HAL
archives-ouvertes.fr

Flottement de drapeau : dynamique et couplage

Emmanuel Virot

▶ **To cite this version:**

Emmanuel Virot. Flottement de drapeau : dynamique et couplage. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Polytechnique, 2015. Français. <tel-01162549v2>

HAL Id: tel-01162549

https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01162549v2

Submitted on 16 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Polytechnique
Laboratoire d'Hydrodynamique

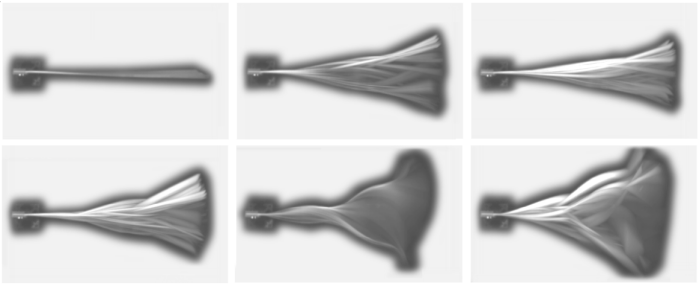
Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Spécialité : Mécanique

par

Emmanuel Virot

Flottement de drapeau : dynamique & couplage



Soutenue le 12 février 2015 devant le jury composé de :

M. Vincent Denoël	Rapporteur
M. Christophe Eloy	Rapporteur
M. Olivier Doaré	Examinateur
M. Benoît Roman	Examinateur
M. Xavier Amandolese	Directeur de thèse
M. Pascal Hémon	Directeur de thèse
M. Yann Doutreleau	Invité

Table des matières

Remerciements **7**

Introduction **9**

1 Le flottement d'un drapeau **13**
1.1 Les faits expérimentaux . . . 14
1.1.1 Dispositif expérimental . . . 14
1.1.2 Une forte influence des dimensions . . . 15
1.1.3 La bistabilité qui complique les mesures . . . 16
1.1.4 Déformées et nœuds . . . 18
1.1.5 Changement de matériau . . . 20
1.1.6 L'effet du vent sur les déformées . . . 21
1.2 Le minimum d'ingrédients . . . 23
1.2.1 Le scénario de type Kelvin-Helmholtz . . . 23
1.2.2 Le drapeau au repos . . . 26
1.2.3 La déstabilisation par le vent . . . 28
1.3 Analyse de stabilité . . . 31
1.3.1 Les implications de la relation de dispersion . . . 31
1.3.2 Étude naïve de l'instabilité globale . . . 33
1.3.3 Solution numérique . . . 36
1.3.4 Proposition d'un modèle tridimensionnel élémentaire . . . 39
1.4 Comparaison modèle-expériences . . . 41
1.4.1 Le flottement au seuil de l'instabilité . . . 42
1.4.2 Le flottement au-delà du seuil de l'instabilité . . . 43
1.4.3 Discussion de deux hypothèses fortes . . . 44
1.4.4 Et le marque-page ? . . . 45

2 Les efforts générés par un drapeau **47**
2.1 Enjeux . . . 48
2.2 Mesure des fluctuations de traînée et de moment . . . 50
2.2.1 Dispositif expérimental . . . 50
2.2.2 La forte influence de la longueur du drapeau . . . 52
2.2.3 L'effet du vent sur les efforts . . . 54
2.2.4 Analyse fréquentielle . . . 58
2.2.5 Les "claquements" des drapeaux . . . 59
2.3 Analyse de la traînée générée par le drapeau . . . 61
2.3.1 Coefficient de traînée moyenne . . . 61
2.3.2 Coefficient de traînée instationnaire . . . 62
2.3.3 Confrontation aux modélisations existantes . . . 62

2.4 Analyse du moment généré par le drapeau . . . 65
2.4.1 Propriétés du moment . . . 65
2.4.2 Solution numérique en termes de coefficient de moment . . . 66
2.4.3 Comparaison modèle-expériences . . . 68
2.5 Structure spatio-temporelle des déformées . . . 70
2.5.1 Déformée numérique : discrétisation de Galerkin . . . 70
2.5.2 Déformée expérimentale : B.O.D. en soufflerie . . . 70
2.5.3 Couplage entre deux structures spatio-temporelles . . . 72

3 Couplage d'un drapeau avec un mât-oscillateur 75
3.1 Enjeux . . . 76
3.2 Le couplage vent-drapeau-mât en soufflerie . . . 79
3.2.1 Dispositif expérimental . . . 79
3.2.2 Exemple d'un drapeau en papier : phénoménologie . . . 82
3.2.3 Exemple d'un drapeau en acier : reproductibilité . . . 86
3.3 Les effets de la longueur du drapeau . . . 88
3.3.1 Accrochages successifs au seuil de l'instabilité . . . 88
3.3.2 La déstabilisation du drapeau favorisée par le couplage . . . 90
3.3.3 Au-delà du seuil : la largeur de l'accrochage fréquentiel . . . 90
3.4 Paramétrage du mât au seuil de l'instabilité . . . 92
3.4.1 Comment fixer la fréquence naturelle du mât ? . . . 92
3.4.2 Effet de l'inertie du mât . . . 93
3.4.3 Effet de la raideur du mât . . . 94
3.4.4 Effet de l'épaisseur du drapeau . . . 95
3.4.5 Quid de la puissance mécanique ? . . . 96
3.5 Éléments de modélisation . . . 98
3.5.1 Les indices de l'analyse dimensionnelle . . . 98
3.5.2 Écriture du problème couplé linéarisé . . . 99
3.5.3 Modèle simplifié : excitation-réponse . . . 101
3.5.4 Vérification des ordres de grandeur . . . 102
3.5.5 Comparaison modèle-expériences . . . 104

Conclusion 107

A Propriétés des matériaux 111
A.1 Les matériaux utilisés . . . 111
A.2 Méthodes de détermination de E . . . 111
A.2.1 Par mesure de la fréquence naturelle . . . 111
A.2.2 Par essai de traction . . . 112
A.2.3 Par flambage . . . 113

B Discrétisation de Galerkin 115
B.1 La quantité recherchée . . . 115
B.2 Décomposition sur les modes propres de poutre . . . 115
B.3 Discrétisation de l'équation différentielle . . . 116
B.4 Une convergence rapide . . . 117

C Balance aérodynamique : dimensionnement et étalonnage **119**
C.1 Motivations . . . 119
C.2 Relations cinématiques idéales . . . 120
C.3 Prise en compte des défauts cinématiques . . . 121
C.4 Validation de l'étalonnage . . . 122
C.5 Un couplage évité entre la balance et les drapeaux . . . 122

D Sur la rupture des drapeaux **123**
D.1 Motivations . . . 123
D.2 Expériences de rupture . . . 124
D.3 Surestimation de la contrainte à la rupture . . . 125

E Détection du flottement chaotique **127**
E.1 Motivations . . . 127
E.2 Loi d'extremum généralisé et récurrences . . . 128
E.3 Algorithme de détection du chaos . . . 129
E.4 Résultats et comparaison à l'évolution spectrale . . . 130
E.5 Limites de la méthode . . . 131

Bibliographie **133**

Merci !

Alors que j'écris ces lignes, le manuscrit est rédigé et la soutenance de thèse est passée. Je souhaiterais en quelques mots vous remercier, vous qui avez été acteur ou spectateur de ce travail.

Je voudrais commencer par remercier mes encadrants Pascal Hémon et Xavier Amandolese de m'avoir confié un sujet de recherche aussi passionnant, un sujet de la vie de tous les jours à la fois fondamental en science et appliqué à la promotion des énergies renouvelables. J'espère que vos profondes qualités d'expérimentateurs ont un peu déteintes sur moi. Merci pour tous vos conseils et pour vos idées neuves. Pascal, merci d'avoir partager avec moi ta motivation de communiquer avec le grand public, en particulier lors des évènements "Nuit des Chercheurs" chaque année avec les élèves des collèges et lycées locaux. Xavier, merci pour tes conseils pédagogiques, et merci de m'avoir permis d'enseigner l'aérodynamique à tes côtés, avec ta passion des expériences originales.

Un grand merci à l'École Doctorale de l'X, à la DGA et à la DRIP de nous faire confiance pour mener des projets innovants.

Merci à Christophe Eloy et à Vincent Denoël d'avoir accepté d'être rapporteurs de mon travail avec beaucoup de soin. Merci pour la qualité de vos rapports, riches de remarques et de suggestions. Je souhaite remercier Olivier Doaré pour nos discussions dans le RER B de Paris, dans les rues de Dublin et dans les piscines de San Diego ! Merci pour ton humilité et pour tes nombreux conseils ces dernières années. C'est un grand honneur pour moi que tu aies présidé ma soutenance de thèse. Je remercie vivement Benoît Roman d'avoir accepté d'examiner mon travail dans un contexte inhabituel d'interactions fluide-structure. Merci pour ton regard neuf et enrichissant. Merci également pour l'organisation des évènements géniaux du GDR MéPhy de ces dernières années.

De nombreuses personnes ont permis à mon sujet et à moi-même de progresser ces trois dernières années. Je tiens à commencer par remercier toute l'équipe du LadHyX, autant pour leur assistance administrative et technique que pour la variété des discussions scientifiques qui s'y déroulent. Parmi les anciens du laboratoire, Olivier Doaré et Cécile Lemaitre ont créé le code de calcul numérique initial que j'ai adapté au Chapitre 1 de cette thèse : merci de m'avoir accompagné. Aussi, Sébastien Michelin et Emmanuel de Langre m'ont permis de trouver de nombreux repères théoriques et numériques : merci infiniment pour nos échanges et pour votre disponibilité.

Je souhaite remercier chaleureusement mes voisins de bureau (éternels ou éphémères) : Yifan Xia pour nos aller-retour expérience/numérique et pour son soutien pendant la rédaction, Davide Faranda et Paul Manneville pour les encouragements à réfléchir au chaos. À ce sujet, merci à Patrick Tawagi pour le livre déclic de James Gleick ! À Gaétan Lérisson pour

son enthousiasme à ce propos. Et à Cyril Touzé pour ses nombreux conseils avisés. Je souhaite également remercier Julien Diener, Clément Grouthier et Loic Tadrist de m'avoir aidé dans mon projet d'adaptation de la toolbox matlab Chène-Roseau pour les drapeaux.

Les idées les plus folles venaient souvent du "préfa" voisin ! Merci du fond du cœur de m'y avoir accueilli les six premiers mois de mon arrivée sur le plateau de Saclay. Un merci tout particulier à Alexandre Ponomarenko pour son accompagnement qui n'a pas cessé depuis ! À Caroline Cohen et à Baptiste Darbois-Texier pour avoir commandé le poisson volant que je rêvais de voir voler (!) et pour l'azote liquide sur les bulles de savon ! Merci à Adrien Benusiglio pour la recherche des lois d'échelle partout, et pour les calculs improvisés à l'aéroport d'Atlanta lorsque notre Boeing était cassé !

Merci à Christophe Clanet pour son amitié, sa rigueur humaine et sa chaleur scientifique !

Puissent tous les permanents du LadHyX, doctorants, post-doctorants, visiteurs, stagiaires et étudiants trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

À plusieurs reprises, le matériel de qualité auquel nous avons eu accès dans nos salles d'expériences a été fourni gracieusement par des acteurs extérieurs au laboratoire que je souhaite aussi profondément remercier. Merci à Michel Febvet et à Pierre Beranger de Clairefontaine pour la collection de feuilles de papier et pour les détails de leur fabrication. Merci à Guillaume Puel et à Eric Perrin du laboratoire MSSMat (à l'École Centrale Paris, ma précédente maison) pour le prêt de la machine de micro-traction permettant la mesure précise des coefficients élastiques. Merci à Benoît Roman et à Jérémy Hure du PMMH (ESPCI) pour le polypropylène de l'Annexe E de cette thèse. À l'École Polytechnique, William Gilbert et Ali Bodzetine (TREX) ont beaucoup contribué à la réussite du montage décrit au Chapitre 3. Je souhaite aussi vous remercier tous les deux pour vos rôles dans l'enseignement expérimental. Parmi les personnels de l'École, je suis également très reconnaissant envers Michel Multan (BCX) pour son travail fantastique à la bibliothèque (permettant la consultation d'ouvrages très anciens ou rares). Enfin, merci à Arnaud Antkowiak et à Régis Wunenburger de l'Institut d'Alembert (UPMC) pour leurs encouragements pendant les dernières étapes de cette thèse.

Parce qu'ils m'ont tous soutenu à leur manière ces dernières années, des pensées affectueuses sont également destinées aux amis de Vesoul, Besançon, Paris, Bogota, Tokyo et à ma famille. Soyez sûr qu'il y a aussi un peu de vous dans ma thèse !

Mon plus tendre спасибо pour Karina et son doux soutien.

Emmanuel, à Paris (2015)



Introduction

"L'enseigne ou le drapeau chez les Romains, n'étoit d'abord qu'une botte de foin ; puis on le fit ensuite de drap, d'où vient peut-être, dit d'Ablancourt, le mot de drapeau. Dans les différents royaumes de l'Europe il est de taffetas, attaché à une espèce de lance ou de pique d'environ dix pieds de longueurs" (Diderot & d'Alembert, 1772). Nous sommes à la fin du XVIII^{ème} siècle et l'Encyclopédie réalise l'idéal des Lumières "tout connaître" grâce à une compilation inédite du savoir de son époque. Les drapeaux d'aujourd'hui sont encore faits d'un morceau de tissu, le plus souvent rectangulaire, attaché librement à un mât rigide comme sur la Figure 1.

La "raison d'être" des drapeaux est vraisemblablement leur faculté d'attirer notre attention (Guéguen, 2012). Ainsi, les grandes étapes de notre histoire ont souvent été volontairement marquées par des drapeaux, à l'instar de celui déposé sur la Lune le 20 juillet 1969 pendant la mission Apollo 11 (Platoff, 1993).

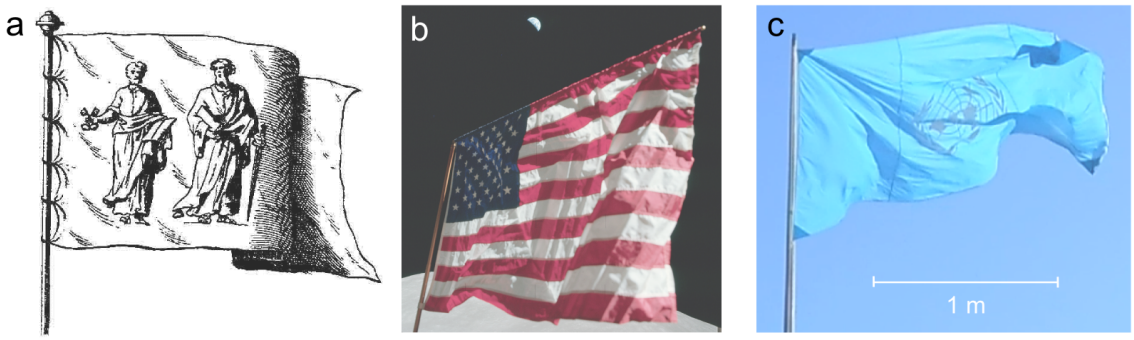


Figure 1 – Drapeaux d'hier et d'aujourd'hui. ***a :*** *L'un des pavillons de la marine répertoriés par Diderot & d'Alembert en 1772.* ***b :*** *Deux-cents ans plus tard, en 1972 : le dernier drapeau en date laissé sur la Lune (mission Apollo 17) avec la Terre visible en arrière-plan. Une tige horizontale maintient ce drapeau pré-courbé.* ***c :*** *Un drapeau de la vie de tous les jours qui se confond ici avec le ciel de Rome en 2012.*

Si les drapeaux attirent tant notre attention, c'est principalement parce qu'ils sont en mouvement (Figure 2). En effet, au-delà d'une vitesse de vent critique et grâce à l'apport continu d'énergie du vent, ils s'organisent dans un état dissipatif qu'ils maintiennent comme le ferait un système biologique (Thompson, 1942). Au final, cette organisation donne lieu à un état instationnaire qui se substitue à l'équilibre, nous parlons alors d'instabilité de flottement. Les mécanismes responsables de cette instabilité et le comportement des drapeaux au-delà du seuil du flottement sont au cœur de la présente étude. Nous nous intéresserons également à une configuration de drapeau couplé favorisant la récupération d'énergie du vent.

Les premières études portant sur le flottement des drapeaux nous sont parvenues d'analogies dans des domaines extrêmement variés. À titre d'exemples :

– en 1878, Rayleigh remarque que l'instabilité des jets liquides permet d'expliquer l'instabilité des voiles de bateaux (le faseillement) et des drapeaux,
– en 1930, Fairthorne note qu'il est possible d'étudier la traînée des banderoles publicitaires tractées par avion à l'aide de drapeaux placés en soufflerie,
– en 1940, dans l'étude comparative "Flatterschwingungen von Überfallstrahlen und Fahnen"[1], Peters décrit l'instabilité des nappes liquides par analogie avec un drapeau qui flotte.

Puis le drapeau est apparu comme un système modèle pour l'étude des interactions fluide-structure, telle l'instabilité du tuyau d'arrosage (voir "l'onde du 4ème ordre de fanion" de Bourrières, 1969 ; Païdoussis, 1998 ; Doaré, 2001), le flottement des algues (Koehl, 1977 ; Coene, 1992), le mécanisme du ronflement pendant le sommeil (Huang, 1995 ; Balint & Lucey, 2005), et plus récemment les instabilités rencontrées par les imprimeurs lors de la circulation rapide des feuilles de papier (voir Watanabe *et al.*, 2002a,b).

Dès lors, la majorité des études fondamentales ont visé à préciser les vitesses de vent au-delà desquelles les drapeaux sont déstabilisés (voir les revues de Païdoussis, 2004 ; Shelley & Zhang, 2011). Le cas approché des filaments (drapeaux à une dimension) dans les films de savon a accompagné l'étude des drapeaux tridimensionnels avec les travaux de Zhang *et al.* (2000) ; Farnell *et al.* (2004a,b) ; Sawada & Hisada (2006) ; Jia *et al.* (2007) ; Jia & Yin (2008) ; Ristroph & Zhang (2008).

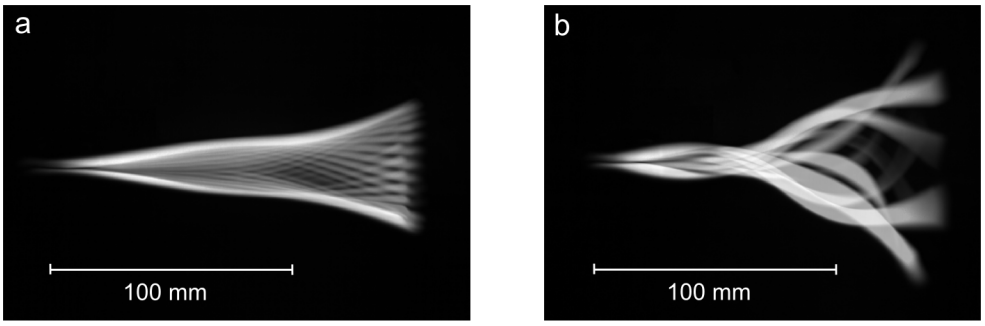


Figure 2 – Superpositions de photographies d'un même drapeau (ici en papier) encastré sur le même mât et soumis à des vitesses de vent différentes en soufflerie : respectivement ***(a)*** *8.4 m/s et* ***(b)*** *15.4 m/s. Le vent vient de la gauche et va vers la droite.*

Actuellement, l'étude des instabilités de flottement présente un intérêt double. D'une part, il s'agit de comprendre ces instabilités pour les éviter, comme dans le cas des flottements de l'industrie aéronautique ou du génie civil (voir Blevins, 1990 ; Fung, 1993 ; Naudascher & Rockwell, 2005). D'autre part, il s'agit de pouvoir provoquer ces instabilités et de les maintenir, si l'objectif est de réaliser des dispositifs de récupération d'énergie. Ce contexte est celui dans lequel nous travaillerons : tirer profit de systèmes mécaniques auto-oscillants pour moissonner de l'énergie renouvelable.

Avec les drapeaux, deux stratégies sont envisageables dans l'objectif de récupérer de l'énergie du vent. La première repose sur la déformation de drapeaux piézoélectriques (voir par exemple Doaré & Michelin, 2011 ; Dunnmon *et al.*, 2011 ; Giacomello & Porfiri, 2011 ; Xia, 2012 ; Singh *et al.*, 2012 ; Akcabay & Young, 2012 ; Michelin & Doaré, 2013). La seconde repose sur le déplacement des drapeaux (voir Gibbs et al, 2012 ; Stone *et al.*, 2013 ; Howell & Lucey, 2014 ; Bae *et al.*, 2014). Ces études très récentes répondent aux demandes urgentes d'innovation en termes de récupération d'énergie renouvelable.

1. Traduction : "Le flottement des fontaines et des drapeaux".

En termes d'efficacité, Xia *et al.* (2013) montrent numériquement l'intérêt d'un couplage fréquentiel fort entre le drapeau et le circuit électrique associé. En effet, la proximité des fréquences naturelles mécaniques et électriques mène à un phénomène d'accrochage fréquentiel, plus robuste qu'une résonance, et déjà observé dans le domaine des vibrations induites par détachement tourbillonaire (voir Williamson & Govardhan, 2004). Par analogie, nous chercherons les conditions d'un couplage fort entre un drapeau et son propre mât de type oscillateur mécanique élémentaire.

Nous étudierons la dynamique des drapeaux couplés à un oscillateur. Notre point de départ sera la dynamique des drapeaux ayant un mât encastré, puis nous caractériserons les conditions requises pour obtenir un couplage fort entre un drapeau et son mât-oscillateur.

Notre domaine d'étude est précisé par le diagramme de la Figure 3. Nous nous restreindrons aux drapeaux rigides, restant "droits" aux faibles vitesses de vent. Dans ce domaine d'étude, l'instabilité de drapeau peut se voir comme une compétition entre les forces fluides et le rappel élastique du drapeau (Eloy *et al.*, 2007).

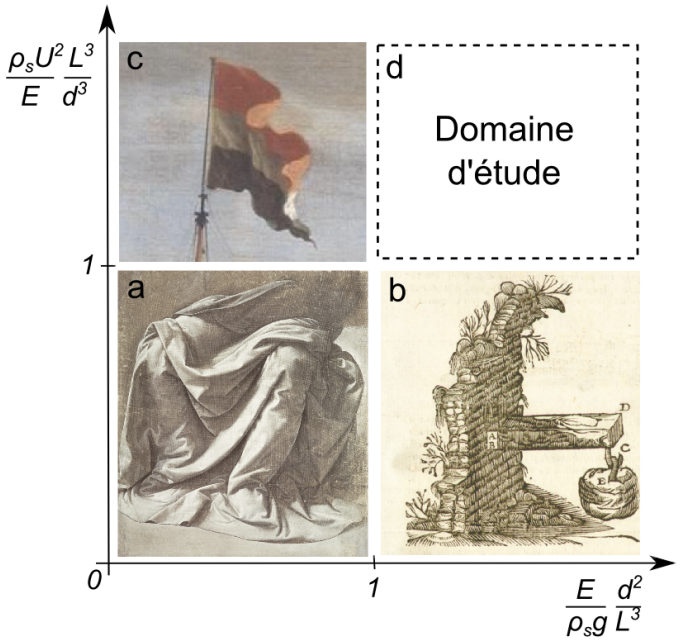


Figure 3 – Draperies et drapeaux. ***a :*** *Domaine des draperies ("Draperie pour une figure assise" de Léonard de Vinci, 1470). Voir par exemple les travaux de Cerda et al. (2004) sur les drapés et de Vandeparre et al. (2011) sur les rideaux.* ***b :*** *Le domaine des grandes rigidités élastiques correspond aux poutres (illustration de Galilée, 1638). Ce sera notre limite aux faibles vitesses de vent.* ***c :*** *Le domaine des drapeaux souples ("Le Gouden Leeuw avant Amsterdam" par Willem Van De Velde en 1686) nécessite de prendre en compte la tension induite par la gravité ce qui disymétrise le problème. Hœpffner & Naka (2011) montrent que cette situation génère des ondes obliques.* ***d :*** *Le domaine constitué des drapeaux rigides, ne flambant pas sous leur propre poids (Prandtl, 1899 ; Timoshenko, 1963) et déformable par le vent (de Langre, 2008). Les nombres sans dimensions ont seulement une valeur indicative :* L *et* d *sont la longueur et l'épaisseur typique de l'objet,* ρ_s *et* E *sa masse volumique et son module d'élasticité,* U *est la vitesse du vent.*

Organisation du manuscrit

Le Chapitre 1 aura deux objectifs. D'une part, il est dédié aux rappels sur la dynamique des drapeaux dans le vent. Nous illustrerons donc les principaux faits expérimentaux par des expériences contrôlées en soufflerie. D'autre part, nous chercherons un modèle minimal permettant de rendre compte des observations expérimentales. En particulier, nous étudierons un modèle de drapeau simplifié et valable pour des drapeaux "élancés" et "trapus".

Au Chapitre 2, nous mesurerons en soufflerie les fluctuations des efforts s'exerçant sur un drapeau qui flotte. Ces efforts seront caractérisés en fonction des dimensions du drapeau et de la vitesse du vent. Nous comparerons les mesures de coefficient de traînée avec les travaux de Fairthorne (1930), Moretti (2003) et Connell (2006). D'autre part, nous développerons un modèle simple pour analyser le moment généré autour du mât du drapeau à partir de la courbure à l'encastrement du drapeau. Ce modèle sera résolu numériquement et comparé aux expériences en soufflerie. Par ailleurs, la structure spatio-temporelle des déformées de drapeau sera précisée par décomposition bi-orthogonale.

Le Chapitre 3 est dédié au couplage entre un drapeau et son mât. Nous nous intéresserons au comportement du système couplé constitué d'un drapeau et d'un "mât-oscillateur" paramétré (Figure 4).

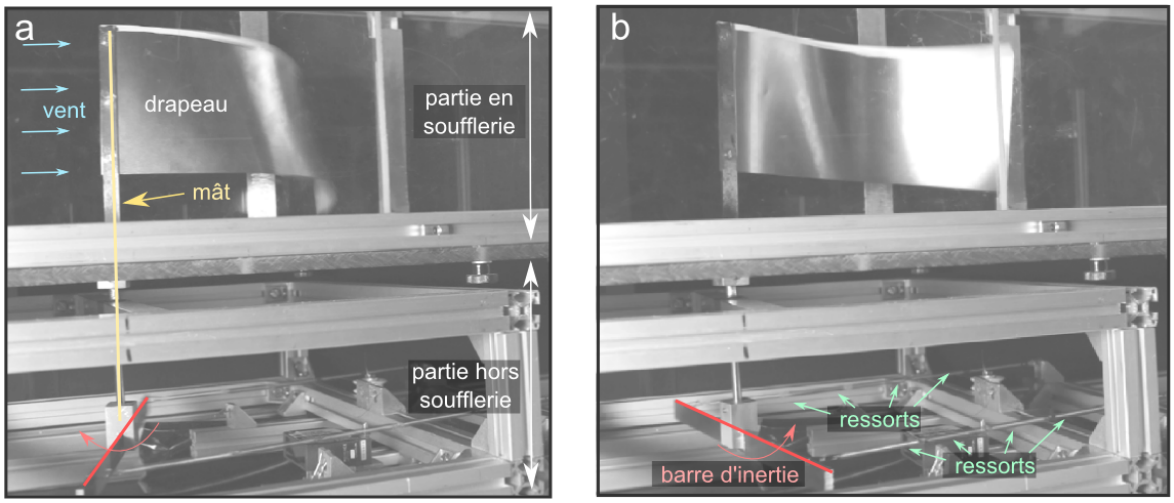


Figure 4 – Dispositif permettant d'étudier le couplage entre un drapeau (ici en acier) et son mât-oscillateur. Le mât est un oscillateur à un degré de liberté, dont l'inertie et la raideur sont ajustés par un jeu de barres d'inertie et de ressorts. L'intervalle de temps entre ***(a)*** *et* ***(b)*** *est de l'ordre de 10 ms.*

Nous utiliserons les données de vitesses critiques du Chapitre 1 et les mesures de moment du Chapitre 2 pour dimensionner des expériences en soufflerie avec des mâts de type oscillateur à un degré de liberté . Un phénomène d'accrochage fréquentiel entre le mouvement du drapeau et celui du mât sera reporté est analysé précisément. Nous caractériserons l'amplitude des oscillations du mât ainsi que la largeur de la zone d'accrochage fréquentiel en fonction des propriétés du vent, du drapeau et du mât-oscillateur.

Chapitre 1

Le flottement d'un drapeau

Sommaire

1.1 Les faits expérimentaux 14
1.1.1 Dispositif expérimental 14
1.1.2 Une forte influence des dimensions 15
1.1.3 La bistabilité qui complique les mesures 16
1.1.4 Déformées et nœuds 18
1.1.5 Changement de matériau 20
1.1.6 L'effet du vent sur les déformées 21
1.2 Le minimum d'ingrédients 23
1.2.1 Le scénario de type Kelvin-Helmholtz 23
1.2.2 Le drapeau au repos 26
1.2.3 La déstabilisation par le vent 28
1.3 Analyse de stabilité 31
1.3.1 Les implications de la relation de dispersion 31
1.3.2 Étude naïve de l'instabilité globale 33
1.3.3 Solution numérique 36
1.3.4 Proposition d'un modèle tridimensionnel élémentaire 39
1.4 Comparaison modèle-expériences 41
1.4.1 Le flottement au seuil de l'instabilité 42
1.4.2 Le flottement au-delà du seuil de l'instabilité 43
1.4.3 Discussion de deux hypothèses fortes 44
1.4.4 Et le marque-page ? 45

Marque-page Partons d'un marque-page découpé dans du papier. Pour réussir à le faire flotter comme un drapeau au vent, quel est le souffle à adopter ? Nous reviendrons sur cet exemple à la fin du chapitre.

Point de départ : l'instabilité d'un drapeau

Un drapeau au repos est généralement fléchi par la gravité, comme sur la Figure 1.1a. En présence d'un peu de vent (stationnaire), il devient droit dans la direction du vent, comme sur la Figure 1.1b. Lorsque le vent est suffisamment fort (tout en restant stationnaire), une oscillation du drapeau apparaît, comme sur la Figure 1.1c : c'est le "flottement".

> *"Just because something is familiar doesn't mean you understand it. That is the common fallacy that all adults make - and no child ever does." (Mahadevan & Shaw, 2008)*

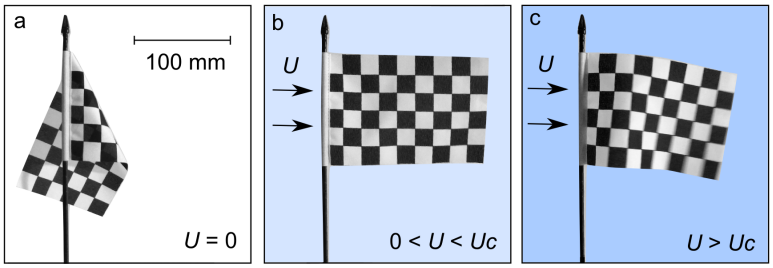


*Figure 1.1 – Comportement d'un drapeau de table en tissu soumis à un vent de sèche-cheveux à la vitesse U. La vitesse critique de flottement est notée U_c. **a :** Au repos, le drapeau est déversé par la gravité. **b :** Un vent stationnaire faible suffit pour quitter le régime déversé et maintenir le drapeau droit. **c :** Un vent de vitesse suffisamment élevée déclenche le flottement.*

Ce changement spontané de comportement peut sembler imprévu : le drapeau est déstabilisé de l'état droit, pour lequel le drapeau est tendu par frottement visqueux. L'objet du présent chapitre est de rappeler un certain nombre de travaux antérieurs décisifs, d'introduire le dispositif expérimental commun aux trois chapitres et de discuter les conditions de la déstabilisation par flottement.

1.1 Les faits expérimentaux

Dans un premier temps, le flottement de drapeau est revisité avec le dispositif expérimental qui sera utilisé au Chapitre 2 et au Chapitre 3. Cela nous permettra de rappeler les éléments de littérature scientifique concernant la vitesse de vent minimale à laquelle le drapeau flotte (qui caractérise le seuil de l'instabilité), la fréquence des oscillations (qui est duale du taux de croissance de l'instabilité) et la déformée du drapeau (afin d'analyser les "transitions de phases" du flottement).

1.1.1 Dispositif expérimental

Afin d'étudier le seuil de l'instabilité de flottement, une soufflerie de section d'essai rectangulaire de largeur 260 mm et hauteur 240 mm est utilisée (Figure 1.2a). Le taux de turbulence de cette soufflerie (l'importance relative des fluctuations temporelles de la vitesse de vent) est faible : approximativement 0.4 % dans la gamme de vitesse de vent $3 - 18$ m/s. Le nombre de Reynolds basé sur la longueur du drapeau auquel nous travaillons est de l'ordre de $\mathrm{Re}_L = 10^4 - 10^5$. La vitesse du vent est notée U, la vitesse critique de flottement est notée U_c et la fréquence des oscillations correspondante est notée f_c. Une caméra rapide VDS

Vosskülher HCC1000 est placée au-dessus de la soufflerie pour observer l'oscillation du drapeau au ralenti (Figure 1.2b). L'enregistrement vidéo se fait avec 462 images par secondes (temps d'exposition de 2.16 ms) pour une résolution de 1024×1024 pixels. En pratique, cela permet de décomposer une période de flottement sur au moins 20 images.

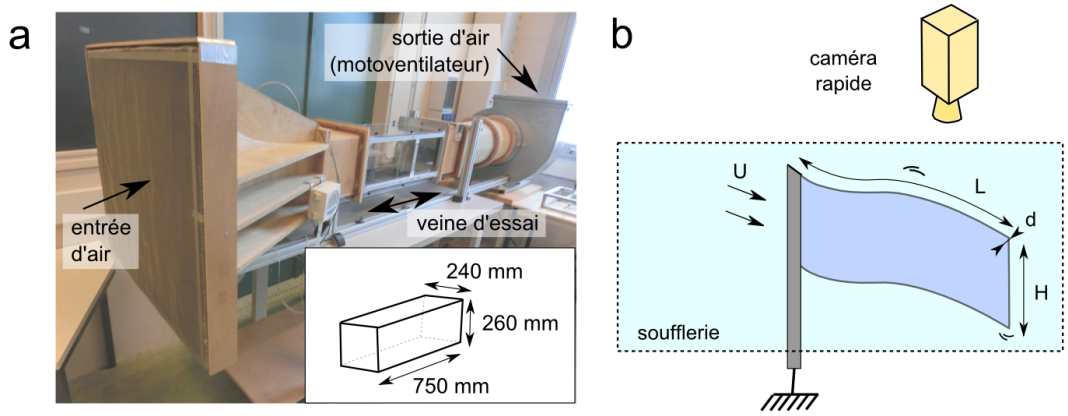


Figure 1.2 – Dispositif expérimental. ***a :*** *La soufflerie de type Eiffel utilisée. Encart : dimensions de la veine d'essai.* ***b :*** *Le drapeau placé en veine d'essai est filmé par dessus avec une caméra rapide. Les notations pour les dimensions sont précisées sur ce schéma.*

Les drapeaux mis en soufflerie sont de longueur L, de largeur H, d'épaisseur d, de masse volumique ρ_s et de module d'élasticité E. Les valeurs de ces paramètres sont répertoriées dans l'Annexe A. Les caractéristiques des drapeaux (taille & matériau) sont choisies pour éviter que les drapeaux au repos soient déversés par la gravité, c'est-à-dire pour éviter le régime déversé de la Figure 1.1a. Cette restriction permet de se dispenser de la prise en compte de la gravité (car l'absence de déversement signifie que le rappel élastique du drapeau est très grand devant les effets de la gravité), mais en contrepartie nous éloigne des drapeaux de la vie de tous les jours qui sont généralement très souples devant les effets de la gravité.

1.1.2 Une forte influence des dimensions

Le flottement dépend fortement des dimensions du drapeau. En effet, de nombreuses expériences indiquent que la vitesse critique U_c décroît avec la longueur du drapeau en suivant une loi de puissance $U_c \sim L^\nu$, avec $-1.5 \leq \nu \leq -1$ (Huang, 1995 ; Yamaguchi *et al.*, 2000b ; Watanabe *et al.* 2002a ; Tang *et al.*, 2003).

En adoptant un protocole similaire à celui de ces expériences, nous faisons varier la longueur L d'un drapeau découpé dans du papier 60 g/m^2 (voir Annexe A). Dans la soufflerie, la vitesse de vent est augmentée par incréments de 0.2 m/s jusqu'à ce que le flottement soit observé. Les vitesses critiques et les fréquences critiques sont reportées sur la Figure 1.3 avec l'indication des meilleurs ajustements en loi de puissance (en échelle logarithmique). D'une part, nous observons que la vitesse critique U_c est inversement proportionnelle à la longueur L du drapeau. Plus le drapeau est long, plus il est instable. D'autre part, pour deux largeurs de drapeaux différentes d'un facteur 10, les vitesses critiques sont similaires (variations de 50 % au plus), suggérant que la largeur de ces drapeaux a un faible impact sur la vitesse critique. Les fréquences critiques suivent une loi de puissance $f_c \sim 1/L^{1.8}$, et sont augmentées d'un facteur 3 lorsque la largeur augmente d'un facteur 10. Le ratio du temps de passage de l'air le long du drapeau L/U_c, sur la période du flottement $1/f_c$ est globalement conservé ($f_c L/U_c = 0.1 - 1$). Cette conservation suggère qu'un phénomène unique est à l'origine du flottement de ces différents drapeaux.

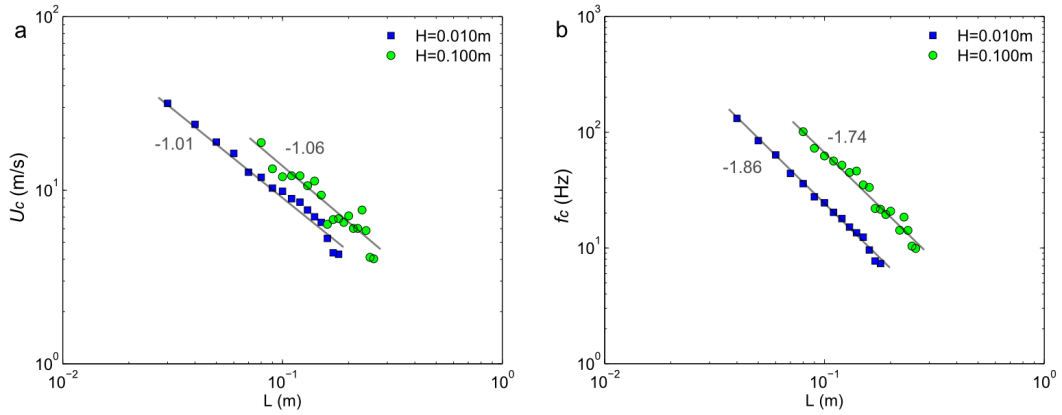


Figure 1.3 – Influence de la longueur L du drapeau pour deux largeurs H différentes. ***a :*** *Variations de la vitesse critique de vent.* ***b :*** *Variations de la fréquence critique.*

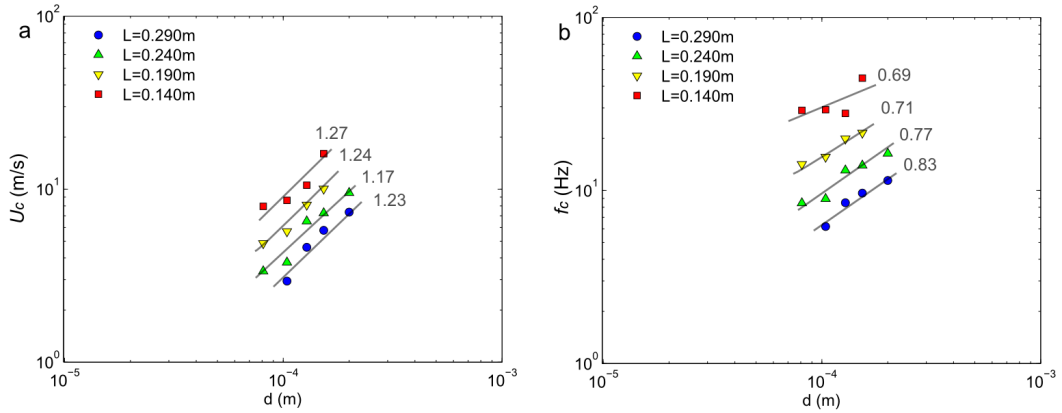


Figure 1.4 – Influence de l'épaisseur d du drapeau pour quatre longueurs L différentes. ***a :*** *Variations de la vitesse critique de vent.* ***b :*** *Variations de la fréquence critique.*

En utilisant des papiers de différents grammages, nous pouvons faire varier facilement une autre des dimensions du drapeau : son épaisseur. La masse volumique et le module d'élasticité sont peu touchés par le changement de grammage (de 60 g/m^2 à 180 g/m^2 ; voir Annexe A). Pour cette expérience, la largeur des drapeaux est fixée à $H = 70$ mm et quatre longueurs différentes sont étudiées. Bien qu'il n'y ait pas d'antériorité d'une telle étude à notre connaissance, nous pouvons nous attendre à ce que l'augmentation d'épaisseur du drapeau (et donc de sa rigidité de flexion) le stabilise et par conséquent fasse augmenter la vitesse critique de flottement. Sur la Figure 1.4, nous observons que U_c croît un peu plus que linéairement avec d, tandis que f_c croît un peu moins que linéairement avec d. Les ingrédients nécessaires à la compréhension de ces tendances seront rassemblés à la Section 1.2 de ce chapitre.

1.1.3 La bistabilité qui complique les mesures

Sur les Figures 1.3a et 1.4a, il est notable que la mesure de U_c est dispersée. Pendant les expériences, il existe en réalité une zone de vitesse de vent où il est possible d'observer l'état "droit" (stable) et l'état "flottant" (instable). Dans cette zone de vitesse de vent, le flottement peut être déclenché arbitrairement, en tapotant le mât par exemple. Cela a été systématiquement observé dans la littérature (voir par exemple Watanabe *et al.*, 2002a dans le contexte des imprimeries où le papier circule à grande vitesse et peut flotter). Ce phénomène

est désigné par hystérésis, bistabilité ou sous-criticité. Un argument simple a été récemment proposé pour le décrire (Tang & Païdoussis, 2007 ; Eloy *et al.*, 2012). Le scénario met en cause des imperfections (quasi inévitables) propres aux expériences. Nous le précisons ci-dessous en trois étapes faisant référence à la Figure 1.5.

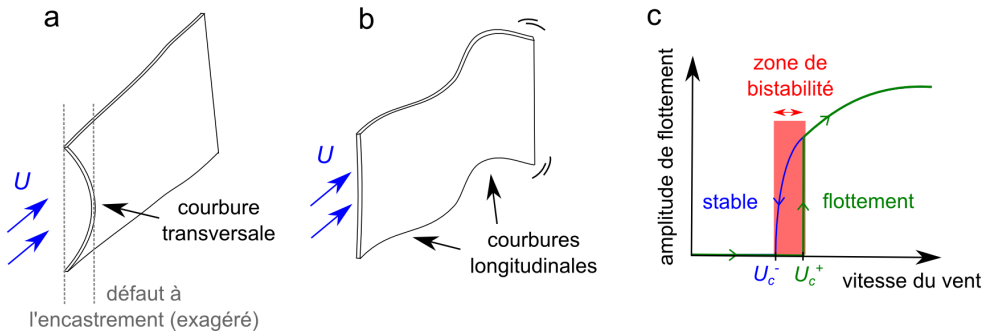


Figure 1.5 – Effet des défauts de planéité. ***a :*** *Un drapeau "droit" possède inévitablement des défauts de planéité à l'encastrement.* ***b :*** *Les défauts à l'encastrement sont aplanis si le drapeau flotte.* ***c :*** *Cycle d'hystérésis en fonction de la vitesse du vent.*

- **(1) Tant que le drapeau est "droit",** une ou plusieurs courbures sont présentes transversalement à cause d'incorrigibles défauts de planéité du drapeau à son encastrement. Cela est représenté de manière caricaturale sur la Figure 1.5a. Pour autant, la courbure de Gauss du drapeau est nulle car le drapeau est "droit" dans la direction du vent.
- **(2) Si le drapeau flotte,** à l'inverse, des courbures longitudinales sont présentes et s'inversent périodiquement, comme sur la Figure 1.5b. La courbure de Gauss reste préférentiellement nulle (Audoly & Pomeau, 2010), les défauts de planéité à l'encastrement doivent donc être aplanis avant l'apparition du flottement. Il en résulte des étirements qui ont un coût énergétique. Les défauts de planéité causent donc globalement un surplus de rigidité et une hausse de la vitesse critique. La borne supérieure de vitesse critique est notée U_c^+ et nous l'obtenons à vitesse de vent croissante comme jusqu'à présent (expériences de la Section 1.1.2).
- **(3) Selon que le drapeau soit "droit" ou bien qu'il flotte,** un surplus de rigidité est donc présent ou non. À vitesse de vent décroissante, le retour à l'état droit se fait par conséquent à une vitesse critique U_c^- plus faible que U_c^+. Cela est schématisé sur la Figure 1.5c. L'écart relatif entre U_c^- et U_c^+ est de l'ordre de 10% dans les expériences de la Section 1.1.2, et il varie entre 10% et 20% dans les travaux de Tang *et al.* (2003) ; Eloy *et al.* (2008).

De récentes expériences sur des drapeaux possédant des défauts d'encastrement volontaires donnent raison à ce scénario (Eloy *et al.*, 2012).

Amélioration de la méthode expérimentale

Une manière d'améliorer la reproductibilité des mesures en soufflerie est de collecter la borne inférieure de vitesse critique notée U_c^-. Par définition, c'est la vitesse de vent permettant le retour à l'état droit lorsque la vitesse du vent décroît. Et d'après l'analyse précédente, la vitesse critique U_c^- est indépendante des défauts d'encastrement. Dans la suite des mesures, sauf mention contraire, c'est la vitesse critique $U_c = U_c^-$ que nous mesurons.

Notons que pendant le flottement des drapeaux, un son typique de matériau froissé est audible, ce qui peut être associé aux événements de flambage périodique des défauts de planéité, de type "snap-through buckling" (voir par exemple Forterre *et al.*, 2004, sur le "bruit

du tonnerre" ; Forterre *et al.*, 2005, sur la Dionée attrape-mouche ; Fargette *et al.*, 2014, pour une application capillaire).

Scénario alternatif

La bistabilité peut également s'expliquer par l'action du sillage en aval du drapeau ("effet mémoire"), comme suggéré par les travaux de Zhang *et al.* (2000) ; Tang & Païdoussis (2007) ; Alben & Shelley (2008) ; Michelin *et al.* (2008). Une estimation numérique est possible dans ce cas, et les auteurs reportent un écart relatif de vitesse critique de l'ordre de $5\ \%$, c'est-à-dire inférieur à l'observation expérimentale ($\simeq 10\ \%$ ou plus).

1.1.4 Déformées et nœuds

En 1968, Taneda propose pour la première fois des chronophotographies de drapeaux suggérant une grande diversité de régime de flottement (voir aussi Uno, 1973). Précisément, cherchons à tirer des informations de la déformation du drapeau au seuil de l'instabilité. Dans un premier temps, des expériences à longueur de drapeau variable sont réalisées (avec du papier 120 g/m^2 d'épaisseur $d = 153\ \mu$m). Auparavant, cette expérience a été réalisée successivement par Huang (1995) ; Yamaguchi *et al.* (2000b) ; Watanabe (2002a). Dans un second temps des expériences à épaisseur variable sont réalisées (avec $L = 160$ mm). La largeur des drapeaux est fixée à $H = 100$ mm. L'observation la plus remarquable est schématisée sur la Figure 1.6 : il existe une valeur critique de l'épaisseur et de la longueur du drapeau pour laquelle nous assistons à une "transition de phase". Nous passons d'un régime contenant un "nœud" de vibration à un régime en contenant deux, ou vice-versa. Ces "nœuds" peu prononcés rappellent fortement les nœuds de vibration d'une corde ou d'une poutre.

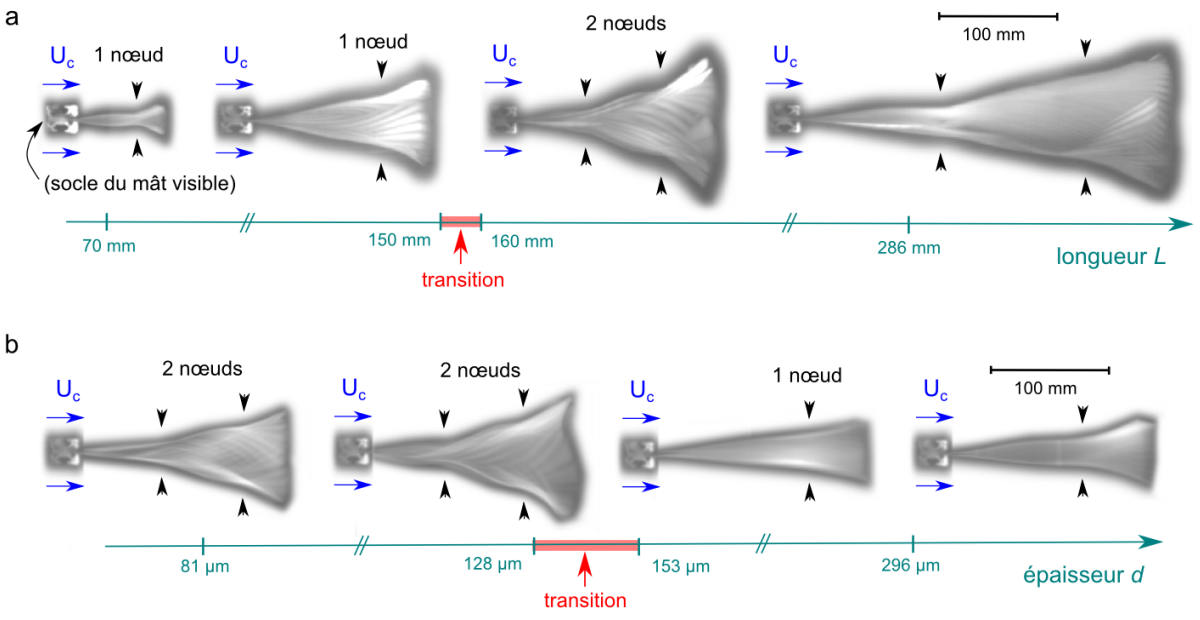


Figure 1.6 – Évolution de la superposition des déformées au seuil de l'instabilité. ***a :*** *Effet d'une augmentation de la longueur L du drapeau. Le nombre de nœud augmente. Le carré visible à la gauche des drapeaux est le socle du mât, qui se situe sous la paroi de la soufflerie.* ***b :*** *Effet d'une augmentation de l'épaisseur d du drapeau. Le nombre de nœud diminue.*

La transition a lieu pour $L = 150 - 160$ mm lorsque $d = 153\ \mu$m est fixe, ou pour $d = 128 - 153\ \mu$m lorsque $L = 160$ mm est fixe. Dans les deux cas, le ratio L/d de transition est

identique et est de l'ordre de 10^3. Ce ratio se met naturellement sous la forme d'un "nombre de masse" M^* d'ordre 1 qui compare les masses d'air et de solide déplacées :

$$M^* = \frac{\rho_a L}{\rho_s d},$$

où ρ_a et ρ_s sont respectivement la masse volumique de l'air et du drapeau. Dans la littérature, cette quantité a été introduite pour l'étude numérique du seuil du flottement par Eloy *et al.* (2007) ; Tang & Païdoussis (2007) ; Michelin *et al.* (2008). Nous verrons que M^* est le bon paramètre de contrôle de l'analyse de stabilité linéaire dans la limite des drapeaux "trapus" (i.e. de grand rapport d'aspect H/L). Notons que les enveloppes de la Figure 1.6 sont similaires à celle observées expérimentalement par Eloy *et al.* (2008), et en accord avec les prédictions numériques de changements d'enveloppe possibles au seuil de l'instabilité par Huang (1995) ; Tang & Païdoussis (2007) ; Michelin *et al.* (2008) ; Michelin & Llewellyn Smith (2010) et plus récemment Huang & Zhang (2013).

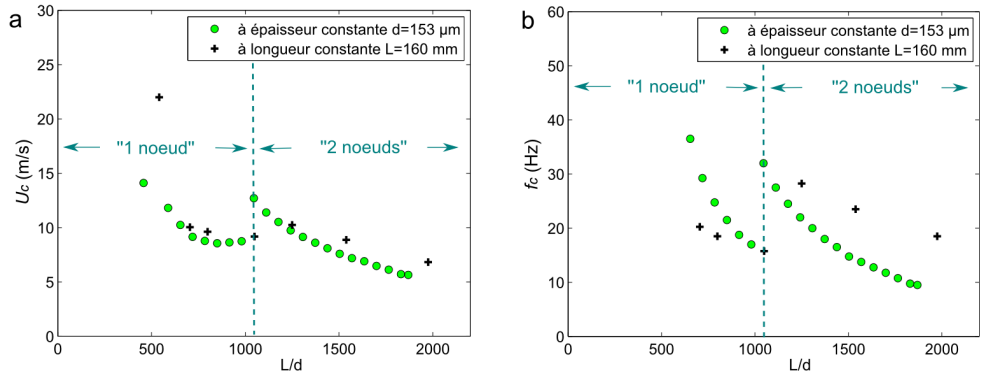


Figure 1.7 – Ratio L/d de la transition entre le régime de flottement à un et deux nœuds. ***a :*** *En termes de vitesse critique de vent.* ***b :*** *En termes de fréquence critique.*

Sur la Figure 1.7a est reportée la vitesse critique en fonction du ratio L/d. Nous observons pour chaque essai une courbe discontinue avec deux branches. Chaque branche correspond à un type de déformée (Figure 1.6), contenant un ou deux nœuds de vibration. La discontinuité de vitesse critique est bien documentée, notamment grâce aux travaux de Yamaguchi *et al.* (2000a,b) ; Eloy *et al.* (2007), et elle apparaît également dans le cas du drapeau suspendu verticalement étudié par Lemaitre *et al.* (2005) ou pour les tuyaux avec écoulement interne étudiés par Païdoussis (1998) ; Doaré & de Langre, (2002). Dans chacune de ces situations, une analyse de stabilité globale (prenant en compte les conditions aux limites) avec un écoulement de fluide parfait (non visqueux) suffit pour prédire un rebroussement de vitesse critique. Nous reviendrons sur l'origine de ce rebroussement de vitesse critique dans la seconde partie du présent chapitre.

Localisation des nœuds

La localisation des nœuds sur les différents drapeaux est reportée sur la Figure 1.8. L'erreur commise lors de la mesure de la position d'un nœud via des superpositions de photographies est de l'ordre de 10%. Nous voyons que les déformées ne sont pas véritablement auto-similaires par variation de L. Néanmoins, il est remarquable que les expériences à épaisseur fixée ou à longueur fixée donnent la même localisation des nœuds en fonction du ratio L/d (Figure 1.8).

Enfin, nous pouvons revenir sur le fait que les nœuds observés sur la Figure 1.6 sont relativement peu prononcés. Cela n'est que très partiellement dû à la torsion du bord de fuite

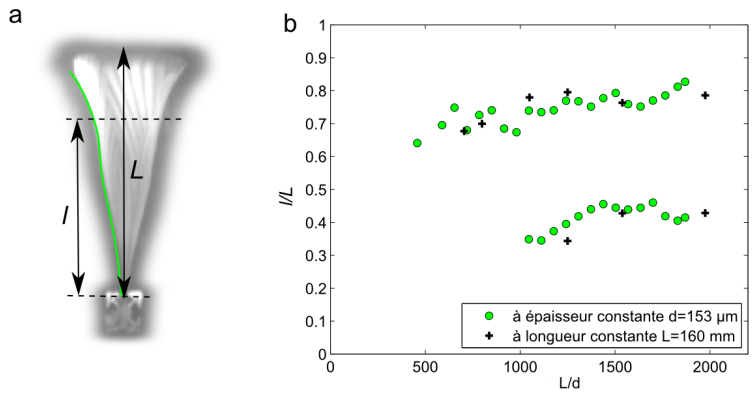


Figure 1.8 – Localisation des nœuds de la superposition des déformées. ***a :*** *Définition de la distance l.* ***b :*** *Effet du ratio L/d. Nous passons du régime à un nœud vers celui à deux nœuds pour $L/d \simeq 1000$.*

que nous observons sur les plus grands drapeaux (rotation au plus de l'ordre de $5°$; voir également Yu *et al.*, 2012). Les "nœuds" peu prononcés (i.e. larges) suggèrent plutôt que la déformée du drapeau comporte des composantes propagatives, à la différence d'un mode de corde ou de poutre classique.

1.1.5 Changement de matériau

Nous pouvons nous demander si le flottement est favorisé ou non par un changement de matériau. Nous reportons sur la Figure 1.9 les vitesses critiques de flottement de drapeaux en plastique et en acier, de sorte que le ratio E/ρ_s (où E est le module d'élasticité et ρ_s la masse volumique) varie d'un facteur 10 (Annexe A). La largeur des drapeaux est fixée à $H = 100\ mm$ et la longueur est variée entre 100 et 300 mm. L'épaisseur des matériaux choisis varie entre 54 μm et 509 μm.

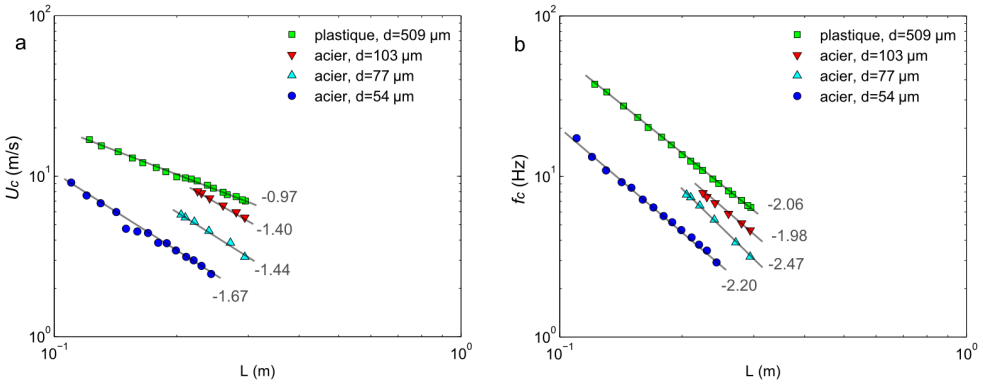


Figure 1.9 – Effets combinés de l'épaisseur du drapeau et de son matériau. ***a :*** *En termes de décroissance de la vitesse critique U_c avec la longueur L du drapeau.* ***b :*** *En termes de décroissance de la fréquence critique f_c avec la longueur L du drapeau.*

Avec les effets combinés de changement d'épaisseur et de matériau, nous voyons sur la Figure 1.9 que la vitesse critique évolue en loi de puissance $U_c \sim L^{\nu}$ où $-1.7 \leq \nu \leq -1$. En parallèle, la fréquence critique évolue en loi de puissance $f_c \sim L^{\mu}$ où $-2.5 \leq \mu \leq -2$. Ces lois simples mais étonnement peu documentées seront justifiées analytiquement à Section 1.3 de ce chapitre.

1.1.6 L'effet du vent sur les déformées

D'un point de vue pratique, ce n'est en général pas la géométrie du drapeau mais plutôt la vitesse du vent qui sert de paramètre de contrôle pour le déclenchement du flottement en soufflerie. Une fois le flottement déclenché, il est maintenu pour des vitesses de vent supérieures. Comme précisé récemment par Chen *et al.* (2014), le mouvement du drapeau s'enrichit pour les grandes vitesses de vent et des transitions de régimes de déformées sont observées. Ces transitions se distinguent a priori de celles discutées à la Section 1.1.4 pour une variation de la géométrie du drapeau au seuil de l'instabilité. Ces transitions ont été mises en évidence expérimentalement il y a plus de 50 ans, par Taneda (1968), sur des drapeaux suspendus verticalement. Elles ont été confirmées par les travaux récents de Eloy *et al.* (2008) ; Bao *et al.* (2010) et Gomes & Lienhart (2013). Aussi, des modèles numériques aptes à les prédire ont été proposés successivement par Fitt & Pope (2001) ; Yadykin *et al.* (2001) ; Connell & Yue (2007) ; Alben & Shelley (2008) ; Michelin *et al.* (2008).

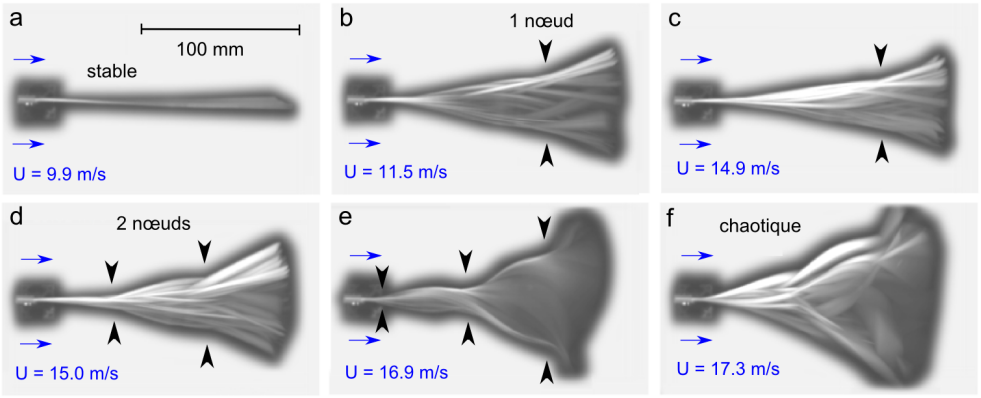


*Figure 1.10 – Évolution de la superposition des déformées avec la vitesse du vent U. Le drapeau est en papier 120 g/m^2 (nommé Drapeau 1 par la suite). Le régime stable de drapeau droit (**a**) est suivi par un régime à un nœud (**b**,**c**), puis deux (**d**), trois (**e**) et un régime chaotique (**f**).*

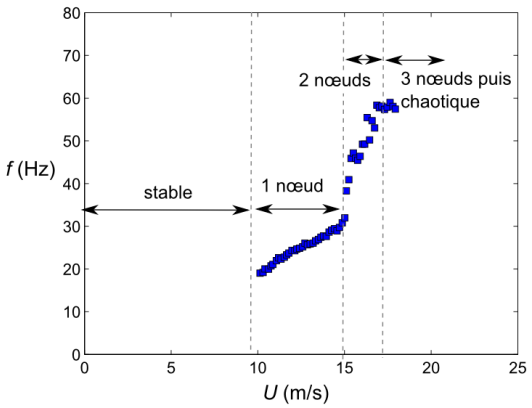


Figure 1.11 – Évolution de la fréquence de flottement avec la vitesse de vent U, pour les différents régimes. Le drapeau en papier 120 g/m^2 (Drapeau 1).

Nous étudions le cas d'un drapeau en papier 120 g/m^2, de largeur $H = 100$ mm et de longueur $L = 140$ mm (nommé Drapeau 1 par la suite). Sur la Figure 1.10, nous voyons que le nombre de nœuds augmente avec la vitesse du vent. Le flottement débute avec un nœud, puis

nous voyons l'apparition d'un second nœud à 15.0 m/s. Un troisième nœud fait son apparition à $U = 16.9$ m/s. Dans chacun de ces régimes, la fréquence évolue quasi-linéairement avec la vitesse du vent, comme montré par la Figure 1.11. Notons que Peters (1940) est probablement le premier à avoir observé ce type de transitions sur des drapeau en fer et en aluminium. En particulier, Peters a identifié un phénomène d'hystérésis sur la vitesse de vent de transition entre les régimes.

À cause de la proximité du régime chaotique, les modifications d'enveloppe obtenues par augmentation de la vitesse du vent sont délicates à étudier expérimentalement (amplitudes et fréquences de moins en moins bien définies, dégradation plastique du drapeau). Numériquement, l'étude est délicate également, car les non-linéarités structurelles et fluides sont exacerbées lorsque la vitesse du vent augmente. Les transitions de régime de flottement par variation de U sont par conséquent plus délicates à décrire que les transitions par variation de géométrie au seuil de l'instabilité.

1.2 Le minimum d'ingrédients

De nombreux modèles ont été proposés ces dernières années pour décrire le comportement des drapeaux, en partant des poutres élastiques (Shelley *et al.*, 2005) ou des cordes tendues (Moretti, 2003) et allant jusqu'au couplage de l'équation de Navier-Stokes (simulation directe) et de l'équation des poutres tendues en grandes déformations (Connell & Yue, 2007). Notre objectif ici est d'obtenir un modèle minimal permettant d'expliquer les observations rappelées à la Section 1.1. Ce modèle sera repris au Chapitre 2 (qui précisera les efforts générés par un drapeau) et au Chapitre 3 (qui introduira le concept d'accrochage fréquentiel "drapeau-mât").

> *"Peu après les expériences sur le mouvement brownien qui lui valurent le prix Nobel, Jean Perrin écrivit que faire de la Physique c'est* expliquer du visible compliqué par de l'invisible simple. *Reprenant cette idée récemment, mon ami Jacques Treiner dit* fabriquer du simple en recherchant de l'identique dans le divers." *(Balibar, 2011)*

Après avoir identifié une source d'instabilité commune entre le flottement de drapeau et des "oscillations" de la vie quotidienne, le comportement d'une poutre élastique sera rappelé, puis nous introduirons le couplage avec le vent.

1.2.1 Le scénario de type Kelvin-Helmholtz

Les vagues selon Helmholtz et Kelvin

Il peut sembler anodin que des "vagues" se forment avec le drapeau solide. Ce mouvement diffère pourtant radicalement d'une oscillation rigide classique, tel un pendule. L'initiation du flottement [1] d'un drapeau doit nous rappeler le mécanisme de formation des vagues sur l'océan imaginé par Helmholtz (1868) et Kelvin (1871) il y a un peu moins de 150 ans (Figure 1.12a).

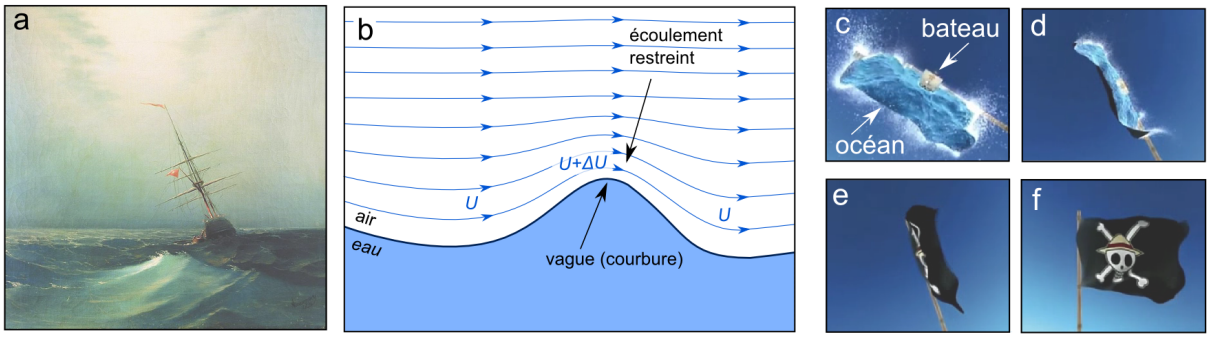


Figure 1.12 – Analogie entre les vagues et les drapeaux. ***a :*** *Peinture d'Ivan Aivazovsky (1876) montrant une vague en formation et des drapeaux au vent.* ***b :*** *Augmentation de la vitesse de l'air au-dessus d'une vague en formation par resserrement des lignes de courant (instabilité).* ***c-f :*** *Les flots de l'océan devenant le flottement d'un drapeau (adapté de One Piece ; Toei Animation).*

Le mécanisme est le suivant [2] : à la crête d'une vaguelette, la section de passage de l'air est localement restreinte, comme sur la Figure 1.12b. Le débit volumique d'air étant conservé (incompressibilité du vent), la vitesse de l'écoulement augmente au-dessus de la vague. Une baisse de pression s'ensuit par moindre accumulation de particules fluides (relation de type

1. L'étymologie de "flottement" suggère l'analogie avec "le mouvement des flots".
2. Depuis, le mécanisme a été plusieurs fois revu (voir par exemple Miles, 1957 ; Phillips, 1977).

Bernouilli), et la vague est aspirée. C'est donc une différence de vitesse qui est à l'origine de ce type d'instabilité (dite de cisaillement). De manière anecdotique, l'analogie vague-drapeau est joliment suggérée par le cinéma d'animation japonais, Figure 1.12c-f : un bateau pirate navigue sur l'océan, et cet océan devient progressivement l'image d'un drapeau pirate.

L'intuition de Rayleigh sur les jets

Au cours de son travail sur les instabilités des jets d'eau [3], Rayleigh (1878) souligne l'analogie entre l'instabilité de cisaillement (dite aussi de Kelvin-Helmholtz) et l'instabilité du drapeau : "Its bearing upon the flapping of sails and flags will be evident". Les courbures d'un drapeau (Figure 1.13a) peuvent se voir comme la surface d'une vague subissant à la fois une aspiration et un appui de la part de l'écoulement.

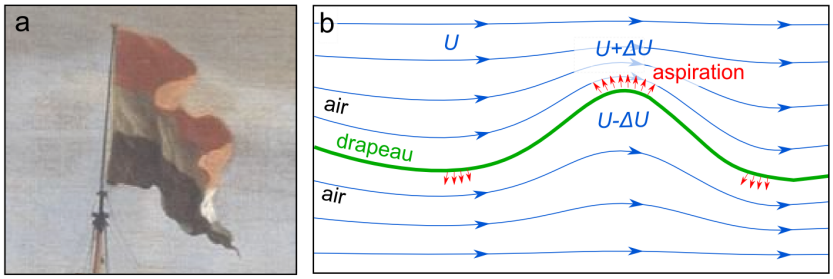


Figure 1.13 – Courbures d'un drapeau. ***a :*** *Détail d'une peinture de Willem Van de Velde, "Le Gouden Leeuw avant Amsterdam", 1686, saisissant un instant intéressant du flottement d'un drapeau.* ***b :*** *Mécanisme d'aspiration des courbures d'un drapeau non borné, analogue aux vagues (Figure 1.12b).*

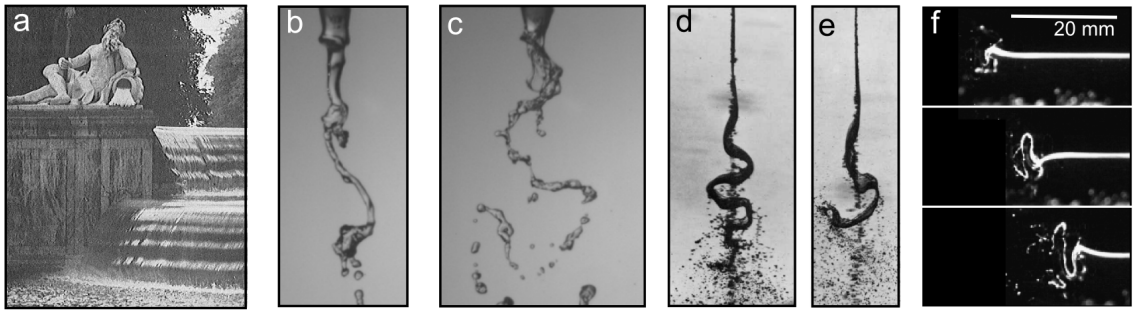


Figure 1.14 – Instabilités relevant partiellement du scénario d'aspiration des courbures de type Kelvin-Helmholtz. ***a :*** *Oscillations de l'écoulement d'une fontaine au parc du Château de Nymphembourg (adapté de Peters, 1940).* ***b,c :*** *Instabilité d'un jet d'eau soumis à un écoulement relatif de 25 m/s et 30 m/s (adapté de Matas & Cartellier, 2010).* ***d,e :*** *Instabilité d'une nappe liquide à faible et fort écoulement relatif (adapté de Crapper et al., 1973).* ***f :*** *Instabilité se produisant lors de la rétractation d'une bulle de savon (adapté de Lhuissier & Villermaux, 2009).*

Le scénario précédent se trouve être extrêmement général et peut s'appliquer à de nombreuses situations d'instabilité de la vie courante, tels que les fontaines de la Figure 1.14a (Peters [4], 1940), les jets d'eau de la Figure 1.14b,c (Matas & Cartellier, 2010), les nappes

3. L'une de ces instabilités étant attribuée à Plateau, 1873

4. Travail intitulé "Flatterschwingungen von Überfallstrahlen und Fahnen", ce que nous pouvons traduire par : "Le flottement des fontaines et des drapeaux". Voir également "Warum flattert die Fahne" de Thoma (1939a).

liquides de la Figure 1.14d,e (Crapper *et al.*, 1973 ; Bremond, 2003), les cloches d'eau (Villermaux & Clanet, 2002) ou les bulles de savon se rétractant comme sur la Figure 1.14f (Lhuissier & Villermaux, 2009). En guise de généralisation, nous voyons que les précédents systèmes (la vague, le jet, le film de savon,...) ont en commun le fait que les courbures sont aspirées sous l'action d'un écoulement relatif (de type cisaillement ; voir également Lamb, 1932 ; Prandtl, 1952).

Limites du scénario "Kelvin-Helmholtz"

En ingénierie aéronautique, une aile d'avion bien conçue courbe l'écoulement qui l'entoure pour créer de la portance, sans pour autant se courber elle-même et rétroagir de manière instable avec l'écoulement. Dans le cas d'un drapeau, l'écoulement courbé fait se courber le drapeau en retour, ce qui courbe davantage l'écoulement, et ainsi de suite. Le scénario d'aspiration des courbures justifie cette instabilité, et il est compatible avec l'observation d'un drapeau flottant en soufflerie, comme représenté sur la Figure 1.15a,b.

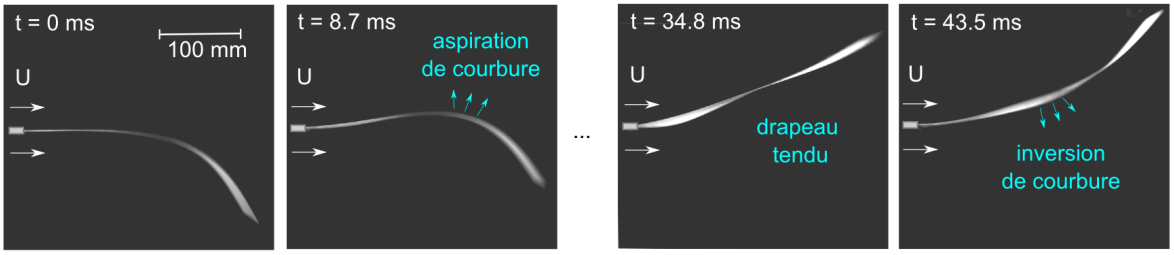


Figure 1.15 – Déformées successives d'un drapeau en soufflerie. Le drapeau est en plastique d'épaisseur $509\ \mu m$*, de longueur L=295 mm et de largeur H=100 mm. La vitesse de vent est* $U = 10.8$ *m/s. L'observation de l'évolution des courbures est compatible avec le scénario de type Kelvin-Helmholtz sur les deux premières images. Ensuite, nous voyons qu'il y a un aller-retour du drapeau.*

Sans surprise, ce scénario reste toutefois pauvre car il suggère l'existence d'une instabilité statique (de type flambage). Et l'aller-retour du drapeau n'est pas prévu. À l'échelle d'une demi période de flottement, nous voyons sur la Figure 1.15c,d que l'aller-retour a lieu à un instant où le drapeau est fortement tendu. L'inextensibilité et la longueur finie du drapeau jouent donc des rôles importants pour expliquer la limitation d'amplitude et l'aller-retour (Argentina & Mahadevan, 2005).

Une seconde limitation du scénario "Kelvin-Helmholtz" est qu'il n'explique pas l'existence d'une vitesse critique de vent non nulle. Les courbures du drapeau devrait être instable quelle que soit la vitesse du vent. Dans les sections suivantes, nous introduisons un ingrédient supplémentaire stabilisant qui est l'élasticité du drapeau.

1.2.2 Le drapeau au repos

Dans un premier temps, nous rappelons l'équation de l'*elastica* qui décrit le comportement d'un drapeau élastique sans vent. Ce calcul est classique (Euler, 1744 ; Landau, 1986, p99) et permet d'insister sur les hypothèses qui sont au cœur de la discussion sur le modèle minimal. Dans un second temps, nous ajoutons la présence du vent "aspirant" les courbures (comme escompté en Section 1.2.1) et menant à une compétition entre la déstabilisation par le vent et la stabilisation par l'élasticité du matériau.

> *"On peut se demander pourquoi, dans les sciences physiques, la généralisation prend volontiers la forme mathématique. [...] c'est parce que le phénomène observable est dû à la superposition d'un grand nombre de phénomènes élémentaires tous semblables entre eux ; ainsi s'introduisent tout naturellement les équations différentielles. [...] Dans les sciences naturelles, on ne retrouve plus ces conditions [...] et c'est pour cela que les naturalistes sont obligés de recourir à d'autres modes de généralisation." (Poincaré, 1902)*

Mouvement d'un drapeau élastique dans le vide

Effectuons un bilan de forces et de moments sur une tranche infinitésimale du drapeau (Figure 1.16a). Sans air et en négligeant le poids propre du drapeau (il suffit que le drapeau soit non déversé par la gravité au repos), l'accélération de la tranche du drapeau de masse $\rho_s H d \delta s$ est reliée aux forces internes $\mathbf{F}_{\text{int}}$ par le principe fondamental de la dynamique [5] :

$$\underbrace{\rho_s H d}_{m_s}\, \delta s \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2}(s,t) = \mathbf{F}_{\text{int}}(s+\delta s,t) - \mathbf{F}_{\text{int}}(s,t).$$

Dans cette expression, $\mathbf{X}$ est un point de coordonnées cartésiennes $(x,y,0)$ sur la ligne neutre du drapeau, s est son abscisse curviligne, et ρ_s est la masse volumique du drapeau (l'indice s signifiant ici "solide"). Nous notons m_s la masse linéique du drapeau. La largeur et l'épaisseur du drapeau sont notées respectivement H et d. Sur la Figure 1.16a, la largeur H est dans la direction normale à la page.

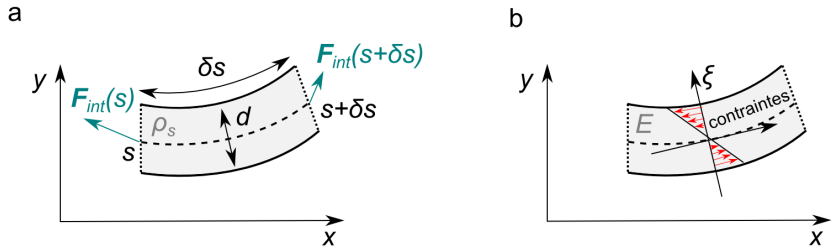


*Figure 1.16 – Raisonnements sur une tranche infinitésimale de drapeau (vu dans l'épaisseur, tel que la largeur H soit dans la direction normale à la page). **a :** Bilan de forces internes. **b :** Hypothèse de contraintes variant linéairement dans l'épaisseur.*

En l'absence de moment extérieur et en négligeant l'inertie de la tranche du drapeau, les moments internes $\mathbf{M}_{\text{int}}$ vérifient simplement :

$$0 = \mathbf{M}_{\text{int}}(s+\delta s,t) - \mathbf{M}_{\text{int}}(s,t) + \mathbf{t}(s,t)\delta s \wedge \mathbf{F}_{\text{int}}(s,t),$$

5. Les forces volumiques comme l'action du poids ont été négligées.

où $\mathbf{t}(s)$ est le vecteur unitaire tangent à la ligne neutre. Dans la limite des petites déformations du drapeau (hypothèse valable aux premiers instants de l'instabilité), nous avons $\mathbf{t}(s) \simeq \mathbf{e}_x$ et $\delta s \simeq dx$. En faisant tendre δs vers 0, nous obtenons au premier ordre sur la direction portée par $\mathbf{e}_y$:

$$m_s \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = -\frac{\partial^2 M_{\text{int}}}{\partial x^2}(x,t), \tag{1.1}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse que $\mathbf{M}_{\text{int}} = M_{\text{int}}\mathbf{e}_z$.

Introduisons une loi de comportement élastique pour le drapeau, avec le modèle classique de Hooke "*Ut tensio, sic vis*"[6] (Hooke, 1678 ; Young, 1845). Le moment interne en un point quelconque du drapeau est l'intégration des moments élémentaires de compression et de tension dans son épaisseur. Cela correspond respectivement au dessus et au dessous de la ligne neutre dans la Figure 1.16b, avec des variations de contraintes supposées linéaires dans l'épaisseur du drapeau. En outre, nous pouvons utiliser que l'allongement relatif à distance ξ de la ligne neutre vaut au premier ordre $\xi \partial^2 y/\partial x^2$ (contribution positive ou négative selon le signe de ξ). Il vient alors, pour un matériau supposé homogène de module d'élasticité E :

$$M_{\text{int}}(x,t) = \int_{-d/2}^{d/2} \underbrace{\xi}_{\text{bras de levier}} \underbrace{\underbrace{E\xi \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)}_{\text{contrainte}} \underbrace{H d\xi}_{\text{surface}}}_{} = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t). \tag{1.2}$$

Dans le membre de droite, nous introduisons le moment quadratique de la section du drapeau $I = Hd^3/12$, avec EI qui est la rigidité de flexion. Ce calcul omet l'effet Poisson (Landau, 1986) qui peut se rajouter a posteriori.

Il est particulièrement intéressant que l'équation (1.2) prédise un moment interne directement proportionnel à la courbure locale $\mathcal{C} \simeq \partial_x^2 y$ (Feynman, 1963). Ce résultat sera utilisé au Chapitre 2 et au Chapitre 3. Par substitution dans l'équation (1.1), nous obtenons l'équation classique des poutres (l'*elastica* linéarisée) :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) + m_s \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0. \tag{1.3}$$

Les solutions harmoniques de cette équation, de la forme $y(x,t) = Y(x)e^{i\omega t}$, s'obtiennent facilement une fois remarqué que les fonctions $Y(x) = \cos \kappa x$, $\sin \kappa x$, $\cosh \kappa x$, et $\sinh \kappa x$ forment quatre solutions indépendantes avec :

$$\kappa = \left(\frac{m_s}{EI} \omega^2 \right)^{1/4}.$$

La solution de l'équation (1.3) contient des fonctions harmoniques et hyperboliques de κx, et la quantité κ prend ainsi le même sens qu'un nombre d'onde. En particulier, à κL fixé, la fréquence naturelle d'oscillation est du type $\omega \sim \sqrt{E/\rho_s} d/L^2$. Il y a donc une forte dépendance de la fréquence naturelle envers la géométrie du drapeau, tout comme les fréquences de flottement observées en soufflerie, à la Section 1.1.2.

Modes propres dans le vide

Dans la situation d'un drapeau encastré-libre, la solution de l'équation (1.3) vérifie les conditions aux limites $Y(0) = 0$ (choix de l'origine), $Y'(0) = 0$ (encastrement), $Y''(L) = 0$ (courbure nulle, i.e. absence de moment) et $Y'''(L) = 0$ (effort tranchant nul). Le calcul

6. Ce que nous pouvons traduire par : "il y a proportionnalité entre les contraintes et les déformations".

des solutions est sans difficultés (combinaison linéaire de quatre solutions indépendantes et vérification des conditions aux limites ; voir Landau, 1986). Les déformées spatiales encastrées-libres s'écrivent :

$$Y(x) = \frac{A}{2}[\cos\kappa x - \cosh\kappa x + \frac{\cos\kappa L + \cosh\kappa L}{\sin\kappa L + \sinh\kappa L}(\sinh\kappa x - \sin\kappa x)], \tag{1.4}$$

où les κL doivent satisfaire une relation transcendante :

$$\cos\kappa L \cosh\kappa L + 1 = 0.$$

Nous avons introduit l'amplitude de flottement A de sorte que $Y(L) = \pm A$. Les premiers modes vérifient $\kappa_1 L \simeq 0.60\pi$, $\kappa_2 L \simeq 1.49\pi$, $\kappa_3 L \simeq 2.50\pi$, ... $\kappa_n L \simeq (2n-1)\pi/2$.

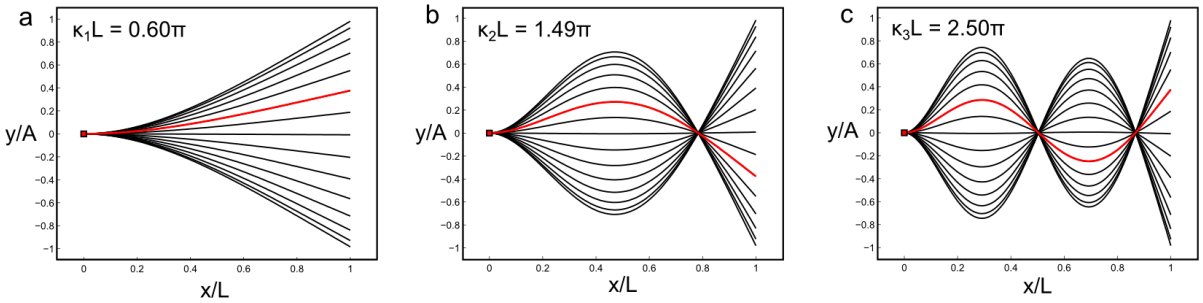


*Figure 1.17 – Les trois premiers modes propres de poutre encastrée-libre, caractérisés respectivement par le nombre d'onde κ_1 (**a**), κ_2 (**b**) et κ_3 (**c**).*

Sur la Figure 1.17, nous traçons les trois premiers modes de poutre encastrée-libre. La présence des nœuds de vibration rappelle les nœuds observés au cours des expériences de la Figure 1.6. Aussi, la position des "nœuds" de la Figure 1.8 correspond approximativement à la position des nœuds associés aux modes n°2 et n°3 (Figure 1.17b et Figure 1.17c). Nous pouvons remarquer que le premier mode (Figure 1.17a) n'est jamais observé expérimentalement sur les drapeaux. Cela est qualitativement raisonnable, car il s'agit du seul mode pour lequel l'aspiration de courbure produirait un rappel vers l'état droit et non vers l'extérieur.

1.2.3 La déstabilisation par le vent

L'air s'écoulant autour du drapeau doit à présent être modélisé. Nous rappelons deux modèles classiques discriminés par le rapport d'aspect H/L du drapeau. Les drapeaux "trapus" ($H/L \gg 1$) sont décrits par un modèle bidimensionnel (Figure 1.18a), tandis que les drapeaux élancés ($H/L \ll 1$) nécessitent un modèle permettant de prendre en compte le contournement du fluide par le dessus/dessous du drapeau, dans la direction transversale (Figure 1.18b).

Modèle de drapeau trapu La démarche classique (Shelley *et al.*, 2005) est d'exprimer que la différence de pression entre chaque côté du drapeau agit comme un forçage de l'équation (1.3), qui s'écrit :

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) + m_s\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = -(p_+(x,t) - p_-(x,t))H,$$

où les notations sont précisées sur la Figure 1.19.

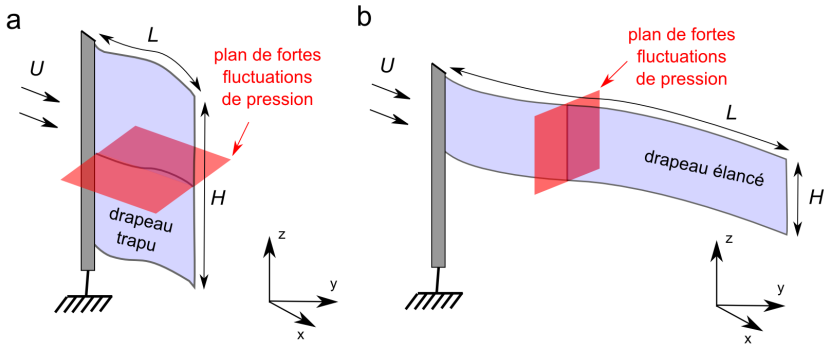


Figure 1.18 – Modèles de drapeau. ***a :*** *Situation d'un drapeau trapu ($\kappa H \gg 1$). Les fluctuations de pression dans la direction z sont négligeables.* ***b :*** *Situation d'un drapeau élancé ($\kappa H \ll 1$). Les fluctuations de pression dans la direction z sont déterminantes.*

Bien que cette formulation puisse paraître naturelle, elle présuppose que la pression soit homogène selon l'axe z, ce qui n'est pas vérifié aux bords du drapeau. Pour normaliser l'équation précédente, nous introduisons le ratio de la vitesse du vent et de la vitesse typique des ondes de flexion $U^* = UL\sqrt{m_s/(EI)}$. Les longueurs sont normalisées via $x^* = x/L$, $y^* = y/A$, et les temps via $t^* = tU/L$:

$$\frac{1}{U^{*2}}\frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*4}} + \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^{*2}} = -M^*\frac{p_+ - p_-}{\rho_a U^2}. \tag{1.5}$$

Dans le membre de droite, nous faisons ainsi apparaître le nombre de masse $M^* = \rho_a HL/m_s$ qui a déjà été rencontré lors de l'analyse de l'évolution des déformées (Section 1.1.4). L'équation (1.5) peut se traiter dans un diagramme (M^*, U^*), comme réalisé par Eloy *et al.* (2007). En particulier, les paramètres M^* et U^* fixent les règles de similitudes à appliquer pour un passage à de plus grandes échelles.

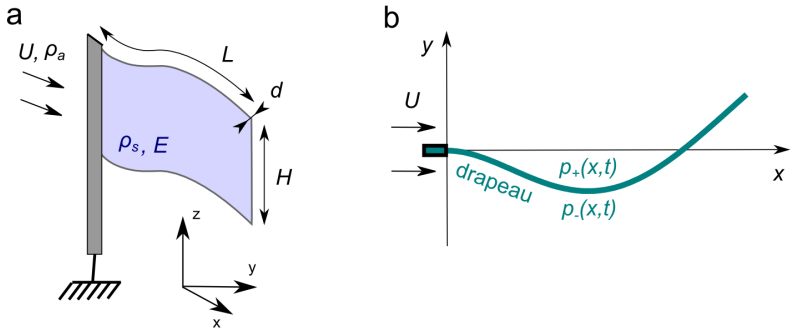


Figure 1.19 – Déstabilisation du drapeau. ***a :*** *Rappel des paramètres associés au vent et au drapeau.* ***b :*** *Situation d'un drapeau trapu : invariance de la pression selon l'axe z (c'est un problème bidimensionnel).*

Le nombre de Reynolds (basé sur L) où nous travaillons étant de l'ordre de $10^4 - 10^5$, les effets visqueux sont négligeables au premier ordre et la pression de chaque coté du drapeau peut être associée à un écoulement à potentiel de vitesse. Cette méthode a été utilisée par Kornecki *et al.* (1976) ou plus récemment Shelley *et al.* (2005). Pour des ondes de type $y(x,t) \sim \exp(-i\kappa x + i\omega t)$, la relation de dispersion suivante est obtenue [7] :

$$EI\kappa^4 - m_s\omega^2 = \frac{2\rho_a H}{|\kappa|}(\omega - U\kappa)^2. \tag{1.6}$$

7. Dimensionnée pour une raison pratique.

Nous parlons d'analyse bidimensionnelle, car malgré les apparences cette expression ne dépend pas de la largeur H du drapeau (Figure 1.18a). Expérimentalement, cette situation bidimensionnelle peut être obtenue en rapprochant suffisamment les parois de la soufflerie vers le dessus et le dessous du drapeau (voir par exemple Aurégan & Depollier, 1995 ; Doaré *et al.*, 2011 ; Zhang *et al.*, 2014). L'idée est d'empêcher qu'un écoulement contourne le drapeau pour équilibrer la pression.

Modèle de drapeau élancé

Lorsque le drapeau est élancé dans la direction du vent, comme sur la Figure 1.18b, les fluctuations de pression dans la largeur du drapeau (i.e. l'axe z) ne sont plus négligeables (Lemaitre *et al.*, 2005). Cette situation des corps élancés dans un écoulement à été étudiée par Munk (1924) et approfondie par Lighthill (1960) dans le contexte de la nage des poissons. L'échelle spatiale typique des gradients de pression sur un drapeau élancé est la largeur du drapeau, par opposition à la longueur d'onde du flottement pour un drapeau trapu.

Le modèle de force réactive proposé par Lighthill (1960) repose sur le calcul de la masse d'air linéique $m_a = \pi\rho_a H^2/4$ qui est déplacée par le drapeau flottant (masse ajoutée). Dans ce cadre, l'équation (1.5) n'est plus valable et le forçage par le vent se fait principalement par réaction contre l'accélération convective de la masse ajoutée $m_a = \pi\rho_a H^2/4$:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_s\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -m_a\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 y \tag{1.7}$$

$$= -m_a\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2m_a U\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial x} - m_a U^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1.8}$$

Le vent génère donc trois phénomènes [8] :
- une "inertie ajoutée" $m_a\partial_t^2 y$ qui abaisse les fréquences propres du drapeau au repos,
- un "amortissement ajouté" que nous nommons "terme de Coriolis" (Païdoussis, 1998) puisqu'il est proportionnel à la vitesse de rotation du drapeau $\Omega \simeq \partial_t(\partial_x y)$. Son rôle est crucial car il introduit une différence de phase spatiale et permet d'envisager des interactions entre modes,
- une "raideur ajoutée" associée à la portance générée par la courbure $\mathcal{C} \simeq \partial_x^2 y$ (Section 1.2.1). Avec les données des expériences ($U_c \sim 10$ m.s^{-1}, $\omega_c \sim 10$ Hz, $L \sim 10^{-1}$ m), nous voyons que le terme de raideur ajoutée domine largement les deux autres.

Pour des ondes de type $y(x,t) \sim \exp(-i\kappa x + i\omega t)$, le modèle de drapeau élancé donne lieu à la relation de dispersion suivante :

$$EI\kappa^4 - m_s\omega^2 = m_a(\omega - U\kappa)^2. \tag{1.9}$$

Par comparaison, dans l'équation (1.6) du modèle de drapeau trapu, le rôle de m_a est joué par $2\rho_a H/|\kappa|$. Les deux modèles se rejoignent lorsque $H\kappa \sim 1$, c'est à dire lorsque la longueur d'onde du flottement est de l'ordre de la largeur de drapeau. L'usage du modèle de drapeau élancé est pleinement justifié lorsque $\kappa H \ll 1$, tandis que le modèle de drapeau trapu l'est lorsque $\kappa H \gg 1$. Au cours des expériences en soufflerie, nous avons fait varier κH entre 0.2 et 8, nous sommes donc aux frontières de validité des deux modèles. À la Section 1.3.4, nous verrons comment réunir astucieusement les modèles de drapeaux élancés et trapus en un seul.

8. L'adimensionnement de l'équation (1.8) par $U^* = UL\sqrt{m_s/(EI)}$, $x^* = x/L$, $y^* = y/A$ et $t^* = tU/L$ donne $(1/U^{*2})\partial^4_{x^{*4}}y^* + \partial^2_{t^{*2}}y^* = -(m_a/m_s)(\partial_{t^*} + \partial_{x^*})^2 y^*$.

1.3 Analyse de stabilité

Une analyse de stabilité linéaire peut être conduite en s'inspirant la démarche de Coene (1992) ; Triantafyllou (1992). La relation de dispersion de l'équation (1.9), obtenue dans le cadre des drapeaux élancés, est prise comme point de départ.

1.3.1 Les implications de la relation de dispersion

La relation de dispersion de l'équation (1.9) caractérise les solutions de l'équation (1.8) de type $y(x,t) = Y(x)e^{i\underline{\omega}t}$ avec $Y(x) = Y_0 e^{-i\kappa x}$. Pour fixer les idées, κ est fixé et choisi réel (i.e. pour un taux de croissance spatial nul). L'enjeu est de déterminer les pulsations complexes $\underline{\omega}$ et les conditions d'instabilité. La relation de dispersion se développe sous la forme d'une équation du second degré en pulsation complexe $\underline{\omega}$:

$$(m_s + m_a)\underline{\omega}^2 - 2m_a U\kappa\underline{\omega} + m_a U^2\kappa^2 - EI\kappa^4 = 0, \tag{1.10}$$

qui est caractérisée par son discriminant :

$$\Delta = 4\kappa^2\{-m_s m_a U^2 + (m_s + m_a)EI\kappa^2\}.$$

Origine de la vitesse de vent critique

Une pulsation complexe $\underline{\omega}$ est instable si et seulement si le taux de croissance $\sigma = \Re(i\underline{\omega})$ est strictement positif. C'est le cas si et seulement si $\Delta < 0$, ou encore $U > U_{c,\kappa}$, avec :

$$U_{c,\kappa} = \sqrt{\frac{1+m^*}{m^*}}\sqrt{\frac{EI}{m_s}}\kappa. \tag{1.11}$$

Dans cette expression, nous avons noté m^* le ratio de la masse ajoutée et de la masse du drapeau :

$$m^* = \frac{m_a}{m_s} = \frac{\pi}{4}\frac{\rho_a H}{\rho_s d}.$$

Cette quantité est à distinguer du nombre de masse $M^* = \rho_a L/(\rho_s d)$ qui serait la quantité pertinente du modèle de drapeau trapu. Avec l'équation (1.11), nous voyons qu'il existe une vitesse de vent critique $U_{c,\kappa}$ non nulle au-delà de laquelle le drapeau est instable vis-à-vis du nombre d'onde κ. Cette vitesse de vent est proportionnelle à la vitesse de phase des ondes de flexion $v_{\varphi,\kappa} = \sqrt{EI/m_s}\kappa$ (Landau, 1986), et dépend également de la géométrie du drapeau via m^*. Le calcul de la vitesse critique nous renseigne sur l'origine de l'instabilité : le terme élastique a un rôle stabilisant tandis que le terme de raideur ajoutée (proportionnel à la courbure du drapeau) est déstabilisant. Qualitativement, c'est comme si une perte de raideur pilotait le début de l'instabilité. La vitesse critique étant inversement proportionnelle à la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/\kappa$, les grandes longueurs d'ondes sont a priori instables "en premier". Nous reviendrons sur l'incompatibilité de cette prédiction avec les faits expérimentaux.

Fréquence d'oscillation critique

La pulsation (ou fréquence) à la vitesse de vent critique s'obtient facilement :

$$\omega_{c,\kappa} = \sqrt{\frac{m^*}{1+m^*}}\sqrt{\frac{EI}{m_s}}\kappa^2.$$

À un facteur près fonction de m^*, nous voyons que la fréquence critique est proportionnelle à la fréquence naturelle du drapeau dans le vide (Section 1.2.2). Intéressons nous plus précisément à l'évolution des pulsations complexes conjuguées solutions de l'équation (1.10). Nous définissons $\omega_{0,\kappa}$ la pulsation caractéristique du nombre d'onde κ à vitesse de vent nulle :

$$\omega_{0,\kappa} = \sqrt{\frac{EI}{m_a + m_s}}\kappa^2.$$

Les pulsations complexes peuvent s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$\frac{\underline{\omega_\kappa}}{\omega_{0,\kappa}} = \sqrt{m^*}\frac{U}{U_{c,\kappa}} \pm \left(1 - \frac{U^2}{U_{c,\kappa}^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.12}$$

où nous distinguerons $\begin{cases} \Im(\underline{i\omega_\kappa}) = \omega_\kappa & \text{la pulsation des oscillations,} \\ \Re(\underline{i\omega_\kappa}) = \sigma_\kappa & \text{le taux de croissance temporel.} \end{cases}$

Sur la Figure 1.20, nous représentons l'évolution de la pulsation des oscillations et du taux de croissance temporel avec la vitesse du vent, pour trois valeurs du paramètre m^*, indépendamment du nombre d'onde κ.

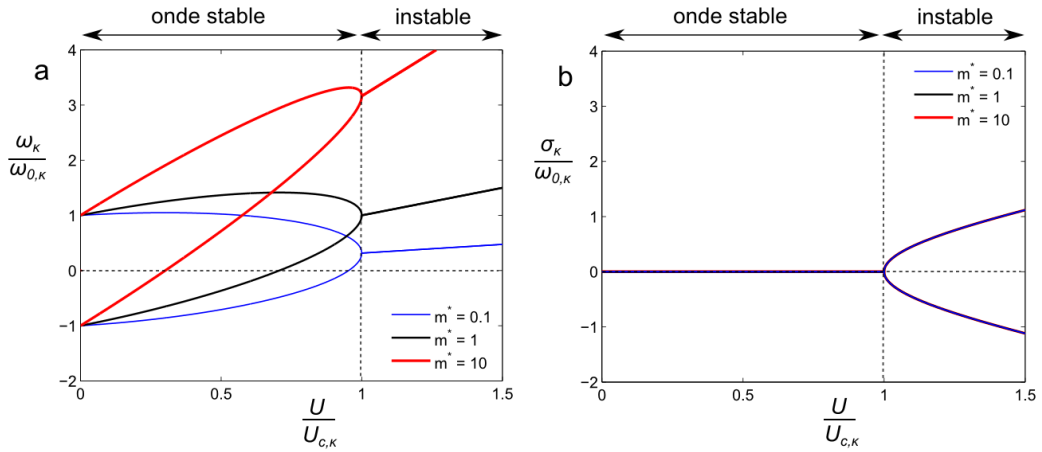


Figure 1.20 – Analyse de la relation de dispersion du drapeau élancé. ***a :*** *Coalescence des pulsations complexes.* ***b :*** *Évolution du taux de croissance avec la vitesse du vent. L'onde est instable lorsque l'une des deux pulsations complexes a un taux de croissance positif.*

Nous voyons que l'instabilité se développe par coalescence des deux pulsations solutions. Nous pouvons également remarquer que lorsque $m^* < 1$, la pulsation critique est plus faible que la pulsation au repos. Quand le drapeau flotte, la pulsation des oscillations augmente linéairement avec la vitesse du vent (Figure 1.20a), ce qui est parfaitement en accord avec les expériences de la Section 1.1.6. Plus précisément, en développant l'équation (1.12) pour $U > U_{c,\kappa}$, nous voyons que la pulsation réduite $\omega_\kappa^* = \omega_\kappa L/U$ s'écrit simplement [9] :

$$\omega_\kappa^* = \frac{m^*}{1 + m^*}\kappa L.$$

9. Cette relation indique également que la vitesse de phase v_φ des ondes de flexion du drapeau (passif) est inférieure à la vitesse de l'écoulement relatif U, tandis que la relation d'ordre serait inversée dans la cas d'une propulsion active de poisson (Lighthill, 1960 ; Pedley & Hill, 1999 ; voir également Huber, 2000 ; Müller, 2003 pour l'analogie entre le flottement des drapeaux et la nage des poissons). À titre d'exemple, le ratio v_φ/U peut valoir 1.5 pour l'anguille, 2 pour la truite ou 2.6 pour l'esturgeon (Hertel, 1966).

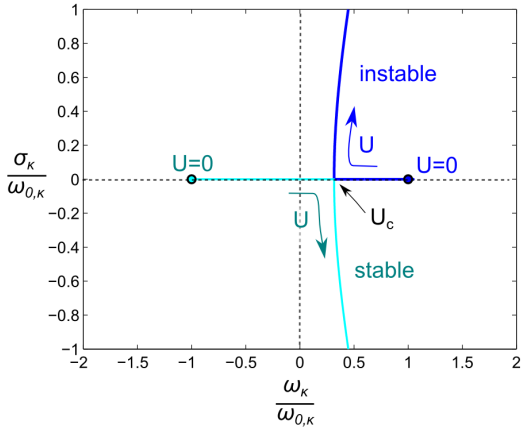


Figure 1.21 – Diagramme d'Argand pour la relation de dispersion du drapeau élancé. La coalescence des deux branches à $U = U_c$ mène à l'instabilité.

Afin de concentrer les informations précédentes sur un seul graphique, nous traçons sur la Figure 1.21 le diagramme d'Argand correspondant à $m^* = 0.1$. Ce diagramme permet de voir l'interaction entre les pulsations complexes, indépendamment du nombre d'onde κ grâce à l'adimensionnement choisi.

Le rôle déterminant du taux de croissance temporel

Par définition, un taux de croissance σ_κ positif est obtenu lorsque la vitesse de vent critique $U_{c,\kappa}$ est dépassée. D'après l'équation (1.12) pour $U > U_{c,\kappa}$, nous avons :

$$\frac{\sigma_\kappa}{\omega_{0,\kappa}} = +\sqrt{\frac{U^2}{U_{c,\kappa}^2} - 1}.$$

Afin d'analyser le processus de sélection de nombre d'onde associé au taux de croissance le plus important, nous développons l'expression précédente en fonction de κ.

$$\frac{\sigma_\kappa}{\omega_L} = \frac{\kappa L}{\sqrt{1+m^*}}\sqrt{\frac{m^*}{1+m^*}U^{*2} - (\kappa L)^2}. \tag{1.13}$$

Cette expression fait apparaître une vitesse de vent normalisée $U^* = UL\sqrt{m_s/(EI)}$ qui est par conséquent la quantité pertinente pour étudier les effets de la vitesse du vent (U^* a déjà été obtenu à la Section 1.2.3). Le taux de croissance est normalisé par $\omega_L = \sqrt{EI/(m_a+m_s)}/L^2$. Sur la Figure 1.22a, nous traçons σ_κ en fonction de κL, pour $U^* = 10$ et $m^* = 1$. Nous visualisons graphiquement l'existence d'un nombre d'onde maximal κ_{max}, ce qui indique qu'une déstabilisation est possible au-delà d'une longueur d'onde minimale. Le taux de croissance optimal est obtenu via l'équation (1.13) pour $\kappa_{\text{opt}} = \kappa_{\text{max}}/\sqrt{2}$. Aussi, en tant que fonction de m^*, nous montrons facilement que cet optimum est lui-même maximum lorsque $m^* = 2$, comme suggéré par la Figure 1.22b.

1.3.2 Étude naïve de l'instabilité globale

L'enjeu est de déterminer la déformée la plus instable à partir de la relation de dispersion qui est une information "locale". Cette problématique générale est étudiée en détail par Doaré

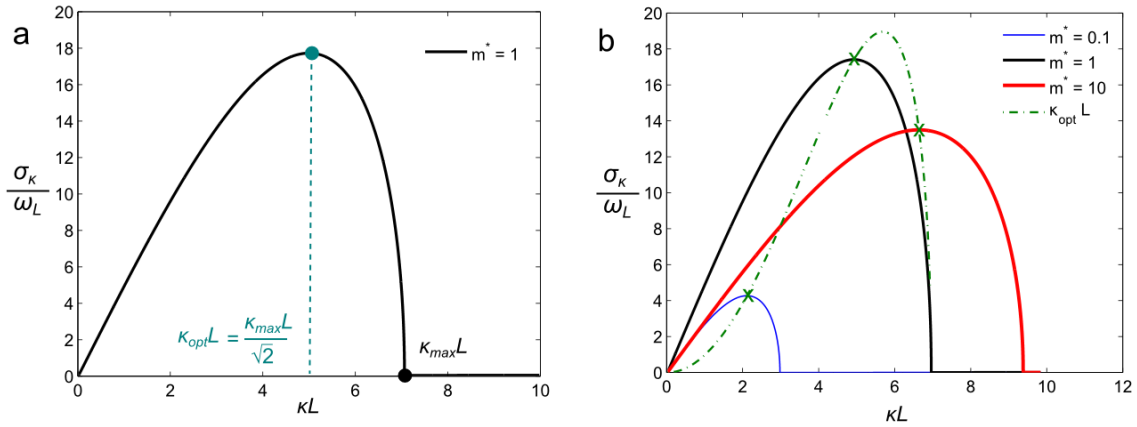


*Figure 1.22 – Évolution du taux de croissance avec le nombre d'onde normalisé κL. **a :** Présence d'un nombre d'onde limite $\kappa_{max}L$ et d'un taux de croissance optimum pour $\kappa_{opt}L$ (droite verticale en pointillés). **b :** Allure du taux de croissance en fonction de m^*. La courbe en points-tirets précise la position de $\kappa_{opt}L$ lorsque m^* varie entre 0 et 100.*

(2001) avec application à l'instabilité d'un tuyau d'arrosage (voir également Païdoussis, 1998 ; Païdoussis, 2004). Tout comme Gregory & Païdoussis (1966a,b), nous pouvons utiliser le fait qu'une pulsation donnée est une pulsation propre globale de l'objet, s'il est possible de superposer les quatre ondes solutions de la relation de dispersion de manière à ce que les conditions aux limites soient respectées. Pour fixer les idées, nous avons démontré précédemment avec l'équation (1.4) que dans le cas du drapeau dans le vide (c'est-à-dire une poutre), nous avons :

$$\begin{aligned} y(x,t) &= e^{i\omega t}[A_1\cos\kappa x + A_2\sin\kappa x + A_3\cosh\kappa x + A_4\sinh\kappa x] \\ &= \frac{1}{2}e^{i\omega t}[(A_1 - iA_2)e^{i\kappa x} + (A_1 + iA_2)e^{-i\kappa x} + (A_3 + A_4)e^{\kappa x} + (A_3 - iA_4)e^{-\kappa x}], \end{aligned}$$

où les racines quatrième de κ^4 en exposants sont les nombres d'onde solutions de la relation de dispersion de l'équation (1.10) avec $m_a = 0$ et $U = 0$. Et nous avons vu que les conditions aux limites de type encastré-libre sont respectées lorsque la relation transcendante $\cos\kappa L\cosh\kappa L + 1 = 0$ est vérifiée, ce qui nous ramène aux modes.

Déterminer analytiquement les nombres d'onde sélectionnés par l'équation (1.10) en présence de vent est ambitieux. Néanmoins, nous pouvons raisonner de manière approchée, en associant à chaque régime de déformée instable à $n-1$ nœud(s) la génération instable d'une onde ayant pour nombre d'onde κ_n, en amont du processus de superposition d'onde de Gregory & Paidoussis (1966a,b). Les nombres d'onde en compétition sont alors ceux estimés à la Section 1.2.2 (avec un drapeau au repos), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \kappa_1 L &= 0.60\pi & \text{“pas de nœud”} \\ \kappa_2 L &= 1.49\pi & \text{“un nœud”} \\ \kappa_3 L &= 2.50\pi & \text{“deux nœuds”} \\ \dots & & \\ \kappa_n L &= (2n+1)\pi/2 & \text{“}n-1\text{ nœuds”} \end{cases}$$

Pour chaque régime κ_n, la vitesse de vent critique U_{cn} et la pulsation critique ω_{cn} s'expriment analytiquement :

$$\begin{cases} U^*_{cn} &= \sqrt{\frac{1+m^*}{m^*}}\kappa_n L \\ \omega^*_{cn} &= \frac{m^*}{1+m^*}\kappa_n L \end{cases}$$

À vitesse de vent fixée et m^* croissant

Sur la Figure 1.23, nous reportons le taux de croissance calculé à partir de l'équation (1.13) pour trois valeurs de m^*. Lorsque m^* augmente, l'onde la plus instable est successivement celle qui a pour nombre d'onde κ_1, κ_2, puis κ_3.

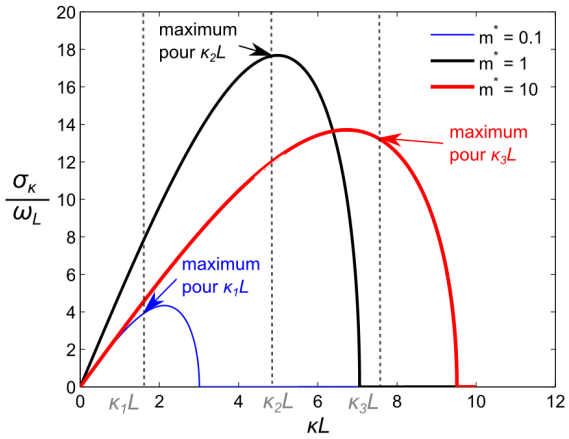


Figure 1.23 – Transitions du nombre d'onde sélectionné par le critère de plus fort taux de croissance lorsque m^* augmente. Les lignes verticales en pointillés indiquent la position des trois premiers nombres d'onde possibles (ces derniers étant évalués dans le cadre simplifié des drapeaux au repos).

Cela suggère des transitions entre régimes de déformées lorsque la géométrie du drapeau est modifiée. Nous calculons facilement que la transition entre le régime κ_n et κ_{n+1} est possible (si $U^* > \sqrt{(\kappa_n L)^2 + (\kappa_{n+1} L)^2}$) pour $m^* > m^*_{n,n+1}$ tel que :

$$m^*_{n,n+1} = \frac{(\kappa_n L)^2 + (\kappa_{n+1} L)^2}{U^{*2} - (\kappa_n L)^2 - (\kappa_{n+1} L)^2}.$$

À vitesse de vent croissante et m^* fixé

De même, lorsque m^* est fixé et que nous augmentons U^*, la transition entre le régime κ_n et κ_{n+1} est obtenue lorsque $U^* > U^*_{n,n+1}$, avec :

$$U^*_{n,n+1} = \sqrt{\frac{1+m^*}{m^*}} \sqrt{(\kappa_n L)^2 + (\kappa_{n+1} L)^2}.$$

En résumé, l'instabilité se déclenche à U^*_{c1} donné par l'équation (1.11), pour un régime de déformées caractérisé par κ_1, puis une transition a lieu à $U^*_{1,2}$ exprimée ci-dessus pour un régime κ_2, et ainsi de suite. Notons que ce n'est pas exactement ce qui est observé pendant les expériences de la Section 1.1.6 : le premier régime instable observé est généralement du type κ_2 ou κ_3 (avec un ou deux nœuds), et non κ_1. En particulier, cela montre les limites d'un raisonnement de type ondulatoire, qui ne reproduit pas correctement la courbure du premier mode de poutre (stable) associé à κ_1.

Diagramme de phase analytique

Afin de résumer l'ensemble des scénarios précédents, deux diagrammes de phase de bilan sont représentés sur la Figure 1.24, en faisant le calcul de l'équation (1.12) sur les 30 premiers

modes propres et en tenant compte du taux de croissance le plus fort via l'équation (1.13). Le diagramme de gauche représente la pulsation réduite des oscillations du drapeau $\omega^* = \omega L/U$ en échelle de couleur, et le diagramme de droite représente le taux de croissance réduit de l'instabilité $\sigma^* = \sigma L/U$. Par définition, la pulsation complexe réduite s'écrit $\underline{\omega}^* = \omega^* - i\sigma^*$ et est donc caractérisée par les deux diagrammes de phase.

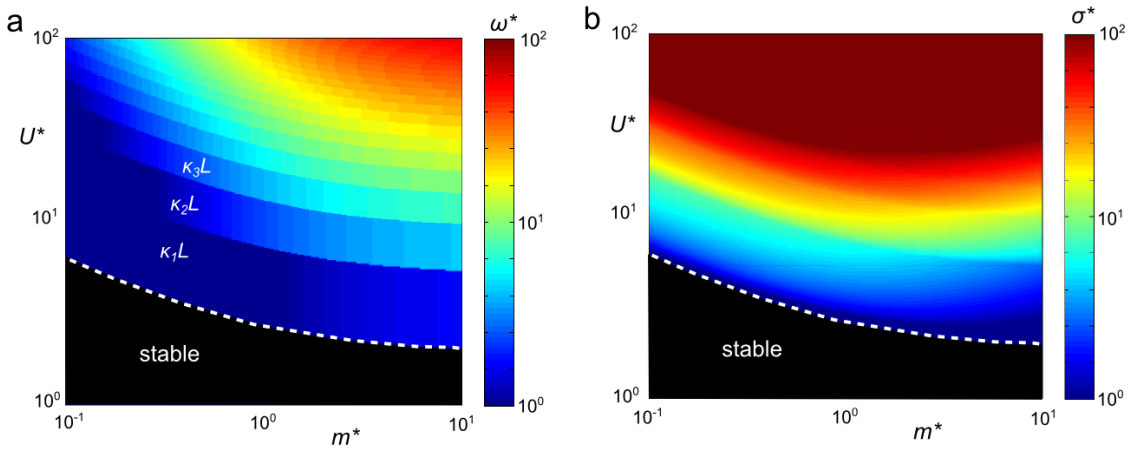


Figure 1.24 – Diagrammes de phase analytiques obtenus via l'équation (1.12) *et l'équation* (1.13). ***a** : Pulsation réduite des oscillations du drapeau $\omega^* = \omega L/U$. **b** : Taux de croissance réduit de l'instabilité $\sigma^* = \sigma L/U$.*

Nous voyons sur la Figure 1.24a que les régimes de flottement prédits ($\kappa_1 L$, $\kappa_2 L$, ...) sont discontinus en termes de pulsation réduite ω^*. Pour autant, cela est en accord avec les sauts de fréquences observés expérimentalement (Section 1.1.6 ; voir aussi l'observation originelle des sauts de fréquences par Peters, 1940, p21). Le taux de croissance réduit σ^* augmente quant à lui continûment et fortement avec U^* (Figure 1.24b).

Ce modèle "naïf" extrait de la relation de dispersion nous permet de comprendre les phénomènes en compétition, mais reste trop élémentaire pour rendre compte des rebroussements de la vitesse de vent critique (Figure 1.7, Section 1.1.4). Pour pouvoir conclure, nous devons estimer de manière numérique (sans pouvoir revenir à une formulation analytique) les solutions instables de l'équation (1.8).

1.3.3 Solution numérique

Nous repartons de l'équation (1.8) d'un drapeau élancé, couplé avec l'écoulement qui l'entoure :

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_s\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -m_a\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 y.$$

Discrétisation de Galerkin

Nous effectuons le changement de variables $x^* = x/L$, $y^* = y/A$ et $t^* = tU/L$. Cela fait apparaître la vitesse de vent adimensionnée $U^* = UL\sqrt{m_s/(EI)}$ et la masse ajoutée adimensionnée $m^* = m_a/m_s$:

$$\frac{1}{U^{*2}}\frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*4}} + \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^{*2}} = -m^*\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*}\right)^2 y^*. \tag{1.14}$$

Plutôt que d'imposer comme précédemment une forme de solution de type onde $y^*(x^*,t^*) = e^{-i\kappa x^* + i\omega t^*}$, nous cherchons la solution sous une forme spatiale quelconque $y^*(x^*,t^*) = Y(x^*)e^{i\omega t^*}$ et avec des conditions aux limites de type encastré-libre. Nous discrétisons l'équation (1.14) par la méthode de Galerkin, détaillée dans l'Annexe B : la déformée spatiale du drapeau est projetée sur les modes de poutre encastrée-libre. Nous sommes partis des travaux d'Olivier Doaré qui a mis en place un algorithme de calcul de marge de stabilité linéaire dans le contexte de l'instabilité d'un tuyau avec écoulement interne (Doaré, 2001). Cécile Lemaitre a adapté cet algorithme au cadre de l'instabilité d'un drapeau suspendu verticalement et tendu par son propre poids (Lemaitre *et al.*, 2005).

Diagramme de phase numérique

Afin d'obtenir une convergence satisfaisante sur la plage de paramètres $m^* = 10^{-1} - 10^1$ et $U^* = 10^0 - 10^2$, l'équation (1.14) est discrétisée sur les 50 premiers modes de poutre encastrée-libre avec une résolution 1000×500 points (voir Annexe B). D'un point de vue pratique, le temps de calcul est approximativement augmenté d'un facteur 100 vis-à-vis du calcul analytique vu à la Section 1.3.2. Le diagramme de phase numérique de la pulsation réduite $\omega^* = \omega L/U$ et du taux de croissance réduit $\sigma^* = \sigma L/U$ sont reportés sur la Figure 1.25.

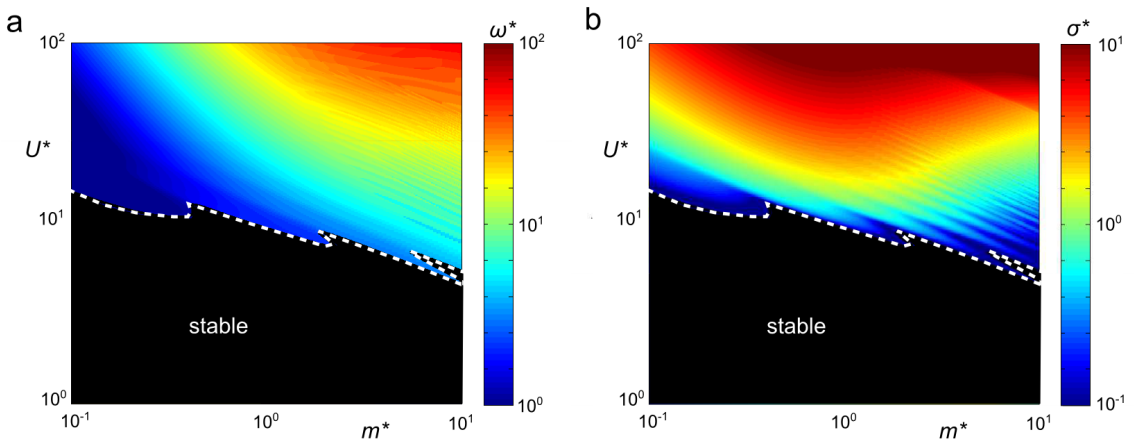


Figure 1.25 – Diagrammes de phase numériques obtenues via l'équation (1.14) *discrétisée par la méthode de Galerkin (Annexe B).* ***a :*** *Pulsation réduite des oscillations du drapeau $\omega^* = \omega L/U$. Les valeurs obtenus sont très proches de celles calculées analytiquement sur la Figure 1.24a (sauf pour l'emplacement du seuil).* ***b :*** *Taux de croissance réduit de l'instabilité $\sigma^* = \sigma L/U$.*

La différence remarquable avec le calcul analytique (simplifié) de la Section 1.3.2 (Figure 1.24) est que la vitesse critique U_c^* présente ici des rebroussements en fonction de m^*. Ce résultat est en accord avec les expériences. Numériquement, le terme de Coriolis est à l'origine des rebroussements car il rend possible l'interaction entre les modes. En dehors du seuil de stabilité, les valeurs et l'évolution de ω^* sont parfaitement similaires au diagramme analytique naïf de la Figure 1.24a. Plus précisément, l'instabilité a lieu à une vitesse critique plus importante que celle estimée par la Figure 1.24b, et de manière générale σ^* est significativement réduit par la prise en compte rigoureuse des conditions aux limites et de l'interaction entre modes. Ce modèle numérique sera confronté aux expériences dans la Section 1.4.

Origine des rebroussements de vitesse critique

Afin d'observer en détail la mise en place de l'instabilité et du rebroussement à $m^* \simeq 0.42$ (Figure 1.25b), nous traçons sur la Figure 1.26 l'évolution de la pulsation complexe dans un diagramme d'Argand pour $m^* = 0.35$ et pour $m^* = 0.49$, avec U^* variant entre 0 et 17. Une singularité mathématique de $\omega^* = \omega L/U$ lorsque $U^* \to 0$ mène à des artefacts numériques : cela est résolu en considérant $\omega^* U^*$ plutôt que ω^*. En particulier, nous montrons facilement que $\omega^* U^* \to (\kappa_n L)^2/\sqrt{1+m^*}$ lorsque $U^* \to 0$, pour chaque projection de Galerkin. Cela permet de relier continûment chaque branche de stabilité à un mode propre sans vent (Figure 1.26). Lorsque la vitesse du vent augmente, les différents modes se superposent pour former des structures spatio-temporelles éventuellement instables.

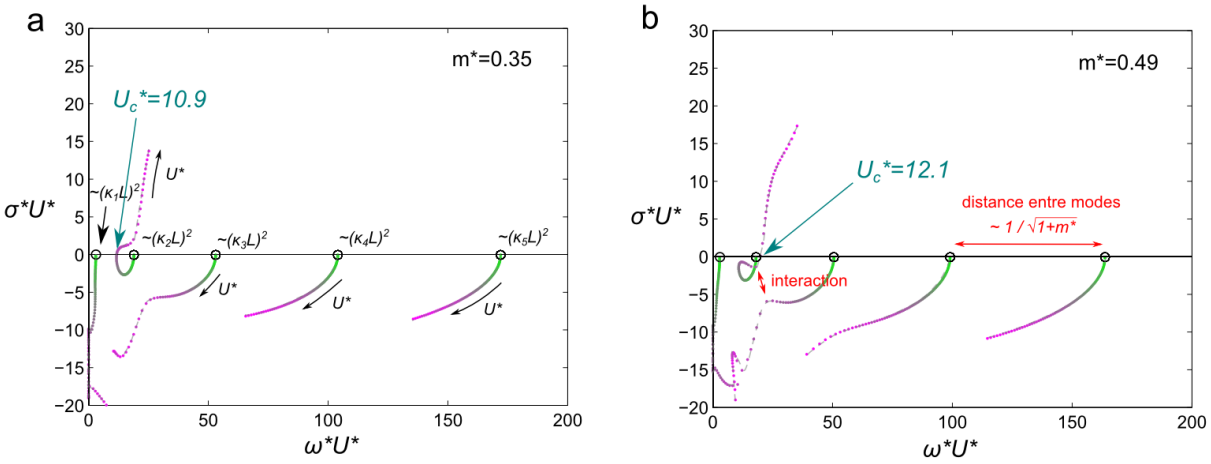


Figure 1.26 – Diagrammes d'Argand numériques et interactions entre modes menant aux rebroussements de vitesse critique. ***a :*** *Cas de $m^* = 0.35$ qui précède le lieu du rebroussement de vitesse critique (à $m^* \simeq 0.42$). Nous voyons que la branche instable est continûment reliée à $\kappa_2 L$.* ***b :*** *Cas de $m^* = 0.49$ qui suit le lieu du rebroussement de vitesse critique. Là encore, la branche instable est continûment reliée à $\kappa_2 L$, mais l'interaction avec $\kappa_3 L$ est forte et retarde l'instabilité. Lorsque m^* augmente, les branches de stabilité se rapprochent et interagissent davantage. Seuls les modes de plus basses fréquences sont représentés pour faciliter la lecture. L'échelle de couleur (de vert à violet) correspond à U^* variant de 0 à 17.*

Sur la Figure 1.26a pour $m^* = 0.35$, nous voyons que la branche instable peut être reliée continûment au second mode propre d'une poutre encastrée-libre lorsque U^* tend vers 0. Nous trouvons l'existence d'une vitesse critique $U_c^* = 10.9$ lorsque la branche devient instable (i.e. $\sigma^* > 0$). D'après la Figure 1.26, cela se produit lorsque les pulsations ω^* des branches issues du second et du troisième mode de poutre coalescent (chacune de ces branches définit l'évolution d'un mode couplé). Sur la Figure 1.26b pour $m^* = 0.49$, nous pourrions nous attendre à ce qu'un autre mode de poutre soit à l'origine de l'instabilité, puisque nous "sommes passés" de l'autre coté du premier rebroussement de vitesse critique (Figure 1.25). Pourtant, le second mode de poutre joue toujours le rôle de point de départ, mais est très influencé par le mode suivant qui retarde fortement l'instabilité. Cela suggère un fort changement de composition du mode instable par les modes de poutre (voir aussi Doaré, 2001, dans le contexte de l'instabilité des tuyaux avec écoulement interne). Cette favorisation des interactions à haut m^* vient du fait que lorsque m^* augmente, la distance entre les branches de stabilité diminue comme $1/\sqrt{1+m^*}$. Notons toutefois que lorsque m^* est suffisamment grand, nous obtenons des branches instables issues de modes propres d'ordre supérieur.

L'absence de saturation d'amplitude

Puisque ce modèle est linéaire par nature, il ne permet pas d'expliquer la saturation d'amplitude de flottement. À cette fin, des modèles non-linéaires ont été mis en place, comme par exemple Connell & Yue (2007) ; Alben & Shelley (2008) ; Michelin *et al.* (2008). À la Section 1.4, nous verrons que malgré cette simplicité, les déformées numériques non saturées sont parfaitement représentatives des déformées expérimentales saturées (par un processus non-linéaire non modélisé ici), ce qui est tout à fait remarquable.

1.3.4 Proposition d'un modèle tridimensionnel élémentaire

En pratique, les drapeaux utilisés au cours des expériences en soufflerie ne sont ni trapus, ni élancés, mais dans une situation de rapport d'aspect intermédiaire. Les deux types de masses ajoutées mises en évidence à la Section 1.2.3 jouent donc un rôle. Précisément, les expériences précédentes balayent la plage de paramètre $0.2 \leq \kappa H \leq 8$. Par conséquent, comme discuté rigoureusement par Eloy *et al.* (2007), il serait impropre d'appliquer un modèle unique (soit de drapeau trapu valable seulement pour $\kappa H \gg 1$, soit de drapeau élancé valable seulement pour $\kappa H \ll 1$).

Pour illustrer le besoin de prendre en compte les deux modèles, rappelons la transition de phase observée expérimentalement par augmentation de L au seuil de l'instabilité (Figure 1.7, Section 1.1.4). Une telle expérience est réalisée avec $\kappa H \simeq 5$, relevant a priori du modèle de drapeau élancé. Pourtant, le paramètre de contrôle géométrique du modèle de drapeau élancé noté $m^* = \pi/4\rho_a H/(\rho_s d)$ est indépendant de L, donc la transition de phase serait théoriquement impossible.

Définition de la masse ajoutée effective

En partant du modèle de drapeau élancé précédent, nous pouvons nous raccorder au modèle de drapeau trapu en corrigeant la masse ajoutée au premier ordre. Tout en conservant des expressions analytiques, nous interpolons les deux formulations de masses ajoutées obtenues en Section 1.2.3 : la masse ajoutée effective m_e combine ainsi l'effet de la masse ajoutée transversale et longitudinale :

$$\frac{1}{m_e} = \frac{1}{m_a} + \frac{|\kappa|}{2\rho_a H}, \tag{1.15}$$

où $m_a = \pi\rho_a H^2/4$. Nous retrouvons respectivement les masses ajoutées typiques des drapeaux élancés et trapus lorsque $\kappa H \ll 1$ et $\kappa H \gg 1$. Une correction de masse ajoutée est obtenue de manière analogue par Gibert (1988) ainsi que dans le cadre des mesures expérimentales de masses ajoutées[10] de plaques de plomb rectangulaires par Yu (1945).

À la Section 1.3.3, nous avons vu que le plus petit nombre d'onde de l'instabilité de flottement est κ_2, associé à une vitesse critique :

$$U_{c2}^* = \sqrt{\frac{1+m^*}{m^*}}\kappa_2 L,$$

où $m^* = m_a/m_s$. En comparant cette formule à la vitesse de vent critique déterminée numériquement après discrétisation de Galerkin, une erreur d'au plus 30% seulement est trouvée sur 3 décades (Figure 1.27a). Par conséquent, la correction de masse ajoutée au seuil du flottement est réalisée avec $\kappa = \kappa_2$.

10. De telles mesures sont basées sur la diminution de la fréquence naturelle d'oscillation en passant de l'air à l'eau.

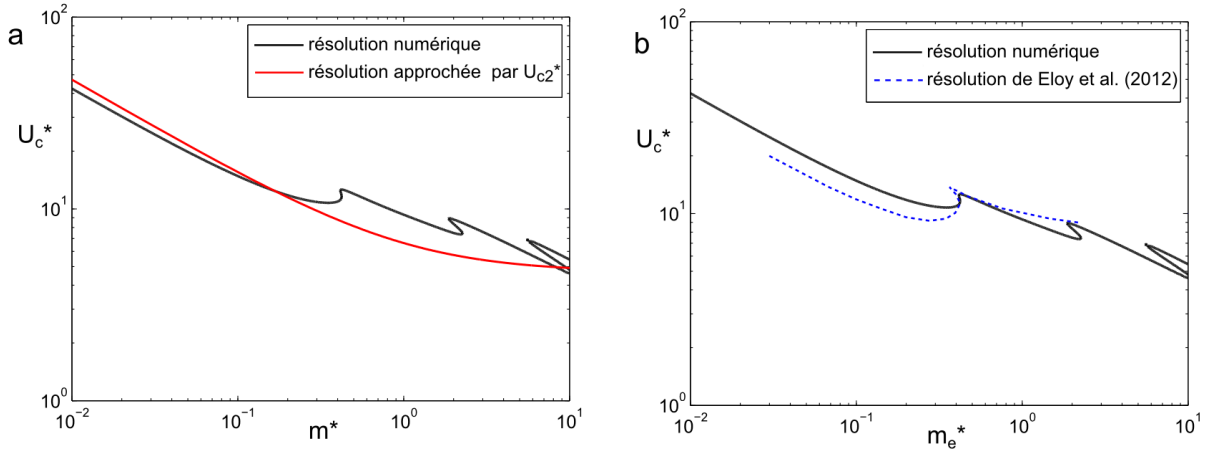


Figure 1.27 – Vers un modèle tridimensionnel. ***a :*** *Le calcul approché $U_c \simeq U_{c2}^*$ de la Section 1.3.1 est comparé à la solution numérique de la Section 1.3.3. Le nombre d'onde κ_2 décrit bien l'ordre de grandeur du seuil de l'instabilité.* ***b :*** *La courbe en pointillés est tirée du calcul numérique tridimensionnel d'Eloy et al. (2012) pour $H^* = 0.5$ et sans termes visqueux. Comparaison avec la résolution numérique de la Section 1.3.3 en fonction de $m_e^* = m_e/m_s$.*

Parallèle avec le modèle d'Eloy *et al.* (2012)

À partir de l'équation (1.15), nous corrigeons la masse ajoutée avec la contribution longitudinale de $\kappa = \kappa_2$:

$$m_e = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{\pi}{8}|\kappa_2 L|}_{=1.84} H^*} m_a. \tag{1.16}$$

Le modèle tridimensionnel associé revient simplement à utiliser la masse ajoutée effective m_e au lieu de m_a comme pour un modèle de drapeau élancé. Sur la Figure 1.27b, ce modèle est comparé au modèle (tridimensionnel) d'Eloy *et al.* (2012) résolu pour $H^* = 0.5$ (c'est-à-dire pour un drapeau ni trapu, ni élancé) et sans termes visqueux. La position du premier rebroussement de vitesse critique est identique dans les deux cas, et la tendance des courbes est similaire, ce qui est très satisfaisant au vu de la simplicité du modèle construit précédemment.

La masse ajoutée adimensionnée $m_e^* = m_e/m_s$ et la vitesse adimensionnée U^* permettent donc raisonnablement d'envisager des changements d'échelle par similitude tant que $10^{-2} \leq m_e^* \leq 10^1$. Dans la section suivante, nous mettons ce modèle à l'épreuve sur les données obtenues en soufflerie pour différentes longueurs, épaisseurs, largeurs et matériaux de drapeaux.

1.4 Comparaison modèle-expériences

Les prédictions du modèle numérique tridimensionnel sont confrontées aux expériences en trois temps. Tout d'abord, les lois puissances expérimentales sont comparées à celles obtenues analytiquement via l'approximation $U_c^* \simeq U_{c2}^*$ (Section 1.3.2). Ensuite, le modèle tridimensionnel de la Section 1.3.4 est résolu numériquement par décomposition de Galerkin : d'abord pour calculer la vitesse de vent critique c'est-à-dire pour caractériser le seuil de l'instabilité, puis pour des vitesses de vent supérieures.

> *"We are apt to think of mathematical definitions as too strict and rigid for common use, but their rigour is combined with all but endless freedom. [...] as for instance when we learn that, however we hold our chain, or however we fire our bullet, the contour of the one or the path of the other is always mathematically homologous." (D'Arcy Wentworth Thompson, 1942)*

Remarque préliminaire sur l'origine des lois puissances expérimentales

Au cours de la Section 1.1, nous avons observé que la vitesse critique de flottement suivait une loi du type $U_c \sim L^{\nu} d^{\nu'}$, avec des exposants ν et ν' très dispersés selon l'épaisseur du matériau (voir la Section 1.1.5).

Les données expérimentales mènent à $\begin{cases} \nu \in [-1.7, -0.9] & \text{exposant de la longueur } L, \\ \nu' \in [+1.2, +1.3] & \text{exposant de l'épaisseur } d. \end{cases}$

Dans le cas de l'exposant ν (sur la longueur des drapeaux), des estimations peuvent aussi être extraites des travaux de Huang (1995) ; Yamaguchi *et al.* (2000a,b) ; Watanabe *et al.* (2002a,b) qui indiquent $-1.5 \leq \nu \leq -1.0$.

À la Section 1.3.4 nous avons rappelé l'approximation analytique $U_c^* \simeq U_{c2}^*$. Cette dernière peut s'écrire en termes de masse ajoutée effective via l'équation (1.16) :

$$U_c \simeq 1.35 \sqrt{\frac{E}{\rho_s}} \frac{d}{L} \left(1 + \overbrace{(1 + 1.84 \underbrace{\frac{H}{L}}_{H^*}) \underbrace{\frac{4}{\pi} \frac{\rho_s d}{\rho_a H}}_{1/m^*}}^{1/m_e^*} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Les cas limites théoriques mènent à $\begin{cases} \nu \in [-3/2, -1] & \text{maximal pour } m^* \gg 1, \\ \nu' \in [+1, +3/2] & \text{maximal pour } m^* \ll 1. \end{cases}$

Les exposants théoriques sont très proches de ceux trouvés expérimentalement [11]. Plus encore, nous pouvons discuter de l'effet des propriétés fluides sur le seuil de l'instabilité. Nous voyons que la masse volumique du fluide ρ_a a peu d'effets lorsque $m^* \gg 1$. Cependant, lorsque $m^* \ll 1$ (dans le cas où les ρ_a sont très petits par exemple) la vitesse critique décroît en fonction de ρ_a comme $U_c \sim 1/\sqrt{\rho_a}$. Dans ce cas, plus le fluide est dense, plus le drapeau est instable. Ces tendances sont en accord avec Shelley *et al.* (2005) ; Argentina & Mahadevan (2005).

11. Le même calcul est facilement réalisable pour la fréquence critique $f_c \simeq f_{c2}$ (Section 1.3.2). Les exposants théoriques et expérimentaux se trouvent être également compatibles.

1.4.1 Le flottement au seuil de l'instabilité

Dans ce qui suit, la résolution numérique de l'équation (1.8) est réalisé via la décomposition de Galerkin (Section 1.3.3 et Annexe C). La masse ajoutée effective m_e est utilisée pour prendre en compte l'écoulement tridimensionnel autour du drapeau (Section 1.3.4).

Vitesses et fréquences critiques

Sur la Figure 1.28a, l'ensemble des vitesses critiques obtenues expérimentalement (à la Section 1.1) sont reportées. Elles sont correctement prédites par le modèle numérique, quelle que soit l'épaisseur, la largeur, la longueur ou le matériau du drapeau. Le premier rebroussement de vitesse critique est obtenu expérimentalement pour $m_e^* \simeq 0.37$. Il est légèrement surestimé avec le modèle qui prévoit $m_e^* \simeq 0.42$ (erreur d'environ 10 %).

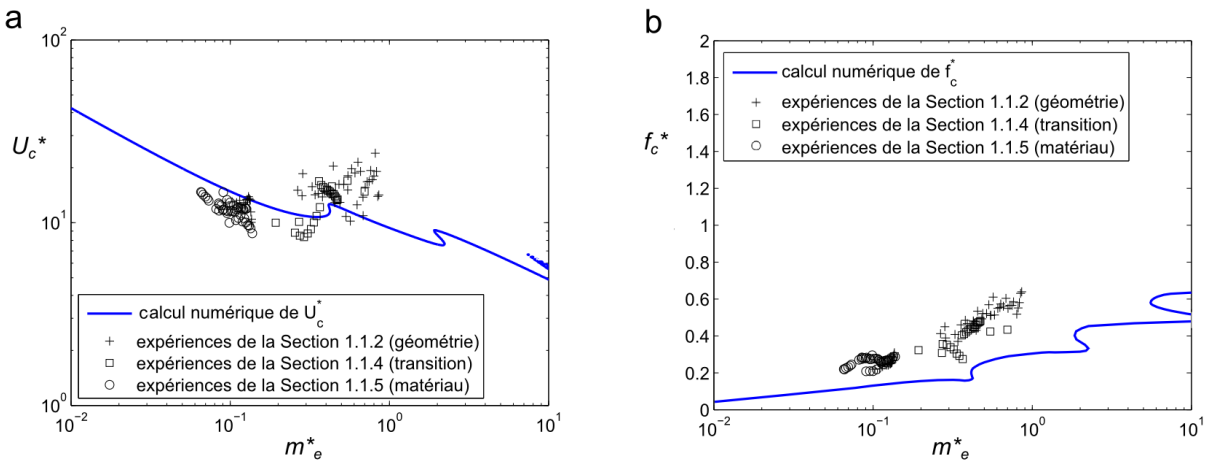


Figure 1.28 – Prédictions au seuil de l'instabilité. ***a :*** *Vitesse de vent critique adimensionnée en fonction de la masse ajoutée adimensionnée (approximation tridimensionnelle). L'échelle est logarithmique.* ***b :*** *Fréquence réduite critique $f_c^* = f_c L/U_c$ en fonction de la masse ajoutée adimensionnée (approximation tridimensionnelle). L'échelle est semi-logarithmique.*

Sur la Figure 1.28b nous reportons les fréquences critiques (réduites) obtenues expérimentalement. Bien qu'elles soient sous-estimées par le modèle numérique, le rebroussement de fréquence critique est bien suivi (carrés vides).

La bonne prévision des déformées

Afin de préciser la dynamique du drapeau, les déformées numériques et expérimentales sont comparées. Pour rappel, les déformées numériques sont non saturées et donc définies à un coefficient multiplicatif près. Sur la Figure 1.29a-d, nous reportons les déformées numériques évaluées à la vitesse critique expérimentale, pour m_e^* variant entre 0.21 et 0.47. Les superpositions des déformées expérimentales pour les mêmes couples (m_e^*,U^*) sont reportées en bas sur la Figure 1.29e-h (cas de la Section 1.1.4).

Il est notable que les déformées numériques sont en bon accord avec les déformées expérimentales, en particulier lors de la traversée du rebroussement de vitesse critique et au passage d'un nœud de vibration à deux. Aussi, il est remarquable que les déformées trouvées expérimentalement, naturellement saturées en amplitude, soient en bon accord avec les déformées numériques d'amplitudes exponentiellement croissantes non limitées.

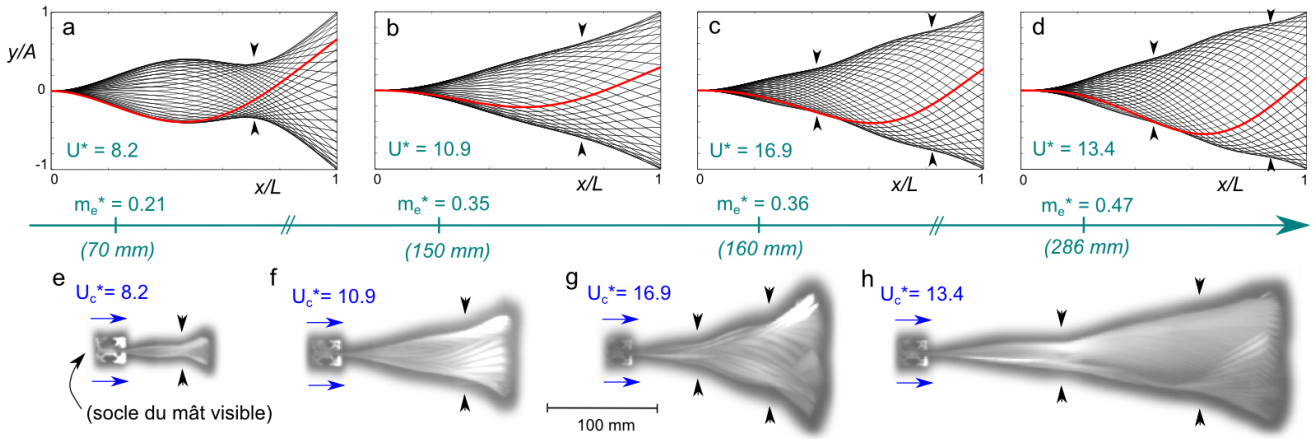


Figure 1.29 – Évolution de la superposition des déformées. Les nœuds sont indiqués par les flèches. ***a-d*** *: Prédictions du modèle numérique, l'amplitude est définie à un coefficient multiplicatif près.* ***e-h*** *: Résultats expérimentaux de la Section 1.1.4.*

1.4.2 Le flottement au-delà du seuil de l'instabilité

Évolution de la fréquence réduite

Afin d'analyser le comportement du modèle au-delà du seuil de l'instabilité, l'évolution numérique et expérimentale de f^* est comparée pour U^* croissant. Nous nous plaçons à $m_e^* = 0.33$ fixé, c'est-à-dire dans la situation de Drapeau 1 (Section 1.1.6).

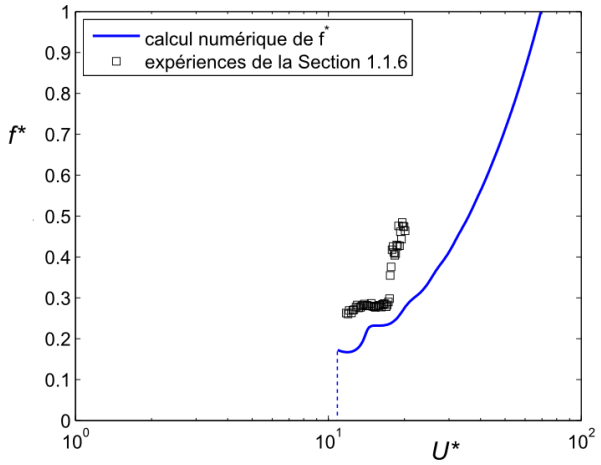


Figure 1.30 – Évolution de la fréquence réduite avec la vitesse du vent adimensionnée. Le seuil d'instabilité est correctement prédit, la fréquence critique est cependant sous-estimée. L'augmentation de la fréquence par paliers est bien décrite par le modèle numérique. L'échelle est semi-logarithmique.

Les fréquences réduites critiques sont reportées sur la Figure 1.30. Le modèle reproduit bien les tendances fondamentales observées expérimentalement, c'est-à-dire les plateaux de fréquence réduite et les transitions. Néanmoins, les fréquences de flottement sont sous-estimées.

La bonne prévision des déformées

L'évolution des déformées expérimentales et numériques avec la vitesse de vent adimensionnée U^* est reportée sur la Figure 1.31, pour $m_e^* = 0.33$ fixe (cas de Drapeau 1, Section 1.1.6).

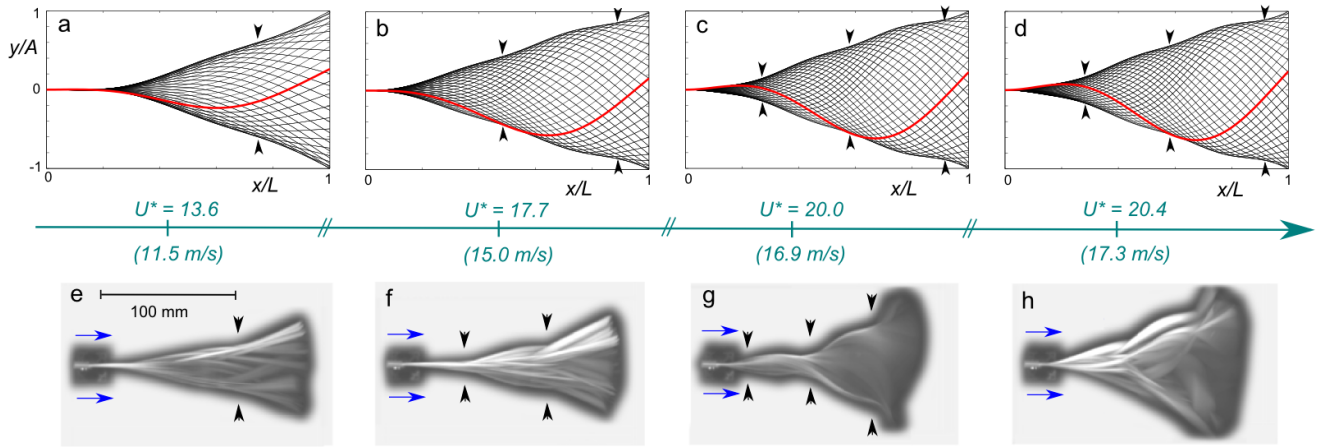


Figure 1.31 – Évolution de la superposition des déformées. Les nœuds sont indiqués par les flèches. ***a-d*** *: Prédictions du modèle numérique, l'amplitude étant définie à un coefficient multiplicatif près.* ***e-h*** *: Résultats expérimentaux de la Section 1.1.6.*

Le modèle numérique est raisonnable sur la gamme de vitesse critique $U^* = 0 - 20$, avant l'apparition d'un régime chaotique (Figure 1.31h). Numériquement, l'augmentation du nombre de nœuds se fait de manière continue, sans transitions brutales et le nombre de nœuds est en accord avec les expériences. Il n'est pas surprenant que le régime chaotique, de nature non-linéaire, soit mal décrit par cette analyse de stabilité linéaire. L'Annexe E est dédiée à l'étude du régime chaotique.

1.4.3 Discussion de deux hypothèses fortes

Les effets visqueux sont négligés

Lors du calcul de la masse ajoutée à la Section 1.2.3, nous avons fait l'hypothèse d'un écoulement de fluide parfait autour du drapeau. *A posteriori*, comme la comparaison modèle-expériences est satisfaisante, il semble que le flottement soit effectivement un mécanisme de fluide parfait. En particulier, les séparations d'écoulement ont vraisemblablement un moindre rôle (Figure 1.32) et le caractère éventuellement instationnaire du vent n'est pas déterminant.

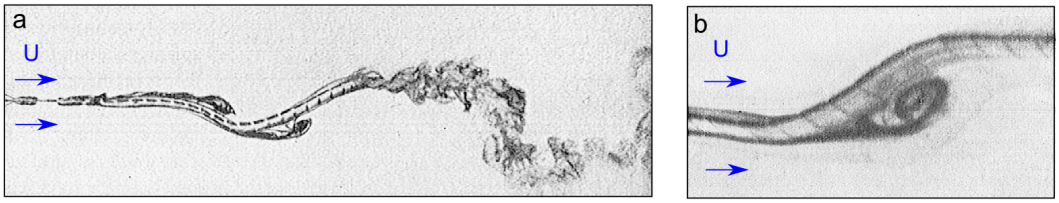


Figure 1.32 – Visualisation des décollements autour d'un drapeau forcé à osciller dans l'eau (adapté de Peters, 1940).

En 1940, Peters a réalisé des visualisations d'écoulement autour d'un drapeau forcé à osciller dans l'eau. Nous en reportons une partie sur la Figure 1.32. Ces visualisations indiquent des décollements de couche limite en aval de chaque courbure du drapeau. Cependant, les récentes expériences de suivi de gouttelettes d'huile autour d'un drapeau, menées en soufflerie par

Gibbs *et al.* (2014), suggèrent plutôt que l'écoulement d'air reste globalement attaché dans des conditions expérimentales similaires aux nôtres.

De même, nous n'avons pas tenu compte de l'effet du sillage derrière le drapeau (voir par exemple les visualisations de sillage réalisées par Zhang *et al.* (2000) dans des films de savon).

La tension est négligée

Dans le cas extrême d'un drapeau suspendu et tendu par son propre poids, avec un écoulement d'air vertical, Lemaitre *et al.* (2005) ont montré que la tension est à l'origine d'une saturation de la vitesse critique de flottement pour les longs drapeaux. Dans notre situation, les drapeaux choisis ne sont pas déversés au repos, ce qui signifie que les effets de la gravité sont négligeables devant les effets élastiques. Néanmoins, d'autres sources de tension apparaissent à vitesse de vent non nulle, à commencer par la friction visqueuse. Nous aurons une évaluation de la tension à l'encastrement au Chapitre 2, à travers l'effort de traînée appliqué au mât du drapeau. Le ratio des efforts de tension T sur les efforts élastiques est de l'ordre de TL^2/EI et une évaluation expérimentale de son ordre de grandeur donne environ 0.5 au seuil de l'instabilité. L'effet de la tension constitue donc une piste d'amélioration importante du modèle.

1.4.4 Et le marque-page ?

Au début de ce chapitre, nous essayions de faire flotter un marque page en soufflant dessus : revenons sur ce cas d'application pratique afin de consolider les idées. Le souffle nécessaire est puissant et constant. Une feuille de papier d'imprimante classique (80 g/m^2) a une épaisseur de l'ordre de $d \simeq 100$ μm. Disons qu'un marque page classique a une largeur $H = 40$ mm et une longueur $L = 100$ mm, nous obtenons :

$$m_e^* = \frac{1}{1 + 1.84\frac{H}{L}} \frac{\pi}{4} \frac{\rho_a H}{\rho_s d} \simeq 0.26.$$

Le calcul numérique de la Section 1.3.3 prédit une vitesse critique $U_c^* \simeq 11$, tandis que l'approximation analytique de la Section 1.3, qui s'écrit $U_c^* \simeq \sqrt{1 + 1/m_e^*}|\kappa_2 L|$, la sous-estime de 7 % seulement. Nous avons au final :

$$U_c = U_c^* \sqrt{\frac{E}{12\rho_s}} \frac{d}{L} \simeq 14 \text{ m/s}.$$

Cette vitesse d'expulsion d'air est de l'ordre de celle obtenue après une très forte expiration (~ 20 m/s à 3 cm de la bouche ; reportée par Hertel, 1966, p70). Cela explique qu'il soit relativement difficile de faire flotter ce marque-page simplement en soufflant dessus.

Chapitre 2

Les efforts générés par un drapeau

Sommaire

2.1 Enjeux 48
2.2 Mesure des fluctuations de traînée et de moment 50
2.2.1 Dispositif expérimental 50
2.2.2 La forte influence de la longueur du drapeau 52
2.2.3 L'effet du vent sur les efforts 54
2.2.4 Analyse fréquentielle 58
2.2.5 Les "claquements" des drapeaux 59
2.3 Analyse de la traînée générée par le drapeau 61
2.3.1 Coefficient de traînée moyenne 61
2.3.2 Coefficient de traînée instationnaire 62
2.3.3 Confrontation aux modélisations existantes 62
2.4 Analyse du moment généré par le drapeau 65
2.4.1 Propriétés du moment 65
2.4.2 Solution numérique en termes de coefficient de moment 66
2.4.3 Comparaison modèle-expériences 68
2.5 Structure spatio-temporelle des déformées 70
2.5.1 Déformée numérique : discrétisation de Galerkin 70
2.5.2 Déformée expérimentale : B.O.D. en soufflerie 70
2.5.3 Couplage entre deux structures spatio-temporelles 72

Contenu Dans ce chapitre, nous mesurons et caractérisons les efforts fluctuants générés sur le mât d'un drapeau qui flotte. En particulier, le moment de rotation autour du mât est analysé en vue de préparer l'étude du couplage drapeau-mât du Chapitre 3, dans le contexte plus général de la récupération d'énergie.

2.1 Enjeux

Dans les années 30, la conception de banderoles publicitaires tractées par avion, situation illustrée sur la Figure 2.1a, amena Fairthorne à étudier la traînée qu'une banderole produit en flottant (Fairthorne, 1930). Grâce à des expériences en soufflerie, il mesure les coefficients de traînée de drapeaux en différents tissus, et il propose une formule empirique que nous rappellerons. Ce travail précurseur apporte la conclusion intéressante que plus le drapeau est long, plus sa traînée est petite (à vitesse de vent fixée), ce qui laisse présager des mécanismes de génération de traînée peu intuitifs. Hoerner (1955) diffusa les données de Fairthorne [1], en insistant sur le fait qu'un drapeau flottant génère une traînée 10 fois plus importante que la seule traînée de friction visqueuse. Taneda (1968) confirma cette tendance avec de nouvelles expériences sur une grande gamme de matériaux.

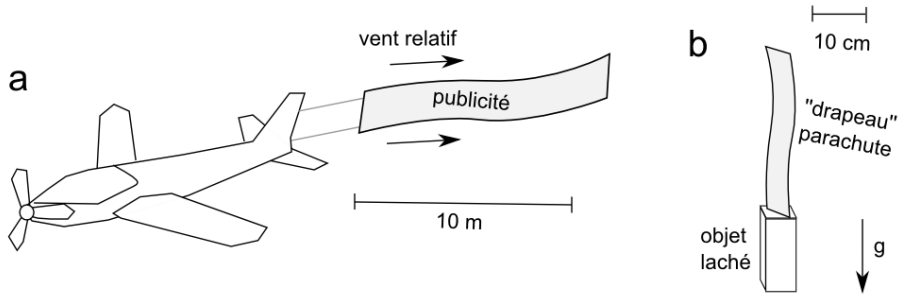


*Figure 2.1 – La traînée générée par le flottement peut être un inconvénient comme (**a**) dans le cas des banderoles publicitaires tractées par avion ou bien un avantage comme (**b**) pour la conception de parachute élémentaires.*

En termes d'applications, ces travaux fondamentaux ont accompagné la conception de décélérateurs innovants basés sur la traînée induite par flottement (Lokerson, 1968), jouant le rôle de parachutes (situation illustrée sur la Figure 2.1b). De manière similaire, les observations des marins luttant contre le flottement de voiles (le "faseillement") suggéra d'utiliser des drapeaux pour améliorer le freinage des véhicules (Bourrières, 1969). Les drapeaux ont également été étudiés pour stabiliser la rotation de projectiles (Fancett & Clayden, 1972 ; Auman & Wilks, 2005). Les efforts fluctuants sont également à l'origine de déchirements du papier induit par flottement dans les imprimeries (Watanabe *et al.*, 2002a,b) et sont dimensionnants pour la résistance des mâts de drapeaux (Eurocode, 2005 ; American National Standard, 2007 ; New Zealand Standard, 2011).

> *"Nature does not tell us what kind of a problem it is - a physics problem, a biology problem, an engineering problem, an important problem, an unimportant problem... Nature couldn't care less." (Mahadevan & Shaw, 2008)*

En raison de ces applications variées, de nombreuses mesures de coefficients de traînée de drapeaux flottants furent réalisées ces dernières années (Carruthers & Filippone, 2005 ; Wilk & Skuta, 2009 ; Morris-Thomas & Steen, 2009), en se focalisant sur la traînée moyennée sur des temps longs devant la période du flottement. Un modèle simple a été proposé par Moretti (2003), qui s'est appuyé sur les travaux originaux de Thoma (1939a,b) pour estimer la tension le long du drapeau. Ce modèle est confirmé par des expériences avec des drapeaux "lourds" ($m^* \ll 1$) en soufflerie (Martin, 2006). Par ailleurs, la traînée de drapeau a été récemment

1. Prendre garde à la présence d'erreurs de retranscription dans Hoerner (1955), p3.25.

revisitée par les expériences de Ristroph & Zhang (2008) qui portent sur les drapeaux en tandem : le drapeau en amont subit moins de traînée que celui en aval, c'est-à-dire l'opposé de l'aspiration classiquement utilisée en sport de vitesse (voir aussi les travaux de modélisation par Alben, 2009 ; Zhu, 2009 ; Kim *et al.*, 2010).

L'utilisation des coefficients de traînée moyennés en temps cachent la nature profonde de la force de traînée qui varie au cours du temps, et qui peut ne pas être périodique. Par exemple, des épisodes de claquements du drapeau (accélérations violentes et irrégulières) ont été observés puis prédits au-dessus de la vitesse de vent seuil de l'instabilité de flottement (voir Connell & Yue, 2009 ; Alben & Shelley, 2008 ; Michelin *et al.*, 2008).

Dans la littérature existante, il n'existe pourtant pas, à notre connaissance, d'étude expérimentale des efforts instantanés (par opposition aux moyennes temporelles) qu'un drapeau génère en flottant. C'est aussi l'objectif de ce chapitre. En particulier, nous souhaitons caractériser le moment fluctuant qu'un drapeau génère autour de son mât. Cela servira de base au Chapitre 3 qui portera sur le couplage mât-drapeau avec comme perspective principale la récupération d'énergie du vent. Au vu des nombreuses applications citées auparavant et des difficultés de traiter numériquement le problème non-linéaire couplé, des données expérimentales sont grandement nécessaires.

2.2 Mesure des fluctuations de traînée et de moment

Dans cette section, nous caractérisons les efforts générés sur la mât d'un drapeau qui flotte. La Section 2.2 est associée à l'article : Virot E., Amandolese X., Hémon P., 2013, Fluttering flags : an experimental study of fluid forces. *Journal of Fluids and Structures* **43** : 385–401.

2.2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental du Chapitre 1 est légèrement modifié : le mât du drapeau est connecté à une balance aérodynamique (Figure 2.2a), que nous avons spécifiquement conçue pour mesurer les fluctuations de la force de traînée $D(t)$ et du moment de rotation $M(t)$ autour du mât (Figure 2.2b,c).

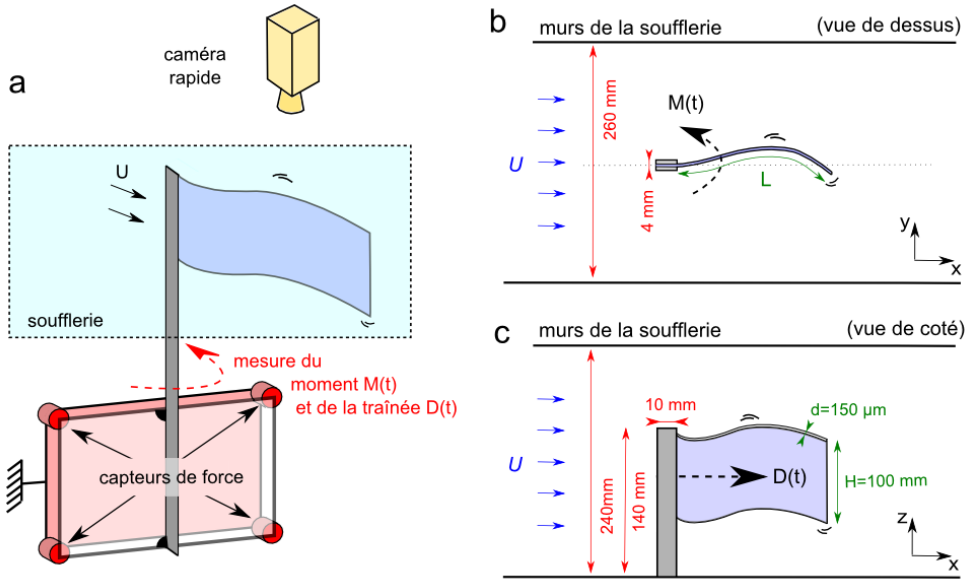


Figure 2.2 – Dispositif expérimental. ***a :*** *Le drapeau et son mât sont reliés à une balance aérodynamique destinée à mesurer les fluctuations de la traînée $D(t)$ et du moment $M(t)$.* ***b :*** *Vue de dessus de la soufflerie et définition du moment $M(t)$.* ***c :*** *Vue de côté de la soufflerie et définition de la force de traînée $D(t)$.*

Le matériel utilisé

Le dimensionnement et l'étalonnage de la balance aérodynamique sont détaillés dans l'Annexe C. Les capteurs de force de cette balance sont connectés à un système d'acquisition PAK (Müller-BBM) qui réalisent 1024 acquisitions par seconde. La durée d'acquisition des signaux de force est de 14 s : pour un drapeau flottant à 10 Hz, cette durée d'acquisition prend en compte 140 périodes. Concernant l'analyse fréquentielle, le bruit des signaux de forces est réduit en traitant indépendemment 6 "blocs" temporels de 4 s (avec un recouvrement de 50 %) : la résolution en fréquence après ce traitement est de 0.25 Hz. Notons que les capteurs de force utilisés (Kistler 9721B5) mesurent avec précision les fluctuations de force, mais ils ne mesurent pas la valeur moyenne (le traitement des données est explicité dans l'Annexe C). Des combinaisons linéaires des signaux de force fournis par les 4 capteurs sont utilisées pour reconstruire la composante instationnaire de la traînée $D(t) - < D(t) >$ et du moment $M(t) - < M(t) >$, où $< ... >$ signifie "moyenné en temps". Nous pouvons considérer que $< M(t) >$ est nul en

pratique car le flottement est symétrique "gauche-droite". L'information caractéristique de la composante instationnaire de la traînée et du moment est respectivement :

$$\sigma_D = \sqrt{< D(t)^2 > - < D(t) >^2}, \quad \sigma_M = \sqrt{< M(t)^2 > - < M(t) >^2},$$

c'est-à-dire l'écart-type de $D(t)$ et de $M(t)$.

Précautions nécessaires

Les drapeaux choisis sont en papier 120 g/m^2 (i.e. d'épaisseur $d = 150$ μm, voir Annexe A). Ils sont découpés dans la direction 29.7 cm d'une feuille A4, qui est la direction principale des fibres (c'est le "sens machine" dans le jargon des papetiers). La largeur des drapeaux est fixée à $H = 100$ mm, et ce que nous faisons varier lors des expériences est soit (1) la longueur des drapeaux ou (2) la vitesse du vent.

La première fréquence propre de la balance aérodynamique est de l'ordre de 90 Hz tandis que les drapeaux choisis ont des fréquences de flottement d'au plus 60 Hz dans la gamme de vitesse de vent de la soufflerie (de 3 à 18 m/s). L'écart entre ces deux fréquences de montage permet d'éviter les interactions entre le système de mesure et le drapeau (voir aussi l'Annexe C).

Les vibrations induites par les détachements tourbillonnaires au niveau du mât peuvent être une autre source d'artefact. Le drapeau jouant cependant le rôle d'une plaque séparatrice qui tue le lâcher tourbillonnaire (Shukla *et al.*, 2009), ce phénomène n'est à prendre en compte que sur la partie nue du mât (sans drapeau). Le mât étant de section rectangulaire 4 mm × 10 mm, le détachement tourbillonnaire y est caractérisé par un nombre de Strouhal St = fe/U proche de 0.1 (Hémon, 2006, p82), où e est l'épaisseur du mât ($e = 4$ mm). Le détachement tourbillonnaire est donc généré à plus de 200 Hz dans notre gamme de vitesse de vent, c'est-à-dire bien au-delà des fréquences de flottement des drapeaux choisis (≤ 60 Hz). En pratique, le mouvement observé du drapeau en soufflerie est dominé par la fréquence de flottement et les signaux temporels sont filtrés au-dessus de 60 Hz.

Méthode générale

Illustrons la méthode de mesure par un exemple concret. Un drapeau de longueur $L = 140$ mm est placé en soufflerie avec un vent de vitesse $U = 8.6$ m/s. Le reconstruction de la composante instationnaire de la traînée et du moment est présentée sur la Figure 2.3a,b. Nous remarquons tout d'abord que les deux signaux sont quasi-périodiques et que la période de moment est plus grande que celle de la traînée.

Afin d'étudier plus précisément ces signaux, nous en faisons l'analyse fréquentielle en calculant les densités spectrales de puissance d.s.p $\simeq |\text{F.F.T.}|^2/T$, où F.F.T. désigne la transformée de Fourier (Fast Fourier Transform) et où T est la durée du signal. Les densités spectrales des signaux de traînée et de moment sont reportées sur la Figure 2.3c,d. Nous voyons clairement que la fréquence dominante de la traînée ($\simeq 38$ Hz) est le double de celle du moment ($\simeq 19$ Hz). Cela signifie que, sans surprise, un battement vers la gauche ou bien vers la droite a le même effet sur la traînée. Les écarts-types des signaux temporels complets sont respectivement $\sigma_D \simeq 18$ mN et $\sigma_M \simeq 1.2$ mN.m. Notons que la racine carrée de l'intégrale des densités spectrales de puissance sur le domaine fréquentiel donne la même valeur d'écart-type, comme cela est prédit par l'identité de Parseval.

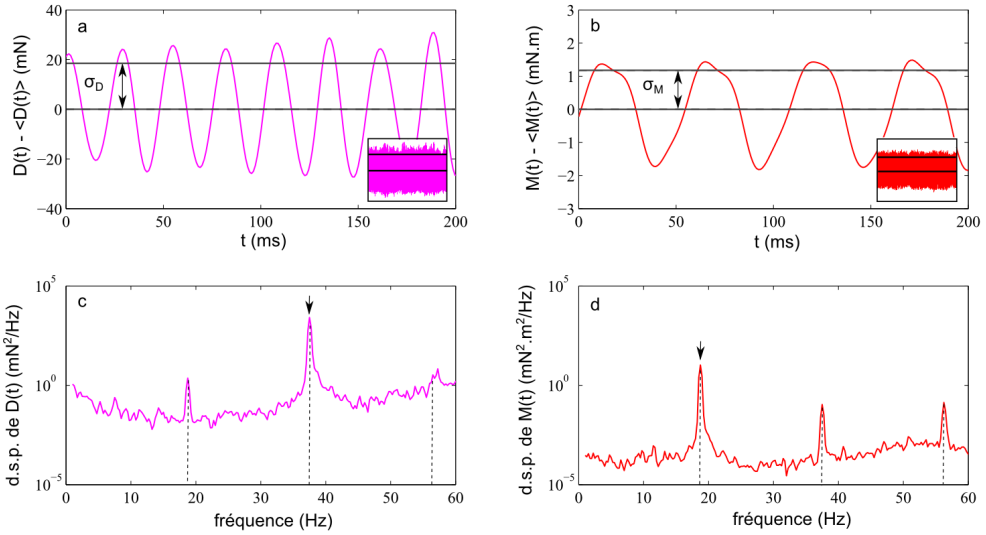


Figure 2.3 – Illustration de la méthode de mesure via un exemple concret. Le drapeau est en papier 120 g/m^2, de longueur $L = 140$ mm et de largeur $H = 100$ mm. La vitesse du vent en soufflerie est $U = 8.6$ m/s. ***a :*** *Composante instationnaire de la traînée $D(t)$ reconstruit sur 200 ms, caractérisée par son écart-type σ_D. Encart : Le signal complet de 14 s.* ***b :*** *Composante instationnaire du moment $M(t)$ reconstruit sur 200 ms, caractérisée par son écart-type σ_M. Encart : Le signal complet de 14 s.* ***c,d :*** *Densités spectrales de puissance respectives des signaux de 14 s, en échelle semi-logarithmique. Les flèches et les droites en pointillés indiquent les fréquences dominantes.*

2.2.2 La forte influence de la longueur du drapeau

La taille du drapeau est variée en coupant un drapeau de longueur initiale $L = 290$ mm jusqu'à $L = 70$ mm, par incréments de 10 mm. Le drapeau n'est pas renouvelé entre chaque mesure afin de réduire l'incertitude due aux défauts de planéité à l'encastrement (comme discuté à la Section 1.1.3).

Les efforts générés au seuil de l'instabilité

La traînée et le moment sont mesurés le long du seuil de l'instabilité. Plus précisément, nous collectons les efforts générés pour $U_c = U_c^-$ qui est la plus petite vitesse en dessous de laquelle le drapeau est stable (notations de la Section 1.1.3).

L'évolution des efforts avec la longueur L de chaque drapeau est reportée sur la Figure 2.4. Une forte discontinuité est observée à $L \simeq 150$ mm, ce qui correspond à la transition entre un régime de flottement à un nœud (noté "I") et un régime à deux nœuds (noté "II"). Cette transition a été vue à la Section 1.1.4 pour ces mêmes drapeaux. Nous observons que l'écart-type de la traînée et du moment décroît avec L dans chaque régime. Plus précisément, dans le régime (I) et (II), la décroissance moyenne est du type :

$$\sigma_D \sim L^{-3.0}, \qquad \sigma_M \sim L^{-2.1}.$$

Quel est le lien avec l'amplitude de flottement ?

L'amplitude crête-à-crête du bord de fuite du drapeau est mesurée par camera rapide et reportée sur la Figure 2.5. L'amplitude est quasiment constante dans chaque régime, avec $2A \simeq 30$ mm dans le régime (I) et $2A \simeq 100$ mm dans le régime (II). Le fait que les efforts

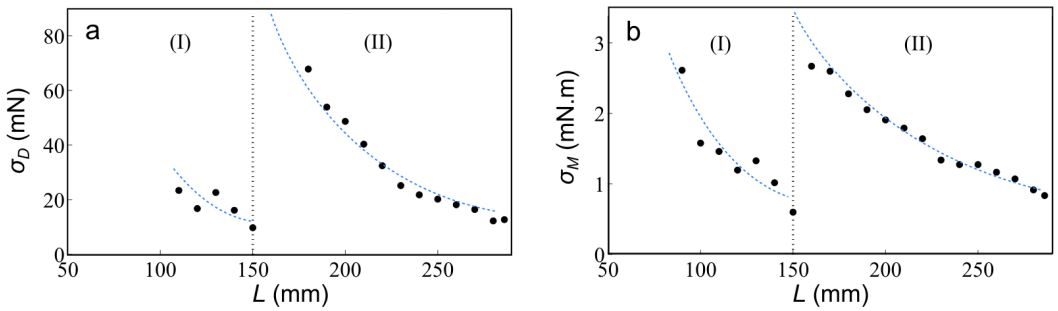


*Figure 2.4 – Évolution des composantes instationnaires des efforts au seuil de l'instabilité, caractérisés par les écarts-types σ_D et σ_M. **a :** Cas de la traînée $D(t)$. Les deux courbes en pointillés correspondent aux meilleurs ajustements par des lois de puissance $\sigma_D \sim L^{-3.0}$ dans chaque régime. **b :** Cas du moment $M(t)$. Les régimes (I) et (II) correspondent respectivement à un et à deux nœuds de vibration. Les deux courbes en pointillés correspondent aux meilleurs ajustements par des lois de puissance $\sigma_M \sim L^{-2.1}$ dans chaque régime.*

diminuent pour les drapeaux longs n'est donc pas corrélé à une diminution de l'amplitude de flottement. Cependant, nous observons que l'amplitude augmente fortement ($\times 3.3$) à la transition de régime, ce qui est cohérent avec l'accroissement observé de la traînée et du moment.

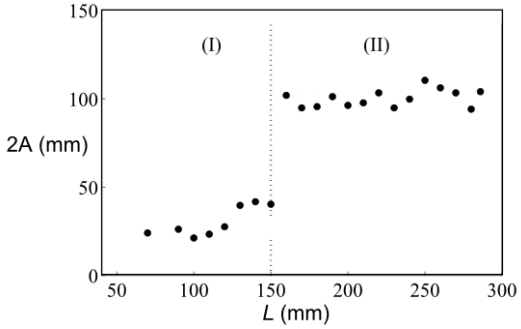


Figure 2.5 – Amplitude de flottement crête-à-crête $2A$ du bord de fuite du drapeau, mesuré par caméra rapide au seuil de l'instabilité. Les régimes (I) et (II) correspondent respectivement à un et à deux nœuds de vibration.

Analyse fréquentielle de $D(t)$ et de $M(t)$

L'évolution des densités spectrales de puissance est présentée sur la Figure 2.6. Dans ce type de représentation, chaque tranche verticale en échelle de couleur est une densité spectrale de puissance identique à l'exemple illustratif de la Figure 2.3c,d.

Les densités spectrales de puissance présentent un pic prononcé (la couleur la plus foncée), ce qui suggère que le flottement est fortement périodique dans cette plage de paramètres. Cependant, la présence d'harmoniques suggère que le flottement n'est pas parfaitement symétrique au cours des expériences. À la transition de régime, un saut de fréquence est très clair : cela était prédit par notre analyse élémentaire de la Section 1.3.2, mais également par les travaux théoriques de Watanabe (2002b).

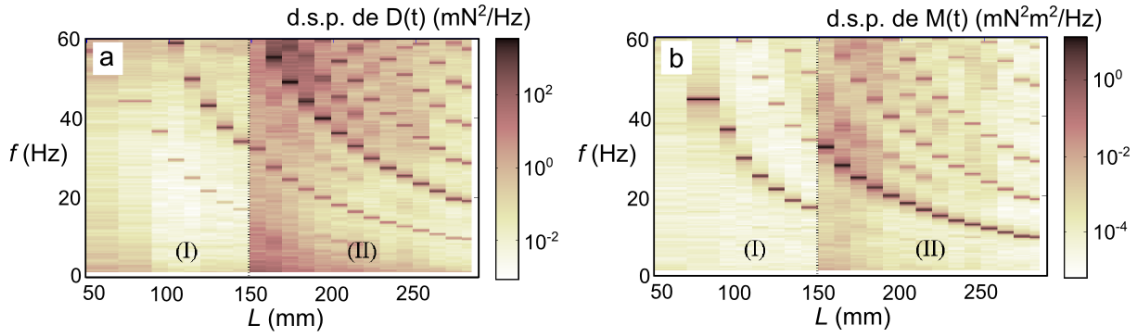


Figure 2.6 – Évolution des densités spectrales de puissance au seuil de l'instabilité. ***a :*** *Cas de la traînée $D(t)$.* ***b :*** *Cas du moment $M(t)$. L'échelle de couleur des graphiques est logarithmique. Les régimes (I) et (II) correspondent respectivement à un et à deux nœuds de vibration.*

2.2.3 L'effet du vent sur les efforts

Dans les expériences précédentes, les efforts ont été uniquement mesurés au seuil de l'instabilité. Au-delà de ce seuil, le mouvement du drapeau peut être régulé par de fortes non-linéarités structurelles et fluides. Comme cela a été récemment souligné par Eloy *et al.* (2012), la dynamique non-linéaire d'un drapeau est encore aujourd'hui obscure. Dans ce contexte, cette section est dédiée à la mesure des efforts pour des vitesses de vent plus grandes que la vitesse critique. Nous verrons en quoi des informations sur la dynamique non-linéaire du drapeau peuvent être extraites de la mesure des efforts.

Trois drapeaux sont étudiés ci-dessous. Le premier est choisi pour commencer à flotter dans le régime (I) avec un nœud et est de longueur $L = 140$ mm (nommé "Drapeau 1"). C'est le drapeau qui a été étudié dans la Section 1.1.6 du Chapitre 1. Ce drapeau a une vitesse critique relativement faible, ce qui permet d'analyser son flottement sur toute la gamme de vitesse de vent de la soufflerie (jusqu'à environ 18 m/s). Deux autres drapeaux sont choisis, cette fois-ci de manière à ce qu'ils commencent à flotter dans le régime (II) avec deux nœuds. Ils sont de longueur $L = 250$ mm (nommé "Drapeau 2") et $L = 286$ mm (nommé "Drapeau 3"). Ces deux drapeaux ont une vitesse critique relativement faible, et Drapeau 3 est le plus long drapeau pouvant être étudié dans la soufflerie. Le Tableau 2.1 résume les paramètres de ces trois drapeaux.

	"Drapeau 1"	"Drapeau 2"	"Drapeau 3"
L (mm)	140	250	286
$H^* = H/L$	0.71	0.40	0.35
m_e^*	0.33	0.44	0.47
U_{c1}^+ (m/s)	10.1	–	–
U_{c2}^+ (m/s)	15.0	9.0	6.4
U_{c3}^+ (m/s)	16.7	11.4	10.1
U_{c4}^+ (m/s)	–	12.6	10.9

Tableau 2.1 – Sélection de trois drapeaux pour l'étude de l'évolution des efforts avec la vitesse de vent.

Pour chaque drapeau, des essais en soufflerie sont effectués à vitesse de vent croissante, jusqu'à ce que le drapeau se déchire[2], de la même manière que Watanabe *et al.* (2002a). Les écarts-types de la traînée σ_D et du moment σ_M sont présentés sur la Figure 2.7. Pour une vitesse de vent donnée, nous attendons l'établissement d'un régime "permanent" avant de commencer la mesure. La vitesse du vent est ensuite augmentée par un incrément d'environ 0.2 m/s pour la mesure suivante.

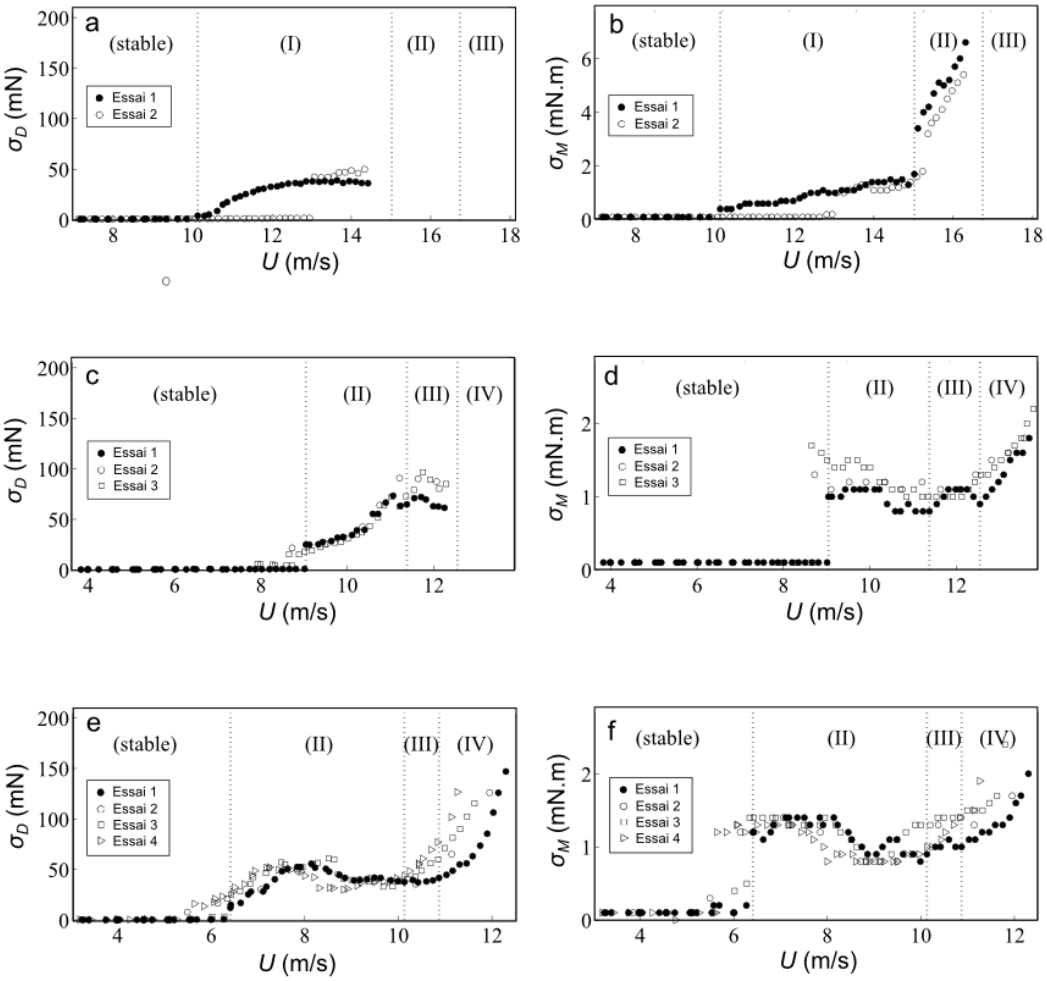


Figure 2.7 – Évolution des composantes instationnaires de la traînée $D(t)$ et du moment $M(t)$, caractérisés par leur écart-type, lorsque la vitesse du vent augmente. ***a,b :*** *Drapeau 1.* ***c,d :*** *Drapeau 2.* ***e,f :*** *Drapeau 3. Les symboles vides désignent des essais de reproductibilité. Les régimes (I), (II), (III) et (IV) correspondent respectivement à un, deux, trois et quatre nœuds de vibration.*

Les premières mesures sont effectuées avec Drapeau 1 (Figure 2.7a et Figure 2.7b). Le flottement débute à $U = 10.1$ m/s, où nous observons une discontinuité de σ_D et de σ_M, suivie d'une légère croissance. Il y a une forte augmentation de σ_M à partir de $U = 15$ m/s. Nous observons également une forte augmentation de σ_D à partir de $U = 15$ m/s, mais comme la fréquence de ce signal est proche de la fréquence de coupure que nous nous sommes imposé par sécurité (60 Hz), ces données impropres sont absentes de la Figure 2.7a. Une expérience de répétabilité est réalisée avec un nouveau drapeau (cercles vides sur la Figure 2.7a et sur la Figure 2.7b). Nous pouvons remarquer que la vitesse critique est significativement plus élevée

2. L'Annexe D est dédiée à l'analyse de la rupture des drapeaux.

lors de ce second essai. L'écart de vitesse critique est attribuable aux défauts d'encastrement, difficiles à contrôler en pratique et générant de la bistabilité (voir la Section 1.1.3 du Chapitre 1). Néanmoins, des valeurs d'efforts comparables sont obtenues lorsque le drapeau flotte (Figure 2.7a et Figure 2.7b).

Un second ensemble d'expériences concerne Drapeau 2 (Figure 2.7c et Figure 2.7d). Au-delà de la vitesse critique à $U = 9.0$ m/s, nous observons que σ_D croît avec la vitesse de vent pour $U \leq 11.4$ m/s, puis décroît légèrement. Au-dessus de $U = 12$ m/s, les données pour σ_D sont impropres. Par ailleurs, après une forte discontinuité à $U = 9.0$ m/s, σ_M décroît faiblement pour $U \leq 11.4$ m/s, reste constant pour $11.4 \leq U \leq 12.6$ m/s, puis croît pour $U \geq 12.6$ m/s. Des essais de répétabilité sont réalisés avec deux nouveaux drapeaux (cercles et carrés vides sur la Figure 2.7c et sur la Figure 2.7d), pour lesquels nous obtenons des évolutions et des valeurs d'efforts comparables.

Un troisième ensemble d'expériences concerne Drapeau 3 (Figure 2.7e et Figure 2.7f). Au-delà de la vitesse critique à $U = 6.4$ m/s, nous observons une faible discontinuité suivie d'une légère croissance de σ_D pour $U \leq 8.0$ m/s. Ensuite, σ_D décroît légèrement pour $U \leq 10.1$ m/s, puis augmente fortement. En parallèle, après un saut à la vitesse critique, σ_M décroît légèrement pour $U \leq 10.1$ m/s, puis se met à croître. Trois expériences de répétabilité sont réalisées avec le même drapeau (cercles, carrés et triangles vides sur la Figure 2.7e et sur la Figure 2.7f), pour lesquelles les évolutions et les valeurs d'effort sont très similaires.

Sans surprise, les composantes instationnaires des efforts sont négligeables lorsque le drapeau ne flotte pas, dans le régime nommé "stable" sur la Figure 2.7, où nous avons $\sigma_D \leq 1$ mN et $\sigma_M \leq 0.1$ mN.m.

Les transitions de régimes de flottement

Il vient d'être vu que les efforts évoluent généralement de manière non monotone avec la vitesse du vent. Aussi, nous pouvons nous attendre à des modifications de comportement dynamique lors des transitions de régimes de flottement discutées à la Section 1.1.6 du Chapitre 1. En pratique, détecter ces changements de régimes n'est pas impossible à l'œil nu (en comptant les "nœuds" de l'enveloppe du flottement) mais délicat à cause de l'aspect "brouillé" du mouvement rapide. Nous utilisons préférablement des enregistrements vidéos à la caméra rapide. Comme nous l'avons discuté au Chapitre 1, il n'est pas complètement surprenant que les régimes de flottement soient caractérisés par un nombre constant de "nœud", car ces régimes correspondent à des projections sur un faible nombre de modes de flexion de poutres (voir par exemple Howell *et al.*, 2009 ; Huang & Zhang, 2013). Nous définissons les régimes (I), (II), (III) et (IV) comme étant les régimes à un, deux, trois ou quatre nœuds, tels que U_{c1}^+, U_{c2}^+, U_{c3}^+ et U_{c4}^+ soient les vitesses de vent auxquelles nous observons l'établissement de ces régimes. Ces données sont reportées sur le Tableau 2.1.

Pour rappel, les superpositions d'images vidéos de la Figure 1.10 (Section 1.1.6, Chapitre 1) permettent d'apprécier les transitions de régime de Drapeau 1. Lorsque la vitesse du vent croît, nous avons successivement un régime à un, deux, puis trois nœuds. Le dernier régime avant déchirement est caractérisé par des "bouffées chaotiques". Le drapeau subit des épisodes de claquement, ce qui sera discuté à la fin de cette section. De même, l'analyse des vidéos de Drapeau 2 et Drapeau 3 suggère que le régime à deux nœuds est suivi par un régime à trois puis quatre nœuds.

Quel est le lien avec l'amplitude de flottement ?

L'évolution de l'amplitude de flottement de Drapeau 1 est reportée sur la Figure 2.8a. Après que la vitesse de vent critique $U = 10.1$ m/s soit dépassée, l'amplitude de flottement atteint une valeur constante $2A \simeq 60$ mm. Pour $U > 14$ m/s, la diminution de l'amplitude de flottement reflète les modifications d'enveloppe avant l'établissement du régime à deux nœuds. Dans les régimes suivants, l'amplitude est comprise dans la gamme $2A \simeq 80 - 110$ mm.

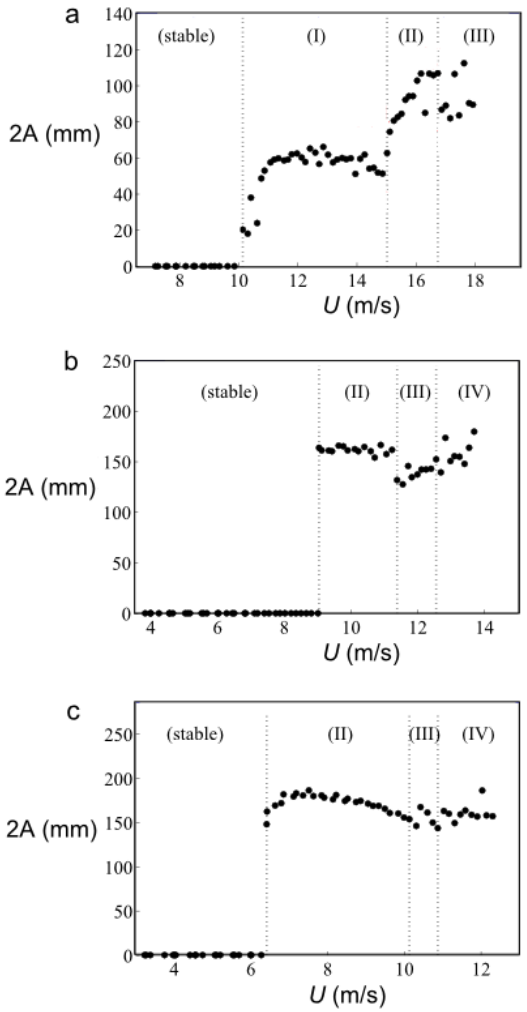


Figure 2.8 – Amplitude de flottement crête-à-crête $2A$ du bord de fuite du drapeau, mesuré par caméra rapide en fonction de la vitesse du vent. ***a :*** *Drapeau 1.* ***b :*** *Drapeau 2.* ***c :*** *Drapeau 3. Les régimes (I), (II), (III) et (IV) correspondent respectivement à un, deux, trois et quatre nœuds de vibration.*

Les amplitudes de flottement de Drapeau 2 et Drapeau 3 sont reportées respectivement sur la Figure 2.8b et sur la Figure 2.8c. Pour ces drapeaux, l'initiation du flottement se fait par un régime à deux nœuds et est caractérisée par de grandes amplitudes de flottement $2A \simeq 150$ mm. Lorsque la vitesse du vent augmente, l'amplitude reste constante pour Drapeau 2 jusqu'au régime à trois nœuds, où l'amplitude diminue légèrement. Ensuite, l'amplitude croît à nouveau dans le régime à quatre nœuds. Pour Drapeau 3, nous remarquons un léger rebond d'amplitude à $U \simeq 7.5$ m/s, qui est associé au changement d'enveloppe avant le régime à trois nœuds. Nous devons noter que les maxima d'amplitude de Drapeau 2 et de Drapeau 3 sont proches des parois de la soufflerie (de largeur 240 mm), de sorte qu'une détérioration du sillage est

possible (Tang & Païdoussis, 2007). Les données pour Drapeau 2 et Drapeau 3 sont donc à prendre avec précaution.

2.2.4 Analyse fréquentielle

Afin de mieux comprendre l'évolution des efforts avec la vitesse du vent (Figure 2.7), nous nous proposons d'analyser l'évolution des densités spectrales de puissance pour chaque vitesse de vent. Les résultats concernant Drapeau 1 sont reportés sur la Figure 2.9a en ce qui concerne la traînée $D(t)$ et sur la Figure 2.9b pour le moment $M(t)$. Pour rappel, à chaque vitesse de vent nous attendons qu'un régime "permanent" soit établi, puis nous faisons une acquisition de 14 s avec la balance aérodynamique.

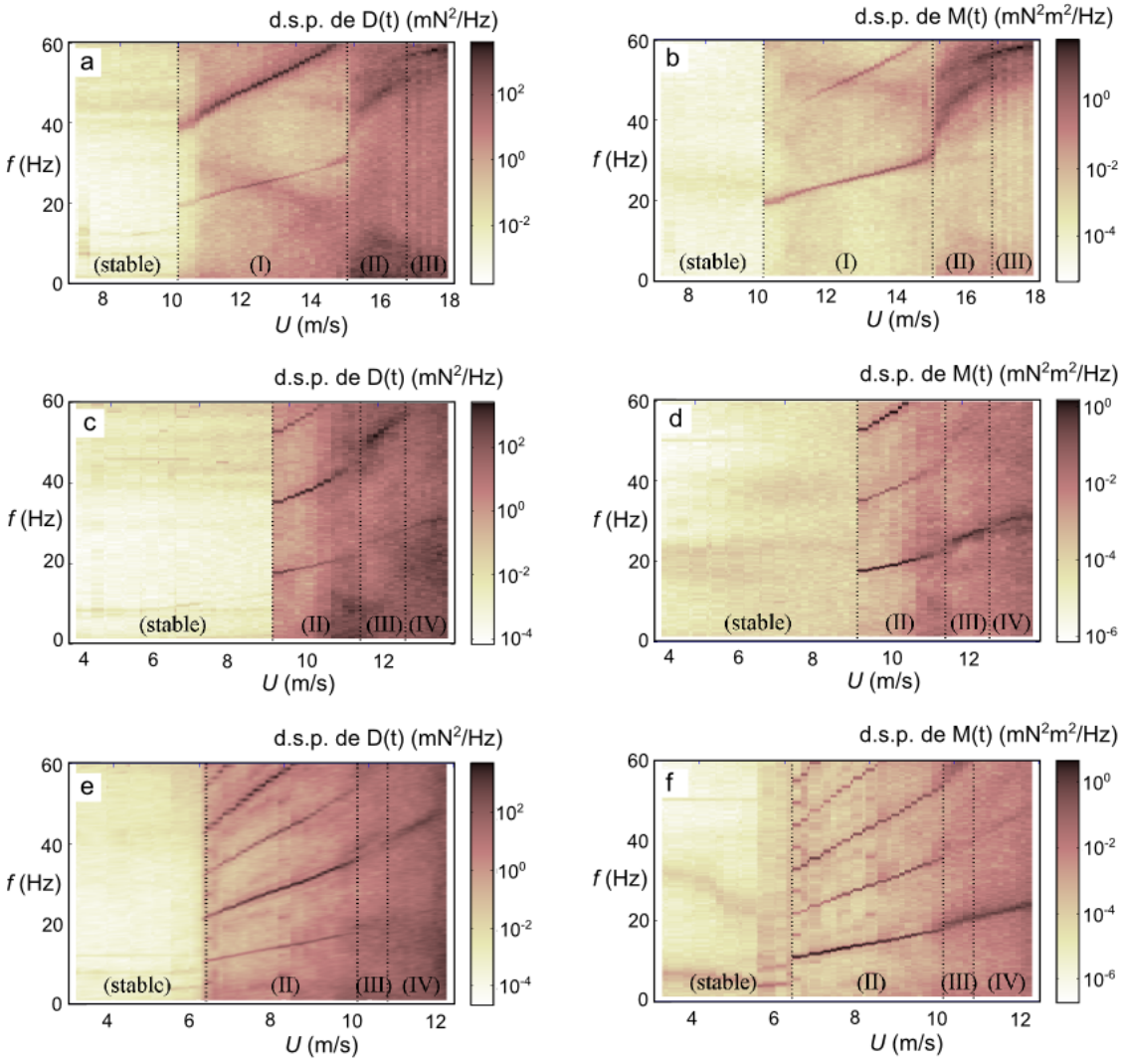


Figure 2.9 – Évolution des densités spectrales de puissance de la traînée $D(t)$ et du moment $M(t)$ lorsque la vitesse du vent augmente. ***a,b :*** *Drapeau 1.* ***c,d :*** *Drapeau 2.* ***e,f :*** *Drapeau 3. L'échelle de couleur des graphiques est logarithmique. Les régimes (I), (II), (III) et (IV) correspondent respectivement à un, deux, trois et quatre nœuds de vibration.*

Dans le cas de la Figure 2.9a par exemple, nous calculons une quarantaine de densités spectrales indépendantes (reportées verticalement), la soufflerie n'étant pas arrêtée entre chaque mesure. Sur la Figure 2.9a, nous observons une fréquence dominante (foncée en échelle de

couleur) qui croît linéairement avec la vitesse du vent, en partant de 40 Hz, ainsi qu'une fréquence sous-harmonique de faible densité qui suggère que le flottement n'est pas complètement symétrique. Sur la Figure 2.9b, la fréquence dominante croît à partir de 20 Hz, et un saut est observable à $U = 15$ m/s (transition du régime à un nœud vers le régime à deux nœuds). Un second saut est visible à $U = 16.7$ m/s (transition du régime à deux nœuds vers un régime à trois nœuds). Sans surprise, la fréquence dominante du moment est systématiquement égale à la fréquence observée par caméra rapide (Section 1.1.6 du Chapitre 1). Une fois que le régime à deux nœuds est établi à $U = 15.0$ m/s nous observons une baisse de périodicité sur la Figure 2.9b, caractérisée par un étalement des pics sur les densités spectrales. Il est tentant de penser qu'il s'agit d'une transition vers un régime chaotique, car il y a apparition d'un fort contenu fréquentiel basse-fréquence (Manneville, 2004). Une méthode de détection du chaos est proposée dans l'Annexe E.

Dans la situation de Drapeau 2 et Drapeau 3 (sur les Figures 2.9c-f), les spectres ne sont pas fortement modifiés aux transitions de régime, mais une "hésitation" entre les régimes se répercute sur les densités spectrales de puissance, où nous observons un "trou" de fréquence dominante, respectivement à $U = 11.4$ m/s pour Drapeau 2 et à $U = 10.1$ m/s pour Drapeau 3. Ensuite, le mouvement du drapeau est de moins en moins périodique au fur et à mesure que la vitesse du vent augmente. Cela présage la nature non-linéaire du flottement de drapeau à grande vitesse de vent.

Avec l'exemple de la Figure 2.3, nous avons vu que la fréquence dominante de la traînée est le double de celle du moment. Plus précisément, nous voyons maintenant qu'en termes de densité spectrale, le moment a des fréquences dominantes "impaires" (i.e. $1 \times f$, $3 \times f$, $5 \times f$, ...) tandis que la traînée a des fréquences dominantes "paires" (i.e. $2 \times f$, $4 \times f$, ...). Cela est cohérent avec la symétrie du flottement, comme discuté par Michelin *et al.* (2008), où l'angle de fuite génère un spectre à harmoniques impaires tandis que le spectre de l'énergie est à harmonique paires.

Signature du couplage entre les modes

Avec la Figure 2.9f, nous noterons que deux fréquences stables coalescent visiblement dans la gamme de vitesse $U = 4 - 6$ m/s avant de générer l'instabilité du flottement. Cela avait été suggéré par la modélisation élémentaire de la Section 1.3.2 (Chapitre 1), et rappelle aussi les observations d'Aurégan (1993, p148) dans le contexte de la modélisation du ronflement.

Notons qu'un second type de coalescence est observable. En effet, sur la Figure 2.9b, avant la transition au régime à deux nœuds, deux fréquences se rapprochent à partir de $U = 10$ m/s, avant de fusionner autour de $U = 15$ m/s. Nous assistons ensuite à une perte de périodicité.

2.2.5 Les "claquements" des drapeaux

En comparant la Figure 2.7 à la Figure 2.9, nous voyons que les écarts-types des efforts sont plus importants lorsque le flottement est "moins" périodique. Cela a approximativement lieu à la suite de la première transition de régime. D'un point de vue historique, la perte de périodicité du flottement de drapeau a été étudiée par Taneda (1968) : "[...] the oscillation becomes violent and irregular [...]". Cet événement est largement prédit par les modèles numériques non-linéaires (Yadikin *et al.*, 2001 ; Connell & Yue, 2007 ; Alben & Shelley, 2008 ; Michelin *et al.*, 2008 ; Huang & Sung, 2010), bien que l'origine précise de la transition au chaos ne soit pas très claire. Plus récemment, Eloy *et al.* (2012) a suggéré que la perte de périodicité provient de l'interaction entre deux modes de fréquence comparable. À la fois d'un point de vue expérimental et numérique, trois comportements sont reportés lorsque la vitesse du vent

croît : stabilité, puis flottement périodique, et enfin flottement chaotique (voir les expériences récentes de Ait Abderrahmane *et al.*, 2011 ; Zhao *et al.*, 2012 ; Ait Abderrahmane *et al.*, 2012 ; Chen *et al.*, 2014). Il est commun que des structures flexibles subissant de fortes excitations exhibent des propriétés chaotiques (désordre temporel) ou turbulentes (désordre temporel et spatial). Ceci a par exemple été observé récemment avec les instruments de musique de type cymbales (Touzé *et al.*, 2012).

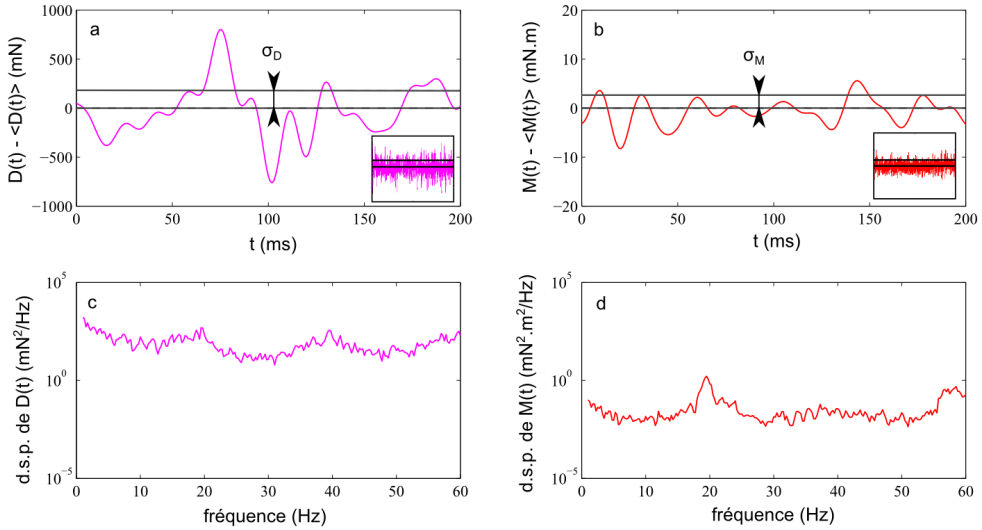


Figure 2.10 – Les claquements de drapeau illustrés dans le cas de Drapeau 3. La vitesse du vent en soufflerie est $U = 12.3$ m/s. ***a :*** *Composante instationnaire de la traînée $D(t)$ reconstruit sur 200 ms, caractérisée par son écart-type σ_D. Encart : Le signal complet de 14 s.* ***b :*** *Composante instationnaire du moment $M(t)$ reconstruit sur 200 ms, caractérisée par son écart-type σ_M. Encart : Le signal complet de 14 s.* ***c,d :*** *Densités spectrales de puissance respectives des signaux de 14 s, en échelle semi-logarithmique.*

Prenons un exemple d'illustration du phénomène de claquement de drapeau. Dans le cas de Drapeau 3, une perte de périodicité est attendue pour $U \geq 10.1$ m/s, d'après la Figure 2.9f. Sur la Figure 2.10, nous reportons les signaux d'efforts et les densités spectrales associées à $U = 12.3$ m/s. La traînée est caractérisée par $\sigma_D = 180$ mN, signifiant que le maximum du signal devrait être $\sqrt{2} \times \sigma_D = 250$ mN dans le cas d'un signal harmonique. Cependant, sur des intervalles de temps de l'ordre de 10 ms, la traînée atteint 3 fois cette valeur (≥ 800 mN). Pendant les épisodes de claquement, le moment autour du mât est plus petit que l'écart-type moyen $\sigma_M = 2.7$ mN.m (Figure 2.10b). Cela suggère que les claquements sont essentiellement des accélérations longitudinales. Nous pensons que de telles accélérations participent au déchirement du drapeau, comme discuté à l'Annexe D (dédiée à la rupture des drapeaux en papier).

2.3 Analyse de la traînée générée par le drapeau

Dans cette section, nous nous focalisons sur les mesures de la traînée générée par le flottement en soufflerie. Afin d'analyser la composante instationnaire de la traînée, nous la comparerons à la composante stationnaire (c'est-à-dire la traînée moyenne) dans les mêmes conditions. Cela permettra de déterminer l'importance relative des fluctuations de la force de traînée. Nous réalisons donc des expériences supplémentaires avec des jauges de contrainte (car les capteurs de force de la balance aérodynamique ne permettent pas d'obtenir la valeur moyenne des efforts ; Annexe C).

2.3.1 Coefficient de traînée moyenne

La force de traînée moyenne $< D(t) >$ (Figure 2.11) n'est pas directement accessible avec la balance aérodynamique de l'Annexe C.

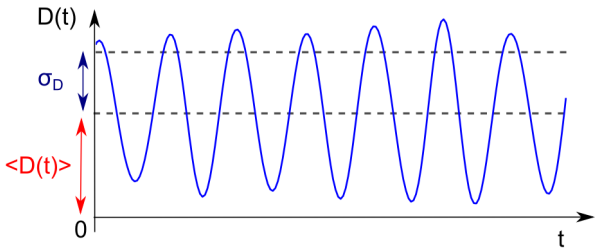


Figure 2.11 – Caractéristiques de la traînée $D(t)$: sa valeur moyenne $< D(t) >$ est a priori inconnue et son écart-type σ_D a été mesuré via la balance aérodynamique de l'Annexe C.

Afin de pouvoir peser l'importance de la composante instationnaire de la traînée vis-à-vis de sa composante moyenne, nous modifions le montage expérimental précédent. Nous utilisons un nouveau mât de mêmes dimensions que le précédent. Le mât est connecté à des jauges de contraintes, et nous calculons les moyennes temporelles de la traînée sur des acquisitions de 30 s, pour les drapeaux étudiés auparavant. Les mesures de traînée à haut nombre de Reynolds sont classiquement exprimées sous la forme de coefficients de traînée (Eiffel, 1912 ; Rayleigh, 1915a,b, Anderson, 1999) :

$$< C_D >= \frac{< D(t) >}{\frac{1}{2}\rho_a U^2 S},$$

où S est une surface arbitraire que nous choisissons comme étant $S = HL$. Cette convention est celle utilisée par Fairthorne (1930) pour l'étude des banderoles tractées par avion. L'évolution de $< C_D >$ avec la longueur du drapeau au seuil de l'instabilité est reportée sur la Figure 2.12a. Comme pour σ_D auparavant (Figure 2.4a, Section 2.1.2) nous observons un saut de $< C_D >$ à $L \simeq 150$ mm. Cela est associé à la transition de régime de flottement. Dans chaque régime, une décroissance douce de $< C_D >$ avec L est observée, comme dans les expériences de Carruthers & Filippone (2005) ; Wilk & Skuta (2009).

Avec une vitesse du vent croissante, nous mesurons également l'évolution de $< C_D >$ pour Drapeau 1, Drapeau 2 et Drapeau 3. Cela est reporté sur la Figure 2.12b. Dans la situation de Drapeau 3 (triangles noirs), nous observons que $< C_D >$ croît tout d'abord de $< C_D > \simeq 0.15$ à $U \simeq 1.05 \times U_c^-$ jusqu'à $< C_D > \simeq 0.30$ à $U \simeq 1.4 \times U_c^-$. Ensuite, $< C_D >$ décroît lentement et tend asymptotiquement vers $< C_D > \simeq 0.22$. L'évolution de $< C_D >$ présente donc un aspect bombé, ce qui a été également observé par Morris-Thomas & Steen (2009). Cela peut être mis en parallèle de l'aspect bombé de l'amplitude de flottement (Figure 2.8c, Section 2.1.3). Dans la

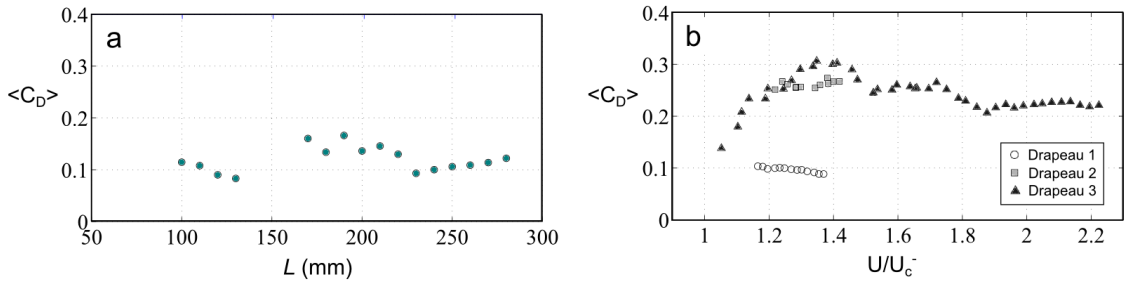


*Figure 2.12 – Évolution du coefficient de traînée moyenne $< C_D >$. **a :** En fonction de la longueur du drapeau, au seuil de l'instabilité ($U = U_c^-$). **b :** Pour une vitesse de vent croissante appliquée à Drapeau 1, Drapeau 2 et Drapeau 3 (Tableau 2.1).*

situation de Drapeau 1 et Drapeau 2, les résultats sont uniquement présentés dans une faible gamme de vitesse de vent $U = 1.1 - 1.4 \times U_c^-$. Au-delà, les données sont impropres à cause de l'interaction entre le drapeau et le système de mesure des efforts moyens. Cette interaction est forte lorsque la fréquence de flottement du drapeau est de l'ordre de la fréquence naturelle du montage à jauges de contrainte ($\simeq 25$ Hz). Enfin, nous observons que lorsque Drapeau 2 ou Drapeau 3 flottent dans le régime à deux nœuds, $< C_D >$ est quasiment 3 fois plus grand que lorsque Drapeau 1 flotte dans le régime à un nœud.

2.3.2 Coefficient de traînée instationnaire

Nous définissons un coefficient de traînée instationnaire $\sigma(C_D)$ par :

$$\sigma(C_D) = \frac{\sigma_D}{\frac{1}{2}\rho_a U^2 S}, \qquad \text{avec} \quad S = HL.$$

L'évolution de $\sigma(C_D)$ avec L est reportée sur la Figure 2.13a, en réutilisant les données de la Section 2.1.2. Nous notons à nouveau la discontinuité due à la transition de régime à $L \simeq 150$ mm, ainsi qu'une tendance décroissante dans chaque régime de flottement. Nous reportons l'évolution de $\sigma(C_D)$ avec la vitesse de vent pour Drapeau 1, Drapeau 2 et Drapeau 3 sur la Figure 2.13b, en réutilisant les données de la Section 2.1.3. Les valeurs de $\sigma(C_D)$ présentent un aspect bombé dont le maximum est situé à approximativement $U = 1.4 \times U_c^-$ pour Drapeau 1 et Drapeau 3, et à $U = 1.6 \times U_c^-$ pour Drapeau 2. Cela correspond justement aux maxima d'amplitude de flottement reportés à la Section 2.1.3. Dans la situation de Drapeau 3, nous voyons que $\sigma(C_D)$ augmente au-delà de $U = 1.8 \times U_c^-$, c'est-à-dire là où nous avons détecté une perte de périodicité.

Il est instructif de comparer la composante instationnaire de la traînée à sa valeur moyenne via le ratio $\sigma(C_D)/ < C_D >$. Cela permet d'avoir une idée de l'instationarité de la traînée. Dans la situation de Drapeau 3, le ratio $\sigma(C_D)/ < C_D >$ est de l'ordre de $10\ \%$ pour $U \leq 1.8 \times U_c^-$, avec un maximum à $15\ \%$ en haut de l'aspect bombé à $U = 1.4 \times U_c^-$. En revanche, le ratio atteint quasiment $30\ \%$ dans le régime de perte de périodicité, pour $U \geq 1.8 \times U_c^-$.

2.3.3 Confrontation aux modélisations existantes

Des modèles pour le coefficient de traînée sont disponibles dans la littérature scientifique. Fairthorne (1930) propose une formule empirique, basée sur ses propres expériences avec treize drapeaux, pour des nombres de masse $M^* = \rho_a L/(\rho_s d)$ de l'ordre de $M^* = 4.3{-}97$, et avec une vitesse de vent constante $U = 30.5$ m/s. La traînée de friction visqueuse devenant négligeable

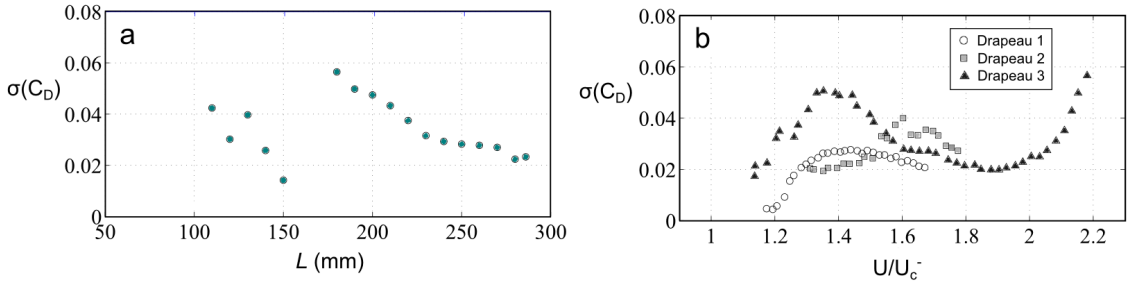


Figure 2.13 – Évolution du coefficient de traînée instationnaire $\sigma(C_D)$ (données de la Section 2.2). ***a :*** *En fonction de la longueur du drapeau, au seuil de l'instabilité ($U = U_c^-$).* ***b :*** *Pour une vitesse de vent croissante appliquée à Drapeau 1, Drapeau 2 et Drapeau 3 (Tableau 2.1).*

lorsque le drapeau flotte, la formule de Fairthorne $< C_D^{\text{Fai.}} >$ peut être simplifiée de la manière suivante :

$$< C_D^{\text{Fai.}} >= 0.78 \frac{(H^*)^{0.25}}{M^*}.$$

L'expression ne prend pas en compte la vitesse de vent, mais dépend fortement du nombre de masse. Nous voyons que cela est contraire aux expériences, qui suggèrent plutôt de fortes variations avec la vitesse du vent. Les données de $< C_D^{\text{Fai.}} >$ correspondant au Drapeau 1, Drapeau 2 et Drapeau 3 sont reportées dans le Tableau 2.2, où elles sont comparées à nos mesures expérimentales à $U = 1.4 \times U_c^-$. Dans la situation de Drapeau 3, la formule de Fairthorne donne $< C_D^{\text{Fai.}} > \simeq 0.21$, ce qui est significativement plus petit que la valeur $< C_D > \simeq 0.30$ reportée à $U = 1.4 \times U_c^-$, mais en accord avec la valeur asymptotique $< C_D > \simeq 0.22$ de la Figure 2.12b. Dans la situation de Drapeau 1, nous mesurons $< C_D > \simeq 0.09$, bien plus faible que la valeur prédite par la formule de Fairthorne $< C_D^{\text{Fai.}} > \simeq 0.52$. Cependant, un accroissement de $< C_D >$ est attendu lors de la transition du régime à un nœud vers un régime à deux nœuds, comme pour la composante instationnaire de la traînée. Finalement, nos mesures suggèrent que la formule de Fairthorne n'est pas applicable au seuil de l'instabilité de flottement, mais que la formule donne un résultat raisonnable pour les grandes vitesses de vent, de l'ordre de $U = 1.8 \times U_c^-$ pour Drapeau 3. Cela est cohérent avec le fait que la formule de Fairthorne a été établie pour de grands nombres de masse et pour des vitesses de vent élevées ($\simeq 30$ m/s).

	présent travail		Fairthorne (1939)	Moretti (2003)		Connell (2006)	
	$< C_D >$	$\sigma(C_D)$	$< C_D^{\text{Fai.}} >$	$< C_D^{\text{Mor.}} >$	$\sigma(C_D^{\text{Mor.}})$	$< C_D^{\text{Con.}} >$	$\sigma(C_D^{\text{Con.}})$
Drapeau 1	0.09	0.027	0.52	0.05	0.004	0.47	0.36
Drapeau 2	0.27	0.021	0.25	0.22	0.031	0.29	0.18
Drapeau 3	0.30	0.049	0.21	0.14	0.020	0.25	0.14

Tableau 2.2 – Comparaison des mesures de coefficients de traînée aux modélisations existantes. Les données sont reportées à $U = 1.4 \times U_c^-$

Plus récemment, Moretti *et al.* (2003) a revisité les travaux de Thoma (1939a,b) pour proposer une estimation de la tension le long du drapeau, en évaluant la perte d'énergie cinétique au bord de fuite du drapeau. Ce modèle néglige la rigidité de flexion du drapeau. Dans notre situation, la longueur d'onde caractéristique du flottement vérifie $\lambda < 2L$, ce qui

permet de simplifier le modèle :

$$< C_D^{\text{Mor.}} >= \frac{2\pi^2}{M^*}\left(\frac{fA}{U}\right)^2, \qquad \sigma(C_D^{\text{Mor.}}) = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{M^*}\left(\frac{fA}{U}\right)^2 \frac{1}{\kappa L},$$

où le ratio de la vitesse transverse du drapeau (= fA) et de la vitesse du vent (= U) dépend fortement du régime de flottement (d'après le Chapitre 1). Ce modèle élémentaire a été récemment validé par des expériences à nombre de masse $M^* = 0.53$ (Martin, 2006). Lorsque nous comparons nos mesures expérimentales à ce modèle (Tableau 2.2), nous remarquons le bon ordre de grandeur obtenu pour $< C_D^{\text{Mor.}} >$ et $\sigma(C_D^{\text{Mor.}})$, sauf pour Drapeau 1.

Dans de récentes simulations numériques directes à $\text{Re} < 5 \times 10^3$, Connell (2006) a obtenu un ajustement numérique pour le coefficient de traînée, avec des nombres de masse $M^* \leq 1$. Dans notre situation, les expressions peuvent être approchées de la manière suivante :

$$< C_D^{\text{Con.}} >= \frac{0.8}{M^*}\left(1 - \left(\frac{2\pi}{U^*}\right)^2\right), \qquad \sigma(C_D^{\text{Con.}}) = \frac{1.5}{(M^*)^{1.5}}\left(1 - \left(\frac{2\pi}{U^*}\right)^2\right)^{1.5},$$

où les termes dépendant de la vitesse du vent U^* sont négligeables pour $U^* \gg 1$. L'expression analytique $< C_D^{\text{Con.}} >$ est très proche de $< C_D^{\text{Fai.}} >$, et donne par conséquent des résultats similaires. Néanmoins, l'estimation de $\sigma(C_D^{\text{Con.}})$ est un ordre de grandeur plus grande que l'observation expérimentale.

Finalement, les auteurs précédents ont comme point commun le fait d'avoir obtenu une loi pour $< C_D >$ qui varie très peu avec la vitesse de vent et qui est inversement proportionnelle au nombre de masse $M^* = \rho_a L/(\rho_s d)$. En ce qui concerne la composante instationnaire $\sigma(C_D)$, nous voyons qu'il subsiste un désaccord entre les résultats expérimentaux et la simulation numérique directe de Connell (2006), qui est en partie imputable aux différences de nombre de Reynolds expérimental/numérique et à la restriction du calcul au cas des drapeaux trapus.

2.4 Analyse du moment généré par le drapeau

Dans cette section, nous nous focalisons sur le moment généré autour du mât du drapeau. Ce moment sera l'effort "moteur" du dispositif étudié au Chapitre 3. Nous allons voir qu'un modèle élastique très simple permet de rendre compte des tendances observées en soufflerie sur l'écart-type du moment.

> *"One cannot divide the different branches of science into those that are important for practical applications and others that are not. The primary aim of science is not application, it is gaining insights into the causes and laws which govern natural processes." (Weisskopf, 1972)*

2.4.1 Propriétés du moment

Vérification des ordres de grandeurs

Le moment qu'exerce le drapeau sur son mât au cours du temps est noté $M(t)$. Pour un flottement symétrique[3], $M(t)$ est un signal de moyenne temporelle nulle et est caractérisé par un écart-type σ_M (Figure 2.14).

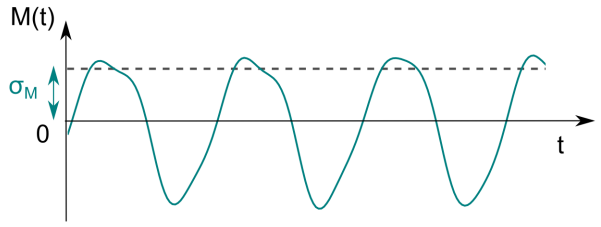


Figure 2.14 – Caractéristiques du moment $M(t)$: la valeur moyenne est nulle et l'écart-type est noté σ_M (mesuré à la Section 2.2).

Par définition, $M(t)$ est le moment interne transmis par la structure élastique du drapeau à son encastrement. Au Chapitre 1, nous avons rappelé l'expression analytique de ce moment interne :

$$M(t) = M_{\text{int}}(t) = EI\mathcal{C}_o(t), \tag{2.1}$$

où EI est la rigidité de flexion (avec $EI \simeq 1.8 \times 10^{-4}$ N.m^2 pour les drapeaux en papier 120 g/m^2 testés dans le présent chapitre) et où $\mathcal{C}_o(t) \simeq \partial_x^2 y(0,t)$ est la courbure du drapeau à l'encastrement. La courbure est généralement exprimée en termes de rayon de courbure $R_o(t) = 1/\mathcal{C}_o(t)$, comme schématisé sur la Figure 2.15a.

Par essence, la courbure est proportionnelle à une dérivée seconde et il est donc délicat de l'estimer graphiquement à partir des images de la caméra rapide (erreurs d'appréciations dépassant les 50 %). Pour fixer les idées, dans le cas de la Figure 2.15b, remarquons que le rayon de courbure minimal[4] observé au cours du flottement de Drapeau 1 à $U = 14$ m/s est de l'ordre de $R_o \simeq 10^{-1}$ m, d'où un moment maximal de l'ordre de $EI/R_o \simeq 2 \times 10^{-3}$ N.m, ce qui est en accord avec les mesures faites en soufflerie par balance aérodynamique : nous avions trouvé $\sigma_M \simeq 1.5 \times 10^{-3}$ N.m (Figure 2.7b de la Section 2.2), soit un moment maximal $\sqrt{2}\sigma_M \simeq 2.1 \times 10^{-3}$ N.m.

3. Lorsque le battement à gauche est équivalent au battement à droite.
4. Rayon de courbure minimal à l'encastrement, c'est-à-dire courbure maximale à l'encastrement.

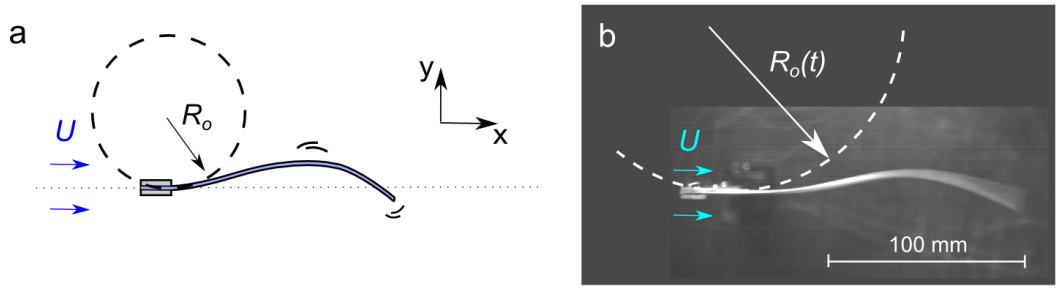


Figure 2.15 – Caractérisation de la courbure à l'encastrement du drapeau. ***a :*** *Définition du rayon de courbure R_o à l'encastrement.* ***b :*** *Ordre de grandeur de R_o avec Drapeau 1 à $U = 14$ m/s.*

Moment généré par les modes de flexion

Afin de mettre en évidence la dépendance du moment à la géométrie du drapeau, intéressons nous aux moments générés par les modes propres de drapeau dans le vide (modes de flexion de poutre), comme au Chapitre 1. Avec l'équation (2.1) et par double dérivation de l'équation (1.4) (Chapitre 1), il vient l'expression de l'écart-type du moment de chacun des modes de flexion :

$$\sigma_M^{(n)} = \underbrace{EI}_{\text{rigidité de flexion}} \quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{A}{L^2}|\kappa_n L|^2}_{\substack{\text{écart-type de la} \\ \text{courbure du mode } n}} \quad . \tag{2.2}$$

Cette expression suggère que les modes élevés, caractérisés par les grands nombres d'ondes $\kappa_n L$, génèrent des moments plus élevés. Aussi, l'équation (2.2) suggère une loi d'échelle du type $\sigma_M \sim L^{-2}$, ce qui est remarquablement proche de la dépendance trouvée expérimentalement au seuil du flottement à la Section 2.2.2 (où nous avions $\sigma_M \sim L^{-2.1}$; voir Figure 2.4b).

2.4.2 Solution numérique en termes de coefficient de moment

Repartons du modèle de drapeau élancé, discrétisé par la méthode de Galerkin comme effectué au Chapitre 1. Nous nous proposons de caractériser le moment $M(t)$ dans un diagramme (m^*, U^*). La première étape est de mettre en évidence une normalisation pertinente pour $M(t)$. D'après l'équation (2.1), σ_M est proportionnel à l'amplitude de flottement A (car $\mathcal{C}_o \sim A/L^2$), laquelle est inconnue numériquement. Par conséquent, nous ne pouvons pas avoir directement accès à σ_M avec l'analyse de stabilité linéaire du Chapitre 1, sans connaître au préalable l'amplitude de flottement A. Une possibilité serait de faire une hypothèse forte sur l'amplitude de flottement, de type $A/L = C^{te}$. Étant donné que les expériences de la Section 2.2 infirment une telle simplification (Figure 2.5 et Figure 2.8), nous ne le ferons pas. Plutôt, nous contournons le problème en cherchant un coefficient de moment adapté aux drapeaux. Nous commençons par normaliser la courbure à l'encastrement avec la courbure exacte qu'aurait un second mode de poutre encastrée-libre de même amplitude, via l'équation (2.2) et la relation courbure-moment :

$$\mathcal{C}_o^*(t) = \frac{L^2}{A|\kappa_2 L|^2}\mathcal{C}_o(t).$$

Nous calculons aussi l'écart-type du moment sous forme normalisée :

$$\sigma_M^* = \frac{\sigma_M}{\sigma_M^{(2)}} = \sqrt{2}\frac{1}{EI}\frac{L^2}{A|\kappa_2 L|^2}\sigma_M. \tag{2.3}$$

L'écart-type normalisé σ^*_M a le sens d'un coefficient de moment instationnaire, et est a priori plus pertinent pour les drapeaux que ne le serait un coefficient aérodynamique classique (fonction de la pression dynamique et de la surface d'exposition au fluide). En particulier, le coefficient de moment σ^*_M intègre l'origine physique du moment (élastique) et est de l'ordre de l'unité. Par exemple, d'après l'équation (2.2), nous avons $\sigma^*_M \simeq 0.16$ pour une oscillation de premier mode de poutre, $\sigma^*_M = 1$ pour le second (par définition) et $\sigma^*_M \simeq 2.8$ pour le troisième mode de poutre.

Sur la Figure 2.16a, nous reportons le calcul numérique de σ^*_M avec le modèle de drapeau élancé de la Section 1.3.3 (Chapitre 1) dans un diagramme (m^*, U^*). Nous observons des bandes obliques qui sont caractéristiques des différents régimes de flottement.

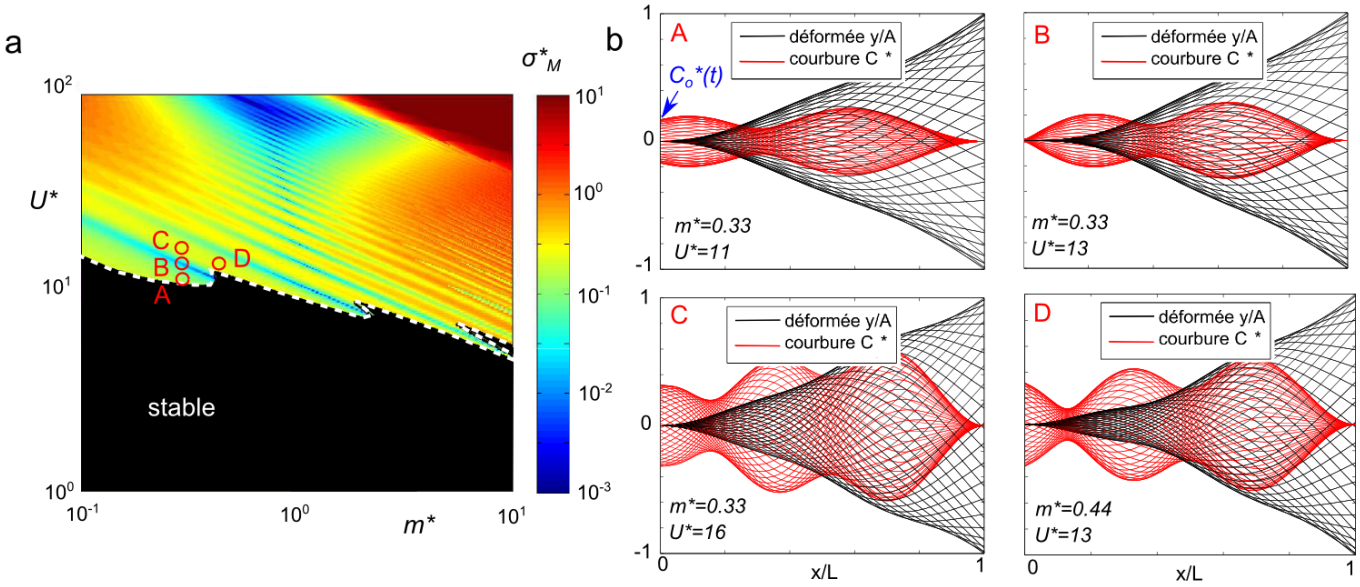


Figure 2.16 – Évolution du moment instationnaire (calcul numérique). ***a :*** *Coefficient de moment instationnaire σ^*_M, calculé via l'équation* (2.3). ***b :*** *Suivi de l'évolution des déformées et de leurs courbures sur le chemin* ***A-B-C-D*** *indiqué en* ***a****. Sur l'axe des ordonnées, le déplacement est normalisé par l'amplitude de flottement A au bord de fuite du drapeau.*

Afin de préciser l'évolution du moment avec m^* et U^*, nous suivons le chemin A-B-C-D indiqué sur la Figure 2.16a. Les déformées numériques en A, B, C et D sont reportées sur la Figure 2.16b. La courbure normalisée $\mathcal{C}^*(t)$ le long du drapeau y est représentée en rouge, et $\mathcal{C}^*_o(t)$ correspond à l'encastrement ($x/L = 0$). La courbure normalisée à l'encastrement $\mathcal{C}^*_o(t)$ est reliée au coefficient de moment instationnaire σ^*_M via l'équation (2.1) et l'équation (2.3). Nous voyons que lors du passage du régime de flottement à un nœud (A) vers le régime à deux nœuds (B), sur le chemin A-B-C, la courbure en $x/L = 0$ est très réduite pour B et par conséquent le moment est également très réduit (couleurs froides sur la Figure 2.16a). Il est remarquable que ce comportement soit également observé expérimentalement en termes de σ_M (particulièrement visible dans la Figure 2.7d et la Figure 2.7f). Par ailleurs, lorsque le chemin C-D est suivi, nous voyons que les courbures adimensionnées sont globalement conservées et il en est donc de même pour le coefficient de moment. Cela suggère une loi simple de type $\sigma^*_M = C^{te}$ au seuil de l'instabilité, en dehors des transitions de régime de flottement, expliquant au final (après un calcul élémentaire) l'observation expérimentale $\sigma_M \sim L^{-2}$ au seuil de l'instabilité, Figure 2.4b (Section 2.2.2).

2.4.3 Comparaison modèle-expériences

Afin de valider proprement le modèle de l'équation (2.1), nous nous proposons de comparer les coefficients de moment σ_M^* expérimentaux et numériques. La mesure expérimentale de σ_M^* est réalisée à partir des mesures d'amplitudes de flottement $2A$ (Figure 2.5 et Figure 2.8), des mesures d'écart-type de moment σ_M (Figure 2.4 et Figure 2.7), et enfin de la définition de σ_M^* via l'équation (2.3) où $\kappa_2 L = 1.49\pi$. Pour tenir compte des effets de masse ajoutée tridimensionnelle, nous calculons le paramètre de masse ajoutée effective $m_e^* = m_e/m_s$ plutôt que le paramètre $m^* = m_a/m_s$ propre aux drapeaux élancés uniquement (Section 1.3.4, Chapitre 1).

Prédictions de σ_M^* au seuil de l'instabilité

L'évolution de σ_M^* avec m_e^* au seuil de l'instabilité est reporté sur la Figure 2.17. Le modèle numérique permet d'obtenir le bon ordre de grandeur des moments au seuil du flottement, ainsi que la forte diminution du moment avant la première transition de régime de flottement. En particulier, pour des applications de type récupération d'énergie, la transition de régime de flottement autour de $m_e^* \simeq 0.42$ est une zone à éviter car le moment y est minimal.

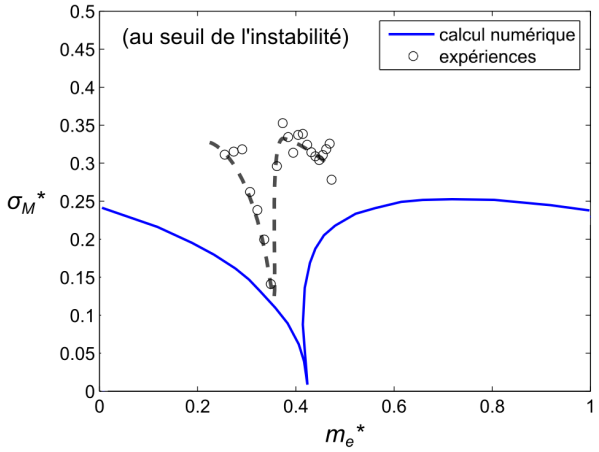


Figure 2.17 – Prédictions numériques du coefficient de moment instationnaire σ_M^* (ligne bleue) comparées aux mesures expérimentales (ronds vides) au seuil de l'instabilité. Le calcul numérique est ici réalisé autour de la marge de stabilité linéaire. La ligne en pointillés est une proposition de guide pour les yeux.

Prédictions de σ_M^* au-delà du seuil de l'instabilité

L'évolution de σ_M^* avec la vitesse de vent normalisée U^* est reportée sur la Figure 2.18 pour Drapeau 1, Drapeau 2 et Drapeau 3. Dans la situation de Drapeau 1, le bon ordre de grandeur de σ_M^* est prédit lors de l'initiation du flottement, ainsi que lors de la première transition de régime de flottement à $U^* \simeq 13$. Pour des valeurs de U^* plus élevées, le modèle numérique sous-estime fortement σ_M^*. Dans la situation de Drapeau 2 et de Drapeau 3, les "oscillations" de σ_M^* sont un point d'accord très visible entre les expériences et le modèle. Pour les trois drapeaux, le coefficient de moment varie autour d'une valeur moyenne $\sigma_M^* \simeq 0.2$ qui est typiquement intermédiaire entre celui d'un premier mode de poutre ($\sigma_M^{*(1)} \simeq 0.16$) et celui d'un second mode de poutre ($\sigma_M^{*(2)} = 1$).

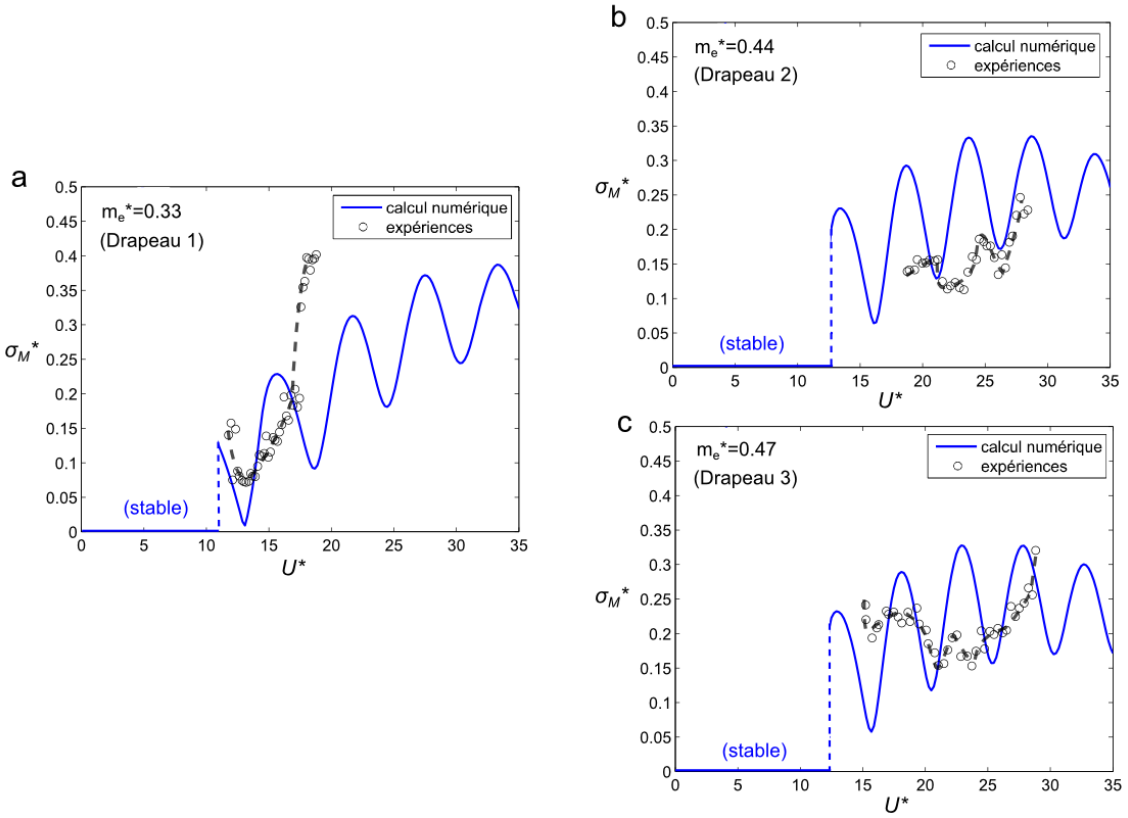


Figure 2.18 – Prédictions numériques du coefficient de moment instationnaire σ_M^* (lignes bleues) comparées aux mesures expérimentales (ronds vides) au-delà du seuil de l'instabilité pour respectivement ***(a)*** *Drapeau 1,* ***(b)*** *Drapeau 2 et* ***(c)*** *Drapeau 3. Les lignes en pointillés sont des propositions de guides pour les yeux.*

Dans la section suivante, nous allons effectivement voir que les déformées de drapeau s'obtiennent par "mélange" des déformées d'un tout petit nombre de mode de poutre.

2.5 Structure spatio-temporelle des déformées

Le modèle de l'équation (2.1) suggère que le moment est directement lié à la courbure du drapeau. Une déformée fortement courbée à l'encastrement génère un moment élevé. Afin d'obtenir une décomposition simple de la déformée d'un drapeau (et *a fortiori* du moment), nous revisitons le calcul numérique utilisé au cours de ces deux premiers chapitres. Cela va nous amener à appliquer une méthode de décomposition des déformées de drapeau obtenues lors des essais en soufflerie.

2.5.1 Déformée numérique : discrétisation de Galerkin

Une propriété intéressante de la solution numérique $y(x,t)$ recherchée via la discrétisation de Galerkin est qu'elle s'exprime sous la forme d'une somme finie de structures spatio-temporelles :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{N} Y_n(x)[a_n \cos(\omega t) + b_n \sin(\omega t)],$$

où les Y_n sont les déformées des modes de poutre encastrée-libre dans le vide, définis par l'équation (1.4) (Chapitre 1). Or, d'après l'Annexe B, la convergence de ce calcul dans notre domaine d'étude est très bonne à partir de $N = 3$. Cette convergence suggère que la structure spatio-temporelle de la déformée $y(x,t)$ provient des tout premiers modes de poutre seulement (des deux ou trois premiers vraisemblablement). Partant de ce constat numérique, une structure simple de $y(x,t)$ peut être pistée expérimentalement. Si nous nommons A et B les formes spatiales définies par :

$$\begin{cases} A(x) &= \sum_{n=1}^{N} a_n Y_n(x) \\ B(x) &= \sum_{n=1}^{N} b_n Y_n(x), \end{cases}$$

alors nous avons $y(x,t) = A(x)\cos(\omega t) + B(x)\sin(\omega t)$, et $A(x)$ et $B(x)$ sont les sommes d'un nombre restreint de déformées de mode de flexion de poutre. Expérimentalement, la déformée devrait donc aussi pouvoir s'exprimer avec cette structure, c'est-à-dire comme la somme de deux structures spatiales en quadrature de phase temporelle (i.e. orthogonales).

2.5.2 Déformée expérimentale : B.O.D. en soufflerie

Nous nous proposons d'étudier quantitativement la structure spatio-temporelle des déformées de drapeau flottant en soufflerie. Pour ce faire, le suivi temporel de 60 points le long du drapeau est réalisé avec environ 100 images traitées par période de flottement. Ensuite, un algorithme classique de décomposition spatio-temporelle, de type décomposition bi-orthogonale, est appliqué. Ce second traitement est automatisé via la Toolbox Chêne-Roseau pour Matlab (Barbacci *et al.*, 2014), après avoir grandement bénéficié des conseils de Julien Diener, Clément Grouthier et Loïc Tadrist.

Rappel du principe de la décomposition bi-orthogonale (B.O.D.)

D'après Aubry *et al.* (1991a) une information spatio-temporelle $y(x,t)$ quelconque se décompose de manière unique sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x) \psi_k(t),$$

où les φ_k d'une part (nommés "*topos*") et les ψ_k d'autre part (nommés "*chronos*") sont orthogonaux entre eux[5]. Il y a donc orthogonalité spatiale et temporelle des couples {*topos*, *chronos*} entre eux. Cette décomposition est celle mise en évidence dans le calcul numérique de la Section 2.5.1, si toutefois l'orthogonalité spatiale entre A(x) et B(x) est vérifiée.

D'un point du vue général, la décomposition bi-ortogonale (notée classiquement B.O.D. comme "Bi-Orthogonal Decomposition") permet de récupérer l'information temporelle contenue dans la décomposition propre orthogonale plus "répandue", notée P.O.D. (voir par exemple Aubry, 1991b ; Trefethen & Bau, 1997 ; Podvin, 2001 ; Semeraro *et al.*, 2012). Des liens instructifs entre les modes P.O.D. (ou B.O.D.) et les modes propres d'un système dynamique ont été mis en évidence par Feeny & Kappagantu (1998) ; Kerschen & Golinval (2002). Aussi, l'utilisation de la méthode B.O.D. pour les problèmes d'interaction fluide-structure est suggérée par les travaux récents de Hémon & Santi (2003) sur les corps non profilés et de Py (2005) sur le mouvement des végétaux.

B.O.D. de la déformée expérimentale

La B.O.D. est appliquée au cas de Drapeau 1 (papier 120 g/m^2, longueur $L = 140$ mm, largeur $H = 100$ mm) pour une vitesse de vent $U = 8.4$ m/s qui correspond au seuil d'instabilité de ce drapeau. Sur la Figure 2.19a, nous reportons la superposition des déformées expérimentales obtenues par caméra rapide. Les deux premiers *topos* de la B.O.D. sont reportés sur la Figure 2.19b et la Figure 2.19c. La ressemblance de ces *topos* avec les deux premiers modes de poutre est frappante (la seule différence est l'absence de tangente nulle à l'encastrement sur la Figure 2.19c). Nous ne représentons pas les *topos* suivants, car ces deux premiers contiennent $84\ \% + 14\ \% = 98\ \%$ de l'information[6] (contributions calculées ici avec les $a_k^2 / \sum_{l=1}^{+\infty} a_l^2$; voir Aubry *et al.*, 1991a).

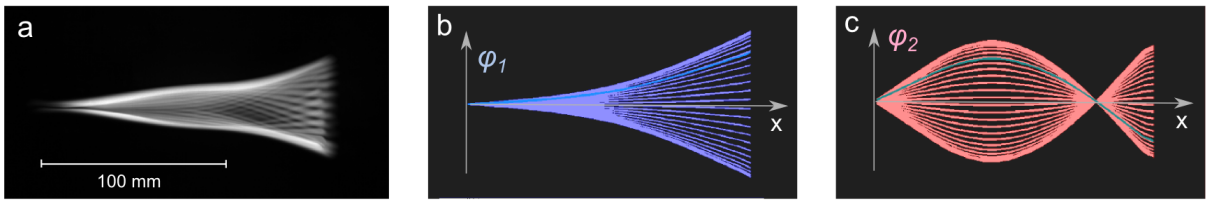


Figure 2.19 – Topos expérimentaux, obtenus par B.O.D. de la déformée d'un drapeau en papier 120 g/m^2 de longueur $L = 140$ mm, largeur $H = 100$ mm (Drapeau 1) à une vitesse de vent $U = 8.4$ m/s. ***a :*** *Superposition des déformées expérimentales.* ***b :*** *Premier topos, contribuant au signal à hauteur de $84\ \%$. Axes normalisés.* ***c :*** *Second topos, contribuant au signal à hauteur de $14\ \%$. Axes normalisés.*

Les *chronos* associés au *topos* 1 et au *topos* 2 sont reportés respectivement en bleu et en rouge sur la Figure 2.20. Les signaux temporels sont quasiment harmoniques, et en quadrature de phase (le déphasage moyen vaut 92°).

Comparaison avec la décomposition naturelle de la solution numérique

La solution numérique se décompose comme nous l'avons vu en une somme de deux structures qui sont en quadrature de phase temporelle : $y(x,t) = A(x)\cos(\omega t) + B(x)\sin(\omega t)$.

5. Les φ_k et les ψ_k sont d'amplitude normalisée à 1.

6. Dans le cas où $y(x,t)$ est un champ de vitesse, cette "information" est représentée par de l'énergie cinétique (Aubry *et al.*, 1991a).

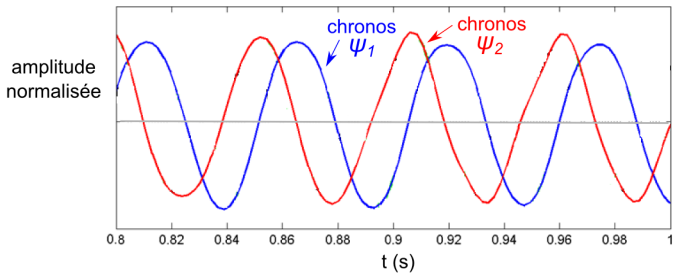


Figure 2.20 – Chronos expérimentaux, obtenus par décomposition bi-orthogonale. Le chronos ψ_1, en bleu, est associé au topos φ_1 (Figure 2.19b). Le chronos ψ_2, en rouge, est associé au topos φ_2 (Figure 2.19c).

Cette somme est formellement proche de la B.O.D., à l'orthogonalité entre $A(x)$ et $B(x)$ près. Dans les conditions de ces expériences ($m_e^* = 0.33$, $U^* = 9.8$), les formes spatiales $A(x)$ et $B(x)$ sont reportés sur la Figure 2.21.

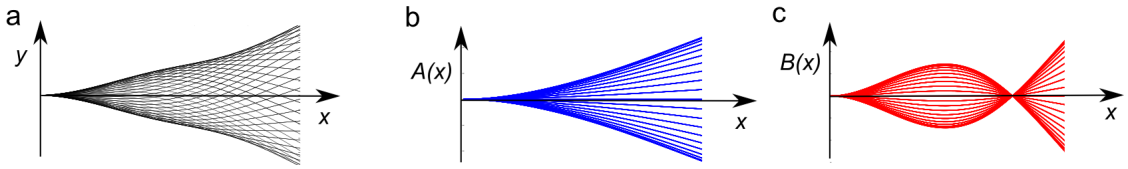


*Figure 2.21 – Décomposition numérique. **a :** Superposition des déformées numériques. **b :** Préfacteur $A(x)$ de la fonction $cos(\omega t)$ de la Section 2.5.1. **c :** Préfacteur $B(x)$ de la fonction $sin(\omega t)$.*

Comme suggéré à la Section 2.5.1, nous voyons que les formes spatiales numériques de la Figure 2.21b,c ressemblent fortement aux déformées décomposées expérimentalement par la B.O.D. (*topos*), Figure 2.19b,c. Cela suggère que la méthode numérique de type discrétisation de Galerkin est particulièrement bien adaptée aux analyses de la dynamique des drapeaux.

2.5.3 Couplage entre deux structures spatio-temporelles

Une information forte de la B.O.D. précédente (Figure 2.21b,c) est que seules deux structures spatio-temporelles bi-orthogonales suffisent pour caractériser 98 % de la déformée expérimentale. Afin de savoir si ce résultat est général, nous appliquons la B.O.D. dans la situation d'un flottement au-delà du seuil d'instabilité. Nous utilisons donc le drapeau précédent, mais à une vitesse de vent quasiment deux fois plus élevée : $U = 15.4$ m/s. Pour une telle vitesse de vent, la superposition des déformées présente deux nœuds (Figure 2.22a). Les deux premiers *topos* de la B.O.D. sont reportés sur la Figure 2.22b et la Figure 2.22c. À la différence du cas précédent, les deux *topos* ont cette fois une "topologie" identique, chacun ayant un seul nœud de vibration. Le nœud est localisé au bord d'attaque pour φ_1 et est proche du bord de fuite pour φ_2. Ces deux structures contiennent à elles-seules $79\ \% + 16\ \% = 95\ \%$ de l'information présente dans $y(x,t)$.

Par conséquent, même pour un régime de flottement complexe à vitesse de vent élevée, nous voyons que seules deux structures spatio-temporelles bi-orthogonales suffisent pour décrire correctement la déformée. Cela permet de repenser le flottement de drapeau comme un couplage antisymétrique "classique" entre deux modes dominants (de type flottement d'aile d'avion en flexion et torsion par exemple ; voir de Langre, 2002 ; Amandolese *et al.*, 2013 ; Mandre & Mahadevan, 2013).

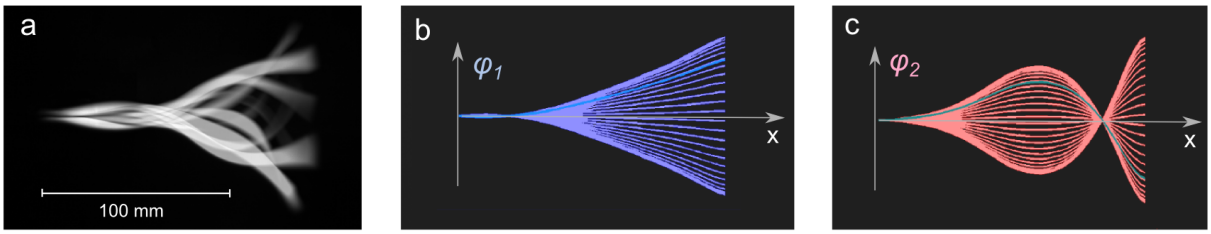


Figure 2.22 – Topos expérimentaux, obtenus par B.O.D. de la déformée d'un drapeau en papier 120 g/m^2 de longueur $L = 140$ mm, largeur $H = 100$ mm (Drapeau 1) à une vitesse de vent $U = 15.4$ m/s. ***a :*** *Superposition des déformées expérimentales. Deux nœuds de vibration sont visibles.* ***b :*** *Premier topos, contribuant au signal à hauteur de 79 %. Axes normalisés.* ***c :*** *Second topos, contribuant au signal à hauteur de 16 %. Axes normalisés.*

Au moins deux autres perspectives suggèrent l'utilisation de l'analyse B.O.D. pour l'étude des mécanismes de flottement :

- ce formalisme permet de définir une entropie effective (voir Aubry *et al.*, 1991a) qui semble particulièrement bien indiquée pour poursuivre une étude quantitative de la dynamique non-linéaire du flottement en soufflerie aux vitesses de vent élevées (voir aussi l'Annexe E portant sur une méthode de détection du chaos à partir de séries temporelles expérimentales),
- ce formalisme permet de calculer le moment généré à l'encastrement du drapeau à partir de la courbure d'un nombre fini de *topos* :

$$M(t) = EI \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k''(0) \psi_k(t),$$

où $N = 2$ dans les deux situations de flottement analysées ci-dessus. Afin que cette estimation du moment soit pertinente, il est primordial que les *topos* φ_k soient bien résolus proches de l'encastrement, ce qui est délicat en pratique.

Chapitre 3

Couplage d'un drapeau avec un mât-oscillateur

Sommaire

3.1 Enjeux 76
3.2 Le couplage vent-drapeau-mât en soufflerie 79
3.2.1 Dispositif expérimental 79
3.2.2 Exemple d'un drapeau en papier : phénoménologie 82
3.2.3 Exemple d'un drapeau en acier : reproductibilité 86
3.3 Les effets de la longueur du drapeau 88
3.3.1 Accrochages successifs au seuil de l'instabilité 88
3.3.2 La déstabilisation du drapeau favorisée par le couplage 90
3.3.3 Au-delà du seuil : la largeur de l'accrochage fréquentiel 90
3.4 Paramétrage du mât au seuil de l'instabilité 92
3.4.1 Comment fixer la fréquence naturelle du mât ? 92
3.4.2 Effet de l'inertie du mât 93
3.4.3 Effet de la raideur du mât 94
3.4.4 Effet de l'épaisseur du drapeau 95
3.4.5 Quid de la puissance mécanique ? 96
3.5 Éléments de modélisation 98
3.5.1 Les indices de l'analyse dimensionnelle 98
3.5.2 Écriture du problème couplé linéarisé 99
3.5.3 Modèle simplifié : excitation-réponse 101
3.5.4 Vérification des ordres de grandeur 102
3.5.5 Comparaison modèle-expériences 104

Contenu Dans ce chapitre, le mât du drapeau joue un grand rôle : c'est un oscillateur à un degré de liberté. Nous nous intéressons au couplage vent-drapeau-mât en termes d'amplitude de rotation du mât. Nous reportons un phénomène d'accrochage fréquentiel qui synchronise le drapeau et le mât-oscillateur sur une large plage de vitesse de vent. Dans ce contexte, nous présentons un modèle simplifié qui permet de pré-dimensionner un dispositif de récupération d'énergie du vent.

3.1 Enjeux

L'effet "poisson volant"

Les poissons volants ont fasciné des générations de naturalistes. Parmi eux, Alexander von Humboldt suggère au début du 19ème siècle que les "ailes" de ces poissons sont actives au même titre que les ailes des oiseaux (voir Hertel, 1966, p218).



Figure 3.1 – Poisson volant (de type exocoetidae). Photographie : U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration.

Cette idée ne sera pas partagée par Zshokke (1919), qui proposera plutôt que l'agitation des ailes n'est qu'une réaction passive au battement vigoureux de la nageoire caudale. Le scénario d'excitation passive sera confirmé vingt ans plus tard par les photographies rapides d'Edgerton & Breder (1941). En 1966, Hertel précise davantage la nature du mécanisme d'excitation passive : les forces générées par la nageoire caudale sont de l'ordre du poids du poisson, et elles fluctuent à une fréquence de l'ordre de 60 Hz, qui correspond précisément à la fréquence naturelle des ailes. Le mouvement des ailes est donc induit par une synchronisation ressemblant fortement à une résonance.

L'objectif du présent chapitre est de synchroniser les efforts périodiques qu'un drapeau génère (faisant l'objet du Chapitre 2) avec un oscillateur (qui sera le mât du drapeau). Le drapeau constitue l'équivalent du corps de ces poissons volants, qui transmet des efforts périodiques au mât, l'analogue des ailes. Pour rendre le couplage possible, nous devrons libérer l'encastrement du mât par rapport aux configurations du Chapitre 1 et du Chapitre 2 : nous étudierons la situation d'un mât-oscillateur paramétrable (de type "masse-ressort"). Nous verrons qu'un mécanisme d'accrochage fréquentiel provoque une situation de résonance entre le drapeau et le mât sur une large gamme de vitesse de vent. Nous verrons également que ce phénomène singulier permet d'imaginer de nouveaux concepts de récupération d'énergie du vent avec pour briques de base un ou plusieurs drapeaux.

> *"Huygens supposa avec justesse que le mouvement de ces horloges était coordonné par des vibrations transmises à travers le bois. Ce phénomène, dans lequel un cycle régulier se met au diapason d'un autre, est appelé aujourd'hui verrouillage de fréquence. Le verrouillage de fréquence explique pourquoi la Lune présente toujours la même face à la Terre [...]. Dans la nature, un exemple spectaculaire en est fourni par une espèce de lucioles d'Asie du Sud qui s'assemblent par milliers dans les arbres durant la période des amours et clignotent en une fantastique harmonie spectrale." (Gleick, 2008)*

La récupération d'énergie du vent

En ce qui concerne l'agriculture, l'énergie offerte par le vent est utilisée de manière concrète depuis les moulins de Perse du Moyen Âge (voir Belidor, 1739). Il est remarquable que ce

concept d'éolienne (Figure 3.2) ait été conservé pendant plus de mille ans (voir Moretti & Divone, 1986 ; Bayerl, 2003).

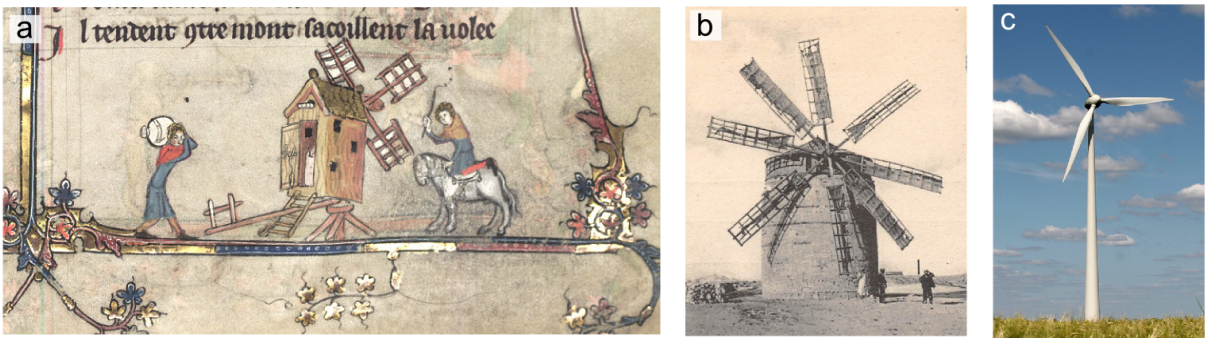


Figure 3.2 – Conservation du concept de l'éolienne au cours des siècles. ***a :*** *Enluminure du roman d'Alexandre (du Moyen Âge, ici en 1344) montrant l'existence des moulins à vent à cette époque.* ***b :*** *Moulin du Mex d'Alexandrie (1904). Photographie : F. Khardiache.* ***c :*** *Éolienne moderne (2006). Photographie : C. Wagner.*

En termes de rupture technologique, la récupération d'énergie via l'excitation d'un drapeau constitue une piste sérieusement étudiée ces dernières années, avec deux mécanismes d'excitation généralement envisagés :

- par un écoulement instationnaire dans le sillage d'un obstacle (comme étudié par Allen & Smits, 2001 ; Taylor *et al.*, 2001) ; représenté sur la Figure 3.3a.
- par un écoulement stationnaire déstabilisant le drapeau par flottement (comme étudié par Tang *et al.*, 2009) ; représenté sur la Figure 3.3b.

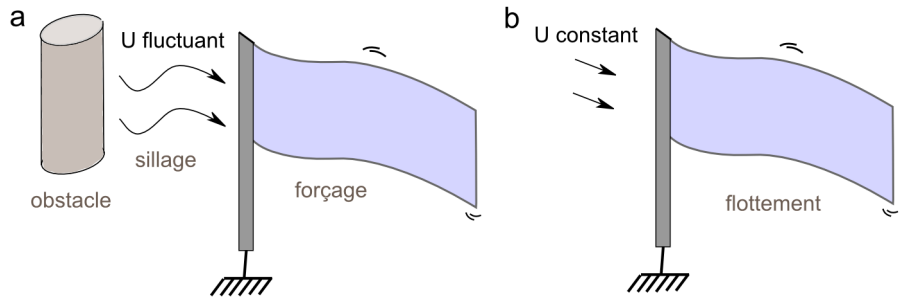


Figure 3.3 – Deux mécanismes possibles d'excitation d'un drapeau. ***a :*** *avec un écoulement instationnaire (comme derrière un obstacle).* ***b :*** *avec un écoulement stationnaire déstabilisant le drapeau par flottement.*

Indépendamment du mécanisme d'excitation considéré, deux stratégies de génération d'électricité sont envisageables :

- grâce à la déformation du drapeau, en le recouvrant de patchs piézoélectriques comme représenté sur la Figure 3.4a. C'est l'objet des récentes études expérimentales et numériques de Doaré & Michelin (2011) ; Dunnmon *et al.* (2011) ; Giacomello & Porfiri (2011) ; Xia (2012) ; Singh *et al.* (2012) ; Akcabay & Young (2012) ; Michelin & Doaré (2013) ; Xia *et al.* (2013).
- grâce au déplacement du drapeau, en utilisant de l'induction électromagnétique (via un alternateur) comme réprésenté sur la Figure 3.4b. Les récentes études expérimentales et numériques de Gibbs *et al.* (2012) ; Stone *et al.* (2013) ; Howell & Lucey (2014) ont porté sur les différentes possibilités de couplage élémentaire entre un drapeau et son

mât. Bae *et al.* (2014) a récemment proposé d'utiliser le contact électrostatique de la surface du drapeau pour générer de l'énergie par tribo-électricité.

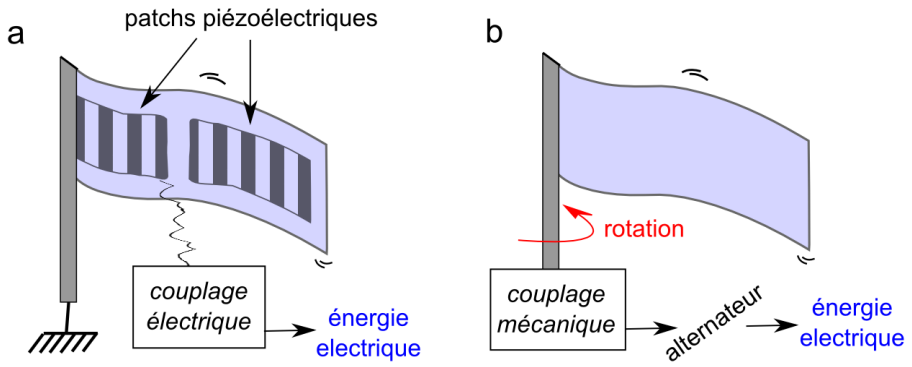


Figure 3.4 – Deux stratégies possibles de génération d'électricité. ***a :*** *Par couplage électrique (basé sur la déformation d'un drapeau piézoélectrique).* ***b :*** *Par couplage mécanique (basé sur le déplacement du drapeau).*

D'une manière générale, nous nous attendons à ce que les transferts énergétiques soient favorisés dans une situation de résonance. Et lorsqu'il y a un accrochage fréquentiel, les conditions de transfert énergétique sont réunies sur une large plage de vitesse de vent :

- dans le cadre du couplage entre un drapeau piézoélectrique et son circuit électrique, Xia *et al.* (2013) montre numériquement qu'il y a une forte augmentation de l'efficacité de la récupération d'énergie éolienne sur toute la gamme de vitesse de vent permettant l'accrochage fréquentiel,
- dans le cadre des vibrations induites par détachement tourbillonnaire en aval d'un cylindre-oscillateur, le phénomène d'accrochage fréquentiel est essentiel (Khalak & Williamson, 1999 ; Williamson & Govardhan, 2004) et est mis à profit pour la récupération d'énergie des courants marins (voir Bernitsas *et al.*, 2008). Par comparaison avec l'objet de ce chapitre, le sillage de tourbillons peut se voir comme l'analogue du drapeau, forçant un cylindre-oscillateur qui est l'analogue du mât-oscillateur.

Dans ce chapitre, nous étudierons une configuration encore non explorée à notre connaissance : le couplage entre un drapeau et un mât de type oscillateur à un degré de liberté paramétrable. Nous serons dans le cadre du mécanisme d'excitation directe de la Figure 3.3b et nous aurons une stratégie de récupération d'énergie par couplage mécanique comme sur la Figure 3.4b.

3.2 Le couplage vent-drapeau-mât en soufflerie

3.2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé est celui du Chapitre 1 avec un mât qui n'est pas encastré mais guidé dans un palier à roulements. Le mât est alors libre de tourner autour de son axe central (Figure 3.5). Afin de créer une dynamique d'oscillateur à un degré de liberté, nous fixons sur ce mât une barre d'inertie et des ressorts de traction.

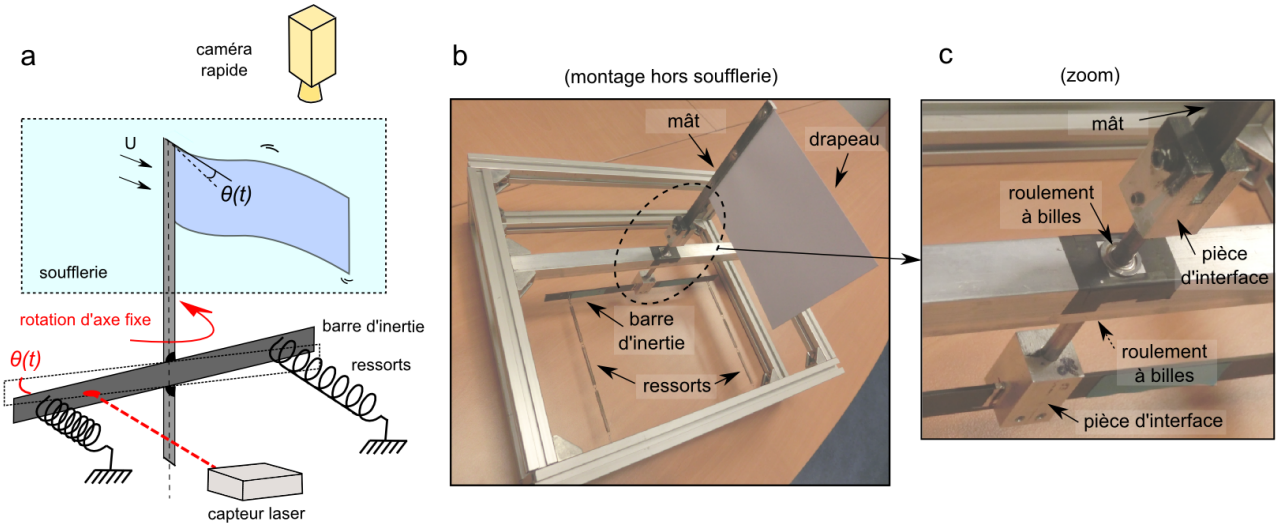


Figure 3.5 – Dispositif expérimental. ***a :*** *Schéma du montage. Le mât du drapeau est relié à un oscillateur de type masse-ressort en rotation. Un capteur laser permet de mesurer l'angle de rotation du mât $\theta(t)$.* ***b,c :*** *Le montage hors-soufflerie où nous voyons le guidage du mât par palier à roulements.*

La quantité caractérisant l'amplitude instantanée des oscillations du mât est l'angle de rotation $\theta(t)$ que fait la barre d'inertie avec la direction normale au vent (Figure 3.5a). Cet angle de rotation est identique à l'angle que fait le bord d'attaque du drapeau avec la direction du vent. Les fluctuations de $\theta(t)$ sont mesurées via un capteur laser réalisant 1024 acquisitions par seconde avec une erreur de moins de 1 % sur la gamme d'angle $\theta = 0 - 60°$. La durée d'acquisition de 24 s permet d'enregistrer plus de 100 périodes de flottement en général. En ce qui concerne l'analyse fréquentielle, nous effectuons un traitement des signaux par blocs comme au Chapitre 2, et la résolution fréquentielle est de 1/8 Hz après ce traitement.

Choix du drapeau

Pour un bon fonctionnement des expériences, il est nécessaire que le drapeau flotte dans la gamme de vitesse de vent de la soufflerie (de 3 m/s à environ 20 m/s), sans que l'amplitude de flottement génère un blocage de l'écoulement (la section d'essai est de largeur 260 mm et de hauteur 240 mm). Aussi, la fréquence de flottement doit être suffisamment faible pour permettre un couplage entre le drapeau et le mât-oscillateur, sachant que nous pouvons faire varier la fréquence naturelle du mât-oscillateur entre 1 Hz et 20 Hz. En exploitant les résultats obtenus au Chapitre 1 et au Chapitre 2, nous choisissons les matériaux suivants :

- le papier 120 g/m^2 d'épaisseur 153 μm,
- le plastique d'épaisseur 509 μm,
- l'acier d'épaisseur 54 μm, 77 μm, ou 103 μm.

Les propriétés de ces matériaux sont reportées dans l'Annexe A. Nous nous restreignons à des géométries rectangulaires de drapeau, de largeur fixée à $H = 100$ mm. Nous faisons varier la longueur des drapeaux dans la gamme $L = 60 - 300$ mm.

Choix de la barre d'inertie

Nous disposons de deux barres d'inertie en fonction de la fréquence naturelle recherchée pour le mât-oscillateur : une barre épaisse en aluminium et une barre mince en fibre de carbone. Les propriétés mécaniques de ces barres d'inertie sont répertoriées dans le Tableau 3.1.

barre	$\mathcal{D}_{\text{barre}}$ (N.m)	ρ_{barre} (kg/m^3)	J_{barre} (kg.m^2)	J_{osc} (kg.m^2)
aluminium	103	2970	1.4×10^{-4}	1.7×10^{-4}
fibre de carbone	49	2160	5.9×10^{-5}	9.2×10^{-5}

Tableau 3.1 – Propriétés mécaniques des barres d'inertie en aluminium et en fibre de carbone. La rigidité de flexion des barres est notée $\mathcal{D}_{barre}$ (de type "$Ed^3/12$" avec les notations de l'Annexe A), la masse volumique est notée ρ_{barre} et le moment d'inertie est noté J_{barre}. Le moment d'inertie du montage barre + mât sans drapeau est noté J_{osc}.

D'un point de vue pratique, la barre de fibre de carbone a l'avantage d'être à la fois très rigide et peu dense (Ashby, 2000). Nous prenons garde au fait qu'une barre d'inertie trop souple pourrait interagir avec le drapeau. En d'autres termes, nous vérifions que le rappel en rotation du montage est dictée par les ressorts et non par la barre. En pratique, cela est respecté lorsque $\mathcal{D}_{\text{barre}} \gg C_{\text{osc}}$, où $\mathcal{D}_{\text{barre}}$ est la rigidité de flexion de la barre d'inertie et où C_{osc} est la raideur en rotation du montage. Le moment d'inertie de la barre d'inertie seule, noté J_{barre}, représente la majeure partie du moment d'inertie du montage barre + mât (sans le drapeau), noté J_{osc} (Tableau 3.1). Afin d'avoir un contrôle précis du moment d'inertie du montage, comme par exemple pour ajuster soigneusement la fréquence naturelle de l'oscillateur, des petites masses sont disposées le long la barre d'inertie. Au final, nous pouvons faire varier le moment d'inertie J_{osc} d'un facteur 10, entre 9.2×10^{-5} kg.m^2 et 8.4×10^{-4} kg.m^2.

Choix des ressorts

Des ressorts de traction de raideur comprise entre 0.05 N/mm et 1 N/mm sont disposés de manière à imposer une raideur en rotation globale C_{osc} variant entre 0.28 N.m/rad et 2.3 N.m/rad. Pour conserver la symétrie du montage, un soin particulier est apporté au fait que des ressorts identiques soient disposés de manière symétrique par rapport à l'axe du mât, comme cela est visible sur la Figure 3.5b. Des exemples de ressorts utilisés pour le montage sont présentés sur la Figure 3.6a.

La raideur en rotation du montage C_{osc} est mesurée de manière statique, à partir de cinq moments connus M_{stat} compris entre 4 mN.m et 160 mN.m. Nous mesurons l'angle de rotation θ_{stat}, et nous en déduisons $C_{\text{osc}} = M_{\text{stat}}/\theta_{\text{stat}}$. Quant au moment d'inertie J_{osc}, nous le calculons à partir de la fréquence naturelle f_{osc} sans vent et sans drapeau, via la relation $J_{\text{osc}} = C_{\text{osc}}/(2\pi f_{\text{osc}})^2$.

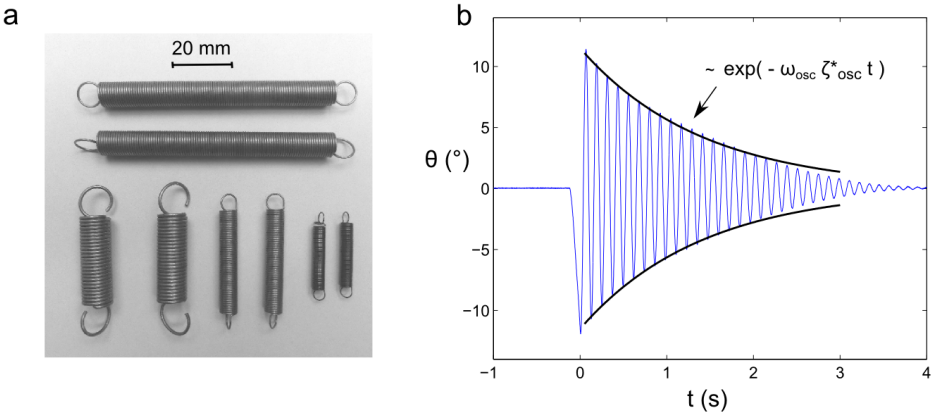


Figure 3.6 – Caractéristiques du mât-oscillateur. ***a :*** *Exemple de ressorts utilisés pour réaliser le rappel en rotation du mât.* ***b :*** *Expérience de vibration amortie du mât, permettant d'évaluer le taux d'amortissement ζ^*_{osc} et la pulsation naturelle $\omega_{osc} = 2\pi f_{osc}$ du montage.*

Type d'amortissement

Le mât-oscillateur est caractérisé par un taux d'amortissement (ou amortissement réduit) qu'il convient de déterminer. La décroissance exponentielle des oscillations du mât sans vent et sans drapeau (Figure 3.6b) suggère que l'amortissement est essentiellement de nature visqueuse (Landau 1976, p75) et régulé par une loi du type :

$$J_{\text{osc}}\ddot{\theta} + Z_{\text{osc}}\dot{\theta} + C_{\text{osc}}\theta = 0.$$

En introduisant classiquement la pulsation naturelle $\omega_{\text{osc}} = \sqrt{C_{\text{osc}}/J_{\text{osc}}} (= 2\pi f_{\text{osc}})$ et le taux d'amortissement $\zeta^*_{\text{osc}} = Z_{\text{osc}}/\sqrt{4C_{\text{osc}}J_{\text{osc}}}$, l'équation précédente se met sous une forme canonique :

$$\ddot{\theta} + 2\omega_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}\dot{\theta} + \omega^2_{\text{osc}}\theta = 0. \tag{3.1}$$

Le taux d'amortissement ζ^*_{osc} est estimé en perturbant le montage sans vent et sans drapeau, et en enregistrant la décroissance de $\theta(t)$ comme sur la Figure 3.6b. Pour cela, une loi de type $-\log(\theta)/\omega_{\text{osc}} \sim \zeta^*_{\text{osc}} t$ est ajustée à l'enveloppe de la décroissance temporelle. Afin de réduire l'incertitude, nous réalisons systématiquement cinq mesures indépendantes. En pratique, nous observons que cette modélisation élémentaire de l'amortissement est en bon accord avec les expériences, tant que l'angle d'oscillation est compris entre $2°$ et $20°$. En dehors de cette gamme d'angle, l'amortissement est vraisemblablement plus complexe à modéliser.

Conservation du taux d'amortissement

Le taux d'amortissement du montage ζ^*_{osc} varie relativement peu entre chaque modification de montage. Nous reportons sur la Figure 3.7a une collection de valeurs de ζ^*_{osc} obtenues lorsque la barre d'inertie est alourdie avec une raideur en rotation conservée ($C_{\text{osc}} = 0.32$ N.m/rad) de manière à faire diminuer la fréquence naturelle f_{osc}. De même, nous reportons sur la Figure 3.7b une collection ζ^*_{osc} lorsque C_{osc} et J_{osc} augmentent simultanément tout en conservant f_{osc}.

Dans chaque situation, le taux d'amortissement du montage vaut en moyenne $\zeta^*_{\text{osc}} = 0.014$. Une forte dispersion est cependant observée lorsque la raideur en rotation est modifiée (Figure 3.7b), où l'écart-type atteint 18 %. Cela pourrait être associé au mauvais alignement des ressorts dans le montage. Par comparaison, l'écart-type des points de la Figure 3.7a est de 7 % seulement.

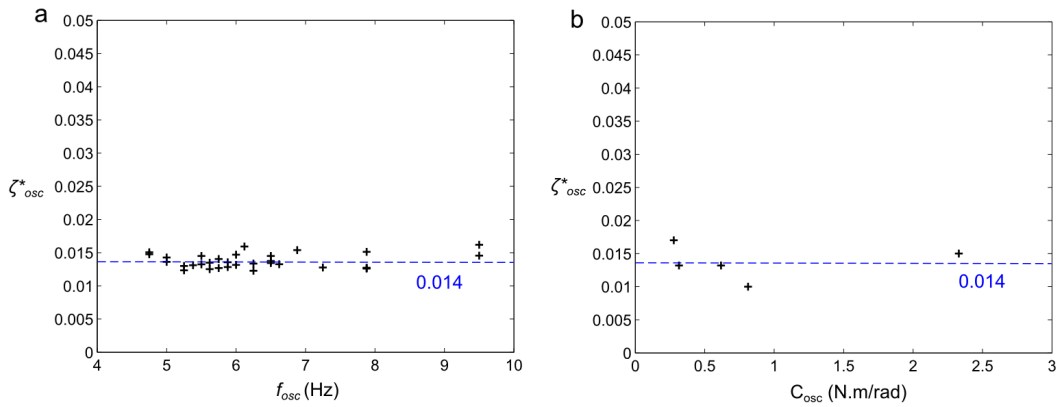


*Figure 3.7 – Invariance du taux d'amortissement ζ^*_{osc}. **a :** Lorsque J_{osc} augmente et C_{osc} est fixé. **b :** Lorsque J_{osc} et C_{osc} augmentent proportionnellement de manière à conserver f_{osc}.*

3.2.2 Exemple d'un drapeau en papier : phénoménologie

Illustrons le phénomène au cœur de ce chapitre, l'accrochage fréquentiel entre un drapeau et son mât, par un exemple concret. Nous observons l'angle d'oscillation du mât $\theta(t)$, Figure 3.8a, dans les conditions suivantes :

- le drapeau est en papier 120 g/m^2 d'épaisseur $d = 153$ μm,
- le drapeau est de longueur $L = 286$ mm et de largeur $H = 100$ mm,
- le mât-oscillateur[1] a une fréquence naturelle $f_{osc} = 13.9$ Hz ($C_{osc} = 1.4$ N.m/rad et $J_{osc} = 1.8 \times 10^{-4}$ kg.m^2),
- *condition d'accrochage fréquentiel :* nous imposons une vitesse de vent $U = 8.6$ m/s, pour laquelle le drapeau flotterait à une fréquence de l'ordre de f_{osc} si le mât était encastré (d'après les expériences menées au Chapitre 1).

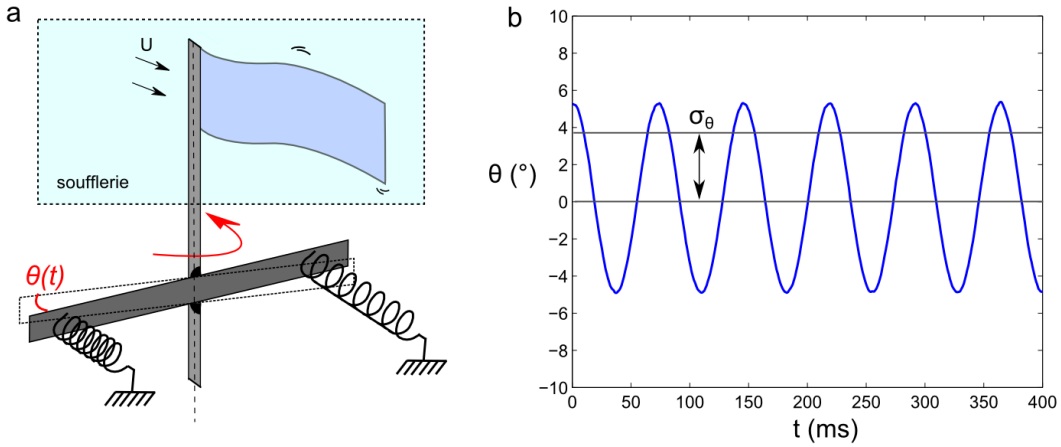


*Figure 3.8 – Évolution temporelle de $\theta(t)$. **a :** Rappel de la définition de θ. **b :** Oscillations entretenues du mât, induites ici par le couplage vent-drapeau-mât.*

Un extrait du signal $\theta(t)$ est reporté sur la Figure 3.8b. Nous observons que $\theta(t)$ est quasiment harmonique, caractérisé par un écart-type $\sigma_\theta = \sqrt{< \theta^2 > - < \theta >^2}$ de l'ordre de 3.8°. Étant donné que la fréquence d'oscillation du drapeau est proche de la fréquence naturelle du

1. Il s'agit ici d'un montage préliminaire où le taux d'amortissement vaut $\zeta^*_{osc} = 0.005 \pm 9\%$ (valeur moyenne ± écart-type sur 4 essais). Pour rappel, en dehors de ce cas particulier, nous avons montré que $\zeta^*_{osc} \simeq 0.014$.

mât, il n'est pas surprenant qu'un phénomène de type résonance se produise et conduise à des oscillations crête-à-crête pouvant dépasser $10°$.

Signature de l'accrochage fréquentiel

Afin d'étudier précisément ce qu'il se produit lorsque la fréquence de flottement du drapeau est proche de f_{osc}, nous effectuons vingt mesures de $\theta(t)$ pour une vitesse de vent U comprise entre 5.0 et 11.0 m/s, par incréments de 0.3 m/s.

En guise de référence, nous reportons sur la Figure 3.9a les densités spectrales associées au moment M(t) de ce même drapeau, dans le cas où le mât est encastré (données du Chapitre 2). Une couleur foncée indique une fréquence dominante dans le spectre. La fréquence de flottement de ce drapeau à mât encastré évolue approximativement de manière linéaire (de 10 Hz à 20 Hz) avec la vitesse du vent.

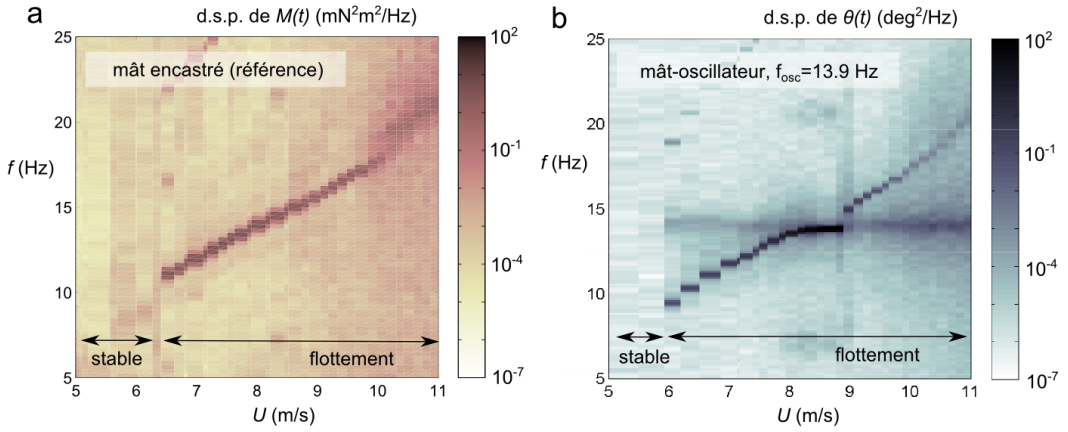


Figure 3.9 – Détection de l'accrochage fréquentiel en termes de densités spectrales de puissance, reportées verticalement et en échelle de couleur logarithmique. ***a :*** *Densités spectrales de puissance du moment $M(t)$ du drapeau à mât encastré (référence). Nous voyons une unique fréquence dominante qui augmente proportionnellement à la vitesse du vent U.* ***b :*** *Densités spectrales de puissance de $\theta(t)$, lors du couplage du drapeau avec un mât-oscillateur. La fréquence naturelle $f_{osc} \simeq 13.9$ Hz de l'oscillateur est visible dans les spectres. En particulier, une zone d'accrochage fréquentiel est visible entre $U = 8$ m/s et $U = 9$ m/s, où les oscillations du mât sont plus intenses et restent "accrochées" à la fréquence naturelle f_{osc}.*

L'effet du couplage entre le drapeau et son mât-oscillateur est visible sur la Figure 3.9b, où nous reportons les densités spectrales de puissance successives de $\theta(t)$. Entre $U = 6$ m/s et $U = 8$ m/s, la fréquence d'oscillation du mât est quasiment identique à la fréquence de flottement du drapeau à mât encastré (Figure 3.9a). Cependant, sur la plage de vitesse de vent $U = 8-9$ m/s, la fréquence d'oscillation du mât dévie et reste "accrochée" sur la fréquence naturelle de l'oscillateur ($f_{\text{osc}} = 13.9$ Hz). Une condition de type résonance est donc présente sur cette plage de vitesse de vent. À partir de $U = 9$ m/s, nous observons un changement brusque de la fréquence dominante, qui revient à la fréquence typique du drapeau à mât encastré.

Baisse des fréquences et phénomène d'hystérésis

Sur la Figure 3.10, nous reportons les fréquences dominantes des densités spectrales de puissance de la Figure 3.9a,b. Nous remarquons ainsi que hors-accrochage, la fréquence dominante est généralement plus faible dans le cas couplé que pour un drapeau à mât encastré. Cette diminution des fréquences semble être associée aux changements des conditions aux limites du drapeau.

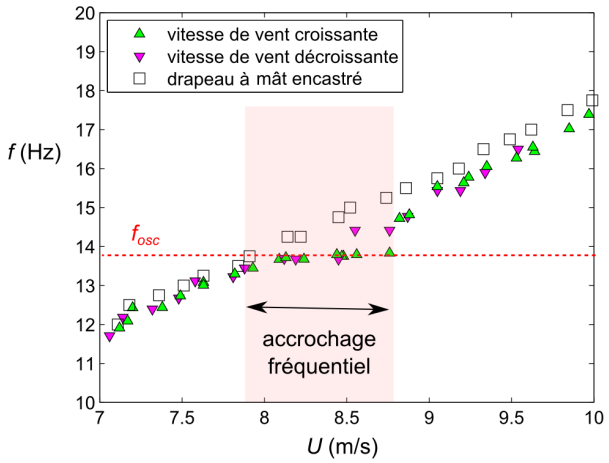


Figure 3.10 – Accrochage fréquentiel sur f_{osc} (zone rose, associée au cas où la vitesse de vent est croissante). Nous voyons un abaissement systématique de la fréquence du flottement vis-à-vis du cas encastré (carrés vides). Un phénomène d'hystérésis est observé sur une plage de vitesse de vent de largeur 0.3 m/s.

Sur la Figure 3.10, nous reportons les fréquences d'oscillation du mât obtenues lorsque la vitesse du vent croît puis décroît. Nous observons un phénomène d'hystéresis, c'est-à-dire qu'à vitesse de vent décroissante (triangles roses), l'entrée dans l'état "accroché" se fait à une vitesse de vent plus faible que celle de la sortie lorsque la vitesse de vent croît (triangles verts). Dans le cas présent, nous observons une diminution d'environ 30 % de la zone d'accrochage fréquentiel.

Impact sur l'amplitude des oscillations du mât

Intéressons nous à l'impact de l'accrochage fréquentiel sur l'amplitude des oscillations du mât. Sur la Figure 3.11a, nous reportons l'évolution de l'écart-type de $\theta(t)$ que nous notons σ_θ. Lorsque la vitesse de vent augmente de $U = 8$ m/s à $U = 9$ m/s, ce qui correspond à la zone d'accrochage fréquentiel, l'amplitude des oscillations augmente continûment avant de chuter d'un facteur 10. À l'opposé, lorsque la vitesse de vent décroît, l'accrochage fréquentiel n'est pas rétabli à $U = 9$ m/s (phénomène d'hystérésis). Cela donne un aspect "replié" à la courbe de résonance de la Figure 3.11a.

Cet aspect "replié" fait légitimement penser à une résonance non-linéaire (de type oscillateur de Duffing ; voir Nayfeh & Mook, 1995). Cependant, lorsque nous traçons σ_θ en fonction de la fréquence de flottement du drapeau (couplé), Figure 3.11b, nous retrouvons une allure classique de courbe de résonance. Cela suggère donc plutôt que la réponse du mât-oscillateur est "linéaire" (au sens proposé par de Langre, 2006, dans le contexte des vibrations induites par détachement tourbillonnaire) bien qu'il soit excité de manière non-linéaire (voir la relation entre la fréquence du flottement du drapeau couplé et la vitesse de vent sur la Figure 3.10).

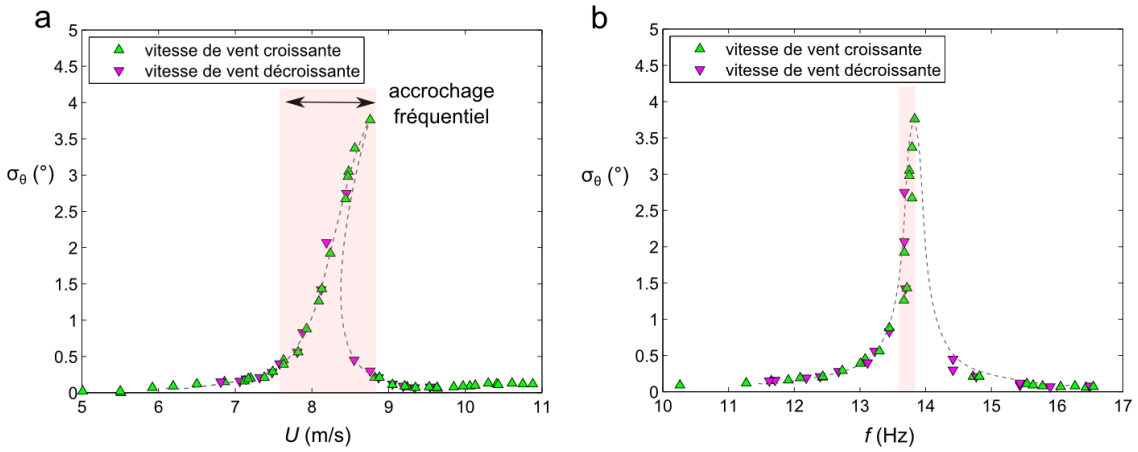


Figure 3.11 – Évolution des fluctuations de $\theta(t)$, caractérisées par l'écart-type σ_θ (voir Figure 3.8). ***a :*** *L'aspect de σ_θ en fonction de la vitesse du vent présente un repliement, ce qui peut suggérer une dynamique d'oscillateur non-linéaire.* ***b :*** *Cependant, une allure de résonance classique (pic non replié) est recouvrée lorsque σ_θ est tracée en fonction de f, la fréquence d'oscillation du drapeau couplé. Les pointillés sont des guides pour les yeux, sans valeur expérimentale.*

Impact sur le flottement du drapeau

Intéressons nous également à l'impact de l'accrochage fréquentiel sur la dynamique du drapeau. Sur la Figure 3.12a, nous reportons la fréquence d'oscillation du drapeau mesurée via des enregistrements vidéos du mouvement du bord de fuite à la caméra rapide[2]. Nous voyons qu'à l'accrochage fréquentiel, le drapeau oscille à la fréquence naturelle $f_{\text{osc}} = 13.9$ Hz, tout comme le mât-oscillateur auquel il est attaché (Figure 3.10). Par conséquent, à la différence d'une résonance classique, la fréquence d'excitation dictée par le drapeau n'est pas indépendante de la dynamique du mât-oscillateur. Nous avons bien affaire à un système couplé.

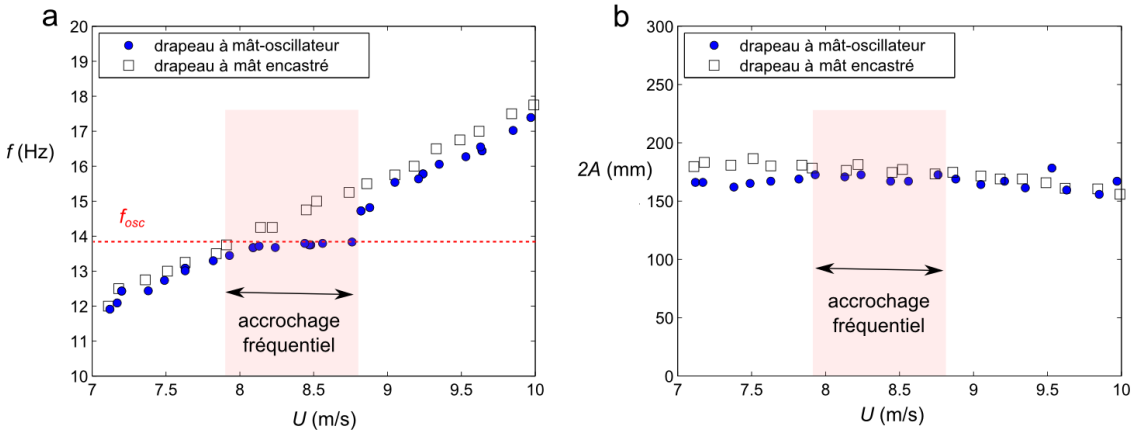


Figure 3.12 – Rétroaction du mât sur le drapeau. ***a :*** *La fréquence de flottement du drapeau est également accrochée à f_{osc} sur la gamme de vitesse de vent $U = 8$–9 m/s.* ***b :*** *L'amplitude de flottement crête-à-crête $2A$ est peu modifiée par le couplage du drapeau avec le mât-oscillant.*

Afin de savoir si il y a une forte rétroaction du mât-oscillateur sur le drapeau, nous reportons

2. En effet, nous avons jusqu'à présent seulement reporté les mesures de fréquences d'oscillation du mât, et non les fréquences d'oscillation du drapeau.

sur la Figure 3.12b l'amplitude de flottement $2A$ sur la gamme de vitesse de vent $U = 7–11$ m/s. Nous la comparons à l'amplitude de flottement dans le cas où le mât est encastré (données du Chapitre 2). Nous voyons que pour cet exemple, il n'y a pas de forte rétroaction sur l'amplitude de flottement, qui varie au plus de 10 % par rapport au cas de référence.

3.2.3 Exemple d'un drapeau en acier : reproductibilité

Analysons une seconde situation de couplage, avec cette fois-ci un drapeau plus rigide et un mât-oscillateur plus souple que précédemment. Le drapeau choisi pour cet essai est en acier d'épaisseur 54 μm, de longueur 150 mm et de largeur 100 mm. L'oscillateur a une fréquence naturelle $f_{\text{osc}} = 8.2$ Hz (avec $C_{\text{osc}} = 0.28$ N.m/rad, $J_{\text{osc}} = 1.0 \times 10^{-4}$ kg.m^2 et $\zeta^*_{\text{osc}} = 0.014$). Aussi, pour vérifier la reproductibilité du phénomène d'accrochage fréquentiel, nous réalisons trois essais dans les mêmes conditions de drapeau et d'oscillateur, en renouvelant le drapeau entre chaque essai.

Sur la Figure 3.13a, nous reportons les mesures successives de l'écart-type σ_θ de l'angle de rotation $\theta(t)$ du mât-oscillateur. Les points obtenus à vitesse croissante et à vitesse décroissante sont superposés afin de mettre en évidence le phénomène d'hystérésis. Sur la Figure 3.13b, nous reportons les fréquences dominantes associées. Nous voyons que le phénomène d'accrochage fréquentiel est présent sur toute la gamme de vitesse de vent $U = 5.1 – 7.2$ m/s.

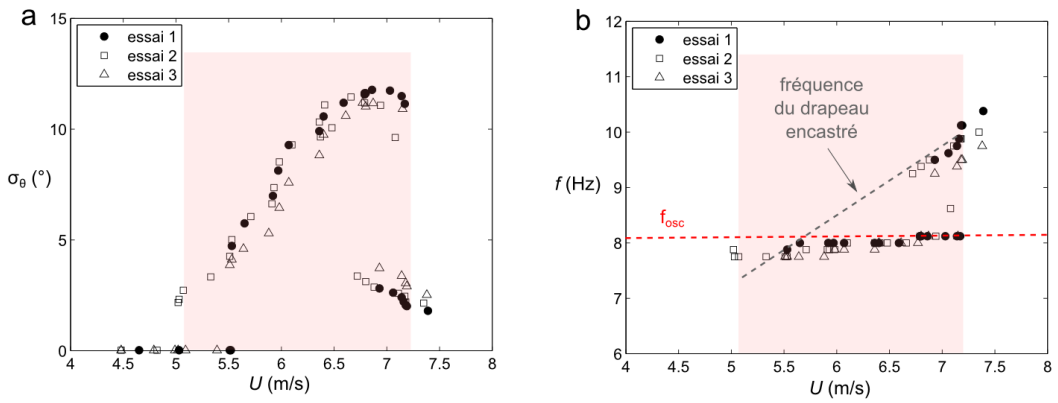


Figure 3.13 – Essais de reproductibilité. La zone rose correspond à la zone d'accrochage fréquentiel. ***a :*** *Évolution de σ_θ avec la vitesse du vent.* ***b :*** *Fréquence dominante d'oscillation du mât. La fréquence naturelle de l'oscillateur est indiquée par la droite horizontale en pointillés ($f_{osc} = 8.2$ Hz).*

Une valeur identique du maximum de σ_θ est retrouvée dans chaque essai ($\simeq 11.2°$ avec une erreur de seulement 4 %). Aussi, la largeur de la zone d'accrochage fréquentiel est sensiblement conservée entre chaque essai. En revanche, la vitesse de vent critique du déclenchement du flottement est variable (écart de 10 %), ce qui est attribuable à la variabilité des défauts de planéité à l'encastrement, comme discuté au Chapitre 1.

Enfin, nous voyons clairement sur ces exemples que la fréquence d'oscillation du mât se rapproche de f_{osc} par valeurs inférieures. Cela constitue une différence avec les phénomènes d'accrochages fréquentiels généralement reportés dans le contexte des vibrations induites par détachement tourbillonnaire (voir la Figure 4 de Khalak & Williamson, 1999 ; voir aussi le cas étudié par Amandolese & Hémon, 2010, avec un accrochage par valeurs inférieures de fréquence).

Au final, la comparaison entre cette situation (drapeau en acier, $f_{\text{osc}} = 8.2$ Hz) et la situation de la Section 3.2.2 (drapeau en papier, $f_{\text{osc}} = 13.9$ Hz) montre que l'écart-type

maximal $\sigma_\theta^{\max}$ peut varier fortement (ici de 3.8° à 11.2°) lorsque les paramètres du drapeau et de l'oscillateur sont modifiés. Nous nous proposons donc d'étudier plus précisément l'influence de chacun des paramètres du couplage. L'objectif sera de comprendre ce qui détermine $\sigma_\theta^{\max}$ et ce qui régule la largeur de la zone d'accrochage. Dans un premier temps, nous étudions l'effet de la longueur de drapeau sur le couplage, puis dans un second temps nous ferons varier les paramètres de l'oscillateur et du drapeau simultanément.

3.3 Les effets de la longueur du drapeau

Dans cette section, nous nous focalisons sur les effets de la longueur de drapeau lorsque le mât-oscillateur n'est pas modifié. Pour cela, nous réalisons une série d'expériences où la longueur L du drapeau est variée dans la gamme $L = 70 - 290$ mm par incréments de 10 mm. Nous nous placerons dans un premier temps au seuil de l'instabilité (de type U_c^-), puis dans un second temps nous évaluerons la largeur de la zone d'accrochage fréquentiel au-delà du seuil de l'instabilité. Le drapeau est en papier 120 g/m^2 d'épaisseur $d = 153$ μm et de largeur $H = 100$ mm. Le mât-oscillateur à l'étude a pour raideur $C_{\text{osc}} = 1.1$ N.m/rad, pour moment d'inertie $J_{\text{osc}} = 7.6 \times 10^{-5}$ kg.m^2 et pour taux d'amortissement $\zeta^*_{\text{osc}} = 0.0014$. La fréquence naturelle de ce mât-oscillateur est $f_{\text{osc}} = 19.2$ Hz.

3.3.1 Accrochages successifs au seuil de l'instabilité

Avec le mât-oscillateur de paramètres fixés (raideur, amortissement, inertie), nous précisons dans un premier temps les longueurs de drapeau permettant un couplage vent-drapeau-mât. Pour un montage donné, nous enregistrons l'angle de rotation du mât $\theta(t)$ à la vitesse critique U_c^- (notations du Chapitre 1, Section 1.1.3).

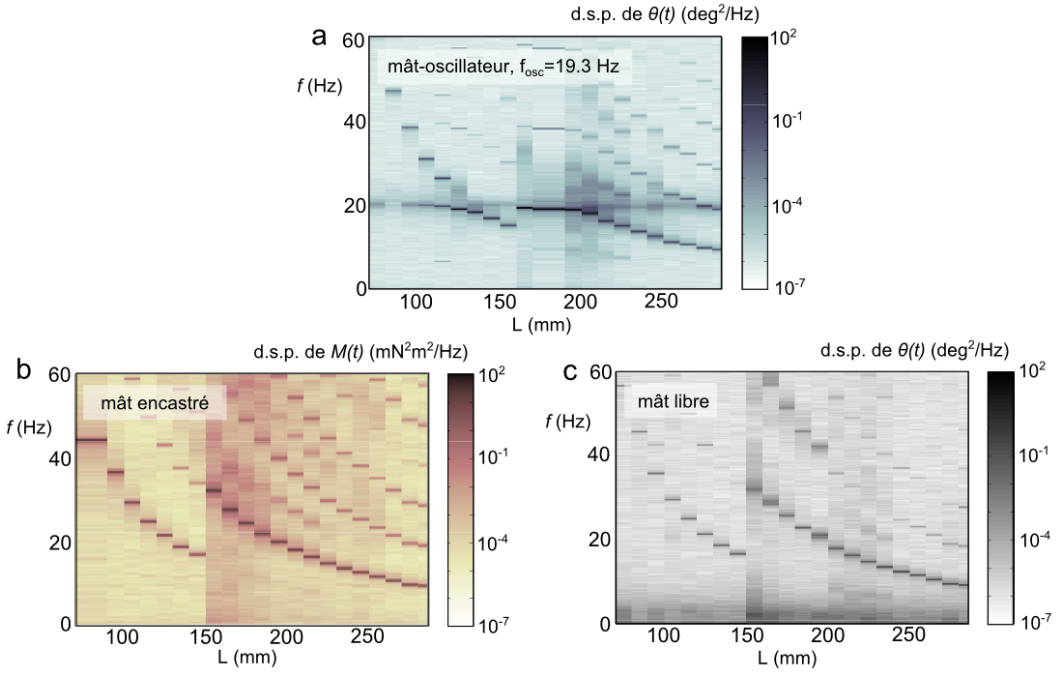


Figure 3.14 – Comparaison du cas des drapeaux à "mât-oscillateur", "mât encastré" et "mât libre" en termes de densités spectrales de puissance au seuil de l'instabilité, reportées ici verticalement et en échelle de couleur logarithmique. ***a :*** *Densités spectrales de puissance de $\theta(t)$ lors du couplage des drapeaux avec le mât-oscillateur de fréquence naturelle f_{osc} = 19.2 Hz. La fréquence f_{osc} est constamment présente.* ***b :*** *Densités spectrales de puissance du moment $M(t)$ des drapeaux à mât encastré de longueur variant entre L = 70 mm et L = 290 mm. Ces données ont été également analysées au Chapitre 2, Section 2.2.3 (Figure 2.6b).* ***c :*** *Densités spectrales de puissance de $\theta(t)$ pour des drapeaux à mât libre de longueur variant entre L = 70 mm et L = 290 mm.*

Nous reportons les densités spectrales de puissance successives de $\theta(t)$ sur la Figure 3.14a. Une couleur foncée indique une fréquence dominante dans le spectre. Ce diagramme est réalisé

à partir de vingt-deux longueurs de drapeau couplé au mât-oscillateur en soufflerie. Nous distinguons trois régions où un accrochage fréquentiel est présent : $L \simeq 110-130$ mm, $L \simeq 160-210$ mm et $L \simeq 270-290$ mm. Pour référence, nous reportons sur la Figure 3.14b les densités spectrales de puissance associées au moment $M(t)$ des drapeaux à mât encastré (données du Chapitre 2 pour vingt deux longueurs de drapeau). Dans chaque régime de flottement, de part et d'autre de $L \simeq 150$ mm, nous retrouvons que la fréquence dominante décroît avec la vitesse de vent [3]. Notons que le cas d'un "drapeau à mât encastré" correspond à une raideur en rotation infiniment grande, tandis que le cas d'une raideur en rotation nulle est plutôt la situation d'un "drapeau à un mât libre". Nous reportons donc également les densités spectrales de puissance successives de $\theta(t)$ pour un drapeau à mât libre sur la Figure 3.14c (pour vingt deux longueurs de drapeau différentes). Cette configuration est réalisée expérimentalement en retirant les ressorts du montage (la barre d'inertie est conservée).

Dans le cas d'un drapeau à mât libre, nous remarquons que l'intensité des pics des densités spectrales de puissance est beaucoup plus faible que dans le cas d'un drapeau couplé. Aussi, l'allure générale des densités spectrales de puissance avec un mât encastré est proche du cas d'un mât libre. En toute généralité, nous pourrions utiliser l'une de ces deux situations asymptotiques pour discuter la dynamique du mât-oscillateur qui est un cas de raideur en rotation intermédiaire.

Sur la Figure 3.15a, nous reportons les fréquences dominantes de la Figure 3.14a (drapeau couplé), de la Figure 3.14b (drapeau à mât encastré) et de la Figure 3.14c (drapeau à mât libre). Nous voyons clairement que la fréquence du mât-oscillateur a tendance à s'accrocher à la fréquence naturelle $f_{\text{osc}} = 19.2$ Hz lorsque le drapeau flotte à une fréquence proche. Nous voyons aussi que les valeurs de fréquences obtenues dans le cas d'un drapeau couplé ne sont pas juste intermédiaires entre les fréquences d'un drapeau à mât libre et d'un drapeau à mât encastré. Ces résultats sont en accord avec l'analyse de Gibbs *et al.* (2012) qui a étudié le cas analogue d'un drapeau à raideur d'encastrement variable.

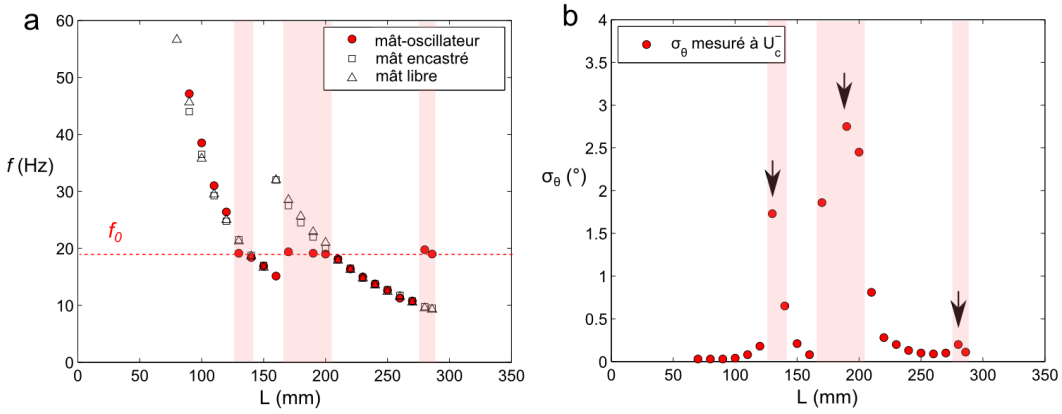


Figure 3.15 – Trois régions distinctes d'accrochage fréquentiel. ***a :*** *Superposition des données relatives au mât-oscillateur, mât encastré et mât libre. Les régions roses correspondent aux différents accrochages fréquentiels.* ***b :*** *Amplitude de rotation du mât, caractérisée par l'écart-type σ_θ. Le maximum est ici atteint pour $L \simeq 190$ mm. Les flèches indiquent les maxima locaux de σ_θ.*

Sur la Figure 3.15b, nous constatons que les trois accrochages fréquentiels s'accompagnent de maxima d'écart-types $\sigma_\theta = \sqrt{< \theta^2 > - < \theta >^2}$, ce qui suggère qu'il y a un couplage entre le drapeau et son mât pour seulement quelques longueurs de drapeau. Aussi, nous voyons à partir

3. Au Chapitre 1, Section 1.4, il a été vu comment déterminer la pente de la décroissance.

des vidéos à la caméra rapide que la valeur maximale de σ_θ correspond à un flottement à deux nœuds à $L = 190$ mm (voir aussi Chapitre 1, Section 1.1.4, avec le même drapeau sur un mât encastré). Ce lieu du maximum peut s'expliquer par la conjonction du fait que (1) la fréquence du flottement pour $L = 190$ mm est proche de la fréquence naturelle de l'oscillateur et (2) à la transition entre les régimes de flottement pour $L \simeq 160 - 200$ mm, le moment généré autour du mât du drapeau est élevé (voir Chapitre 2, Section 2.2.2, avec le même drapeau sur un mât encastré).

3.3.2 La déstabilisation du drapeau favorisée par le couplage

Dans nos essais en soufflerie, la vitesse critique de flottement obtenue avec un mât-oscillant semble généralement inférieure à celle obtenue avec un mât encastré (respectivement 5.9 m/s et 6.4 m/s sur l'axe des abscisses de la Figure 3.9 à la Section 3.2.2 par exemple). Cela suggère que l'accrochage fréquentiel a un effet favorable sur la déstabilisation du drapeau. Pour avoir davantage de données à ce sujet, nous comparons les vitesses critiques U_c (de type U_c^-) entre les cas d'un mât encastré, d'un mât-oscillateur et d'un mât libre pour les différentes longueurs de drapeau de la Section 3.3.1. Les résultats de ces mesures sont reportés sur la Figure 3.16.

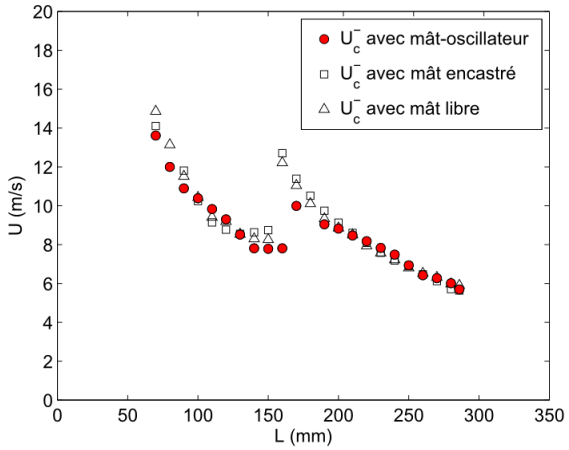


Figure 3.16 – Flottement favorisé par accrochage fréquentiel. La vitesse critique de flottement est du même ordre de grandeur dans les trois cas, hormis à la transition entre le régime de flottement à un nœud et celui à deux nœuds.

En général, les vitesses critiques sont toutes du même ordre de grandeur. Cependant, la présence du mât-oscillateur tend à favoriser les changements de régimes permettant d'accrocher f_{osc}. C'est le cas pour $L = 160$ mm où le flottement est déclenché à $U \simeq 8$ m/s au lieu de $U \simeq 13$ m/s dans le cas d'un drapeau à mât encastré ou à mât libre.

3.3.3 Au-delà du seuil : la largeur de l'accrochage fréquentiel

D'un point de vue expérimental, définir la largeur de l'accrochage fréquentiel est délicat. Arbitrairement, nous la définissons comme la plage de vitesse de vent $[U_1,\ U_2]$ telle que $\sigma_\theta(U_1) = 0.4°$ et $\sigma_\theta(U_2) = \sigma_\theta^{\text{max}}$. Cette construction est schématisée sur la Figure 3.17.

En soufflerie, nous recherchons la vitesse de vent U_1 à partir de laquelle σ_θ dépasse 0.4° pour chaque longueur de drapeau. Nous recherchons ensuite la vitesse de vent U_2 donnant l'écart-type maximum $\sigma_\theta^{\text{max}}$. La largeur de l'accrochage fréquentiel ainsi définie $\Delta_U = U_2 - U_1$ est représentée par la zone bleutée sur la Figure 3.18a. Dans chaque régime de flottement

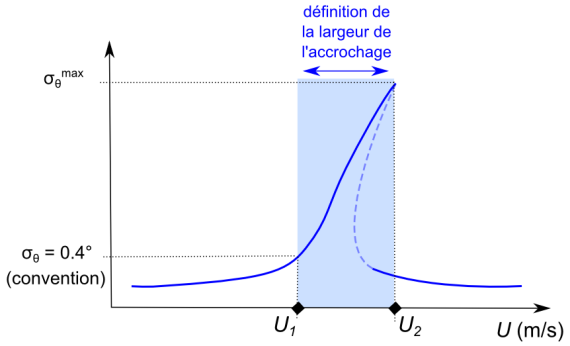


Figure 3.17 – Définition graphique de la largeur de l'accrochage fréquentiel. Elle est désignée par $\Delta_U = U_2 - U_1$.

séparés par $L \simeq 160$ mm, nous voyons que $\Delta_U = U_2 - U_1$ diminue lorsque la longueur du drapeau augmente (tant que U_1 est plus grand que U_c^-). Aussi, la valeur du maximum de σ_θ diminue fortement lorsque la longueur du drapeau augmente dans chaque régime de flottement (Figure 3.18b). Pour $L < 120$ mm sur la Figure 3.17b, il n'y a plus véritablement d'accrochage fréquentiel car la fréquence de flottement du drapeau est plus élevée que la fréquence naturelle d'oscillation du mât.

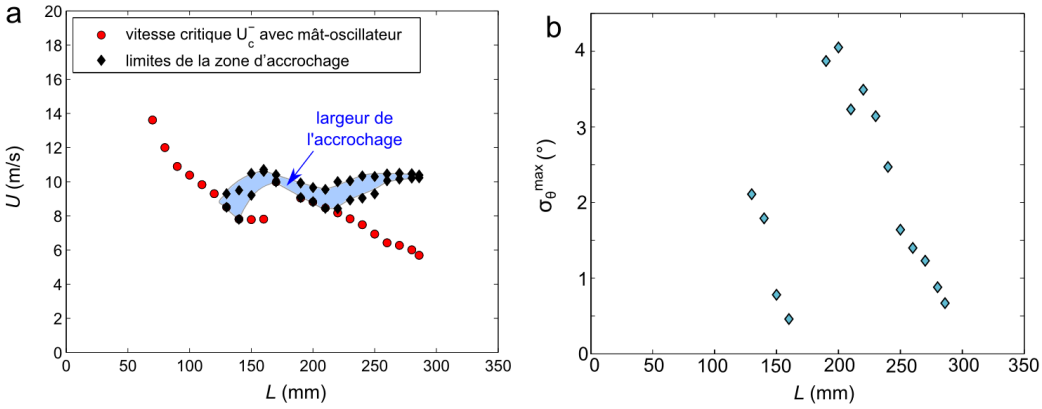


Figure 3.18 – Largeur de l'accrochage fréquentiel. ***a :*** *Lieu des vitesses* U_1 *et* U_2 *(losanges noirs), en comparaison avec la vitesse critique* U_c^- *(ronds rouges). La zone bleutée correspond à la largeur de l'accrochage fréquentiel.* ***b :*** *Maxima de* σ_θ *lorsqu'il y a accrochage fréquentiel.*

En conclusion, nous voyons que pour maximiser à la fois la largeur de la zone d'accrochage fréquentiel et les valeurs de l'amplitude de rotation dans cette situation, il est préférable de paramétrer un accrochage fréquentiel proche de $U = U_c^-$, par valeurs supérieures. Dans les sections suivantes, nous utiliserons des conditions de vent, drapeau et mât qui nous placerons toujours proche du seuil de l'instabilité d'un drapeau de référence à mât encastré, pour lequel nous pourrons utiliser les données du Chapitre 1 et du Chapitre 2.

3.4 Paramétrage du mât au seuil de l'instabilité

Dans cette section, nous réalisons des campagnes de mesures au seuil du flottement destinées à caractériser les rôles de la raideur en rotation du mât, de l'inertie du mât, ainsi que des dimensions du drapeau. Nous ajustons soigneusement la fréquence naturelle du mât-oscillateur pour qu'elle soit confondue avec la fréquence critique de flottement du drapeau à mât encastré (à $U = U_c^-$, avec les notations du Chapitre 1, Section 1.1.3). Nous réaliserons ces mesures avec des drapeaux en acier qui sont, à la Section 3.2, ceux qui nous ont permis d'obtenir les plus grandes amplitudes de rotation.

3.4.1 Comment fixer la fréquence naturelle du mât ?

Dans un premier temps, nous réalisons une série d'expériences permettant de distinguer le rôle de C_{osc} et de $1/J_{\text{osc}}$ lorsque la fréquence f_{osc} est fixée. En effet, pour une même fréquence naturelle de mât $f_{\text{osc}} = \sqrt{C_{\text{osc}}/J_{\text{osc}}}/2\pi$, nous pouvons avoir différents couples de raideur en rotation C_{osc} et de moment d'inertie J_{osc}. En faisant augmenter ou diminuer C_{osc} et J_{osc} de manière proportionnelle, nous observons l'impact de ces deux paramètres tout en conservant f_{osc}.

Le drapeau utilisé est en acier d'épaisseur $d = 54$ μm, de longueur $L = 150$ mm et de largeur $H = 100$ mm (Annexe A). La fréquence critique de ce drapeau lorsqu'il est encastré est $f_c^{\text{enc}} = 8.2$ Hz. En utilisant les résultats des chapitres précédents, nous paramétrons une "résonance" proche du seuil de l'instabilité de flottement, c'est-à-dire que le mât-oscillateur doit posséder une fréquence naturelle très proche et légèrement supérieure à f_c^{enc}. Le seuil de flottement est ici estimé par rapport au cas du drapeau à mât encastré. Nous ajustons la raideur en rotation C_{osc} et le moment d'inertie J_{osc} de manière à réaliser de 5 manières différentes un oscillateur de même fréquence naturelle $f_{\text{osc}} \simeq 8.4$ Hz et de même taux d'amortissement $\zeta^*_{osc} \simeq 1.4 \times 10^{-2}$ (voir les données de la Figure 3.7b, Section 3.2.1). Les caractéristiques de ces mâts sont reportées dans le Tableau 3.2.

	montage 1	montage 2	montage 3	montage 4	montage 5
C_{osc} (N.m/rad)	0.28	0.32	0.62	0.81	2.3
J_{osc} (kg.m^2)	1.0×10^{-4}	1.1×10^{-4}	2.2×10^{-4}	2.9×10^{-4}	8.4×10^{-4}
f_{osc} conservé (Hz)	8.4	8.4	8.4	8.3	8.4
$(f_{\text{osc}} - f_c^{\text{enc}})/f_c^{\text{enc}}$ conservé	2 %	2 %	2 %	2 %	2 %

Tableau 3.2 – Caractéristiques des mâts utilisés pour les expériences de la Figure 3.19.

Sur la Figure 3.19a, nous reportons l'évolution de l'écart-type $\sigma_\theta = \sqrt{< \theta^2 > - < \theta >^2}$ en fonction de la vitesse de vent. Les mesures à vitesse de vent croissante et décroissante sont superposées. Nous voyons que plus la raideur du mât C_{osc} est élevée, plus les oscillations sont de faible amplitude. Pour $C_{\text{osc}} = 0.28$ N.m/rad, nous avons $\sigma_\theta^{\text{max}} \simeq 11.2^{\text{o}}$, tandis qu'avec $C_{\text{osc}} = 2.3$ N.m/rad, nous avons $\sigma_\theta^{\text{max}} \simeq 2.9^{\text{o}}$. Notons que le montage 3 ne suit pas la tendance générale, mais l'écart de 5 % commis en termes d'angle est du même ordre de grandeur que les écarts observés lors des essais de reproductibilité (Section 3.2.3). Par ailleurs, la zone de vitesse de vent où de fortes oscillations sont observées s'élargit d'environ 50 % lorsque la raideur du mât C_{osc} est divisée par 10.

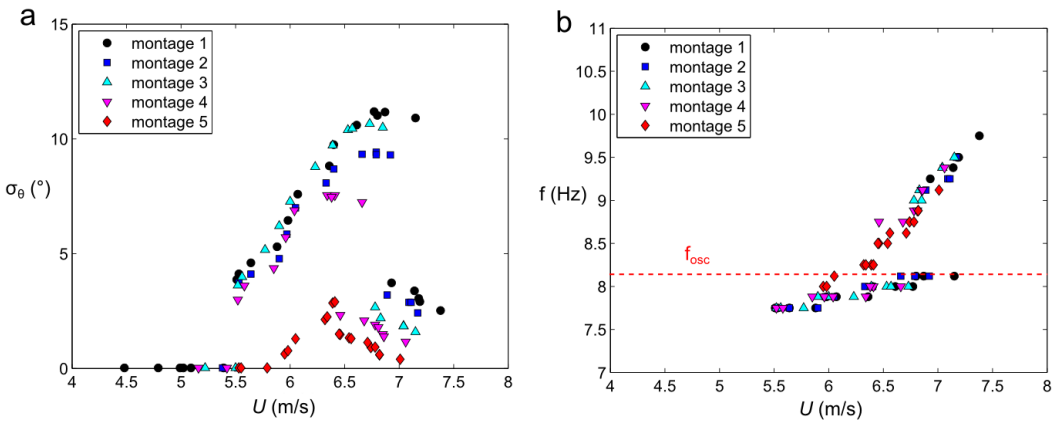


Figure 3.19 – Rotation du mât en fonction de la vitesse du vent pour différents couples (C_{osc}, J_{osc}) *tout en conservant* $f_{osc} = \sqrt{C_{osc}/J_{osc}}/2\pi$ *(Tableau 3.2). Les données obtenues à vitesse de vent croissante et décroissante sont superposées.* ***a :*** *Évolution de l'écart-type* σ_θ *de l'angle de rotation.* ***b :*** *Évolution de la fréquence* f *d'oscillation du mât.*

Sur la Figure 3.19b, nous reportons l'évolution de la fréquence d'oscillation du mât en fonction de la vitesse de vent. Nous notons que plus la raideur du mât C_{osc} est élevée, plus la zone d'accrochage fréquentiel est restreinte. Pour $C_{\text{osc}} = 0.28$ N.m/rad, la plage d'influence de l'oscillateur est $U = 5.5 - 7.2$ m/s, tandis qu'avec $C_{\text{osc}} = 2.3$ N.m/rad, il devient difficile de conclure sur l'existence d'un accrochage fréquentiel (pas de déviation apparente des fréquences). Lorsque le système quitte le régime accroché, nous voyons clairement que toutes les données se regroupent (indépendamment du type de mât) et évoluent proportionnellement à la vitesse du vent, ce qui rappelle le cas des drapeaux à mât encastré.

3.4.2 Effet de l'inertie du mât

Dans ce qui suit, nous "longeons" le seuil de l'instabilité avec un drapeau de longueur variable tout en conservant une condition d'accrochage fréquentiel entre le drapeau et le mât-oscillateur. Pour cela, nous cherchons à conserver $(f_{\text{osc}} - f_c^{\text{enc}})/f_c^{\text{enc}}$, où f_c^{enc} est la fréquence critique de flottement du drapeau à mât encastré.

Le drapeau est en acier d'épaisseur $d = 54$ μm, de largeur $H = 100$ mm et de longueur variée entre $L = 141$ mm et $L = 190$ mm. Lorsque la longueur du drapeau est augmentée, la fréquence critique f_c^{enc} diminue en raison double (Chapitre 1) et nous devons modifier le mât-oscillateur en augmentant le moment d'inertie J_{osc} pour faire diminuer $f_{\text{osc}} = \sqrt{C_{\text{osc}}/J_{\text{osc}}}/2\pi$, et ainsi conserver la condition d'accrochage fréquentiel au seuil de l'instabilité $f_{\text{osc}} \simeq f_c^{\text{enc}}$. En pratique, pour augmenter le moment d'inertie J_{osc}, nous disposons des petites masses supplémentaires le long de la barre d'inertie. Notons que le taux d'amortissement $\zeta^*_{osc} = 1.4\times10^{-2}$ n'est quasiment pas impacté par le changement d'inertie (voir les données de la Figure 3.7a, Section 3.2.1). Les paramètres des quatre montages réalisés sont reportés dans le Tableau 3.3.

Sur la Figure 3.20a, nous reportons l'évolution de σ_θ en fonction de la vitesse du vent. Dans chaque situation, nous observons un accroissement relativement régulier de σ_θ jusqu'à une valeur maximale, suivi d'abord d'une légère diminution puis d'une très forte diminution. Notons que dans le cas du montage 1, un minimum local de σ_θ est visible pour $U \simeq 4$ m/s. A priori, l'explication la plus rationnelle est qu'il y ait une transition de régime de flottement à cette vitesse de vent. Les enregistrements vidéos effectués ne permettent pas de conclure avec certitude.

	montage 1	montage 2	montage 3	montage 4
C_{osc} (N.m/rad)	0.32	0.32	0.32	0.32
J_{osc} (kg.m^2)	3.1×10^{-4}	1.8×10^{-4}	1.1×10^{-4}	9.2×10^{-5}
f_{osc} (Hz)	5.0	6.4	8.5	9.2
L (mm)	190	170	150	141
$(f_{\text{osc}} - f_c^{\text{enc}})/f_c^{\text{enc}}$ conservé	2 %	3 %	3 %	2 %

Tableau 3.3 – Caractéristiques des montages utilisés pour les expériences de la Figure 3.20.

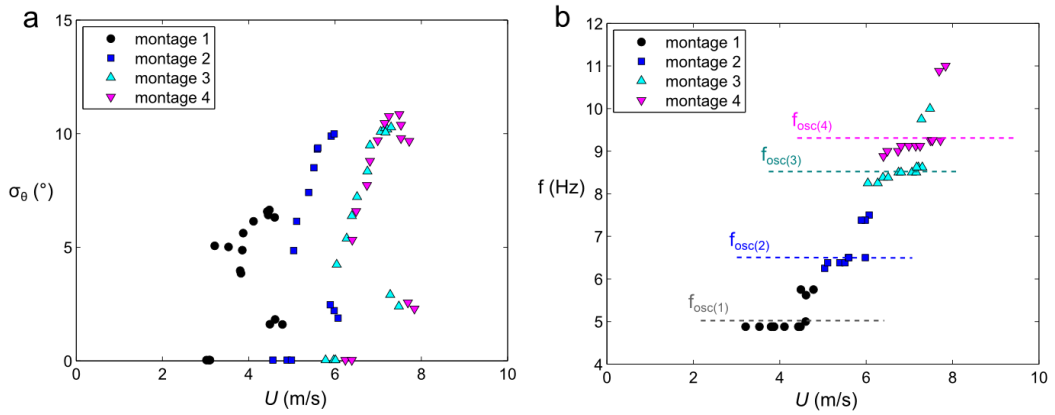


Figure 3.20 – Rotation du mât en fonction de la vitesse du vent pour différents couples (L, J_{osc}) tout en maintenant $f_{osc} \simeq f_c^{enc}$ (Tableau 3.3). Les données obtenues à vitesse de vent croissante et décroissante sont superposées. ***a :*** *Évolution de l'écart-type σ_θ de l'angle de rotation.* ***b :*** *Évolution de la fréquence f d'oscillation du mât.*

Sur la Figure 3.20b où sont reportés les fréquences dominantes du mât, nous constatons que le maximum de σ_θ est atteint lorsque la fréquence du mât est de l'ordre de la fréquence naturelle f_{osc}. La fréquence d'oscillation du mât s'écarte fortement de loi $f \sim U$ propre au flottement des drapeaux à mât encastré. Nous voyons également que la fréquence d'oscillation du mât tend systématiquement vers f_{osc} par valeurs inférieures, avant de présenter un saut typique du départ du régime accroché. Plus l'inertie du mât J_{osc} est élevée, plus $\sigma_\theta^{\text{max}}$ est faible. Pour autant, la largeur de la zone d'accrochage fréquentiel est peu touchée par le changement d'inertie dans cette gamme de paramètres.

3.4.3 Effet de la raideur du mât

Nous réalisons la même expérience que précédemment, mais cette fois en conservant le moment d'inertie et en augmentant la raideur en rotation du mât. À nouveau, quatre montages sont réalisés et les expériences se déroulent au seuil de l'instabilité $f_{\text{osc}} \simeq f_c^{\text{enc}}$.

La longueur du drapeau est variée entre $L = 144$ mm et $L = 181$ mm. Lorsque la longueur du drapeau est augmentée, la fréquence critique f_c^{enc} diminue et pour conserver $f_{\text{osc}} \simeq f_c^{\text{enc}}$ nous devons modifier le mât-oscillateur en diminuant la raideur en rotation C_{osc}, ce qui fait diminuer $f_{\text{osc}} = \sqrt{C_{\text{osc}}/J_{\text{osc}}}/2\pi$. En pratique, pour diminuer la raideur en rotation C_{osc}, nous changeons le type des ressorts ou bien nous en disposons plusieurs en série. Le taux amortissement $\zeta^*_{osc} = 1.4 \times 10^{-2}$ est relativement peu impacté par la modification de la raideur en rotation (Figure 3.7, Section 3.2.1). Les paramètres des quatre montages réalisés sont reportés dans le

Tableau 3.4.

	montage 1	montage 2	montage 3	montage 4
C_{osc} (N.m)	0.28	0.32	0.62	0.81
J_{osc} (kg.m^2)	2.2×10^{-4}	2.2×10^{-4}	2.2×10^{-4}	2.2×10^{-4}
f_{osc} (Hz)	5.9	6.6	7.7	9.3
L (mm)	181	170	153	144
$(f_{\text{osc}} - f_c^{\text{enc}})/f_c^{\text{enc}}$ conservé	3 %	3 %	3 %	2 %

Tableau 3.4 – Caractéristiques des montages utilisés pour les expériences de la Figure 3.21.

Sur la Figure 3.21a, nous reportons l'évolution de σ_θ en fonction de la vitesse du vent. Pour chaque montage, l'évolution de σ_θ avec la vitesse du vent U est semblable à celle observée à la Section 3.4.2 : un accroissement relativement régulier suivi d'un plateau puis une très forte diminution. Plus la raideur en rotation C_{osc} du montage est élevée, plus $\sigma_\theta^{\text{max}}$ est faible.

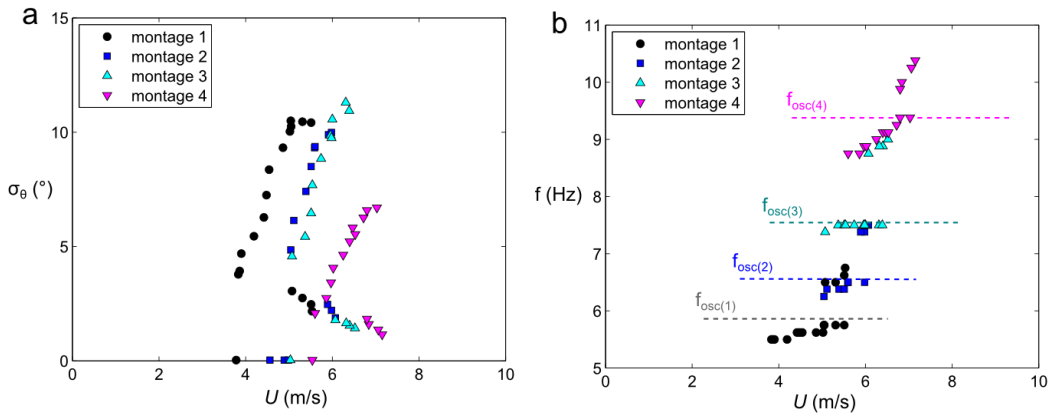


Figure 3.21 – Rotation du mât en fonction de la vitesse du vent pour différents couples (L, C_{osc}) tout en maintenant $f_{osc} \simeq f_c^{enc}$ (Tableau 3.4). Les données obtenues à vitesse de vent croissante et décroissante sont superposées. ***a :*** *Évolution de l'écart-type σ_θ de l'angle de rotation.* ***b :*** *Évolution de la fréquence f d'oscillation du mât.*

De même, en termes de fréquences, Figure 3.21b, nous voyons systématiquement un accrochage fréquentiel par valeurs inférieures à f_{osc}, puis un décrochage lorsque $f = f_{\text{osc}}$. La largeur de l'accrochage fréquentiel semble peu modifiée dans cette gamme de paramètres.

3.4.4 Effet de l'épaisseur du drapeau

Dans l'optique d'obtenir de grandes oscillations du mât, nous pouvons analyser l'impact du module de flexion du drapeau EI en augmentant l'épaisseur du drapeau qui y intervient au cube. Nous réalisons trois montages avec des drapeaux en acier d'épaisseur croissante, respectivement $d = 54$ μm $d = 77$ μm $d = 103$ μm. Pour que l'effet de maximisation de σ^*_{osc} soit le plus prononcé possible, nous utilisons le moment d'inertie le plus faible possible (barre en fibre de carbone) et la raideur en rotation du mât la plus faible possible également (quatre ressorts en série de part et d'autre du mât). Lorsque nous augmentons l'épaisseur du drapeau, nous augmentons aussi la longueur du drapeau pour conserver la relation $f_{\text{osc}} \simeq f_c^{\text{enc}}$ (i.e. la condition d'accrochage fréquentiel au seuil de l'instabilité).

	montage 1	montage 2	montage 3
C_{osc} (N.m)	0.28	0.28	0.28
J_{osc} (kg.m^2)	1.0 $\times 10^{-4}$	1.0 $\times 10^{-4}$	1.0 $\times 10^{-4}$
f_{osc} (Hz)	8.2	8.2	8.2
d (μm)	54	77	103
L (mm)	154	205	225
$(f_{\text{osc}} - f_c^{\text{enc}})/f_c^{\text{enc}}$ conservé	4 %	5 %	3 %

Tableau 3.5 – Caractéristiques des montages utilisés pour les expériences de la Figure 3.22.

Sur la Figure 3.22a, nous reportons les valeurs de σ_θ pour trois montages avec des épaisseurs de drapeau différentes. Plus l'épaisseur est grande, plus l'amplitude des oscillations du mât est grande. L'augmentation est tellement forte pour le montage 3 que nous atteignons les limites du montage à partir de $U = 10$ m/s : les ressorts sont très fortement étirés et très fortement compressés ; le drapeau touche les parois de la soufflerie.

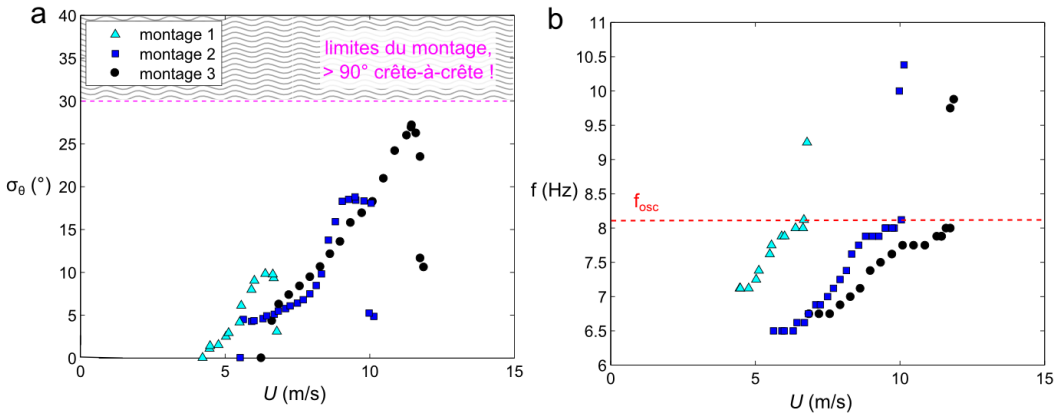


Figure 3.22 – Rotation du mât en fonction de la vitesse du vent pour différents couples (L, d) tout en maintenant $f_{osc} \simeq f_c^{enc}$ (Tableau 3.5). Les données obtenues à vitesse de vent croissante et décroissante sont superposées. ***a :*** *Évolution de l'écart-type σ_θ de l'angle de rotation. La zone hachurée où la rotation du mât dépasse 90° crête-à-crête correspond à la limite physique du montage.* ***b :*** *Évolution de la fréquence f d'oscillation du mât.*

Enfin, en termes de fréquence d'oscillation, Figure 3.22b, il apparaît que la largeur de l'accrochage fréquentiel croît globalement avec l'épaisseur du drapeau.

3.4.5 Quid de la puissance mécanique ?

Il est tout à fait légitime de se demander si les systèmes à l'étude sont des bons candidats pour la récupération d'énergie du vent, comme par exemple si nous fixons un alternateur sur le mât-oscillateur[4]. Afin d'apporter des éléments de réponse quantitatifs, nous nous proposons d'évaluer la puissance mécanique $< P_{\text{méca}} >$ transmise au mât en rotation.

4. Une idée possible serait de fixer le mât-oscillateur à un moteur à courant continu fonctionnant en génératrice, lequel pourrait ainsi directement délivrer un courant alternatif.

L'ordre de grandeur de la puissance mécanique

Par définition :

$$< P_{\text{méca}} >= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T M(t)\frac{d\theta}{dt}(t)dt, \tag{3.2}$$

où $\theta(t) = \sqrt{2}\sigma_\theta \sin(\omega_1 t)$ est l'angle de rotation du mât et $M(t) = \sqrt{2}\sigma_M \sin(\omega_2 t + \varphi)$ est le moment appliqué au mât par le drapeau flottant, déphasé de φ inconnu. Nous savons uniquement que si $\varphi = 0$ et $\omega_1 = \omega_2$ alors $< P_{\text{méca}} >= 0$, ce qui n'est pas souhaitable. Pour déterminer $M(t)$ en toute généralité, la représentation du mât suggérée à la Section 3.2.1 peut-être utilisée avantageusement :

$$M(t) = J_{\text{osc}}(\ddot{\theta} + 2\zeta^*_{\text{osc}}\omega_{\text{osc}}\dot{\theta} + \omega^2_{\text{osc}}\theta),$$

où $\omega_{\text{osc}} = \sqrt{C_{\text{osc}}/J_{\text{osc}}}$. Ainsi, dans la situation d'un accrochage fréquentiel, l'équation (3.2) se simplifie via $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega_{\text{osc}}$:

$$< P^{\text{accro}}_{\text{méca}} >= 2C_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}\omega_{\text{osc}}\sigma^2_\theta. \tag{3.3}$$

Cette expression permet de voir qu'il est nécessaire d'avoir de grands angles de rotation du mât pour obtenir une puissance mécanique raisonnable. Notons que la forme classique des courbes de puissance en cloche (voir par exemple Singh *et al.*, 2012 ; Grouthier, 2013) vient du fait que σ^2_θ dépende également du taux d'amortissement ζ^*_{osc}. Nous reviendrons sur ce point à la section suivante.

Avec les valeurs du drapeau en papier de la Section 3.2.2, il vient $< P^{\text{accro}}_{\text{méca}} >\simeq 6$ mW. Avec les valeurs du drapeau en acier de la Section 3.2.3, il vient $< P^{\text{accro}}_{\text{méca}} >\simeq 15$ mW. Enfin, avec les valeurs précédentes d'un drapeau en acier dont le mât tourne de 80° crête-à-crête, $C_{\text{osc}} \simeq 0.28$ N.m/rad, $\zeta^*_{\text{osc}} \simeq 0.014$, $f_1 \simeq f_2 \simeq f_{\text{osc}} \simeq 8.2$ Hz et $\sigma_\theta \simeq 27°$ il vient $< P^{\text{accro}}_{\text{méca}} >\simeq 90$ mW.

Les valeurs de puissance générée par ce dispositif sont donc très encourageantes. Notons qu'il est ici question de puissance mécanique : un calcul de puissance complet devrait aussi intégrer les pertes dues à la conversion en énergie électrique.

L'efficacité de la récupération d'énergie

Par analogie avec les définitions d'efficacité du secteur éolien (voir Leconte *et al.*, 2012 ; Martin, 2012), l'efficacité du dispositif à l'accrochage fréquentiel peut se voir comme le rapport entre la puissance mécanique $< P^{\text{accro}}_{\text{méca}} >$ et le débit d'énergie cinétique passant par le domaine spatial visité par le drapeau (noté P_{ref}). Cette définition est également adoptée pour l'étude de la récupération d'énergie via drapeaux piézoélectriques par Xia (2012) ; Michelin & Doaré (2013).

En notant H la largeur du drapeau, A l'amplitude de flottement, ρ_a la masse volumique de l'air et U la vitesse du vent, il vient $P_{\text{ref}} = \rho_a H A U^3$. L'efficacité ainsi définie s'écrit :

$$\eta = \frac{< P^{\text{accro}}_{\text{méca}} >}{P_{\text{ref}}} = \frac{2C_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}\omega_{\text{osc}}\sigma^2_\theta}{\rho_a H A U^3}.$$

Avec une valeur typique de puissance mécanique $< P^{\text{accro}}_{\text{méca}} >\simeq 100$ mW et pour $\rho_a \simeq 1.2$ kg/m^3, $U \simeq 10$ m/s, $A \simeq 0.08$ m et $H = 0.1$ m nous obtenons un P_{ref} de l'ordre du Watt et une efficacité η de quelques pourcents. Cela signifie que le dispositif étudié extrait quelques pourcents de l'énergie cinétique transportée par vent. En tant que telle, cette efficacité est beaucoup plus faible que celle des éoliennes modernes qui est plutôt de l'ordre de 40 % (Martin, 2012). Rappelons aussi qu'il y a une limite physique d'efficacité $\eta \simeq 59$ % de récupération d'énergie par turbine (limite de Betz) qui s'applique de même au cas de la récupération d'énergie par drapeau.

3.5 Éléments de modélisation

Nous nous proposons de construire progressivement un modèle minimal permettant d'interpréter les mesures d'amplitudes de rotation du mât de la Section 3.4.

3.5.1 Les indices de l'analyse dimensionnelle

Nous sommes en présence d'une triple interaction entre le vent, le drapeau et son mât, si bien que les paramètres du problème ne sont pas intuitifs de prime abord. Afin de déterminer quels sont les paramètres pertinents, une analyse dimensionnelle est indispensable. Sur la Figure 3.23, nous commençons par faire le bilan des variables intervenant dans le problème.

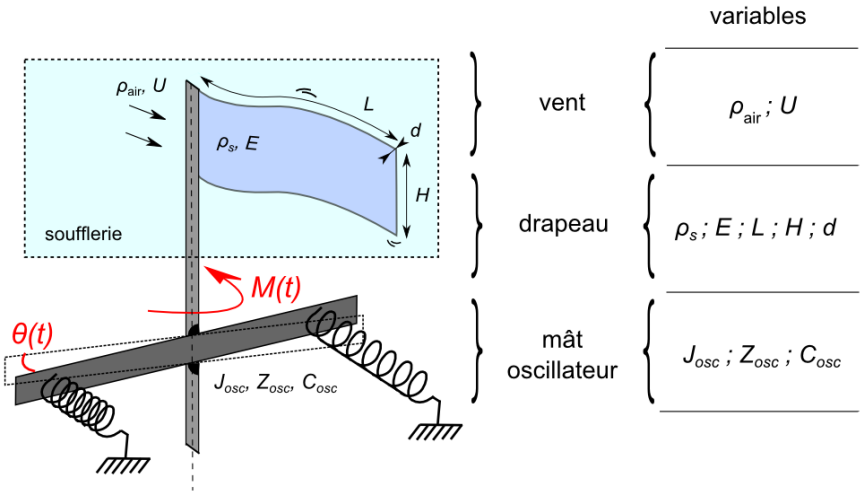


Figure 3.23 – Bilan des variables intervenants dans le couplage vent-drapeau-mât

Étape 1 : le couplage partiel vent-drapeau

En ce qui concerne l'interaction vent-drapeau étudiée au Chapitre 1 et au Chapitre 2, nous répertorions 7 variables (ρ_{air}, U, ρ_s, E, L, H et d), avec cependant ρ_{air} qui est imposée par les conditions climatiques. Les 6 variables restantes font intervenir 3 dimensions fondamentales qui sont la masse, la longueur et le temps. Nous déduisons du théorème de Vaschy-Buckingham qu'il existe 3 paramètres sans dimension permettant de décrire le problème exhaustivement (voir Sonin 2003). Nous les avons déjà mis en évidence au Chapitre 1, il s'agit (choix non unique) de la masse ajoutée adimensionnée m^*, du rapport d'aspect H^* et de la vitesse de vent adimensionnée U^*, définis respectivement par :

$$
\begin{aligned}
m^* &= \frac{\pi}{4}\frac{\rho_a L}{\rho_s d} && \text{masse ajoutée adimensionnée,}\\
H^* &= \frac{H}{L} && \text{rapport d'aspect,}\\
U^* &= U/\left(\sqrt{\frac{E}{12\rho_s}}\frac{d}{L}\right) && \text{vitesse de vent adimensionnée.}
\end{aligned}
$$

Aussi, nous avons proposé au Chapitre 1 que m^* pouvait contenir en première approximation les effets du rapport d'aspect H^*, en faisant le lien entre le modèle de drapeau élancé et

trapu. Cela nous a conduit à la masse ajoutée effective adimensionnée m_e^*, définie par :

$$m_e^* = \frac{1}{1+1.84H^*} m^* \qquad \text{masse ajoutée effective adimensionnée.}$$

Étape 2 : le couplage complet

Pour étudier la triple interaction vent-drapeau-mât, nous devons prendre en compte les caractéristiques du mât-oscillateur, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} J_{\text{osc}} & \text{son inertie de rotation [kg.m}^2\text{]}, \\ Z_{\text{osc}} & \text{son amortissement [kg.m}^2\text{/s]}, \\ C_{\text{osc}} & \text{sa raideur en rotation [kg.m}^2\text{/s}^2\text{]}. \end{cases}$$

L'introduction de ces nouveaux paramètres, linéairement dépendants des précédents en termes de dimension, implique d'introduire 3 nouveaux paramètres sans dimension. Deux d'entre eux sont très naturels et ont été introduits de manière canonique à la Section 3.2.1. Il s'agit de la pulsation naturelle réduite ω_{osc}^* et du taux d'amortissement ζ_{osc}^*, définis respectivement par :

$$\begin{aligned} \omega_{\text{osc}}^* &= \frac{\omega_{\text{osc}} L}{U} && \text{pulsation naturelle réduite,} \\ \zeta_{\text{osc}}^* &= \frac{Z_{\text{osc}}}{2\sqrt{C_{\text{osc}} J_{\text{osc}}}} && \text{taux d'amortissement.} \end{aligned}$$

Pour déterminer le dernier paramètre, nous pouvons nous intéresser à l'origine physique du couplage entre le drapeau et son mât. En particulier, d'après l'analyse dimensionnelle précédente, la connaissance de $\omega_{\text{osc}} = \sqrt{C_{\text{osc}}/J_{\text{osc}}}$ ne permet pas de différencier le rôle de C_{osc} et de $1/J_{\text{osc}}$ dans le couplage du drapeau avec son mât.

3.5.2 Écriture du problème couplé linéarisé

D'après le Chapitre 1, nous savons qu'un drapeau flottant génère sur son mât un moment $M(t)$ proportionnel à la courbure $\mathcal{C}_o(t)$ à l'encastrement sur le mât. Ainsi, le mât du drapeau est caractérisé par une équation de type oscillateur forcé :

$$J_{\text{osc}}\ddot{\theta} + Z_{\text{osc}}\dot{\theta} + C_{\text{osc}}\theta = M(t). \tag{3.4}$$

Dans le cas d'un drapeau dont le bord d'attaque réalise de petites rotations ($\partial_x y\big|_{x=0} \ll 1$), $M(t)$ peut être linéarisé sous la forme $M(t) = EI\partial_x^2 y\big|_{x=0}$. En normalisant les équations du drapeau (modèle élancé, Chapitre 1) et du mât (modèle d'oscillateur, équation (3.4)) par le temps de passage de l'air le long du drapeau L/U, le couplage s'écrit sous la forme d'un système d'équations couplées :

$$\underbrace{\frac{1}{U^{*2}}\frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*4}} + \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^{*2}}}_{\text{drapeau}} = \underbrace{m^*\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*}\right)^2 y^*}_{\text{vent}}, \tag{3.5}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\omega_{\text{osc}}^{*2}}\ddot{\theta} + \frac{2\zeta_{\text{osc}}^*}{\omega_{\text{osc}}^*}\dot{\theta} + \theta}_{\text{mât}} = \underbrace{\frac{EI}{C_{\text{osc}}}\frac{A}{L^2}\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^{*2}}\Big|_{x=0}}_{\text{drapeau}}. \tag{3.6}$$

Dans le dernier membre de ce système d'équations, nous reconnaissons le moment typique EIA/L^2 généré par les modes de flottement (Chapitre 2). Pour rappel, nous avons vu que le moment généré par un second mode de poutre s'écrit :

$$\sigma_M^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} EI \underbrace{|\kappa_2 L|^2}_{=21.9} \frac{A}{L^2}.$$

Nous définissons une raideur en rotation normalisée par le moment typique EIA/L^2 :

$$C^*_{\text{osc}} = \frac{C_{\text{osc}}}{EI}\frac{L^2}{A} \qquad \text{raideur en rotation adimensionnée.}$$

Comme attendu, ce dernier paramètre porte à 6 le nombre des paramètres sans dimension régissant le couplage vent-drapeau-mât (avec m^*, H^*, U^*, ω^*_{osc} et ζ^*_{osc}).

Relation entre $y(x,t)$ et $\theta(t)$

Pour mettre en évidence le rôle de condition aux limites qu'a l'équation (3.6) envers l'équation (3.5), nous exprimons $y(x,t)$ en fonction de l'angle $\Theta(x,t)$ que fait le drapeau en x avec la direction du vent (voir la Figure 3.24). Nous avons $\Theta(0,t) = \theta(t)$ et :

$$\Theta(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x,t), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Theta(x^*,t^*) = \frac{A}{L}\frac{\partial y^*}{\partial x^*}(x^*,t^*).$$

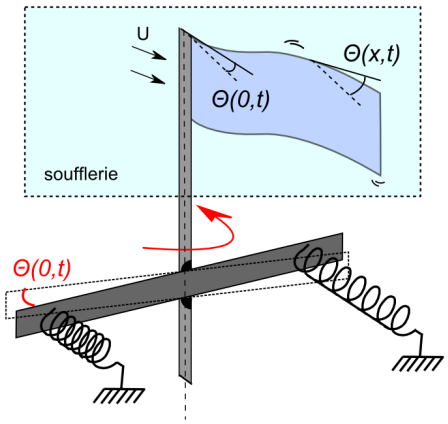


Figure 3.24 – Définition de l'angle $\Theta(x,t)$. Cette convention permet de comprendre la nature de la condition au limite du mât.

Le système d'équations couplées précédent devient alors :

$$\underbrace{\frac{1}{U^{*2}}\frac{\partial^4\Theta}{\partial x^{*4}} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial t^{*2}}}_{\text{drapeau}} = \underbrace{m^*\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*}\right)^2\Theta}_{\text{vent}}, \tag{3.7}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\omega^{*2}_{\text{osc}}}\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^{*2}}(0,t^*) + \frac{2\zeta^*_{\text{osc}}}{\omega^*_{\text{osc}}}\frac{\partial\Theta}{\partial t^*}(0,t^*) + \Theta(0,t^*)}_{\text{mât}} = \underbrace{\frac{EI}{C_{\text{osc}}L}\frac{\partial\Theta}{\partial x^*}(0,t^*)}_{\text{drapeau}}. \tag{3.8}$$

Dans cette expression, le paramètre de couplage entre le drapeau et son mât est le ratio entre la raideur en rotation typique du drapeau EI/L et la raideur en rotation du mât-oscillateur C_{osc}. Nous voyons aussi que EI/LC_{osc} constitue une définition alternative de la raideur adimensionnée qui est indépendante de l'amplitude de flottement.

Attaque du problème

> *" The quantitative treatment is needed to assure that all relevant aspects have been taken into account ; the qualitative approach is needed to recognize the essential factors which govern the process and to get direct insights into the workings of the laws of nature." (Weisskopf, 1975)*

Nous n'essayerons pas de calculer la valeur de $\Theta(x^*, t^*)$ numériquement. Notons qu'un calcul numérique par discrétisation de Galerkin (Annexe B) est déconseillé car cela exigerait de s'adapter à chaque instant aux fluctuations des conditions aux limites. Nous favoriserons une approche qualitative du problème, en déterminant la loi d'échelle associée à σ_θ et en la comparant aux expériences.

3.5.3 Modèle simplifié : excitation-réponse

Dans cette section, nous ferons l'hypothèse qu'il n'y a pas de rétroaction du mât sur le drapeau. Nous nous placerons donc dans la situation simplifiée où le moment excitateur est similaire à un forçage harmonique extérieur, découplé de la dynamique du mât. Dans le cas des faibles amplitudes de rotation du mât, cette hypothèse est justifiée par les mesures d'amplitudes de flottement d'un drapeau en papier (Figure 3.12b) et toutefois discutable vis-à-vis de l'analyse fréquentielle de la Figure 3.12a. D'après l'équation (3.4) modélisant le régime dynamique, l'écart-type σ_θ de l'angle de rotation est relié à l'écart-type σ_M^{enc} du moment appliqué au mât (vu comme encastré) et à la pulsation de flottement du drapeau ω^{enc} correspondante :

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_M^{\mathsf{enc}}}{C_{\mathsf{osc}}\sqrt{((\frac{\omega^{\mathsf{enc}}}{\omega_{\mathsf{osc}}})^2 - 1)^2 + (2\zeta^*_{\mathsf{osc}}\frac{\omega^{\mathsf{enc}}}{\omega_{\mathsf{osc}}})^2}}. \tag{3.9}$$

Une résonance se produit lorsque le moment excitateur oscille à la pulsation de résonance $\omega_{\mathsf{res}} = \omega_{\mathsf{osc}}\sqrt{1 - 2\zeta^{*2}_{\mathsf{osc}}}$ (Landau, 1976 ; p78), qui vaut ω_{osc} à 0.02 % près pour $\zeta^*_{\mathsf{osc}} = 0.014$. Lorsque cette résonance est établie, l'écart-type de l'angle de rotation du mât est maximal et vaut approximativement :

$$\sigma_\theta^{\mathsf{max}} = \frac{\sigma_M^{\mathsf{enc}}}{2C_{\mathsf{osc}}\zeta^*_{\mathsf{osc}}}.$$

Au Chapitre 2, nous avons observé une loi du type $\sigma_M^{\mathsf{enc}} \sim EIA/L^2$ au seuil de l'instabilité et en dehors des transitions de régime de flottement. Nous en déduisons donc une relation simple entre $\sigma_\theta^{\mathsf{max}}$ et les paramètres sans dimension du problème :

$$\sigma_\theta^{\mathsf{max}} \sim \frac{1}{C^*_{\mathsf{osc}}\zeta^*_{\mathsf{osc}}}. \tag{3.10}$$

Cette relation est relativement intuitive : plus les ressorts sont souples par rapport à la souplesse du drapeau, plus les oscillations sont importantes. De même pour l'effet de l'amortissement. En revanche, les propriétés de l'écoulement (U, ρ_{air}) n'apparaissent pas directement car la dépendance de σ_M à m^* et à U^* est simplifiée au seuil de l'instabilité (σ^*_M est constant au seuil de l'instabilité et en dehors des transitions de régime de flottement ; voir la Figure 2.16a du Chapitre 2).

3.5.4 Vérification des ordres de grandeur

Nous nous proposons de vérifier la validité de l'équation (3.9) dans le cas d'un drapeau en papier 120g/m^2 de largeur $H = 100$ mm et de longueur $L = 286$ mm, couplé à un mât-oscillateur de fréquence naturelle $f_{\text{osc}} = 13.9$ Hz, avec $C_{\text{osc}} = 1.4$ N.m/rad et $J_{\text{osc}} = 1.8 \times 10^{-4}$ kg.m^2 (comme à la Section 3.2.2). Au Chapitre 2, nous avons mesuré l'évolution de σ_M^{enc} (données reproduites sur la Figure 3.25a) et de f^{enc} (données reproduites sur la Figure 3.25b) dans le cas où le mât est encastré.

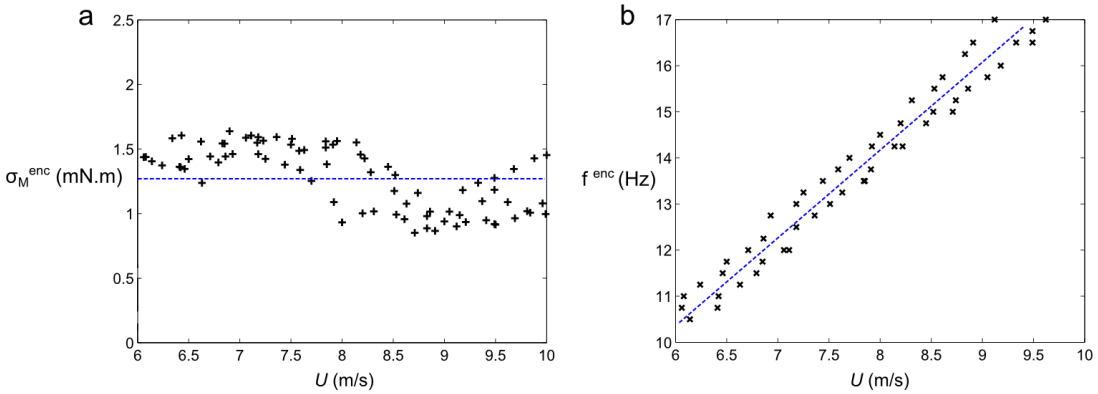


Figure 3.25 – Rappel des mesures effectuées au Chapitre 2 : superposition des résultats obtenus pour Drapeau 3. ***a :*** *Sur la plage de vitesse de vent $U = 6 - 10$ m/s, l'écart-type du moment est bien approché par $\sigma_M^{\text{enc}} \simeq 1.3$ mN.m.* ***b :*** *Dans cette même plage de vitesse de vent, la fréquence peut être approchée par une fonction affine de U.*

Sur la plage de vitesse de vent qui nous intéresse, nous considérons que $\sigma_M^{\text{enc}} \simeq 1.3$ mN.m et que f^{enc} varie linéairement entre 10 Hz et 17 Hz. Dans le cadre de l'hypothèse d'absence de rétroaction du mât sur le mouvement du drapeau, nous pouvons injecter ces mesures dans l'équation (3.9) et évaluer l'ordre de grandeur de σ_θ. Nous reportons ce calcul sur la Figure 3.26.

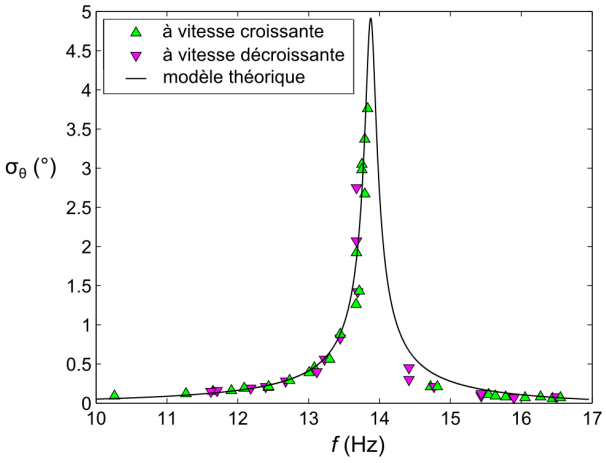


Figure 3.26 – Comparaison entre le modèle de type forçage extérieur, équation (3.9)*, et les résultats expérimentaux de la Section 3.2.2. Les mesures de σ_θ à vitesse de vent croissante et décroissante sont superposées. La courbe continue est calculée en substituant les données de la Figure 3.25 dans l'équation* (3.9)*.*

Nous voyons que la largeur du pic est bien prédite par le modèle simplifié de type excitation-réponse. Cependant, la valeur du maximum est légèrement sur-estimée vis-à-vis du maximum

expérimental : cela peut être en partie associé à la résolution finie de la soufflerie en termes de vitesse de vent. Au final, ce résultat suggère que le moment appliqué au mât est relativement peu modifié par le changement radical de conditions aux limites (mât encastré → mât-oscillateur) et malgré des angles de rotation crête-à-crête du mât atteignant 11°.

Cependant, les grands angles de rotation du mât observés à la Section 3.4.4 pour des drapeaux en acier d'épaisseur 54 μm, 77 μm et 103 μm doivent nous mettre en garde vis-à-vis du modèle très simplifié d'excitation-réponse. En effet, nous avions respectivement mesuré des angles de rotation du mât crête-à-crête de 28°, 53° et 76°. Aussi, pour évaluer qualitativement la linéarité de la réponse du mât dans ce type de situation, nous représentons σ_θ en fonction de la fréquence du mât sur la Figure 3.27 pour ces trois drapeaux.

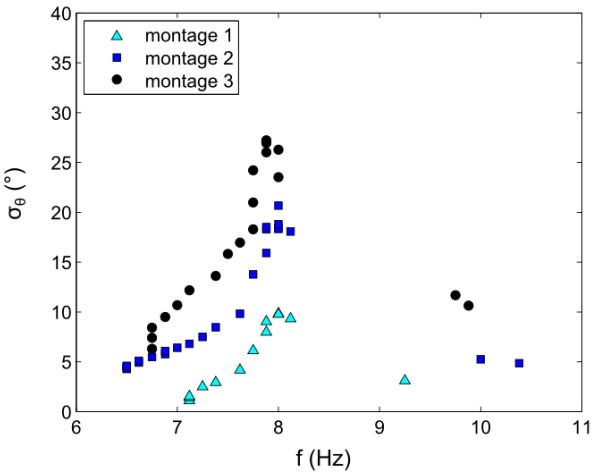


Figure 3.27 – L'effet de l'épaisseur du drapeau sur la réponse du mât-oscillateur (données de la Section 3.4.4). Représentation en fonction de la fréquence d'oscillation du mât. Les paramètres des montages sont reportés dans le Tableau 3.5.

Nous voyons qu'en toute rigueur, l'allure d'une résonance classique est peu vraisemblable pour ces trois montages, à l'opposé de ce qui avait été obtenu pour la Figure 3.26, avec des amplitudes de rotation du mât plus faibles. Plutôt, l'allure des courbes passant par les points expérimentaux pourrait relever du cadre des résonances non-linéaires (Nayfeh & Mook, 1995).

3.5.5 Comparaison modèle-expériences

Afin de préciser le domaine de validité du modèle d'excitation-réponse, nous reportons les valeurs expérimentales de $\sigma_\theta^{\max}$ en fonction du paramètre de "raideur-amortissement" $C^*_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}$. Nous avons vu que l'équation (3.10) s'écrit $\sigma_\theta^{\max} \sim 1/C^*_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}$, où $C^*_{\text{osc}} = C_{\text{osc}}L^2/EIA$ est la raideur en rotation du mât normalisée et ζ^*_{osc} est le taux d'amortissement du montage.

Nous reportons les mesures de $\sigma_\theta^{\max}$ en fonction du paramètre $C^*_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}$ sur la Figure 3.28a (données expérimentales de la Section 3.4). Les paramètres qui ont été variés sont la raideur en rotation du mât, le moment d'inertie du mât ainsi que la longueur et l'épaisseur des drapeaux (en acier). Ces mesures ont été effectuées pour des accrochages fréquentiels ayant lieu au seuil de l'instabilité de flottement, c'est-à-dire dans le cadre de l'équation (3.10). Pour les grands $C^*_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}$, nous retrouvons effectivement une évolution en $1/C^*_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}$. Un modèle simplifié suffit donc pour apprécier l'origine des oscillations du mât. En revanche, aux faibles $C^*_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}$ nous observons une saturation de $\sigma_\theta^{\max}$ qui reflète les nombreuses difficultés passées sous silence, telle que (1) l'existence des parois de la soufflerie limitant l'amplitude de flottement du drapeau, (2) la saturation de la raideur en rotation du montage basé sur des ressorts de traction, (3) la description de la dynamique du drapeau et du mât par des modèles purement linéaires, (4) l'hypothèse forte d'absence de rétroaction du mouvement du mât sur le mouvement du drapeau et (5) la simplification des conditions aux limites. Le modèle d'excitation-réponse est donc a priori restreint aux faibles angles d'oscillations, typiquement pour $\sigma_\theta^{\max} < 10°$ d'après la Figure 3.28a, c'est-dire pour des angles de rotation du mât plus petits que 30° crête-à-crête.

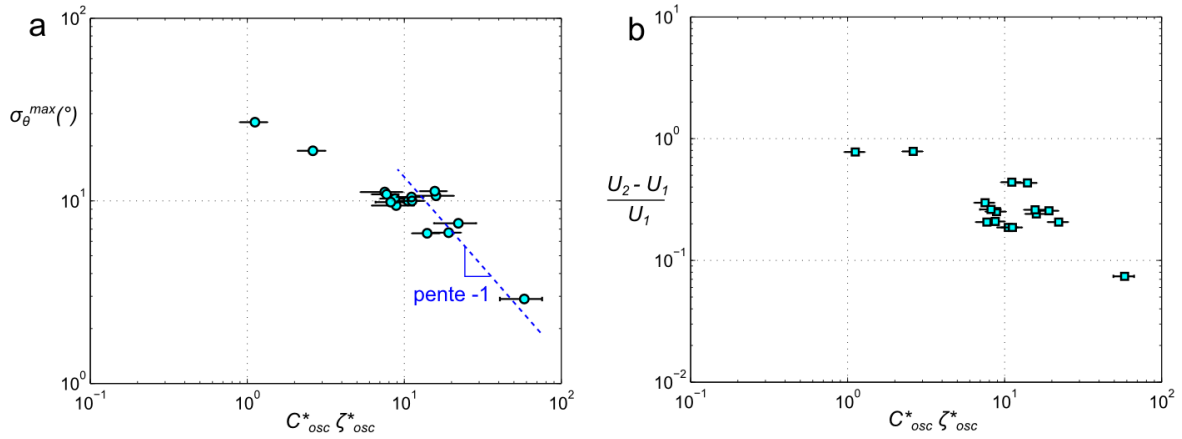


*Figure 3.28 – Le couplage vent-drapeau-mât au seuil de l'instabilité de flottement en fonction du paramètre $C^*_{osc}\zeta^*_{osc}$. Les barres d'erreur horizontales sont les erreurs de mesure cumulées sur le paramètre $C^*_{osc}\zeta^*_{osc}$. **a :** Évolution du maximum de l'écart-type de l'angle de rotation du mât. Une pente -1 est indiquée en référence à l'équation* (3.10). ***b :** Évolution de la largeur de l'accrochage fréquentiel.*

Sur la Figure 3.28b, nous reportons également l'évolution de la largeur (relative) de l'accrochage fréquentiel définie par $(U_2 - U_1)/U_1$ avec les notations de la Section 3.3.3. Rappelons que le modèle de la Section 3.5.3 ne permet pas de prédire l'accrochage fréquentiel et donc ne donne aucune indication sur sa largeur. Nous voyons cependant qu'une tendance générale de décroissance en fonction de $C^*_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}$ est présente, ainsi qu'une saturation aux faibles $C^*_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}$.

L'analogie avec les vibrations induites par détachement tourbillonnaire

Dans le contexte des cylindres oscillants sous l'action des tourbillons qu'ils génèrent, il est d'usage de se référer au paramètre dit de Skop-Griffin S_G (Skop & Griffin, 1973 ; Khalak &

Williamson, 1999 ; Williamson & Govardhan, 2004). Sur la Figure 3.29a, nous reportons une sélection de mesures d'amplitude de vibration de ce système en fonction de S_G.

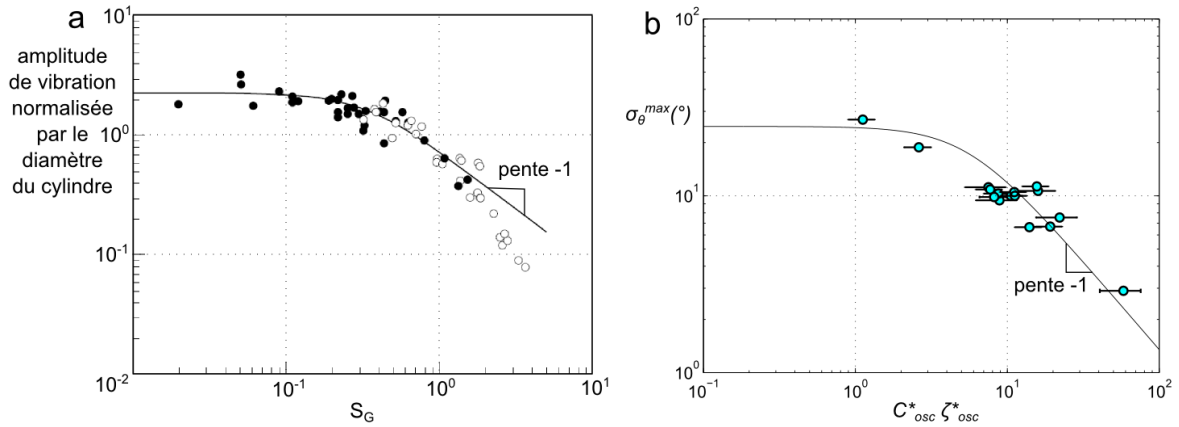


Figure 3.29 – Comparaison entre les vibrations induites par détachement tourbillonnaire sur un cylindre et le couplage vent-drapeau-mât. ***a :*** *L'exemple de l'amplitude des vibrations induites par détachement tourbillonnaire en fonction du paramètre S_G. La courbe en trait continu est un ajustement de la forme $0.385/\sqrt{0.12+S_G^2}$. Ce "Griffin plot" est adapté de Skop & Balasubramanian, 1997.* ***b :*** *Données de la Figure 3.28 avec un ajustement de type $A_1/\sqrt{A_2+(C^*_{osc}\zeta^*_{osc})^2}$ en trait continu.*

Le paramètre S_G est le produit de trois termes : une masse adimensionnée multipliée par le carré d'une pulsation adimensionnée (le tout donnant une raideur adimensionnée) et un taux d'amortissement. Le paramètre de "raideur-amortissement" $C^*_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}$ peut donc se voir comme l'analogue de S_G pour l'interaction vent-drapeau-mât. Par analogie avec ce qui a été proposé pour les détachements tourbillonnaires (voir Sarpkaya, 1978 ; Sarpkaya, 1979 ; Skop & Balasubramanian, 1997), nous recherchons un ajustement des données expérimentales sous la forme :

$$\sigma_\theta^{\text{max}} = \frac{A_1}{\sqrt{A_2+(C^*_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}})^2}}.$$

Nous obtenons $A_1 \simeq 143°$ et $A_2 \simeq 31$. Cette courbe est reportée sur la Figure 3.29b. Un tel modèle pourrait à l'avenir permettre de pré-dimensionner le couplage vent-drapeau-mât.

Conclusion

Ce travail nous a mené à la caractérisation de la dynamique des drapeaux couplés avec un mât-oscillateur. Il s'inscrit dans un contexte de recherche de mécanismes innovants de récupération d'énergie du vent.

Pour étudier le couplage entre un drapeau et son mât, nous avons dans un premier temps eu besoin de données sur les drapeaux à mât encastré. Au Chapitre 1, nous avons ainsi rappelé qu'une compétition entre l'élasticité et le vent est à l'origine de la déstabilisation du drapeau par flottement. Qu'ils soient élancés ou trapus, nous avons montré que les drapeaux peuvent être décrits par un modèle commun à masse ajoutée effective. Résolu numériquement par une méthode de Galerkin, ce modèle a donné les bonnes tendances et les bons ordres de grandeur pour les vitesses critiques, pour les fréquences de flottement et pour l'allure des déformées.

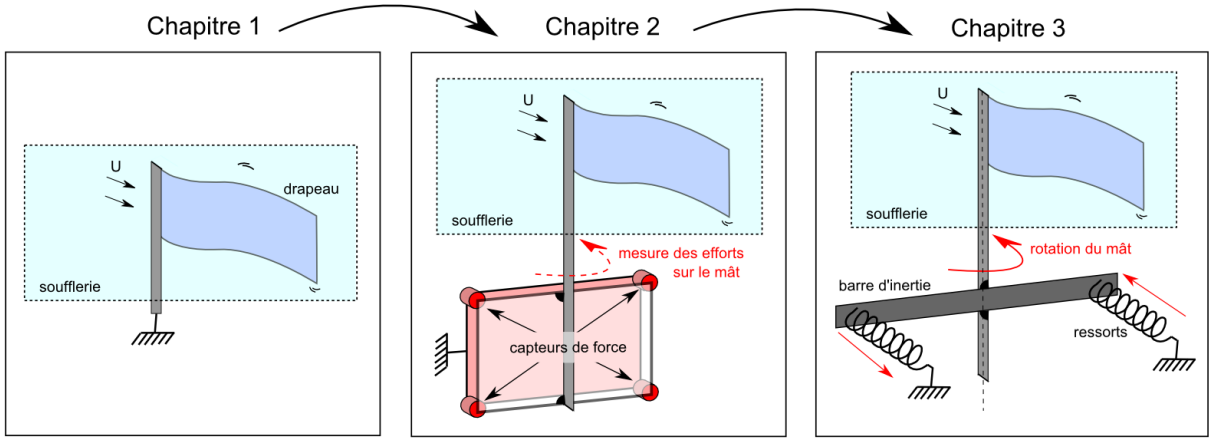


*Figure 3.30 – Ce travail a été présenté dans trois chapitres : **(1)** les conditions de déstabilisation des drapeaux, **(2)** les efforts générés sur le mât suite à cette déstabilisation et **(3)** le couplage du mât avec le drapeau dans le cas d'un mât-oscillateur.*

Au Chapitre 2, nous avons caractérisé expérimentalement les efforts qu'un drapeau génère. L'analyse du Chapitre 1 a permis de dimensionner les drapeaux qui ont été placés en soufflerie. Nous nous sommes concentrés sur la force de traînée et sur le moment généré autour du mât, chacun de ces efforts étant fluctuant par nature. Pour réaliser ces expériences, une balance aérodynamique dédiée a été construite, étalonnée et mise en soufflerie. L'impact des régimes de flottement sur les efforts a été caractérisé en fonction des dimensions du drapeau et de la vitesse du vent. Avec des drapeaux en papier de quelques dizaines de centimètres, nous avons mesuré des fluctuations quasi-périodiques de ± 20 % autour de la traînée moyenne. En ce qui concerne le moment, nous avons utilisé le modèle du Chapitre 1 qui donne une estimation du moment en fonction de l'amplitude de flottement au bord de fuite, laquelle est connue à un facteur multiplicatif près. Nous avons proposé une normalisation du moment qui contourne cette difficulté, et nous avons montré que le modèle associé reproduit les tendances et les

ordres de grandeurs observés en soufflerie. Le moment généré sur le mât d'un drapeau qui flotte se trouve être approximativement de l'ordre du moment généré par un second mode de flexion de poutre de même amplitude.

Cela nous a mené au Chapitre 3 et à l'étude du couplage entre un drapeau et un mât-oscillateur. Expérimentalement, un phénomène d'accrochage fréquentiel entre le drapeau et son mât est observé de manière reproductible lorsque la fréquence de flottement du drapeau est proche de la fréquence propre du mât-oscillateur. Nous avons dissocié le rôle de la raideur et de l'inertie de l'oscillateur dans le couplage, ainsi que l'effet d'un changement des dimensions ou du matériau du drapeau. Un modèle élémentaire de type excitation-réponse permet d'apprécier l'origine des tendances observées en soufflerie lorsque les amplitudes de rotation du mât sont inférieures à 30° crête-à-crête. Un unique paramètre peut alors caractériser le couplage, il s'agit du paramètre de "raideur-amortissement" $C^*_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}$ qui est l'analogue du paramètre de Skop-Griffin utilisé dans le contexte des vibrations induites par détachement tourbillonnaire. Pour les grandes amplitudes de rotation, le modèle de type excitation-réponse basé sur une estimation du moment dans une configuration encastrée devient délicat à justifier. À titre d'exemple, des drapeaux en acier peuvent atteindre des angles de rotation de 80° crête-à-crête pour des vitesses de vent de l'ordre de 10 m/s.

Dans le futur

D'un point de vue expérimental, nous avons montré que des paramètres tels que l'épaisseur du drapeau ou sa longueur ont un fort impact sur la dynamique du couplage drapeau-mât. Il serait intéressant d'approfondir l'étude de ce couplage dans des fluides plus lourds que l'air, étant donné que le modèle analytique du Chapitre 1, Section 1.4, prévoit une diminution de la vitesse critique de flottement lorsque la masse volumique du fluide augmente.

Dans l'optique de récupérer de l'énergie à partir de l'oscillation du mât, nous nous sommes intéressés à l'amplitude de rotation du mât en fonction des caractéristiques du drapeau (dimensions, matériau), du vent (vitesse, fluide) et du mât-oscillateur (inertie, amortissement, raideur). Nous avons vu que le paramètre $C^*_{\text{osc}}\zeta^*_{\text{osc}}$ permet d'interpréter nos observations aux petites amplitudes de rotation. Afin d'aller plus loin dans l'analyse quantitative des résultats expérimentaux, il serait pertinent de poursuivre une modélisation des conditions de (1) déstabilisation par flottement du système couplé, (2) maximisation de la largeur de l'accrochage fréquentiel, (3) maximisation de l'amplitude de rotation et (4) efficacité d'extraction d'énergie.

Par exemple, le modèle couplé vent-drapeau-mât explicité au Chapitre 3, Section 3.3.2, pourrait être résolu par différences finies sans passer par une approximation forte de type excitation-réponse. Ce modèle devrait permettre d'apprécier les modifications de la vitesse critique de flottement liées au couplage drapeau-mât (voir aussi Gibbs *et al.*, 2012). Si l'objectif est de prédire rigoureusement l'amplitude de rotation du mât, il devient nécessaire de calculer l'amplitude de flottement du drapeau et de prendre en compte des non-linéarités géométriques et fluides (voir par exemple Michelin & Doaré, 2013). En parallèle, une approche "linéaire" comme celle proposée par de Langre (2006) pourrait permettre de caractériser la largeur d'accrochage fréquentiel du système couplé. Cette approche, appliquée avec succès dans le contexte des vibrations induites par détachement tourbillonnaire, modélise l'effort fluctuant par une équation d'oscillateur non-linéaire de type Van der Pol (e.g. Facchinetti *et al.*, 2004).

Enfin, dans une perspective de déploiement à grande échelle, il serait intéressant d'étudier le comportement d'un réseau de drapeaux couplés et les effets d'interactions mutuelles. Dans le cas des drapeaux à mât encastré, les travaux de Zhang *et al.* (2000) ; Zhu & Peskin (2002) ; Zhu & Peskin (2003) ; Farnell *et al.* (2004a) ; Jia *et al.* (2007) ; Schouveiler & Eloy (2009) ;

Michelin & Llewellyn Smith (2010) sur les assemblées de drapeaux en parallèle montrent que l'écartement entre les drapeaux est un paramètre à ajuster pour favoriser les mouvements collectifs. La configuration des drapeaux placés les uns derrière les autres a également été étudié par Jia & Yin (2008) ; Ristroff & Zhang (2008) ; Alben (2009) ; Zhu (2009) ; Kim *et al.* (2010). Dans cette situation, les sillages des drapeaux en amont agissent comme des oscillateurs supplémentaires dont il serait intéressant d'accorder les fréquences afin de généraliser la notion d'accrochage fréquentiel à n systèmes.

Annexe A

Propriétés des matériaux

Cette annexe regroupe les propriétés des matériaux utilisés pour fabriquer les drapeaux. Le lecteur pourra s'y référer au cours de chacun des trois chapitres.

A.1 Les matériaux utilisés

Nous disposons de trois types de matériaux : des feuilles de papier, des feuilles de plastique et des feuilles d'acier (Figure A.1). Les matériaux sont suffisamment fins pour que la découpe s'effectue systématiquement au ciseau.

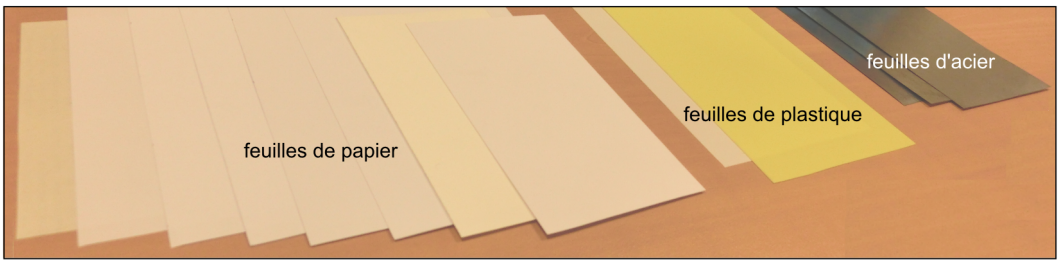


Figure A.1 – Échantillons des matériaux utilisés pour la fabrication des drapeaux. Nous disposons de huit types de feuilles de papier, de deux types de feuilles de plastique et de trois types de feuilles d'acier (l'ordre de gauche à droite sur la photographie correspond à l'ordre de haut en bas dans le Tableau A.1). La largeur des feuilles présentées est d'environ 100 mm.

Pour caractériser les propriétés mécaniques des matériaux, nous mesurons le module d'élasticité E et la masse volumique ρ_s de chacun. L'épaisseur d des matériaux est obtenue par moyenne de dix mesures indépendantes au vernier électronique (au μm près). Ces données sont reportées dans le Tableau A.1.

A.2 Méthodes de détermination de E

En fonction de la rigidité des matériaux, nous avons eu recours à différentes méthodes pour mesurer expérimentalement le module d'élasticité E.

A.2.1 Par mesure de la fréquence naturelle

Pour un matériau rigide tel que l'acier de 54, 77 et 103 μm d'épaisseur, le plastique de 509 μm d'épaisseur et le papier d'épaisseur 227 et 296 μm, nous mesurons la fréquence

Matériau	épaisseur d (μm)	module d'élasticité E (N.m^{-2})	masse volumique ρ_s (kg.m^{-3})	complément d'information
papier	53	2.0 $\times 10^9$ (1)	758	journal *Le Monde*
papier	81	7.7 $\times 10^9$ (1)	775	*Clairalfa* 60 g/m^2
papier	104	6.0 $\times 10^9$ (1)	773	*Clairalfa* 80 g/m^2
papier	128	6.2 $\times 10^9$ (1)	786	*Clairalfa* 100 g/m^2
papier	153	5.9 $\times 10^9$ (1)	786	*Clairalfa* 120 g/m^2
papier	200	5.6 $\times 10^9$ (1)	808	*Clairalfa* 160 g/m^2
papier	227	5.4 $\times 10^9$ (2)	781	papier à grain 180 g/m^2
papier	296	7.8 $\times 10^9$ (2)	1060	papier bristol 320 g/m^2
plastique	90	2.3 $\times 10^9$ (3)	1050	polypropylène bi-orienté
plastique	509	1.3 $\times 10^9$ (2)	900	cale de précision
acier	54	110×10^9 (2)	7290	cale de précision
acier	77	130×10^9 (2)	7620	cale de précision
acier	103	150×10^9 (2)	7680	cale de précision

Tableau A.1 – Propriétés mécaniques des matériaux utilisés pour la fabrication des drapeaux.

naturelle de vibration par caméra rapide. Au Chapitre 1, nous avons obtenu que la fréquence naturelle est reliée au module d'élasticité E du matériau par la relation (Rocard, 1943) :

$$f = \underbrace{\frac{|\kappa_1 L|^2}{2\pi\sqrt{12}}}_{\simeq 0.16} \sqrt{\frac{E}{\rho_s}} \frac{d}{L^2},$$

où $|\kappa_1 L| \simeq 0.60\pi$ est la première racine positive de l'équation $\cos(\kappa L)\cosh(\kappa L) + 1 = 0$. Dans cette formule, d est l'épaisseur du matériau, L est sa longueur et ρ_s est sa masse volumique. La largeur du matériau n'intervient pas dans ce calcul. Cependant, une correction est nécessaire pour prendre en compte l'air déplacé qui donne de l'inertie virtuelle au matériau (correction de masse ajoutée) :

$$f = \frac{|\kappa_1 L|^2}{2\pi\sqrt{12}} \sqrt{\frac{E}{\rho_s + \frac{\pi}{4}\rho_a \frac{H}{d}}} \frac{d}{L^2}. \tag{A.1}$$

Dans cette dernière expression, H désigne la largeur du matériau. Nous réalisons une dizaine d'essais de vibration pour des longueur L différentes, et nous déduisons E par ajustement (au sens des moindres carrés) de la relation expérimentale $f \simeq \mathrm{C^{te}}/L^2$ à l'équation (A.1).

A.2.2 Par essai de traction

Pour les papiers souples d'épaisseurs inférieures à 200 μm ou pour le plastique d'épaisseur 90 μm, la méthode précédente (mesure de la fréquence naturelle) est délicate car les oscillations sont fortement amorties. Dans cette situation nous avons recours à un essai de traction

1. Mesure par flambage (Section A.2.3).
2. Mesure par fréquence naturelle (Section A.2.1).
3. Mesure par traction (Section A.2.2).

longitudinal (comme réalisé par Watanabe *et al.*, 2002a,b). Une micro-machine de traction nous est prêtée par Eric Perrin et Guillaume Puel du laboratoire MSSMat de l'École Centrale Paris. L'essai de traction nous donne également la contrainte critique (i.e. à la rupture), ainsi que la limite d'élasticité (i.e. la contrainte à partir de laquelle le matériau se plastifie). Le papier étant un matériau non isotrope, nous prenons un soin tout particulier de découper les drapeaux de manière à ce que la direction du vent soit dans l'orientation principale des fibres (le "sens machine" dans la jargon des papetiers). Un exemple de mesure du module d'élasticité longitudinal du papier 120 g/m^2 est reporté sur la Figure A.2.

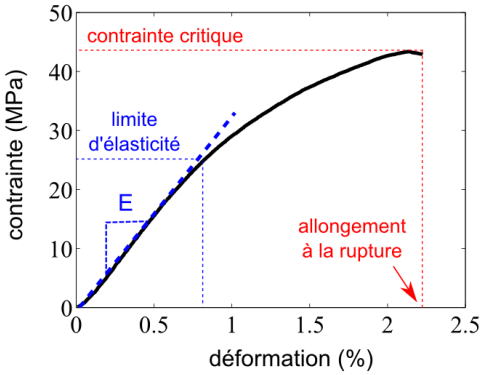


Figure A.2 – Loi contrainte-déformation du papier 120 g/m^2. Le module d'élasticité E correspond à la pente à l'origine de la courbe.

Le module d'élasticité E est donné par la pente de la loi contrainte-déformation (Figure A.2). Pour le papier 120 g/m^2 par exemple, nous avons mesuré $E \simeq 3.3 \pm 0.2$ GPa (valeur moyenne $\pm$ écart-type sur 4 essais). Cette valeur est cohérente avec les modules d'élasticité communément rencontrés dans la direction principale des fibres (Yamaguchi *et al.*, 2000b ; Alava & Niskanen, 2006). Aussi, les contraintes critiques que nous avons mesurées sont à 10 % près celles qui nous ont été communiquées par Pierre Beranger, directeur qualité-développement des papeteries Clairefontaine [4].

A.2.3 Par flambage

En pratique, un essai de traction sous-estime la rigidité de flexion du drapeau. Celui-ci souffre de défauts de planéité au niveau de l'encastrement sur son mât. Ces défauts ont un effet direct sur l'instabilité de flottement (Eloy *et al.*, 2012). Pour les papiers souples d'épaisseurs inférieures à 200 μm, nous mesurons donc E par une méthode alternative prenant en compte l'encastrement imparfait. Nous mesurons la hauteur critique de flambage L_f du matériau encastré tel qu'il puisse se tenir verticalement sans flamber sous son propre poids. Le phénomène de flambage est illustré sur la Figure A.3. La technique a été utilisée par Lemaitre *et al.* (2005) dans le cadre du flottement des drapeaux suspendus verticalement.

Le lien entre E et L_f est donné par Timoshenko & Gere (1963) :

$$E = 1.56 \rho_s g \frac{L_f^2}{d^2}, \tag{A.2}$$

où ρ_s est la masse volumique du matériau et où g l'accélération de la gravité. Dans le cas du papier 120 g/m^2, nous trouvons une hauteur critique de flambage $L_f = 226 \pm 16$ mm sur 72

4. Mesure par essai de traction à gradient d'allongement constant 20 mm/min (norme NF EN ISO 1924-2).

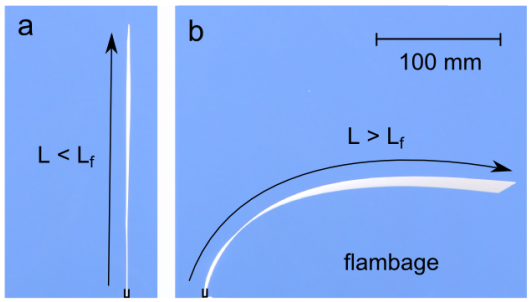


*Figure A.3 – Hauteur critique de flambage (papier 120 g/m^2). **a :** Lorsque $L < L_f$, la feuille se tient debout verticalement. **b :** Lorsque $L > L_f$, la gravité l'emporte et la feuille flambe sous son propre poids.*

essais avec des encastrements représentatifs du mât du drapeau. Cela correspond à un module d'élasticité $E \simeq 5.9 \pm 0.7$ GPa, plus élevé que l'estimation par essai de traction (3.3 GPa). Nous reportons ces valeurs dans le Tableau A.1.

Annexe B

Discrétisation de Galerkin

Cette annexe présente la méthode numérique dite de Galerkin, utilisée pour la résolution de l'équation différentielle du drapeau [1].

B.1 La quantité recherchée

La quantité que nous souhaitons déterminer numériquement est la déformée d'un drapeau flottant :

$$y(x,t) = \ldots$$

Les longueurs x et y sont respectivement normalisées par la longueur L du drapeau et par la demi-amplitude A du flottement. Le temps t est normalisé par le temps de passage de l'air le long du drapeau L/U. Nous allégeons les notations en notant également x, y et t les variables sans dimension. L'équation différentielle caractéristique des drapeaux élancés a été rappelée au Chapitre 1 :

$$\frac{1}{U^{*2}} y'''' + \ddot{y} = -m^*(\ddot{y} + 2\dot{y}' + y''). \tag{B.1}$$

Dans cette équation, les $\ldots'$ et les $\dot{\ldots}$ désignent respectivement les dérivations spatiales et temporelles. Les paramètres de contrôle du modèle sont la masse ajoutée adimensionnée et la vitesse de vent adimensionnée, définies respectivement par :

$$m^* = \frac{\pi}{4}\frac{\rho_a H}{m_s}, \qquad U^* = UL\sqrt{\frac{m_s}{EI}},$$

Dans ces expressions, ρ_a est la masse volumique de l'air, H est la largeur du drapeau, $m_s = \rho_s d$ est la masse surfacique du drapeau (ρ_s étant sa masse volumique et d étant son épaisseur), U est la vitesse du vent, L est la longueur du drapeau et EI est la rigidité de flexion du drapeau.

Enfin, le drapeau respecte des conditions aux limites de type encastré-libre :

$$y(0,t) = 0; \qquad y'(0,t) = 0; \qquad y''(1,t) = 0; \qquad y'''(1,t) = 0. \tag{B.2}$$

B.2 Décomposition sur les modes propres de poutre

Lorsque $m^* = 0$ dans le membre de droite de l'équation (B.1), nous reconnaissons l'équation différentielle des poutres élastiques (dans le vide), dont les modes propres ont été étudiés au

1. Voir également Doaré, 2001 : 97-100, dans le contexte des tuyaux déstabilisés par écoulement interne

Chapitre 1. En décomposant l'inconnue $y(x,t)$ sur les modes propres de poutre encastrée-libre, les équations (B.2) sont respectées par construction et n'apparaissent plus explicitement lors de la résolution de l'équation (B.1). La décomposition de $y(x,t)$ sur les N premiers modes s'écrit :

$$y(x,t) \simeq \sum_{n=1}^{N} p_n(t) Y_n(x), \tag{B.3}$$

où Y_n désigne la déformée spatiale du n-ième mode propre de poutre encastrée-libre et où les p_n sont les coefficients de projection.

B.3 Discrétisation de l'équation différentielle

L'étape suivante consiste à substituer l'équation (B.3) dans l'équation différentielle (B.1), à multiplier par Y_m pour m quelconque et à intégrer sur le domaine spatial $x \in [0,1]$. Cette astuce permet d'exploiter les propriétés d'orthogonalité spatiale des modes de poutre. Nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{N} \left[\ddot{p}_n \underbrace{\int_0^1 Y_m Y_n}_{\delta_{m,n}} (1+m^*) + 2\dot{p}_n \underbrace{\int_0^1 Y_m Y_n'}_{b_{m,n}} m^* + p_n \underbrace{\int_0^1 Y_m Y_n''''}_{\delta_{m,n}} \frac{1}{U^{*2}}, + p_n \underbrace{\int_0^1 Y_m Y_n''}_{c_{m,n}} m^* \right] = 0,$$

où les fonctions $\delta_{m,n}$ (dite de Dirac), $b_{m,n}$ et $c_{m,n}$ sont reportées par Blevins (1979) ; Païdoussis (1998, p87). La somme obtenue se met sous une forme matricielle élémentaire :

$$\mathscr{M}\ddot{p} + \mathscr{C}\dot{p} + \mathscr{K}p = 0, \quad \text{avec} \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Dans cette expression, nous reconnaissons une matrice de masse $\mathscr{M}$, une matrice d'amortissement $\mathscr{C}$ et une matrice de raideur $\mathscr{K}$, définies respectivement par les éléments qu'elles contiennent :

$$\begin{aligned} (\mathscr{M})_{m,n} &= \delta_{m,n}(1+m^*) \\ (\mathscr{C})_{m,n} &= 2b_{m,n}m^* \\ (\mathscr{K})_{m,n} &= \delta_{m,n}|\kappa_n L|^4 + c_{m,n}m^*. \end{aligned}$$

La dernière étape exige que la matrice de masse $\mathscr{M}$ soit inversible. Dans ce cas, le système matriciel précédent peut s'écrire :

$$\dot{P} = \mathscr{L}P, \tag{B.4}$$

où $P = \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix}$ et où $\mathscr{L}$ est une matrice $2N \times 2N$ de la forme $\mathscr{L} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -\mathscr{M}^{-1}\mathscr{C} & -\mathscr{M}^{-1}\mathscr{K} \end{pmatrix}$.

La solution de l'équation (B.4) s'écrit $P = e^{\mathscr{L}t}P_0$, où P_0 donne les conditions temporelles initiales. Nous nous ramenons ainsi à la diagonalisation de la matrice $\mathscr{L}$. Les valeurs propres de $\mathscr{L}$ donnent les pulsations propres complexes $\underline{\omega}$ du drapeau, tandis que les vecteurs propres de $\mathscr{L}$ donnent les déformées propres du drapeau, par projection sur les N déformées propres de poutre (voir également Géradin & Rixen, 1996 ; Païdoussis, 1998).

Critère de déstabilisation du drapeau

L'analyse de stabilité repose sur le fait qu'un mode du drapeau est instable si la valeur propre $i\underline{\omega}$ associée à ce mode est de partie réelle strictement positive. Ce critère est étudié exhaustivement au Chapitre 1, dans un diagramme (m^*, U^*).

B.4 Une convergence rapide

Afin de déterminer le nombre N de modes de poutre devant être pris en compte via l'équation (B.3), nous nous penchons sur la prédiction de la vitesse critique de vent U_c^* en fonction de N. Nous nous plaçons à $m^* = 0.42$ qui est le lieu approximatif du premier rebroussement de vitesse critique (Chapitre 1). Sur la Figure B.1a, nous reportons les valeurs de U_c^* obtenues pour N variant entre 2 et 100. La résolution en vitesse de vent est de 1000 points sur la gamme $U^* = 0 - 100$. Nous observons qu'il n'y a plus de variations perceptibles de U_c^* à partir de $N = 7$.

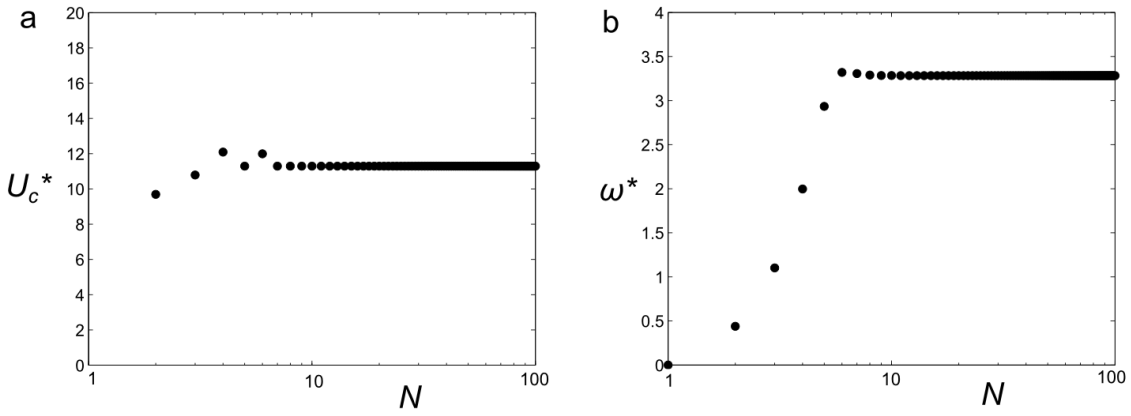


Figure B.1 – Convergence de la méthode numérique. ***a :*** *Calcul de la vitesse critique de vent pour* $m^* = 0.42$ *(échelle semi-logarithmique).* ***b :*** *Calcul de la pulsation réduite pour* $m^* = 0.42$ *et* $U^* = 30$ *(échelle semi-logarithmique).*

Pour tester la convergence de la méthode numérique à des vitesses de vent U^* plus élevées, nous analysons la prédiction de la pulsation réduite ω^* en fonction de N. Nous nous plaçons à $m^* = 0.42$ et dans le cas d'une forte vitesse de vent $U^* = 30$. Sur la Figure B.1b, nous reportons les valeurs de pulsation réduite ω^* obtenues pour N variant entre 1 et 100. Nous voyons qu'à partir de $N = 9$, la pulsation réduite ω^* ne présente plus de variations perceptibles.

Conclusion sur le choix de N

Les résolutions numériques effectuées au Chapitre 1 (Section 1.3 & Section 1.4) et au Chapitre 2 (Section 2.3) ont toutes été réalisées avec $N = 50$, de manière à se prémunir contre tout artefact numérique.

Annexe C

Balance aérodynamique : dimensionnement et étalonnage

Cette annexe précise les caractéristiques de la balance aérodynamique utilisée au Chapitre 2. Nous montrons qu'elle mesure à 10 % près les composantes instationnaires de la traînée et du moment générés par un drapeau sur son mât.

C.1 Motivations

Une balance aérodynamique a pour objectif de mesurer les efforts s'exerçant sur un objet dans un écoulement. Pour des objets fixes, la mesure des efforts stationnaires avec une balance est en général sans difficultés (Anderson, 1999). Cependant, dans le cas d'un objet en mouvement générant des efforts instationnaires comme un drapeau, des précautions supplémentaires doivent être prises.

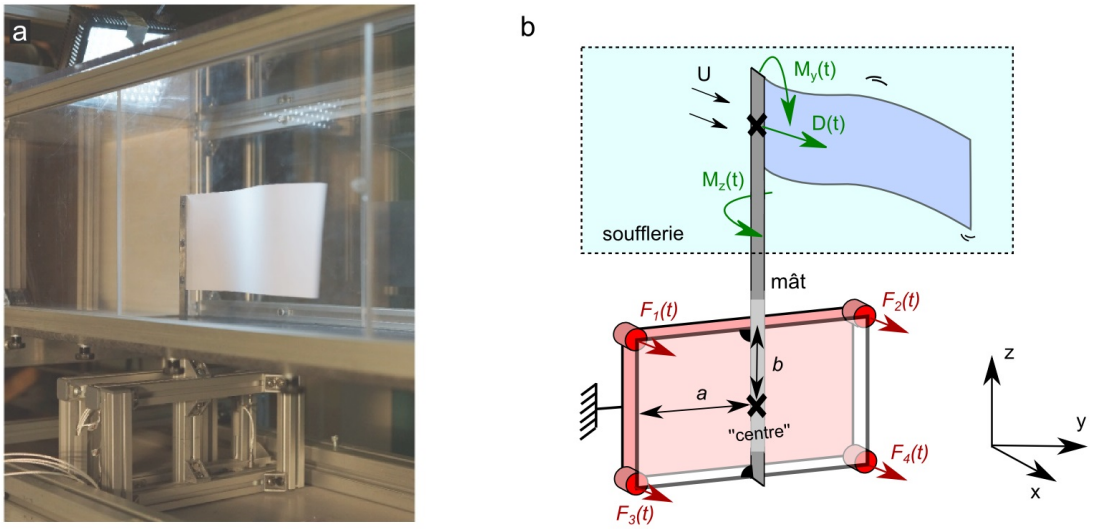


Figure C.1 – Balance aérodynamique. ***a :*** *Un drapeau flotte en soufflerie tandis que la balance mesure les efforts qui s'exercent sur le mât traversant le dessous de la soufflerie.* ***b :*** *Les efforts étudiés sont la traînée $D(t)$, le moment de tangage $M_y(t)$ et le moment de lacet $M_z(t)$. La balance délivre quatre informations qui sont les forces $F_i(t)_{i=1..4}$.*

En effet, la fréquence de flottement des drapeaux présentés au Chapitre 1 varie entre 1 Hz et 100 Hz, et peut tout-à-fait coïncider avec l'une des fréquences propres de la balance. Pour

que la balance ne rétroagisse pas sur le drapeau, il faut éviter ces situations parasites de type "résonance" au Chapitre 2. Notons qu'à l'inverse, ce type de couplage par "résonance" est explicitement recherché au Chapitre 3.

Le dispositif expérimental utilisé au Chapitre 2 est présenté sur la Figure C.1a. Nous y voyons un drapeau flottant en soufflerie ainsi que la balance aérodynamique qui mesure les efforts transmis par le mât en dessous de la veine d'essai. Pour la conception de cette balance, schématisée sur la Figure C.1b, nous utilisons quatre capteurs de force piézoélectriques Kistler 9712B5. Ces capteurs mesurent les faibles fluctuations des forces avec précision (de l'ordre de 0.1 mN). Cependant, ils ne transmettent pas d'information fiable sur les valeurs moyennes, du fait de leur fonctionnement de type capacitif. Par opposition aux classiques jauges de contraintes, la technologie des capteurs piezoélectriques s'accommode des très faibles déformations et permet d'augmenter le plus possible la fréquence naturelle de la balance en la "rigidifiant". Cela permet d'éviter les résonances de basse-fréquence avec le drapeau.

C.2 Relations cinématiques idéales

Les capteurs de force sont disposés aux coins d'une structure rectangulaire centrée sur le mât du drapeau (Figure C.2).

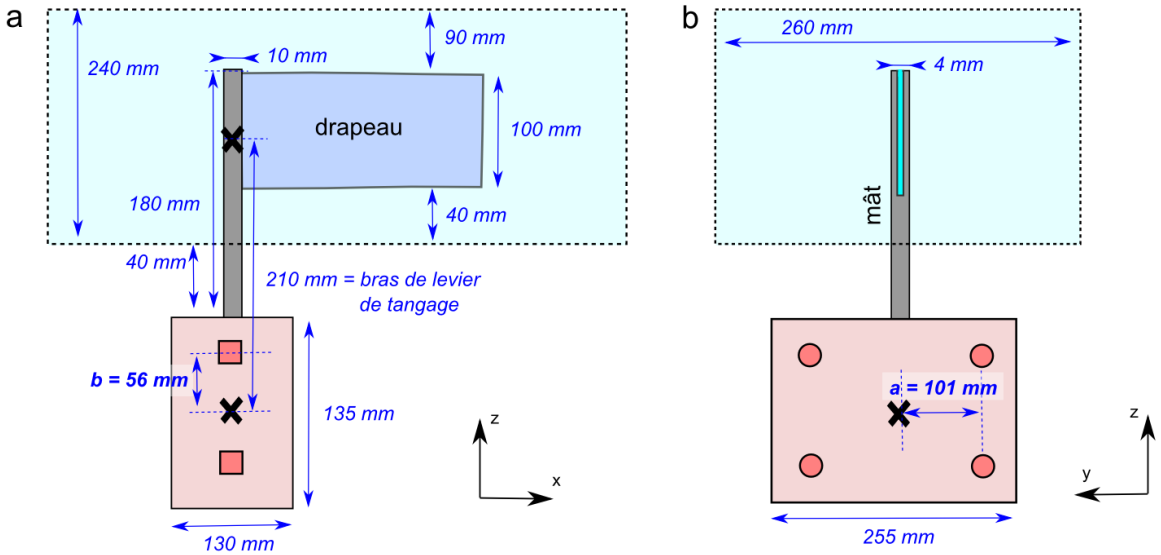


Figure C.2 – Dimensionnement de la balance aérodynamique. ***a :*** *Vue de profil. Le vent va de la gauche vers la droite.* ***b :*** *Vue de derrière.*

Soit $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ et $F_4(t)$ les forces exercées sur ces capteurs, comme indiqué sur la Figure C.2b. Par convention, les forces sont positives lorsque le drapeau est tiré dans le sens du vent. Nous notons $D(t)$ la force de traînée dans l'axe x, $M_y(t)$ le moment de tangage autour de l'axe y et $M_z(t)$ le moment de lacet autour de l'axe z. Dans un premier temps, nous cherchons les relations simples entre $D(t)$, $M_y(t)$, $M_z(t)$ et les $F_i(t)_{i=1..4}$.

Étape 1 : Chargements non couplés

Pour des chargements séparés $D(t)$, $M_y(t)$ et $M_z(t)$, nous obtenons facilement les relations cinématiques suivantes :

$$\begin{cases} F_1(t) & = F_2(t) & = F_3(t) & = F_4(t) & = \frac{1}{4}D & \text{pour } D(t) \text{ seul,} \\ bF_1(t) & = bF_2(t) & = -bF_3(t) & = -bF_4(t) & = \frac{1}{4}M_y & \text{pour } M_y(t) \text{ seul,} \\ aF_1(t) & = -aF_2(t) & = aF_3(t) & = -aF_4(t) & = \frac{1}{4}M_z & \text{pour } M_z(t) \text{ seul.} \end{cases}$$

Sur le montage réel, nous mesurons $a \simeq 101$ mm et $b \simeq 0.056$ mm (Figure C.2).

Étape 2 : Chargements couplés

En pratique, les chargements $D(t)$, $M_y(t)$ et $M_z(t)$ s'appliquent simultanément lorsque le drapeau flotte. Si la balance est bien conçue, i.e. sans défauts cinématiques, alors ces chargements n'interagissent pas entre eux et nous sommes ramenés à des relations cinématiques simples, comme par exemple dans le cas de $F_3(t)$:

$$F_3(t) = \frac{D(t)}{4} - \frac{M_y(t)}{4b} + \frac{M_z(t)}{4a}.$$

Les relations obtenues se mettent sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} D(t) \\ M_y(t) \\ M_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \end{pmatrix}, \tag{C.1}$$

où nous avons noté $S_1(t)$, $S_2(t)$ et $S_3(t)$ les sommes partielles définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} S_1(t) & = & F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) + F_4(t) \\ S_2(t) & = & F_1(t) + F_2(t) - F_3(t) - F_4(t) \\ S_3(t) & = & F_1(t) - F_2(t) + F_3(t) - F_4(t) \end{cases}$$

.

C.3 Prise en compte des défauts cinématiques

Les relations précédentes sont idéales et il est souhaitable de les corriger en procédant à un étalonnage rigoureux de la balance. Pour appliquer des efforts instationnaires proches de ceux générés par les drapeaux, nous fabriquons un oscillateur avec des ressorts et des masses. Les forces appliquées par l'oscillateur sur le mât sont mesurées par un capteur de force PCB 208C01. Nous faisons varier la fréquence d'oscillation entre 2 et 5 Hz, dans les trois situations suivantes :

- $D(t)$ seul avec un écart-type temporel $\sigma(D)$ variant de 0.040 N à 0.140 N,
- $M_y(t)$ seul avec un écart-type temporel $\sigma(M_y)$ variant de 0.010 N.m à 0.300 N.m,
- $M_z(t)$ seul avec un écart-type temporel $\sigma(M_z)$ variant de 0.010 N.m à 0.200 N.m.

Nous enregistrons les dix premières secondes des $F_i(t)_{i=1..4}$. À l'issue de ces essais, nous obtenons une matrice d'étalonnage où les longueurs des deux dernières lignes sont exprimées

en mètres :

$$\begin{pmatrix} \sigma(D) \\ \sigma(M_y) \\ \sigma(M_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.016 & 0.001 & 0.042 \\ 0.003 & 0.051 & -0.003 \\ 0.001 & 0.003 & 0.100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(S_1) \\ \sigma(S_2) \\ \sigma(S_3) \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & "b \simeq 0.056" & 0 \\ 0 & 0 & "a \simeq 0.101" \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(S_1) \\ \sigma(S_2) \\ \sigma(S_3) \end{pmatrix}. \tag{C.3}$$

Dans ces expressions, $\sigma(S_1)$, $\sigma(S_2)$ et $\sigma(S_3)$ désignent respectivement les écarts-types de S_1, S_2 et S_3. Notons que l'approximation forte de l'équation (C.3) [1] est identique à l'équation (C.2) à 10% près sur les coefficients non nuls.

C.4 Validation de l'étalonnage

Afin de valider la matrice d'étalonnage de l'équation (C.2) dans un contexte plus général, nous appliquons des chargements couplés en termes de $D(t)$, $M_y(t)$ et $M_z(t)$. Les résultats de cette campagne d'essais peuvent être appréciés sur la Figure C.3.

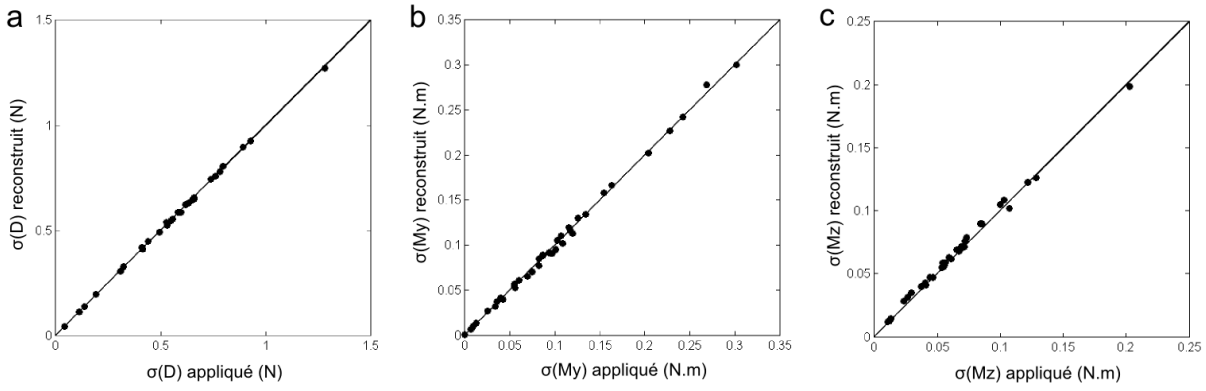


Figure C.3 – Validation de l'étalonnage de la balance aérodynamique par comparaison entre les efforts appliqués et les efforts calculés via l'équation (C.2). ***a :*** *Écart-type de la traînée* $D(t)$. ***b :*** *Écart-type du moment de tangage* $M_y(t)$. ***c :*** *Écart-type du moment de lacet* $M_z(t)$.

L'erreur maximale de reconstruction de ces chargements est inférieure à 10%. Notons que l'approximation de l'équation (C.3) mène à des erreurs légèrement plus élevées ($\simeq 15\%$).

C.5 Un couplage évité entre la balance et les drapeaux

Les fréquences propres de la balance sont mesurées en tapant sur le montage dans différentes directions. Les spectres recueillis indiquent que la plus petite fréquence propre est de 90 Hz, et qu'elle correspond à un mode de compression longitudinal de la balance, dans la direction du vent. Pour les expériences présentées au Chapitre 2, les drapeaux sont choisis de manière à ce qu'ils oscillent à des fréquences inférieures à 60 Hz, si bien que toute situation de résonance entre la balance et les drapeaux est a priori évitée.

1. Il s'agit de l'équation (C.1) en termes d'écarts-types.

Annexe D

Sur la rupture des drapeaux

Cette annexe précise le mode de rupture des drapeaux étudiés lors des campagnes d'essais du Chapitre 1 et au Chapitre 2.

D.1 Motivations

En 1984, Koehl suggère que l'algue *Nereocystis luetkeana* (Figure D.1a) soit un modèle d'organisme sessile cherchant un compromis entre les écoulements lents et rapides. En particulier, l'auteur reporte que ces algues "flap in the current like flags do in the wind (increasing form drag)" (Figure D.1b,c). En tirant parti du flottement, l'algue récupère du bicarbonate nécessaire pour activer la photosynthèse et rejette des substances organiques dissoutes et de l'oxygène (par diffusion dans les couches limites des frondes, Figure D.1a). Plus l'écoulement est rapide (ou plus l'algue est souple), plus le taux de photosynthèse est favorable (Wheeler, 1980). Cependant, les efforts induits par le flottement entraînent un risque accru de rupture du stipe ou des frondes (Koehl & Wainwright, 1977). Pour se prémunir contre la rupture par flottement, les algues *Nereocystis luetkeana* des régions à forts courants marins ont des frondes planes se regroupant en paquets (voir Koehl *et al.*, 2008).

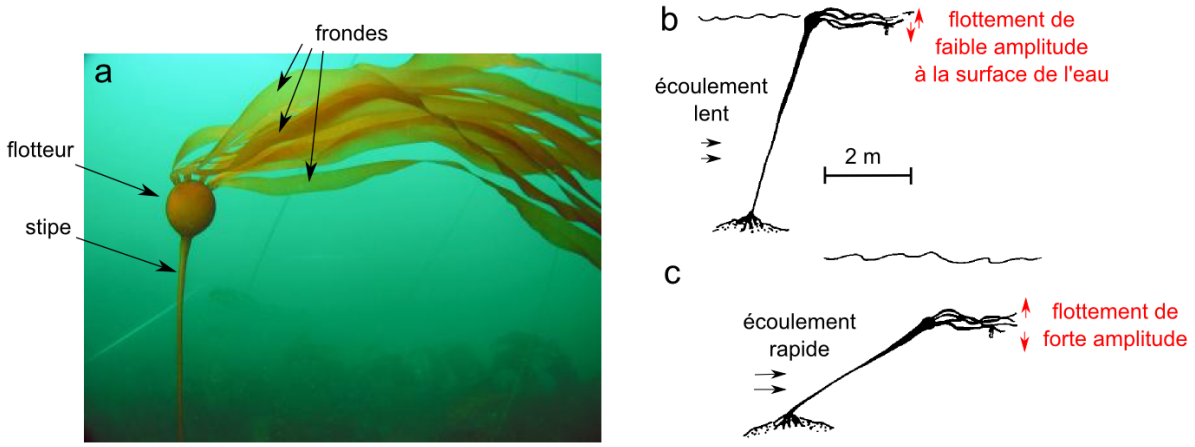


Figure D.1 – Algue Nereocystis luetkeana. ***a :*** *Définitions du stipe, du flotteur et des frondres. Photographie de Brenda Konar (côte Pacifique, Amérique du Nord).* ***b,c :*** *Effet du courant marin sur l'amplitude de flottement des frondes et sur la déformation du stipe (adapté de Koehl, 1984).*

Les drapeaux étudiés en soufflerie permettent d'analyser ce type de situation de rupture

induite par flottement. En particulier, nous nous focalisons sur les drapeaux en papier qui ont une structure en fibre de cellulose "commune" avec l'algue *Nereocystis luetkeana*.

D.2 Expériences de rupture

Nous utilisons des drapeaux en papier 120 g/m^2 d'épaisseur $d = 153$ μm et de largeur $H = 100$ mm (Annexe A). L'expérience consiste en une augmentation de la vitesse de vent par paliers d'environ 0.2 m/s (maintenus environ 3 min), pour une exposition totale en soufflerie de l'ordre de deux heures avant rupture. Nous notons U_{rupture} la vitesse de vent menant à la rupture du drapeau et L_{rupture} la distance à laquelle la rupture débute (voir Figure D.2).

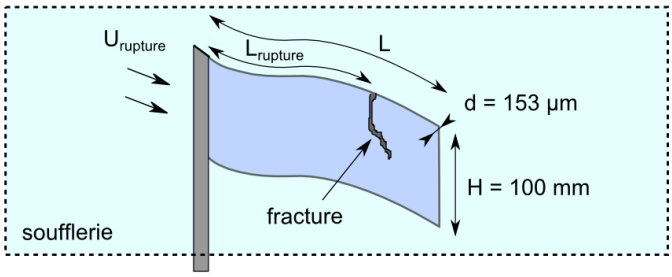


Figure D.2 – Caractéristiques de la rupture. La distance entre l'amorce de la fracture et le mât est notée $L_{rupture}$ et la vitesse de vent à laquelle la fracture débute est notée $U_{rupture}$.

Nous étudions la rupture avec trois longueurs de drapeaux différentes : Drapeau 1 avec $L = 140$ mm (4 essais), Drapeau 2 avec $L = 250$ mm (4 essais) et Drapeau 3 avec $L = 286$ mm (4 essais). Les motifs de rupture présentent tous une amorce de fracture à mi-longueur, qui s'oriente préférentiellement dans le sens du vent (de la gauche vers la droite), en suivant une direction proche de celle des fibres. Des exemples sont visibles sur la Figure D.3. Nous reportons les valeurs de U_{rupture} et de L_{rupture} dans le Tableau D.1, avec les valeurs des coefficients de traînée moyenne et instationnaire (Chapitre 2). À la vitesse de vent de rupture, le coefficient de traînée moyenne est noté $< C_D >_{\text{rupture}}$ et le coefficient de traînée instationnaire est noté $\sigma(C_D)_{\text{rupture}}$.

	Drapeau 1	Drapeau 2	Drapeau 3
L (mm)	140	250	286
L_{rupture} (mm)	65 ± 5	123 ± 25	136 ± 22
U_{rupture} (m/s)	17.7 ± 0.3	13.8 ± 0.1	11.9 ± 0.4
$< C_D >_{\text{rupture}}$	0.30	0.28	0.22
$\sigma(C_D)_{\text{rupture}}$	0.02	0.03	0.06
Σ_{rupture} (Pa)	5.7×10^4	6.2×10^4	5.1×10^4

Tableau D.1 – Paramètres caractéristiques de la rupture des drapeaux en papier 120 g/m^2. La contrainte à la rupture $\Sigma_{rupture}$ est estimé via l'équation (D.1).

Nous obtenons que l'écart-type relatif associé à U_{rupture} est au plus de 4 % tandis que celui associé à L_{rupture} est au plus de 20 %. Cela suggère que la fracture a lieu systématiquement à la même vitesse de vent (pour un drapeau donné) et approximativement au même endroit sur le drapeau.

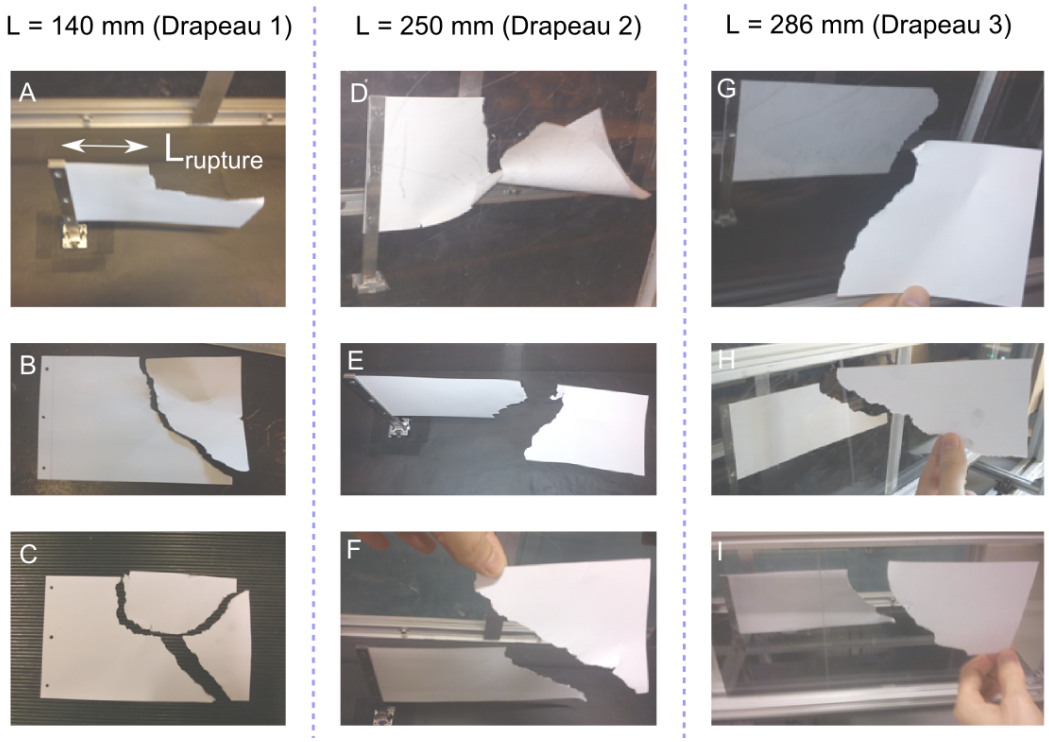


*Figure D.3 – Exemples de rupture avec des drapeaux en papier 120 g/m^2 (photographies réalisées juste après l'arrêt de la soufflerie ou hors soufflerie). Le vent va de la gauche vers la droite. Pour **C**, nous observons un dédoublement de fracture. Pour **D**, la rupture n'est pas complète car le drapeau a adopté une forme torsadée qui a permis de réduire les efforts induits par le flottement. Dans les seuls cas **E** et **G**, la fracture est amorcée par le bas du drapeau, qui est une région mise initialement en compression par la gravité.*

D.3 Surestimation de la contrainte à la rupture

L'ordre de grandeur de la contrainte à la rupture du drapeau sur le mât est donné par :

$$\Sigma_{\text{rupture}} \simeq \frac{1}{2}\rho_{\text{air}} U^2_{\text{rupture}} H L \left(< C_D >_{\text{rupture}} + 3\sqrt{2}\,\sigma(C_D)_{\text{rupture}} \right) / (Hd), \qquad \text{(D.1)}$$

où le facteur 3 devant le coefficient de traînée instationnaire permet de rendre compte des épisodes de claquements (Chapitre 2, Section 2.1.4 ; voir également Davenport (1964) à propos des évènements extrêmes). Nous obtenons $\Sigma_{\text{rupture}} \sim 10^5$ Pa (Tableau D.1). Par comparaison, l'essai de traction effectué à l'Annexe A pour ce matériau (Figure A.2) nous montre que la contrainte critique en traction pure est de l'ordre de 4.5×10^7 Pa. La contrainte à la rupture est donc environ 1000 fois plus faible que prévue.

Ce résultat suggère qu'un mécanisme de fatigue du matériau favorise la rupture (Bompard, 2011), ce qui est d'autant plus pertinent que nous n'observons pas de rupture au niveau du mât, qui est pourtant le lieu de tension maximale. Aussi, pendant une expérience en soufflerie jusqu'à la rupture, le drapeau subit de l'ordre de 10^5 cycles de va-et-vient. L'amorçage de la fracture devrait par conséquent avoir lieu là où la fatigue est la plus prononcée, c'est-à-dire là où la courbure du drapeau fluctue plus fortement, au niveau des ventres de vibration. Au final, nous pouvons nous attendre à une fracture amorcée entre un ventre de vibration et le mât.

Dans la situation de Drapeau 1 ($L = 140$ mm) où nous disposons de visualisations jusqu'à la rupture, nous représentons la superposition des déformées avec la longueur de référence L_{rupture} (Figure D.4). Nous constatons que l'amorce de la fracture est effectivement située en

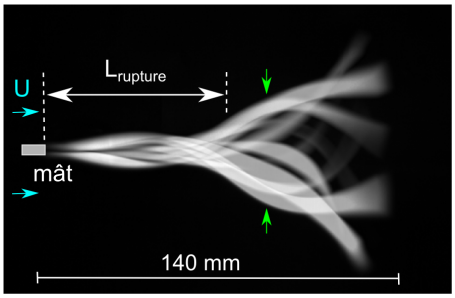


Figure D.4 – Superposition des déformées de Drapeau 1 (L = 140 mm) à U = 15.0 m/s proche de $U_{rupture}$. Les flèches vertes indiquent le lieu où les fluctuations de courbure sont les plus prononcées.

amont d'un ventre de vibration du drapeau. La position des ventres évoluant avec la vitesse du vent, il serait intéressant de déterminer de manière rigoureuse le lieu du drapeau subissant le plus de fatigue au cours d'une expérience complète en soufflerie.

Annexe E

Détection du flottement chaotique

Travail réalisé avec Davide Faranda et Paul Manneville.

Cette annexe propose un cadre de travail pour étudier la transition du flottement périodique vers le flottement chaotique. L'outil présenté est adapté aux courtes séries temporelles issues d'expériences.

E.1 Motivations

Les drapeaux flottants de manière irrégulière font partie de la vie de tous les jours, comme l'illustrent les jeux de physiciens des années 70 : "How far away is the nearest strange attractor ? [...] That flag snapping away in a steady breeze ?" (Gleick, 1987). En soufflerie, il a été observé que les oscillations des drapeaux deviennent "violent and irregular" (Taneda, 1968) à grande vitesse de vent. Numériquement, le scénario "état rectiligne-flottement périodique-flottement chaotique" a été établi par de nombreuses simulations (Yadykin *et al.*, 2001 ; Connell & Yue, 2007 ; Alben & Shelley, 2008 ; Michelin *et al.*, 2008 ; Huang & Sung, 2010), mais peu de travaux expérimentaux ont été entrepris pour le discuter.

Les détections expérimentales du chaos à notre connaissance sont basées sur le suivi d'un point du drapeau (généralement le bord de fuite) par rayon laser (voir Ait Abderrahmane *et al.*, 2011 ; Zhao *et al.*, 2012 ; Ait Abderrahmane *et al.*, 2012) ou très récemment par nappe laser (voir Chen *et al.*, 2014). Comme les rayons laser sont fixes, la technique est raisonnable dans la limite des faibles déplacements du drapeau, de sorte que le même point soit toujours suivi. Cependant, ce n'est pas le cas en pratique, car l'amplitude du flottement peut être de l'ordre de la longueur du drapeau (Shelley & Zhang, 2011). Un autre inconvénient de cette technique est l'obtention d'une observable "locale" alors qu'une observable "globale" serait préférable pour rendre compte de la dynamique complète du drapeau. Afin de contourner ces écueils, nous proposons d'utiliser le moment de flottement $M(t)$ généré autour du mât par le drapeau (Chapitre 2) et de détecter l'apparition du chaos grâce aux séries temporelles associées.

D'un point de vue mathématique, la caractérisation de la dynamique d'une série temporelle passe classiquement par la reconstruction d'un attracteur équivalent via la méthode du délai temporel (Packard *et al.*, 1980 ; Takens *et al.*, 1981) pour caractériser le taux de séparation des trajectoires proches. Cela permet d'accéder au coefficient de Lyapunov maximal, mais nécessite cependant de vérifier des hypothèses fortes sur la géométrie de l'attracteur (Wolf *et al.*, 1985 ; Cao, 1997 ; Gautama *et al.*, 2003). Afin de contourner ces difficultés, nous nous appuyons sur l'étude des récurrences dans l'espace de phase reconstruit (voir Faranda *et al.*, 2012), en combinant le travail de Poincaré (1890) et la théorie des valeurs extrêmes (Leadbetter *et al.*,

1982). À la différence des outils classiques, ce cadre de travail fourni un test de convergence qui indique si la série temporelle est suffisamment grande ou non pour que la réponse soit fiable.

E.2 Loi d'extremum généralisé et récurrences

Pour assister la conception de l'algorithme de détection du chaos, nous commençons par rappeler les éléments principaux de la théorie des valeurs extrêmes (voir Leadbetter *et al.*, 1982). Soit $x(t)$ des observations indépendantes et identiquement distribuées dans le temps, échantillonnées en n blocs qui contiennent chacun m observations. D'après Gnedenko (1943), nous savons que dans la limite $n, m \to \infty$, la fonction de répartition des maxima $(M_j)_{j=1..n}$ des blocs prend la forme :

$$F(x) = \exp\left\{-\left[1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right\}. \tag{E.1}$$

La distribution des maxima suit une loi dite d'extremum généralisée, avec :
- un "paramètre de position" $\mu \in \mathbb{R}$,
- un "paramètre de dispersion" $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$,
- un "paramètre de forme" $\xi \in \mathbb{R}$.

En particulier, comme représenté sur la Figure E.1, le paramètre de forme ξ caractérise la forme de la distribution, qui est dite de Fréchet si $\xi > 0$, dite de Gumbel si $\xi = 0$ et dite de Weibull si $\xi < 0$.

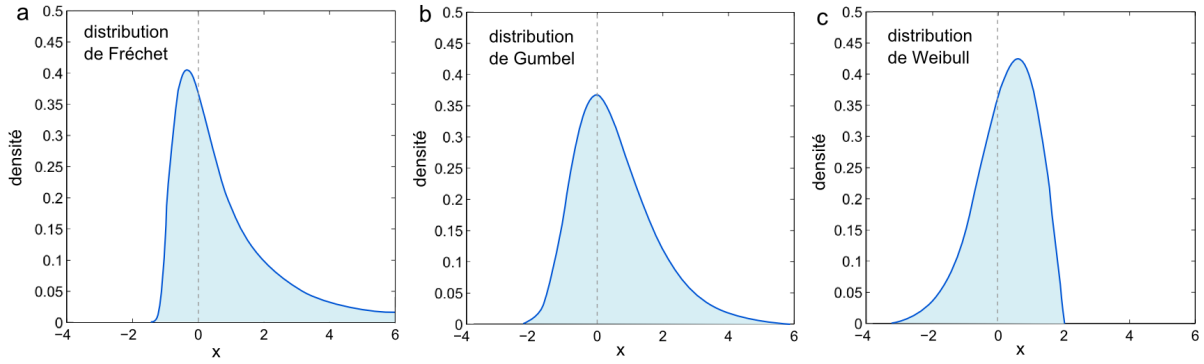


Figure E.1 – La famille de distributions de probabilité permettant de représenter les phénomènes de valeurs extrêmes. Le calcul est réalisé avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. ***a*** *: Distribution de Fréchet avec $\xi = 0.5$.* ***b*** *: Distribution de Gumbel avec $\xi = 0$.* ***c*** *: Distribution de Weibull avec $\xi = -0.5$.*

À l'origine, la théorie des valeurs extrêmes fut construite pour des variables $x(t)$ indépendantes et identiquement distribuées. Récemment, d'importantes contributions ont permis de traiter des variables plus générales (Collet, 2001 ; Freitas & Freitas, 2008 ; Gupta *et al.*, 2011 ; Faranda *et al.*, 2011). Cela est possible en adaptant la théorie des récurrences de Poincaré aux séries temporelles. En effet, si nous considérons un point ζ et si nous prenons comme observable la fonction $y(t) = g(|x(t) - \zeta|)$, c'est-à-dire la série temporelle des distances entre ζ et les autres points pondérées par une fonction $g(\cdot)$, il a été prouvé par Freitas *et al.* (2009) que les maxima des blocs de l'observable $y(t)$ convergent vers une loi d'extremum généralisée, équation (E.1), si $x(t)$ est chaotique. Intuitivement, cela signifie qu'il y a perte de dépendance

entre les observations $x(t)$ (Collet, 2001). En particulier, si $g(\cdot) = -\log(\cdot)$ est choisie, nous obtenons la convergence vers la distribution de Gumbel (i.e. $\xi = 0$) et le paramètre de dispersion σ correspond à l'inverse de la dimension de Hausdorff (Lucarini *et al.*, 2012). Un point clef est que la réciproque soit également vraie (voir Faranda *et al.*, 2012) : en prenant la série temporelle d'un système dynamique inconnu, nous pouvons détecter si elle est chaotique ou non en ajustant la distribution des maxima de la série temporelle $y(t) = -\log(|x(t) - \zeta|)$ à la distribution de Gumbel. Par conséquent, un ajustement réussi exprime le fait que la série temporelle est chaotique et un ajustement non réussi signifie qu'elle est non chaotique. Remarquons que dans un tel cadre de travail, nous n'avons pas fait d'hypothèses sur la géométrie de l'attracteur (e.g. sa dimension de plongement).

E.3 Algorithme de détection du chaos

Cela nous mène à utiliser l'algorithme suivant pour la détection du chaos :

1. Considérer une série temporelle $x(t) = M(t)$ et en sélectionner un point arbitraire noté ζ, comme sur la Figure E.2a.

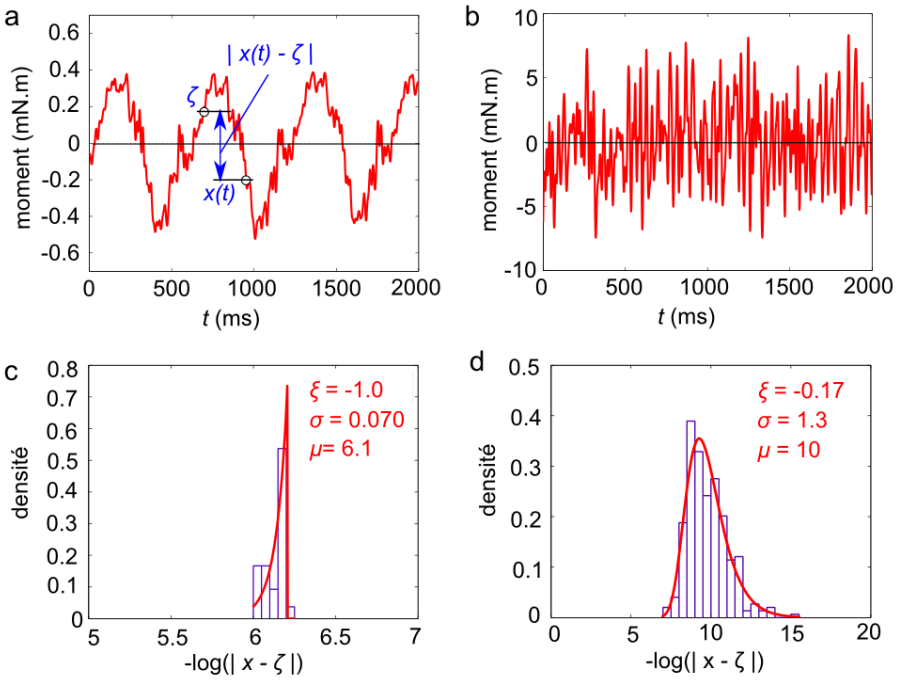


Figure E.2 – Mise en œuvre de l'algorithme. ***a :*** *Série temporelle $M(t)$ pour $U = 0.9$ m/s. Le flottement est périodique avec une structure ajoutée de plus haute fréquence.* ***b :*** *Série temporelle $M(t)$ pour $U = 13.8$ m/s. Il n'y a pas de périodicité claire dans ce signal.* ***c :*** *Distribution des maxima de $y(t)$ pour $U = 0.9$ m/s (Figure E.2a) avec une valeur aléatoire $\zeta = 0.1981$. Le courbe rouge indique le meilleur ajustement de l'équation* (E.1) *avec les paramètres indiqués en rouge. Dans cette situation, le paramètre ξ est repoussé aux frontières de l'espace des paramètres $\xi \in [-1, 1]$. En pratique, cette série temporelle ne passe pas l'étape du test statistique de Lilliefors car il y a trop peu de points pour reconstruire proprement la distribution.* ***d :*** *Distribution des maxima de $y(t)$ pour $U = 13.8$ m/s (Figure E.2b) avec une valeur aléatoire $\zeta = 0.4562$.*

2. Calculer la série temporelle $y(t) = -\log(|x(t) - \zeta|)$.

3. Échantillonner la série temporelle $y(t)$ en n blocs et en extraire les maxima $(M_j)_{j=1..n}$. Les maxima de $y(t)$ sont associés aux minima de $|x(t) - \zeta|$.
4. Ajuster la distribution des maxima à la loi d'extremum généralisée via l'équation (E.1). Utiliser pour cela la méthode des L-moments (Faranda *et al.*, 2012) et enregistrer le paramètre de forme ξ du meilleur ajustement.
5. Répéter le calcul du paramètre de forme ξ du meilleur ajustement pour 100 valeurs aléatoire de ζ.
6. Pour juger de la fiabilité de ces ajustements, réaliser un test statistique de Lilliefors (1967), adaptation du test de Kolmogorov-Smirnov. Si le test de Lilliefors n'est pas passé, les paramètres correspondants ne sont pas enregistrés.
7. Considérer que $x(t)$ est chaotique si et seulement si la moyenne des ξ (en valeur absolue) est plus petite qu'un écart-type des ξ.

E.4 Résultats et comparaison à l'évolution spectrale

Le drapeau étudié est en polypropylène bi-orienté d'épaisseur d = 90 μm, de longueur L = 286 mm et de largeur H = 100 mm (Annexe A). La vitesse du vent est augmentée de U = 0.4 m/s à U = 14 m/s par incréments de 0.4 m/s. Les séries temporelles du moment de flottement sont enregistrées pendant 14 s (approximativement 1.4×10^4 observations), ce qui recouvre plus de 100 périodes de flottement en général.

Avant de présenter les résultats de l'algorithme, il est souhaitable de discuter de l'évolution générale des séries temporelles. Pour cela, les densités spectrales de puissance du moment de flottement $M(t)$ sont reportées verticalement sur la Figure E.3a. Nous voyons qu'il y a présence d'une fréquence dominante dans la gamme de vitesse de vent $U \simeq 0.5 - 4$ m/s, ce qui suggère un flottement périodique. La croissance linéaire de cette fréquence dominante avec la vitesse du vent est en accord avec l'analyse de stabilité du Chapitre 1. Au-dessus de $U \simeq 4$ m/s, nous voyons un enrichissement spectral progressif. Aussi, une basse fréquence de plus en plus importante apparaît à partir de $U \simeq 8$ m/s. Toutes ces caractéristiques sont indicatrices d'une transition vers une dynamique fortement non-linéaire (Manneville, 2004).

Appliquons l'algorithme de la Section E.3 afin de faire la distinction entre les dynamiques chaotiques et non chaotiques. Les séries temporelles $M(t)$ sont échantillonnées en n = 56 blocs de $m \simeq 260$ ms (i.e. 250 observations). Les résultats du test statistique de Lilliefors sont présentés sur la Figure E.3b. Un paramètre de test plus faible que la valeur critique 0.4 signifie qu'à 10 % de niveau de confiance, il n'y a pas de différences entre la distribution observée et la loi d'extremum généralisée [1]. Si le test n'est pas rejeté, nous considérons que les données sont fiables. Nous pouvons remarquer que si la fréquence de flottement est inférieure à f = 4 Hz (comme c'est le cas pour les vitesses de vent inférieures à U = 2 m/s), moins d'une période est incluse par bloc et le test statistique est rejeté sans surprise.

Comme souligné précédemment, la détection du chaos est basée sur la valeur du paramètre de forme ξ, lequel est reporté sur la Figure E.3c. Nous constatons une transition quasiment continue entre un flottement périodique et un flottement chaotique pour U = 8 m/s. Il est rassurant que ce seuil soit compatible avec l'apparition des basses fréquences dans les densités spectrales de puissance de la Figure E.3a. Néanmoins, il y a un décalage systématique de ξ vers les valeurs négatives, et également une plage de vitesse de vent très étroite pour laquelle une dynamique non chaotique est détectée (à $U \simeq 11$ m/s), sans signatures spectrales évidentes.

1. La valeur critique 0.4 fixée arbitrairement pour le test de Lilliefors est plus élevée que celle préconisée lors de l'étude de variables indépendantes et identiquement distribuées (i.e. 0.2 pour $n \simeq 50$ maxima).

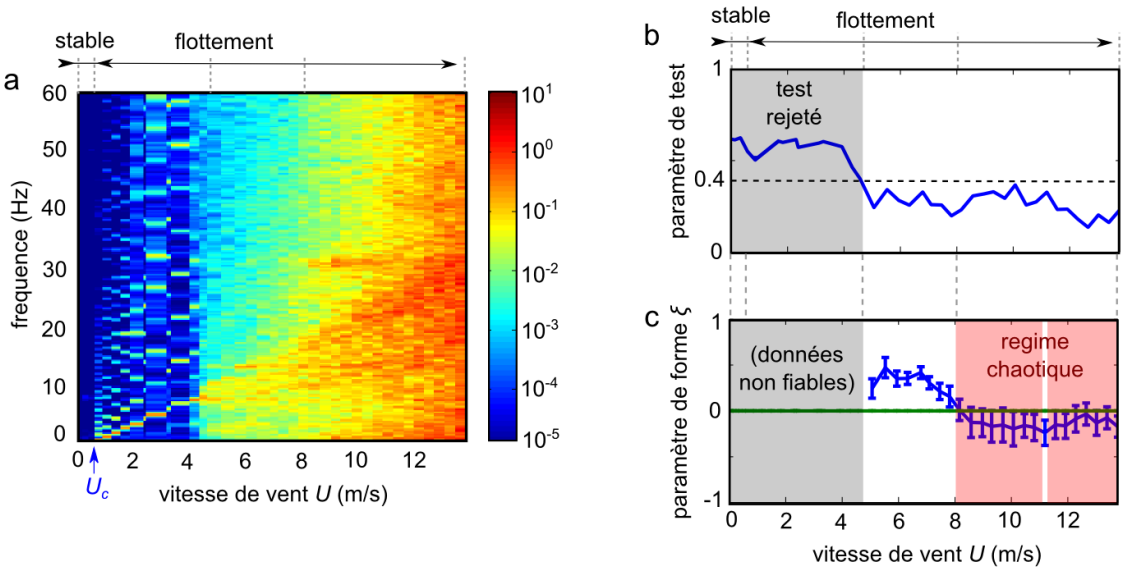


Figure E.3 – Détection du chaos. ***a :*** *Évolution des densités spectrales de puissance de $M(t)$ lorsque la vitesse du vent est augmentée. Le drapeau flotte à partir de $U_c \simeq 0.5$ m/s.* ***b :*** *Résultats de l'algorithme de la Section E.3. La zone grise indique les données non fiables vis-à-vis du test de Lilliefors.* ***c :*** *Paramètre de forme ξ. La zone rose indique que la convergence vers une distribution de Gumbel est obtenue ($\xi \simeq 0$), c'est-à-dire que la dynamique est chaotique. Les barres d'erreurs correspondent à l'écart-type de ξ calculé pour 100 valeurs aléatoires de ζ.*

E.5 Limites de la méthode

Nous avons montré que l'algorithme de la Section E.3 localise le régime chaotique de manière raisonnable vis-à-vis de l'évolution des densités spectrales de puissance. Examinons cependant les limites de l'algorithme en termes d'échantillonnage des séries temporelles.

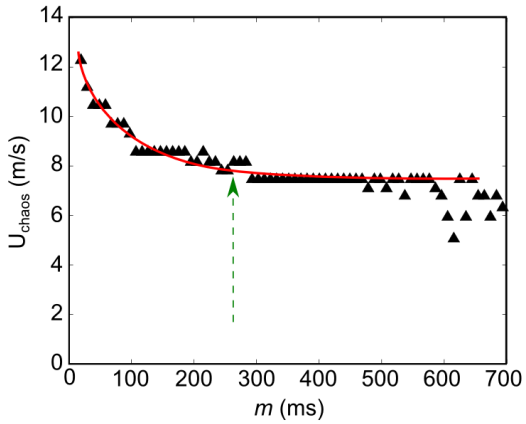


Figure E.4 – Sensibilité de l'algorithme à l'échantillonnage. La vitesse de vent requise pour détecter le chaos U_{chaos} converge vers 8 m/s, mais une forte dispersion est observée au-delà de $m = 600$ ms. La courbe rouge est un guide pour les yeux. La flèche verte indique la taille de bloc choisie pour l'analyse de la Figure E.3b,c.

D'un point de vue physique, lorsque le nombre de bloc n est fixé ou lorsque le temps d'observation m est fixé (nm étant la durée totale de la série temporelle), l'échelle de temps maximale à laquelle nous observons les récurrences temporelles dans l'algorithme est figée.

Cela impose la fréquence minimale à laquelle nous pouvons analyser la dynamique de la série temporelle. Par exemple, dans le cas de la Figure E.3b, nous avons $m \simeq 260$ ms et par conséquent nous ne prenons pas en compte le domaine fréquentiel $0 - 4$ Hz. Pour déterminer plus précisément l'impact de l'échantillonnage sur la détection du chaos, nous reportons la vitesse de vent requise pour détecter le chaos U_{chaos} en fonction du temps des blocs m, Figure E.4. Nous observons une tendance décroissante de U_{chaos} pour m inférieur à 100 ms, i.e. lorsque la gamme de fréquence non prise en compte contient la fréquence dominante de flottement (~ 10 Hz), puis une convergence autour de la valeur $U_{\text{chaos}} = 8\ m/s$. Néanmoins, lorsque le temps d'observation est plus grand que 600 ms, nous constatons une dispersion des résultats, associée au fait que moins de $n = 25$ valeurs soient utilisées pour reconstruire la distribution des maxima, probablement trop peu.

Au final, la méthode doit être appliquée avec soin : si la série temporelle est trop échantillonnée, alors la fréquence typique du flottement n'est pas "ressentie", menant à des résultats trompeurs. À l'inverse, si il y a trop peu de blocs (typiquement moins de 25 blocs), alors la distribution des maxima des blocs n'est pas reconstruite précisément, et une forte dispersion de l'ajustement (sur la loi d'extremum généralisée) s'ensuit.

Bibliographie



[1] Ait Abderrahmane, H., Païdoussis, M.P., Fayed, M., Ng, H.D., 2011, Flapping dynamics of a flexible filament. *Physical Review E* **84** : 066604.

[2] Ait Abderrahmane, H., Païdoussis, M.P., Fayed, M., Ng, H.D., 2012, Nonlinear dynamics of silk and Mylar flags flapping in axial flow. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **107-108** : 225-236.

[3] Akcabay, D.T., Young, Y.L., 2012, Hydroelastic response and energy harvesting potential of flexible piezoelectric beams in viscous flow. *Physics of Fluids* **24** : 054106.

[4] Alava, M., Niskanen, K., 2006, The physics of paper. *Reports on Progress in Physics* **69** : 669-723.

[5] Alben, S., Shelley, M.J., 2008, Flapping states of a flag in an inviscid fluid : bistability and the transition to chaos. *Physical Review Letters* **100** : 074301.

[6] Alben, S., 2009, Wake-mediated synchronization and drafting in coupled flags. *Journal of Fluid Mechanics* **641** : 489-496.

[7] Allen, J.J., Smits, A.J., 2001, Energy harvesting eel. *Journal of Fluids and Structures* **15** : 629-640.

[8] Amandolese, X., Hémon, P., 2010, Vortex-induced vibration of a square cylinder in wind tunnel. *Comptes Rendus Mécanique* **338** : 12-17.

[9] Amandolese, X., Michelin, S., Choquel, M., 2013, Low speed flutter and limit cycle oscillations of a two-degree-of-freedom flat plate in a wind tunnel. *Journal of Fluids and Structures* **43** : 244-255.

[10] American National Standard, 2007, Guide specifications for design of metal flagpoles. *The National Association of Architectural Metal Manufacturers*.

[11] Anderson, J.D., 1999, A history of aerodynamics. *Cambridge University Press*.

[12] Argentina, M., Mahadevan, L., 2005, Fluid-flow-induced flutter of a flag. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **102** : 1829-1834.

[13] Ashby, M.F., 2000, Choix des matériaux en conception mécanique. *Dunod*.

[14] Aubry, N., 1991a, On the hidden beauty of the proper orthogonal decomposition. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* **2** : 339-352.

[15] Aubry, N., Guyonnet, R., Lima, R. 1991b, Spatiotemporal analysis of complex signals : theory and applications. *Journal of Statistical Physics* **64** : 683-739.

[16] Audoly, B., Pomeau, Y., 2010, Elasticity and Geometry. *Oxford University Press*.

[17] Auman, L., Wilks, B., 2005, Application of fabric ribbons for drag and stabilization. *18th AIAA Aerodynamic Decelerator Systems Technology Conference and Seminar* **1618** : 1-9.

[18] Aurégan, A., 1993, Contribution à l'étude des bruits respiratoires, modélisation du ronflement. Thèse de doctorat, *Université du Maine*.

[19] Aurégan, Y., Depollier , C., 1995, Snoring : linear stability analysis and in vitro experiments. *Journal of Sound and Vibration* **188** : 39-54.

[20] Bae, L., Lee, J., Kim, S., Ha, J., Lee, B.-S., Park, Y., Choong, C., Kim, J.-B., Wang, Z.L., Kim, H.-Y., Park, J.-J., Chung, U.-I., 2014, Flutter-driven triboelectrification for harvesting wind energy. *Nature Communications* **5** : 4929.

[21] Balibar, S., 2011, Systèmes modèles et universalité en physique statistique. *Séance de l'Académie des Sciences*.

[22] Balint, T.S., Lucey, A.D., 2005, Instability of a cantilevered flexible plate in viscous channel flow. *Journal of Fluids and Structures* **20** : 893-912.

[23] Bao, C.-Y., Tang, C., Yin, X.-Z., Lu, X.-Y, 2010, Flutter of finite-Span flexible plates in uniform flow. *Chinese Physics Letters* **27** : 064601.

[24] Barbacci, A., Diener, J., Hémon, P., Adam, B., Donès, N., Reveret, L., Moulia, B., 2014, A robust videogrametric method for the velocimetry of wind induced motion in trees. *Agricultural and Forest Meteorology* **184** : 220-229.

[25] Bayerl, G., 2003, Les moulins, prémices de la révolution industrielle. *Pour la Science* **37** : 92-95.

[26] Belidor, B.F., 1739, Architecture hydraulique. *Paris*.

[27] Bernitsas, M.M., Raghavan, K., Ben-Simon, Y., Garcia, E.M.H., 2008, VIVACE : a new concept in generation of clean and renewable energy from fluid flow. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering* **130** : 041101.

[28] Blevins, R.D., 1979, Formulas for natural frequency and mode shape. *Van Nostrand Reinhold*.

[29] Blevins, R.D., 1990, Flow-induced vibration. *Van Nostrand Reinhold Company*.

[30] Bompard, P., 2011, Mécanique de la Rupture. *Cours de 3ème de l'École Centrale Paris*.

[31] Bourrières, F.J., 1969, L'onde (du 4ème ordre) de fanion, onde du poisson et du vol en régime. *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air* **482** : 120-121.

[32] Bremond, N., 2003, Stabilité et atomisation des nappes liquides. Thèse de doctorat, *Université de Provence*.

[33] Cao, L., 1997, Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D* **110** : 43-50.

[34] Carruthers, A.C., Filippone, A., 2005, Aerodynamic drag of streamers and flags. *Journal of Aircraft* **42**(4) : 976-982.

[35] Cerda, E., Mahadevan, L., Pasini, J.M., 2004, The elements of draping. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **101** : 1806-1810.

[36] Chen, M., Jia, L.B., Wu, Y.F., Yin, X.Z., Ma, Y.B., 2014, Bifurcation and chaos of a flag in an inviscid flow. *Journal of Fluids and Structures* **45** : 124-137.

[37] Coene, R., 1992, Flutter of slender bodies under axial stress. *Applied Scientific Research* **49** : 175-187.

[38] Collet, P., 2001, Statistics of closest return for some non-uniformly hyperbolic systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **21** : 401-420.

[39] Connell, B.S.H., 2006, Numerical investigation of the flow-body interaction of thin flexible foils and ambient flow. Ph.D. thesis, *Massachusetts Institute of Technology*.

[40] Connell, B.S.H., Yue, D.K.P., 2007, Flapping dynamics of a flag in a uniform stream. *Journal of Fluid Mechanics* **581** : 33-67.

[41] Crapper, G.D., Dombrowdki, N., Jepson, W.P., Pyott, G.A.D., 1973, A note on the growth of waves on thin liquid sheets. *Journal of Fluid Mechanics* **57** : 671-672.

[42] Davenport, A.G., 1964, Note on the distribution of the largest value of a random function with application to gust loading. *ICE Proceedings* **28** : 187–196.

[43] Diderot, D., d'Alembert, J.L.R., 1772, Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. *Paris* : 106-107.

[44] Doaré, O., 2001, Instabilités locales et globales en interaction fluide-structure. Thèse de doctorat, *École Polytechnique*.

[45] Doaré, O., de Langre, E., 2002, Local and global instability of fluid-conveying pipes on elastic foundations. *Journal of Fluids and Structures* **16** : 1-14.

[46] Doaré, O., Sauzade, M., Eloy, C., 2011, Flutter of an elastic plate in a channel flow : Confinement and finite-size effects. *Journal of Fluids and Structures* **27** : 76-88.

[47] Doaré, O., Michelin, S., 2011, Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates : linear stability analysis and conversion efficiency. *Journal of Fluids and Structures* **27** : 1357-1375.

[48] Dunnmon, J.A., Stanton, S.C., Mann, B.P., Dowell, E.H., 2011, Power extraction from aeroelastic limit cycle oscillations. *Journal of Fluids and Structures* **27** : 1182-1198.

[49] Edgerton, H.E., Breder, C.M., 1941, High speed photographs of flying fishes in flight. *Zoologica* **26** : 311-314.

[50] Eiffel, A., 1912, Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **155** : 1597-1599.

[51] Eloy, C., Souilliez, C., Schouveiler, L., 2007, Flutter of a rectangular plate. *Journal of Fluids and Structures* **23** : 904-919.

[52] Eloy, C., Lagrange, R., Souilliez, C., Schouveiler, L., 2008, Aeroelastic instability of cantilevered flexible plates in uniform flow. *Journal of Fluid Mechanics* **611** : 97-106.

[53] Eloy, C., Kofman, N., Schouveiler, L., 2012, The origin of hysteresis in the flag instability. *Journal of Fluid Mechanics* **691** : 583-593.

[54] Euler, L., 1744, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Lausannae & Genevae, Apud Marcum-Michaelem Bousquet et Socios.

[55] Eurocode, 2005, Actions sur les structures. *Comité Européen de Normalisation* : 81-82.

[56] Facchinetti, M.L., de Langre, E., Biolley, F., 2004, Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures* **19** : 123-140.

[57] Fairthorne, R.A., 1930, Drag of flags. Aeronautical Research Committee, *Reports and Memoranda* **1345** : 887-891.

[58] Fancett, R.K., Clayden W.A., 1972, Subsonic wind tunnel tests on the use of streamers to stabilize

the foil bomblet. *Royal Armament Research and Development Establishment*, Memorandum **14/70**.

[59] Faranda, D., Lucarini, V., Turchetti, G., Vaienti S., 2011, Numerical convergence of the Block Maxima approach to the Generalized Extreme Value distribution. *Journal of Statistical Physics* **145** : 1156-1180.

[60] Faranda, D., Lucarini, V., Turchetti, G., Vaienti, S., 2012, Generalized extreme value distribution parameters as dynamical indicators of stability. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **22** : 1250276.

[61] Fargette, A., Neukirch, S., Antkowiak, A., 2014, Elastocapillary snapping : capillarity induces snap-through instabilities in small elastic beams. *Physical Review Letters* **112** : 137802.

[62] Farnell, D.J.J., David, T., Barton, D.C., 2004a, Coupled states of flapping flags. *Journal of Fluids and Structures* **19** : 29-36.

[63] Farnell, D.J.J., David, T., Barton, D.C., 2004b, Numerical simulations of a filament in a flowing soap film. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **44** : 313-330.

[64] Feeny, B.F., Kappagantu, R., 1998, On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations. *Journal of Sound and Vibrations* **211** : 607-616.

[65] Feynman, R., 1963, The Feynman Lectures on Physics, Elasticity. *Addison Wesley* : (38-1)-(38-12).

[66] Fitt, A.D., Pope, M.P., 2001, The unsteady motion of two-dimensional flags with bending stiffness. *Journal of Engineering Mechanics* **40** : 227-248.

[67] Forterre, Y., Richard, D., Mahadevan, L., 2004, Dynamics of elastic defects in thin plates. *preprint*.

[68] Forterre, Y., Skotheim, J., Dumais, J., Mahadevan, L., 2005, How the Venus flytrap snaps. *Nature* **433** : 421-425.

[69] Freitas, A.C.M., Freitas, J.M., 2008, On the link between dependence and independence in extreme value theory for dynamical systems. *Statistics & Probability Letters* **78** : 1088-1093.

[70] Freitas, A.C.M., Freitas, J.M., Todd, M., 2009, Hitting time statistics and extreme value theory. *Probability Theory and Related Fields* **147** : 675-710.

[71] Fung, Y.C., 1993, An introduction to the theory of aeroelasticity. *Dover*.

[72] Galilei, G. (Galilée), 1638, Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze. *Leida. Appresso gli Elsevirii*.

[73] Gautama, T., Mandic, D.P. and Van Hulle, M.M., 2003, A differential entropy based method for determining the optmal embedding parameters of a signal. *Proceedings ICASSP*.

[74] Géradin, L., Rixen, L., 1996, Théorie des vibrations. *Masson*.

[75] Giacomello, A., Porfiri, M., 2011, Underwater energy harvesting from a heavy flag hosting ionic polymer metal composites. *Journal of Applied Physics* **109** : 084903.

[76] Gibbs, S.C., Wang, I., Dowell, E., 2012, Theory and experiment for flutter of a rectangular plate with a fixed leading edge in three-dimensional axial flow. *Journal of Fluids and Structures* **34** : 68-83.

[77] Gibbs, S.C., Fichera, S., Zanotti, A., Ricci, S., Dowell, E.H., 2014, Flow field around the flapping flag. *Journal of Fluids and Structures* **48** : 507-513.

[78] Gibert, R.-J., 1988, Vibrations des structures. *Eyrolles*.

[79] Gleick, J., 1987, Chaos : making a new science. *Penguin Books*.

[80] Gleick, J., 2008, La théorie du chaos. (Traduction de : Chaos : making a new science.) *Champs Sciences* : 407-408.

[81] Gnedenko, B., 1943, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics* **44** : 423-453.

[82] Gomes, J.P., Lienhart, H., 2013, Fluid-structure interaction-induced oscillation of flexible structures in laminar and turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics* **715** : 537-572.

[83] Gregory, R.W., Païdoussis, M., 1966a, Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid - I Theory. *Proceedings of the Royal Society of London Series A* **293** : 512-527.

[84] Gregory, R.W., Païdoussis, M., 1966b, Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid - II Experiments. *Proceedings of the Royal Society of London Series A* **293** : 528-542.

[85] Grouthier, C., 2013, Récupération d'énergie et vibrations induites par vortex de structures flexibles. Thèse de doctorat, *École Polytechnique*.

[86] Guéguen, N., 2012, L'effet drapeau. *Cerveau & Psycho* **49**.

[87] Gupta, C., Holland, M., Nicol, M., 2011, Extreme value theory for dispersing billiards and a class of hyperbolic maps with singularities. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **31** :1363-1390.

[88] von Helmholtz, H.L.F., 1868, On discontinuous movements of fluids. *Philosophical Magazine Series 4*, **36** : 337-346.

[89] Hémon, P., Santi, F., 2003, Applications of biorthogonal decompositions in fluid structure interactions. *Journal of Fluids and Structures* **17** : 1123-1143.

[90] Hémon, P., 2006, Vibrations des structures couplées avec le vent. *Éditions de l'École Polytechnique*.

[91] Hertel, H., 1966, Structure, Form, Movement. *Reinhold*.

[92] Hœpffner, G., Naka, Y., 2011, Oblique waves lift the flapping flag. *Physical Review Letters* **107** : 194502.

[93] Hoerner, S.F., 1965, Fluid-dynamic drag. *Published by the author*, Chapter 3 : 25.

[94] Hooke, R., 1678, Lectures de potentia restituva, or of spring explaining the power of springing bodies. *Royal Society* : 1-56.

[95] Howell, R.M., Lucey, A.D., Carpenter, P.W., Pitman, M.W., 2009, Interaction between a cantilevered-free flexible plate and ideal flow. *Journal of Fluids and Structures* **25** : 544-566.

[96] Howell, R.M., Lucey, A.D., 2014, Stability of a spring-mounted cantileverd flexible plate in a uniform flow. In : Zhou, Y., Liu, Y., Huang, L., Hodges, D.H., Fluid-structure-sound interactions and control. *Springer* : 319-329.

[97] Huang, L., 1995, Flutter of cantilevered plates in axial flow. *Journal of Fluids and Structures* **9** : 127-147.

[98] Huang, L., Zhang, C., 2013, Modal analysis of cantilever plate flutter. *Journal of Fluids and Structures* **38** : 273-289.

[99] Huang, W.X., Sung, H.J., 2010, Three-dimensional simulation of flapping flag in a uniform flow. *Journal of Fluid Mechanics* **653** : 301-336.

[100] Huber, G., 2000, Swimming in flatsea. *Nature* **408** : 777-778.

[101] Jia, L.-B., Li, F., Yin, X.-Z., Yin, X.-Z., 2007, Coupling modes between two flapping filaments. *Journal of Fluid Mechanics* **581** : 199-220.

[102] Jia, L.-B., Yin, X.-Z., 2008, Passive oscillations of two tandem flexible filaments in a flowing soap film. *Physical Review Letters* **100** : 228104.

[103] Lord Kelvin, 1871, Hydrokinetic solutions and observations. *Philosophical Magazine Series 4*, **42** : 362-377.

[104] Kerschen, G., Golinval, J.C., 2002, Physical interpretation of the proper orthogonal modes using the singular value decomposition. *Journal of Sound and Vibrations* **249** : 849-865.

[105] Khalak, A., Williamson, C.H.K., 1999, Motions, forces and mode transitions in vortex-induced-vibrations at low mass-damping. *Journal of Fluids and Structures* **13** : 813-851.

[106] Kim, S., Huang, W.X., Sung, H.J. 2010, Constructive and destructive interaction modes between two tandem flexible flags in viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics* **661** : 511-521.

[107] Koehl, M.A.R., Wainwright, S.A., 1977, Mechanical adaptations of a giant kelp. *Limnology and Oceanography* **22** : 1067-1071.

[108] Koehl, M.A.R., 1984, How do benthic organisms withstand moving water. *American Zoologist* **24** : 57-70.

[109] Koehl, M.A.R., Silk, W.K., Liang, H., Mahadevan, L., 2008, How kelp produce blade shapes suited to different flow regimes : a new wrinkle. *Integrative and Comparative Biology* **48** : 834-851.

[110] Kornecki, A., Dowell, E.H., O'Brien, J., 1976, On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow. *Journal of Sound and Vibration* **47** : 163-178.

[111] Lamb, H., 1932, Hydrodynamics. *Dover* : 373-375.

[112] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., 1976, Mechanics. Third edition, *Butterworth Heinemann*.

[113] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., 1986, Theory of elasticity. Third edition, *Butterworth Heinemann* : 38-104.

[114] de Langre, E., 2002, Fluides et solides. *Éditions de l'École Polytechnique*.

[115] de Langre, E., 2006, Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter. *Journal of Fluids and Structures* **22** : 783–791.

[116] de Langre, E., 2008, Effect of wind on plants. *Annual Review of Fluid Mechanics* **40** : 141-168.

[117] Leadbetter, M.R., Lindgren, G., Rootzén, H., 1982, Extremes and related properties of random sequences and processes. *Springer*.

[118] Leconte, P., Rapin, M., Szechenyi, E., consulté en 2012, Éoliennes. *Techniques de l'Ingénieur* **BM 4 640**.

[119] Lemaitre, C., Hémon, P., de Langre, E., 2005, Instability of a long ribbon hanging in axial flow. *Journal of Fluids and Structures* **20** : 913–925.

[120] Lighthill, M.J., 1960, Note on the swimming of slender fish. *Journal of Fluid Mechanics* **9** : 305-317.

[121] Lilliefors, H.W., 1967, On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown. *Journal of the American Statistical Association* **62** : 399-402.

[122] Lokerson, D.T., 1968, Drag device. *United States Patent Office* **US 3374973**.

[123] Lhuissier, H., Villermaux, E., 2009, Soap films burst like flapping flags. *Physical Review Letters* **103** : 054501.

[124] Lucarini, V., Faranda, D., Turchetti, G., Vaienti, S., 2012, Extreme value theory for singular measures. *Chaos* **22** : 023135.

[125] Mahadevan, L., Shaw, J., 2008, The Physics of the familiar. *Harvard Magazine, March-April* : 46-52.

[126] Mandre, S., Mahadevan, L., 2010, A generalized theory of viscous and inviscid flutter. *Procee-*

dings of the Royal Society A **466** : 141-156.

[127] Manneville, P., 2004, *Instabilités, chaos et turbulence. Éditions de l'École Polytechnique*.

[128] Martin, A., 2006, Experimental study of drag from a fluttering flag. Master thesis, *Oklahoma State University*.

[129] Martin, J., consulté en 2012, Énergies éoliennes. *Techniques de l'Ingénieur* **B 8 585**.

[130] Matas, J.-P., Cartellier, A., 2010, Flapping instability of an atomized liquid jet. *Proc. ASME 3rd Joint US-European Fluids Engineering Summer Meeting*.

[131] Michelin, S., Llewellyn Smith, S.G., Glover, B.J., 2008, Vortex shedding model of a flapping flag. *Journal of Fluid Mechanics* **617** : 1-10.

[132] Michelin, S., Llewellyn Smith, S.G., 2010, Falling cards and flapping flags : understanding fluid-solid interactions using an unsteady point vortex model. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* **24** : 195-200.

[133] Michelin, S., Doaré, O., 2013, Energy harvesting efficiency of piezoelectric flags in axial flows. *Journal of Fluid Mechanics* **714** : 489-504.

[134] Miles, J., 1957, On the generation of surface waves by shear flows. *Journal of Fluid Mechanics* **3** : 185–204.

[135] Moretti, P.M., Divone, L.V., 1986, Modern windmills. *Scientific American* **254** : 88-96.

[136] Moretti, P.M., 2003, Tension in fluttering flags. *International Journal of Acoustics and Vibration* **8** : 227-230.

[137] Morris-Thomas, M.T., Steen, S., 2009, Experiments on the stability and drag of a flexible sheet under in-plane tension in uniform flow. *Journal of Fluids and Structures* **25** : 815-830.

[138] Müller, U.K., 2003, Fish'n flag. *Science* **302** : 1511-1512.

[139] Munk, M.M., 1924, The aerodynamic forces on airship hulls. *National Advisory Committee for Aeronautics*, Report **184** : 451-468.

[140] Naudascher, E., Rockwell, D., 2005, Flow-induced vibrations. An engineering guide. *Dover*.

[141] Nayfeh, A.H., Mook, D.T., 1995, Nonlinear oscillations. *Wiley Classics Library*.

[142] New Zealand Standard, 2011, Structural design actions. Part 2. Wind actions. *Standards Australia* :92.

[143] Packard, N.H., Crutchfield, J.P. Farmer, J.D., Shaw, R.S., 1980, Geometry from a time series. *Physical Review Letters* **45** : 712-716.

[144] Païdoussis, M.P., 1998, Fluid-structure interactions : slender structures and axial flow. Volume 1. *Elsevier*.

[145] Païdoussis, M.P., 2004, Fluid-structure interactions : slender structures and axial flow. Volume 2. *Elsevier*.

[146] Pedley, T.J., Hill, J., 1999, Large-amplitude undulatory fish swimming : fluid mechanics coupled to internal mechanics. *The Journal of Experimental Biology* **202** : 3431-3438.

[147] Peters, K., 1940, Flatterschwingungen von Überfallstrahlen und Fahnen. Technischen Hochschule München, zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Abhandlung.

[148] Phillips, O.M., 1977, The dynamics of the upper ocean. *Cambridge University*.

[149] Plateau, J., 1873, Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. *Gauthier-Villars*.

[150] Platoff, A.M., 1993, Where no flag has gone before : political and technical aspects of placing

a flag on the moon. *NASA Contractor Report 188251*.

[151] Podvin, B., 2001, Introduction à la décomposition orthogonale aux valeurs propres. *Université Paris-Sud*.

[152] Poincaré, H., 1890, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica* **13** : 3–270.

[153] Poincaré, H., 1902, La science et l'hypothèse. *Flammarion* : 171-172.

[154] Prandtl, L., 1899, Kipp Erscheinung. *Nürnberg, Buchdruckerei Robert Stich* : 1-75.

[155] Prandtl, L., 1952, Essentials of fluid dynamics. *Hafner* : 77-80.

[156] Py, C., 2005, Couplage entre la dynamique du vent et le mouvement d'un couvert végétal. Thèse de doctorat, *École Polytechnique*.

[157] Lord Rayleigh, 1878, On the instability of jets. *Proceedings of the London Mathematical Society* **10** : 4-13.

[158] Lord Rayleigh, 1915a, The principle of similitude. *Nature* **95** : 66-68.

[159] Lord Rayleigh, 1915b, On the resistance experienced by small plates exposed to a stream of fluid. *Philosophical Magazine* **30** : 179-181.

[160] Ristroph, L., Zhang, J., 2008, Anomalous hydrodynamic drafting of interacting flapping flags. *Physical Review Letters* **101** : 194502.

[161] Rocard, Y., 1943, Dynamique générale des vibrations. *Masson*.

[162] Roman d'Alexandre, 1344, Folios 49 et 81. *Bodleian Library, Oxford*.

[163] Sarpkaya, T., 1978, Fluid forces on oscillating cylnders. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division of ASCE* **104** : 275-290.

[164] Sarpkaya, T., 1979, Vortex-induced oscillations. *Journal of Applied Mechanics* **46** : 241-258.

[165] Sawada, T., Hisada, T., 2006, Fluid-structure interaction analysis of a two-dimensional flag-in-wind problem by the ALE finite element method. *JSME International Journal* **49** : 170-179.

[166] Schouveiler, L., Eloy, C., 2009, Coupled flutter of parallel plates. *Physics of Fluids* **21** : 081703.

[167] Semeraro, O., Bellani, G., Lundell, F., 2012, Analysis of time resolved PIV measurements of a confined turbulent jet using POD and Koopman modes. *Experiments in Fluids* **53** : 1203–1220.

[168] Shelley, M.J., Vandenberghe, N., Zhang, J., 2005, Heavy flags undergo spontaneous oscillations in flowing water. *Physical Review Letters* **94** : 094302.

[169] Shelley, M.J., Zhang, J., 2011, Flapping and bending bodies interacting with fluid flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* **43** : 449-465.

[170] Shukla, S., Govardhan, R.N., Arakeri, J.H., 2009, Flow over a cylinder with hinged-splitter plate. *Journal of Fluids and Structures* **25** : 713-720.

[171] Singh, K., Michelin, S., de Langre, E., 2012, The effect of non uniform damping on flutter in axial flow and energy harvesting strategies. *Proceedings of the Royal Society A* **468** : 3620-3635.

[172] Skop, R.A., Griffin, O.M., 1973, An heuristic model for determining flow-induced vibrations of offshore structures. *5th Offshore Technology Conference* **1843**.

[173] Skop, R.A., Balasubramanian, S., 1997, A new twist on an old model for vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures* **11** : 395-412.

[174] Sonin, A.A., 2003, A generalization of the Π-theorem and dimensional analysis. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **101** : 8525–8526.

[175] Stone, B.N., Lucey, A.D., Howell, R.M., 2013, The fluid-structure interaction of a torsional-

spring-mounted beam in air flow. *Abstract*.

[176] Takens, F., Mañé, R., 1981, Dynamical systems and turbulence. In : Rand, R., Young, L.S., Warwick notes in mathematics. *Springer*.

[177] Taneda, S., 1968, Waving motions of flags. *Journal of the Physical Society of Japan* **24** : 392-401.

[178] Tang, D.M., Yamamoto, H., Dowell, E.H., 2003, Flutter and limit cycle oscillations of two-dimensional panels in three-dimensional axial flow. *Journal of Fluids and Structures* **17** : 225-242.

[179] Tang, L., 2007, The dynamics of two-dimensional cantileverd flexible plates in axial flow and a new energy harvesting concept. Ph.D. thesis, *McGill University*.

[180] Tang, L., Païdoussis, M.P., 2007, On the instability and the post-critical behaviour of two-dimensional cantilevered flexible plates in axial flow. *Journal of Sound and Vibration* **305** : 97-115.

[181] Tang, L., Païdoussis, M.P., Jiang, J., 2009, Cantilevered flexible plates in axial flow : energy transfer and the concept of flutter-mill. *Journal of Sound and Vibration* **326** : 263-276.

[182] Taylor, G.W., Burns, J.R., Kammann, S.M., Power, W.B., Welsh, T.R., 2001, The energy harvesting eel, a small subsurface ocean-river power generator. *Journal of Oceanic Engineering* **26** : 539-547.

[183] Thoma, D., 1939a, Warum flattert die Fahne ? *Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule Münschen* **9** : 30-34.

[184] Thoma, D., 1939b, Das schlenkernde Seil. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanic* **19** : 320-321.

[185] Thompson, D'A.W., Y., 1942, On Growth and Form. *Cambridge University Press* : 1027.

[186] Timoshenko, S.P., Gere, J.M., 1963, Theory of elastic stability. Second edition, *McGraw-Hill* : 103.

[187] Touzé, C., Bilbao, S., Cadot, O., 2012, Transition scenario to turbulence in thin vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration* **331** : 412-433.

[188] Trefethen, L.N., Bau, D., 1997, Numerical linear algebra. *Society for Industrial and Applied Mathematics*.

[189] Triantafyllou, G.S., 1992, Physical condition for absolute instability in inviscid hydroelastic coupling. *Physics of Fluids* **4** : 544-552.

[190] Uno, M., 1973, Fluttering of flexible bodies. *Journal of the Textile Machinery Society of Japan* **26** : 73-79.

[191] Vandeparre, H., Piñeirua, M., Brau, F., Roman, B., Bico, J., Gay, C., Bao, W., Lau, C.N., Reis, P.M., Damman, P., 2011, Wrinkling hierarchy in constrained thin sheets from suspended graphene to curtains. *Physical Review Letters* **106** : 224301.

[192] Villermaux, E., Clanet, C., 2002, Life of a flapping liquid sheet. *Journal of Fluid Mechanics* **462** : 341-363.

[193] Watanabe, Y., Suzuki, S., Sugihara, M., Sueoka, Y., 2002a, An experimental study of paper flutter. *Journal of Fluids and Structures* **16** : 529-542.

[194] Watanabe, Y., Isogai, K., Suzuki, S., Sugihara, M., 2002b, A theoretical study of paper flutter. *Journal of Fluids and Structures* **16** : 543-560.

[195] Weisskopf, V.F., 1972, The significance of science. *Science* **176** : 138-146.

[196] Weisskopf, V.F., 1975, Of atoms, mountains, and stars : a study in qualitative physics. *Science*

187 : 605-612.

[197] Wheeler, W.N., 1980, Effect of boundary layer transport on the fixation of carbon by the giant kelp *macrocystis pyrifera*. *Marine Biology* **56** : 103-110.

[198] Wilk, A., Skuta, M., 2009, Laboratory tests of the aerodynamic drag coefficient of the flag as a body with low stiffness. *Task Quarterly* **13** : 5-14.

[199] Williamson, C.H.K, Govardhan, R., 2004, Vortex-induced vibrations. *Annual Review of Fluid Mechanics* **36** : 413-455.

[200] Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A., 1985, Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D* **16** : 285-317.

[201] Xia, Y., 2012, Récupération d'énergie par drapeau piézoélectrique. Master thesis, *École Polytechnique*.

[202] Xia, Y., Michelin, S., Doaré, O., 2013, Inductive effects on energy harvesting piezoelectric flag. *21ème Congrès Français de Mécanique* : 319-329.

[203] Yadykin, Y., Tenetov, V., Levin, D., 2001, The flow-induced vibration of a flexible strip hanging vertically in a parallel flow. Part 1 : temporal aeroelastic instability. *Journal of Fluids and Structures* **15** : 1167-1185.

[204] Yamaguchi, N., Yokota, K., Tsujimoto, Y., 2000a, Flutter limits and behaviors of a flexible thin sheet in high-speed flow - I : Analytical method for prediction of the sheet behavior. *Journal of Fluids Engineering* **122** : 65-73.

[205] Yamaguchi, N., Sekiguchi, T., Yokota, K., Tsujimoto, Y., 2000b, Flutter limits and behaviors of a flexible thin sheet in high-speed flow - II : Experimental results and predicted behaviors for low mass ratios. *Journal of Fluids Engineering* **122** : 74-83.

[206] Young, T., 1845, A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. *Taylor and Walton*.

[207] Yu, Y.T., 1945, Virtual masses of rectangular plates and parallelepipeds in water. *Journal of Applied Physics* **16** : 724-729.

[208] Yu, Z., Wang, Y., Shao, X., 2012, Numerical simulations of the flapping of a three-dimensional flexible plate in uniform flow. *Journal of Applied Physics* **331** : 4448-4463.

[209] Zhang, J., Childress, S., Libchaber, A., Shelley, M., 2000, Flexible filaments in a flowing soap film as a model for one-dimensional flags in a two dimensional wind. *Nature* **408** : 835-839.

[210] Zhang, C., Liu, N., Huang, L., 2014, Effect of three-dimensionality on the flutter threshold of a cantilever plate. *The 21st International Congress on Sound and Vibration*.

[211] Zhao, W., Païdoussis, M.P., Tang, L., Liu, M., Jiang, J. 2012, Theoretical and experimental investigations of the dynamics of cantilevered flexible plates subjected to axial flow. *Journal of Sound and Vibration* **331** : 575-587.

[212] Zhu, L., Peskin, C.S., 2002, Simulation of a flapping flexible filament in a flowing soap film by the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics* **179** : 452-468.

[213] Zhu, L., Peskin, C.S., 2003, Interaction of two flapping filaments in a flowing soap film. *Physics of Fluids* **15** : 1954-1960.

[214] Zhu, L., 2009, Interaction of two tandem deformable bodies in a viscous incompressible flow. *Journal of Fluid Mechanics* **635** : 455-475.

[215] Zshokke, F., 1919, Der Flug der Tiere. (Le vol des animaux.) *Springer*.

Résumé

En flottant, les drapeaux puisent l'énergie cinétique du vent et produisent des oscillations périodiques. Utiliser des drapeaux pour générer de l'électricité est donc une perspective rendue possible par le flottement. Partant de ce principe très simple, cette thèse porte sur la dynamique des drapeaux dans le vent.

En soufflerie, nous étudions les efforts qui s'appliquent sur le mât de drapeaux flottants, en termes de fluctuations de moment et de traînée. En particulier, nous observons de fortes variations d'efforts entre les différents régimes de flottement caractérisés par un nombre constant de nœuds de vibration. Un modèle de drapeau résolu numériquement par une méthode de Galerkin nous montre que lors des transitions entre les régimes de flottement, le moment appliqué au mât diminue fortement du fait de la diminution de la courbure du drapeau à l'encastrement.

Lorsque le mât du drapeau est lui-même un oscillateur d'inertie et de raideur paramétrable, nous constatons un couplage fort entre le mouvement du drapeau et du mât avec un phénomène d'accrochage fréquentiel. Nous étudions ce couplage expérimentalement, et nous montrons qu'un nombre de "raideur-amortissement" pilote la rotation du mât. Notamment, nous obtenons un dispositif qui génère des rotations de 80° crête-à-crête à des vitesses de vent de l'ordre de 10 m/s.

Abstract

When flags flutter, they harvest the wind kinetic energy for producing periodic oscillations. Using flags for generating energy is then possible with flutter. Starting from this simple principle, this thesis deals with flag dynamics in the wind.

In a wind tunnel, we study the forces on the flagpole of fluttering flags, focusing on the fluctuations of the flapping moment and drag. In particular, we observe strong variations of forces between different regimes of flutter characterized by a constant number of nodes. A model for flags is solved numerically with a Galerkin method and shows that during transitions between flutter regimes, the moment applied to the flagpole decreases because of the decrease of the flag curvature at the flagpole.

When the flagpole is an oscillator with configurable inertia and stiffness, we report a strong coupling between the motion of the flag and its flagpole, with a frequency lock-in phenomenon. We study this coupling experimentally, and we show that a "stiffness-damping" parameter regulates the flagpole rotation. Notably, we design a coupling generating peak-to-peak rotations of 80° at wind speed of the order of 10 m/s.