une gamme de nombres d'onde longitudinaux  $\alpha\Delta$  et transverses  $\beta\Delta$  compris entre 0 et  $10^4$ . Nous rappelons que  $\Delta$  désigne ici l'épaisseur de Rotta-Clauser définie par  $\Delta = \delta^* U_e / u_\tau$ . Comme dans le cas des écoulements laminaires ou du Poiseuille plan turbulent, les perturbations qui donnent lieu aux plus fortes croissances sont uniformes dans la direction de l'écoulement (i.e.  $\alpha = 0$ ) ; ces

structures sont là encore des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs qui donnent naissance à des streaks. Par ailleurs, seules les perturbations allongées dans la direction longitudinale ( $\alpha \leq \beta$ ) sont amplifiées.

Sur la figure 5.2 sont tracées les perturbations optimales  $\alpha = 0, \beta\Delta = 3.7$  en fonction de  $z/\Delta, y/\Delta$ . L'épaisseur de la couche limite turbulente est de l'ordre de  $\delta \approx 0.223\Delta$ . Les tourbillons contra-rotatifs sont centrés juste au dessus de  $\delta$  tandis que les streaks s'étendent sur toute l'épaisseur de la couche limite turbulente. De plus, ces streaks optimaux ont une amplitude non négligeable à l'extérieur de la couche limite turbulente mais aussi au voisinage proche de la paroi ( $y \leq 0.05\Delta$ ). Les perturbations associées au pic secondaire sont identiques à celles issue du Poiseuille plan turbulent illustrées en figure 4.6 (a) (elles sont cependant présentées sur la figure 3 (a) de l'Article 2).

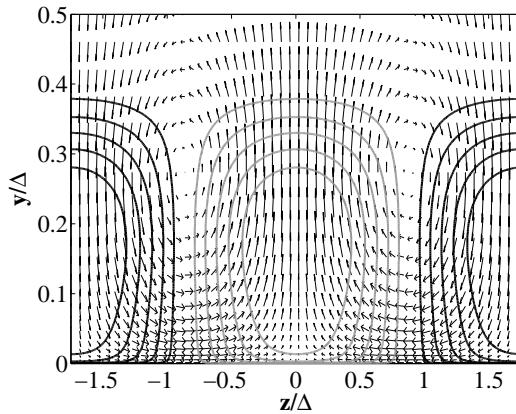


FIG. 5.2. Perturbations optimales associées au pic primaire  $\alpha = 0, \beta\Delta = 3.7$  pour  $Re_{\delta^*} = 17300$ . Le formalisme est identique à celui de la figure 4.4.

## 4 Influence du nombre de Reynolds

Nous avons ensuite répété le calcul de perturbations optimales longitudinales ( $\alpha\Delta = 0$ ) pour une gamme de nombres de Reynolds comprenant des nombres élevés ( $Re_{\delta^*} = 10^4, 2.10^4, 4.10^4$  et  $6.10^4$ ) et des nombres plus faibles ( $10^3, 2.10^3$ ). Conformément aux résultats observés avec le Poiseuille plan turbulent, deux pics de croissance optimale apparaissent et se détachent dès que le nombre de Reynolds est suffisamment élevé (pour  $Re_{\delta^*} \geq 1500$ , cf. figure 5.3) : un premier pic de forte amplitude pour des petits nombres d'onde (grandes longueurs d'onde  $\lambda_z$ ) et un second pic de plus faible amplitude pour les grands nombres d'onde (petites longueurs d'onde). Pour l'ensemble des nombres de Reynolds utilisés, le pic primaire est centré autour de la même gamme de longueurs d'onde ( $1 \leq \beta\Delta \leq 11$ ) et l'amplitude de ce pic croît avec  $Re_{\delta^*}$ . Le pic secondaire est, au contraire, d'amplitude constante, et la position de ce pic est déplacé vers les grandes valeurs de  $\beta\Delta$  à mesure que  $Re_{\delta^*}$  augmente.

Les croissances optimales calculées pour les quatre nombres de Reynolds les plus élevés sont tracées en unités de paroi sur la figure 5.4(a). Comme dans le cas du Poiseuille plan turbulent, toutes les courbes sont confondues. Le gain optimal est de l'ordre de  $G_{max}^{(inn)} = 2.8$ , ce qui est très proche de la valeur 2.6 obtenue dans le cas du Poiseuille plan turbulent (voir chapitre 4, section 4.1).  $G_{max}^{(inn)}$  est obtenu pour  $\beta_{opt}^{+(inn)} = 0.077 \pm 0.001$  soit  $\lambda_{z, opt}^+ = 81.6 \pm 1$ .

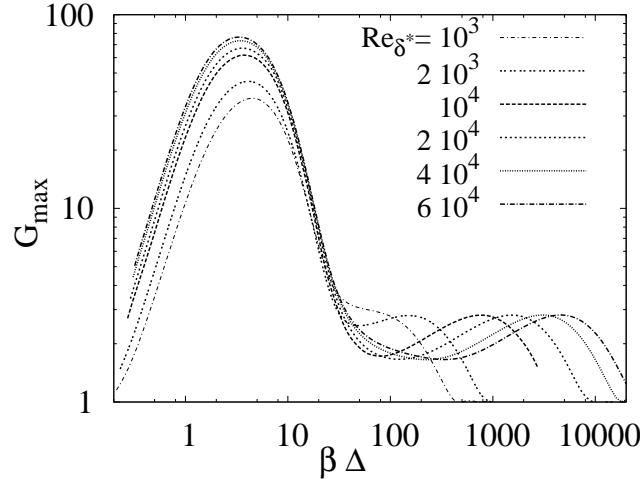


FIG. 5.3. Croissances optimales des perturbations uniformes dans la direction longitudinale ( $\alpha\Delta = 0$ ) en fonction du nombre d'onde transverse  $\beta\Delta$  pour différents nombres de Reynolds  $Re_{\delta^*}$ .

Encore une fois, cette valeur est inférieure à la valeur  $l_z^+ = 100$  pour l'espacement des streaks naturels de proche paroi reportée notamment par Kline *et al.* (1967) ou Smith & Metzler (1983). Toutefois, comme précisé par Smith & Metzler (1983), la valeur  $l_z^+ = 100$  est une valeur moyenne tandis que la valeur la plus probable est inférieure de 20% soit  $l_z^+ = 80$  ce qui est en accord avec la longueur d'onde optimale  $\lambda_{z, opt}^+$ . Il semble donc que la longueur d'onde la plus amplifiée corresponde à la longueur d'onde la plus probable pour les streaks de proche paroi.

#### 4.1 Mise à l'échelle du pic externe

Le pic principal dépend lui de variables externes. Si dans le cas du Poiseuille plan turbulent, la longueur caractéristique externe est fixée par les dimensions du canal  $h$ , pour la couche limite turbulente on peut définir plusieurs longueurs ( $\delta, \delta^*, \theta$  ou encore  $\Delta$ ). L'épaisseur de Rotta-Clauser  $\Delta$ , bien qu'étant la longueur caractéristique externe utilisée pour construire le profil de vitesse de Monkewitz *et al.* (2007), n'est pas l'échelle caractéristique des perturbations optimales (voir figure 5.3). Cela peut être dû au fait que le facteur de forme  $H = \delta^*/\theta$  de ce profil varie avec  $Re_{\delta^*}$  (voir Monkewitz *et al.* (2007)). Dans une précédente étude portant sur les couches limite laminaires soumises à un gradient de pression (et donc dont  $H$  varie), Corbett & Bottaro (2000) ont constaté que l'échelle de longueur caractéristique pour les perturbations optimales est l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta = \int_0^\delta U/U_e \cdot (1 - U/U_e) dy$ . Dans le cas présent, nous introduisons donc une variante de l'épaisseur de Rotta-Clauser basée sur  $\theta$  :

$$\Delta_\theta = \theta \frac{U_e}{u_\tau} = \frac{\Delta}{H} \quad (5.2)$$

La figure 5.4 (b) présente les courbes de croissance optimale tracées en fonction du nombre d'onde adimensionné  $\beta\Delta_\theta$ . Les courbes se superposent et le maximum de croissance est obtenu pour le nombre d'onde  $\beta_{opt}^{(out)} \Delta_\theta = 2.7 \pm 0.1$  ce qui correspond à  $\lambda_{z, opt}^{(out)} \sim 8\delta$ . Comme c'était le cas pour le Poiseuille plan turbulent, le gain varie linéairement avec un nombre de Reynolds effectif externe noté  $Re_\bullet$  défini par :

$$Re_{\bullet} = \frac{U_e \Delta_{\theta}}{\nu T_{max}} \quad (5.3)$$

Nous trouvons alors que  $G_{max}^{(out)} = (0.0508 \pm 0.0004) Re_{\bullet}$ .

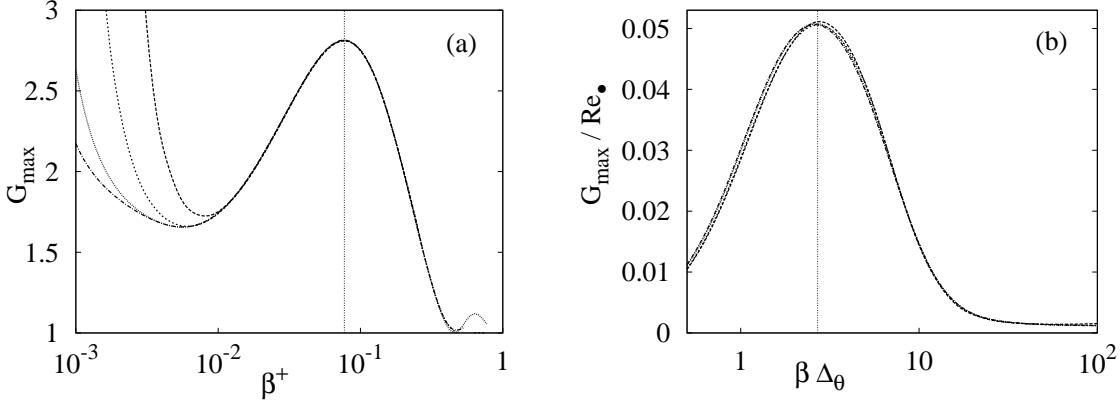


FIG. 5.4. Croissances optimales pour les grands nombres de Reynolds ( $10^4, 2 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4, 6 \cdot 10^4$ ) en fonction du nombre d'onde transverse. (a) En échelle de paroi  $\beta^+$  et zoomé sur le pic secondaire. La ligne pointillée verticale désigne le nombre d'onde optimal  $\beta^+ = 0.077$  ( $\lambda_z^+ = 81.6$ ). (b) En unités externes et zoomé sur le pic primaire. Le nombre d'onde est adimensionné par l'échelle de Rotta-Clauser modifiée  $\Delta_{\theta}$  et le gain par le nombre de Reynolds effectif  $Re_{\bullet}$ . La ligne pointillée verticale désigne le nombre d'onde optimal  $\beta \Delta_{\theta} = 2.7$ . Les légendes sont identiques à celles de la figure 5.3.

Les études numériques et expérimentales n'ont pas fait état de la présence d'aussi grandes structures cohérentes dans la couche limite turbulente. Depuis le début des années 2000 les groupes d'Adrian (Université de l'Illinois) et Marusic (Université de Melbourne) ont mis en évidence la présence de streaks dans la zone logarithmique et la zone de sillage. Ces streaks s'étendent sur des longueurs de l'ordre de  $20\delta$  et leur largeur est de l'ordre de  $\delta$  (Hutchins & Marusic, 2007a). Même si les valeurs diffèrent (voir discussion dans la conclusion de l'Article 2 à ce propos), les ordres de grandeur sont voisins, ce qui indique que des structures de cette taille pourraient apparaître sous l'effet d'un forçage. Ce point sera discuté en détail dans le chapitre 6.

## 4.2 Similarité des perturbations optimales

Sur la figure 5.5, la composante normale  $\hat{v}$  des tourbillons optimaux à l'instant  $t = 0$  (figure 5.5(a) et (c)) et la composante longitudinale  $\hat{u}$  de la vitesse dans les streaks (figure 5.5(b) et (d)) sont tracées en fonction de la direction normale. Les perturbations optimales associées aux deux pics sont représentées et la direction normale est alors exprimée en échelle de paroi ( $y^+$ ) ou externe ( $y/\Delta_{\theta}$ ). On constate que les différents profils de vitesse se superposent et donc que la forme des perturbations est indépendante du nombre de Reynolds. Pour les perturbations associées au pic secondaire, le maximum de vitesse  $\hat{v}$ , qui donne la position du centre des tourbillons initiaux, est situé approximativement en  $y^+ = 13$  tandis que le maximum de vitesse  $\hat{u}$  dans les streaks est localisé au voisinage de  $y^+ = 8.5$ . Concernant le pic principal, le centre des tourbillons est situé à  $y = 0.36\Delta_{\theta}$ , soit juste au dessus de la frontière entre la couche limite

turbulente et l'écoulement potentiel. Le maximum de vitesse dans les streaks optimaux est obtenu autour de  $y = 0.22\Delta\theta$  (c'est à dire au bord de la couche limite). Cependant, ces streaks ont une amplitude importante dans toute la couche limite turbulente puisque à  $y^+ = 20$ , leur amplitude est de l'ordre de 50% de leur amplitude maximale.

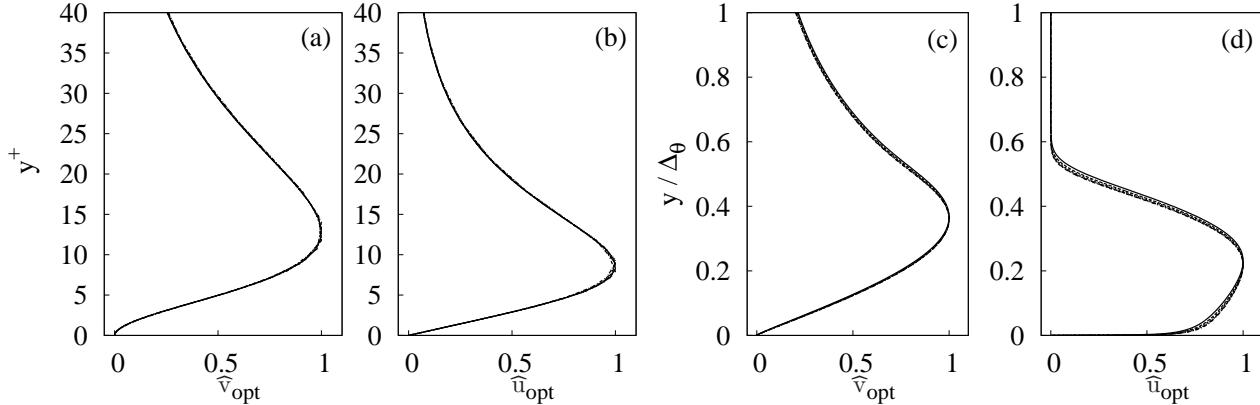


FIG. 5.5. Profils de vitesse normalisés dans les tourbillons optimaux (composante  $\hat{v}$ ) (a)-(c) à  $t = 0$  et dans les streaks correspondants (composante  $\hat{u}$ ) (b)-(d) à  $t = t_{max}$ . Les perturbations optimales associées aux pics secondaire (a)-(b) et principal (c)-(d) sont représentées en fonction de la direction normale en unités de proche paroi et externe. Les légendes sont identiques à celles de la figure 5.3.

## 5 Discussion

Les similitudes entre les résultats obtenus pour la couche limite turbulente et ceux obtenus pour l'écoulement de Poiseuille plan turbulent sont nombreuses : présence de deux pics, un pic secondaire d'amplitude constante pour  $\lambda_z \approx 100$  et un pic principal dont l'amplitude augmente avec le nombre de Reynolds, évolution linéaire de cette valeur avec  $Re_\bullet$  ou encore auto-similitudes des perturbations optimales. Toutefois, plusieurs différences notables sont apparues. Tout d'abord, la bande de longueurs d'onde  $\mathcal{O}(\delta)$  fortement amplifiées est bien plus large dans le cas de la couche limite turbulente : les longueurs d'onde  $\lambda_z \in [1\delta; 30\delta]$  sont amplifiées tandis que pour le Poiseuille plan turbulent, les longueurs d'onde  $\lambda_z \in [1h; 7h]$  sont amplifiées. De plus, le niveau d'amplification est bien plus important dans le cas de la couche limite turbulente ; le gain est de pratiquement deux ordres de grandeur pour la couche limite turbulente contre un ordre de grandeur pour le Poiseuille plan turbulent.

Si l'on compare les résultats de la couche limite turbulente avec ceux de la couche limite laminaire (de Blasius), on constate que la longueur d'onde optimale est bien plus grande :  $\lambda_z \sim 8\delta$  pour la couche limite turbulente contre  $\lambda_z \sim 3.3\delta$  dans le cas laminaire. La même tendance est observée pour les écoulements de Poiseuille dans ces deux régimes ( $\lambda_z \approx 4h$  en régime turbulent contre  $\lambda_z \approx 3h$ ). La sélection de grandes longueurs d'onde par les écoulements turbulents semble être intimement lié à l'écoulement de base (vitesse moyenne  $U$  et viscosité turbulente  $\nu_t$ ). En revanche, du fait de la diffusion turbulente modélisée par la viscosité turbulente, l'amplification des perturbations est moins importante dans le cas de la couche limite turbulente et varie linéairement avec le nombre de Reynolds effectif  $Re_\bullet$  tandis que la dépendance vis à vis du nombre de Reynolds est quadratique. Cependant, dans le cas

turbulent comme dans le cas laminaire, les profils des perturbations optimales ( $\widehat{v}_{opt}$  et  $\widehat{u}_{opt}$ ) sont auto-similaires (i.e. les profils restent identiques lorsque le nombre de Reynolds varie).



# Chapitre 6

## Forçage expérimental de streaks cohérents turbulents

### 1 Motivations

Les études de stabilité présentées dans la partie précédente ont montré que les perturbations optimales dans les écoulements turbulents sont des tourbillons longitudinaux contrarotatifs qui donnent naissance à des streaks à très grande échelle ( $\lambda_{zopt} \approx 8\delta$ ). Contrairement aux streaks présents dans la zone tampon, de telles structures n'ont pas été observées naturellement dans les écoulements cisaillés turbulents. Les récentes observations de Jiménez (2007); Hutchins & Marusic (2007a) indiquent la présence de streaks dont l'espacement transverse est de l'ordre de  $\lambda_z \approx 1\delta$ . Les résultats précédents soulèvent plusieurs questions. Les perturbations dont la longueur d'onde est  $\lambda_z \geq 1\delta$  sont-elles effectivement amplifiées ? Correspondent-elles à des streaks cohérents (au sens statistique) ?

Afin de mettre en place une stratégie de contrôle utilisant ces perturbations optimales, nous devons donc dans un premier temps nous assurer de pouvoir forcer ces streaks. Si tel est le cas, d'autres questions sont alors soulevées : Ces streaks sont-ils stables ? Quelle est leur amplitude maximale et sur quelle distance est-elle atteinte ? La hiérarchie entre les longueurs d'onde optimales issue de la théorie linéaire avec viscosité turbulente est-elle respectée en présence de la “vraie” turbulence et quand les streaks ont une amplitude finie ?

Pour répondre à ces questions nous considérons une couche limite turbulente se développant sur une plaque plane. Nous nous concentrons sur les très grandes structures associées au pic principal. Toute une gamme de longueurs d'onde balayant la largeur de ce pic est testée. Les propriétés des streaks sont étudiées et une comparaison entre ces résultats et ceux issus de la théorie linéaire du chapitre 5 conclut ce chapitre. Une partie de ces résultats a été publiée dans les *Proceedings of the Sixth Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena* et est présentée dans l'Article 3 de ce manuscrit (Pujals *et al.*, 2009a).

### 2 Soufflerie BREATH et moyens de mesure

Cette étude a été réalisée au sein du service ARCT<sup>1</sup>. Les essais reportés dans cette partie ont été conduits dans le banc BREATH<sup>2</sup>. Il s'agit d'une soufflerie à retour dont la veine d'essai

---

<sup>1</sup>AéRodynamique aéraoCoustique et aéroThermique

<sup>2</sup>Banc de Recherches et d'Etudes Aérodynamiques et TThermiques

mesure  $0.8m$  de long et la section carrée mesure  $0.3m \times 0.3m$ . La température est régulée et maintenue constante à  $\pm 0.5^\circ C$ . Le rapport de contraction du convergent est de 8 et la plage de vitesses s'étend de  $7m.s^{-1}$  à  $45m.s^{-1}$ . Les précédentes campagnes d'essai (voir par exemple Goossens (2005)) ont montré que le taux de turbulence dans l'écoulement potentiel est de l'ordre de 1%.

Dans le cadre de cette campagne d'essais, la vitesse est mesurée par Particle Image Velocimetry (PIV, pour plus d'informations voir Adrian (1991); Raffel *et al.* (1998) ainsi que l'Annexe B pour le détail du matériel et du protocole). Le système utilisé permet d'obtenir des champs de vitesse 2 Dimensions-2 Composantes adaptés aux visualisations des streaks stationnaires et cohérents (champs de vitesse  $U(x, z)$ ) que nous forçons. La principale limitation de ce moyen de mesure réside dans l'obtention de profils de vitesse  $U(y)$  pour lesquels le fort gradient et les dimensions de la veine rendent son utilisation complexe.

### 3 Ecoulement de base

La vitesse de soufflage est fixée à  $U_e = 20m.s^{-1}$  et la température de l'écoulement maintenue constante à  $21^\circ C$ . La couche limite est mesurée sur la paroi de la veine d'essai, dans le plan de symétrie de celle-ci. La section de la veine étant constante, la couche limite subit les effets d'un léger gradient de pression favorable (De Graaff & Eaton, 2000). Dans le cas d'une couche limite d'équilibre, la valeur du gradient de pression adimensionné est obtenue grâce à la relation  $\beta_P = \delta^*/(\rho u_\tau^2) P/dx = -m/(1+3m)$  (Townsend, 1960; Mellor & Gibons, 1966). La valeur alors mesurée est de  $\beta_P = -0.022$  ce qui indique un très faible gradient de pression favorable.

TAB. 6.1. Couche limite : variables externes à  $x = 110mm$  du début de la veine d'essai et gradient de pression

$U_e$ ( $m.s^{-1}$ )	$\delta$ (mm)	$m$	$\beta_P$
20.3	5.4	0.024	-0.022

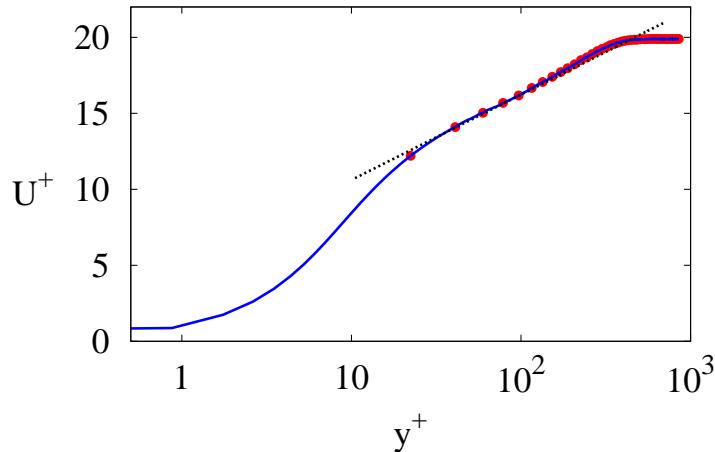


FIG. 6.1. Profil de vitesse moyenne en unités de paroi  $U^+(y^+)$ . Les points rouges représentent les données mesurées par PIV. La courbe bleue représente le profil prolongé à la paroi par la loi analytique de Monkewitz *et al.* (2007). La ligne noire désigne la loi  $U^+ = \log(y^+)/0.41 + 5..$

Du fait des dimensions restreintes de la veine d'essais, la couche limite qui s'y développe est très fine. A  $U_e = 20m.s^{-1}$ , l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite, mesurée grâce aux profils obtenus par PIV, est de l'ordre de  $\delta = 5.4mm$ . Cette faible épaisseur associée à la vitesse  $U_e$  élevée rendent difficile et peu précises les mesures PIV dans les zones de faible vitesse. En conséquence, nous n'avons pas un accès direct aux épaisseurs intégrales  $\delta^*$ ,  $\theta$  ou encore  $\Delta$ , ni à la vitesse de frottement  $u_\tau$ . Afin d'avoir une estimation de ces grandeurs, nous utilisons une méthode de prolongement jusqu'à la paroi du profil de vitesse moyenne fondée sur la méthode décrite par Kendall & Koochesfahani (2008) pour estimer la vitesse de frottement  $u_\tau$  (voir Annexe C). Le résultat de ce prolongement est reporté sur la figure 6.1 avec le profil mesuré. Ce prolongement, outre une estimation de  $u_\tau$ , permet donc d'estimer les différentes épaisseurs intégrales. Ces valeurs sont reportées dans le tableau 6.2. Le nombre de Reynolds  $Re_{\delta^*} = U_e \delta^* / \nu$  est alors de  $Re_{\delta^*} \approx 1000$  et  $Re_\theta = U_e \theta / \nu \approx 750$ . Ces valeurs sont les plus faibles parmi celles étudiées au chapitre 5.

TAB. 6.2. Couche limite : grandeurs intégrales déduites grâce au prolongement analytique décrit en 7.

$U_e (m.s^{-1})$	$u_\tau (m.s^{-1})$	$C_f \cdot 10^3$	$\delta^* (mm)$	$\theta (mm)$	$\Delta (mm)$	$H$
20.3	1.02	5.05	0.79	0.55	15.7	1.42

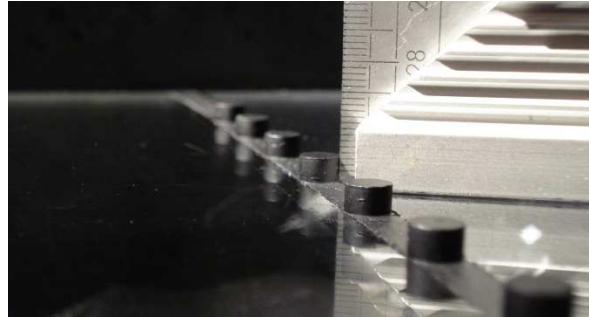


FIG. 6.2. Eléments de rugosité. Les éléments mesurent 4mm de haut comme indiqué sur l'équerre visible sur la partie droite de l'image.

## 4 Eléments de rugosité

Les actionneurs retenus pour forcer les streaks sont des éléments de rugosité cylindriques. Le dimensionnement de tels éléments repose essentiellement sur les paramètres suivants : leur hauteur  $k$ , leur diamètre  $d$  et l'espacement entre deux cylindres  $\lambda_z$ . Dans cette étude, la hauteur des cylindres est constante et fixée à  $k = 4mm$  ( $k = 0.8\delta_0$  qui est proche de  $k = \delta_0$  utilisé par Fransson *et al.* (2006)). Afin de forcer des tourbillons dont la forme est proche de la forme optimale, nous travaillons à rapport  $\lambda_z/d$  constant. Nous choisissons notamment la valeur  $\lambda_z/d = 4$  déjà utilisée dans les écoulements laminaires par White (2002); Fransson *et al.* (2005, 2006) et Hollands & Cossu (2009). Cette approche permet de s'assurer que les tourbillons, et par conséquent les streaks, sont bien créés selon le même mécanisme quelle que soit la longueur d'onde étudiée (voir à ce propos l'étude menée par Beaudoin (2004) sur le comportement collectif des générateurs de vortex). Les longueurs d'onde  $\lambda_z$  utilisées sont choisies de façon à

couvrir une partie du pic principal observé au chapitre 5. Les valeurs retenues sont données dans le tableau 6.3. Sur la figure 6.2, on peut observer l'une des configurations retenues installée dans la veine d'essai.

TAB. 6.3. Paramètres des configurations étudiées

Config.	$\lambda_z$ (mm)	$d$ (mm)	$\lambda_z/d$	$\lambda_z/\delta_0$	$k/\delta_0$
A	15.8	3.94	4	3	0.8
B	26.8	6.7	4	5	0.8
C	33	8.25	4	6	0.8
D	40.	10.	4	7.5	0.8
E	50.8	12.7	4	10	0.8
F	65.6	16.4	4	12	0.8

## 5 Streaks cohérents expérimentaux

La première étape de cette étude consiste à s'assurer que les streaks turbulents à grande échelle ( $\lambda_z = \mathcal{O}(\delta_0, 10\delta_0)$ ) peuvent être forcés, et alors à estimer leur effet sur l'écoulement moyen. Pour cela, des mesures par PIV rasante sont exploitées. Sur la figure 6.3, la vitesse longitudinale  $U(x/\lambda_z, z/\lambda_z)$  est représentée lorsque la configuration C (voir tableau 6.3) est mise en place. Le plan de mesure a été réalisé à  $Y = k/2$  (soit à 2mm de la paroi). La vitesse est adimensionnée par la vitesse de l'écoulement externe  $U_e$  et les coordonnées longitudinales et transverse sont adimensionnées par la longueur d'onde de la perturbation  $\lambda_z$ . La figure 6.3(a) représente un champ de vitesse instantané sur lequel la modulation transverse induite par la rangée de cylindres est clairement visible : la vitesse  $U(x/\lambda_z, z/\lambda_z)/U_e$  présente une alternance de streaks rapides (contours chauds) et de streaks lents (contours froids). La figure 6.3(b) présente l'écoulement moyenné sur l'ensemble des 600 champs acquis lors de cet essai.

Ce champ moyen de vitesse représente bien les streaks cohérents stationnaires ainsi forcés. On notera par ailleurs que les streaks rapides sont situés dans le prolongement du sillage des cylindres tout comme dans les études sur la couche limite de Blasius (Fransson *et al.*, 2005). Contrairement aux structures naturelles de la couche limite turbulente évoquées dans le chapitre 1 section 4 et décrites par Tomkins & Adrian (2003) ou Hutchins & Marusic (2007a), les streaks forcés artificiellement peuvent être directement observés sur les champs de vitesse simplement moyennés dans le temps car leur phase transverse est fixée par la disposition des éléments de rugosité. Dans le cas de streaks naturels (i.e. non forcés) des méthodes de visualisation plus sophistiquées seraient nécessaires (comme par exemple du moyennage conditionnel).

La figure 6.4 représente le profil de vitesse moyenne  $U(x = 3.7\lambda_z, Y = k/2, z/\lambda_z)/U_e$  en fonction de la direction transverse  $z/\lambda_z$  (cercles). Ce profil est fortement modulé dans la direction transverse. Cette modulation est périodique et la longueur d'onde associée est exactement la longueur d'onde  $\lambda_z$  de la perturbation appliquée en amont (résultat confirmé par la ligne continue qui représente le best fit fondé sur une fonction sinus selon l'approche décrite dans Hollands & Cossu (2009) et présentée dans l'Annexe D).

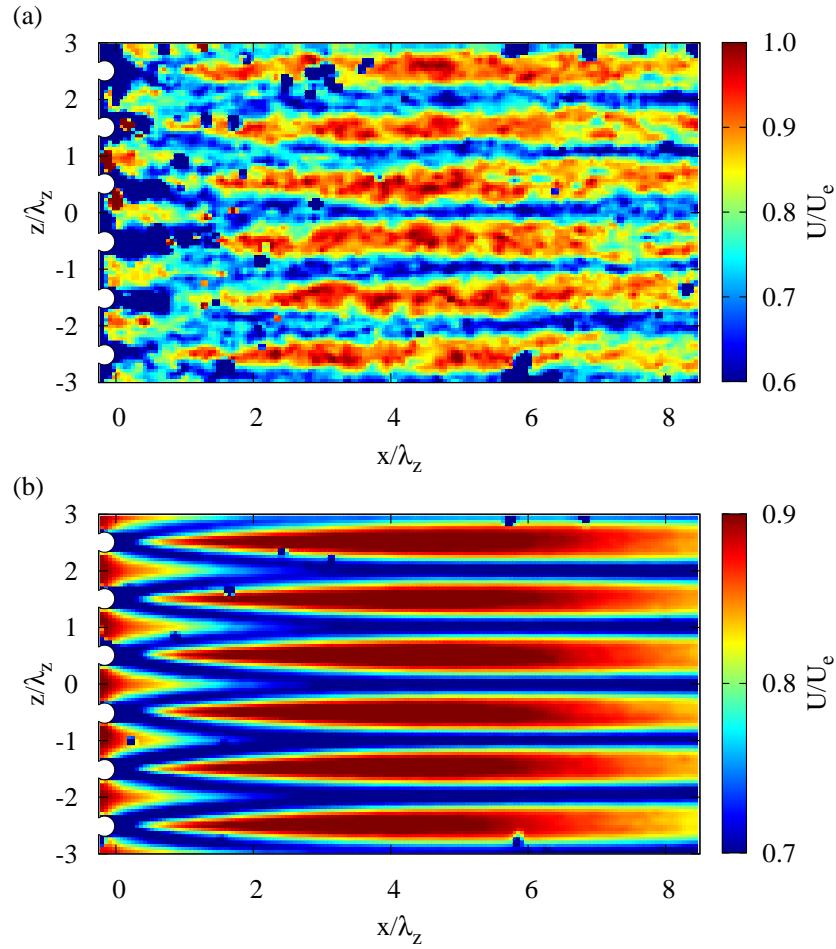


FIG. 6.3. Streaks turbulents à grande échelle forcés dans une couche limite turbulente sur plaque plane. La mesure par PIV rasante est effectuée à  $Y = k/2$  (soit  $Y = 2\text{mm}$ ) de la paroi et la configuration employée est la C dont les paramètres sont décrits dans le tableau 6.3. L'écoulement est orienté de la gauche vers la droite et la composante longitudinale de vitesse  $U/U_e$  est représentée. Les cylindres sont représentés par les cercles blancs sur la partie gauche de la figure.  
(a) Champ PIV instantané. (b) Moyenne temporelle des champs PIV acquis.

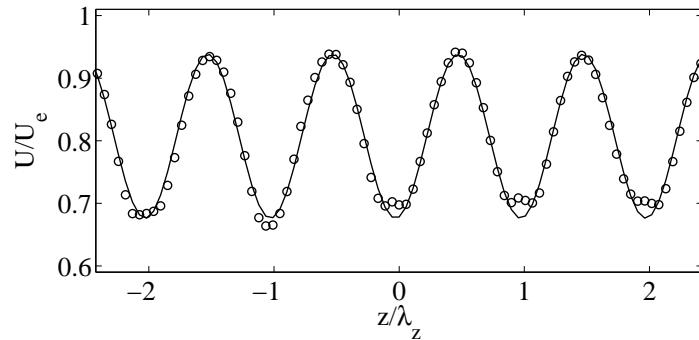


FIG. 6.4. Profil de vitesse longitudinale  $U/U_e$  ( $x = 3.7\lambda_z, Y, z/\lambda_z$ ) (cercles) et le best fit sinusoïdal (ligne continue) tracés en fonction de  $z/\lambda_z$  pour  $x/\lambda_z \approx 3.7$ .

### 5.1 Croissance transitoire des streaks turbulents

Il existe dans la littérature plusieurs mesures de l'amplitude des streaks comme le critère reposant sur l'énergie cinétique utilisé dans le cadre de l'étude des perturbations optimales linéaires ou encore le critère min-max utilisé dans Andersson *et al.* (2001) et reporté dans l'Annexe 7. Cependant, le dispositif expérimental utilisé ici ne permet pas de quantifier l'énergie cinétique contenue dans les streaks ni d'appliquer le critère min-max tel que défini dans Andersson *et al.* (2001). Pour ce faire, la mesure des profils complets  $U(y, z)$  serait nécessaire ce qui implique un grand nombre de mesures. La mesure de l'amplitude des streaks se fait donc par l'intermédiaire d'un critère min-max local défini par :

$$\widehat{A}_{st}(x, Y = k/2) = \frac{U(x, Y = k/2, z_{hsst}) - U(x, Y = k/2, z_{lsst})}{2U_e} \quad (6.1)$$

où  $z_{hsst}$  et  $z_{lsst}$  désignent respectivement la position transverse d'un streak rapide (i.e.  $z = \pm 0.5, \pm 1.5, \pm 2.5\lambda_z$ ) et d'un streak lent ( $z = 0, \pm 1, \pm 2\lambda_z$ ). Ce critère donne alors une estimation "par le bas" de l'amplitude des streaks. Toutefois, Hollands & Cossu (2009) ont montré que ce type d'approximation donne des résultats raisonnables dans le cas de streaks dans l'écoulement de Poiseuille plan laminaire.

L'évolution dans la direction longitudinale de l'amplitude  $\widehat{A}_{st}(x, Y)$  des streaks issus de chaque configuration est reportée sur la figure 6.5(a). Conformément aux résultats de la théorie linéaire, l'amplitude maximale des streaks varie en fonction de la longueur d'onde de la perturbation. Dans la présente étude, l'amplitude maximale  $\max(\widehat{A}_{st})$  est comprise entre 5% et 13% de la vitesse  $U_e$ . De plus, la distance requise pour atteindre l'amplitude maximale  $x_{max}$  augmente avec la longueur d'onde  $\lambda_z$ . Là encore, cette évolution est en accord avec les prédictions de la théorie linéaire selon laquelle l'instant auquel la croissance est maximale est une fonction croissante de la longueur d'onde (voir Article 2 figure 5(b) du présent manuscrit).

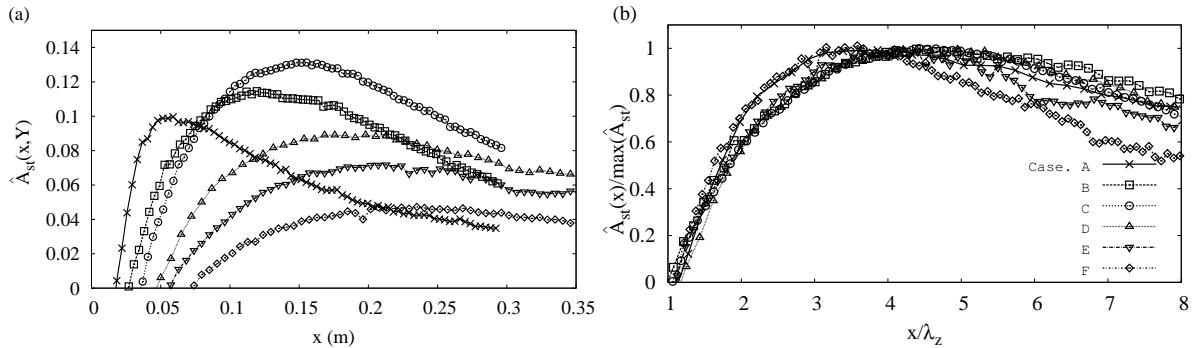


FIG. 6.5. Amplitude des streaks  $\widehat{A}_{st}(x, Y)$  en fonction de la distance à la rangée d'éléments de rugosité pour l'ensemble des configurations répertoriées dans le tableau 6.3. (a)  $\widehat{A}_{st}$  tracée en fonction de  $x$  exprimée en mètres. (b) Amplitude normalisée par la valeur maximale  $\max(\widehat{A}_{st})$  et tracée en fonction de  $x/\lambda_z$ .

A l'aide de DNS, del Álamo *et al.* (2006) ont montré que la durée de vie des grandes structures qui peuplent la zone logarithmique de l'écoulement de Poiseuille plan turbulent est directement proportionnelle à leur taille. Dans cette étude expérimentale, les tourbillons sont forcés de façon continue et les streaks obtenus sont stationnaires, on pourrait alors assimiler leur "durée de vie" à leur développement spatial (suivant  $x$ ) ; la taille étant fixée par la

longueur d'onde de la perturbation  $\lambda_z$ . Sur la figure 6.5(b), l'évolution suivant  $x/\lambda_z$  des amplitudes normalisées par la valeur maximale atteinte  $\max(\widehat{A}_{st})$  est reportée pour l'ensemble des perturbations. On constate que les courbes normalisées se superposent raisonnablement bien sur la majeure partie du domaine. Les streaks ainsi forcés atteignent leur amplitude maximale pour  $x_{max}$  entre 3.5 et  $5\lambda_z$  en aval de la rangée d'éléments de rugosité pour l'ensemble des longueurs d'onde sélectionnées. Cela semble confirmer, dans une certaine mesure, les observations de del Álamo *et al.* (2006) quant à la dynamique des grandes structures cohérentes dans les écoulements cisaillés turbulents. Ces résultats constituent, à notre connaissance, la première observation expérimentale de la croissance transitoire de streaks cohérents à très grande échelle dans un écoulement turbulent.

## 5.2 Comparaison avec la théorie linéaire

Sur la figure 6.6, nous comparons directement ces résultats expérimentaux à la théorie linéaire. L'amplitude maximale  $\max(\widehat{A}_{st})$  obtenue pour chaque perturbation est divisée par le maximum global  $\max_{\lambda_z} [\max(\widehat{A}_{st})]$ . La courbe de croissance optimale  $G_{max}(0, \lambda_z)/G_{max}^{(out)}$  obtenue avec le formalisme décrit au chapitre précédent et l'écoulement de base de Monkewitz *et al.* (2007) pour  $Re_{\delta^*} = 10^3$  est aussi reportée. Bien que les deux quantités ainsi représentées ne soient pas directement comparables quantitativement ( $G_{max}$  désigne un gain énergétique alors que  $\widehat{A}_{st}$  est une amplitude), une comparaison qualitative permet de vérifier que la hiérarchie entre les longueurs d'onde  $\lambda_z$  issue des expériences en soufflerie est en accord avec la théorie linéaire.

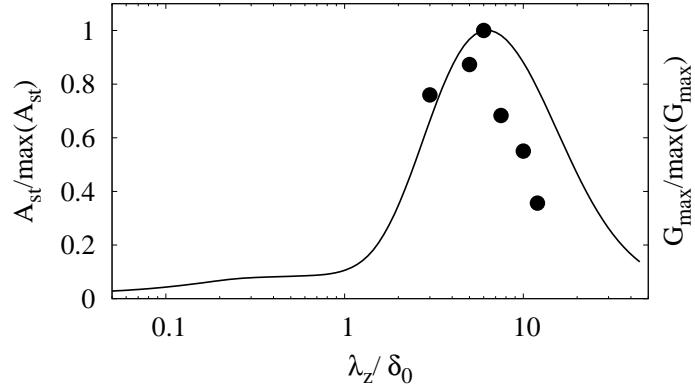


FIG. 6.6. Amplitudes des streaks cohérents expérimentaux (points) normalisées par la valeur maximale  $\max_{\lambda_z} [\max(\widehat{A}_{st})]$  tracées en fonction de la longueur d'onde de la perturbation normalisée par l'épaisseur de la couche limite  $\delta_0$  pour  $Re_{\delta^*} = 1000$ . La courbe noire représente le gain optimal prédict par la théorie linéaire avec le profil analytique de Monkewitz *et al.* (2007) pour le même nombre de Reynolds.

Malgré les différences entre les deux approches (écoulements de base, hypothèse d'écoulement parallèle, approche linéaire et théorie temporelle contre milieu non-linéaire et croissances spatiales), la hiérarchie entre les longueurs d'onde est bien respectée : les streaks de plus forte amplitude sont obtenus avec une perturbation de longueur d'onde  $\lambda_z = 6\delta$ , les longueurs d'onde plus petites et plus grandes étant moins amplifiées.



## Chapitre 7

# Conclusions et perspectives

Les croissances transitoires non-modales de streaks quasi-optimaux ont récemment été utilisées pour le contrôle d'écoulements laminaires cisaillés. Le principal objectif de cette thèse était de déterminer si cette approche peut être étendue à des écoulements turbulents d'intérêt industriel. Pour arriver à cela, il a été nécessaire de répondre à une série de questions préliminaires. Quelles sont les perturbations optimales linéaires pour une couche limite turbulente ? Quelles sont les longueurs d'onde privilégiées et la forme des perturbations associées ? Une fois les réponses à ces questions apportées se pose alors la question de savoir si de telles structures peuvent être forcées artificiellement et de leur influence sur l'écoulement de base.

Au long de ce travail, nous avons pu apporter les réponses à ces questions. Les perturbations optimales linéaires ainsi que les croissances optimales ont été calculées pour les écoulements de Poiseuille plan turbulent et de couche limite turbulente sur plaque plane. Ces études ont montré que, comme pour les écoulements cisaillés laminaires, ces perturbations sont des tourbillons longitudinaux qui donnent naissances à des streaks cohérents. Grâce à une étude expérimentale sur une configuration d'écoulement académique (couche limite turbulente sur plaque plane), nous avons ensuite montré que des streaks cohérents turbulents quasi-optimaux peuvent être forcés artificiellement et nous avons observé et mesuré leur croissance transitoire.

### *Perturbation optimales linéaires dans l'écoulement de Poiseuille plan turbulent*

Pour tenir compte de la dynamique de la turbulence de paroi dans les équations de Navier-Stokes linéarisées, nous avons utilisé comme écoulement de base le profil de vitesse moyenne  $\mathbf{U}$  ainsi que la viscosité turbulente  $\nu_t$  nécessaire à son maintien suivant l'approche de del Álamo & Jiménez (2006). Toutefois, en examinant leur formulation, nous avons remarqué que celle-ci n'est pas consistante avec celle employée pour l'étude de profils laminaires avec viscosité variable. Ceci nous a poussé à répéter leur étude de l'écoulement de Poiseuille plan turbulent en utilisant cette fois-ci les bons opérateurs. Nous avons ainsi calculé les perturbations optimales linéaires tri-dimensionnelles et les croissances optimales pour plusieurs nombre de Reynolds compris entre  $Re_\tau = 500$  et 20000. Dès lors que le nombre de Reynolds  $Re_\tau$  est suffisamment élevé, nous observons deux pics de croissance optimale  $G_{max}(\alpha = 0, \beta)$  : un premier pic pour des perturbations grande échelle ( $\lambda_z = \mathcal{O}(h)$ ) et un second pic pour des perturbations petite échelle ( $\lambda_z = \mathcal{O}(y^+)$ ). Le pic secondaire de faible amplitude est obtenu pour des longueurs d'onde  $\lambda_z^+ = 92$  similaires à celles des streaks de proche paroi observés dans la zone tampon des écoulements turbulents de paroi. Le gain associé à ce pic ne varie pas avec le nombre

de Reynolds. En revanche, le pic principal de plus forte amplitude est associé à des grandes structures dont la longueur d'onde est de l'ordre de  $4h$ . De plus, notre étude montre que la croissance optimale liée à ce pic croît avec le nombre de Reynolds comme c'est le cas pour les écoulements laminaires. En étudiant la dépendance de ce pic vis à vis du nombre de Reynolds, nous avons montré que sa valeur  $G_{max}^{(out)}$  varie linéairement avec le nombre de Reynolds effectif  $Re_\bullet^{\text{TPP}} = U_e h / \nu_{Tmax}$  selon la loi  $G_{max}^{(out)} = 0.03787 Re_\bullet$ . Nous avons enfin montré que la forme des perturbations optimales  $\hat{v}$  et des streaks optimaux  $\hat{u}$  associées au pic secondaire et au pic principal est indépendante du nombre de Reynolds lorsqu'on les trace en fonction de la direction normale adimensionnée par l'échelle de longueur associée au pic considéré (i.e.  $y^+$  pour le pic secondaire et  $\eta = y/h$  pour le pic principal).

### *Perturbation optimales linéaires dans une couche limite turbulente*

Nous avons ensuite étendu l'approche utilisée pour l'écoulement de Poiseuille plan turbulent au cas de la couche limite turbulente sur plaque plane (chapitre 5). Pour cela nous avons employé le profil de vitesse proposé par Monkewitz *et al.* (2007). Nous avons, au préalable, calculé la viscosité turbulente. Sous l'hypothèse d'écoulement localement parallèle, nous avons ensuite montré que les croissances transitoires optimales font apparaître deux longueurs d'onde privilégiées. Un pic secondaire d'amplitude indépendante du nombre de Reynolds et relativement faible est obtenu pour des longueurs d'onde de l'ordre de  $\lambda_z^+ = 80$ , tandis qu'un pic principal est associé à des longueurs d'onde de l'ordre de  $\lambda_z \approx 8\delta$ .

Ici aussi, le pic principal voit son amplitude croître avec le nombre de Reynolds. Nous avons montré que l'échelle de longueur pertinente associée à ce pic n'est pas celle de Rotta-Clauser  $\Delta = \delta^* U_e / u_\tau$  qui définit le profil de vitesse moyenne mais  $\Delta_\theta = \theta U_e / u_\tau$  qui est basée sur l'épaisseur de quantité de mouvement. Le pic principal est alors centré autour de  $\lambda_z = 7.6\Delta_\theta$ . Nous avons donc construit un nombre de Reynolds effectif basé sur la vitesse infinie amont  $U_e$  la viscosité totale maximale  $\nu_{Tmax}$  cette nouvelle échelle de longueur  $\Delta_\theta$  :  $Re_\bullet^{\text{TBL}} = U_e \Delta_\theta / \nu_{Tmax}$ . La croissance optimale associée au pic principal croît linéairement avec ce nombre de Reynolds effectif selon la loi  $G_{max}^{(out)} = 0.0508 Re_\bullet^{\text{TBL}}$ . La forme des perturbations optimales ( $\hat{v}_{opt}$ ) et de leur réponse à l'instant d'amplification maximale  $t_{max}$  ( $\hat{u}_{opt}$ ) est indépendante du nombre de Reynolds lorsque tracée en fonction de  $y^+$  (pic secondaire) ou  $\Delta_\theta$  (pic principal). Les streaks optimaux associés au pic principal sont centrés à la frontière entre la couche limite et l'écoulement potentiel ; toutefois leur amplitude reste importante dans l'ensemble de la couche limite.

## *Réalisation expérimentale de streaks cohérents turbulents sur plaque plane*

Si l'existence de grandes structures dans les zones externes des écoulements turbulents est reconnue (Kovasznay *et al.*, 1970; Townsend, 1976) et leur présence récemment confirmée (Jiménez, 2007; Hutchins & Marusic, 2007a), de très grandes structures avec  $\lambda_z \sim 4 - 8\delta$  n'ont jamais été observées, probablement à cause d'une absence de rétro-action qui leur permettrait d'être auto-entretenues (voir l'Article 2 pour une discussion détaillée de ce point). Toutefois, le fait qu'elles ne sont peut être pas auto-entretenues ne signifie pas qu'elles ne sont pas amplifiées. Nous avons donc voulu vérifier le bien fondé de ces prévisions théoriques en forçant des streaks cohérents dans une couche limite turbulente sur plaque plane. Plusieurs longueurs d'onde ont été forcées grâce à des éléments de rugosité cylindriques dimensionnés suivant les recommandations de Fransson *et al.* (2005) (chapitre 6). Le résultat le plus important est que conformément aux prédictions de la théorie linéaire, les tourbillons longitudinaux créés par les éléments de rugosités induisent une croissance non-normale de streaks cohérents en aval. Des streaks rapides sont alors observés bien en aval, en correspondance de chaque cylindre. L'influence des ces streaks cohérents stationnaires sur l'écoulement de couche limite turbulente est immédiatement visible puisque la topologie de l'écoulement moyen mesurée par PIV rasante présente une modulation dans la direction transverse. Une estimation de l'amplitude des streaks grâce à un critère min-max local indique en effet que celle-ci peut atteindre jusque 13% de la vitesse amont  $U_e$  dans la configuration optimale. Nous avons aussi constaté que la hiérarchie en termes d'amplitudes entre les différentes longueurs d'onde est conforme aux résultats de la théorie linéaire malgré le caractère non-parallèle de l'écoulement de base et la présence de mécanismes non-linéaires et de la "vraie" turbulence. Ainsi, les streaks de plus forte amplitude sont obtenus avec une perturbation de longueur d'onde  $\lambda_z = 6\delta_0$ . Les longueurs d'onde plus petites et plus grandes étant moins amplifiées. De plus, nous avons remarqué que pour l'ensemble des longueurs d'onde forcées, les streaks atteignent leur amplitude maximale entre 3.5 et  $5\lambda_z$  en aval de la rangée d'éléments de rugosité. Ces résultats constituent, à notre connaissance, la première observation expérimentale de l'amplification non-normale de streaks cohérents à très grande échelle dans un écoulement turbulent.

## *Perspectives*

Tout au long de la partie expérimentale de cette étude nous nous sommes concentrés sur les structures associées au pic principal. On pourrait aussi imaginer forcer les streaks correspondant au pic secondaire. Nous n'avons toutefois pas choisi cette voie car ces streaks ont un faible niveau d'amplification (nous rappelons que  $G_{max}^{(inn)} = 2.8$  tandis que  $G_{max}^{(out)} \geq 40$ ). En outre, il aurait été difficile de forcer et mesurer ces structures avec  $\lambda_z^+ \approx 100$  à cause de leurs faibles dimensions dans notre veine d'essai.

Une approche alternative pour le forçage de ces structures de proche paroi serait de perturber le cycle auto-entretenu de production de la turbulence (cycle SSP, voir par exemple Hamilton *et al.* (1995) ou la revue de Panton (2001)) et ainsi réduire la traînée visqueuse (Kim, 2003) via le forçage des grandes structures. Schoppa & Hussain (1998) ont montré par le biais de DNS à faible nombre de Reynolds que le forçage de grandes structures dans l'écoulement de Poiseuille plan turbulent a un effet stabilisant sur les streaks naturels de proche paroi et que la traînée visqueuse s'en trouve réduite de 20% (ce résultat a par la suite été confirmé expérimentalement par Iuso *et al.* (2002)). Par ailleurs, les travaux de Hutchins &

Marusic (2007b) tendent à prouver que les grandes structures naturelles de la couche limite turbulente ont une influence sur la dynamique des streaks de proche paroi. Cela laisse présager que les perturbations optimales que nous avons calculées peuvent avoir une forte influence sur la dynamique des streaks de proche paroi.

Un autre axe d'étude concerne l'amplitude des streaks forcés artificiellement et plus particulièrement l'amplitude maximale qu'ils peuvent atteindre. Les études des streaks dans les écoulements laminaires montrent qu'au delà d'une amplitude critique, ils subissent une instabilité secondaire qui mène à la transition vers la turbulence (Andersson *et al.*, 2001; Matsubara & Alfredsson, 2001; Duriez *et al.*, 2009) et à l'établissement du cycle SPP. A notre connaissance, ce phénomène n'a jamais été observé pour les streaks à grande échelle dans les écoulements turbulents, mais son existence n'est pas à exclure (les observations de Hutchins & Marusic (2007a) montrent que les streaks à grande échelle ne sont pas parfaitement longitudinaux mais exhibent de légères oscillations). Une façon d'obtenir des streaks de plus forte amplitude pourrait alors consister à utiliser deux rangées d'éléments de rugosité. La deuxième rangée viendrait alors créer de nouveaux tourbillons une fois atteinte l'amplitude maximale des streaks issus de la première rangée comme cela a été fait par Hollands & Cossu (2009). D'un point de vue industriel, une étude visant à optimiser les actionneurs (maximiser l'amplitude des streaks, intégration sur un véhicule) est particulièrement intéressante.

## Annexes



## Annexe A

### Méthode numérique pour le calcul des perturbations optimales

Les opérateurs  $\mathcal{L}_{OS}$  et  $\mathcal{L}_{SQ}$  sont discrétisés à l'aide d'une méthode spectrale de collocation. Nous utilisons les matrices de différentiation basées sur les polynômes de Chebychev sur une grille de  $N_y + 1$  points de collocation (Weideman & Reddy, 2000). Ces matrices sont calculées à l'aide de MATLAB avec les codes de Weideman & Reddy (2000) et incluent les conditions au bord.

Suivant le nombre de Reynolds étudié, le nombre de points de collocation est compris entre 127 et 513. Dans tous les cas, la convergence des résultats est validée en doublant le nombre de points de collocation.

Dans le cas de la couche limite turbulente, la discrétisation couvre un domaine de calcul  $[0, y_{max}]$ . Pour des perturbations dont la longueur d'onde est inférieure à  $1000y^+$ ,  $y_{max}$  vaut  $0.4\Delta \approx 2\delta$ . Pour des perturbations de longueur d'onde supérieure, la valeur de  $y_{max}$  est égale à  $40\delta^*$ . Là aussi, la validité des résultats est vérifiée en doublant l'étendue du domaine de calcul.

Le calcul de la forme des perturbations optimales pour chaque longueur d'onde sélectionnée se fait en deux étapes. Tout d'abord l'ensemble des valeurs propres et des vecteurs propres de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld & Squire est calculé grâce à un premier code écrit en FORTRAN. L'algorithme de diagonalisation retenu est la routine cg de LAPACK (Anderson *et al.*, 1992). Ce code est compilé avec le compilateur *ifort*. La convergence vers la solution optimale est ensuite effectuée par une méthode de puissances itérative en s'assurant que celle-ci ne requiert pas plus de 500 itérations. Ce code est aussi écrit en FORTRAN et compilé avec *gnu90*.



## Annexe B

### Description du système PIV

#### Descriptif du matériel utilisé

L'ensemble du dispositif de mesure utilisé au cours de cette thèse se compose essentiellement du matériel suivant :

- Un laser double cavité de type Nd :Yag délivrant une puissance de 120mJ par cavité et dont les rayons émis ont une longueur d'onde de 532nm.
- Une caméra CCD modèle HiSense Mk2 avec un capteur de  $1024 \times 1280$  pixels.
- L'ensemencement est effectué au moyen de particules de DEHS (Di-Ethyl-Hexyl-Sebacat) dont la taille est de l'ordre de  $0.25\mu m$  dans BREATH et d'huile d'olive de  $300\mu m$  en moyenne pour les essais sur corps d'Ahmed.
- La gestion de l'acquisition et du traitement des images est confiée au logiciel Flow Manager de Dantec Dynamics.

#### Mesures sur plaque plane dans le banc BREATH

Pour les visualisations de streaks cohérents par PIV rasante, le protocole de mesure est le suivant : 600 paires d'images sont acquises afin d'assurer la convergence des vitesses moyennes. L'objectif utilisé est un modèle  $28mm$  de focale placé au-dessus de la veine d'essai et permettant ainsi d'obtenir des plans de  $300mm \times 235mm$ . L'intervalle de temps entre deux images est de  $\Delta t = 80\mu s$ . La nappe laser est ajustée au plus fin et mesure  $1mm$  d'épaisseur.

Le traitement de ces images est fait en trois étapes et est très proche de celui utilisé par Depardon (2006) dans le cadre de mesures par PIV rasante. Tout d'abord l'image moyenne est calculée puis soustraite à l'ensemble des images afin d'en réduire le bruit. Les vitesses sont calculées par corrélations adaptatives en 2 étapes avec un recouvrement de  $50\% \times 50\%$ . La taille finale de ces fenêtres d'interrogation est de  $16 \times 16$  pixels. Une méthode de validation des vecteurs vitesse par hauteur de pic de corrélation est utilisée pendant cette étape (le rapport utilisé ici est 1.2). Une validation par gamme (seuil de  $1.5 U_e$ ) est utilisée et les vecteurs faux sont ensuite remplacés par la valeur moyenne pondérée de leurs voisins.

Les mesures de profil de vitesse moyenne obéissent à un protocole légèrement différent. 1000 paires d'images sont acquises. L'objectif utilisé est un modèle de  $105mm$  de focale auquel 3 bagues ont été ajoutées afin d'en accroître le grossissement. Grâce à cela, on obtient des champs de  $20mm \times 14mm$ . L'intervalle de temps entre deux images est fixé à  $8\mu s$ . Le post traitement est très proche de celui utilisé pour les plans rasants. La vitesse est calculée par

corrélations adaptatives en 3 étapes avec un recouvrement de  $50\% \times 75\%$ . La taille finale des fenêtres d'interrogation est  $16 \times 8$  pixels et 8 itérations sont effectuées.

### Mesures sur le corps d'Ahmed

Le protocole de mesure des streaks sur le pavillon est le même que dans le cas de la plaque plane. En raison des dimensions de la veine, l'objectif utilisé est modèle  $50mm$  de focale. Les plans mesurés ont une surface de  $315mm \times 253mm$ . L'intervalle de temps entre deux images est fixé à  $\Delta t = 50\mu s$ . Les mesures autour du culot sont réalisées avec le même objectif. L'intervalle de temps est  $\Delta t = 40\mu s$  et les plans ont une surface de  $400 \times 400mm^2$ . Dans ces deux cas, les vitesses sont calculées par corrélations adaptatives en 2 étapes avec recouvrement de  $50\% \times 50\%$ . La taille finale des fenêtres d'interrogation est  $16 \times 16$  pixels.

Les mesures de profils de vitesse moyenne  $U(y)$  sur le pavillon reposent sur le même protocole et le matériel que pour l'étude sur plaque plane. L'utilisation d'un objectif de  $105mm$  de focale conduit à des plans de  $220mm \times 200mm$ . L'intervalle de temps est fixé à  $\Delta t = 40\mu s$ .

## Annexe C

### Méthode de prolongement du profil de vitesse moyenne pour un écoulement turbulent de paroi

Le prolongement du profil de vitesse moyenne issu des essais sur plaque plane repose sur la méthode décrite par Kendall & Koochesfahani (2008) pour estimer la vitesse de frottement. Cette méthode repose sur le fit du profil mesuré expérimentalement avec un profil de vitesse analytique valide de la paroi jusque dans la zone logarithmique. Une optimisation sur deux paramètres  $u_\tau$  et  $y_0$  (la position précise de la paroi) visant à minimiser la fonction résidu pour l'ensemble des  $N$  points de la zone logarithmique est alors effectuée.

$$\Phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|U_i^+(expe) - U_i^+(model)|}{U_i^+(model)} \quad (1)$$

L'approche retenue ici est d'étendre cette méthode : le profil mesuré sera prolongé depuis le raccordement dans la zone log jusqu'à la paroi avec le profil analytique. Cette méthode a été testée et validée à l'aide de plusieurs profils de vitesse issus de Österlund (1999) et de Spalart (1988). Cette approche repose sur l'hypothèse selon laquelle un faible gradient de pression ne modifie pas le dynamique en proche paroi et donc le profil de vitesse moyenne.

Dans la présente étude, le profil analytique retenu est, comme dans l'Article 2 (voir 5), celui proposé par Monkewitz *et al.* (2007). Plusieurs essais avec d'autres profils ont été dont celui de Musker (1979) ou encore une simple loi log avec  $\kappa = 0.41$  et  $B = 5$ . Ces essais ont donné des résultats identiques quant à l'estimation de  $u_\tau$ .



## Annexe D

### Mesure de l'amplitude des streaks cohérents

Dans cette annexe, nous comparons le critère utilisé dans le manuscrit (chapitre 6) à une autre mesure fondée sur le fit des profils  $U(x, Y, z)$  sur des fonctions analytiques. La fonction analytique retenue est une fonction sinus comme décrit dans Hollands & Cossu (2009). Cette fonction prend la forme suivante :

$$\hat{u}(x, Y, z) = \bar{u}(x, Y, z) + \hat{A}(x, Y) \sin\left[\frac{2\pi(z - z_0)}{\lambda_z}\right] \quad (2)$$

On obtient ainsi une approximation de l'amplitude des streaks en fonction de  $x$  grâce à la relation  $\hat{A}_{st}(x, Y) = \hat{A}(x, Y) / U_e$ .

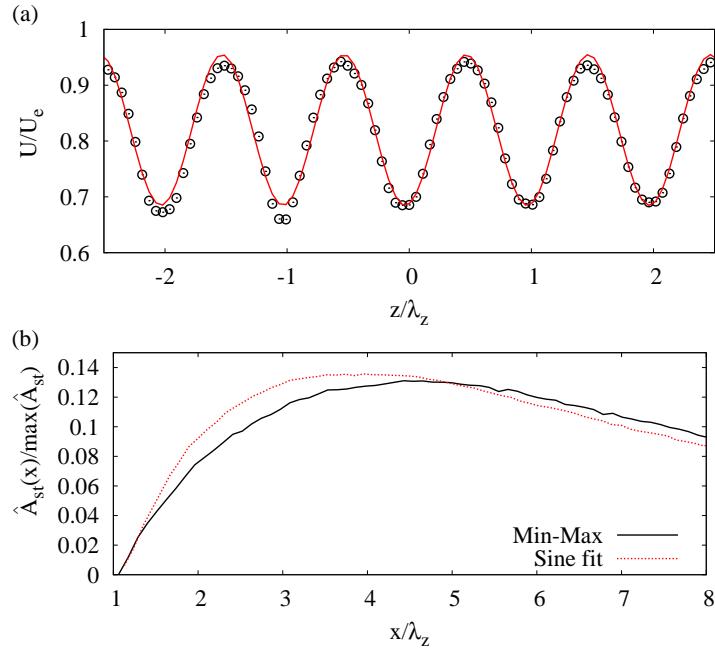


Fig. D.1 : Comparaison de l'amplitude des streaks mesurée selon deux critères : le critère min-max local défini par la relation 6.1 dans le chapitre 6 et l'amplitude estimée grâce au best fit du profil  $U(Y = k/2, z/\lambda_z)$  sur une fonction sinus comme décrit dans Hollands & Cossu (2009). Amplitudes tracées en fonction de  $x/\lambda_z$  pour la configuration C décrite au chapitre 6.

Sur la figure D.1(a), nous avons repris la figure 6.4 représentant le profil de vitesse moyenne  $U/U_e$  ( $x = 3.7\lambda_z, Y, z/\lambda_z$ ) et le best fit sinusoïdal associé. L'accord entre ces deux courbes est assez bon compte tenu des contraintes expérimentales dues aux dimensions de la veine d'essai décrites dans le chapitre 6. Cette procédure est répétée pour l'ensemble des profils dans la direction longitudinale. L'évolution de cette estimation de l'amplitude est reportée sur la figure D.1(b) et comparée à celle obtenue par le critère min-max local utilisé dans le corps du manuscrit.

Ces deux courbes ont des comportement extrêmement voisins et mettent en évidence une phase de croissance algébrique au cours de laquelle l'amplitude atteint un maximum. Suite à cela, l'amplitude décroît à mesure que les streaks sont amortis. Les seules différences sont l'amplitude maximale atteinte qui est légèrement plus élevée quand estimée par fit analytique (13.5% pour l'amplitude estimée par fit contre 13% avec le critère min-max local défini dans le chapitre 6) et l'abscisse pour laquelle ce maximum est atteint ( $3.5 \sim 4\lambda_z$  contre  $4.5 \sim 5\lambda_z$ ).

Les streaks se développant sur le pavillon du corps d'Aحمد présentent une forme différente de ceux forcés sur plaque plane. Plusieurs formes alternatives de fonctions analytiques ont été testées sans succès, l'accord entre les données expérimentales et la fonction analytique n'étant pas parfait. Pour ces raisons nous avons conservé le critère min-max local dans l'ensemble du manuscrit.

# Bibliographie

- ADRIAN, R.J. 1991 Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics* **23** (1), 261–304.
- AHMED, S. R., RAMM, R. & FALTIN, G. 1984 Some salient features of the time-averaged ground vehicle wake. SAE 840300.
- DEL ÁLAMO, J.C. & JIMÉNEZ, J. 2003 Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels. *Phys. Fluids* **15**, L41.
- DEL ÁLAMO, J. C. & JIMÉNEZ, J. 2006 Linear energy amplification in turbulent channels. *J. Fluid Mech.* **559**, 205–213.
- DEL ÁLAMO, J. C., JIMÉNEZ, J., ZANDONADE, P. & MOSER, R. D. 2006 Self-similar vortex clusters in the turbulent logarithmic region. *J. Fluid Mech.* **561**, 329–358.
- ANDERSON, E., BAI, Z., BISHOF, C., DEMMEL, J., DONGARRA, J., CROZ, J. DU, GREENBAUM, A., HAMMARLING, S., KENNEY, A. MC, OSTUCHOV, S. & SORENSEN, D. 1992 *LAPACK Users' Guide, Release 1.0*. Philadelphia : SIAM.
- ANDERSSON, P., BERGGREN, M. & HENNINSON, D. 1999 Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers. *Phys. Fluids* **11** (1), 134–150.
- ANDERSSON, P., BRANDT, L., BOTTARO, A. & HENNINSON, D. 2001 On the breakdown of boundary layers streaks. *J. Fluid Mech.* **428**, 29–60.
- ANGELE, K. 2003 Experimental studies of turbulent boundary layer separation and control. PhD thesis, KTH, Mechanics.
- ANGELE, K. P. & GREWE, F. 2002 Investigation of the development of streamwise vortices from vortex generators in apg separation control using piv.
- BEAUDOUIN, J.-F. 2004 Contrôle actif d'écoulement en aérodynamique automobile. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris.
- BEAUDOUIN, J.-F. & AIDER, J.-L. 2008 Drag and lift reduction of 3d bluff body using flaps. *Exp. Fluids* **44**, 491–501.
- BETTERTON, JG, HACKETT, KC, ASHILL, PR, WILSON, MJ, WOODCOCK, IJ, TILMAN, CP & LANGAN, KJ 2000 Laser Doppler Anemometry Investigation on Sub Boundary Layer Vortex Generators for flow control. In *10th Symposium on Application of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon*, pp. 10–12.

- BOUSSINESQ, J. 1877 Théorie de l'écoulement tourbillant **23**, 46–50.
- BRUNN, A. & NITSCHE, W. 2006 Active control of turbulent separated flow over slanted surfaces. *Int. J. Heat and Fluid Flow* **27**, 748–755.
- BUSCHMANN, M.H. & GAD-EL HAK, M. 2003 Debate concerning the mean-velocity profile of a turbulent boundary layer. *AIAA journal* **41** (4), 565–572.
- BUTLER, K. M. & FARRELL, B. F. 1992 Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids A* **4**, 1637–1650.
- BUTLER, K. M. & FARRELL, B. F. 1993 Optimal perturbations and streak spacing in wall-bounded turbulent shear flow. *Phys. Fluids* **5**, 774–777.
- CADOT, O., BEAUDOIN, J.-F., AIDER, J.-L. & WESFREID, J.-E. 2006 Closed loop experiments on a simplified car model using vortex generators and wall pressure measurements. In *The 6th Euromech Fluids Mechanics Conference*. KTH Mechanics, Stockholm, Suede.
- CESS, R. D. 1958 A survey of the literature on heat transfer in turbulent tube flow. Research Report 8-0529-R24. Westinghouse.
- CHIKKADI, V., SAMEEN, A. & GOVINDARAJAN, R. 2005 Preventing transition to turbulence : a viscosity stratification does not always help. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 264504.
- CORBETT, P. & BOTTARO, A. 2000 Optimal perturbations for boundary layers subject to streamwise pressure gradient. *Phys. Fluids* **12**, 120–130.
- COSSU, C., PUJALS, G. & DEPARDON, S. 2009 Optimal transient growth and very large scale structures in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **619**, 79–94.
- DE GRAAFF, D.B. & EATON, J.K. 2000 Reynolds-number scaling of the flat-plate turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **422**, 319–346.
- DEPARDON, S. 2006 Analyse topologique d'écoulements complexes : Utilisation de la vélocimétrie par imagerie de particules pour une approche quantitative. PhD thesis, Université de Poitiers.
- DRAZIN, P.G. & REID, W.H. 1981 *Hydrodynamic Stability*. Cambridge Univ. Press.
- DURIEZ, T. 2009 Application des générateurs de vortex au contrôle d'écoulements décollés. PhD thesis, Université Paris Diderot.
- DURIEZ, T., AIDER, J. L. & WESFREID, J. E. 2006 Base flow modification by streamwise vortices. application to the control of separated flows. *ASME Technical Paper FEDSM2006-98541, Control of separated flows, Miami, USA*.
- DURIEZ, T., AIDER, J. L. & WESFREID, J. E. 2009 Experimental evidence of a self-sustaining process through streaks generation in a flat plate boundary layer. *Phys. Rev. Lett.* In Press.
- FRANSSON, J., BRANDT, L., TALAMELLI, A. & COSSU, C. 2005 Experimental study of the stabilisation of Tollmien-Schlichting waves by finite amplitude streaks. *Phys. Fluids* **17**, 054110.

- FRANSSON, J., TALAMELLI, A., BRANDT, L. & COSSU, C. 2006 Delaying transition to turbulence by a passive mechanism. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 064501.
- GODARD, G. & STANISLAS, M. 2006 Control of a decelerating boundary layer. part 1 : Optimization of passive vortex generators. *Aero. Sci. Tech.* **10**, 181–191.
- GOOSSENS, T. 2005 Etude expérimentale et numérique du sillage turbulent et des forces instationnaires sur un obstacle bi-dimensionnel non profilé. PhD thesis, Université d'Orléans.
- HAMILTON, J.M., KIM, J. & WALEFFE, F. 1995 Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.* **287**, 317–348.
- HOLLANDS, M. & COSSU, C. 2009 Adding streaks in the plane poiseuille flow. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Mécanique* **337**, 179–183.
- HOYAS, S. & JIMÉNEZ, J. 2006 Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $re_\tau = 2003$ . *Phys. Fluids* **18**, 011702.
- HUCHO, W. H. 1998 *Aerodynamics of road vehicles*. Cambridge University Press, 4th edition.
- HUTCHINS, N. & MARUSIC, I. 2007a Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **579**, 1–28.
- HUTCHINS, N. & MARUSIC, I. 2007b Large-scale influences in near-wall turbulence. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **365** (1852), 647.
- IUSO, G., ONORATO, M., SPAZZINI, P.G. & DI CICCA, G.M. 2002 Wall turbulence manipulation by large-scale streamwise vortices. *Journal of Fluid Mechanics* **473**, 23–58.
- JIMENEZ, J. 1998 The largest scales of turbulent wall flows. Annual research briefs. Center for Turbulence Research.
- JIMÉNEZ, J. 2007 Recent developments on wall-bounded turbulence. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A Mat.* **101**, 187–203.
- JIMÉNEZ, J. & MOIN, P. 1991 The minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* **225**, 213–240.
- VAN KÁRMÁN, T. 1921 Ueber laminare un turbulente reibung. *Z. angew. Math. Mech.* pp. 233–252, english translation NACA TM 1092.
- VAN KÁRMÁN, T. 1930 Mechanische aehnlichkeit und turbulenz. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. KL.* pp. 58–68, english translation NACA TM 611.
- KENDALL, A. & KOOCHESFAHANI, M. 2008 A method for estimating the wall friction in turbulent wall-bounded flows. *Exp in Fluids* **44**, 773–780.
- KIM, J. 2003 Control of turbulent boundary layers. *Physics of fluids* **15**, 1093.
- KIM, J., MOIN, P. & MOSER, R. 1987 Turbulence statictics in fully developped channel flow at low reynolds number. *J. Fluid Mech.* **177**, 133–166.

- KLINE, S. J., REYNOLDS, W. C., SCHRAUB, F. A. & RUNSTADLER, P. W. 1967 The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **30**, 741–773.
- KOVASZNAY, L. S. G., KIBENS, V. & BLACKWELDER, R. F. 1970 Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **41**, 283–325.
- KRAJNOVIĆ, S. & DAVIDSON, L. 2004 Large-eddy simulation of the flow around simplified car model. *SAE paper* pp. 01–0227.
- KRAJNOVIĆ, S. & DAVIDSON, L. 2005a Flow around a simplified car, part 1 : large eddy simulation. *Journal of Fluids Engineering* **127**, 907–918.
- KRAJNOVIĆ, S. & DAVIDSON, L. 2005b Flow around a simplified car, part 2 : Understanding the flow. *Journal of Fluids Engineering* **127**, 919–928.
- LANDAHL, M. T. 1980 A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows. *J. Fluid Mech.* **98**, 243.
- LECLERC, C. 2008 Réduction de la traînée d'un véhicule automobile simplifié à l'aide du contrôle actif par jet synthétique. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse (INP), Toulouse.
- LIENHART, H., STOOTS, C. & BECKER, S. 2003 Flow and turbulence structure in the wake of a simplified car model. *SAE transactions* **112** (6), 785–796.
- LIN, J. C. 2002 Review of research on low-profile vortex generators to control boundary layer separation. *Progress in Aerospace Sciences* **38** (4–5), 389–420.
- LÖGDBERG, O. 2006 Vortex generators and turbulent boundary layer separation control. Master's thesis, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm.
- LUCHINI, P. 2000 Reynolds-number independent instability of the boundary layer over a flat surface. part 2 : Optimal perturbations. *J. Fluid Mech.* **404**, 289–309.
- MATSUBARA, M. & ALFREDSSON, P. H. 2001 Disturbance growth in boundary layers subjected to free stream turbulence. *J. Fluid. Mech.* **430**, 149–168.
- MELLOR, G. L. & GIBONS, D. M. 1966 Equilibrium boundary layers. *J. Fluid Mech.* **24**, 225–253.
- MILLIKAN, C.B. 1938 A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes. In *Proceedings of the Fifth International Congress of Applied Mechanics*.
- MOFFATT, H. K. 1967 The interaction of turbulence with strong wind shear. In *Proc. URSI-IUGG Colloq. on Atoms. Turbulence and Radio Wave Propag.* (ed. A.M. Yaglom & V. I. Tatarsky), pp. 139–154. Moscow : Nauka.
- MONKEWITZ, P. A., CHAUHAN, K. A. & NAGIB, H. M. 2007 Self-consistent high-reynolds-number asymptotics for zero-pressure-gradient turbulent boundary layers. *Phys. Fluids* **19**, 115101.
- MUSKER, A. J. 1979 Explicit expression for the smooth wall velocity distribution in a turbulent boundary layer. *AIAA J.* **17**, 655–657.

- NAGIB, H. M., CHRISTOPHOROU, C. & MONKEWITZ, P. A. 2004 High Reynolds Number Turbulent Boundary Layers Subjected to Various Pressure-Gradient Conditions. In *IUTAM Symposium on One Hundred Years of Boundary Layer Research* (ed. G. Meier & K. Sreenivasan), pp. 383–394. DLR, Göttingen, Germany : Springer.
- ORR, W. M. F. 1907 The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. part i a perfect liquid. part ii a viscous liquid. *Proc. R. Irish Acad. A* **27**, 9–138.
- ÖSTERLUND, J. M. 1999 Experimental studies of zero-pressure gradient turbulent boundary layer flows. PhD thesis, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm.
- PANTON, R.L. 2001 Overview of the self-sustaining mechanisms of wall turbulence. *Progress in Aerospace Sciences* **37** (4), 341–384.
- PANTON, R.L. 2005 Review of wall turbulence as described by composite expansions. *Applied Mechanics Reviews* **58**, 1.
- POPE, S.B. 2001 *Turbulent flows*. Cambridge Univ. Press.
- PRANDTL, L. 1927 Ueber den reibungswiderstand strömender luft. *Ergebn. Aerodyn. Versuchsanst., Göttingen* **3**, 1–5.
- PRANDTL, L. 1932 Zur turbulenten strömung in rohren und längs platten. *Ergebn. Aerodyn. Versuchsanst., Göttingen* **4**, 18–29.
- PUJALS, G., COSSU, C. & DEPARDON, S. 2009a Optimal transient growth and very large-scale structures in zero-pressure gradient turbulent boundary layers. In *Sixth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, Seoul, Korea, 22–24 June 2009*.
- PUJALS, G., DEPARDON, S. & COSSU, C. 2010 Drag reduction of a 3d bluff body using coherent streamwise streaks. *Exp. Fluids* .
- PUJALS, G., GARCÍA-VILLALBA, M., COSSU, C. & DEPARDON, S. 2009b A note on optimal transient growth in turbulent channel flows. *Phys. Fluids* **21**, 015109.
- RAFFEL, M., WILLERT, C. & KOMPENHANS, J. 1998 *Particle Image Velocimetry. A Practical Guide*. Springer-Verlag.
- REDDY, S. C. & HENNINGSON, D. S. 1993 Energy growth in viscous channel flows. *J. Fluid Mech.* **252**, 209–238.
- REYNOLDS, W. C. & HUSSAIN, A. K. M. F. 1972 The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparisons with experiments. *J. Fluid Mech.* **54** (02), 263–288.
- REYNOLDS, W. C. & TIEDERMAN, W. G. 1967 Stability of turbulent channel flow, with application to Malkus's theory. *J. Fluid Mech.* **27** (02), 253–272.
- ROBINSON, S. K. 1991 Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **23**, 601–639.

- ROUMEAS, M., GILLIERON, P. & KOURTA, A. 2009 Drag reduction by flow separation control on a car after body. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **60** (11), 1222–1240.
- SCHMID, P.J. 2007 Nonmodal stability theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **39**, 129–162.
- SCHMID, P.J. & HENNINGSON, D. S. 1994 Optimal energy density growth in Hagen–Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **277**, 197–225.
- SCHMID, P. J. & HENNINGSON, D. S. 2001 *Stability and Transition in Shear Flows*. New York : Springer.
- SCHOPPA, W. & HUSSAIN, F. 1998 A large-scale control strategy for drag reduction in turbulent boundary layers. *Physics of Fluids* **10**, 1049.
- SKOTE, M. 2001 Studies of turbulent boundary layer flow through direct numerical simulation. PhD thesis, KTH, Stockholm, Sweden.
- SMITH, J. R. & METZLER, S. P. 1983 The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **129**, 27–54.
- SOMMERFELD, A. 1908 Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitbewegungen. In *Atti. del 4 Congr. Internat. dei Mat III*, pp. 116–124. Roma.
- SPALART, P. R. 1988 Direct simulation of a turbulent boundary layer up to  $Re_\theta = 1410$ . *J. Fluid Mech.* **187**, 61–98.
- SQUIRE, H. B. 1933 On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel plates **142**, 621–628.
- TOMKINS, C. D. & ADRIAN, R. J. 2003 Spanwise structure and scale growth in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **490**, 37–74.
- TOWNSEND, A. 1960 Equilibrium layers and wall turbulence. *J. Fluid Mech.* **11**, 97–120.
- TOWNSEND, A. 1976 *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge U. Press, second edition.
- TREFETHEN, L. N., TREFETHEN, A. E., REDDY, S. C. & DRISCOLL, T. A. 1993 A new direction in hydrodynamic stability : Beyond eigenvalues. *Science* **261**, 578–584.
- WALEFFE, F. 1995 Hydrodynamic stability and turbulence : Beyond transients to a self-sustaining process. *Stud. Appl. Math.* **95**, 319–343.
- WEIDEMAN, J. A. C. & REDDY, S. C. 2000 A MATLAB Differentiation Matrix Suite. *ACM Trans. Math. Soft.* **26** (4), 465–519.
- WHITE, E. B. 2002 Transient growth of stationary disturbances in a flat plate boundary layer. *Phys. Fluids* **14**, 4429–4439.
- WHITE, F. M. 2006 *Viscous Fluid Flows*. Mc Graw-Hill, third edition.

# Articles



1

## Article 1

*Publié dans Physics of Fluids **21** pp.015109, 2009*



# A note on optimal transient growth in turbulent channel flows

By Gr  gory Pujals<sup>1,2</sup>, Manuel García-Villalba<sup>3</sup>, Carlo Cossu<sup>1</sup> and Sébastien Depardon<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LadHyX, CNRS-  cole Polytechnique, F-91128 Palaiseau, France

<sup>2</sup>PSA Peugeot Citro  n, Centre Technique de Velizy, 2 Route de Gisy, 78943 Vélizy-Villacoublay Cedex, France

<sup>3</sup>Institute for Hydromechanics, University of Karlsruhe, Karlsruhe, Germany.

Published in *Phys. Fluids* **21** 015109, 2009

We compute the optimal transient growth of perturbations sustained by a turbulent channel flow following the same approach recently used by del Álamo & Jiménez (*J. Fluid Mech.* Vol. **559**, 2006). Contrary to this previous analysis, we use generalized Orr-Sommerfeld and Squire operators consistent with previous investigations of mean flows with variable viscosity. The optimal perturbations are streamwise vortices evolving into streamwise streaks. In accordance with the previous investigation, it is found that for very elongated structures and for sufficiently large Reynolds numbers, the optimal energy growth presents a primary peak in the spanwise wavelength, scaling in outer units, and a secondary peak scaling in inner units and corresponding to  $\lambda_z^+ \approx 100$ . Contrary to the previous results, however, it is found that the maximum energy growth associated with the primary peak increases with the Reynolds number. This growth, in a first approximation, scales linearly with an effective Reynolds number based on the centreline velocity, the channel half-width and the maximum eddy viscosity associated. The optimal streaks associated with the primary peak have an optimal spacing of  $\lambda_z = 4h$  and scale in outer units in the outer region and in wall units in the near-wall region, where they still have up to 50% of their maximum amplitude near  $y^+ = 10$ .

---

## 1 Introduction

Streaky structures, i.e., narrow regions where the streamwise velocity is lower or larger than the mean, are very commonly observed in turbulent shear flows. It is well known (Kline *et al.* (1967); Smith & Metzler (1983)) that such structures exist in the near wall region of turbulent boundary layers and channel flows where they scale in wall units with a mean spanwise spacing  $\lambda_z^+ \approx 100$ . There is also evidence of the existence of large coherent streaky structures extending outside the near wall region in the turbulent boundary layer (Kovasznay *et al.* (1970); Hutchins & Marusic (2007)), the turbulent Couette flow (Komminaho *et al.* (1996)) and the turbulent channel flow (del Álamo & Jiménez (2003)). The size of these structures seems to scale in external units.

In the case of laminar shear flows it is known that streaks have the potential to be largely amplified from streamwise vortices through the lift-up effect (Moffatt (1967); Ellingsen & Palm (1975); Landahl (1980)). The maximum energy growth leading to the most amplified streaks has been computed for virtually all the usual laminar shear flows (Schmid & Henningson

(2001)). In the case of the laminar channel flow it has been found (Butler & Farrell (1992)) that the optimal streaks are streamwise uniform with an optimal spanwise wavelength  $\lambda_z \sim 3h$ , where  $h$  is the channel half-width.

Butler & Farrell (1993) were the first to compute the optimally amplified streaks in the turbulent channel flow. They used the Reynolds-Tiederman (Reynolds & Tiederman (1967)) turbulent mean profile based on the Cess (1958) eddy viscosity model but used the molecular viscosity in the linearized equations for the perturbations. They found the same optimal streak spacing as in the laminar case ( $\lambda_z \sim 3h$ ) but they were able to retrieve the near wall streaks optimal spacing  $\lambda_z^+ \approx 100$  only by constraining the optimization time to a fixed eddy turnover time. del Álamo & Jiménez (2006) repeated the analysis using the eddy viscosity also in the equations for the perturbations. They found, without any constraint on the optimization time, that the most amplified structures are elongated in the streamwise direction and that two peaks exist for the most amplified spanwise wavelength : a secondary one scaling in inner units and corresponding to  $\lambda_z^+ \approx 100$  and a primary one scaling in outer units and with  $\lambda_z \approx 3h$ . However, contrary to the laminar case, the growth associated with this outer peak decreased when the Reynolds number was increased.

Further investigation, related to the computation of the optimal growth supported by a turbulent boundary layer (Cossu *et al.* (2009)), revealed that the linearized equations for the perturbations used in del Álamo & Jiménez (2006) were not consistent with the ones used in previous linear stability analysis of turbulent mean flows (Reynolds & Hussain (1972)) and of laminar flows with variable viscosity (White (2006)). The scope of the present note is therefore to repeat the analysis of del Álamo & Jiménez (2006) for the turbulent channel flow using the linear operator consistent with previous investigations of the stability of turbulent and laminar flows with variable viscosity (Reynolds & Hussain (1972); White (2006)). We anticipate that we find that the maximum transient growth associated with the outer peak increases with the Reynolds number. These revised results are consistent with experimental evidence that the energy contained in large scale streaky structures increases with the Reynolds number.

## 2 Turbulent Mean flow

We consider the statistically steady, parallel and spanwise uniform turbulent flow of a viscous fluid in a plane channel of half-width  $h$ . Modeling the turbulent shear stress with a turbulent eddy viscosity  $\nu_t$ , and defining a total eddy viscosity  $\nu_T = \nu + \nu_t$ , gives in dimensionless units :  $Re_\tau \tau^+ = \nu_T^+ (\eta) dU^+ / d\eta$ , where  $\nu_T^+ = \nu_T / \nu$ ,  $\tau^+ = \tau / (\rho u_\tau^2)$ ,  $Re_\tau = u_\tau h / \nu$  is the Reynolds number based on the friction velocity  $u_\tau$  and the half width  $h$  of the channel ;  $\eta = y/h$ . Cess (Cess (1958)) expression<sup>1</sup> for the total eddy viscosity is assumed as in previous studies (Reynolds & Hussain (1972); del Álamo & Jiménez (2006)) :

$$\begin{aligned} \nu_T^+ (\eta) &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\kappa^2 Re_\tau^2}{9} (1 - \eta^2)^2 (1 + 2\eta^2)^2 \right. \\ &\quad \times \left. [1 - \exp((|\eta| - 1) Re_\tau / A)]^2 \right\}^{1/2} + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>In del Álamo & Jiménez (2006) the eddy viscosity is defined using  $\widehat{\eta}$  defined in the domain  $[0, 2]$  with  $\widehat{\eta} = \eta + 1$ . Even if the correct expression seems to have been used, some misprints appear in eqn. (2.2) of Ref. del Álamo & Jiménez (2006), that should read instead :  $\nu_T(\widehat{\eta}) = (1/2) \{ 1 + (\kappa^2 Re_\tau^2 / 9) (2\widehat{\eta} - \widehat{\eta}^2)^2 (3 - 4\widehat{\eta} + 2\widehat{\eta}^2)^2 [1 - \exp((|\widehat{\eta} - 1| - 1) Re_\tau / A)]^2 \}^{1/2} + (1/2)$ .

where the same values for the von Kármán constant  $\kappa = 0.426$  and the constant  $A = 25.4$  used in del Álamo & Jiménez (2006) will be used in the following. We however have to remark that these constants have been fitted to DNS results (Hoyas & Jiménez (2006)) for  $Re_\tau = 2000$  and that therefore the validity of this basic flow profile is dubious at very large  $Re_\tau$ . Profiles of  $\nu_T^+(\eta)$  are displayed in Figure 1(a). The mean velocity profile can be retrieved by integrating  $dU^+/d\eta = -Re_\tau \eta / \nu_T^+(\eta)$ , as initially proposed by Reynolds & Tiederman (1967). The mean velocity profiles corresponding to the  $\nu_T^+$  reported in Figure 1(a) are displayed in Figure 1(b) in inner units.

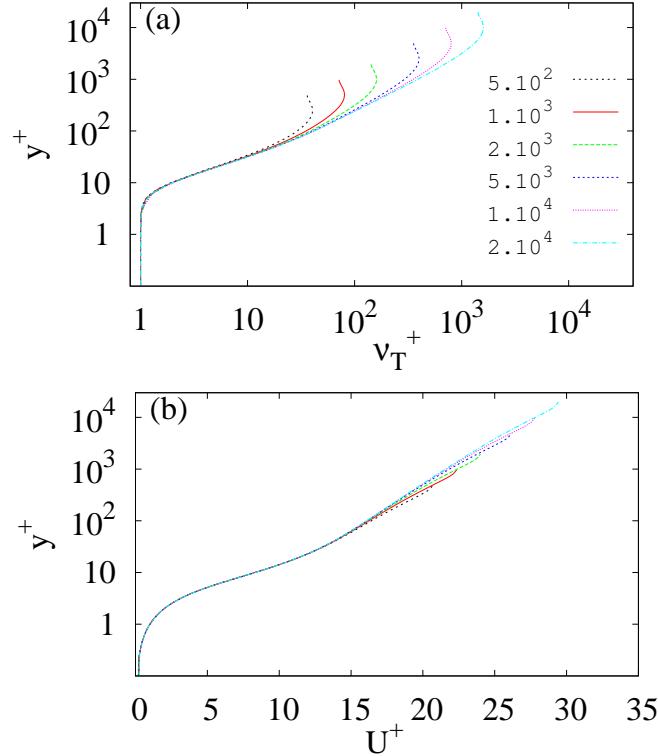


FIG. 1. (a) Cess eddy viscosity  $\nu_T^+$  and (b) corresponding mean velocity profile, both displayed in wall-units for the selected Reynolds numbers  $Re_\tau = 500, 1000, 2000, 5000, 10000, 20000$ .

### 3 Linearized equations

Small perturbations  $\mathbf{u} = (u, v, w), p$  to the turbulent mean flow  $\mathbf{U} = (U(y), 0, 0)$  satisfy the continuity  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  and the linearized momentum equation (Reynolds & Hussain (1972)) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + (v \partial U / \partial y, 0, 0) = \\ -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot [\nu_T(y) (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Perturbations of the form  $\mathbf{u}(x, y, z, t) = \widehat{\mathbf{u}}(\alpha, y, \beta, t) e^{i(\alpha x + \beta z)}$  are considered (due to the homogeneous nature of the mean flow in the horizontal plane), where  $\alpha$  and  $\beta$  are the streamwise and spanwise wavenumbers, respectively. Standard manipulations (Schmid & Henningson (2001)),

generalized to include a variable viscosity (Reynolds & Hussain (1972); White (2006)), allow to rewrite the linearized system into the following generalized Orr-Sommerfeld and Squire equations for respectively the normal velocity  $\widehat{v}(y)$  and vorticity  $\widehat{\omega}_y(y)$  :

$$\begin{bmatrix} D^2 - k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{\omega}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{OS} & 0 \\ -i\beta U' & \mathcal{L}_{SQ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{\omega}_y \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{OS} &= -i\alpha [U(D^2 - k^2) - U''] + \\ &\nu_T (D^2 - k^2)^2 + 2\nu'_T (D^3 - k^2 D) + \nu''_T (D^2 + k^2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}_{SQ} = -i\alpha U + \nu_T (D^2 - k^2) + \nu'_T D \quad (3.5)$$

where  $D$  and  $(')$  stand for  $\partial/\partial y$  and  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

## 4 Optimal growth

The mean velocity profiles displayed in Fig. 1(b) are linearly stable (del Álamo & Jiménez (2006)) for all  $\alpha$  and  $\beta$ , so that infinitesimal perturbations decay after enough time. However, some perturbations can grow before decaying. The ratio  $\|\widehat{\mathbf{u}}(t)\|^2/\|\widehat{\mathbf{u}}_0\|^2$ , where  $\|\cdot\|$  stands for the energy norm, quantifies the energy amplification of a perturbation as it evolves in time. The temporal optimal growth  $\widehat{G}(\alpha, \beta, t) = \sup_{\widehat{\mathbf{u}}_0} \|\widehat{\mathbf{u}}(t)\|^2/\|\widehat{\mathbf{u}}_0\|^2$  gives the maximum energy amplification of a perturbation optimized over all possible initial conditions  $\mathbf{u}_0$ . In the following, we focus on the maximum optimal growth  $G_{max}(\alpha, \beta) = \sup_t \widehat{G}(\alpha, \beta, t)$  attained at the time  $t_{max}$  using the optimal initial conditions. The methods applied here to compute the maximum growth are the standard ones used in case of laminar flows and are easily extended to flows implying a variable viscosity  $\nu_T^+(\eta)$ . The operators  $\mathcal{L}_{OS}$  and  $\mathcal{L}_{SQ}$  are discretized using a spectral collocation method involving differentiation matrices (Weideman & Reddy (2000)) based on Chebyshev polynomials on a grid of  $N_y + 1$  collocation points. The numerical code has been validated in previous studies (Lauga & Cossu (2005)). The results presented in this note have been obtained using from 129 to 513 collocation points. We ensured the convergence of the results by checking that they were not modified when the number of collocation points was doubled.

Like in previous studies (del Álamo & Jiménez (2006); Butler & Farrell (1993)) it is found that only structures elongated in the streamwise direction (i.e. with  $\alpha \lesssim \beta$ ) are amplified and that the largest energy amplifications are reached by streamwise-uniform (i.e.  $\alpha = 0$ ) structures. We have therefore computed the optimal energy growths for several Reynolds numbers ranging from  $Re_\tau = 500$  to  $Re_\tau = 20000$  considering only streamwise independent perturbations ; essentially the same results are found for small streamwise wavenumbers ( $\alpha h \lesssim 0.1$ ). From Figure 2, where the curves  $G_{max}(\alpha = 0, \beta)$  are reported for all Reynolds numbers considered, the typical (del Álamo & Jiménez (2006); Cossu *et al.* (2009)) inner and outer peaks are readily seen. In accordance with what was found in del Álamo & Jiménez (2006), for spanwise wavelengths  $\lambda_z$  in between the two peaks, the time on which the maximum amplification is attained is found to be roughly proportional to  $\lambda_z$ . However, the maximum growth corresponding to the main peak is found to increase with the Reynolds number, contrary to what was found in del Álamo & Jiménez (2006). A cross-stream view of the optimal perturbations corresponding to the outer peak is reported in Figure 3. The optimal initial condition consists

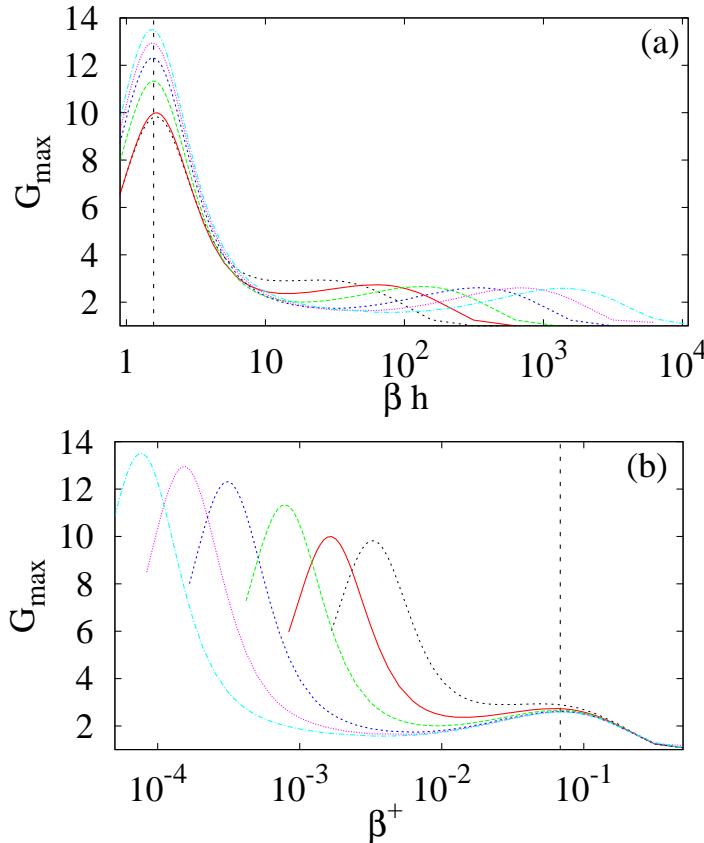


FIG. 2. Maximum growth  $G_{max}$  of streamwise uniform ( $\alpha = 0$ ) perturbations for the Reynolds numbers  $Re_\tau = 500, 1000, 2000, 5000, 10000, 20000$  as a function of the spanwise wavenumber in : (a) outer units  $\beta h$  with a vertical dotted line at the optimal spanwise wavenumber  $\beta h = 1.5707$  corresponding to a spanwise wavelength  $\lambda_z = 4h$  (b) inner units  $\beta^+$  with a vertical dotted line at the optimal spanwise wavenumber  $\beta^+ = 0.0683$ , corresponding to a spanwise wavelength  $\lambda_z^+ = 92$  wall units. Same line styles as in Fig. 1.

in counter-rotating streamwise vortices filling the whole channel and inducing, optimally amplified streamwise velocity streaks of spanwise alternating signs, each streak filling half channel depth. The structures associated with the secondary peaks also consist in optimal initial vortices and final streaks and are in very good agreement with previous results (del Álamo & Jiménez (2006)) and are not reported here.

## 5 Scaling with the Reynolds number

### Scaling of the maximum growth

From Figure 2(b) it is seen that the data obtained at different Reynolds numbers and corresponding to the secondary peak collapse on a single curve if they are scaled in inner units and the Reynolds number is sufficiently large (roughly larger than  $Re_\tau \sim 4000$  according to our computations). This is consistent with what was found by del Álamo & Jiménez (2006), even if the precise values of the peak slightly differ. In particular the maximum growth  $G_{max}^{(inn)} = 2.6$  (less than the  $\sim 3.5$  found in del Álamo & Jiménez (2006)) is obtained for  $\beta^+ = 0.0683$ ,

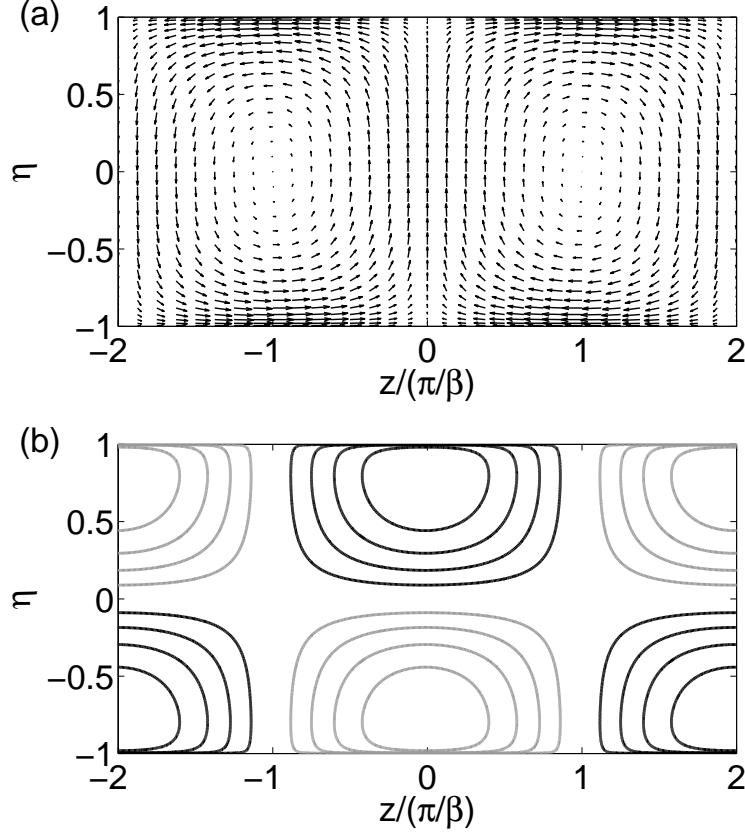


FIG. 3. Transverse view of the optimal solution corresponding to the primary peak ( $\lambda_z = 4h$ ) for  $Re_\tau = 5000$  : (a) represents the initial  $(v, w)$  field ( $t = 0$ ). (b) represents the optimal streamwise velocity streaks obtained in response to this perturbation at  $t = t_{max}$ . The black contours are high velocity streaks  $u > 0$  and the grey contours are low velocity streaks  $u < 0$ . The levels are  $0.2(+0.2)0.8$ .

corresponding to a spanwise wavelength of  $\lambda_z^+ = 92$  wall units. The time  $t_{max}^+ = t_{max} u_\tau^2 / \nu$  at which the maximum growth is attained roughly ranges from 19 to 16 slightly decreasing with  $Re_\tau$ . The fact that the maximum growth corresponding to inner scaling structures is almost independent of  $Re_\tau$  has been qualitatively explained in del Álamo & Jiménez (2006) by showing that the Reynolds number typical of these most amplified inner structures is close to constant and very low (of the order of 10).

The primary peak  $G_{max}^{(out)}$  is attained, for the considered set of  $Re_\tau$ , at  $\beta h = 1.5707$  corresponding to an optimal spanwise wavelength  $\lambda_z = 4h$  (a value slightly larger than the  $\sim 3h$  value found in Butler & Farrell (1993) and del Álamo & Jiménez (2006)). The maximum energy growth is of the order of ten and increases with  $Re_\tau$  (see Fig.2). In the laminar channel flow case the maximum energy growth scales with the square of the Reynolds number (Gustavsson (1991); Butler & Farrell (1992); Reddy & Henningson (1993)) based on the centerline velocity  $U_e$ , half-channel width  $h$  and the molecular viscosity. In the present turbulent case we therefore try a scaling with an ‘effective’ turbulent Reynolds number  $Re_\bullet = U_e h / \nu_{Tmax}$  based on the outer units  $h$ ,  $U_e$  and the maximum total viscosity  $\nu_{Tmax} = \sup_y \nu_T(y)$ . This outer-units-effective Reynolds number should not be confused with the effective Reynolds number

defined in del Álamo & Jiménez (2006) associated with inner layer structures and used to interpret the inner peak growth. For the considered mean flow profiles,  $Re_\bullet$  ranges from 256 to 368 when  $Re_\tau$  is between 500 and 20000. The maximum energy amplification  $G_{max}^{(out)}$  is seen to scale approximately linearly with  $Re_\bullet$ . In Fig.4(a)  $G_{max}^{(out)}$  and its fit  $0.03787 Re_\bullet$  are plotted versus  $Re_\tau$ . The optimal dimensionless time  $t_{max}U_e/h$  at which the outer peak optimal is attained, increases with the Reynolds number scaling approximately like  $Re_\bullet^{3/2}$  (see Fig.4(b)). As presently there is no theoretical support for these scalings, they should be considered only as empirical data fits. Furthermore, for large Reynolds numbers ( $Re_\tau \geq 10000$ ) the  $G_{max}^{(out)}$  curve begins to deviate from the linear behavior in  $Re_\bullet$  (and it deviates even further for larger  $Re_\tau$ ). However, we have to remind that the  $\kappa$  and  $A$  constants used to fit the eddy viscosity and the mean profile have been calibrated versus DNS at the low  $Re_\tau = 2000$  and therefore probably no conclusions can be drawn at very large  $Re_\tau$ .

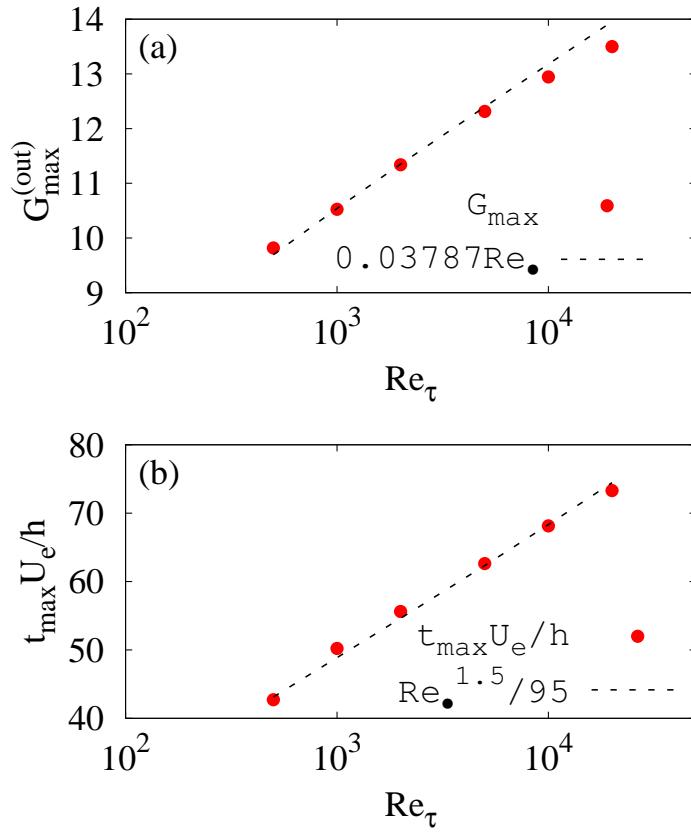


FIG. 4. (a) Maximum growth  $G_{max}^{(out)}$  corresponding to the outer peak versus  $Re_\tau$ . The dashed line is the fit  $0.03787 Re_\bullet$ . (b) Associated dimensionless time versus  $Re_\tau$ . The dashed line is the fit  $Re_\bullet^{3/2}/95$

### Scaling of the optimal perturbations

In figure 5, the wall normal velocity component  $v$  of the initial vortices and the streamwise velocity component  $u$  of the resulting streaks for each Reynolds number are plotted versus respectively the wall normal inner ( $y^+$ ) and outer ( $\eta$ ) coordinates. The optimal perturbations

are seen to assume a shape almost independent of the  $Re_\tau$  when rescaled in proper units, even if this independence is only qualitative, as revealed by a close examination of Fig. 5. Regarding the inner peak it is observed that the maximum of the optimal initial  $v$ , giving the distance from the wall of the optimal initial counter-rotating vortices, is situated approximatively at  $y^+ = 15$ , while the maximum of the optimal final  $u$  is situated near  $y^+ = 10$ . As for the outer peak, the maximum of the optimal initial  $v$  is located at the channel center  $\eta = 0$  while the maximum of optimal outer streak is situated near the wall, at  $|\eta| = 0.80$ .

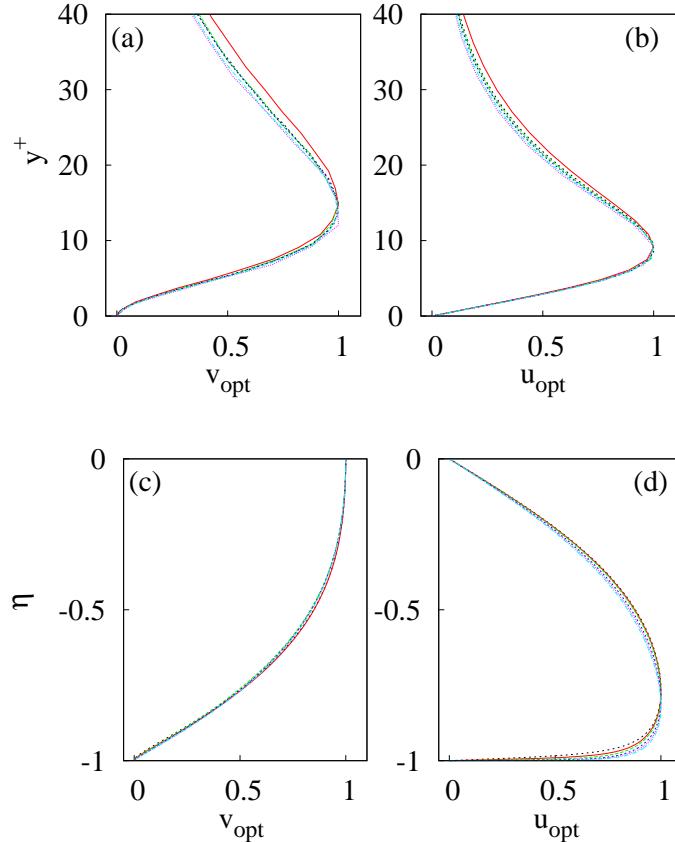


FIG. 5. Normalized amplitude of the  $v$  component of the optimal initial vortices (a and c) and of the  $u$  component of the corresponding optimally amplified streaks (b and d) for  $Re_\tau = 500, 1000, 2000, 5000, 10000$  and  $20000$  (Recall that for  $\alpha = 0$ ,  $u$  and  $v$  are real while  $w$  is pure imaginary). a-b) Corresponding to the secondary peak in Fig. 2, displayed in wall units. c-d) Corresponding to the main peak in Fig. 2, displayed in outer units. Same line styles as in Fig. 1.

When replotted in inner variables, the amplitudes of the outer optimal streaks collapse on a single curve in the log and near wall regions where they are proportional to the mean flow velocity profile  $U$ . This is shown in Figure 6 where the data already reported in Figure 5(d) are replotted in inner variables expressing  $u_{opt}$  in wall units by using the factor  $U_e^+(Re_\tau)/U_e^+(5000)$  where  $Re_\tau = 5000$  is taken as the reference case. In the same figure, the  $Re_\tau = 5000$  mean velocity profile rescaled to have unit amplitude at the position of the maximum of the corresponding streak (where the streak amplitude is also normalized to one) is

also reported for comparison. This particular scaling of the optimal streaks allow them to have very large amplitudes inside the near wall region, just like the mean flow : at  $y^+ = 10$  they can still have half of their maximum amplitude.

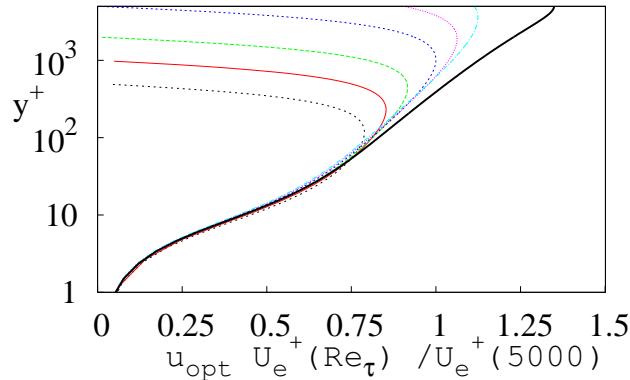


FIG. 6. Normalized  $u$  component of the optimally amplified streaks corresponding to the main peak. Same data as in Figure 5(d) but in wall units and normalized with the  $Re_\tau = 5000$  case. Line styles as in Fig. 1. The solid line represents the mean flow profile corresponding to  $Re_\tau = 5000$  and normalized with an arbitrary constant to match the normalization of the optimal streaks. (Only half channel represented here)

## 6 Summary and discussion

The computation of the optimal energy growth in a turbulent channel flow by del Álamo & Jiménez (2006) has been repeated using a linear operator consistent with previous investigations of laminar (White (2006)) or turbulent (Reynolds & Hussain (1972)) flows with variable eddy viscosity.

As in del Álamo & Jiménez (2006), and consistently with the analogous analysis of a turbulent boundary layer (Cossu *et al.* (2009)), it is found that (a) only streamwise elongated structures can be transiently amplified, (b) the most amplified perturbations are streamwise uniform and consist in streamwise vortices amplified into streamwise streaks, (c) for sufficiently large Reynolds numbers two different peaks of the optimal growth  $G_{max}(\alpha = 0, \beta)$  are found, respectively scaling in inner and in outer units, (d) the maximum growth associated with the inner peak does not depend on  $Re_\tau$  and is obtained for structures having a spanwise wavelength  $\lambda_z^+ \approx 100$  (e) the time at which the optimals are reached is roughly proportional to their spanwise wavelength  $\lambda_z$ .

The optimal spanwise wavenumber ( $\lambda^+ = 92$ ) and growth ( $G_{max}^{(inn)} = 2.6$ ) corresponding to the peak scaling in inner units are slightly smaller than the ones found in del Álamo & Jiménez (2006) and the difference must be attributed to the different linear operators used in the analysis. The precise figures of these optimal values should not, however, be over-emphasized because of the very crude assumptions made in their derivation and because their value slightly depends also on the choice of the von Kármán  $\kappa$  and  $A$  constants used for the mean flow fits. The selected optimal  $\lambda_z^+$  are anyway in very good accordance with experimental results (Kline *et al.* (1967); Smith & Metzler (1983)) where the measured mean spacing of near wall streaks ranges from 80 to 110 in an apparently random way.

The most important difference with the results obtained in del Álamo & Jiménez (2006) is that the maximum growth corresponding to the outer peak increases with the Reynolds number. In a first approximation, the outer optimal growth scales linearly with an effective turbulent Reynolds number based on outer units, similarly to what is observed for the turbulent boundary layer (Cossu *et al.* (2009)). The optimal growth is obtained for structures with a spanwise wavelength  $\lambda_z \sim 4h$ , larger than the laminar optimal, which is also consistent with what is found in the turbulent boundary layer case (Cossu *et al.* (2009)).

The optimal vortices and streaks corresponding to the two peaks are seen to be approximately self-similar in respectively inner and outer units. The optimal streaks corresponding to the outer peak are however seen to scale also in inner units in the viscous layer (roughly  $y^+ \lesssim 150$ ), where they are proportional to the local mean velocity. The outer streaks have therefore non-negligible amplitudes in all the viscous layer (they have up to 50% of their maximum amplitude near  $y^+ = 10$ ).

The two combined facts that the outer peak  $G_{max}^{(out)}$  increases with  $Re_\tau$  and that the associated optimal streaks strongly protrude into the viscous layer, can be related to experimental and numerical evidence of the influence of outer scales into the inner layers. In particular, it has been observed both in experiments (De Graaff & Eaton (2000)) and numerical simulations (Hoyas & Jiménez (2006)) that the streamwise turbulent intensity  $u_{rms}$  in the outer layer of wall flows does not collapse in wall units with increasing  $Re_\tau$  and that this lack of collapse grows with  $Re_\tau$ .

Structures almost streamwise uniform ( $\lambda_x \gg h$ ) with  $\lambda_z \sim 4h$  are observed in DNS of turbulent channel flows (del Álamo & Jiménez (2003)) even if these structures are not the most energetic ones. The observed most energetic structures are not streamwise uniform but have finite  $\lambda_x$  typical of the order of  $\approx 5 - 10h$  (corresponding to  $\alpha h \approx 0.5 - 1$ ) and a typical spacing  $\lambda_z \approx 2 - 3h$  which corresponds well to the optimal  $\lambda_z$  that would be found for those  $\alpha$  (e.g. for  $\alpha h = 1$  the optimal is  $\lambda_z = 2.45$ ). The fact that the streamwise uniform streaks are not the most energetic ones probably means that these structures are not self-sustained or are only weakly sustained because of a poor feedback to reform the vortices or that they are just passively forced by other self-sustained structures. This is because the amplification of the streaks is only part of more complex processes leading e.g. to self-sustained cycles. To see these potentially largely amplified structures one must probably artificially force them as recently done in the turbulent Couette flow (Kitoh & Umeki (2008)). Forcing large amplitude streaks could be interesting to manipulate the flow, as already shown in the case of laminar boundary layers (Cossu & Brandt (2002); Fransson *et al.* (2006)).

## 7 Acknowledgements

We are pleased to acknowledge fruitful discussions with J. Jiménez and J. C. del Álamo. G.P acknowledges partial support from ANRT through a ‘Convention CIFRE’. MGV acknowledges the financial support of the German Research Foundation (DFG).

## References

- DEL ÁLAMO, J.C. & JIMÉNEZ, J. 2003 Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels. *Phys. Fluids* **15**, L41.
- DEL ÁLAMO, J. C. & JIMÉNEZ, J. 2006 Linear energy amplification in turbulent channels. *J. Fluid Mech.* **559**, 205–213.
- BUTLER, K. M. & FARRELL, B. F. 1992 Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids A* **4**, 1637–1650.
- BUTLER, K. M. & FARRELL, B. F. 1993 Optimal perturbations and streak spacing in wall-bounded turbulent shear flow. *Phys. Fluids* **5**, 774–777.
- CESS, R. D. 1958 A survey of the literature on heat transfer in turbulent tube flow. Research Report 8-0529-R24. Westinghouse.
- COSSU, C. & BRANDT, L. 2002 Stabilization of Tollmien-Schlichting waves by finite amplitude optimal streaks in the Blasius boundary layer. *Phys. Fluids* **14**, L57–L60.
- COSSU, C., PUJALS, G. & DEPARDON, S. 2009 Optimal transient growth and very large scale structures in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **619**, 79–94.
- DE GRAAFF, D.B. & EATON, J.K. 2000 Reynolds-number scaling of the flat-plate turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **422**, 319–346.
- ELLINGSEN, T. & PALM, E. 1975 Stability of linear flow. *Phys. Fluids* **18**, 487.
- FRANSSON, J., TALAMELLI, A., BRANDT, L. & COSSU, C. 2006 Delaying transition to turbulence by a passive mechanism. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 064501.
- GUSTAVSSON, L. H. 1991 Energy growth of three-dimensional disturbances in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **224**, 241–260.
- HOYAS, S. & JIMÉNEZ, J. 2006 Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $re_\tau = 2003$ . *Phys. Fluids* **18**, 011702.
- HUTCHINS, N. & MARUSIC, I. 2007 Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **579**, 1–28.
- KITOH, O. & UMEKI, M. 2008 Experimental study on large-scale streak structure in the core region of turbulent plane couette flow. *Phys. Fluids* **20**, 025107.
- KLINE, S. J., REYNOLDS, W. C., SCHRAUB, F. A. & RUNSTADLER, P. W. 1967 The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **30**, 741–773.
- KOMMINAHO, J., LUNDBLADH, A. & JOHANSSON, A. V. 1996 Very large structures in plane turbulent couette flow. *J. Fluid Mech.* **320**, 259–285.
- KOVASZNAY, L. S. G., KIBENS, V. & BLACKWELDER, R. F. 1970 Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **41**, 283–325.
- LANDAHL, M. T. 1980 A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows. *J. Fluid Mech.* **98**, 243.

- LAUGA, E. & COSSU, C. 2005 A note on the stability of slip channel flows. *Phys. Fluids* **17**, 088106.
- MOFFATT, H. K. 1967 The interaction of turbulence with strong wind shear. In *Proc. URSI-IUGG Colloq. on Atoms. Turbulence and Radio Wave Propag.* (ed. A.M. Yaglom & V. I. Tatarsky), pp. 139–154. Moscow : Nauka.
- REDDY, S. C. & HENNINGSON, D. S. 1993 Energy growth in viscous channel flows. *J. Fluid Mech.* **252**, 209–238.
- REYNOLDS, W. C. & HUSSAIN, A. K. M. F. 1972 The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparisons with experiments. *J. Fluid Mech.* **54** (02), 263–288.
- REYNOLDS, W. C. & TIEDERMAN, W. G. 1967 Stability of turbulent channel flow, with application to Malkus's theory. *J. Fluid Mech.* **27** (02), 253–272.
- SCHMID, P. J. & HENNINGSON, D. S. 2001 *Stability and Transition in Shear Flows*. New York : Springer.
- SMITH, J. R. & METZLER, S. P. 1983 The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **129**, 27–54.
- WEIDEMAN, J. A. C. & REDDY, S. C. 2000 A MATLAB Differentiation Matrix Suite. *ACM Trans. Math. Soft.* **26** (4), 465–519.
- WHITE, F. M. 2006 *Viscous Fluid Flows*. Mc Graw-Hill, third edition.

2

## Article 2

*Publié dans Journal of Fluid Mechanics **619** pp. 79-94, 2009*



# Optimal transient growth and very large scale structures in turbulent boundary layers

By Carlo Cossu<sup>1</sup>, Gr  gory Pujals<sup>1,2</sup> and Sébastien Depardon<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LadHyX, CNRS-  cole Polytechnique, F-91128 Palaiseau, France

<sup>2</sup>PSA Peugeot Citro  n, Centre Technique de Velizy, 2 Route de Gisy, 78943 Vélizy-Villacoublay Cedex, France

Published in *J. Fluid Mech.* **619** pp. 79-94, 2009

The optimal energy growth of perturbations sustained by a zero pressure gradient turbulent boundary is computed using the eddy viscosity associated with the turbulent mean flow. It is found that even if all the considered turbulent mean profiles are linearly stable, they support transient energy growths. The most amplified perturbations are streamwise uniform and correspond to streamwise streaks originated by streamwise vortices. For sufficiently large Reynolds numbers two distinct peaks of the optimal growth exist respectively scaling in inner and outer units. The optimal structures associated with the peak scaling in inner units correspond well to the most probable streaks and vortices observed in the buffer layer and their moderate energy growth is independent of the Reynolds number. The energy growth associated with the peak scaling in outer units is larger than that of the inner peak and scales linearly with an effective turbulent Reynolds number formed with the maximum eddy viscosity and a modified Rotta-Clauser length based on the momentum thickness. The corresponding optimal perturbations consist in very large scale structures with a spanwise wavelength of the order of  $8\delta$ . The associated optimal streaks scale in outer variables in the outer region and in wall units in the inner region of the boundary layer, there being proportional to the mean flow velocity. These outer streaks protrude far into the near wall region, having still 50% of their maximum amplitude at  $y^+ = 20$ . The amplification of very large scale structures appears to be a robust feature of the turbulent boundary layer : Optimal perturbations with spanwise wavelengths ranging from 4 to  $15\delta$  can all reach 80% of the overall optimal peak growth.

---

## 1 Introduction

The presence of persistent streaky structures is a well established robust feature of turbulent shear flows (Kline *et al.*, 1967). A large amount of research has been dedicated to the understanding of the mechanisms by which streaks are generated and of their relevance on the turbulent dynamics. In the near wall region of the boundary layer these streaks, with characteristic mean spacing of about one hundred wall units, are thought to play an essential role in a turbulent self sustained mechanism (Jiménez & Moin, 1991; Hamilton *et al.*, 1995; Waleffe, 1995). The ‘lift-up’ effect by which low energy streamwise vortices can induce large energy streaks (Moffatt, 1967; Ellingsen & Palm, 1975; Landahl, 1980) is an important process embedded in this self sustained mechanism. This same effect, leading to unstable large amplitude streaks, is also thought to play a crucial role in the subcritical transition to turbulence in linearly stable shear flows (e.g. Kreiss *et al.* (1994); Reddy *et al.* (1998)). In this

latter context it has been recognised that the energy amplification of the streaks, which is transient in time and proportional to the square of the Reynolds number (Gustavsson, 1991), is related to the non-normal nature of the linearised Navier-Stokes operator and can lead to very large energy growths if optimized (Butler & Farrell, 1992; Trefethen *et al.*, 1993; Farrell & Ioannou, 1996; Schmid & Henningson, 2001). Recent studies have also demonstrated that the well controlled optimal transient growth of artificially forced streaks can be efficiently used to manipulate at leading order laminar shear flows. Such a paradigm has been successfully applied to stabilize Tollmien-Schlichting waves in a laminar boundary layer (Cossu & Brandt, 2002; Fransson *et al.*, 2005) and to effectively delay transition to turbulence (Fransson *et al.*, 2006). In these investigations, roughness elements were used to create nearly optimal vortices in the upstream part of the boundary layer that induced well controlled streamwise streaks downstream. A still not addressed extension of such a kind of approach would consist in the manipulation of turbulent boundary layers with optimal vortices and streaks, the first step in this direction being to compute the optimal perturbations of the turbulent boundary layer.

If the optimal energy growth and the corresponding optimal perturbations have been computed for virtually all the canonical wall bounded laminar shear flows, only few studies have considered turbulent flows. Linear stability analyses of turbulent mean basic flows by Malkus (1956); Reynolds & Tiederman (1967); Reynolds & Hussain (1972) essentially reveal that these flows are linearly stable. Only recently, the optimal perturbation energy growth of turbulent mean flows has been investigated looking for a relation between turbulent coherent structures and linear optimals [Butler & Farrell (1993); Farrell & Ioannou (1993, 1998)]. Butler & Farrell (1993) consider the optimal perturbations of a turbulent channel flow using the Reynolds & Tiederman (1967) turbulent mean profile based on the eddy viscosity model of Cess (1958), but they use the molecular viscosity in the equations for the perturbations. They find that perturbations leading to maximum growth are streamwise uniform and spanwise periodic with wavelength near  $3h$ , where  $h$  is the channel half-width, which is almost the same value selected in the laminar case. By constraining the optimization to times of the order of the eddy turnover time they are able to find optimals with the typical one hundred wall units spacing characteristic of the near wall region streaks. del Álamo & Jiménez (2006) have repeated the analysis using in the linear operator the eddy viscosity  $\nu_T(y)$  associated with the turbulent mean flow in the spirit of the modal linear investigations of Reynolds & Hussain (1972). Without any further restriction on the optimization times they find two peaks for the optimal growth. The main peak scales on external units with an optimal spanwise wavelength  $\lambda_z \sim 3h$ , while the secondary peak, that scales in inner (wall) units, is found at  $\lambda^+ = 100$  and is associated with typical near wall streaks. To explain the formation of secondary vortices in a turbulent square duct Bottaro *et al.* (2006) have computed the linear optimals using a mixing length model for the eddy viscosity.

The optimal perturbation energy growth has not yet been computed for turbulent boundary layers despite their great practical and theoretical relevance. For such type of flow some questions arise : Do two different optimal peaks with distinct scalings appear also in this case as expected ? Which is the relevant external boundary layer length on which the optimal vortices and streaks scale ? What are the values of the optimal spanwise wavelengths ? In the laminar case the optimal energy growth is proportional the square of the Reynolds number. In the turbulent channel flow case the maximum growth of near wall structures does not seem to depend on the Reynolds number while the maximum growth of the large scale structures do, but no characteristic scaling was found in that case. Another question is therefore : On which quantity does the maximum energy growth of the large scale structures scales ? Answers to

these questions, in addition to their relevance for the analysis of natural large scale structures in turbulent boundary layers will probably also be useful in the light of the many previous studies related to the manipulation of turbulent boundary layers with streamwise vortices by either riblets or bio-inspired rough walls scaling in inner units and vortex generators scaled in outer units. In most of these investigations, the particular choice of the actuator size and spacing have been inspired by bio-mimetic or semi-empirical considerations and not by optimal energy growth considerations.

The scope of the present study is therefore to answer some of the questions proposed above by computing the optimal energy growth and the associated optimal perturbations supported by turbulent zero pressure gradient boundary layers. In Section 2 we briefly introduce the equations defining the turbulent mean flow, the procedure by which the associated turbulent shear stress and eddy viscosity are computed, the linearised equations for the perturbations and we summarize how optimal perturbations and growths are computed. The optimal growths and perturbations computed for the selected mean flow profiles and their dependence on the streamwise and spanwise wavenumbers as well as on the Reynolds number are presented in Section 3. A summary of our findings and a discussion of their relation with existing studies and of their implications are provided in Section 4.

## 2 Background

### 2.1. Mean flow and associated eddy viscosity

The boundary layer mean flow  $U(x, y), V(x, y)$  in the absence of pressure gradient in the streamwise direction  $x$ , satisfies the standard mean mass and momentum conservation equations (see e.g. Schlichting (1979)) :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (2.2)$$

where  $\tau/\rho = \nu(\partial U/\partial y) - \langle u'v' \rangle$  is the sum of the molecular viscosity and of the Reynolds shear stress. We denoted by  $x$ ,  $y$  and  $z$  respectively the streamwise, the normal and the spanwise coordinates. At sufficiently large Reynolds numbers, the boundary layer mean flow data can be conveniently fitted with uniformly valid asymptotic expressions, even if the validity of such an approach is a recurrent subject of debate. Here, we use a convenient self-consistent expression, recently proposed by Monkewitz *et al.* (2007), that very well fits the experimental data of Österlund (1999) and Nagib *et al.* (2004) for a wide range of Reynolds numbers :

$$\frac{U}{u_\tau} = [U_i^+(y^+) - U_{log}^+(y^+) + U_e^+(Re_{\delta^*}) - U_w^+(\eta)], \quad (2.3)$$

where  $u_\tau = (\nu dU/dy|_{wall})^{1/2}$  is the wall friction velocity,  $y^+ = yu_\tau/\nu$  is the wall normal coordinate scaled in inner units,  $U_e^+ = U_e/u_\tau$  is the free-stream velocity  $U_e$  scaled with  $u_\tau$ ,  $Re_{\delta^*} = U_e\delta^*/\nu$  is the Reynolds number scaled on the displacement thickness  $\delta^*$ , and  $\eta = y/\Delta$  is the wall normal coordinate scaled with the external Rotta-Clauser outer length scale  $\Delta = \delta^*U_e^+$ . The inner and the outer coordinates are related by  $y^+ = Re_{\delta^*}\eta$ . The explicit expressions for the inner layer velocity function  $U_i^+(y^+)$ , the log layer velocity  $U_{log}^+(y^+)$ , the

wake function  $U_w^+(\eta)$  and  $U_e^+$  are given in appendix Appendix A.. The quantitative results presented in the following of course apply only where eqn. (2.3) is a good fit to the data, the procedure is however general and could be applied to other expansions assumed for  $U$ .

The shear stress associated with the mean flow  $U$  can be retrieved by integrating eqn. (2.2) in the wall normal direction

$$\frac{\tau(y)}{\rho} = u_\tau^2 + \int_0^y \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy \quad (2.4)$$

where the normal velocity component  $V$  can be computed with an integration of the continuity equation  $V = - \int_0^y (\partial U / \partial x) dy$ . An explicit expression for  $\partial U / \partial x$  can be obtained deriving eqn. (2.3) with respect to  $x$  which, using the chain rule, eqn. (A.3), and after some manipulation, gives :

$$\frac{1}{u_\tau} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{u_\tau} \frac{du_\tau}{dx} \left[ \frac{U}{u_\tau} + y^+ \frac{\partial U_i^+}{\partial y^+} \right] + \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dx} \left[ \eta \frac{\partial U_w^+}{\partial \eta} + \frac{1}{\kappa} \right], \quad (2.5)$$

where  $\kappa$  is the von Kármán “coefficient”. Deriving with respect to  $x$  the explicit expression of  $U_e^+$  (eqn. (A.3)), and recalling that in the zero pressure gradient boundary layer  $dU_e/dx = 0$ , it is found that :

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dx} = -D \frac{1}{u_\tau} \frac{du_\tau}{dx} \quad (2.6)$$

with  $D = 1 + \kappa U_e^+$ . Replacing in the integral von Kármán momentum equation  $d\theta/dx = (1/U_e^+)^2$  the definition of the momentum thickness  $\theta$  and then using eqns. (2.5) and (2.6) it is found :

$$\frac{1}{u_\tau} \frac{du_\tau}{dx} = \left\{ \int_0^\infty \left[ \frac{U}{u_\tau} + y^+ \frac{\partial U_i^+}{\partial y^+} - D \left( \eta \frac{\partial U_w^+}{\partial \eta} + \frac{1}{\kappa} \right) \right] \left[ U_e^+ - 2 \frac{U}{u_\tau} \right] dy \right\}^{-1} \quad (2.7)$$

which finally allows the explicit determination of  $\partial U / \partial x$ ,  $V$  and  $\tau$ . The total shear stress is then modelled by  $\tau/\rho = \nu_T(y) \partial U / \partial y$ , where the total viscosity  $\nu_T$  is the sum of the molecular and turbulent eddy viscosity.  $\nu_T$  and its derivatives are explicitly computed inside the boundary layer but, in the potential region, say for  $\eta > \eta_*$ , where they respectively tend to  $\nu$  and zero and where they are numerically undefined since both  $\tau$  and  $\partial U / \partial y$  tend to zero, they are extrapolated. We have used  $\eta_* = 0.25$  but the results of the extrapolation are not affected if  $\eta_*$  is changed, provided that it remains in the range  $\approx 0.15 - 0.27$ .

## 2.2. Linear perturbations and optimal growth

Following the rationale of previous investigations of Reynolds & Tiederman (1967); Reynolds & Hussain (1972) and del Álamo & Jiménez (2006) we consider the linear temporal growth of perturbations  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ,  $p$  to the turbulent mean flow  $\mathbf{U} = (U(y), 0, 0)$  with eddy viscosity  $\nu_T(y)$ . These perturbations satisfy the continuity equation  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  and the linearised momentum equation :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + (v \partial U / \partial y, 0, 0) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot [\nu_T(y) (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \quad (2.8)$$

where  $(')$  stands for  $\partial / \partial y$ . Under the parallel flow assumption, perturbations of the form  $\widehat{\mathbf{u}}(\alpha, y, \beta, t) e^{i(\alpha x + \beta z)}$  can be separately considered, where  $\alpha$  and  $\beta$  are respectively the streamwise and spanwise wavenumber. Standard manipulations (see e.g. Schmid & Henningson

(2001)), generalized to include a variable viscosity (e.g. White (2006)), allow to recast the linearised system into the generalized Orr-Sommerfeld and Squire equations for respectively the normal velocity  $\widehat{v}(y)$  and vorticity  $\widehat{\omega}_y(y)$  :

$$\begin{bmatrix} D^2 - k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{\omega}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{OS} & 0 \\ -i\beta U' & \mathcal{L}_{SQ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{\omega}_y \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

with

$$\mathcal{L}_{OS} = -i\alpha [U(D^2 - k^2) - U''] \quad (2.10)$$

$$+ [\nu_T (D^2 - k^2)^2 + 2\nu'_T (D^3 - k^2 D) + \nu''_T (D^2 + k^2)]$$

$$\mathcal{L}_{SQ} = -i\alpha U + [\nu_T (D^2 - k^2) + \nu'_T D] \quad (2.11)$$

where  $D$  and  $(')$  stand for  $\partial/\partial y$  and  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . The optimal (temporal) energy growth  $G$  is defined in the usual way as the ratio of the kinetic energy associated to  $\widehat{\mathbf{u}}$  at time  $t$  to the kinetic energy of the initial condition  $\widehat{\mathbf{u}}_0$  optimized over all allowed  $\widehat{\mathbf{u}}_0 : G(\alpha, \beta, t) = \sup_{\widehat{\mathbf{u}}_0} \|\widehat{\mathbf{u}}\|^2 / \|\widehat{\mathbf{u}}_0\|^2$  with  $\|\widehat{\mathbf{u}}\| = [\int_V |\widehat{\mathbf{u}}|^2, dV]^{1/2}$ . The maximum optimal growth, defined as  $G_{max}(\alpha, \beta) = \sup_t G(\alpha, \beta, t)$ , is attained at the time  $t_{max}$ . The standard methods used to compute the maximum growth of laminar basic flows and described e.g. by Schmid & Henningson (2001) are easily extended to the case of the variable viscosity  $\nu_T(y)$ . The numerical code is based on a spectral discretization of the operators  $\mathcal{L}_{OS}$  and  $\mathcal{L}_{SQ}$  obtained by using differentiation matrices (Weideman & Reddy, 2000) based on Chebyshev polynomials on a grid of  $Ny + 1$  collocation points in the interval  $y \in [0, y_{max}]$ . The perturbation velocity is required to vanish at the upper boundary  $y_{max}$  but this artificial boundary condition do not affect the results provided that  $y_{max}$  is large enough. The code has been carefully validated in previous studies (e.g. Lauga & Cossu (2005)), and its results have been carefully tested on a turbulent channel flow and on the laminar boundary layer. The results discussed below have been obtained using 257 to 513 collocation points and  $y_{max}$  ranging from  $0.4\Delta$  (almost twice the boundary layer thickness) for small wavelengths to  $40\delta^*$  for the largest wavelengths. The convergence of the results has been checked by doubling the number of collocation points and/or the maximum domain extension to  $80\delta^*$ .

### 3 Results

#### 3.1. Basic flow

The mean velocity profiles given in eqn. (2.3) and the corresponding shear stress  $\tau$  have been computed for a set of Reynolds number  $Re_{\delta^*}$  and are reported in Figure 1. For the considered profiles the boundary layer thickness, defined as the position where  $U = 0.99 U_e$ , is approximatively given by  $\delta = 0.223\Delta$  for  $Re_{\delta^*} \geq 10^4$ . Monkewitz *et al.* (2007) have carefully validated with experimental data the mean profiles given by eqn. (2.3) but not the corresponding shear stress that were not explicitly computed. We therefore compare the Reynolds shear stress, computed following the procedure described in Section 2, to the experimental data obtained by De Graaff & Eaton (2000) at  $Re_{\delta^*} = 17300$  (corresponding to  $Re_\theta = 13000$ ). As can be seen from Figure 1c, the theoretical and the experimental data agree reasonably well for both the velocity profiles and the Reynolds stress.

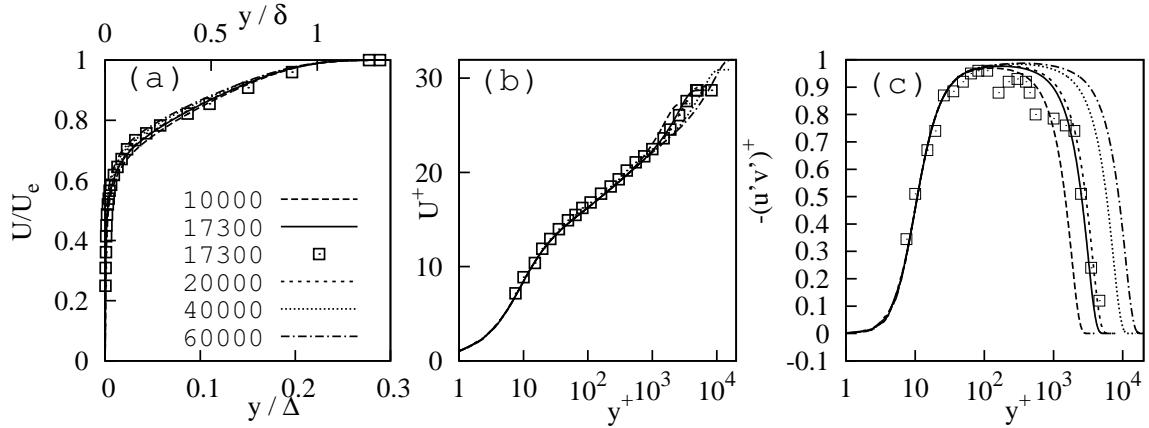


FIG. 1. Turbulent mean flow profiles given by eqn. (2.3) plotted in outer (a) and inner (b) units. (c) Inner scaled Reynolds shear stress  $-\langle u'v' \rangle/u_\tau^2 = (\tau/\rho - \nu U')/u_\tau^2$  plotted in inner scale  $y^+$ . The selected Reynolds numbers are  $Re_{\delta^*} = 10^4, 1.73 \cdot 10^4, 2 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4, 6 \cdot 10^4$  and experimental data from de Graaff & Eaton (2000) at  $Re_{\delta^*} = 1.73 \cdot 10^4$  are also reported for comparison as squares.

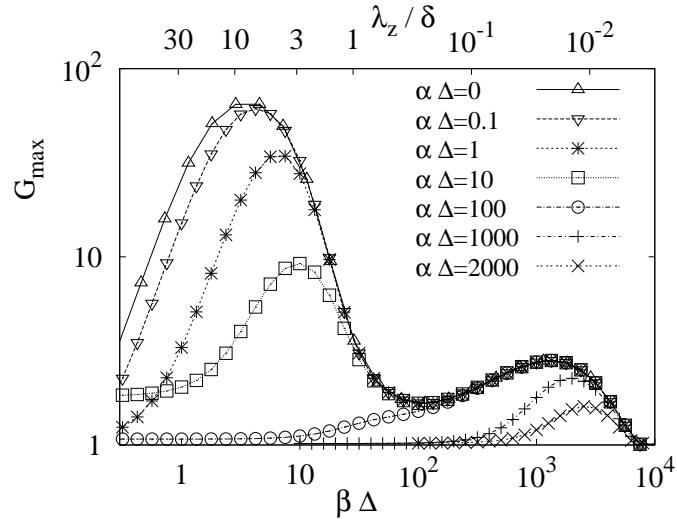


FIG. 2. Dependence of the maximum growth  $G_{max}$  on the spanwise wavenumber  $\beta\Delta$  obtained at  $Re_{\delta^*} = 17300$  for selected streamwise wavenumbers ( $\alpha\Delta = 0, 0.1, 1, \dots$ ).

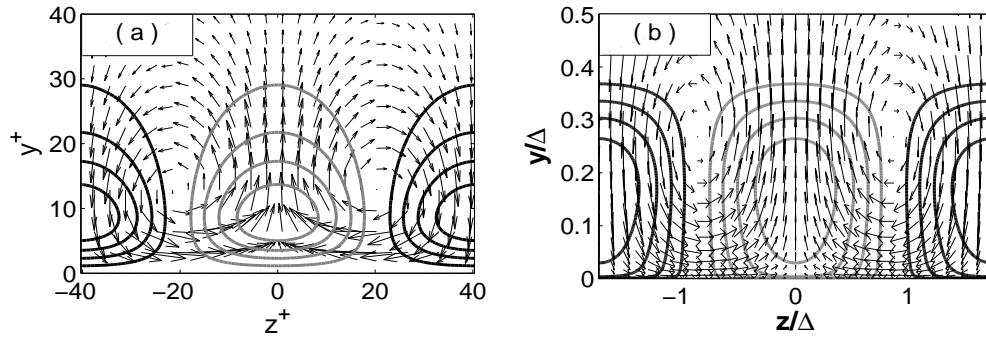


FIG. 3. Cross-stream view of the  $v-w$  component of the optimal initial vortices (arrows) and of the  $u$  component of the corresponding maximally amplified streak (contour-lines) for  $Re_{\delta^*} = 17300$ ,  $\alpha = 0$ . (a) the secondary peak optimal ( $\beta\Delta = 1300$ ) is plotted in internal units while (b) the primary peak optimal ( $\beta\Delta = 3.65$ ) is plotted in external units. Black contours represent positive  $u$  while grey contours represent negative  $u$ .

### 3.2. Optimals perturbations and growth at fixed Reynolds number

#### 3.2.1 Dependence of the optimal growth on the streamwise and spanwise wavenumbers

We have initially computed the optimal perturbations and growth  $G_{max}$  of the mean flow obtained for  $Re_{\delta^*} = 17300$  for a range of streamwise and spanwise wavenumbers extending from zero to  $10^4/\Delta$ . The results are reported in Figure 2. As in the case of the canonical laminar shear flows and of the turbulent channel flow, the largest growths are obtained for structures uniform in the streamwise direction ( $\alpha = 0$ ) and significant growths are observed only when  $\alpha \leq \beta$ , i.e. for structures elongated in the streamwise direction ( $\lambda_x \geq \lambda_z$ ). For streamwise uniform structures ( $\alpha = 0$ ) the largest growth is attained by very large structures with at  $\beta\Delta = 3.7$  corresponding to  $\lambda_z = 7.6\delta$ . The optimal spanwise wavelength is strongly reduced when the perturbations have long but finite streamwise wavelengths  $\lambda_x$ . For instance an optimal  $\lambda_z = 4.2\delta$  is found when  $\lambda_x = 28\delta$  (corresponding to  $\alpha\Delta = 1$ ).

A clearly distinct secondary peak can be identified at large spanwise wavenumbers ( $\beta\Delta \sim 1300$  in external units) corresponding to structures with  $\lambda_z^+ \sim 80$ . The secondary peak becomes the only and dominant one for perturbations of large streamwise wavenumber. The double peak structure, corresponding to two distinct outer and inner scalings, is very much like what is observed in the turbulent channel flow case by del Álamo & Jiménez (2006).

#### 3.2.2 Streamwise uniform optimal perturbations

The  $\alpha = 0$  optimals corresponding to the two peaks reported in Figure 2 are displayed in Figure 3. The optimal initial conditions consist in streamwise vortices (large  $v$  and  $w$  and very small  $u$  components) that induce, at the time of maximum growth, streamwise streaks (large  $u$  and small  $v$  and  $w$  components). The optimal streamwise vortices and streaks displayed in Figure 3a and corresponding to the secondary peak at  $\lambda_z^+ = 81.5$  are centred near  $y^+ = 10$  like in the turbulent channel flow case of del Álamo & Jiménez (2006) in agreement with previous results on the sublayer streaks (e.g. Jiménez *et al.*, 2004; del Álamo *et al.*, 2004). For the primary peak (Figure 3b) the optimal initial vortices are centred above the edge of the boundary layer and the corresponding optimal streaks have non negligible amplitude inside boundary layer. In Figure 4 are reported the normalized amplitudes of the wall normal  $v$  component of the optimal initial condition ( $t = 0$ ), and the streamwise  $u$  component of the

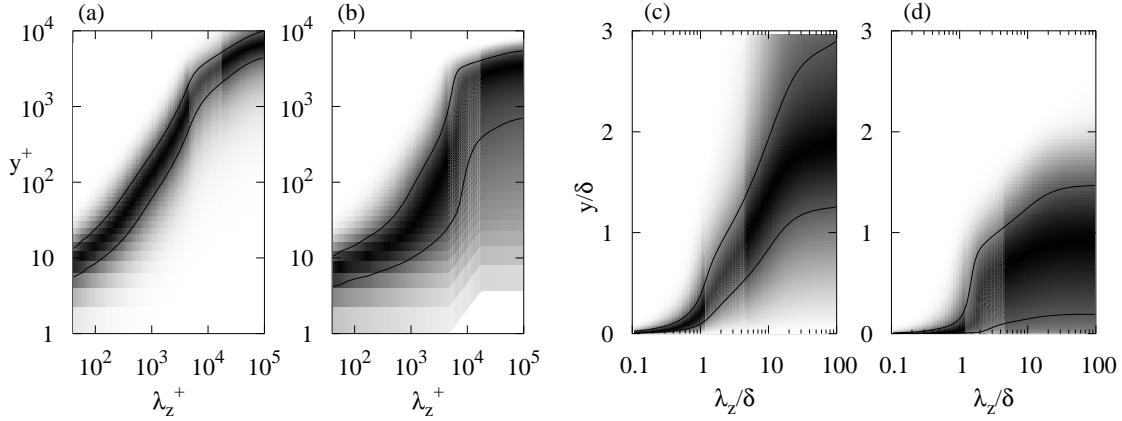


FIG. 4. Normalized amplitude of the  $v$  component of the optimal initial vortices (a and c) and of the  $u$  component of the corresponding optimally amplified streaks (b and d) for  $Re_{\delta^*} = 17300$ ,  $\alpha = 0$  respectively plotted in internal (a and b) and external (c and d) scales versus the wall normal coordinate for the considered spanwise wavelengths  $\lambda_z$ . To ease the comparison with experimental data, in external scaling the lengths have been scaled on  $\delta = 0.223\Delta$ . The grey scale intensity is proportional to the amplitude of the velocity component (the maximum amplitude is black); the two black lines correspond to 80% of the maximum amplitude.

optimal response ( $t = t_{max}$ ) for different spanwise wavelengths  $\lambda_z$ . For all  $\lambda_z$ , the optimal initial conditions (vortices) are more concentrated in the wall normal direction and located farther from the wall than the corresponding optimal responses (streaks). When  $\lambda_z^+$  is increased, starting from 100, the centre of the optimal vortices moves away from the wall (Figure 4a) in an almost self-similar way. For  $\lambda_z > 10\delta$  the primary peak optimal vortices (Figure 4c) are localized outside the boundary layer, with a centre that remains near  $y = 2\delta$  for  $\lambda_z \geq 20$ , while the optimally induced streaks (Figure 4d) have a maximum near  $y = \delta$  and extend well inside the boundary layer.

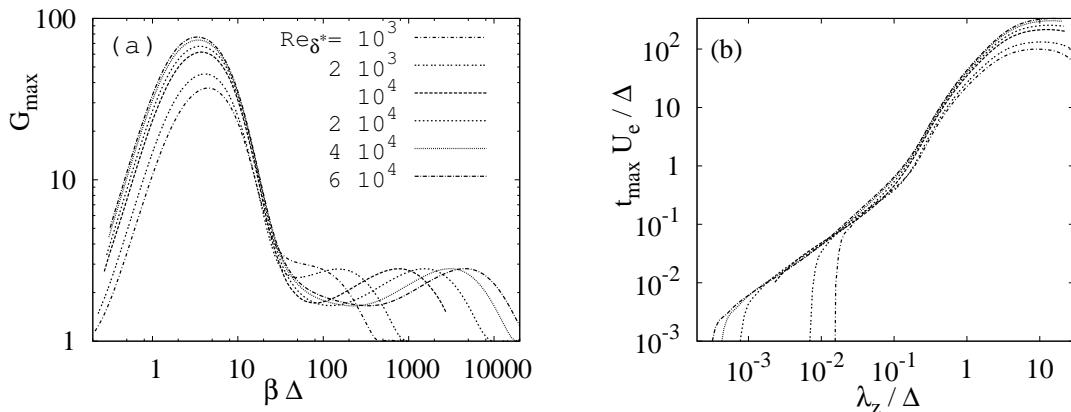


FIG. 5. (a) Dependence on the spanwise wavenumber  $\beta\Delta$  of the maximum growth  $G_{max}$  of streamwise uniform ( $\alpha = 0$ ) optimal perturbations for the selected Reynolds numbers  $Re_{\delta^*}$ . (b) Time  $t_{max}$  at which the optimal growths reported in (a) are attained [same legends as in (a)]. The considered perturbations are streamwise uniform ( $\alpha = 0$ ).

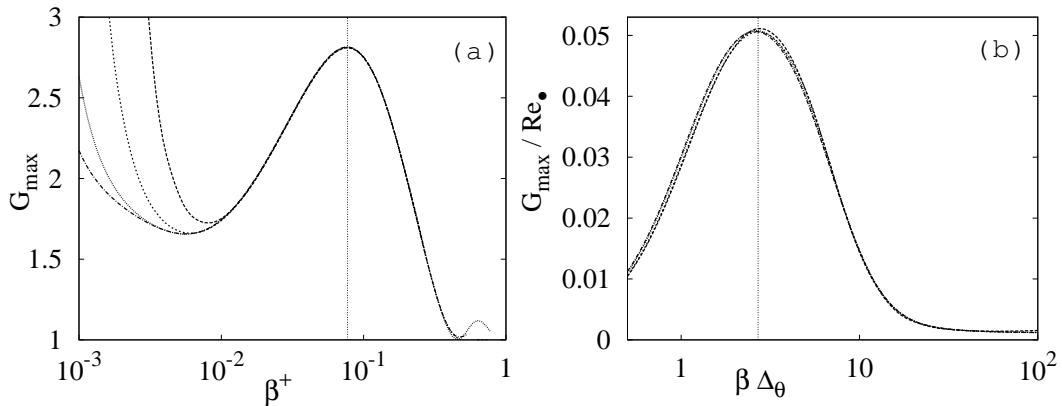


FIG. 6. Large Reynolds number data ( $Re_{\delta^*} = 10^4, \dots, 6 \cdot 10^4$ ) already reported in Figure 5 but rescaled (a) in inner units and zoomed on the secondary peak represented by the vertical line at  $\beta^+ = 0.077$  ( $\lambda_z^+ = 81.6$ ). (b) in outer units with the modified Rotta-Clauser length  $\Delta_\theta$  and the effective Reynolds number  $Re^*$  and zoomed on the primary peak represented by the vertical line at  $\beta \Delta_\theta = 2.7$ . The legends are the same used in Figure 5, but in (b) the four curves are almost indistinguishable. Only the sufficiently large Reynolds numbers  $Re_{\delta^*} = 10000, 20000, 40000, 60000$  are considered.

### 3.3. Dependence on Reynolds number

#### 3.3.1 Scaling of the maximum growth

We have repeated the computations of the optimals for an additional set of low ( $10^3, 2 \cdot 10^3$ ) and relatively large ( $10^4, 2 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4$  and  $6 \cdot 10^4$ ) Reynolds numbers  $Re_{\delta^*}$  considering only streamwise independent ( $\alpha = 0$ ) perturbations, which are the most amplified. As expected, the inner and the outer peak are separated only at sufficiently large Reynolds number (indicatively for  $Re_{\delta^*} > 1500$ ) as it can be seen from Figure 5a, where the curves  $G_{max}(\alpha = 0, \beta)$  are reported for the considered set of  $Re_{\delta^*}$ . The maximum growth, corresponding to the primary peak, increases with  $Re_{\delta^*}$  and is attained for essentially the same range of spanwise scales in external units while the secondary peak growth is essentially independent of  $Re_{\delta^*}$  and is shifted to larger  $\beta$  (smaller  $\lambda_z$ ) when  $Re_{\delta^*}$  is increased. The time  $t_{max}$  at which the optimals are reached is approximately proportional to  $\lambda_z$  (Figure 5b), as already noticed in the case of the turbulent channel flow by del Álamo & Jiménez (2006). An overshoot in  $t_{max}$ , however appears when  $\lambda_z > 0.1\Delta$ . The large Reynolds number ( $Re_{\delta^*} \geq 10^4$ ) optimal growth data reported in Figure 5 are redisplayed in inner units in figure Figure 6a and zoomed on the lower peak. In inner units the data corresponding to all the considered Reynolds numbers collapse on a single curve with a maximum amplification of  $G_{max}^{(inn)} = 2.8$  obtained for  $\beta_{max}^{(inn)} = 0.077 \pm 0.001$ , corresponding to an optimal  $\lambda_z^+ = 81.5 \pm 1$ . As already remarked, the maximum growth in the secondary peak does not seem to depend on the Reynolds number as soon as  $Re_{\delta^*}$  is sufficiently large.

The primary, dominant, peak scales in outer units. In the channel flow case the unique outer length scale is the channel half-width  $h$ . For a boundary layer, different choices, like for instance  $\delta^*$ ,  $\theta$  or  $\Delta$  are available but they are not equivalent as soon as the boundary layer mean profiles are not self-similar, like in the present case. The Rotta-Clauser length  $\Delta$  is the more natural length to use, since it is the external scale used to build the mean velocity profile. However, as seen from Figure 5, the spanwise wavenumber of maximum amplification does not scale on this length which is probably due to the fact that the shape factor  $H = \delta^*/\theta$  of

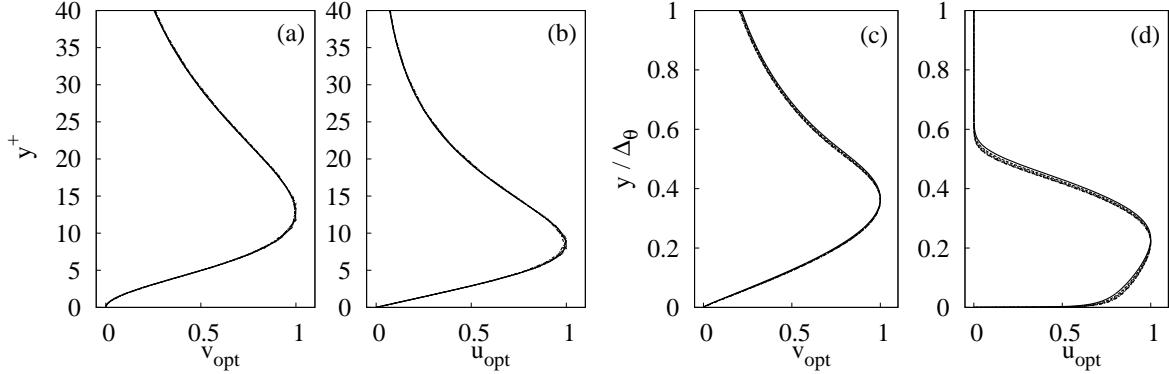


FIG. 7. Normalized amplitude of the  $v$  component of the optimal initial ( $t = 0$ ) vortices (a and c) and of the  $u$  component of the corresponding optimally amplified ( $t = t_{max}$ ) streaks (b and d) respectively corresponding to the inner (a and b) and outer (c and d) peaks plotted versus the wall normal coordinate respectively scaled in inner and outer scales. The four curves corresponding to  $Re_{\delta^*} = 10000, 20000, 40000$  and  $60000$  (same legends as in Figure 5) are almost undistinguishable.

the mean flow depends on the Reynolds number. For laminar boundary layers with pressure gradient, where the shape factor depends on the pressure gradient, Corbett & Bottaro (2000) found that the most relevant length is the momentum thickness  $\theta$ . In our case we therefore consider a modified Rotta-Clauser length, no longer based on the displacement thickness but on the momentum thickness :  $\Delta_\theta = \theta U_e / u_\tau$ . This new characteristic length is related to the Rotta-Clauser length by  $\Delta_\theta = \Delta / H$ . The most amplified wavenumber is seen to fairly scale on  $\Delta_\theta$  for sufficiently large  $Re_{\delta^*}$  with  $\beta_{max}^{(out)} \Delta_\theta = 2.7 \pm 0.1$ . In the case of laminar flows the maximum energy growth scales on the square of the Reynolds number based on the outer length scale and velocity and on the molecular viscosity. In the present turbulent mean flow case, for the outer structures it is natural to use the external velocity  $U_e$  and the relevant length scale  $\Delta_\theta$ ; furthermore, the choice of the maximum total viscosity  $\nu_{Tmax} = \sup_y \nu_T(y)$  leads to the definition of an ‘effective’ Reynolds number  $Re_\bullet = U_e \Delta_\theta / \nu_{Tmax}$ . For the considered mean flow profiles  $Re_\bullet$  ranges approximately from 1200 to 1500 for  $Re_{\delta^*} \in [10000, 60000]$ . For  $Re_\bullet \geq 1000$  the maximum growth data are seen to very well collapse on a single curve when rescaled on  $Re_\bullet$  and  $\beta \Delta_\theta$ , as shown in Figure 6(b). In particular, it is found that :  $G_{max}^{(out)} = (0.0508 \pm 0.0004) Re_\bullet$ .

It is important to stress that in this turbulent case the dependence of  $G_{max}$  on the Reynolds number is linear while it is quadratic in the laminar case. Attempts to rescale the data on other Reynolds numbers based on the molecular kinematic viscosity  $\nu$  and/or non-Rotta-Clauser length scales, such as  $\delta^*$  or  $\theta$  produced less correlated (more scattered) results.

### 3.3.2 Scaling of the optimal perturbations

In Figure 7 the wall normal velocity component  $v$  of the optimal initial vortices and the streamwise velocity component  $u$  of the optimally induced streaks corresponding to the primary and secondary peaks are plotted versus respectively the wall normal inner ( $y^+$ ) and outer ( $y/\Delta_\theta$ ) coordinates. When rescaled in proper units the optimal perturbations are seen to assume a shape independent of the Reynolds number. For the inner peak, the maximum of the optimal initial  $v$ , giving the distance from the wall of the centre of the optimal initial counter-rotating vortices, is situated approximatively at  $y^+ = 13$ , while the the maximum of the optimal final  $u$  is situated near  $y^+ = 8.5$ . Considering the outer peak, the maximum of the

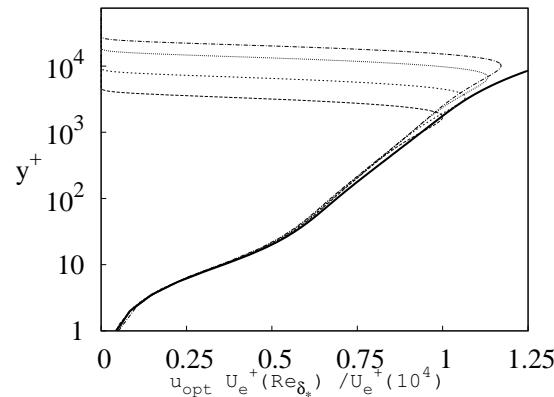


FIG. 8. Normalized  $u$  component of the optimally amplified ( $t = t_{max}$ ) streaks of the primary (outer) redisplayed in wall units and normalized on the  $Re_{\delta^*} = 10^4$  reference case. Same data and legends as in Figure 7d. The mean flow profile corresponding to  $Re_{\delta^*} = 10^4$  and normalized to unity at the position of the maximum of the corresponding optimal streaks is also reported for comparison as a solid thick line.

optimal initial  $v$  is situated approximatively at  $y = 0.36 \Delta_\theta$  just above the edge of the boundary layer. The maximum of optimal outer streak is situated at  $y = 0.22 \Delta_\theta$  inside the boundary layer, but, as already remarked, these streaks have non-negligible amplitude in almost all the boundary layer.

The  $u$  component of the optimal outer peak streaks already reported in Figure 7(d) is replotted in inner variables in Figure 8 for the same set of  $Re_{\delta^*}$  expressing  $u_{opt}$  in friction velocity units by using the factor  $U_e^+(Re_{\delta^*})/U_e^+(10^4)$  where  $Re_{\delta^*} = 10^4$  is taken as the reference case. The  $u_{opt}^{(out)}(y^+)$  curves collapse on a single curve in the log and near wall regions where they are proportional to the mean flow velocity profile. In Figure 8, the  $Re_{\delta^*} = 10^4$  mean velocity profile rescaled to have unit amplitude at the position of the maximum of the corresponding streak (where the streak amplitude is also normalized to one) is also reported for comparison. This particular scaling of the optimal streaks allow them to have very large amplitude inside the near wall region, just like the mean flow : at  $y^+ = 20$  they still have half of their maximum amplitude.

## 4 Summary and discussion

### 4.1. Summary of the main results

The optimal linear mean perturbations and growth have been computed for a zero pressure gradient turbulent boundary layer modelled with the two-scales composite expansion of Monkewitz *et al.* (2007) which has been previously validated with large Reynolds number experimental data. The turbulent eddy viscosity associated with the selected basic flows is included in the linearised operator. The main results found in this investigation are as follow :

- (a) All the considered turbulent boundary layers are linearly stable but sustain transient energy growths.
- (b) Only disturbances with streamwise wavelength  $\lambda_x$  larger than the spanwise wavelength  $\lambda_z$  are noticeably transiently amplified, the most amplified one always being streamwise uniform.

- (c) For sufficiently large Reynolds numbers two distinct peaks of the optimal growth exist for streamwise uniform perturbations : a primary peak scaling in outer variables and a secondary peak scaling in inner variables.
- (d) The energy growth associated with the secondary peak is small ( $G_{max} = 2.8$ ), independent of the Reynolds number, and is attained by vortices and streaks with a spanwise wavelength  $\lambda_z^+ = 81.6$ .
- (e) The energy growth associated with the primary peak is larger than one of the inner peak ( $G_{max} > 60$  when  $Re_{\delta^*} > 10^4$ ), and scales on a Reynolds number  $Re_\bullet = U_e \Delta_\theta / \nu_{Tmax}$  based on the external velocity, the maximum eddy viscosity and a modified Rotta-Clauser length based on the momentum thickness  $\Delta_\theta = \theta U_e / u_\tau$ . The scaling is linear and not quadratic like in the laminar case.
- (f) The primary peak is realized by optimal perturbations that have a very large spanwise wavelength  $\lambda_z \sim 8\delta$ . The optimal initial vortices are centred near the edge of the boundary layer and the corresponding streaks extend inside all the boundary layer and have non negligible amplitudes inside all the viscous layer. The optimal velocity profiles scale on  $\Delta_\theta$ , but in the viscous layer the amplitude of the optimal streaks is proportional to the local mean velocity and scales in inner units.
- (g) Intermediate optimal vortices and streaks, with spanwise wavelength between the two peaks, have a wall normal extension approximately proportional to their spanwise wavelength.

#### 4.2. Limitations of the results due to the parallel flow assumption

To compute the linear optimals a parallel flow assumption has been made for the basic mean flow. Since the boundary layer thickness doubles in about  $50 - 100\delta$ , corresponding to  $10 - 20\Delta$ , depending on the Reynolds number, a standard WKBJ approach would formally be limited to perturbations with  $\lambda_x < 50 - 100\delta$ , corresponding to  $\alpha\Delta > 0.3 - 0.6$ . All the presented results not respecting this limitation, and in particular those obtained for the optimal streamwise uniform structures ( $\alpha = 0$ ) are therefore subject to caution. The same issue has been already addressed in the case of the optimal perturbations of the laminar boundary layer (the Blasius profile). Butler & Farrell (1992), under the parallel flow assumption, found the optimals  $\alpha\delta^* = 0$ ,  $\beta\delta^* = 0.65$  and a maximum growth  $G_{max} = 1.5 \cdot 10^{-3} Re_{\delta^*}^2$ . Using the fully non-parallel approach and forcing the optimal vortices at the leading edge of the flat plate (where  $\delta^* = 0$ ), Andersson *et al.* (1999) and Luchini (2000) found  $\alpha\delta^* = 0$ ,  $\beta\delta^* = 0.77$  and  $G_{max} = 0.784 \cdot 10^{-3} Re_{\delta^*}^2$ . In the laminar case the parallel flow analysis is therefore able to predict the qualitative features of the optimals like their streamwise uniform nature ( $\alpha = 0$ ) the scaling of  $G_{max}$  with  $Re_{\delta^*}$  and the shape of the optimal perturbations. The parallel flow predictions however overestimate  $\beta\delta^*$  by 18% and  $G_{max}/Re_{\delta^*}^2$  by almost a factor 2. However, in the cited non parallel analyses the optimal vortices are forced at leading edge of the flat plate ( $x = 0$ , where  $\delta^* = 0$ ) which is the worst case to compare with parallel flows approximations and the results are made dimensionless with the  $\delta^*$  corresponding to the final position where the maximum amplitude of the streaks is observed, which again is the worst choice for a comparison. In passive control applications [e.g. Fransson *et al.* (2004, 2006)] vortices are forced downstream at an already large  $Re_{\delta^*}$  and in this case the parallel flow theories should give even more accurate predictions. Of course a fully non-parallel analysis could be desirable also for the turbulent boundary layer case. However, if the optimal vortices are to be forced

at the leading edge, such an analysis would require to take into account the laminar and the transitional regions, leading to an even more complex study. Furthermore, the relevance of non-parallel very accurate predictions could be questioned given the very crude assumptions made for the turbulence dynamics (modelled with  $\nu_T$ ).

#### 4.3. Scaling of the inner and outer peaks

The existence of two different peaks for the optimal growth and their respective scaling in inner and outer units confirms and extends the results found in the turbulent channel flow by del Álamo & Jiménez (2006). This ‘bimodal’ distribution with an outer-scaling peak whose amplitude increases with the Reynolds number and with the distance from the wall is furthermore compatible with the experimental results of Hites (1997) and Österlund *et al.* (2000) among others. The fact that the maximum growth corresponding to the inner peak does not depend on the Reynolds number has already been explained by del Álamo & Jiménez (2006) using two facts : first, the time of maximum growth scales linearly with the spanwise wavelength with  $t_{max}^+ \sim 0.1\lambda_z^+$  (we find the same in our results), second, in the inner region the eddy viscosity is  $\nu_T \sim u_\tau \lambda_z$ . The effective Reynolds number  $Re_T = \lambda_z^2 / (\nu_T t_{max})$  associated with the maximum transient growth is readily seen to be constant with  $Re_T \sim 10$ , which also explains the low values of  $G_{max}$  at the inner peak. The independence of  $G_{max}$  from the Reynolds number breaks down for the outer peak because for the outer optimals, extending outside the log layer,  $t_{max}^+$  is no more exactly proportional to  $\lambda^+$  and the assumption  $\nu_T \sim u_\tau \lambda_z$  does not hold any more.

#### 4.4. Structures associate with the peak scaling in inner units

The spanwise wavelength corresponding to the secondary peak,  $\lambda_z^+ = 81.6$ , is lower than the commonly accepted value of  $100^+$  for the spacing of the buffer layer streaks for instance reported by Kline *et al.* (1967) and Smith & Metzler (1983). However, as discussed by Smith & Metzler (1983),  $\lambda_z^+ = 100$  is the *mean* value for the streak spacing while the *most probable* value is 20% lower, i.e. nearly  $\lambda_z^+ = 80$  which is in fairly good agreement with our results. The most amplified  $\lambda_z^+ = 80$  could therefore be related to the most probable streak spanwise wavelength, while the mean is shifted towards larger  $\lambda_z^+$  because these are more amplified than the smaller ones as it is apparent from Figure 6. The structure and scaling of the intermediate (in between peaks) optimals is also in accordance with the experimental observations of Tomkins & Adrian (2003) and the channel flow results of del Álamo & Jiménez (2006).

#### 4.5. Robustness of the outer peak to the choice of the eddy viscosity

In the laminar and turbulent channel flows the outer optimal is attained with perturbations with similar spanwise scales : Butler & Farrell (1992) find  $\lambda_z \sim 3h$  for the laminar case just as Butler & Farrell (1993) and del Álamo & Jiménez (2006) for the turbulent case [however Pujals *et al.* (2009) find a slightly larger  $\lambda_z \sim 4h$  for the turbulent channel flow]. In the present turbulent boundary layer case the optimal spanwise scale  $\lambda_z \sim 8\delta$  is much larger than the optimal laminar value  $\lambda_z \sim 3.3\delta$  found by Butler & Farrell (1992). This difference persists even when  $\lambda_z$  is scaled on the displacement or the momentum thickness. To understand if this large optimal  $\lambda_z$  is mainly selected by the mean flow profile, which is a robust characteristic of the boundary layer, or by the eddy viscosity, which could be more dependent on the assumptions made in its derivation, we have recomputed the optimal growth using a constant viscosity

for  $Re_{\delta^*} = 17300$ . When the constant kinematic viscosity is assumed equal to the molecular  $\nu$ , i.e. using the same approach of Butler & Farrell (1993), we similarly find a large peak ( $G_{max} = 7467$ ) but this peak is obtained for the large  $\lambda_z \sim 11\delta$ . When the artificially constant viscosity is assumed equal to  $\nu_{Tmax}$ , the maximum growth is reduced ( $G_{max} = 5.67$ ) and is obtained with the optimal  $\lambda_z \sim 4\delta$ . In both cases an optimal  $\lambda_z$  larger than the laminar value is found, the optimal  $\lambda_z \sim 8\delta$  obtained with the ‘correct’ eddy viscosity  $\nu_T(y)$  being situated in between the two extrema. An optimal  $\lambda_z$  larger than the laminar optimal seems therefore to be a robust feature of the turbulent boundary layer not very sensitive to the shape of the eddy viscosity.

#### 4.6. Structures associated with the peak scaling in outer units

As it is well known large scale structures, observed in the outer layer (e.g. Kovasznay *et al.*, 1970) can extend deep inside the viscous layer (e.g. Townsend, 1976; Morrison *et al.*, 1971; Hoyas & Jiménez, 2006; Jiménez, 2007, and references therein). This is also the case for the optimal streaks associated to the outer peak that strongly protrude with large amplitudes inside the viscous layer where they furthermore have amplitudes proportional to the mean velocity. One can then expect to find a signature of these optimal streaks in experimental measures of turbulent boundary layers. However very large scale structures with  $\lambda_z \approx 4-8\delta$  have not yet been observed in experiments or numerical simulations. There are different possible reasons of this lack of observation :

- (a) The parallel flow assumption. This assumption has a tendency to over-estimate the spanwise wavelength, but in the laminar flow case this error was of the order of 20% and would be less if the optimal perturbations are not forced at the leading edge but further downstream or if appropriate average  $\delta^*$  are taken for comparison of parallel and non parallel results.
- (b) The finite streamwise size of the observed streaks. In typical experiments, such as those of Tomkins & Adrian (2003), the structures observed have streamwise lengths of the order of  $\lambda_x \approx 2 - 2.5\delta$  corresponding to  $\alpha\Delta \approx 14 - 11$ . For these perturbations the optimal perturbations have shorter spanwise wavelengths  $\lambda_z \approx 1 - 3\delta$ , which is compatible with the observations.
- (c) The size of the data acquisition window. The largest field of view in the experiments of Tomkins & Adrian (2003) is limited to  $2.5\delta$  in the streamwise direction and  $3.15\delta$  in the spanwise direction and therefore the structures corresponding to the outer peaks with  $\alpha\Delta < 1$  ( $\lambda_x > 28\delta$ ) that have  $4\delta < \lambda_z < 8\delta$ , could not be detected . In the more recent experiments of Hutchins & Marusic (2007), structures with  $\lambda_x < 20\delta$  are measured but the spanwise field of view is limited to  $2\delta$ , precluding again the observation of larger structures.
- (d) The selection of the spanwise wavelength by nonlinear effects. The transient growth of vortices into streaks is only a part of the more complicated processes like the one leading to self-sustained cycles. It could be that very large scale structures are not selected for a self-sustained process nor passively forced by other self-sustained processes. In this case these structures would have to be artificially forced to be detected, like done by Kitoh & Umeki (2008) in the turbulent Couette flow.

Even if the question of the relevance of the optimal large scale structures to real world unforced turbulent boundary layers is still open, probably these structures can have an important role in active or passive control applications.

## Appendix A. Explicit expression of the mean velocity profile

We report the explicit expressions of the mean velocity profile expressions proposed by Monkewitz *et al.* (2007).

$$U_w^+(\eta) = \left[ \frac{1}{\kappa} E_1(\eta) + w_0 \right] \frac{1}{2} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{w_{-1}}{\eta} + w_2 \eta + w_8 \eta^8 \right) \right] \quad (\text{A.1})$$

with  $w_0 = 0.6332$ ,  $w_{-1} = -0.096$ ,  $w_2 = 28.5$  and  $w_8 = 33000$ .

$$U_{log}^+(y^+) = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \quad (\text{A.2})$$

$$U_e^+(Re_{\delta^*}) = \frac{1}{\kappa} \ln(Re_{\delta^*}) + C \quad (\text{A.3})$$

where  $\kappa = 0.384$ ,  $B = 4.17$ ,  $C = 3.30$ .

$$\begin{aligned} U_i^+(y^+) = & 0.68285472 \ln(y^{+2} + 4.7673096y^+ + 9545.9963) \\ & + 1.2408249 \arctan(0.010238083y^+ + 0.024404056) \\ & + 1.2384572 \ln(y^+ + 95.232690) - 11.930683 \\ & - 0.50435126 \ln(y^{+2} - 7.8796955y^+ + 78.389178) \\ & + 4.7413546 \arctan(0.12612158y^+ - 0.49689982) \\ & - 2.7768771 \ln(y^{+2} 16.209175y^+ + 933.16587) \\ & + 0.37625729 \arctan(0.033952353y^+ + 0.27516982) \\ & + 6.5624567 \ln(y^+ + 13.670520) + 6.1128254 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

## References

- DEL ÁLAMO, J. C. & JIMÉNEZ, J. 2006 Linear energy amplification in turbulent channels. *J. Fluid Mech.* **559**, 205–213.
- DEL ÁLAMO, J. C., JIMÉNEZ, J., ZANDONADE, P. & MOSER, R. D. 2004 Scaling of the energy spectra of turbulent channels. *J. Fluid Mech.* **500**, 135–144.
- ANDERSSON, P., BERGGREN, M. & HENNINSONG, D. 1999 Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers. *Phys. Fluids* **11** (1), 134–150.
- BOTTARO, A., SOUIED, H. & GALLETI, B. 2006 Formation of secondary vortices in a turbulent square-duct flow. *AIAA J.* **44**, 803–811.
- BUTLER, K. M. & FARRELL, B. F. 1992 Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids A* **4**, 1637–1650.
- BUTLER, K. M. & FARRELL, B. F. 1993 Optimal perturbations and streak spacing in wall-bounded turbulent shear flow. *Phys. Fluids* **5**, 774–777.
- CESS, R. D. 1958 A survey of the literature on heat transfer in turbulent tube flow. Research Report 8-0529-R24. Westinghouse.
- CORBETT, P. & BOTTARO, A. 2000 Optimal perturbations for boundary layers subject to streamwise pressure gradient. *Phys. Fluids* **12**, 120–130.
- COSSU, C. & BRANDT, L. 2002 Stabilization of Tollmien-Schlichting waves by finite amplitude optimal streaks in the Blasius boundary layer. *Phys. Fluids* **14**, L57–L60.
- DE GRAAFF, D.B. & EATON, J.K. 2000 Reynolds-number scaling of the flat-plate turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **422**, 319–346.
- ELLINGSEN, T. & PALM, E. 1975 Stability of linear flow. *Phys. Fluids* **18**, 487.
- FARRELL, B. F. & IOANNOU, P. J. 1993 Optimal excitation of three-dimensional perturbations in viscous constant shear flow. *Phys. Fluids* **5**, 1390–1400.
- FARRELL, B. F. & IOANNOU, P. J. 1996 Generalized stability theory. part I : Autonomous operators. part II : Nonautonomous operators. *J. Atmos. Sci.* **53**, 2025–2053.
- FARRELL, B. F. & IOANNOU, P. J. 1998 Perturbation structure and spectra in turbulent channel flow. *Theoret. Comput. Fluid Dyn.* **11**, 237–250.
- FRANSSON, J., BRANDT, L., TALAMELLI, A. & COSSU, C. 2004 Experimental and theoretical investigation of the non-modal growth of steady streaks in a flat plate boundary layer. *Phys. Fluids* **16**, 3627–3638.
- FRANSSON, J., BRANDT, L., TALAMELLI, A. & COSSU, C. 2005 Experimental study of the stabilisation of Tollmien-Schlichting waves by finite amplitude streaks. *Phys. Fluids* **17**, 054110.
- FRANSSON, J., TALAMELLI, A., BRANDT, L. & COSSU, C. 2006 Delaying transition to turbulence by a passive mechanism. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 064501.

- GUSTAVSSON, L. H. 1991 Energy growth of three-dimensional disturbances in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **224**, 241–260.
- HAMILTON, J.M., KIM, J. & WALEFFE, F. 1995 Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.* **287**, 317–348.
- HITES, M. H. 1997 Scaling of high-reynolds number turbulent boundary layers in the national diagnostic facility. Ph. D. Thesis, Illinois Inst. of Technology.
- HOYAS, S. & JIMÉNEZ, J. 2006 Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $re_\tau = 2003$ . *Phys. Fluids* **18**, 011702.
- HUTCHINS, N. & MARUSIC, I. 2007 Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **579**, 1–28.
- JIMÉNEZ, J. 2007 Recent developments on wall-bounded turbulence. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A Mat.* **101**, 187–203.
- JIMÉNEZ, J., DEL ÁLAMO, J.C. & FLORES, O. 2004 The large-scale dynamics of near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* **505**, 179–199.
- JIMÉNEZ, J. & MOIN, P. 1991 The minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* **225**, 213–240.
- KITOH, O. & UMEKI, M. 2008 Experimental study on large-scale streak structure in the core region of turbulent plane couette flow. *Phys. Fluids* **20**, 025107.
- KLINE, S. J., REYNOLDS, W. C., SCHRAUB, F. A. & RUNSTADLER, P. W. 1967 The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **30**, 741–773.
- KOVASZNAY, L. S. G., KIBENS, V. & BLACKWELDER, R. F. 1970 Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **41**, 283–325.
- KREISS, G., LUNDBLADH, A. & HENNINGSON, D. S. 1994 Bounds for threshold amplitudes in subcritical shear flows. *J. Fluid Mech.* **270**, 175–198.
- LANDAHL, M. T. 1980 A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows. *J. Fluid Mech.* **98**, 243.
- LAUGA, E. & COSSU, C. 2005 A note on the stability of slip channel flows. *Phys. Fluids* **17**, 088106.
- LUCHINI, P. 2000 Reynolds-number independent instability of the boundary layer over a flat surface. part 2 : Optimal perturbations. *J. Fluid Mech.* **404**, 289–309.
- MALKUS, W. V. R. 1956 Outline of a theory of turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.* **1**, 521–539.
- MOFFATT, H. K. 1967 The interaction of turbulence with strong wind shear. In *Proc. URSI-IUGG Colloq. on Atoms. Turbulence and Radio Wave Propag.* (ed. A.M. Yaglom & V. I. Tatarsky), pp. 139–154. Moscow : Nauka.

- MONKEWITZ, P. A., CHAUHAN, K. A. & NAGIB, H. M. 2007 Self-consistent high-reynolds-number asymptotics for zero-pressure-gradient turbulent boundary layers. *Phys. Fluids* **19**, 115101.
- MORRISON, W. R. B., BULLOCK, K. J. & KRONAUER, R. E. 1971 Experimental evidence of waves in the sublayer. *J. Fluid Mech.* **47**, 639–656.
- NAGIB, H. M., CHRISTOPHOROU, C. & MONKEWITZ, P. A. 2004 High Reynolds Number Turbulent Boundary Layers Subjected to Various Pressure-Gradient Conditions. In *IUTAM Symposium on One Hundred Years of Boundary Layer Research* (ed. G. Meier & K. Sreenivasan), pp. 383–394. DLR, Göttingen, Germany : Springer.
- ÖSTERLUND, J. M. 1999 Experimental studies of zero-pressure gradient turbulent boundary layer flows. PhD thesis, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm.
- ÖSTERLUND, J. M., JOHANSSON, A. V., NAGIB, H. M. & HITES, M. H. 2000 Spectral characteristics of the overlap region in turbulent boundary layers. In *Extended abstract to Intl Congr. Theor. Appl. Math.* Chicago.
- PUJALS, G., GARCÍA-VILLALBA, M., COSSU, C. & DEPARDON, S. 2009 A note on optimal transient growth in turbulent channel flows. *Phys. Fluids* **21**, 015109.
- REDDY, S. C., SCHMID, P. J., BAGGETT, J. S. & HENNINGSON, D. S. 1998 On the stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows. *J. Fluid Mech.* **365**, 269–303.
- REYNOLDS, W. C. & HUSSAIN, A. K. M. F. 1972 The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparisons with experiments. *J. Fluid Mech.* **54** (02), 263–288.
- REYNOLDS, W. C. & TIEDERMAN, W. G. 1967 Stability of turbulent channel flow, with application to Malkus's theory. *J. Fluid Mech.* **27** (02), 253–272.
- SCHLICHTING, H. 1979 *Boundary-Layer Theory*. New York : Mc Graw-Hill.
- SCHMID, P. J. & HENNINGSON, D. S. 2001 *Stability and Transition in Shear Flows*. New York : Springer.
- SMITH, J. R. & METZLER, S. P. 1983 The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **129**, 27–54.
- TOMKINS, C. D. & ADRIAN, R. J. 2003 Spanwise structure and scale growth in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **490**, 37–74.
- TOWNSEND, A. 1976 *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge U. Press, second edition.
- TREFETHEN, L. N., TREFETHEN, A. E., REDDY, S. C. & DRISCOLL, T. A. 1993 A new direction in hydrodynamic stability : Beyond eigenvalues. *Science* **261**, 578–584.
- WALEFFE, F. 1995 Hydrodynamic stability and turbulence : Beyond transients to a self-sustaining process. *Stud. Appl. Math.* **95**, 319–343.

- WEIDEMAN, J. A. C. & REDDY, S. C. 2000 A MATLAB Differentiation Matrix Suite. *ACM Trans. Math. Soft.* **26** (4), 465–519.
- WHITE, F. M. 2006 *Viscous Fluid Flows*. Mc Graw-Hill, third edition.



3

## Article 3

*Dans Proceedings of the Sixth Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*

*Selectionné pour publication dans TSFP-6 focus issue of Journal of Turbulence*



# Optimal transient growth and very large-scale structures in zero-pressure gradient turbulent boundary layers

By Gr  gory Pujals<sup>1,2</sup>, Carlo Cossu<sup>1</sup> and Sébastien Depardon<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LadHyX, CNRS-  cole Polytechnique, F-91128 Palaiseau, France

<sup>2</sup>PSA Peugeot Citro  n, Centre Technique de Vélizy, 2 Route de Gisy, 78943 Vélizy-Villacoublay Cedex, France

In Proceedings of *TSFP6*, 2009. Selected for publication in *TSFP-6 focus issue of Journal of Turbulence*

We are interested in the optimal energy growth of perturbations sustained by a zero pressure gradient turbulent boundary layer. We use the mean flow proposed by Monkewitz *et al.* (2007), the turbulence dynamics being modeled by an eddy viscosity added in the disturbance equations following the approach of del Álamo & Jiménez (2006), or Pujals *et al.* (2009) in the turbulent channel flow case. Although all the considered turbulent mean profiles are linearly stable, they support transient energy growths due to the non-normality of the operator. We find that the most amplified perturbations are streamwise uniform and correspond to streamwise vortices evolving into streamwise streaks.

Consistently with the study of del Álamo & Jiménez (2006), we find that two distinct peaks of the optimal growth exist for sufficiently large Reynolds numbers : a primary one scaling in outer units and a secondary one scaling in wall units. The optimal structures associated with the peak scaling in wall units correspond well to the most probable streaks observed in the buffer layer and their moderate energy growth is independent of the Reynolds number. The energy growth associated with the peak scaling in outer units is larger than that of the inner peak. The optimal perturbations associated with this primary peak consist in very large-scale structures with a spanwise wavelength of the order of  $8\delta$ .

Since such very large-scale structures have not been observed yet in turbulent shear flows, preliminary experiments aiming at forcing such structures and studying their growth have been conducted. We find that large-scale turbulent streaks can be forced using well-shaped roughness elements embedded in the boundary layer. Their amplitude can reach about 13.5% of the free-stream velocity before decaying.

---

## 1 Introduction

Persistent streaky structures are commonly observed in turbulent shear flows. Many researches have been dedicated to the understanding of the mechanisms by which streaks are generated and of their relevance on the turbulent dynamics. In the near wall region of the boundary layer these streaks have a characteristic mean spanwise spacing of about  $100y^+$  and are thought to play an essential role in a turbulent self-sustained mechanism. The ‘lift-up’ effect by which low energy streamwise vortices can induce large energy streaks is an important process embedded in this self-sustained mechanism. In the case of laminar shear flows,

the same mechanism plays a crucial role in subcritical transition to turbulence (Reddy *et al.*, 1998). In that case, the energy amplification of streaks, which is due to the non-normality of the linearized Navier-Stokes operator, is transient in time and proportional to the square of the Reynolds number. Thus, this amplification can lead to very large energy growths if optimized (Butler & Farrell, 1992; Schmid & Henningson, 2001).

Recent studies have also demonstrated that the well controlled optimal transient growth of artificially forced streaks can be efficiently used to manipulate at leading order laminar shear flows. Such a paradigm has been successfully applied to stabilize Tollmien-Schlichting waves in a laminar boundary layer (Cossu & Brandt, 2002; Fransson *et al.*, 2005) and to delay transition to turbulence (Fransson *et al.*, 2006).

An extension of such approach consists in the manipulation of turbulent boundary layers with optimal or nearly optimal vortices and streaks, the first step being to compute the optimal perturbations of the turbulent boundary layer. We have therefore computed the optimal energy growth sustained by a zero pressure gradient turbulent boundary layer using the eddy viscosity associated with the turbulent mean velocity profile proposed by Monkewitz *et al.* (2007) in order to model the interaction between the turbulence dynamics and the perturbations. In a second part, we present the results of a preliminary experimental study in which very large-scale streaks are forced using spanwise organized roughness elements

## 2 Background

### Turbulent mean flow

The zero pressure gradient turbulent boundary layer mean flow  $U(x, y), V(x, y)$ , satisfies the mean mass and momentum conservation equations :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (2.2)$$

where  $\tau/\rho = \nu(\partial U/\partial y) - \langle u'v' \rangle$  is the sum of the molecular viscosity and of the Reynolds shear stress. Here  $x$ ,  $y$  and  $z$  are respectively the streamwise, normal and spanwise coordinates. At sufficiently large Reynolds numbers, the boundary layer mean velocity data can be fitted with asymptotic expressions. In the present study we use the self-consistent analytic expression recently proposed by Monkewitz *et al.* (2007) that fits very well the experimental data of Österlund (1999) and Nagib *et al.* (2004) for a wide range of Reynolds numbers :

$$\frac{U}{u_\tau} = [U_i^+(y^+) - U_{log}^+(y^+) + U_e^+(Re_{\delta^*}) - U_w^+(\eta)], \quad (2.3)$$

where  $u_\tau = (\nu dU/dy|_{wall})^{1/2}$  is the wall friction velocity,  $y^+ = yu_\tau/\nu$  is the wall normal coordinate scaled in inner units,  $U_e^+ = U_e/u_\tau$  is the free-stream velocity  $U_e$  scaled with  $u_\tau$ ,  $Re_{\delta^*} = U_e \delta^*/\nu$  is the Reynolds number scaled on the displacement thickness  $\delta^*$ , and  $\eta = y/\Delta$  is the wall normal coordinate scaled with the Rotta-Clauser length scale  $\Delta = \delta^* U_e^+$ . The inner and outer coordinates satisfy  $y^+ = Re_{\delta^*} \Delta$ . The shear stress associated with the mean flow  $U$  can be obtained by integrating TBLEqMomTSFP6 in the wall normal direction ; the details of this integration are not reported here but are fully described in Cossu *et al.* (2009).

## Linearized equations and optimal growth

Small perturbations  $\mathbf{u} = (u, v, w), p$  to the turbulent mean flow  $\mathbf{U} = (U(y), 0, 0)$  satisfy the continuity  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  and the linearized momentum equation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + (v \partial U / \partial y, 0, 0) = \\ -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot [\nu_T(y) (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Due to the homogeneous nature of the mean flow in the streamwise and spanwise directions, we consider perturbations of the form  $\mathbf{u}(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{u}}(\alpha, y, \beta, t) e^{i(\alpha x + \beta z)}$ , where  $\alpha$  and  $\beta$  are the streamwise and spanwise wavenumbers, respectively. Standard manipulations (see Schmid & Henningson (2001)), generalized to include a variable viscosity (Reynolds & Hussain, 1972), allow to rewrite the linearized system into the following generalized Orr-Sommerfeld and Squire equations for the normal velocity  $\widehat{v}(y)$  and vorticity  $\widehat{\omega}_y(y)$  :

$$\begin{bmatrix} D^2 - k^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{\omega}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{OS} & 0 \\ -i\beta U' & \mathcal{L}_{SQ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{\omega}_y \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

with

$$\mathcal{L}_{OS} = -i\alpha [U(D^2 - k^2) - U''] + \nu_T (D^2 - k^2)^2 + 2\nu'_T (D^3 - k^2 D) + \nu''_T (D^2 + k^2) \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_{SQ} = -i\alpha U + \nu_T (D^2 - k^2) + \nu'_T D \quad (2.7)$$

where  $D$  and  $(')$  stand for  $\partial/\partial y$  and  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

Even though the mean velocity profiles are linearly stable for all  $\alpha$  and  $\beta$ , so that infinitesimal perturbations decay after enough time (Cossu et al., 2009), some perturbations may support large growth before decaying. The ratio  $\|\hat{\mathbf{u}}(t)\|^2/\|\hat{\mathbf{u}}_0\|^2$ , where  $\|\cdot\|$  stands for the energy norm, quantifies the energy amplification of a perturbation as it evolves in time. The temporal optimal growth  $\widehat{G}(\alpha, \beta, t) = \sup_{\hat{\mathbf{u}}_0} \|\hat{\mathbf{u}}(t)\|^2/\|\hat{\mathbf{u}}_0\|^2$  is the maximum energy amplification of a disturbance optimized over all possible initial conditions  $\hat{\mathbf{u}}_0$ . In this study, we focus on the maximum optimal growth  $G_{max}(\alpha, \beta) = \sup_t \widehat{G}(\alpha, \beta, t)$  reached using the optimal initial conditions.

## 3 Results

### Optimal perturbations for a fixed Reynolds number

First, the optimal perturbations and their growth are computed for a Reynolds number fixed to  $Re_{\delta^*} = 17300$  and for a range of streamwise and spanwise wavenumbers extending from zero to  $10^4/\Delta$ . As in laminar shear flows or in turbulent Poiseuille flow, noticeable energy growths are obtained for streamwise elongated structures ( $\alpha < \beta$ ) while the maximum energy amplification is reached for streamwise uniform initial disturbances (i.e.  $\alpha\Delta = 0$ ) with a spanwise wavenumber  $\beta\Delta \sim 3.7$  corresponding to  $\lambda_z \approx 7.6\delta$  (see Figure 1).

The double peak structure observed in turbulent channel flow case by del Álamo & Jiménez (2006) is also observed in the present case. A distinct secondary peak can be identified at large

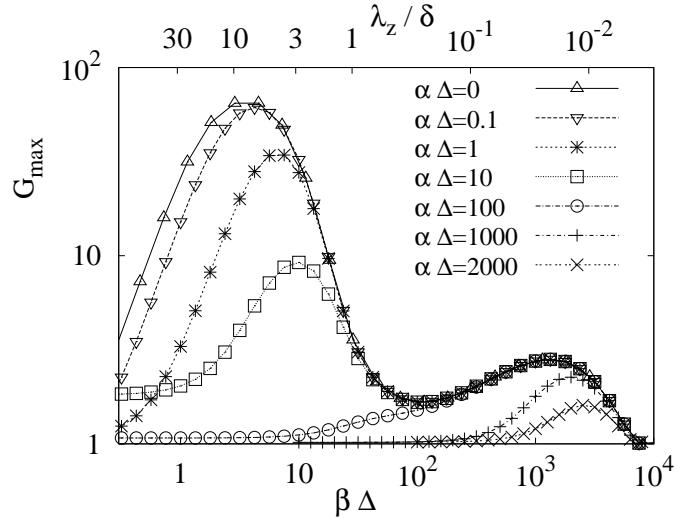


FIG. 1. Maximum growth  $G_{max}$  as a function of the spanwise wavenumber  $\beta\Delta$  obtained at  $Re_{\delta^*} = 17300$  for selected streamwise wavenumbers.

spanwise wavenumbers  $\beta\Delta \sim 1300$  corresponding to  $\lambda_z^+ \sim 80$ . The secondary peak becomes the only and dominant one for perturbations of large streamwise wavenumber ( $\alpha\Delta > 50$ ).

We present in figure 2 the optimal initial conditions, along with their optimal responses, corresponding to the two peaks illustrated in figure 1. The initial disturbances (reported as a vector-map) consist in counter rotating streamwise vortices which induce at time of maximum amplification streamwise streaks (black and grey contours). The optimal perturbations associated with the secondary inner-scaling peak are plotted in Fig. 2(a). Both the initial vortices and the resulting streaks have their center around  $y^+ \sim 10$  and are confined to the buffer layer of the boundary layer. This structures correspond well to the most probable streaks commonly observed in turbulent shear flows (see Smith & Metzler (1983)). The optimal disturbances associated with the primary peak consist in very large-scale structures spreading the whole boundary layer, the optimal vortices being centered near the boundary layer edge.

## Dependence on Reynolds number

The computation of streamwise uniform optimals is repeated for a wide range of Reynolds numbers  $Re_{\delta^*}$  from  $10^3$  to  $6 \cdot 10^4$ . Figure 3 presents the gains obtained varying  $\beta\Delta$  in the range already investigated for the selected Reynolds numbers. It can be seen that both the outer and inner peaks are observable provided that the Reynolds number is large enough (as an indication for  $Re_{\delta^*} > 2000$  according to our computations). The secondary peak seems independent of the Reynolds number and is shifted towards larger values of  $\beta\Delta$  as  $Re_{\delta^*}$  increases. When replotted in wall units (not reported here, see Cossu *et al.* (2009)), we find that this secondary peak is obtained for  $\lambda_z = 81.5y^+$  for all the considered Reynolds numbers. The maximum energy growth corresponding to the primary peak increases with the Reynolds number  $Re_{\delta^*}$  and is attained for spanwise wavenumbers in the range  $\beta\Delta \in [1, 10]$  ( $\lambda_z/\delta \in [3, 20]$ ), the maximum being reached for  $\beta\Delta \approx 3$  corresponding to  $\lambda_z/\delta \approx 8$ .

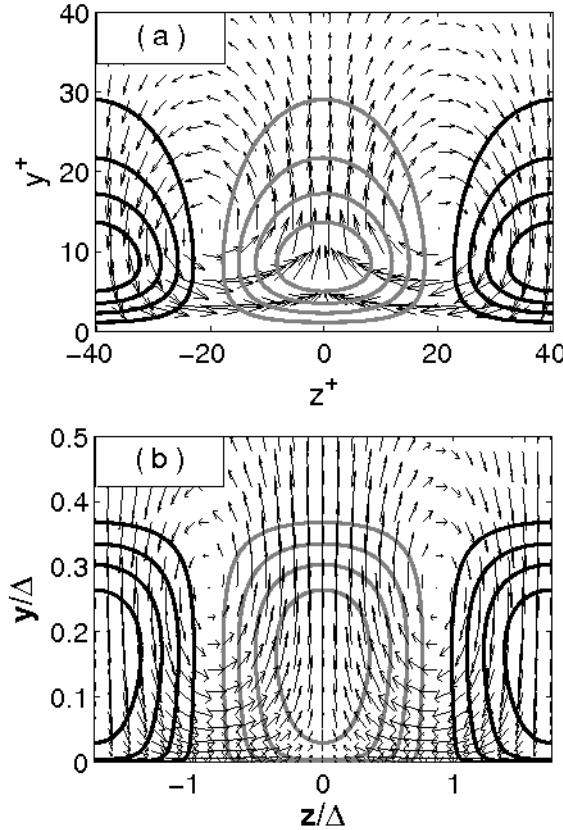


FIG. 2. Cross-stream view of the  $v-w$  component of the optimal initial vortices (arrows) and of the  $u$  component of the corresponding maximally amplified streak (contour-lines) for  $Re_{\delta^*} = 17300$ ,  $\alpha = 0$ . (a) the secondary peak optimal ( $\beta\Delta = 1300$ ) is plotted in wall units while (b) the primary peak optimal ( $\beta\Delta = 3.65$ ) is plotted in outer units. Black contours represent positive  $u$  while grey contours represent negative  $u$ .

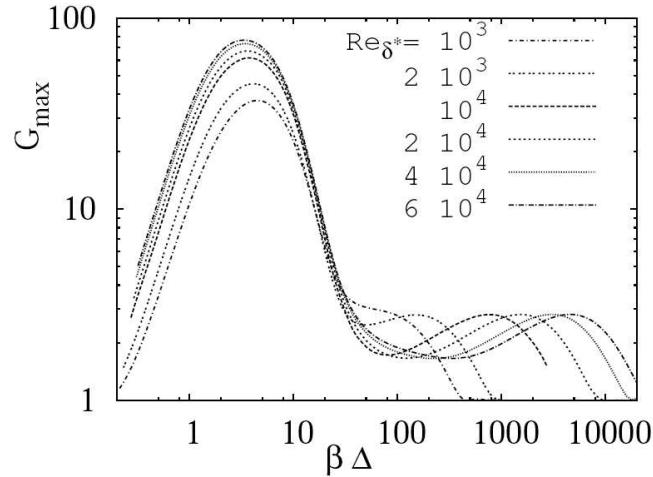


FIG. 3. Maximum growth  $G_{max}$  of streamwise uniform ( $\alpha = 0$ ) optimal perturbations as a function of the spanwise wavenumber for the selected Reynolds numbers  $Re_{\delta^*}$ .

## 4 Preliminary experimental results

### Description of the facility

A preliminary experimental validation of these theoretical results has been conducted in the wind-tunnel facility of the technical center of PSA Peugeot Citröen. The wind-tunnel is of closed-return type. The test section is 0.8m long with a cross sectional area of  $0.3m \times 0.3m$ . The temperature can be kept constant and uniform within  $\pm 0.5^\circ C$ . The contraction ratio is 8 and the velocity can be controlled from  $7m.s^{-1}$  up to  $45m.s^{-1}$ . Due to the small dimensions of the test section, the developing boundary layer is quite thin : setting the free-stream velocity to  $U_e = 20m.s^{-1}$  the boundary layer is  $\delta_0 = 5.4mm$  thick at  $x_0 = 110mm$ . The resulting Reynolds number  $Re_{\delta^*}$  is  $Re_{\delta^*} \approx 1000$  which is, according to our computations, just large enough to see the primary outer peak. The goal of this study is : (a) to see if artificially forced large-scale velocity streaks can be amplified in a turbulent boundary layer, (b) to study if the spanwise wavelength selected theoretically can be can be experimentally forced.

### Experimental setup

To force the streaks in the boundary layer, we use cylindrical PVC roughness elements. The dimensions of these elements are of great importance if we want to generate stable streaks. The most relevant parameters are : the height of the cylinders  $k$ , their diameter  $d$  and the spanwise spacing  $\lambda_z$ . In this study, we keep the height of the roughness elements constant equal to  $k = 4mm$  ( $k/\delta_0 = 0.8$ ), as well as the ratio  $\lambda_z/d = 4$  (the same ratio was used in Fransson *et al.* (2005, 2006); Hollands & Cossu (2009)). Several wavelength spanning the width of the primary peak discussed above are tested. The selected wavelength are nearby  $\lambda_z/\delta_0 = 3, 5, 6, 7.5, 10$  and 12. The figure 4 is a picture of one configuration, the cylinders span at least 2/3 of the test section. They are pasted on a thin scotch tape (< 0.1mm thick) and painted in black to limit reflections due to the laser sheet.

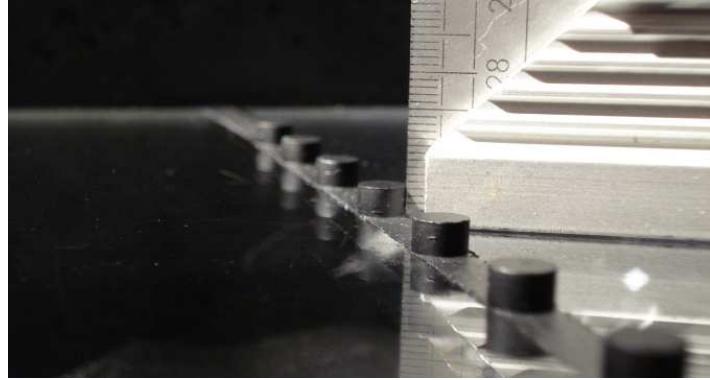


FIG. 4. Visualization of the experimental setup for  $\lambda_z = 5\delta_0$ . The 4mm high cylindrical roughness elements are pasted on the test section using a thin scotch tape.

The velocity is measured using Dantec's Flow Manager particle image velocimetry (PIV) system associated with a 120mJ Nd :Yag laser and a  $1024 \times 1280$  Hisense Mk2 CCD camera placed above the test section (resulting in  $(x, z)$  planes). A 28mm optical lens is used resulting

in  $300 \times 220\text{mm}^2$  field of view. The laser sheet is  $1\text{mm}$  thick and, in order to ensure the convergence of the mean velocity fields, 600 pairs of images are acquired. All the data presented here are acquired at  $Y = 2\text{mm}$  ( $Y = k/2$ ) from the wall.

Different measures of the streaks amplitude are often used in literature such as the kinetic energy or the min-max definition used in Fransson *et al.* (2005). However, because this apparatus does not allow us to quantify the kinetic energy contained in the vortices induced by the roughness elements, we use a measure of the amplitude of the induced streaks based on a fit of the streamwise velocity to a sinusoidal function defined as  $\hat{u}(x, Y, z) = \bar{u}(x, Y, z) + \hat{A}(x, Y) \sin[2\pi(z - z_0)/\lambda_z]$  (see Hollands & Cossu (2009)). An approximation from below of the amplitude of the streaks as a function of the streamwise distance can be retrieved through the relation  $\widehat{A}_{st}(x, Y) = \hat{A}(x, Y)/U_e$ .

### Experimental large-scale streaks

Figure 5 shows a visualization of the mean flow measured downstream of the  $\lambda_z = 6\delta_0$  cylinder array. The flow is from left to right and the cylinders (not represented) are located at  $z/\lambda_z = \pm 0.5, \pm 1.5$  and  $\pm 2.5$  on the left side of the figure. The streamwise velocity scaled on the free-stream velocity  $U_e$  is plotted versus the streamwise and spanwise directions both scaled on the wavelength  $\lambda_z$ . Due to the presence of the roughness elements, the mean flow is clearly spanwise modulated and an alternating pattern of high speed (clear contours) and low speed (dark contours) streaks is observed. In accordance with Fransson *et al.* (2005), it appears that the high speed streaks are developing straight behind the cylinders.

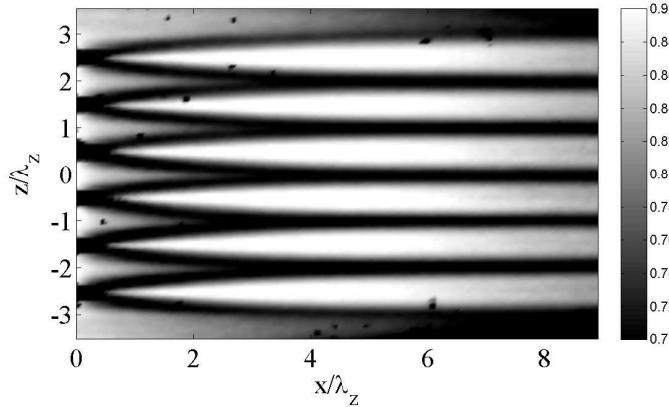


FIG. 5. Very large-scale coherent streaks forced in a turbulent boundary layer in the plane situated at  $Y = k/2$  from the wall. The spanwise wavelength used here is  $\lambda_z \approx 6\delta_0$ . Average of the streamwise velocity component scaled on the free-stream velocity  $U/U_e$  measured using PIV.

In figure 6, we present the normalized spanwise mean velocity distribution  $U(x = 3.7\lambda_z, z/\lambda_z)/U_e$  as a function the spanwise direction  $z/\lambda_z$  (open circles). This velocity profile is very close to a sinusoidal profile. The corresponding best sinusoidal fit (see Hollands & Cossu (2009)) is also displayed in the solid line. The agreement between the two curves is fairly good taking into account the possible scatter in experimental data due to the laser sheet thickness and the

velocity gradient in the near wall region. The amplitude  $\widehat{A}_{st}(x, Y)$  issuing from the sinusoidal fit is therefore a reasonable estimation of the streaks finite amplitude.

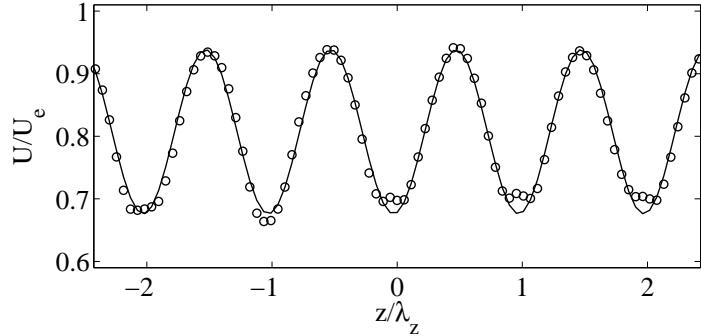


FIG. 6. Streamwise velocity profile  $U/U_e$  (open circles) and its best sinusoidal fit (solid line) plotted versus  $z/\lambda_z$  at  $x/\lambda_z \approx 3.7$ .

In figure 7, the amplitude of the velocity streaks is plotted as a function of the streamwise distance scaled by the spanwise spacing between the roughness elements. Despite the fact that the cylinders used here are slightly lower than the boundary layer thickness, the amplitude of the forced streaks reaches about 13.5% of the free-stream velocity at a distance  $x_{max} \approx 4\lambda_z$  before decaying further downstream. Results obtained with other wavelengths lead to similar conclusions, very large-scale turbulent velocity streaks can be forced and are amplified, the streamwise distance over which the maximum amplitude is attained scales with the wavelength  $\lambda_z$ :  $x_{max} \approx 4\lambda_z$ .

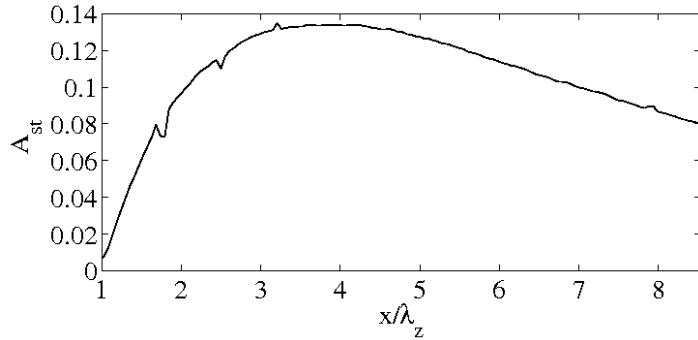


FIG. 7. Streaks amplitude  $\widehat{A}_{st}(x, Y)$  as a function of the streamwise coordinate scaled with the wavelength  $x/\lambda_z$ .

Even though, the mean flows involved here are different (the analytic velocity profile proposed by Monkewitz *et al.* (2007) being valid for high Reynolds numbers), the relative amplitudes for each tested wavelength are in good agreement with theoretical predictions. In Fig. 8 we have reported the normalized amplification curve obtained using the analytic profile (solid line) along with the experimental results (closed circles) normalized with the maximum amplitude  $\widehat{A}_{st}$ . The global maximum amplitude  $\max(\widehat{A}_{st})$  is obtained around  $\lambda_z = 6\delta_0$  while larger and smaller wavelengths streaks reach a lower amplitude.

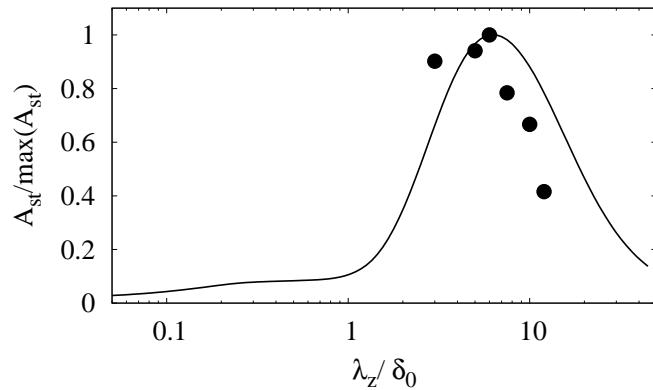


FIG. 8. Experimental (closed circles) amplitude normalized with the maximum value, as a function of the spanwise wavelength scaled on the boundary layer thickness  $\delta_0$  for  $Re_{\delta^*} = 1000$ . For comparison, we plot in solid line the theoretical curve obtained with the analytic velocity profile at the same Reynolds number

## 5 Summary and discussion

We have computed the linear optimal energy growth sustained by a zero pressure gradient turbulent boundary layer. The mean velocity profile used here is the two scale composite expansion proposed by Monkewitz *et al.* (2007). It is found that

- all the considered turbulent boundary layers are linearly stables,
- only streamwise elongated disturbances can be transiently amplified, the most amplified being streamwise uniform and consist in streamwise vortices leading to streamwise streaks,
- two distinct peaks of energy growth are found provided that the Reynolds number is large enough,
- the secondary peak does not depend on  $Re_{\delta^*}$  and is attained for vortices and streaks with a spanwise spacing of  $\lambda_z^+ = 81.5y^+$ ,
- the energy amplification associated with the primary peak the largest one and the corresponding structures are very large-scale vortices with  $\lambda_z \sim 8\delta$  centered near the edge of the boundary layer while the amplified streaks fill the whole boundary layer.

The streamwise streaks associated with the inner peak can be related to the *most probable* streaks observed in the buffer layer of turbulent shear flows.

In some recent studies, evidences of very large-scale streaks present in the outer region of turbulent shear flows (see Hutchins & Marusic (2007); del Álamo & Jiménez (2003)) have been revealed. These streaks, being of finite streamwise extension, have a typical spanwise wavelength  $\lambda_z \sim \delta$ . However, to our best knowledge, there is no experimental or numerical observation of large-scale structures with  $\lambda_z \approx 4 \sim 8\delta$ . In the core region of turbulent Couette flow, large-scale streamwise vortices and streaks are known to exist for a long time (Komminaho *et al.*, 1996). In a recent experimental study, Kitoh & Umeki (2008) confirmed that these very large-scale streaks can be artificially forced in turbulent Couette flow.

Following this approach and the experiments conducted by Fransson *et al.* (2005, 2006), we use an array of cylindrical roughness elements to force such structures in a turbulent boundary layer. Very large-scale structures with a spanwise spacing  $3\delta_0 < \lambda_z < 12\delta_0$  can be forced and

are amplified through the lift-up effect. The maximum amplitude obtained here is near 13.5% of the free-stream velocity for structures with  $\lambda_z = 6\delta_0$ .

## References

- DEL ÁLAMO, J.C. & JIMÉNEZ, J. 2003 Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels. *Phys. Fluids* **15**, L41.
- DEL ÁLAMO, J. C. & JIMÉNEZ, J. 2006 Linear energy amplification in turbulent channels. *J. Fluid Mech.* **559**, 205–213.
- BUTLER, K. M. & FARRELL, B. F. 1992 Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids A* **4**, 1637–1650.
- COSSU, C. & BRANDT, L. 2002 Stabilization of Tollmien-Schlichting waves by finite amplitude streaks in the Blasius boundary layer. *Phys. Fluids* **14**, L57–L60.
- COSSU, C., PUJALS, G. & DEPARDON, S. 2009 Optimal transient growth and very large scale structures in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **619**, 79–94.
- FRANSSON, J., BRANDT, L., TALAMELLI, A. & COSSU, C. 2005 Experimental study of the stabilisation of Tollmien-Schlichting waves by finite amplitude streaks. *Phys. Fluids* **17**, 054110.
- FRANSSON, J., TALAMELLI, A., BRANDT, L. & COSSU, C. 2006 Delaying transition to turbulence by a passive mechanism. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 064501.
- HOLLANDS, M. & COSSU, C. 2009 Adding streaks in the plane poiseuille flow. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Mécanique* **337**, 179–183.
- HUTCHINS, N. & MARUSIC, I. 2007 Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **579**, 1–28.
- KITOH, O. & UMEKI, M. 2008 Experimental study on large-scale streak structure in the core region of turbulent plane couette flow. *Phys. Fluids* **20**, 025107.
- KOMMINAHO, J., LUNDBLADH, A. & JOHANSSON, A. V. 1996 Very large structures in plane turbulent couette flow. *J. Fluid Mech.* **320**, 259–285.
- MONKEWITZ, P. A., CHAUHAN, K. A. & NAGIB, H. M. 2007 Self-consistent high-reynolds-number asymptotics for zero-pressure-gradient turbulent boundary layers. *Phys. Fluids* **19**, 115101.
- NAGIB, H. M., CHRISTOPHOROU, C. & MONKEWITZ, P. A. 2004 High Reynolds Number Turbulent Boundary Layers Subjected to Various Pressure-Gradient Conditions. In *IUTAM Symposium on One Hundred Years of Boundary Layer Research* (ed. G. Meier & K. Sreenivasan), pp. 383–394. DLR, Göttingen, Germany : Springer.
- ÖSTERLUND, J. M. 1999 Experimental studies of zero-pressure gradient turbulent boundary layer flows. PhD thesis, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm.
- PUJALS, G., GARCÍA-VILLALBA, M., COSSU, C. & DEPARDON, S. 2009 A note on optimal transient growth in turbulent channel flows. *Phys. Fluids* **21**, 015109.

- REDDY, S. C., SCHMID, P. J., BAGGETT, J. S. & HENNINGSON, D. S. 1998 On the stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows. *J. Fluid Mech.* **365**, 269–303.
- REYNOLDS, W. C. & HUSSAIN, A. K. M. F. 1972 The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparisons with experiments. *J. Fluid Mech.* **54** (02), 263–288.
- SCHMID, P. J. & HENNINGSON, D. S. 2001 *Stability and Transition in Shear Flows*. New York : Springer.
- SMITH, J. R. & METZLER, S. P. 1983 The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **129**, 27–54.

4

## Article 4

*En cours de publication dans Experiments in Fluids*



# Drag reduction of a 3D bluff body using coherent streamwise streaks

By Gr  gory Pujals<sup>1,2</sup>, Sébastien Depardon<sup>1</sup> and Carlo Cossu<sup>2</sup>

<sup>1</sup>PSA Peugeot Citro  n, Centre Technique de Vélizy, 2 Route de Gisy, 78943 Vélizy-Villacoublay Cedex, France

<sup>2</sup>LadHyX, CNRS-  cole Polytechnique, F-91128 Palaiseau, France

*Exp. Fluids*, 2010, In Press

Separation on the rear-end of an Ahmed body is suppressed by means of large-scale coherent streaks forced on the roof of the model. These streaks originate from an array of suitably shaped cylindrical roughness elements and are amplified by the mean shear through the lift-up effect. Interacting with the mean velocity field at leading order, they induce a strong controlled spanwise modulation. The resulting streaky base flow is observed to sustain the adverse pressure gradient since PIV measurements as well as static wall pressure distributions show that the re-circulation bubble completely vanishes. These modifications of the topology of the flow are associated with a substantial drag reduction which can be of about 10% when the roughness array is optimally placed on the roof of the bluff body.

---

## 1 Introduction

Boundary layer separation occurs when low momentum flow (i.e. in the near-wall region of a boundary layer) faces an adverse pressure gradient which tends to lower its motion. This pressure gradient could be due to geometrical constraints (rear-end of a ground vehicle) or operating conditions (airfoil at high angle of attack as it could happen during take-off or landing). In many industrial applications, boundary layer separation is associated with a large loss of performance (increase of fuel consumption in the case of ground vehicles, decrease of the lift-force on airplanes' wing at high angle of attack) making separation control of great importance.

### Separation control with Vortex generators

One obvious way to delay or even suppress separation is to bring momentum into the near-wall region of the boundary layer. Since the flow in this region is less energetic this enhancement of momentum would enable it to sustain the pressure gradient. Active closed-loop flow control have proved to be effective in reducing the drag of bluff-bodies (see e.g. Pastoor *et al.* (2008) where a 20% drag reduction is achieved on a 2D bluff body with blunt rear-end). Nevertheless, passive (open-loop) separation control is very attractive because, as it is easier to implement and to handle, it has very low production and maintainance costs. The most widely used passive devices are vortex generators (VGs). Introduced in the late forties by Taylor (1947), the early VGs consist in arrays of small vanes which height  $k$  is comparable to the undisturbed boundary layer thickness  $\delta_0$  at the same position. In the late 1980s, the work of Rao & Kariya (1988) suggested that submerged VGs (i.e.  $k/\delta_0 \leq 0.6$ ) can be

even more efficient than the classical VGs of size  $\approx \delta_0$ . This major contribution leads to many experimental studies aiming at optimizing the shape and dimensions of such "low-profile" VGs (see Betterton *et al.* (2000); Lin (2002); Angele (2003); Godard & Stanislas (2006); Lögdberg (2006)). One of the common results of all these studies is that counter-rotating (CtR) VGs are more efficient than co-rotating VGs. To design some efficient VGs, the relevant parameters appear to be their height  $k$ , their width  $l$ , their spanwise spacing  $\lambda_z$  and their streamwise location from the separation line. Unfortunately, a survey of literature shows a wide range of shapes and values for most of these parameters (see table 1). The only consensus being about the height of the devices : to limit the induced drag penalty optimization have been conducted resulting in a reduction of VGs' height from  $k \approx \delta_0$  to only a fraction of it (namely  $k \leq 0.6\delta_0$ ).

TAB. 1. Most effective parameters used in previous studies involving VGs. L1999 stands for Lin (1999), B2000 for Betterton *et al.* (2000), GS2006 for Godard & Stanislas (2006), D2006 for Duriez *et al.* (2006), A2007 for Angele & Grewe (2007) and P2007 for Park *et al.* (2007).

Invest.	Model used	VGs	$k/\delta_0$	$\lambda_z/\delta_0$	$L/k$ ( $L/\lambda_z$ )	$x_{VG}/k$ ( $x_{VG}/\lambda_z$ )
L1999	2D ramp	CtR rect. vanes	0.2	1.8	2.0 (0.22)	10. (1.1)
B2000	2D Bump	CtR tri. vanes	0.3	3.6	6.0 (0.5)	52. (4.3)
G2006	2D Bump	CtR tri. vanes	0.37	2.2	2.5 (0.4)	57. (9.5)
D2006	2D ramp	CtR cyl.	0.6	2.4	1.3 (0.33)	13.3 (4.44)
A2007	Plate w. suction	CtR rect. vanes	1.0	10.3	2.5 (0.24)	16. (1.55)
P2007	2D ramp	rect. tabs	0.5	4.0	1.0 (0.12)	0.0 (0.0)

In all those studies, VGs are designed and spaced to promote large energy/circulation CtR vortices with common inflow (see Fig. 1 (a)) downstream of the devices (see the extensive study by Lögdberg (2006)). Such vortices push high momentum fluid towards the wall adding the required amount of momentum in the lower energetic regions while there is only a smaller momentum transport from low momentum regions to higher momentum regions.

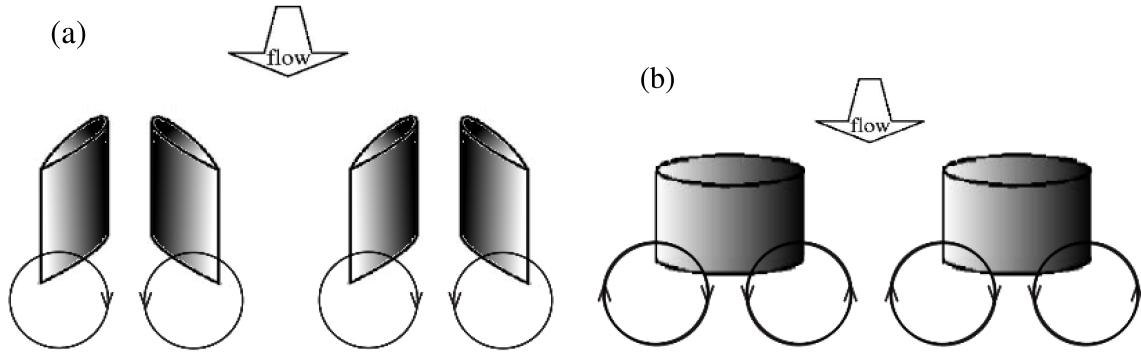


FIG. 1. Sketch of CtR vortices (a) with common inflow generated by VGs. (b) interacting with their two neighbors resulting in common inflow and common outflow motions (lift-up effect).

### Lift-up and streaky structures

In laminar shear flows, perturbations consisting in low energy counter-rotating streamwise vortices can experience large energy growth through the lift-up effect (see e.g. Moffatt (1967);

Landahl (1980)). The mechanism is the following : high momentum fluid is pushed towards the wall while low momentum fluid is transported in the outer region of the flow (see figure 1 (b)) resulting in streamwise-elongated spanwise modulations of the velocity field called "streaks". The energy growth of these streaks is transient and is strongly related to the non-normal nature of the linearized Navier-Stokes operator (Trefethen *et al.*, 1993). If the shape and the wavelength of the disturbing vortices are optimized, the energy amplification of the resulting optimal streaks can be of order  $\mathcal{O}(Re^2)$  (see e.g. Butler & Farrell, 1992; Schmid & Henningson, 2001). In recent experiments, steady and stable streaks of moderate amplitude have been forced by nearly-optimal streamwise vortices generated with cylindrical roughness elements. The resulting streaky flow can be used to manipulate laminar shear flows at leading order and applied to stabilize Tollmien-Schlichting waves (Cossu & Brandt, 2002; Fransson *et al.*, 2004) and to delay transition to turbulence (Fransson *et al.*, 2006). Following a similar guideline, Duriez (2009) showed that laminar streaks could also be used to delay separation on a 2D backward-facing ramp in the laminar régime.

Since in many industrial applications flows are turbulent, an extension of such studies would deal with turbulent shear flows. Optimal perturbations and energy growth sustained by turbulent shear flows have been computed by del Álamo & Jiménez (2006) and Pujals *et al.* (2009b) for turbulent Poiseuille flows, by Hwang & Cossu (2010) for the turbulent Couette flow and by Cossu *et al.* (2009) for turbulent boundary layers (TBL). Those studies lead to the conclusion that the most amplified perturbations are large-scale streamwise uniform vortices evolving into large-scale coherent streamwise streaks. These structures scale in outer units (i.e. the half channel width  $h$  in the Poiseuille or Couette flow case and the boundary layer thickness  $\delta$  in the boundary layer case). In the turbulent boundary layer case, a wide range of spanwise wavelengths ranging from  $1\delta$  to  $30\delta$  can be largely amplified with an optimal wavelength near  $7.6\delta$ .

A recent experimental study aiming at forcing such very large-scale streaks has been conducted by Pujals *et al.* (2009a, 2010) on a low Reynolds number flat plate TBL ( $Re_{\delta^*} = U_e \delta^* / \nu = 1000$  where  $\delta^*$  is the displacement thickness). Following the approach of White (2002) and Fransson *et al.* (2005), arrays of cylindrical roughness elements are used to generate nearly optimal vortices with wavelength ranging from  $3\delta_0$  to  $12\delta_0$ . Similarly to the laminar flow case, the resulting mean flow is spanwise modulated at leading order since finite amplitude very large-scale coherent high speed and low speed streaks are observed. The maximum amplitude obtained is of about 13% of the free-stream velocity  $U_e$  and is reached around  $4 \sim 5\lambda_z$  downstream of the array. When compared to the theoretical analysis, the most amplified spanwise spacings in the experiment are in good agreement with predictions of linear stability analysis.

## Motivations of the present study

In the present study, large-scale coherent vortices are forced in presence of an adverse pressure gradient due to geometrical constraints. To do so, a generic car model called Ahmed body (Ahmed *et al.*, 1984; Lienhart *et al.*, 2003) is used. The flow around its rear-end presents two salient features : a re-circulation bubble and two vortices originating from the side edges. Since most of the drag force applied to this body is due to pressure drag at the rear-end, a significant drag reduction can be achieved by modifying the flow topology. Previous studies involving active control devices such as blowing or suction slots are reported to be efficient (see Brunn & Nitsche (2006); Roumeas *et al.* (2009); Leclerc (2008)) while there are, to the authors' knowledge, very few studies dealing with "VGs-like" passive devices : Beaudoin &

Aider (2008) achieved a 25% drag reduction modifying the streamwise vortices with moving flaps located on the edges of the model; using motorized VGs Aider *et al.* (2009) obtained a 14% drag reduction on a modified Ahmed body with a curved rear-end. The scope of this study is twofold : 1) to investigate the ability of large-scale coherent streaks to reduce a separation bubble and/or the trailing edge vortices and then to evaluate the amount of drag reduction ; 2) to examine the development of the streaks under the influence of an adverse pressure gradient.

In the first part, we describe the facility, the experimental set-up and the model used for this study. In § 3, the results are analyzed : we present the macroscopic effect of the controlled flow on time-averaged drag coefficient and relate it to the modification of the flow on the slanted rear-end, then the streaky base flow obtained downstream of the roughness elements is described. Eventually, all those results are discussed and related to previous studies.

## 2 Experimental setup

### Description of the facility

All the experiments are carried in PSA in-house facility. It is an Eiffel type wind tunnel with a rectangular cross section of 2.1 m high, 5.2 m wide and 6 m long. Velocity can be controlled from  $5 \text{ m.s}^{-1}$  up to  $55 \text{ m.s}^{-1}$ . Models are fixed on a flat plate placed 500 mm above the floor. The purpose of this configuration is to control the boundary layer development without any suction device. The flat plate is 3 m wide and 52 mm thick. The leading edge is covered with sand-paper to avoid separation in low flow-speed conditions and to promote transition to a turbulent boundary layer. In the following  $x$ ,  $y$  and  $z$  are respectively the streamwise, normal and spanwise directions. The axis system origin is taken at mid-width on the separation line between the roof and the slanted-surface of the model (see Fig. 2).

### Generic car model and actuators

The generic car model used here is the one originally described in Ahmed *et al.* (1984) or Lienhart *et al.* (2003). The rear part of this model consists in a slanted surface which slant-angle can be modified resulting in very different flow topologies. In the present study, we focus on the  $25^\circ$  slanted rear-end, the free-stream velocity being set to  $U_e = 20 \text{ m.s}^{-1}$ . This choice of geometry and free-stream velocity leads to a unsteady and three-dimensional flow exhibiting a large separation bubble over the slanted surface along with highly energetic streamwise vortices issuing from the slant side edges. The dimensions and the overall shape of the model are given in figure 2. The Reynolds number based on the free-stream velocity  $U_e$  and the model length  $L$  is  $Re_L = 1.35 \cdot 10^6$ .

Like in previous studies, cylindrical roughness elements are used to force the large-scale streaks. The dimensions of these elements are of primary importance if we want to generate stable streaks. The relevant parameters are : the height of the cylinders  $k$ , their diameter  $d$  and the spanwise spacing  $\lambda_z$ . These parameters are illustrated in figure 3 while a picture of these roughness elements placed on the roof of the model is displayed in figure 4.

### Experimental measurements

To evaluate the efficiency of each configuration on the drag force, a 6 components aerodynamic balance is used. All results hence be expressed as the time-averaged drag coefficient

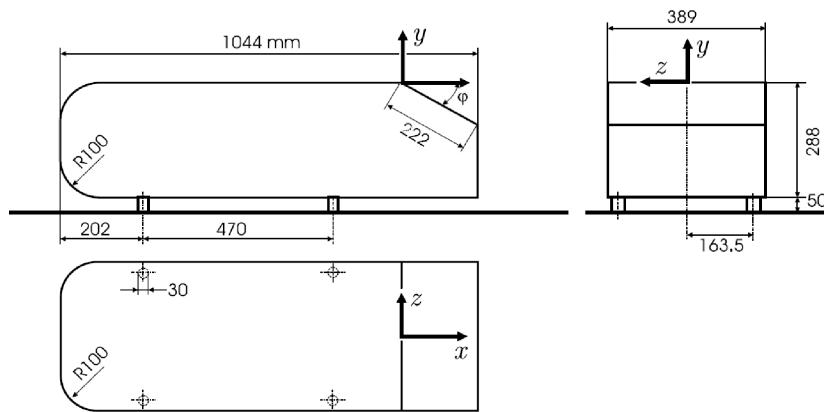


FIG. 2. Shape and dimensions of the generic car model used in the present study. From Ahmed *et al.* (1984). The dimensions are given in millimeters

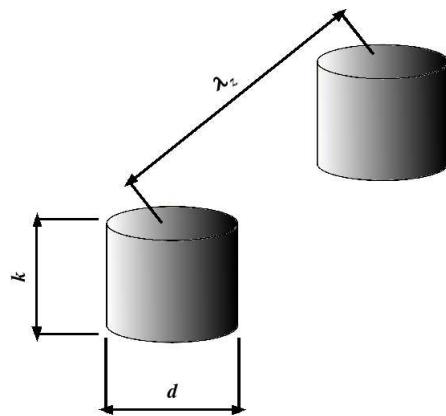


FIG. 3. Shape of the roughness elements and relevant parameters.

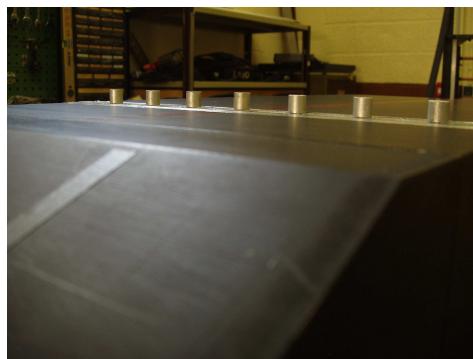


FIG. 4. Rear view of the roughness array placed on the roof of the model.

$C_d$  :

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho S U_e^2} \quad (2.1)$$

where  $F_d$  is the drag force (i.e. force in the streamwise direction  $x$ ),  $U_e$  is the free-stream velocity and  $S$  is the projected surface of the model on the cross-flow plane ( $z, y$ ). Each measurement consists in 5 samples of 60s at the frequency of 50Hz. The time-averaged drag coefficient of each sample is computed and the mean of these 5 coefficients is taken as  $C_d$  leading to an error on the estimation lower than 1%.

The influence of large-scale velocity streaks on the static wall pressure distribution and on the rear-end separation are explored using static wall pressure measurements. Pressure sensors are placed all along the symmetry line  $z = 0$  of the model and on the left half-part of the slanted surface. The wall pressure coefficient is defined as :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_e^2} \quad (2.2)$$

where  $P$  is the pressure measured on the model and  $\frac{1}{2}\rho U_e^2$  and  $P_\infty$  are respectively the dynamic pressure and the static pressure away from the model. The  $C_p$  estimation is based on the time-averaged value obtained with one sample of 60s.

The mean velocity is measured using Dantec's Flow Manager PIV system associated with a 120mJ Nd :Yag double cavity laser and a  $1024 \times 1280$  Hisense 8 bit digital camera. Mean velocity profiles on the roof of the model are measured with a 105 mm optical lens resulting in 220 mm  $\times$  200 mm planes. 1500 pairs of images are acquired to ensure convergence of the mean values and we use 16  $\times$  8 pixels interrogation windows with 50% and 75% overlap in respectively the streamwise and normal directions leading to 1.43 mm and 0.3 mm spatial resolution. The  $(x, y)$  planes around the rear-end are acquired using a 50 mm lens leading to 400 mm  $\times$  400 mm planes. 600 pairs of images are used and we perform spatial correlations on 16  $\times$  16 interrogation windows with 50% overlap in each directions resulting in 2.88 mm  $\times$  2.88 mm spatial resolution. The  $(x, z)$  planes over the roof and the slanted surface are acquired using the same setup resulting in respectively 315 mm  $\times$  253 mm and 253 mm  $\times$  202 mm planes. Spatial correlations on 16  $\times$  16 (resp. 16  $\times$  8) interrogation windows with 50% overlap are performed on the 600 pairs of images resulting in 1.6 mm  $\times$  1.6 mm (resp. 1.9 mm  $\times$  1.0 mm) resolution. The flow is seeded with olive oil droplets of about 300  $\mu\text{m}$  diameter.

### 3 Baseline configuration and choice of the optimal configuration

The first part of the present study focuses on the comparison of the effect of various perturbations. On a car model like Ahmed body, since most of the drag is due to pressure drag (see Ahmed *et al.* (1984)), a change in the flow topology (side edge vortices or separation bubble) would have a major impact on the drag coefficient. One way to investigate the effect of a perturbation on the mean flow around the rear-end would be to estimate the resulting drag coefficient.

#### Base configuration without streaks

For a Reynolds number of  $Re_L = 1.35 \cdot 10^6$ , the boundary layer on the roof of the model is fully turbulent. The TBL thickness developing on the roof of the model upstream of the

separation line is  $\approx 20\text{ mm}$  and compared to the most widely studied case  $Re_L = 2.7 \cdot 10^6$ , the separation over the slanted surface is larger. As the aim of this study is to investigate the effect on separation, the Reynolds number is set to  $Re_L = 1.35 \cdot 10^6$ .

The study by Cossu *et al.* (2009) shows that in the zero pressure gradient turbulent boundary layer case, the most amplified spanwise wavelength is  $\lambda_z \approx 8\delta$  and a wide range of wavelengths  $\lambda_z \in [1\delta; 30\delta]$  can experience large energy growth. According to the first experimental investigation by Pujals *et al.* (2009a, 2010), very large scale turbulent streaks can be forced using cylindrical VGs. In this study, the ratio  $\lambda_z/d$  was constant and set equal to 4 like in previous studies by White (2002) or Fransson *et al.* (2005). Based on these observations, the constant ratio  $\lambda_z/d = 4$  is also applied in the present study. The height of the cylinders is fixed to  $k = 12\text{ mm} \approx 0.6\delta_0$ . Even though this value is close to the value used in Fransson *et al.* (2005, 2006) to delay transition in a laminar boundary layer, the reasons for it are different : in the laminar case, this value was chosen to avoid shedding instabilities that would appear for larger values of  $k$  (see section III.C of Fransson *et al.* (2005)) while in the present turbulent case larger values of  $k$  would increase the drag penalty induced by the roughness elements themselves.

The selected spanwise spacings are  $\lambda_z = 24, 32$  and  $48\text{ mm}$ . Scaled with the boundary layer thickness, this results in  $\lambda_z = 1.2\delta_0, 1.6\delta_0$  and  $2.4\delta_0$ . Due to the width of the model only "small" spacings are studied ; wavelengths comparable to those predicted by Cossu *et al.* (2009) would result in a very limited number of roughness elements. Table 2 summarizes those configurations. Given these parameters, various positions all along the roof of the model are studied with configurations A to C, the goal of this first step being to determine for each roughness array the optimal streamwise position and then to highlight the global optimal configuration.

TAB. 2. Description of the configurations analyzed in this study

Configuration	$\lambda_z$ (mm)	$d$ (mm)	$\lambda_z/\delta_0$	$\lambda_z/d$	$k/\delta_0$
A	24	6	1.2	4	0.6
B	32	8	1.6	4	0.6
C	48	12	2.4	4	0.6

## Effect on drag force

The efficiency of each roughness array is quantified regarding the time averaged drag coefficient  $C_d$  reduction defined as  $\Delta C_d = 2 \cdot \frac{C_d - C_d^0}{C_d + C_d^0}$ , where  $C_d^0$  denotes the time averaged drag coefficient in the undisturbed case. In figure 5, the drag reduction obtained with each configuration is plotted against the distance from the separation line  $x_0$  expressed in meters (Fig. 5 (a)) and scaled on the wavelength of the perturbation  $\lambda_z$  (Fig. 5 (b)). As shown in Fig. 5 (a), the drag decreases as the roughness array is moved towards the separation line until it reaches a minimum value for an optimal streamwise position denoted  $x_0^{opt}$  (note that the value  $x_0^{opt}$  depends on  $\lambda_z$ ). Then, when the array is placed downstream of  $x_0^{opt}$ , the drag starts to increase. However, when scaled on the spanwise spacing  $\lambda_z$ , the optimal streamwise position is always in the range  $4 - 5\lambda_z$  upstream of the separation line. The maximum drag reduction achieved here is of about 10%.

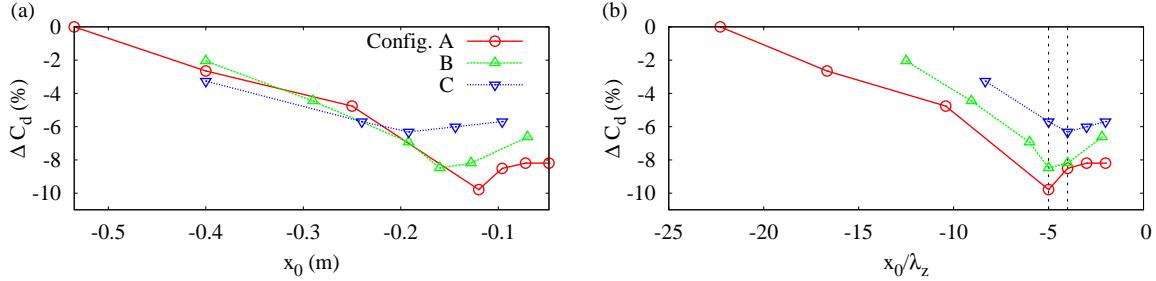


FIG. 5. Drag reduction for each tested wavelength as a function of the distance from the separation line (a) expressed in meters, (b) scaled on the wavelength  $\lambda_z$ . The two vertical dashed lines on (b) are  $x_0 = -5\lambda_z$  and  $x_0 = -4\lambda_z$ .

#### 4 Analysis of the optimal drag-reducing configuration

Substantial drag reduction is obtained using every optimal perturbations tested here. Nevertheless, the reason for it is still a not addressed question. Here, we focus on the optimal drag-reducing configuration which is configuration A with  $x_0 = -5\lambda_z$ . In order to find out how the topology of the flow around the rear-end is modified (are the re-circulation bubble and/or streamwise vortices modified?), PIV planes both on the symmetry plane  $z = 0$  and parallel to the slanted surface are acquired and static wall pressure is measured on the slanted surface.

##### Mean flow velocity field and topology around the rear-end

In figure 6, the streamwise velocity  $U/U_e$  measured in the symmetry plane around the rear-end is plotted for the uncontrolled case (Fig. 6 (a)) and for the controlled case with configuration A at  $x_0 = x_0^{opt}$  (Fig. 6 (b)). The flow is from left to right. The uncontrolled flow presents a thick shear layer originating from the upper side of the slanted surface. The curvature of the whole shear layer and the dark blue spot between the surface and the layer indicate a re-circulation bubble. When control is applied, the shear layer becomes thinner and its curvature is highly reduced. This behavior suggests that the re-circulation bubble has been suppressed or at least highly reduced.

To confirm this result, the near-wall PIV measures on  $(x, z)$  planes are carried out at  $Y/k = 0.08$  (corresponding to  $Y = 1 \text{ mm}$  from the slanted surface). The resulting streamwise velocity fields (colored contours) as well as the time-averaged streamlines (vectors field) are reported in figure 7 for the two cases discussed previously. The flow is from top to bottom. The uncontrolled flow (Fig. 7 (a)) presents the common features discussed in 1. The re-circulation bubble is clearly apparent since a backward flow region is observed for roughly  $0.01 \text{ m} \leq x \leq 0.15 \text{ m}$  along the symmetry line  $z = 0 \text{ m}$ . The footprint of one streamwise conical vortex is also observed on the right part of the figure. The controlled flow displayed on figure 7 (b) confirms the previous suggestion : the re-circulation bubble is suppressed since the streamlines present no evidence of backward flow. Nevertheless, no noticeable influence on the streamwise vortices can be observed at this distance from the wall.

Both the re-circulation bubble and side edge vortices have a strong influence on the pressure distribution on the slanted surface. Any modification on the topology of the flow would implies a change in this distribution. In order to evaluate it, static wall pressure measurements have been carried out.

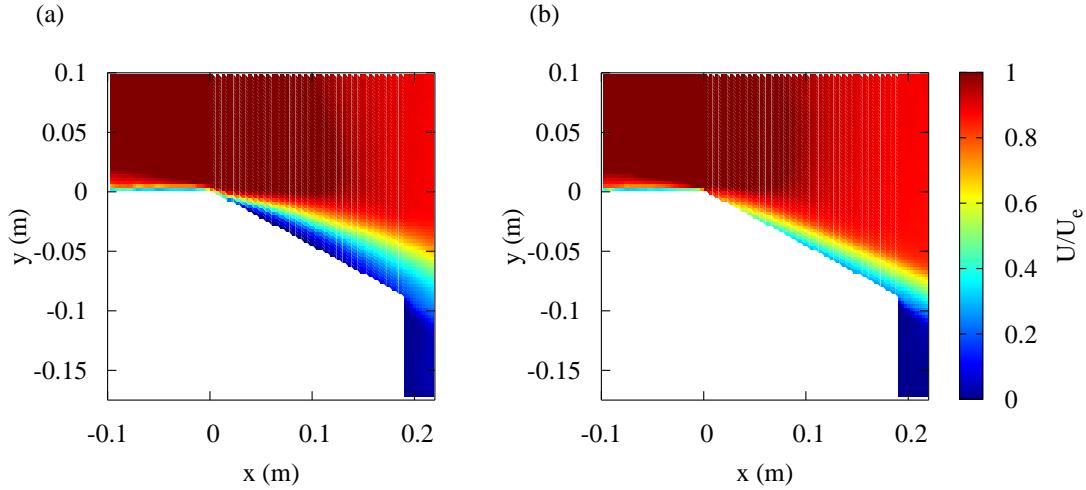


FIG. 6. Time averaged streamwise velocity  $U/U_e$  around the rear-end in the symmetry plane using PIV. The flow is from left to right. (a) Uncontrolled case. (b) Optimally controlled case with configuration A at  $x_0 = x_0^{opt}$ .

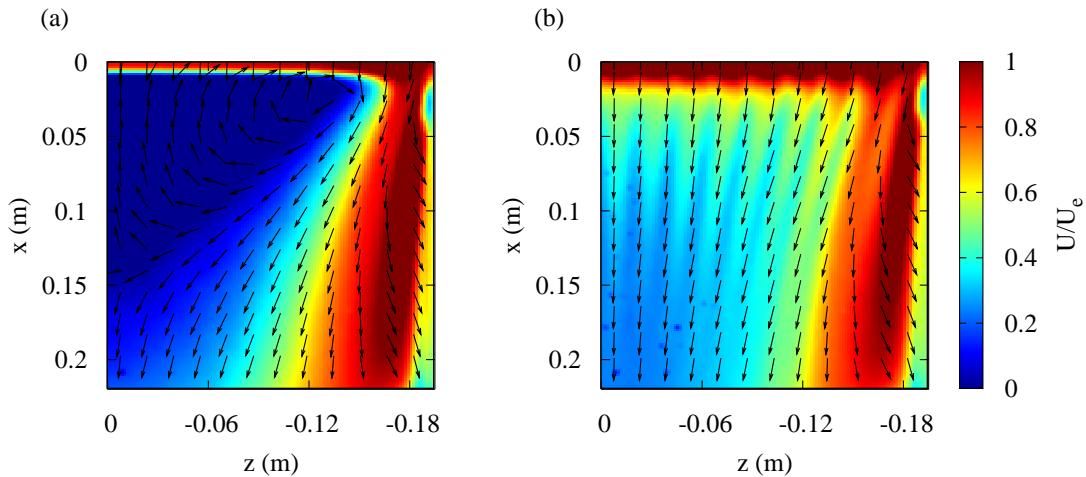


FIG. 7. Time averaged streamwise velocity  $Y/k = 0.08$  above the slanted surface using near-wall PIV. The line  $x = 0$  is the begining of the slanted surface. The flow is from top to bottom. (a) Uncontrolled case. (b) Optimally controlled case with the same configuration as in Fig. 6 (b).

### Wall pressure distribution on the slanted surface

Figure 8 represents the wall pressure coefficient  $C_p$  for the uncontrolled reference case (Fig. 8 (a)) and for the controlled studied in the previous section (Fig. 8 (b)). On both figures, the flow is from top to bottom. The reference case exhibits two regions where the pressure coefficient is locally lower. The first one can be seen on the left part of the figure. It corresponds to the footprints of the side edge vortex originating from the trailing edge of the model described by Lienhart *et al.* (2003). The second region spans almost the whole model's width and extends from the separation line  $x = 0m$  to  $x \approx 0.15m$ . As we move along the streamwise direction, the pressure coefficient slowly recovers. This second area corresponds to the separation bubble. It can be seen from the  $C_p$  distribution associated with the controlled flow that the pressure is even lower in the region just downstream of the separation line. This behavior is due to the acceleration of the attached flow around the sharp upper edge of the slanted surface. Nevertheless, the reduced/vanished re-circulation bubble induces a pressure recovery far upstream than in the uncontrolled case. The effect of the roughness array on the streamwise vortices seems negligible since the footprints observed on (a) and (b) are extremely similar.

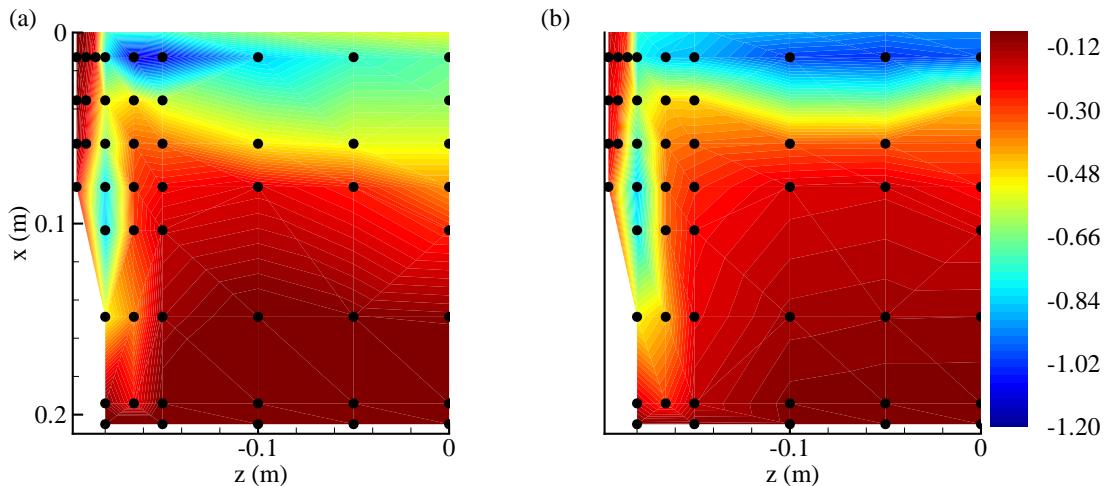


FIG. 8. Wall pressure coefficient  $C_p$  on the left half part of the slanted surface for  $Re_L = 1.35 \cdot 10^6$ . The line  $x = 0$  is the beginning of the slanted surface. The flow is from top to bottom. (a) Reference flow without control. (b) Flow controlled with same configuration as in figure 6. The symmetry plane is on  $z = 0$ , the upper side edge is on  $x = 0$ . The black circles on each plot show the position of the pressure sensors.

The  $C_p$  obtained with configurations A,B and C along the symmetry line  $z = 0$  are displayed in figure 9 along with the uncontrolled reference. When control is applied, the  $C_p$  distributions are very similar and all the curves collapse on a single one. Compared to the uncontrolled case, the pressure recovery is quicker. This suggests that the effect on the separation bubble is also observed for the other configurations (PIV measurements not displayed here confirm this result). The discrepancy on drag reduction efficiency presented in section 3 would then be due to the drag penalty induced by the larger cylinders used in those cases. The only slight difference between the configurations A,B and C comes from the low-pressure region just downstream of the upper edge.

In recent experiments, substantial drag reduction had been achieved by prolongating the

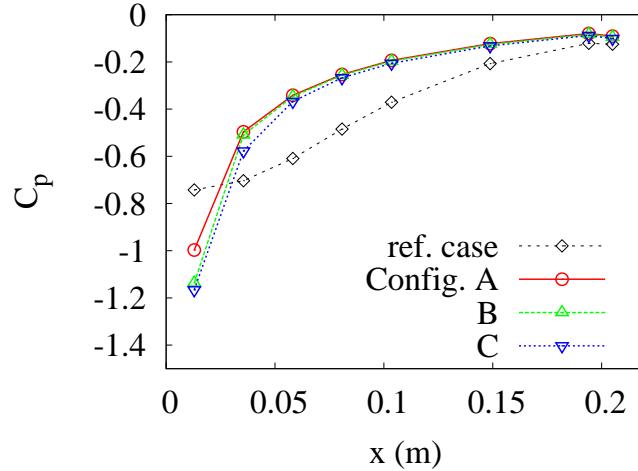


FIG. 9. Wall pressure coefficient  $C_p$  measured for the uncontrolled reference case and the configurations A, B and C with roughness arrays placed at  $x = x_0^{opt}$  along the symmetry line  $z = 0$ .

separation with flaps (Beaudoin & Aider, 2008) or VGs (Aider *et al.*, 2009). As explained in those references, prolongating the separation permits to highly reduce and even suppress the side-edges streamwises vortices. Hence, even though the separation is promoted, the pressure loss due to those streamwise vortices is reduced in such a way that the sum of both contributions (vortices and separation) is decreased. On the contrary, in the present experiments the streaky incoming flow remains attached over the slanted surface (hence increasing the pressure distribution over this surface) while the edge vortices do not experience major modifications. The balance between pressures felt by the front-end and the rear-end is modified and the total drag of the model is reduced.

### Topology of the flow on the roof

The scope of the next section is to focus on the structures generated by the roughness elements array in order to provide an explanation for this separation delay.

Figure 10 shows a visualization of the mean flow over the roof measured downstream of the  $d = 6\text{mm}$  cylinders array. The flow is from left to right and the cylinders (represented by the white circles on the left part of the figure) are located on the left part of the figures. The velocity is scaled on the free-stream velocity  $U_e$  and plotted versus the spanwise and streamwise directions both scaled on the spacing  $\lambda_z$ . The mean flow is clearly spanwise modulated and alternating patterns of high speed (hot contours) and low speed (cold contour) streaks are observed. These velocity streaks are observable about  $x = 1\lambda_z$  downstream of the cylinders array up to the separation line at  $x = 0\lambda_z$ .

Like in previous studies involving laminar flows (Fransson *et al.*, 2005) or the flat plate TBL (Pujals *et al.*, 2009a, 2010), the mechanism of streaks generation is a three-stage process : first streamwise vortices are generated by the roughness elements, second those vortices induce streaks by lift-up effect (the amplitude of the streaks grows while the vortices decay) then the streaks decay. The very first stage of this process can be observed in figure 10 from  $x = -5\lambda_z$  to roughly  $x = -4\lambda_z$ . However, a measure of the amplitude of the streaks has to be defined in order to study the two other stages. Various measures of the streaks amplitude can be

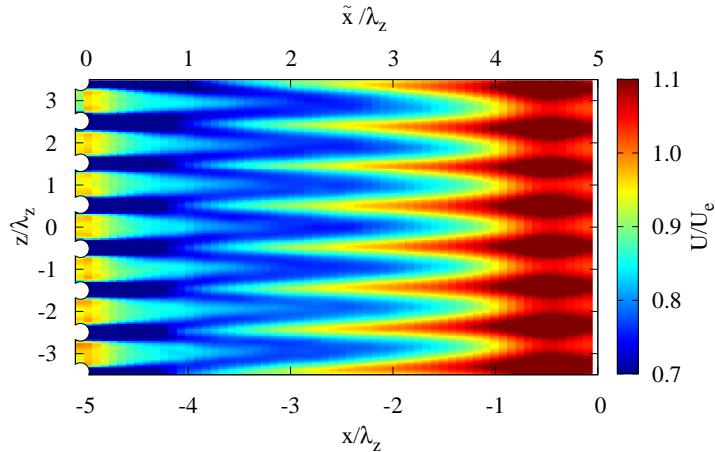


FIG. 10. Large coherent velocity streaks forced on the roof of the model at  $Y/k = 0.5$  ( $Y = 6$  mm) from the wall. The flow is from left to right. Same configuration as in figure 6. Time averaged streamwise velocity  $U/U_e$  as a function of the streamwise and spanwise directions  $x/\lambda_z$  and  $z/\lambda_z$ .

found in literature : the kinetic energy criterion or the min-max definition used by Andersson *et al.* (2001) for instance. In the present case, the experimental apparatus does not permit to quantify the kinetic energy contained in the vortices induced by the roughness elements. Consequently, the amplitude is estimated using a local min-max criterion :

$$\widehat{A}_{st}(\tilde{x}, Y/k = 0.5) = \frac{U_{hss}(\tilde{x}, Y/k = 0.5) - U_{lss}(\tilde{x}, Y/k = 0.5)}{2U_e} \quad (4.3)$$

where  $U_{hss}$  and  $U_{lss}$  are respectively the streamwise velocity in a high speed and low speed streak. A more accurate value is then obtained performing a sliding averaging over the width of the window.

The amplitude  $\widehat{A}_{st}(\tilde{x}, Y/k = 0.5)$  of the streaks arising with configuration A is plotted against the normalized distance from the cylinder array  $\tilde{x}/\lambda_z$  in figure 11. The streaks experience an algebraic growth period with a maximum observed amplitude close around 8% of the free stream velocity  $U_e$ . The maximum amplitude is reached between 2.5 and 3.5 wavelengths downstream of the array. This behavior is slightly different from the zero pressure gradient case (see Pujals *et al.* (2010)). This is probably due to the adverse pressure gradient and the vicinity of the separation line.

## 5 Summary and discussion

The potential of a separation control strategy based on large-scale coherent streaks is experimentally investigated. Such streaks are generated by means of an array of cylindrical roughness elements on a highly three-dimensional flow subject to an adverse pressure gradient due to geometrical constraints. The geometry chosen here is the 25° slanted rear-end of the Ahmed body at Reynolds number  $Re_L = 1.35 \cdot 10^6$ .

Various configurations of spanwise spacings and streamwise locations on the roof are investigated measuring their influence on total drag reduction. The main results found are as follows :

- Substantial drag reduction is obtained for all sets of wavelength and streamwise location.

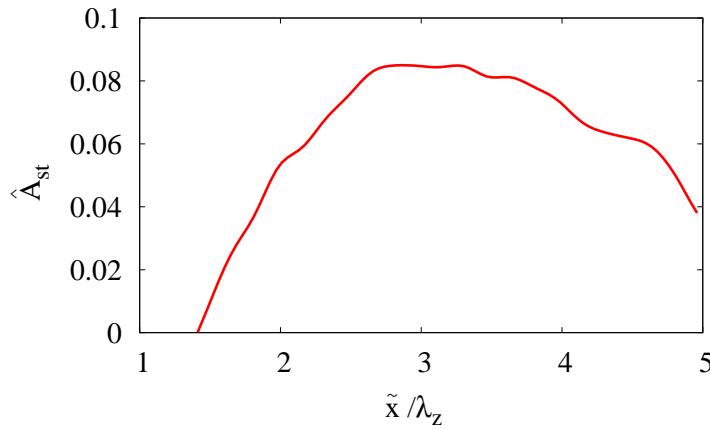


FIG. 11. Estimated streaks' finite amplitude  $\widehat{A}_{st}(x, Y/k = 0.5)$  for configuration A as a function of the distance from the cylinders array. The distance is scaled with the spanwise spacing  $\tilde{x}/\lambda_z$ .

- For all the configurations tested, the streamwise position leading to the maximum drag reduction is  $4 - 5\lambda_z$  upstream of the separation line. The overall maximum total drag reduction measured here is about 10%.
- PIV as well as static pressure measurements on the slanted surface prove that the drag reduction is due to the suppression to the re-circulation bubble.

The analysis of the controlled flow on the roof confirms that the array of cylinders generates streamwise vortices which lead to coherent streamwise streaks through the lift-up effect. Similarly to previous investigations on flat plate turbulent boundary layers, those streaks are stable and of finite amplitude. The maximum amplitude obtained facing the adverse pressure gradient is near 9% of the free-stream velocity. The resulting streaky base flow seems responsible for the modification of the flow topology further downstream since traces of the streaky flow are still observable on the velocity fields over the slanted surface.

In the present study, for wind-tunnel availability reasons, we have not attempted to find the value of the minimum streak amplitude necessary to suppress the separation. Probably, the total drag reduction could be improved by finding such a minimum value because lower streaks amplitudes would be obtained by reducing the height  $k$  of the roughness elements (see White (2002); Fransson *et al.* (2004) for the laminar case) and therefore reducing the drag penalty induced by the roughness elements themselves.

The potential of cylindrical VGs to delay the separation of a laminar flow over a smooth 2D ramp has been experimentally demonstrated by Duriez (2009). In this study, the diameter and height of the cylinders is kept constant while their spanwise spacing is set to  $\lambda_z = 2d, 3d$  and  $4d$ . The roughness array is located at  $x_{VG} = 12.5d$  upstream of the ramp resulting in  $x_{VG} \in [3\lambda_z, 6\lambda_z]$  depending on the wavelength. According to this study, the larger wavelength  $\lambda_z = 3d$  and  $4d$  are the most effective in delaying the separation. This delay is due to the averaged influence of the spanwise modulation of the base flow. The approach followed by Duriez (2009) is different from the one proposed in the present paper since it applies to a laminar base flow. Furthermore as here we keep the ratio  $\lambda_z/d = 4$  constant, the streaky base flows are similar like in the study of Fransson *et al.* (2005) and the mechanism involved in the streaks' growth is then the same regardless of the configuration.

It is, finally, important to emphasize the differences between the proposed technique, based on the nearly-optimal forcing of streaks, and related passive techniques in turbulent flows. As

an example we e.g. consider the very interesting study of Park *et al.* (2007) who considered the flow over a backward-facing step and showed that a 51% reduction of the reattachment length can be obtained using rectangular tabs located at the edge of the step. Those tabs induce two main effects on the mean flow : a spanwise modulation of the streamwise velocity profile and strong streamwise vortices issued from the tabs. Park *et al.* (2007) ascribe the bubble reduction to the action of the ‘flying’ streamwise vortices issued from the tabs and that work by pairs to create a vertical mixing on the bubble edge (this behavior is the same when dealing with “regular VGs”, see e.g. Godard & Stanislas (2006)). On the contrary, in the present study, the separation delay must be attributed only to the streaks (the spanwise modulation of the streamwise velocity) because streamwise vortices have virtually disappeared at the position of maximum streak amplitude, which is a typical feature of the lift-up effect. This, again, underlines the two-stage nature of the technique we suggest. The first stage, localized well upstream of the edge, is the forcing of nearly-optimal low-energy streamwise vortices. The second stage, localized downstream, consists in the separation delay induced by the important spanwise modulation of the mean flow associated with large amplitude coherent streaks. These two stages are coupled by the lift-up effect by which the forced low-energy vortices induce large-amplitude coherent streaks extracting energy from the mean flow itself.

## References

- AHMED, S. R., RAMM, R. & FALTIN, G. 1984 Some salient features of the time-averaged ground vehicle wake. *SAE 840300*.
- AIDER, J.-L., BEAUDOIN, J.-F. & WESFREID, J. E. 2009 Drag and lift reduction of a 3d bluff body using active vortex generators. *Experiments in Fluids* pp. 1–19.
- DEL ÁLAMO, J. C. & JIMÉNEZ, J. 2006 Linear energy amplification in turbulent channels. *J. Fluid Mech.* **559**, 205–213.
- ANDERSSON, P., BRANDT, L., BOTTARO, A. & HENNINGSON, D. 2001 On the breakdown of boundary layers streaks. *J. Fluid Mech.* **428**, 29–60.
- ANGELE, K. 2003 Experimental studies of turbulent boundary layer separation and control. PhD thesis, KTH, Mechanics.
- ANGELE, K. & GREWE, F. 2007 Instantaneous behavior of streamwise vortices for turbulent boundary layer separation control. *J. Fluids Engineering* **129**, 226–235.
- BEAUDOIN, J.-F. & AIDER, J.-L. 2008 Drag and lift reduction of 3d bluff body using flaps. *Exp. Fluids* **44**, 491–501.
- BETTERTON, JG, HACKETT, KC, ASHILL, PR, WILSON, MJ, WOODCOCK, IJ, TILMAN, CP & LANGAN, KJ 2000 Laser Doppler Anemometry Investigation on Sub Boundary Layer Vortex Generators for flow control. In *10th Symposium on Application of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon*, pp. 10–12.
- BRUNN, A. & NITSCHE, W. 2006 Active control of turbulent separated flow over slanted surfaces. *Int. J. Heat and Fluid Flow* **27**, 748–755.
- BUTLER, K. M. & FARRELL, B. F. 1992 Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids A* **4**, 1637–1650.
- COSSU, C. & BRANDT, L. 2002 Stabilization of Tollmien-Schlichting waves by finite amplitude optimal streaks in the Blasius boundary layer. *Phys. Fluids* **14**, L57–L60.
- COSSU, C., PUJALS, G. & DEPARDON, S. 2009 Optimal transient growth and very large scale structures in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **619**, 79–94.
- DURIEZ, T. 2009 Application des générateurs de vortex au contrôle d'écoulements décollés. PhD thesis, Université Paris Diderot.
- DURIEZ, T., AIDER, J. L. & WESFREID, J. E. 2006 Base flow modification by streamwise vortices. application to the control of separated flows. *ASME Technical Paper FEDSM2006-98541, Control of separated flows, Miami, USA*.
- FRANSSON, J., BRANDT, L., TALAMELLI, A. & COSSU, C. 2004 Experimental and theoretical investigation of the non-modal growth of steady streaks in a flat plate boundary layer. *Phys. Fluids* **16**, 3627–3638.

- FRANSSON, J., BRANDT, L., TALAMELLI, A. & COSSU, C. 2005 Experimental study of the stabilisation of Tollmien-Schlichting waves by finite amplitude streaks. *Phys. Fluids* **17**, 054110.
- FRANSSON, J., TALAMELLI, A., BRANDT, L. & COSSU, C. 2006 Delaying transition to turbulence by a passive mechanism. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 064501.
- GODARD, G. & STANISLAS, M. 2006 Control of a decelerating boundary layer. part 1 : Optimization of passive vortex generators. *Aero. Sci. Tech.* **10**, 181–191.
- HWANG, Y. & COSSU, C. 2010 Amplification of coherent streaks in the turbulent Couette flow : an input-output analysis at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **643**, 333–348.
- LANDAHL, M. T. 1980 A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows. *J. Fluid Mech.* **98**, 243.
- LECLERC, C. 2008 Réduction de la traînée d'un véhicule automobile simplifié à l'aide du contrôle actif par jet synthétique. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse (INP), Toulouse.
- LIENHART, H., STOOTS, C. & BECKER, S. 2003 Flow and turbulence structure in the wake of a simplified car model. *SAE transactions* **112** (6), 785–796.
- LIN, J. C. 1999 Control of turbulent boundary layer separation using micro-vortex generators. *AIAA Paper* **99-3404**.
- LIN, J. C. 2002 Review of research on low-profile vortex generators to control boundary layer separation. *Progress in Aerospace Sciences* **38** (4–5), 389–420.
- LÖGDBERG, O. 2006 Vortex generators and turbulent boundary layer separation control. Master's thesis, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm.
- MOFFATT, H. K. 1967 The interaction of turbulence with strong wind shear. In *Proc. URSI-IUGG Colloq. on Atoms. Turbulence and Radio Wave Propag.* (ed. A.M. Yaglom & V. I. Tatarsky), pp. 139–154. Moscow : Nauka.
- PARK, H., JEON, W.P., CHOI, H. & YOO, J.Y. 2007 Mixing enhancement behind a backward-facing step using tabs. *Physics of Fluids* **19**, 105103.
- PASTOOR, M., HENNING, L., NOACK, B.R., KING, R. & TADMOR, G. 2008 Feedback shear layer control for bluff body drag reduction. *Journal of Fluid Mechanics* **608**, 161–196.
- PUJALS, G., COSSU, C. & DEPARDON, S. 2009a Optimal transient growth and very large-scale structures in zero-pressure gradient turbulent boundary layers. In *Sixth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, Seoul, Korea, 22–24 June 2009*.
- PUJALS, G., COSSU, C. & DEPARDON, S. 2010 Forcing large-scale coherent streaks in a zero pressure gradient turbulent boundary layer. *Submitted to Journal of Turbulence* .
- PUJALS, G., GARCÍA-VILLALBA, M., COSSU, C. & DEPARDON, S. 2009b A note on optimal transient growth in turbulent channel flows. *Phys. Fluids* **21**, 015109.

- RAO, D. M. & KARIYA, T. T. 1988 Boundary-layer submerged vortex generators for separation control - an exploratory study. In *AIAA, ASME, SIAM and APS National Fluid Dynamics Congress, 1 st, Cincinnati, OH; UNITED STATE*, pp. 839–846. Washington, DC, American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- ROUMEAS, M., GILLIERON, P. & KOURTA, A. 2009 Drag reduction by flow separation control on a car after body. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **60** (11), 1222–1240.
- SCHMID, P. J. & HENNINGSON, D. S. 2001 *Stability and Transition in Shear Flows*. New York : Springer.
- TAYLOR, H.D. 1947 The elimination of diffuser separation by vortex generators. Report No R-4012-3. United Aircraft Corporation.
- TREFETHEN, L. N., TREFETHEN, A. E., REDDY, S. C. & DRISCOLL, T. A. 1993 A new direction in hydrodynamic stability : Beyond eigenvalues. *Science* **261**, 578–584.
- WHITE, E. B. 2002 Transient growth of stationary disturbances in a flat plate boundary layer. *Phys. Fluids* **14**, 4429–4439.

