

École polytechnique  
Laboratoire d'Hydrodynamique



Thèse présentée pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**  
spécialité : mécanique

par

Christian Jean RUYER-QUIL

---

*Dynamique d'un film mince s'écoulant  
le long d'un plan incliné*

---

soutenue le 29 novembre 1999 devant le jury composé de :

M. François CHARRU	président
M. Frédéric DIAS	rapporteur
M. Uwe EHRENSTEIN	rapporteur
M. Paul MANNEVILLE	directeur de thèse
M. Manuel G. VELARDE	examineur
M. Stéphane ZALESKI	examineur

École polytechnique  
Laboratoire d'Hydrodynamique



Thèse présentée pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**  
spécialité : mécanique

par

Christian Jean RUYER-QUIL

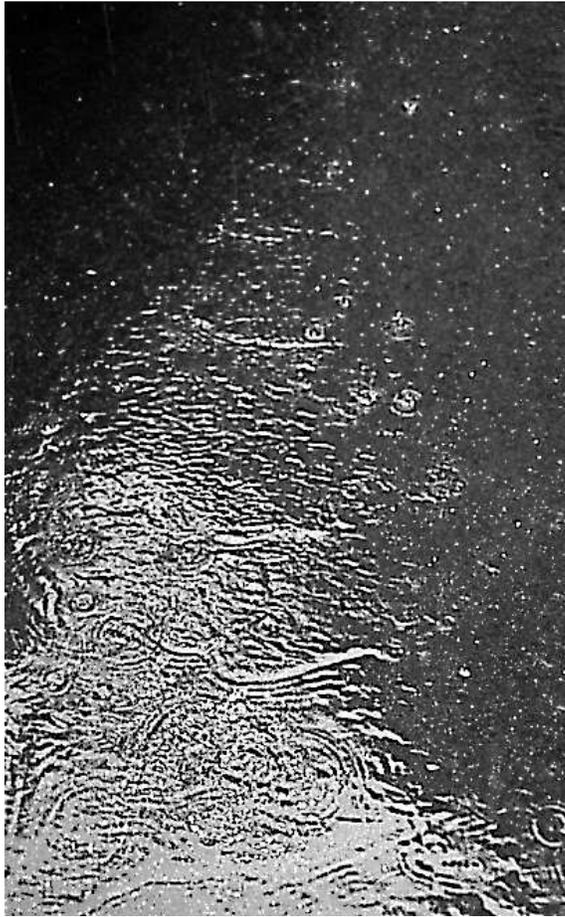
---

*Dynamique d'un film mince s'écoulant  
le long d'un plan incliné*

---

soutenue le 29 novembre 1999 devant le jury composé de :

M. François CHARRU	président
M. Frédéric DIAS	rapporteur
M. Uwe EHRENSTEIN	rapporteur
M. Paul MANNEVILLE	directeur de thèse
M. Manuel G. VELARDE	examineur
M. Stéphane ZALESKI	examineur



film d'eau le long d'un trottoir un jour de pluie

# Remerciements

Plus de trois années se sont écoulées depuis mon arrivée au LadHyX. La chaude ambiance et la bonne humeur qui y règnent ont rendu cette période de ma vie fort agréable.

Mes remerciements vont en premier lieu à Paul Manneville qui m’a initié au métier de chercheur. Sa très grande disponibilité, ses excellents conseils et ses critiques avisées ont considérablement contribué à valoriser mon travail. Ses encouragements et son soutien constants m’ont été d’une aide précieuse. Ses nombreuses relectures ont permis de transformer un texte touffu et mal ficelé en un manuscrit présentable. Enfin, bien que son influence m’ait «contaminé d’un virus grave qui se manifeste par la recherche obsessionnelle d’une présentation typographique toujours améliorée»<sup>1</sup>, Paul a su me communiquer sa passion pour la recherche et la physique non-linéaire en particulier. Je lui suis redevable de beaucoup et peu de choses auraient été possibles sans lui.

Messieurs Frédéric Dias et Uwe Ehrenstein m’ont fait l’honneur de rapporter sur cette thèse. Leurs remarques précieuses m’ont grandement aidé à améliorer la lisibilité du manuscrit. Qu’ils veuillent bien trouver ici l’expression de ma gratitude.

Monsieur François Charru a bien voulu accepter de présider mon jury. Ses remarques quant aux mécanismes de l’instabilité primaire ont nourris ma réflexion et ont été le point de départ de nombreuses corrections du chapitre 2. Je tiens à lui exprimer ma reconnaissance.

Je remercie Monsieur Manuel G. Velarde pour avoir fait le déplacement depuis Madrid et avoir exprimé tant d’intérêt pour mon travail, ainsi que Monsieur Stéphane Zaleski pour avoir accepté d’examiner cette thèse.

Monica Romeo et Chris Jones m’ont initié au logiciel AUTO au cours de l’école d’été “Nonlinear Oscillations Waves and Patterns” 1997 à Cork. Plusieurs figures de ce manuscrit ont été empruntées à l’excellent travail de mes camarades de promotion Hélène Émery et Olivier Brosse [45]. La qualité de leurs expériences a suscité mon intérêt pour le sujet. Qu’ils trouvent ici mes sincères remerciements.

J’aimerais également remercier Patrick Huerre pour son accueil au sein de son laboratoire, son aide et ses encouragements. Ma reconnaissance va de même à Jean-Marc Chomaz pour ses précieux conseils et sa bonne humeur intarissable. Burt Tilley, par sa grande connaissance du sujet, m’a aussi beaucoup aidé au début de ce travail. Jacques Webert, Ivan Delbende et Carlo Cossu m’ont fait profiter de leurs connaissances informatiques. Je les en remercie.

---

<sup>1</sup>Paul Manneville, *Débuter en T<sub>E</sub>X et L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*, Paris, Ellipes, 1997, p. 101

Philippe Gondret et Marc Rabaud du laboratoire FAST, ainsi que Jean-Christophe Houver du département de physique de Paris Sud ont usé de patience envers moi et m'ont aidé à terminer ma rédaction de thèse dans de bonnes conditions. Je leur en sais gré.

Je tiens à exprimer ma gratitude à toute l'équipe du LadHyX, Claudiu, qui sut s'adapter au désordre régnant sur mon bureau, Cornel, Pierre, Benoît, Anaël, Paul, les deux Olivier, François, Stéphanie, Thomas, Sabine, Antoine, Tonio et bien sûr Thérèse, dont la joie, la bonne humeur... et les crumbles ont parsemé ces années de rayons de soleil.

Enfin, qu'il me soit permis d'exprimer ma reconnaissance à mes amis, tout d'abord à mes colocataires Olivier, Stéphane et Fili, qui ont patiemment supporté mon enthousiasme pour la recherche, à Christian, Richard et René, qui subirent stoïquement la nervosité des derniers jours, à Frédéric, Thierry, Isabelle et Géraldine sans l'aide desquels le pot aurait été beaucoup moins réussi. Je tiens aussi à remercier toute ma famille et particulièrement mes parents pour leur amour, leur aide et leurs encouragements. Pour finir, que tous ceux qui m'ont fait l'honneur et le plaisir d'assister à ma soutenance trouvent ici ma profonde gratitude : la chaleur de leur soutien m'a motivé à faire de mon mieux.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Notations</b>	<b>8</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
1.1 Rappel historique : les travaux de Kapitza & Kapitza . . . . .	10
1.2 Phénoménologie . . . . .	13
1.3 Modélisation : un bref état des lieux . . . . .	17
1.4 Plan et objectifs de l'étude . . . . .	22
<b>2 Mécanismes de l'instabilité primaire</b>	<b>24</b>
2.1 Position du problème . . . . .	24
2.2 Paramètres et équations adimensionnées . . . . .	26
2.3 Équation d'Orr–Sommerfeld . . . . .	29
2.4 Étude asymptotique à petits nombres d'onde . . . . .	31
2.5 Bilan de l'énergie contenue dans la perturbation . . . . .	34
2.6 Mécanismes de l'instabilité . . . . .	36
<b>3 Brève revue des principaux modèles</b>	<b>41</b>
3.1 Équations de couche limite . . . . .	41
3.2 Équations de surface libre . . . . .	44
3.3 Les modèles faiblement non-linéaires . . . . .	51
3.3.1 L'équation de Korteweg-de Vries . . . . .	52
3.3.2 L'équation de Kuramoto-Sivashinsky . . . . .	52
3.4 Modèles intégraux de couche limite . . . . .	54
<b>4 Formulation des modèles</b>	<b>60</b>
4.1 Méthodes aux résidus pondérés . . . . .	60
4.1.1 Méthodologie et choix des fonctions tests . . . . .	61
4.1.2 Méthode des sous-domaines . . . . .	64
4.1.3 Méthode intégrale-collocation . . . . .	65
4.1.4 Méthode de collocation . . . . .	65
4.1.5 Méthode des moments . . . . .	66
4.1.6 Méthode de Galerkin . . . . .	66
4.1.7 Comparaison et conclusion . . . . .	67
4.2 Formulation au deuxième ordre . . . . .	68

4.2.1	Choix d'un ensemble de fonctions-tests . . . . .	68
4.2.2	Choix des inconnues du problème . . . . .	71
4.2.3	Formulation des modèles . . . . .	72
4.3	Formulation tridimensionnelle des modèles . . . . .	77
4.3.1	Formulation à l'ordre $\epsilon$ . . . . .	77
4.3.2	Formulation à l'ordre $\epsilon^2$ . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Ondes stationnaires dans leur référentiel</b>	<b>84</b>
5.1	Formulation du problème . . . . .	85
5.1.1	Changement de variables . . . . .	85
5.1.2	Les systèmes dynamiques étudiés . . . . .	88
5.2	Les points fixes et leur stabilité . . . . .	90
5.2.1	Motivation . . . . .	90
5.2.2	Symétries . . . . .	92
5.2.3	Modèle au premier ordre . . . . .	93
5.2.4	Modèle au deuxième ordre simplifié . . . . .	94
5.3	Orbites périodiques . . . . .	101
5.4	Orbites homoclines . . . . .	104
5.4.1	Comparaison et validation des modèles . . . . .	104
5.4.2	Influence de l'inclinaison du plan et de la dispersion visqueuse sur la forme des ondes solitaires . . . . .	110
5.4.3	Chaos homocline . . . . .	112
5.5	Ondes stationnaires à débit ou épaisseur fixé . . . . .	116
5.5.1	Ondes stationnaires à épaisseur fixée : comparaison avec les études antérieures . . . . .	116
5.5.2	Ondes stationnaires à débit fixé : comparaison avec les expériences . . . . .	120
5.6	Annexe : Systèmes de dimension supérieure à trois . . . . .	124
5.6.1	Modèle au second ordre . . . . .	124
5.6.2	Modèles de dimension quatre . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Stabilité des ondes bidimensionnelles</b>	<b>130</b>
6.1	Analyse de Floquet . . . . .	131
6.2	Convergence . . . . .	134
6.3	Comparaisons avec les résultats antérieurs . . . . .	139
6.4	Comparaisons avec l'expérience . . . . .	141
<b>7</b>	<b>Évolution spatiale d'ondes forcées</b>	<b>147</b>
7.1	Analyse de stabilité linéaire . . . . .	147
7.2	Ondes forcées périodiquement . . . . .	149
7.3	Forçage aléatoire . . . . .	154
<b>8</b>	<b>Approches numériques</b>	<b>159</b>
8.1	Recherche des familles d'ondes stationnaires . . . . .	159
8.1.1	Représentation dans l'espace spectral . . . . .	159
8.1.2	Traitement des erreurs de repliement . . . . .	161

8.1.3	Formulation numérique par méthode pseudo-spectrale . . . . .	164
8.1.4	Méthode de continuation prédicteur-correcteur . . . . .	165
8.1.5	Correcteur utilisant un algorithme de Newton . . . . .	167
8.1.6	Adaptation du pas du prédicteur . . . . .	168
8.1.7	Obtention d'un point initial sur la courbe . . . . .	169
8.1.8	Recherche des branches bifurquées . . . . .	170
8.2	Simulations spatio-temporelles . . . . .	172
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>177</b>
<b>10</b>	<b>Annexe : Eur. Phys. J. B <u>6</u>, 277–292 (1998)</b>	<b>180</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>197</b>
	<b>Résumé – summary</b>	<b>205</b>

# Notations

GRANDEURS	NOTATIONS, EXPRESSIONS
angle d'inclinaison du plan	$\beta$
coefficient de pente	$B = \cot \beta$
masse volumique	$\rho$
viscosité dynamique	$\mu$
viscosité cinématique	$\nu$
accélération de la gravité	$g$
tension superficielle	$\gamma$
épaisseur du film	$h$
épaisseur de substrat	$h^*$
coordonnées d'espace	$x, y, z$
vitesse	$u, v, w$
débit instantané local	$q = \int_0^h u dy$
débit dans le sens de l'écoulement, transverse	$q_{\parallel} \equiv q, q_{\perp}$
solution de Nusselt	$h_N, u_N, q_N$
nombre de Reynolds	$R = g \sin \beta h_N^3 / 3\nu^2$
nombre de Kapitza	$\Gamma = \gamma / [\rho\nu^{4/3} (g \sin \beta)^{1/3}]$
nombre de Weber	$W = \gamma / (\rho g h_N^2 \sin \beta)$
paramètre du film	$\epsilon$
corrections au profil de vitesse parabolique	$s_1, s_2$
nombre d'onde	$\alpha$
vitesse d'une onde	$c$
débit dans le référentiel en mouvement	$q_0 = q - c h$
rapport d'échelle	$\kappa = \Gamma^{1/3} h^{*-2/3}$
nombre de Reynolds réduit	$\delta = h^{*3} / \kappa = 3R / \kappa$
coefficient de pente réduit	$\zeta = B / \kappa$
dispersion visqueuse	$\eta = 1 / \kappa^2$
points fixes	$\mathbf{U}_I, \mathbf{U}_{II}$
moyenne sur une longueur d'onde	$\langle \cdot \rangle$
décalage en nombre d'onde (ch. 6)	$\varsigma$
nombre d'onde transverse	$\alpha_z$

# Chapitre 1

## Introduction

L'instabilité est nécessaire pour progresser.  
Si on reste sur place, on recule.

Coluche

La compréhension de la turbulence est l'un des grands défis posés aux sciences de l'ingénieur car ni ses mécanismes internes ni les étapes conduisant à son apparition ne sont totalement maîtrisés. Ainsi il n'en existe pas de définition précise. Toutefois, on s'efforce de caractériser ce phénomène très varié par un certain nombre de propriétés telles que le degré de désordre du mouvement des particules fluides, l'imbrication d'une large gamme d'échelles dans l'écoulement ou encore un fort pouvoir mélangeant. D'où une acception assez large du terme partant de la turbulence faible ne faisant intervenir qu'un ensemble limité de degrés de liberté —*i.e.* de grandeurs fonction du temps ayant leur dynamique propre— jusqu'à la turbulence développée, très complexe et impliquant un grand nombre de degrés de liberté.

On peut encore tenter de voir ce phénomène sous l'angle des symétries des équations de Navier–Stokes et des conditions aux limites, le degré zéro étant alors un écoulement respectant, par exemple, la symétrie haut/bas et la translation en temps et en espace, et le degré le plus accompli de la turbulence étant un écoulement très désordonné et caractérisé par la restauration des symétries en un sens statistique [51]. D'où deux approches apparemment opposées de la turbulence, la première se fondant sur une description statistique de la turbulence développée homogène et isotrope, la deuxième ayant pour point de départ la cascade de brisures de symétrie conduisant au désordre, c'est à dire le problème de la *transition laminaire/turbulent*.

C'est dans ce dernier cadre que cette étude se place, à mi-chemin d'une description strictement temporelle, c.-à-d. à l'aide d'un système d'équations aux dérivées ordinaires dépendant du temps, et d'une approche purement statistique, dans un régime où l'écoulement peut être décrit par un ensemble d'équations aux dérivées partielles en temps et en espace de complexité réduite par rapport aux équations de Navier–Stokes, et appelé *modèle*. Cette situation correspond en général à la présence de *structures cohérentes*, rouleaux par exemple dans le cas de la convection, ou tourbillons alignés des couches de mélange ou des sillages, et entre dans le cadre de la

théorie du *chaos spatio-temporel* [32]. L'application du formalisme d'enveloppe aux équations rendant compte de l'évolution temporelle de l'amplitude des structures cohérentes, ou *équations d'amplitude* conduit alors à une ou plusieurs équations du type Ginzburg–Landau (1.3). Ici, l'apparition du désordre au sein des structures cohérentes peut se faire par le biais d'une instabilité de grande longueur d'onde que décrit l'équation de Kuramoto–Sivashinsky (1.4) et qui correspond à la brisure de l'invariance par translation du motif formé par les structures cohérentes.

L'écoulement d'un film mince visqueux s'écoulant par gravité le long d'un plan incliné constitue un problème de référence de la théorie du chaos spatio-temporel. En effet, il se caractérise par la présence d'une invariance par élévation uniforme de la surface libre qui joue alors le même rôle que l'invariance par translation dans le cas du formalisme d'enveloppe et conduit également à une équation de Kuramoto–Sivashinsky. Les ondes qui y sont observées ont alors une échelle de longueur beaucoup plus grande que leur épaisseur et les films minces tombants peuvent être rapprochés des couches limites transitionnelles pour lesquelles la taille de l'obstacle considéré est grande devant l'épaisseur de couche limite. Bien que les instabilités observées dans les films tombants soient d'origine interfaciale et ne proviennent pas du cisaillement à la paroi, les instabilités tridimensionnelles, qui y sont observées, sont similaires aux modes de Herbert (motifs en chevrons) ou de Klebanoff (instabilité synchrone) décrits dans les couches limites [82, 58]. Dans le cas des films minces, l'instabilité se produit à faible nombre de Reynolds d'où une grande cohérence de l'écoulement suivant l'épaisseur du film engendrée par la viscosité. Ceci rend possible l'élimination de la plupart des variables internes de l'écoulement, celles-ci étant alors asservies à l'évolution de la surface libre (et peut-être d'un nombre limité de quantités telles que le débit instantané local ou le cisaillement à la paroi). On y observe de plus une cascade de bifurcations assez bien ordonnée, ce qui offre l'espoir de comprendre les mécanismes conduisant de l'état de film uniforme, ou laminaire, à un état désordonné, ou turbulent au sens faible du terme.<sup>1</sup> Cet espoir semble plus ténu en ce qui concerne les couches limites transitionnelles car les nombres de Reynolds considérés sont bien plus importants et la modélisation plus difficile. Ainsi, les avancées attendues dans la compréhension de l'apparition du chaos au sein des films sont autant de précieux indices apportés au problème de la transition vers la turbulence dans les couches limites.

## 1.1 Rappel historique : les travaux de Kapitza & Kapitza

Probablement à cause de leur intérêt en génie chimique, les films minces liquides s'écoulant le long d'une paroi inclinée sont étudiés très tôt. Nusselt [88] résout le problème laminaire avec une surface uniforme dès 1916 et plusieurs expériences sont montées dans les années 30 et 40.

C'est toutefois avec les travaux de Kapitza & Kapitza [68] que la dynamique non-

---

<sup>1</sup>ou évolution spatio-temporelle chaotique tel que définie par Manneville [83]

linéaire à faible nombre de Reynolds et en particulier la formation d'ondes de grande longueur ou *ondes solitaires* attire l'attention. Auparavant, Piotr Leonidovich Kapitza (1894-1984) [105, 13] s'est distingué avec les premières réalisations de champs magnétiques de très grande intensité, la liquéfaction de l'hélium, la découverte de l'hélium superfluide. Ses travaux en physique des basses températures lui valent le prix Nobel en 1978. Émigré en Angleterre en 1921 après la mort de sa première femme et de deux enfants en bas âge puis retenu contre son gré à Moscou en 1934, il est forcé d'y fonder l'Institut pour les Problèmes Physiques, qui portera ensuite son nom, sur le modèle du laboratoire Mond qu'il dirige alors en Angleterre. Il n'est autorisé à retourner en Angleterre que trente deux ans plus tard. Renvoyé de son poste de directeur après son refus de participer au projet russe de construction d'armes nucléaires sous la direction de Beria,<sup>2</sup> Kapitza s'installe dans sa dacha de Nikolina Gora qui est rebaptisée avec humour Izba pour les Problèmes Physiques. C'est là qu'avec des moyens de fortune et aidé de son fils Sergueï, né en 1928 et lui-même physicien accompli, il se tourne vers l'hydrodynamique et les écoulements de fluides visqueux le long d'une paroi inclinée. Le dispositif expérimental réalisé consiste en un tube de diamètre 2,5 cm. Le liquide (eau ou alcool) est injecté sur la surface du tube par un système de capuchon conique placé sur le sommet du tube. L'espace entre le capuchon et le tube, quelques dizaines de microns, est contrôlé par plusieurs joints. Kapitza conçoit pour cette expérience un ingénieux système de visualisation par ombroscopie du profil des ondes.<sup>3</sup> Une source de lumière est placée à 1,2 m du tube et illumine de manière rasante la surface du film. Un miroir incliné permet ensuite d'agrandir le profil du film dont l'épaisseur, uniforme à la sortie de la buse et notée<sup>4</sup>  $h_N$  est de l'ordre de cent microns. Un forçage par jet d'air couplé à un stroboscope permet d'illuminer la surface du film à la fréquence des ondes forcées et d'obtenir ainsi une image fixe. Le grand rapport entre l'épaisseur du film et le rayon du tube rend possible de négliger les effets de courbure et d'assimiler le tube à une paroi plane verticale (débit moyen par unité de longueur adimensionné par la viscosité cinématique) utilisés par Kapitza & Kapitza sont choisis relativement faibles  $R < 20$ . Ils sont les premiers à observer les profils des ondes et mesurer leur vitesse de phase. Le mouvement ondulatoire de la surface libre ayant été jusqu'alors suggéré pour rendre compte de l'écart entre l'épaisseur du film observé et celle prédite par la théorie de Nusselt. À notre connaissance, Kapitza est également le premier à mentionner une méthode de visualisation par injection de fluorescéine et illumination par lumière ultraviolette utilisée ensuite avec succès [78]. On notera que les photos tirées de cette expérience servent toujours de référence aux études numériques des ondes forcées bidimensionnelles.

Toutefois, les apports de Kapitza à la compréhension des instabilités de films

---

<sup>2</sup>Ce n'était pas la première fois que Kapitza tenait tête au tout puissant N.K.V.D. ; déjà en 1938, au pire moment des purges précédant la deuxième guerre mondiale, il obtint, en écrivant directement à Staline, la libération de son ami Landau, alors accusé d'espionnage au profit de l'Allemagne.

<sup>3</sup>Kapitza était un expérimentateur hors pair. Il avait pour passe-temps de démonter et réparer les montres, fabriquant lui-même les pièces de rechange.

<sup>4</sup>en hommage à Nusselt



FIG. 1.1 – P.L. Kapitza avec son assistant S.I. Filimonov procédant à une expérience sur l'hélium superfluide, I.F.P., Moscou, 1940.

tombants ne se limitent pas au domaine expérimental. Kapitza s'intéresse également au régime ondulatoire stationnaire. Il est le premier à moyenner les équations en supposant un profil de vitesse semi-parabolique (cf. § 3.4 et note). Il obtient ainsi en première approximation la vitesse de phase des ondes presque sinusoïdales observées, soit trois fois la vitesse moyenne de l'écoulement. Par un raisonnement sur le bilan énergétique au sein de l'écoulement, Kapitza affirme que les ondes observées correspondent alors au minimum possible de l'épaisseur moyennée sur une période. Poursuivant son raisonnement Il obtient de plus une prédiction du seuil d'apparition des ondes pour une géométrie verticale

$$R_c = 0.61 \left[ \frac{\gamma^3}{g\rho^3\nu^4} \right]^{1/11}, \quad (1.1)$$

où  $\gamma$  est la tension de surface,  $\rho$ , la densité et  $\nu$  la viscosité cinématique. Malheureusement, cette formule s'est avérée fautive [7], le nombre de Reynolds critique de l'instabilité étant nul pour un plan vertical. La raison de cet échec se trouve dans le mécanisme de l'instabilité primaire mettant en jeu un déphasage introduit par l'inertie entre le mouvement de l'interface et la vorticité (cf. § 2.6). Or le raisonnement de Kapitza se fonde sur une dynamique relaxationnelle de l'écoulement dominée par la viscosité du fluide et ne peut rendre compte de ces subtils mécanismes. Toutefois, l'expérience montre que les ondes ne deviennent visibles sur le plan vertical qu'au-delà de la valeur prédite par (1.1). Trifonov & Tsveldub [112] ont en effet montré que la formule (1.1) correspondait à une brusque augmentation de l'amplitude et de la vitesse des ondes stationnaires dans leur référentiel en mouvement (cf. § 5.4 et fig. 5.11).

## 1.2 Phénoménologie

Après les travaux pionniers de Piotr et Serguei Kapitza, de nombreuses expériences sont conçues afin de décrire les instabilités de films minces tombants [12, 117, 110, 86, 91, 90, 1, 48, 116, 79, 80, 81, 82, 15]. Celles-ci peuvent se classer selon deux types :

Le premier type d'instabilité est un *mode de cisaillement* où le cisaillement moyen au sein du fluide joue un rôle prépondérant. Le profil de vitesse moyen n'admettant pas de point d'inflexion, reste stable à la limite inviscide selon le critère de Rayleigh [64]. L'instabilité est alors d'origine visqueuse. En effet, la viscosité permet le transfert d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations par le biais du travail du tenseur de Reynolds. Au delà du seuil d'instabilité, on observe la génération spontanée de spots turbulents qui finissent par envahir tout l'écoulement au fur et à mesure que le nombre de Reynolds croît. L'apparition de ce mode correspond à une inclinaison très faible du plan et à des nombres de Reynolds élevés, jusqu'à  $5 \cdot 10^4$  d'après Bertschy *et al.* [10]. Floryan *et al.* [48] ont tracé la courbe de stabilité marginale de ce mode pour une grande variété de fluides.

Le mode de cisaillement est déstabilisé en premier pour un angle  $\beta$  inférieur à  $0.5^\circ$  environ. Cependant, le mode de cisaillement peut encore influencer la dynamique du film à des angles beaucoup plus élevés. En effet son taux de croissance est généralement très élevé et de plus il a la possibilité de bifurquer à un nombre de Reynolds plus faible que sa valeur critique lorsque l'amplitude des perturbations introduites est suffisante, manifestation d'une bifurcation de Hopf *sous-critique* que l'on trouve également dans le cas d'un écoulement de Poiseuille plan [64]. Ainsi des spots turbulents ont été observés en réponse à un forçage d'amplitude finie jusqu'à  $\beta = 5^\circ$ . Ils ont alors des caractéristiques semblables à ceux rencontrés dans les couches limites transitionnelles [10]. Dans ces conditions, l'influence de la tension de surface ou de l'inclinaison du plan est négligeable sur les observations expérimentales.

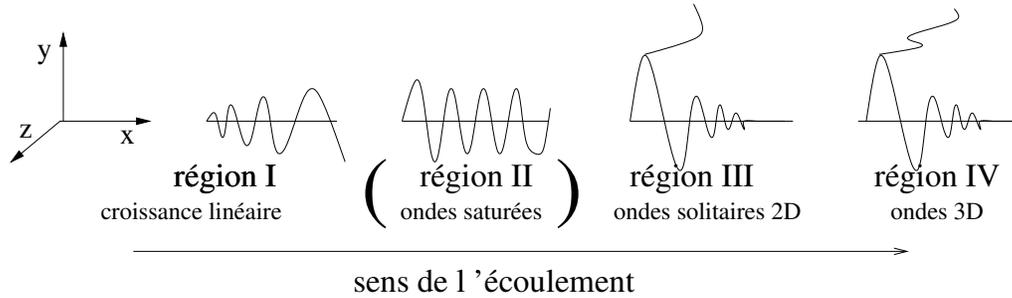
Le deuxième mode d'instabilité rencontré est un *mode d'interface* lié à la déstabilisation de la surface libre par la gravité. La plupart des études expérimentales de ce mode ont été faites pour des nombres de Reynolds modérés ( $R \leq 300$ )<sup>5</sup> et des tensions de surface importantes (nombre de Weber élevé). On observe alors de longues ondes interfaciales dominées par la capillarité et la gravité. Le mode d'interface bifurque de manière supercritique à un nombre de Reynolds critique égal à  $(5/6) \cot \beta$  (cf. §2.4). Ce dernier diminue quand l'inclinaison du plan augmente jusqu'à être nul pour un plan vertical. Le nombre d'onde critique  $\alpha_c$  est nul et les ondes observées ont toujours une grande longueur par rapport à l'épaisseur du film. La dynamique naturelle du film est très sensible au bruit extérieur (cf. Liu *et al.* [80]), les ondes observées sont très irrégulières et chaotiques. Celles-ci sont initialement bidimensionnelles et deviennent rapidement tridimensionnelles en aval. Afin de retarder l'apparition de ces *instabilités tridimensionnelles* et étudier avec soin les ondes stationnaires bidimensionnelles, on force le débit à l'entrée du montage expérimental

---

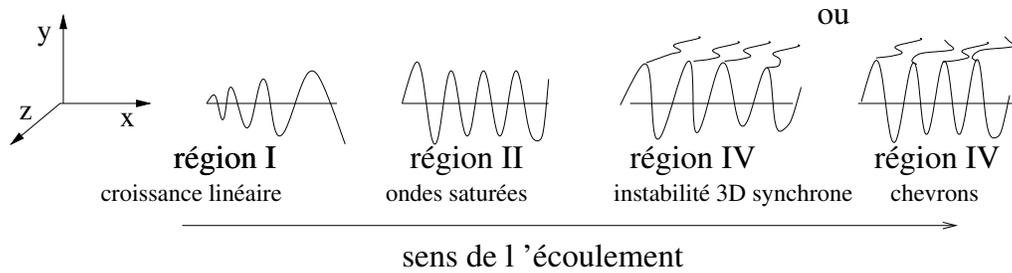
<sup>5</sup>En effet, pour de très faibles nombres de Reynolds, le film devient très fin et l'expérience est difficilement réalisable. Au contraire, pour de trop grands nombres de Reynolds, le film devient très rapidement turbulent.

(Alekseenko *et al.* [1], Liu & Gollub [79]) ou l'épaisseur du film (Emery & Brosse [45]). Liu *et al.* [80] ont vérifié que le forçage ne modifie pas la dynamique pleinement non-linéaire et tridimensionnelle en aval.

On peut alors distinguer dans l'évolution de ces ondes quatre phases (Chang [21]), correspondant à quatre régions distinctes du plan incliné (cf. fig 1.2). Celles-ci peuvent être plus ou moins observées selon le nombre de Reynolds et la fréquence de forçage au bord amont (cf. fig. 1.2 et fig. 1.3).



(a) basse fréquence ou près du seuil d'instabilité



(b) haute fréquence et loin du seuil d'instabilité

FIG. 1.2 – représentation schématique de l'évolution du film d'après réfs. [21] et [82]

La première région est le siège de la croissance des perturbations infinitésimales à l'entrée de l'écoulement (bruit ambiant). Par un processus de sélection linéaire, ces perturbations forment en aval une onde monochromatique propagative et bi-dimensionnelle, c.-à-d. invariante par translation dans la direction transverse à l'écoulement. Liu *et al.* [80] ont vérifié expérimentalement que cette première instabilité était convective.<sup>6</sup> Chaque perturbation infinitésimale et localisée est emportée par l'écoulement et amplifiée en aval mais elle ne subsiste pas dans le référentiel du

<sup>6</sup>Une instabilité est dite *absolue* si en un point du référentiel du laboratoire une perturbation croît au cours du temps. Le système se comporte alors comme un oscillateur et a sa propre dynamique. Dans le cas contraire, l'instabilité est dite *convective*. Les perturbations ne peuvent croître dans le référentiel du laboratoire et sont advectées vers l'aval. Le système se comporte alors comme un amplificateur de bruit [63, 64].

plan incliné. Les structures en aval sont alimentées par le bruit en amont. Pour de grandes tensions de surface et aux faibles nombres de Reynolds, Joo & Davis [65] ont démontré théoriquement cette nature convective en utilisant le développement aux petits nombres d'onde de Benney (cf. § 3.2). Celle-ci a été de plus confirmée par les études de Chang [26] et Brevdo *et al.* [14].

Puis l'onde monochromatique sature par des effets faiblement non-linéaires (deuxième phase). Par une interaction entre le mode fondamental instable et son harmonique qui, lui, est stable, les fronts se raidissent, la célérité diminue, la longueur d'onde est modifiée et le spectre de Fourier des perturbations s'élargit. Le profil des ondes persiste alors de manière quasi-stationnaire sur une distance relativement importante de l'ordre de dix fois la longueur d'onde avant de subir une deuxième transition.

Près du seuil et selon la fréquence de forçage  $f$ , on observe ensuite deux types d'évolution qui résultent d'*instabilités secondaires bidimensionnelles* [79]. Le premier est une modulation en onde longue caractéristique de l'instabilité de Benjamin-Feir ou d'Eckhaus (*sideband instability*). Le deuxième est la coalescence de certaines ondes voisines par un mécanisme d'instabilité sous-harmonique ou doublement de période (cf. fig. 1.3).

L'instabilité de Benjamin-Feir consiste en une résonance entre le fondamental  $f$ , une basse fréquence  $\nu f$ , et  $(1-\nu)f$ . On assiste alors à une modulation de l'amplitude des ondes. Celle-ci crée des défauts dans le train d'ondes initial et le coupe de manière intermittente en plusieurs morceaux. Liu & Gollub [79] ont noté une largeur très importante du pic de basse fréquence  $\nu f$  dont la présence persiste même sans forçage.

Dans le cas du scénario sous-harmonique, on observe une croissance des pics dans le spectre de Fourier de  $h$  correspondant aux fréquences  $nf/2$  ( $n = 1, 3, 5 \dots$ ) au détriment du pic de fréquence  $f$ . Les pics secondaires ont une largeur beaucoup plus importante que le pic du fondamental. À différents endroits de l'onde initiale, des crêtes voisines coalescent et la longueur d'onde double en moyenne. Les interactions entre les fréquences au sein de cette bande excitée sont la cause de l'irrégularité en espace et en temps de cette instabilité secondaire (cf. Cheng & Chang [31]). À la différence du scénario de cascade sous-harmonique ou cascade de Feigenbaum, classique dans l'étude du chaos temporel [83, 47], on ne rencontre pas d'autres doublements de période. La croissance du sous-harmonique est immédiatement suivie par la croissance de tout le spectre.

Pour un plan faiblement incliné, un nombre de Reynolds modéré et une forte tension superficielle<sup>7</sup>, Liu & Gollub [79] ont constaté expérimentalement que ces instabilités secondaires étaient convectives.

En l'absence de forçage, les ondes monochromatiques sélectionnées à l'issue de la première phase ont une fréquence correspondant aux ondes les plus amplifiées prévues par la théorie linéaire (cf. ch. 2) et correspondent au domaine où l'instabilité sous-harmonique prédomine [79].

Les défauts, qui apparaissent au sein des trains d'ondes saturées à l'issue de l'in-

---

<sup>7</sup>typiquement  $\beta = 6.4^\circ$ ,  $R = 23$  et  $W = 73$  (cf. § 2.2 pour la définition des paramètres)

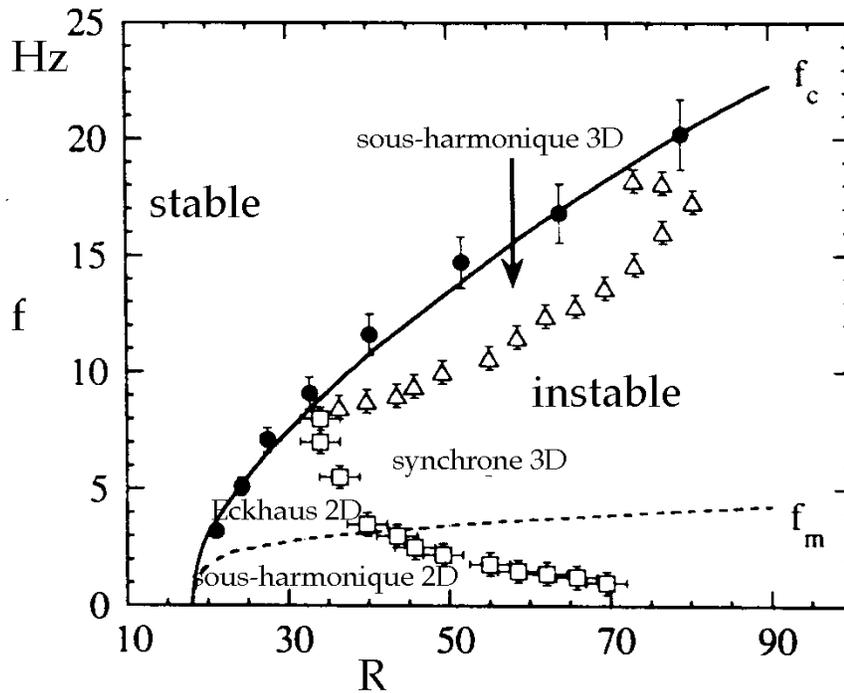


FIG. 1.3 – diagramme de stabilité dans le plan  $(f, R_K)$  pour  $\beta = 4^\circ$ ,  $\nu = 2.3$  cS, *i.e.*  $R_c = 11.9$  et  $\Gamma = 2341$ .  $f_c$  est la courbe de stabilité marginale et  $f_m$  la fréquence la plus amplifiée. L’instabilité d’Eckhaus 2D est observée près de la courbe de stabilité marginale tandis que l’instabilité sous-harmonique apparaît à plus basse fréquence. Les carrés délimitent la région où aucune instabilité 3D n’a été observée et dont la cause probable est la limitation des dimensions de l’expérience. Les triangles séparent les régions où instabilités synchrone et sous-harmonique 3D sont observées (d’après Liu *et al.* [82]; *N.B.* : le nombre de Reynolds  $R_K$  est défini à l’aide de la vitesse à l’interface et non de la vitesse moyenne d’où  $R_K = 3R/2$ ).

stabilité secondaire, croissent en amplitude, vitesse, et longueur. Ils prennent l’aspect de bosses en forme de larmes, aux fronts très raides et aux queues très étirées, précédées de vaguelettes de longueur d’onde proche de celle de l’onde monochromatique de la première phase et dont le nombre croît avec le nombre de Reynolds. Ces fronts plus espacés et plus rapides absorbent ensuite les ondes initiales et leur spectre s’élargit. La distance séparant deux bosses consécutives étant beaucoup plus grande que la taille de ces bosses, on les appelle *ondes solitaires* (cf. fig 1.4). La génération des ondes solitaires est irrégulière en espace et en temps et a été rapprochée par Pumir *et al.* [95] du *chaos homocline* à la Shilnikov [4, 54]. Leur amplitude et leur vitesse varient et on constate que la vitesse des fronts croît avec leur amplitude. Les fronts les plus rapides et les plus amples rattrapent et absorbent les autres (cf. Liu & Gollub [81]). La dynamique des ondes solitaires est ainsi très différente de celle des solutions de l’équation de Korteweg–de Vries ou *solitons* (cf. § 3.3.1), qui conservent leur identité en cas de collision. À faible fréquence de forçage, les ondes solitaires

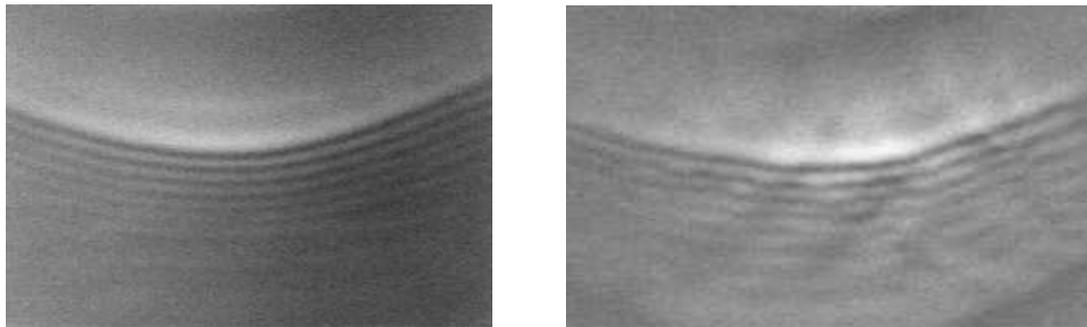


FIG. 1.4 – À gauche, front solitaire courbé ; à droite, instabilité d’une onde solitaire (d’après Émery & Brosse [45]).

apparaissent directement après la phase de croissance linéaire sans que la région II soit présente.

Les fronts solitaires sont relativement robustes et persistent sur une distance importante avant d’entrer dans la quatrième région de l’écoulement où des perturbations transverses (dans la direction  $z$ ) déstabilisent leurs crêtes.

À nombre de Reynolds plus élevé, les trains d’ondes saturées deviennent instables vis-à-vis des perturbations transverses et les instabilités observées sont alors tridimensionnelles et non plus bidimensionnelles. Liu *et al.* [82] ont constaté deux types d’*instabilités secondaires tridimensionnelles*.

L’une est une instabilité *sous-harmonique* qui apparaît près de la courbe de stabilité marginale. Les trains d’ondes saturées sont alors quasi-sinusoidaux et cette instabilité peut être interprétée comme la résonance faiblement non-linéaire du vecteur d’onde  $\alpha$  du fondamental avec deux vecteurs d’ondes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dont la projection suivant  $x$  vaut  $\alpha/2$  et tels que  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ . On observe alors des motifs en damiers ou chevrons ressemblant à des arêtes de poisson (*herringbone patterns*).

L’autre est une instabilité *synchrone* qui ne modifie pas la périodicité des ondes saturées avant un stade avancé. Celle-ci consiste en une modulation périodique de longueur d’onde  $\lambda_z$  de la profondeur des creux (ou vallées) du train d’onde, qui ne modifie pas la taille des crêtes. La longueur d’onde transverse  $\lambda_z$  est très grande devant l’épaisseur du film  $h_N$  et ne semble ne pas dépendre de la fréquence de forçage. En aval, les minima des modulations saturent tandis que leurs maxima atteignent la hauteur des crêtes. Ils se forment ainsi des rangées de dépressions isolées.

Dans les deux cas et pour une grande gamme de paramètres, la dynamique très loin en aval est à nouveau dominée par des trains d’ondes solitaires désordonnés qui apparaissent après une évolution assez compliquée du film [82].

### 1.3 Modélisation : un bref état des lieux

La recherche de modèles décrivant la dynamique des ondes à la surface d’un film tombant a été très active dès les années 1950 avec les travaux de Yih [120] et Benjamin [7, 8]. Les travaux ultérieurs peuvent être classés, un peu schématiquement,

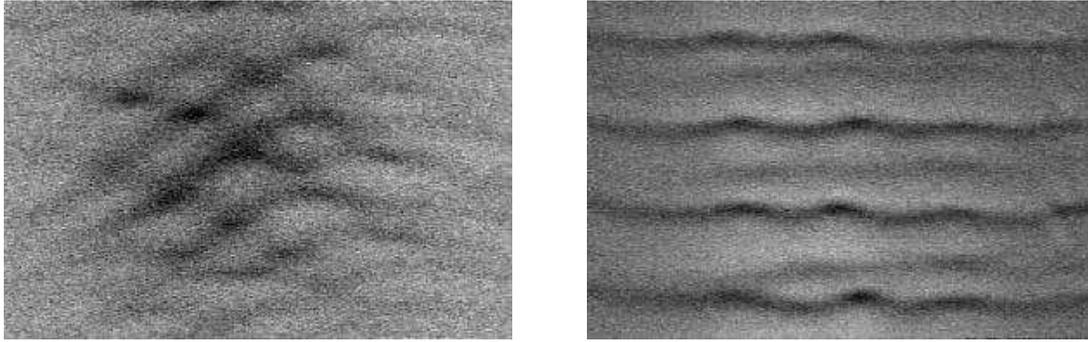


FIG. 1.5 – À gauche, motifs en chevrons; à droite, instabilité tridimensionnelle synchrone (d’après Émery & Brosse [45]).

en deux grandes catégories.

La première utilise le grand rapport entre épaisseur du film et longueur d’onde pour faire un développement en ondes longues des équations de Navier–Stokes. Les termes non-linéaires inertiels apparaissent alors comme une simple perturbation et il est possible d’écrire le champ de vitesse sous la forme d’une série de fonctions polynômiales ne dépendant que de la coordonnée normale au film  $y$ , la position de la surface  $h$  et ses dérivées successives en temps et en espace. La dynamique du film est alors simplement décrite par une équation d’évolution pour la surface libre  $\partial_t h = G(h, \partial_x h, \dots)$ . Citons les travaux de Benney [9], Roskes [99], Nakaya [84, 85], Krishna & Lin [74] et Gjevik [53]. Une extension naturelle de cette méthode consiste en un développement faiblement non-linéaire conduisant, entre autre, à l’équation de Kuramoto–Sivashinsky (cf. Nepomnyashchy [87], Frenkel & Indireshkumar [50]).

La deuxième s’inspire de la méthode de Kármán–Polhausen appliquée avec succès au problème des couches limites laminares [104]. Après avoir fait l’hypothèse d’un champ de vitesse semblable, généralement parabolique, les équations bilans de la quantité de mouvement et de la masse sont moyennées sur l’épaisseur du film pour obtenir deux équations d’évolution couplées pour l’épaisseur  $h$  et le débit instantané local  $q_{\parallel} = \int_0^h u dy$ , auxquelles il faut ajouter une équation pour le débit transverse  $q_{\perp} = \int_0^h w dy$  dans le cas tridimensionnel. Citons les travaux de Shkadov [106, 108], Prokopiou *et al.* [93] et Lee & Mei [75]. Alekseenko *et al.* [1] ont de plus écrit un modèle faiblement non-linéaire à partir de la formulation de Shkadov.

Enfin, un niveau intermédiaire de modélisation est obtenu en notant que les variations en espace et en temps des grandeurs caractéristiques du film sont faibles en comparaison des variations rencontrées suivant son épaisseur. Cette remarque permet d’approximer le gradient de pression par son expression hydrostatique et conduit à une formulation proche des équations de Prandtl obtenue en premier par Levich [76, 33] et appelée par analogie équations de “couche limite”.

Cependant aucune des modélisations proposées n’est en soit satisfaisante. Bien que reproduisant correctement les résultats de l’analyse de stabilité linéaire au voisinage du seuil, l’équation de Benney conduit à des singularités non physiques en un temps fini (cf. Pumir *et al.* [95]). Très récemment, Ooshida [89] a formulé une

équation d'évolution de la surface libre à l'aide d'une méthode d'approximation de Padé permettant de régulariser le développement asymptotique. Toutefois, bien qu'étant en excellent accord avec les résultats expérimentaux dans le régime faiblement non-linéaire, ce dernier ne reproduit plus que qualitativement les profils et les vitesses des ondes observées lorsque leurs amplitudes deviennent importantes. De leur côté, les modèles provenant d'une méthode de Kármán–Polhausen ne présentent pas de comportements singuliers. Ils sont cependant en désaccord avec l'analyse de stabilité linéaire et ne rendent pas compte du seuil de l'instabilité primaire. Enfin, les équations de couche limite introduisent peu de simplifications par rapport au problème initialement posé et, à l'ordre le plus bas, ne tiennent pas correctement compte des effets dispersifs visqueux.

Toutefois, même si aucune des approches présentées n'est satisfaisante, elles ont permis un progrès sensible de la compréhension théorique du problème.

Après l'étude de l'instabilité primaire au voisinage d'un nombre d'onde nul [7, 8, 120], l'attention s'est portée sur la formation des trains d'ondes saturées observés par Kapitza & Kapitza. Dans le cas d'une onde monochromatique  $Ae^{i\alpha(x-ct)}$  de nombre d'onde  $\alpha$  instable interagissant avec son premier harmonique  $2\alpha$ , qui lui est stable, l'évolution temporelle de son amplitude  $A$  peut être décrite dans son repère propre par une équation de Stuart–Landau [8]

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \lambda A - \sigma_r |A|^2 A. \quad (1.2)$$

En pratique le filtrage des perturbations par le mécanisme d'instabilité linéaire n'est pas très sélectif et l'onde formée n'est pas exactement monochromatique [7]. Son spectre de Fourier a une largeur non nulle et il est nécessaire d'étudier sa stabilité vis-à-vis de modulations de grandes longueurs à l'aide d'un formalisme d'enveloppe. L'amplitude  $A$  est alors fonction de l'espace et du temps et, dans le référentiel se déplaçant à la vitesse de groupe, vérifie une équation de Ginzburg–Landau complexe

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \lambda A + (b_r + ib_i)\partial_{xx}A - (\sigma_r + i\sigma_i)|A|^2 A. \quad (1.3)$$

Bien entendu, cette description n'est possible que si l'amplitude de l'onde monochromatique peut saturer, c.-à.-d. si la constante de Landau,  $\sigma_r$  de (1.2), est positive. Lin [77] a vérifié que c'était le cas au voisinage de la courbe de stabilité marginale (où le taux de croissance est nul) à l'aide du développement asymptotique de Benney. En d'autres termes, la bifurcation de Hopf correspondant à l'apparition de trains d'ondes sur le film lorsqu'à débit constant la fréquence d'excitation est abaissée, est supercritique. Son étude montre de même que dans ce cas, l'onde formée est stable vis-à-vis de perturbation de grande longueur d'onde (instabilité d'Eckhaus). Ces résultats sont en désaccord avec les expériences de Liu & Gollub [81], ce qui est possible car le développement de Benney n'est utilisable qu'au voisinage du seuil ou à faible nombre d'onde  $\alpha$ . Cependant, près de l'axe  $\alpha = 0$  soit pour un forçage à basse fréquence,  $\sigma_r$  est négative et l'on ne peut plus considérer une seule onde monochromatique, ce qui corrobore les expériences de Liu *et al.* [80] qui n'observent pas de formation d'ondes monochromatiques à faible fréquence mais plutôt une transition sous-critique vers des trains d'ondes solitaires avec un large spectre de Fourier.

À l'aide du modèle de Shkadov, Cheng & Chang [31] ont étudié la réponse spatiale linéaire du film à une excitation périodique de pulsation  $\omega$ , et déterminé les valeurs propres  $\alpha(\omega)$  et vecteurs propres. Puis, par élimination adiabatique et réduction à la variété centrale, ils ont obtenu un système d'équations d'amplitude couplées pour les triades de modes résonnants  $\omega$ ,  $\Delta\omega$  et  $(1 \pm \Delta)\omega$  dont l'étude fournit les limites de stabilité d'Eckhaus ( $0 < \Delta < 1/2$ ) et sous-harmonique ( $\Delta = 1/2$ ). Leurs résultats (cf. fig. 7 de [26]) sont en bon accord avec la limite expérimentale entre ces deux types d'instabilités secondaires obtenue par Liu & Gollub [21].

Cependant, l'approche faiblement non-linéaire ne permet pas de rendre compte de la transition brutale vers des ondes solitaires observée à faible fréquence de forçage ni de la formation de train d'ondes quasi-solitaires suivant les instabilités secondaires 2D. Or les ondes stationnaires dans leur référentiel en mouvement  $\xi = x - ct$  peuvent s'étudier avec l'outillage de la théorie des systèmes dynamiques, les équations aux dérivées partielles suivant  $x$  et  $t$  étant alors remplacés par des équations aux dérivées ordinaires en  $\xi$ . Le progressif changement d'aspect des ondes vers des ondes solitaires correspond dans ce cadre à l'approche d'une orbite homocline par un cycle limite issu d'une bifurcation de Hopf (*bifurcation homocline*). Pumir *et al.* [95] ont ainsi construit numériquement les orbites homoclines du système dynamique correspondant à l'équation de Benney (3.33) que l'on sait pouvoir conduire à des singularités non-physiques.

L'intérêt s'est alors porté sur l'équation de Kuramoto–Sivashinsky

$$\partial_T H + 4H \partial_X H + \partial_{XX} H + \partial_{XXXX} H = 0, \quad (1.4)$$

qui ne présente pas de comportements singuliers. Bien que cette équation ne puisse rendre compte de la dynamique des ondes de grandes amplitudes, celle-ci est utilisable près de la criticalité ( $|R - R_c| \ll 1$ ) et permet de dresser un inventaire des familles d'ondes stationnaires observées. Considérons les ondes solutions de K.S. se propageant à la vitesse  $\mu$  correspondant à une célérité  $c = 1 + \mu$  dans le référentiel du plan incliné (cf. §3.3.2). Celles-ci vérifient dans le référentiel en mouvement  $\xi = X - \mu T$  :

$$-\mu H_\xi + 4H H_\xi + H_{\xi\xi} + H_{\xi\xi\xi\xi} = 0. \quad (1.5)$$

En intégrant une fois on obtient

$$H_{\xi\xi\xi} + 2H^2 + H_\xi - \mu H = H_0, \quad (1.6)$$

où  $H_0$  est une constante d'intégration. De plus en imposant que  $H = 0$  soit solution, il vient  $H_0 = 0$ , et donc par suite

$$H_{\xi\xi\xi} = \mu H - 2H^2 - H_\xi. \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) peut encore s'écrire sous la forme d'un système dynamique de tridimensionnel  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  avec  $\mathbf{x} = (H, H_\xi, H_{\xi\xi})$ . La famille d'ondes stationnaires émergeant du nombre d'onde neutre  $\alpha_c = 1$  est immobile dans le repère de coordonnée  $\xi$ . Elle subit une bifurcation fourche qui conduit à deux familles d'ondes  $C_1$  et  $C_{-1}$  s'échangeant dans la symétrie ( $S$ ) :  $\xi \rightarrow -\xi$ ,  $\mu \rightarrow -\mu$  et  $H \rightarrow -H$ , l'une plus

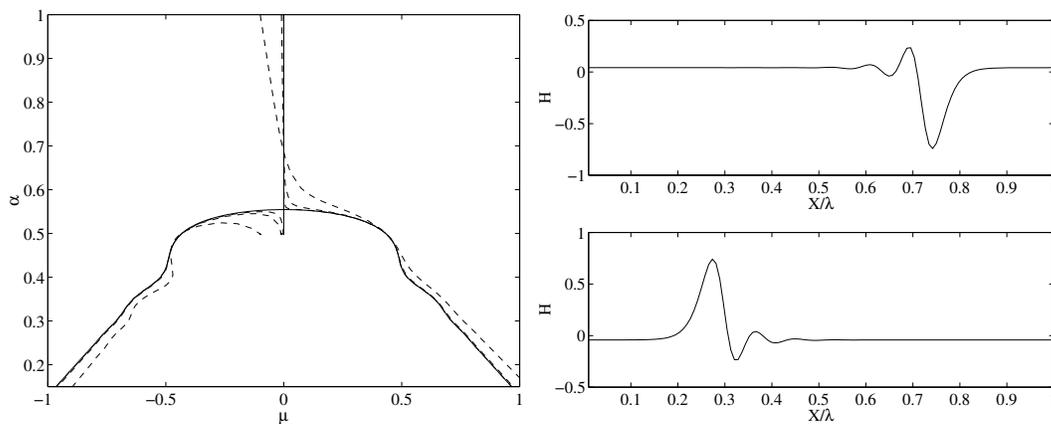


FIG. 1.6 – À gauche, tracés des familles  $C_{\pm 1}$  dans le plan célérité/nombre d'onde pour l'équation de Kuramoto–Sivashinsky (1.4) (trait continu), et des familles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de (1.9) émergeant par brisure de symétrie pour  $\delta = 0.001$ ,  $\delta = 0.01$  et  $\delta = 0.1$  (pointillés). Les courbes correspondant à  $\delta < 0$  sont obtenues par symétrie par rapport à l'axe  $\mu = 0$ . À droite, profils des ondes solitaires terminant les familles  $C_{-1}$  (au dessus) et  $C_1$  (en dessous) pour  $\alpha = 0.1$ . Ces figures ont été retracées par les méthodes décrites plus loin (§ 8.1) et restituent les résultats de Salamon *et al.* [19, 103].

rapide et l'autre plus lente que  $\mu = 0$  ( $c = 1$ ). Ces deux familles aboutissent en  $\alpha = 0$  à deux ondes solitaires d'allures symétriques. Il existe une infinité de familles d'ondes stationnaires  $C_n$  et  $C_{-n}$  bifurquant en  $\alpha/(n\alpha_c)$  et se terminant par des ondes solitaires à  $n$  bosses dont les célérités forment une suite géométrique convergeant vers  $c = 1$ . Chang [17] a montré que pour  $\mu = c - 1 \ll 1$  l'amplitude des ondes solitaires de K.S. et leur vitesse étaient reliées par la relation :

$$c - 1 = h_{max} - 1, \quad (1.8)$$

où les échelles de longueur et de vitesse sont l'épaisseur  $h_N$  et trois fois la vitesse moyenne  $u_N$  du film uniforme correspondant.

L'équation de Kuramoto–Sivashinsky (1.4) peut être phénoménologiquement généralisée en ajoutant un terme dispersif  $\propto \partial_{xxx}h$ , donnant l'équation de Kawahara [69]

$$\partial_T H + 4H \partial_X H + \partial_{XX} H + \delta \partial_{XXX} H + \partial_{XXXX} H = 0. \quad (1.9)$$

Chang *et al.* [19] ont fait observer que l'introduction de dispersion (cf. §3.3.2 et éq. (1.9)) brise la symétrie ( $S$ ). La bifurcation entre ondes stationnaires et ondes propagatives lorsque le nombre d'onde est abaissé devient imparfaite. On est alors en présence d'une catastrophe de type fonce [42] (cf. fig. 1.6). Les ondes solitaires terminant les familles  $C_n$  forment dans le plan  $(\mu, \delta)$  une famille continue d'ondes solitaires. Il existe de plus une infinité d'autres familles d'ondes solitaires. La multiplicité de celles-ci est directement reliée à la présence d'une bifurcation globale

de Shilnikov [54] (existence d'un ensemble invariant hyperbolique à proximité d'un point fixe sur lequel la dynamique est aléatoire). Les familles  $C_n$  et  $C_{-n}$  sont alors séparées.  $\gamma_1$  issue de  $C_{-1}$  est une famille d'ondes stationnaires lentes  $c \leq 1$  qui apparaît à  $\alpha/\alpha_c = 1$ . De même  $\gamma_2$  ( $C_1$ ) qui bifurque à  $\alpha/\alpha_c = 1/2$  est une famille d'ondes rapides  $c \geq 1$ . Les autres familles  $\gamma_n$  apparaissent à  $\alpha/\alpha_c = 1/n$  et sont les reliquats des familles  $C_n$ . Celles-ci ne jouent pas un rôle notable dans la description de la dynamique sur le film car elles sont extrêmement instables [18].

Malheureusement, l'analyse précédente n'est justifiable qu'à la criticalité (faible amplitude des ondes) et à faible nombre de Reynolds. Afin d'étendre celle-ci, Chang *et al.* [18] ont utilisé le modèle de Shkadov [23] et les équations de couche limite. Ils ont ainsi retrouvé les familles d'ondes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  et un comportement similaire des familles  $\gamma_n$ .

Pour rendre compte des instabilités observées expérimentalement, Chang [18, 22] propose alors le scénario suivant : après une phase de sélection linéaire, les perturbations infinitésimales en amont du plan donne naissance à un paquet d'ondes quasi-monochromatique de longueur d'onde  $\alpha_m$  correspondant au maximum du taux de croissance linéaire  $\alpha c_i$ . Un mécanisme de sélection faiblement non-linéaire fait alors évoluer ce paquet d'ondes vers une onde saturée de  $\gamma_1$  correspondant aux ondes observées sur le plan incliné à la fin de la deuxième phase (cf. §1.2). Cette transition correspond à une décélération et une compression du paquet d'ondes. Une seconde transition permet alors de passer de la famille  $\gamma_1$  à la famille  $\gamma_2$  correspondant à la formation des ondes solitaires.

L'étude de stabilité des ondes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  vis-à-vis de perturbations 2D et 3D a été réalisée numériquement à l'aide de l'équation de couche limite (3.9) [18]. Chang *et al.* [22] ont interprété l'instabilité 3D sous-harmonique (motifs en forme de damiers ou chevrons) à partir de l'équation de K.S. sous la forme de l'interaction quadratique d'une triade de vecteurs déstabilisant les ondes  $\gamma_1$ .

## 1.4 Plan et objectifs de l'étude

Comme nous venons de le voir, l'écoulement d'un film mince visqueux le long d'un plan incliné est un problème académique dont la compréhension a fait couler beaucoup d'encre depuis les années 1940 !

En premier lieu, il nous est apparu important de comparer et de résumer, bien que trop succinctement, les principaux résultats connus sur le sujet. Ainsi après avoir formulé le problème et tenté d'apporter une description synthétique des mécanismes de l'instabilité primaire (ch. 2), une revue non exhaustive des équations et modèles proposés dans la littérature sera entreprise (ch. 3) dans le but d'identifier les principales lacunes des diverses formulations.

Dans notre cas, la simulation numérique directe a un coût très élevée et reste hors de portée dans le cas d'un écoulement tridimensionnel, c.-à-d. non parallèle suivant la direction transverse  $z$ . Ainsi l'objectif principal de cette étude est de surmonter les lacunes repérées au ch. 3 et de proposer un ou plusieurs modèles (ch. 4) permettant de décrire les instabilités secondaires tridimensionnelles observées par Liu *et al.* [82].

La validation de nos modèles sera effectuée au ch. 5 par comparaison des différentes études des ondes stationnaires dans leur référentiel et en particulier des ondes solitaires. Puis, l'analyse de stabilité des fronts droits obtenus au ch. 5 sera abordée au ch. 6. Des simulations numériques de l'évolution spatiale du film en régime forcé ou en réponse au bruit ambiant suivront au ch. 7 et nous permettront d'envisager quelques applications à ce travail. L'avant-dernier chapitre (ch. 8) détaillera les schémas numériques utilisés aux ch. 5 et 7, puis nous conclurons (ch. 9). Nous avons placé en annexe (ch. 10) le texte d'un article (Eur. Phys. J. B **6**, 277–292 (1998)) présentant une première formulation de modèles rendue obsolète par celle exposée dans ce manuscrit mais conduisant cependant à de très bons résultats préliminaires.

# Chapitre 2

## Mécanismes de l'instabilité primaire

L'écoulement par gravité d'un film mince le long d'une paroi inclinée se comporte comme un amplificateur du bruit ambiant à partir duquel se forment spontanément des trains d'ondes irréguliers se propageant vers l'aval à une vitesse environ égale à trois fois la vitesse moyenne du fluide. Toutefois, les mécanismes physiques à l'origine de cette instabilité sont relativement complexes et il n'en existe pas à ma connaissance d'exposé suffisamment simple et précis recueillant tous les suffrages. Ce chapitre est un résumé synthétique des principaux résultats décrivant l'instabilité au stade linéaire et contribuant à sa compréhension. Ainsi, après avoir précisé la géométrie, les notations et les paramètres adimensionnés (§ 2.1 et 2.2), nous allons rappeler au § 2.3 les résultats classiques de l'analyse de stabilité de l'écoulement conduisant aux équations d'Orr–Sommerfeld [64] et de leur développement asymptotique par Yih [120] (§ 2.4). Enfin au § 2.6, à partir du bilan d'énergie des perturbations par Kelly *et al.* [72] (§ 2.5), nous discuterons les mécanismes de l'instabilité [109].

### 2.1 Position du problème

On s'intéresse à l'écoulement le long d'un plan incliné d'un film de faible épaisseur d'un liquide newtonien, incompressible et visqueux. On se place dans le référentiel attaché au plan incliné. L'orientation du repère est la suivante :  $x$  est la direction de l'écoulement (*streamwise*),  $y$  est la direction perpendiculaire au plan incliné, et enfin  $z$  est la direction transverse à l'écoulement (*spanwise*).  $h$  est l'épaisseur du film et  $\beta$  désigne l'angle que forme l'axe  $x$  avec l'horizontale ( $\beta = 0$  correspond donc à un plan horizontal). On note  $\partial_\xi \psi$  la dérivée partielle par rapport à la variable  $\xi$  de la grandeur  $\psi$ . De même l'évaluation de  $\psi(x, y, z, t)$  en  $y = 0$  ou  $y = h$  est notée  $\psi|_0, \psi|_h$ .

On fait de plus les hypothèses suivantes :

- la géométrie du système est supposée infinie dans les directions  $x$  et  $z$ ,
- on néglige toute circulation d'air au dessus du film,

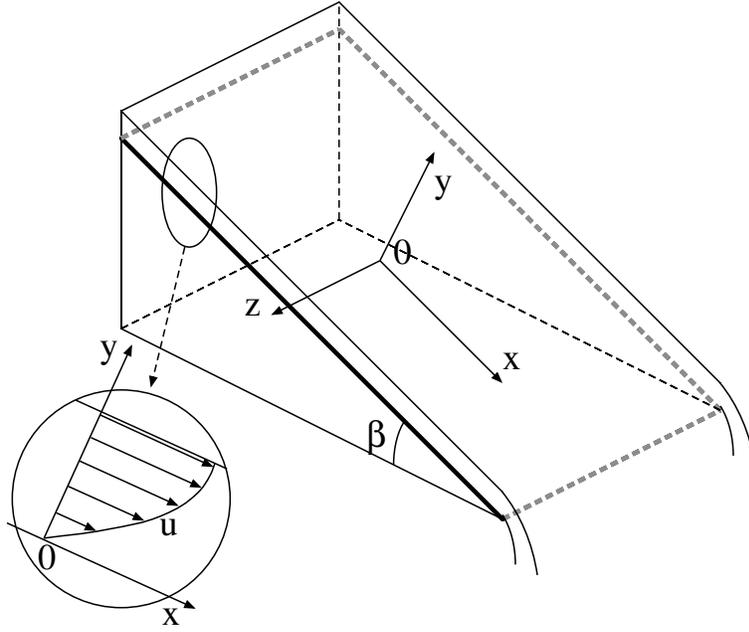


FIG. 2.1 – géométrie et orientation des axes.

– la pression de l'air est supposée constante et égale à  $p_a$ .

Dans ces conditions, l'écoulement est régi par les équations de Navier–Stokes

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

où  $\frac{D}{Dt}$  désigne la dérivée matérielle et  $\Delta$  l'opérateur laplacien tridimensionnel, soit en cartésiennes  $\frac{D}{Dt} \equiv \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  et  $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$ .

Aux équations (2.1–2.2), il faut adjoindre les conditions aux limites suivantes :

– condition de saut cinématique à l'interface :

$$\partial_t h + u|_h \partial_x h + w|_h \partial_z h = v|_h, \quad (2.3)$$

– condition de saut dynamique à l'interface :

$$\sigma_{ik} n_k = (-p_a + \gamma K(h)) n_i, \quad (2.4)$$

– imperméabilité et non-glissement à la paroi :

$$u|_0 = v|_0 = w|_0 = 0. \quad (2.5)$$

dans toutes ces équations :

$\mathbf{u}$  représente la vitesse du liquide de composantes  $(u, v, w)$ ,

$\rho$  est la masse volumique du liquide,

$\mu$  sa viscosité ( $\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique),

$\mathbf{g}$  l'accélération de la pesanteur,

$p$  est la pression,

$\gamma$  la tension superficielle du fluide,

$K(h)$  est la courbure de l'interface et s'écrit [37]

$$K(h) = -\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{(1 + (\partial_z h)^2) \partial_{xx} h - 2\partial_x h \partial_z h \partial_{xz} h + (1 + (\partial_x h)^2) \partial_{zz} h}{[(1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_z h)^2)^{3/2}]}, \quad (2.6)$$

$\sigma$  est le tenseur des contraintes,

$\mathbf{n}$  est la normale à l'interface (orientée du fluide vers l'extérieur).

## 2.2 Paramètres et équations adimensionnées

Lorsque l'écoulement est stationnaire et que le film a une épaisseur constante, la solution de Navier–Stokes est un écoulement parallèle où la viscosité compense exactement la gravité (écoulement de Poiseuille plan) :

$$U(y) = \frac{g \sin \beta}{2\nu} y(2h_N - y), \quad (2.7)$$

$$V(y) = W(y) = 0, \quad (2.8)$$

$$P(y) = p_a + \rho g \cos \beta (h_N - y), \quad (2.9)$$

où  $h_N$  désigne l'épaisseur du film. En pratique les conditions expérimentales fixent soit la hauteur du film  $h_N$  à la sortie de la buse, soit, dans les montages les plus courants, le débit  $q_N = \int_0^{h_N} u \, dy$ . Le profil de vitesse parabolique (2.7–2.9) s'établit très vite après la sortie de la buse, fournit la relation  $q_N = (g \sin \beta / 3\nu) h_N^3$  et permet de définir également une échelle de vitesse  $u_N = (1/h_N) \int_0^{h_N} U \, dy = (g \sin \beta / 3\nu) h_N^2$ , une échelle de temps  $h_N / u_N$ , et une échelle de pression  $\rho u_N^2$ . À partir de ces échelles on peut construire un premier jeu de nombres sans dimension :

- le nombre de Reynolds

$$R = q_N / \nu = u_N h_N / \nu = g \sin \beta h_N^3 / 3\nu^2, \quad (2.10)$$

qui mesure l'importance relative des effets inertiels et visqueux dans le fluide. Notons que la définition du nombre de Reynolds varie d'un auteur à l'autre selon que l'échelle de vitesse choisie est la vitesse moyenne ou la vitesse à l'interface [8]. Dans le cas de l'écoulement le long d'un cylindre vertical, on choisit généralement  $R = 4q_N / \nu$  [68].

- le nombre de Weber

$$W = \gamma / (\rho g h_N^2 \sin \beta) \quad (2.11)$$

comparant la tension superficielle  $\sim \gamma / h_N$  et la contrainte normale à l'interface d'origine visqueuse  $\sim \mu u_N / h_N \sim \rho g h_N \sin \beta$ . Il en existe une autre définition utilisant l'échelle de pression dynamique  $\rho u_N^2$ ,  $W_1 = \gamma / (\rho u_N^2 h_N) = 3W / R$

- $B = \cot \beta$ , rapport de la composante de l'accélération gravitationnelle normale au film et de sa composante dans le sens de l'écoulement.

On peut également définir une échelle de temps visqueuse  $h_N^2/\nu$  d'où un autre jeu de paramètres, un peu moins courant, mais fort utilisé :

- Le nombre  $G = gh_N^3/\nu^2 = 3R/\sin\beta$  [66] qui mesure alors l'accélération de gravité.
- et le nombre  $S = \gamma h_N/(3\rho\nu^2) = WR$ , tension superficielle adimensionnée.

Demekhin *et al.* [33] ont montré que, dans le cadre de l'équation de couche limite (3.9) et pour un film vertical ( $\beta = \pi/2$ ), c.-à.-d. lorsque seuls les effets au premier ordre vis-à-vis du gradient de l'interface sont considérés, l'ensemble de paramètres adimensionnés du problème pouvait se réduire à un seul nombre de Reynolds réduit  $\delta$ . Pour ce faire, ils ont introduit une longueur capillaire correspondant à l'équilibre entre la tension superficielle, la gravité et la dissipation visqueuse (cf. §5.1.1).

Toutefois, les échelles définies précédemment font toutes référence à la solution de Nusselt via l'épaisseur  $h_N$ . Nous préférons utiliser des échelles définies non à partir d'une solution particulière du problème posé mais fondées sur les caractéristiques physiques du film, viscosité  $\nu = \mu/\rho$  ( $L^2T^{-1}$ ) et gravité dans le sens de l'écoulement  $g \sin\beta$  ( $LT^{-2}$ ), soit :

$$L = \nu^{2/3}(g \sin\beta)^{-1/3} \quad , \quad T = \nu^{1/3}(g \sin\beta)^{-2/3} . \quad (2.12)$$

Dans toute la suite de cet exposé et sauf mention contraire, les grandeurs intervenant dans le problème seront rendues adimensionnées à l'aide de (2.12).

Les équations adimensionnées s'écrivent alors

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u = -\partial_x p + (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})u + 1, \quad (2.13)$$

$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v = -\partial_y p + (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})v - B, \quad (2.14)$$

$$\partial_t w + u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w = -\partial_z p + (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})w, \quad (2.15)$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \quad (2.16)$$

la condition de saut cinématique en  $y = h$  (2.3) et de non glissement à la paroi (2.5) étant inchangées.

Afin d'écrire plus explicitement la condition de saut dynamique, plaçons nous, dans le repère  $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_{xy}, \mathbf{t}_{yz})$  où  $\mathbf{n} = [1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_z h)^2]^{-1/2}(-\partial_x h, 1, -\partial_z h)$  est la normale orientée à la surface libre,  $\mathbf{t}_{xy} = [1/(1 + (\partial_x h)^2)]^{1/2}(1, \partial_x h, 0)$  et  $\mathbf{t}_{yz} = [1/(1 + (\partial_z h)^2)]^{1/2}(0, \partial_z h, 1)$ , une base du plan tangent à la surface libre (cf. fig. 2.2).

Pour un fluide newtonien incompressible, le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est égal à  $-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}$  où  $\mathbf{d} = (1/2)(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$  est le tenseur taux de déformation. Ainsi (2.4) se lit en variables adimensionnées :

$$-p\mathbf{n} + 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = \Gamma K(h)\mathbf{n}. \quad (2.17)$$

Il apparaît dans (2.17) le nombre sans dimension

$$\Gamma = \gamma / [\rho\nu^{4/3} (g \sin\beta)^{1/3}] \quad (2.18)$$

appelé nombre de Kapitza [7]. De fait, la définition de  $\Gamma$  n'implique généralement que les grandeurs physiques du liquide employé et non l'inclinaison du plan de telle

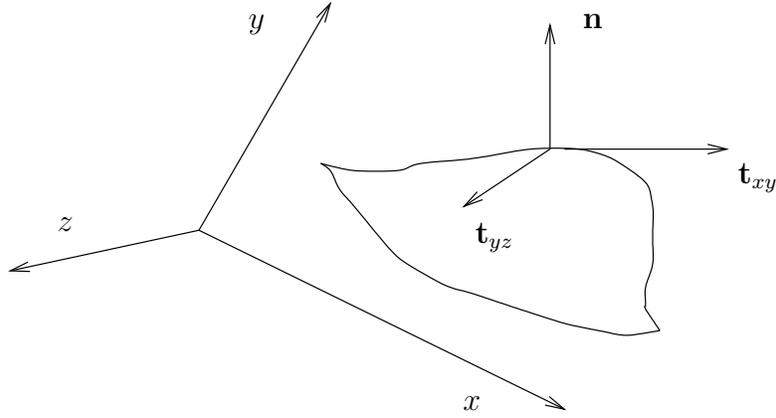


FIG. 2.2 – repère tangent à la surface libre.

manière que le facteur  $\sin \beta$  est omis. Cependant, Kapitza utilisait un tube vertical ( $\beta = \pi/2$ ), géométrie pour laquelle la définition classique de  $\Gamma$  rejoint la nôtre. Dans la littérature russe<sup>1</sup> apparaît également une autre définition de  $\Gamma$  alors appelé nombre du film,  $\text{Fi} = \gamma^3 / [g\rho^3\nu^4]$  et qui est suivie par celle d'un nombre du film réduit  $F = (\text{Fi} / \sin \beta)^{1/11} = \Gamma^{3/11}$  [2]. Le rapport  $R/F$  joue alors le même rôle que le nombre de Reynolds réduit introduit par Demekhin (cf. éq. (5.22)).

On obtient en projetant l'équation (2.17) respectivement sur  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}_{xy}$  et  $\mathbf{t}_{yz}$  :

$$p = -\Gamma \frac{(1 + (\partial_z h)^2) \partial_{xx} h - 2\partial_x h \partial_z h \partial_{xz} h + (1 + (\partial_x h)^2) \partial_{zz} h}{[(1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_z h)^2)^{3/2}]} - \frac{2}{1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_z h)^2} \left[ \partial_x h (\partial_y u + \partial_x v) + \partial_z h (\partial_y w + \partial_z v) - (\partial_x h)^2 \partial_x u - (\partial_z h)^2 \partial_z w - \partial_x h \partial_z h (\partial_z u + \partial_x w) - \partial_y v \right], \quad (2.19)$$

$$0 = 2\partial_x h (\partial_y v - \partial_x u) - \partial_z h (\partial_z u + \partial_x w) - \partial_x h \partial_z h (\partial_z v + \partial_y w) + (1 - (\partial_x h)^2) (\partial_y u + \partial_x v), \quad (2.20)$$

$$0 = 2\partial_z h (\partial_y v - \partial_z w) - \partial_x h (\partial_z u + \partial_x w) - \partial_x h \partial_z h (\partial_x v + \partial_y u) + (1 - (\partial_z h)^2) (\partial_y w + \partial_z v). \quad (2.21)$$

Dans notre système d'unité,  $g \sin \beta = \nu = \rho = 1$ . Le débit  $q_N$  se lit alors  $\frac{1}{3} h_N^3$  et est numériquement égal au nombre de Reynolds  $R$ .

Notons qu'il n'apparaît explicitement que deux nombres sans dimension dans les équations (2.13–2.21),  $B$  et  $\Gamma$  au lieu de trois avec les notations précédentes. En effet, le nombre de Reynolds, proportionnel à l'épaisseur de Nusselt  $h_N$ , est alors caché dans la définition des conditions aux limites au bord amont (ou aval) de l'écoulement définissant la solution de Nusselt servant de référence, soit par exemple, dans le cas d'une solution localisée, l'épaisseur du film à l'infini aval ou amont  $h_{x \rightarrow \pm\infty}$ , ou, pour un forçage périodique, l'épaisseur moyenne au bord amont  $\langle h \rangle$ .

<sup>1</sup>Pour la petite histoire, le nombre  $\Gamma$  (en fait  $\text{Fi}$ ) apparaît dans les travaux de Kapitza au sein de la condition de stabilité (1.1) contestée ensuite par Benjamin [68, 7].

## 2.3 Équation d'Orr–Sommerfeld

Étudions la stabilité du demi-profil de Poiseuille plan vis à vis de perturbations infinitésimales. Une fois adimensionné, celui-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} U(y) &= \frac{1}{2}y(2h_N - y), \\ V(y) &= W(y) = 0, \\ P(y) &= B(h_N - y). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Le théorème de Squire [64] concernant la stabilité d'écoulements unidirectionnels en présence de parois rigides vis à vis de perturbations tridimensionnelles, a été étendu par Yih [119] aux écoulements avec surfaces libres, interfaces ou stratification. Dans ces cas-là, l'écoulement initial est stable ou instable pour une perturbation tridimensionnelle s'il est stable ou instable pour une perturbation bidimensionnelle à un nombre de Reynolds, une inclinaison ou un gradient de pression dans le sens de l'écoulement plus faibles. Cependant la démonstration présentée par Yih, ne tient pas compte des effets de tension superficielle. Notons que ces derniers sont toujours stabilisants et qu'ils contribuent plus fortement à amortir une perturbation tridimensionnelle que sa correspondante bidimensionnelle par la transformation de Squire. Cette remarque nous permet de nous restreindre à l'étude de perturbations bidimensionnelles.

Afin de simplifier les expressions obtenues et de faire apparaître explicitement le nombre de Reynolds, introduisons un dimensionnement construit à partir de l'épaisseur du film uniforme  $h_N$  à l'aide de la transformation  $(x, y, h) \mapsto (h_N x, h_N y, h_N h)$ ,  $t \mapsto t/h_N$ ,  $(u, v) \mapsto (h_N^2 u, h_N^2 v)$  et  $p \mapsto h_N^4 p$ . Les équations initiales s'écrivent alors

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u = -\partial_x p + \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) u, \quad (2.23)$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v = -\partial_y p - \frac{B}{3R} + \frac{1}{3R} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) v, \quad (2.24)$$

où  $B = \cot \beta$  et le nombre de Reynolds  $R$ , construit sur la vitesse moyenne de l'écoulement, a été substitué à  $h_N^3$  grâce à  $R \equiv \frac{1}{3}h_N^3$ . L'échelle de vitesse est alors<sup>2</sup>  $h_N^2 = 3u_N$ .

La continuité du cisaillement à l'interface devient

$$\begin{aligned} 3Rp|_h &= -\frac{W \partial_{xx} h}{[1 + (\partial_x h)^2]^{3/2}} \\ &\quad - \frac{2}{1 + (\partial_x h)^2} \left[ \partial_x h (\partial_y u|_h + \partial_x v|_h) - (\partial_x h)^2 \partial_x u|_h - \partial_y v|_h \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

avec  $W = \Gamma/h_N^2$ . Les expressions des autres conditions aux limites restent inchangées. La solution de Nusselt s'écrit alors

$$U(y) = \frac{1}{2}y(2 - y),$$

---

<sup>2</sup>et non  $u_N$  comme dans la plupart des études sur le sujet

$$\begin{aligned} V(y) &= 0, \\ P(y) &= \frac{B}{3R}(1-y). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Posons  $u = U + \epsilon u_1$ ,  $v = \epsilon v_1$ ,  $p = P + \epsilon p_1$ ,  $h = 1 + \epsilon h_1$  où  $\epsilon \ll 1$ . En remplaçant dans (2.23–2.24), et en ne gardant que les termes du premier ordre on obtient :

$$\partial_t u_1 + U \partial_x u_1 + v_1 U'(y) = -\partial_x p_1 + \frac{1}{3R} (\partial_{xx} u_1 + \partial_{yy} u_1), \quad (2.27)$$

$$\partial_t v_1 + U \partial_x v_1 = -\partial_y p_1 + \frac{1}{3R} (\partial_{xx} v_1 + \partial_{yy} v_1), \quad (2.28)$$

$$\partial_x u_1 + \partial_y v_1 = 0, \quad (2.29)$$

avec les conditions aux limites en  $y = 0$

$$u_1 = v_1 = 0. \quad (2.30)$$

Utilisant  $\partial_y(U + u_1)|_{1+h_1} = U'(1) + U''(1)h_1 + \partial_y u_1|_1 + \mathcal{O}(h_1 u_1)$ ,  
 $v_1|_{1+h_1} = v_1|_1 + \mathcal{O}(h_1 v_1)$ ,  $(P + p_1)|_{1+h_1} = P|_1 + P'(1)h_1 + p_1|_1 + \mathcal{O}(h_1 p_1)$ ,  
on écrit les conditions de saut à la surface libre en  $y = 1$

$$\partial_t h_1 + U(1) \partial_x h_1 = v_1, \quad (2.31)$$

$$h_1 U''(1) + \partial_y u_1 + \partial_x v_1 = 0, \quad (2.32)$$

$$3R(h_1 P'(1) + p_1) + W \partial_{xx} h_1 - 2\partial_y v_1 = 0, \quad (2.33)$$

L'écoulement étant bidimensionnel et incompressible, nous pouvons reformuler le système (2.27–2.33) en terme de fonction de courant  $\psi$ .

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Chaque perturbation infinitésimale est ensuite décomposée en une somme d'ondes sinusoidales<sup>3</sup>  $\psi = \Re(\phi(y) \exp\{i\alpha(x - ct)\})$  et  $p_1 = \Re(\varpi(y) \exp\{i\alpha(x - ct)\})$  où le nombre d'onde adimensionné  $\alpha$  et la vitesse de phase  $c$  sont à priori complexes.

Les équations (2.27–2.28) s'écrivent alors :

$$-i\alpha c \phi' + i\alpha U \phi' - i\alpha U' \phi = -i\alpha \varpi + \frac{1}{3R} (\phi''' - \alpha^2 \phi'), \quad (2.34)$$

$$\alpha^2 c \phi - \alpha^2 U \phi = \varpi' + \frac{1}{3R} (i\alpha \phi'' - i\alpha^3 \phi), \quad (2.35)$$

où les primes désignent les dérivées par rapport à  $y$ . En éliminant  $\varpi$ , on obtient l'équation d'Orr-Sommerfeld bien connue :

$$\phi'''' - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi = 3i\alpha R[(U - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - U'' \phi]. \quad (2.36)$$

---

<sup>3</sup>dans la suite,  $\Re$  et  $\Im$  désignent la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe.

La condition cinématique (2.31) permet d'écrire  $h_1$  en fonction de  $\phi$  :

$$h_1 = \Re \left( \frac{\phi(1)}{c - 1/2} \exp[i\alpha(x - ct)] \right), \quad (2.37)$$

En combinant (2.37), (2.34) et (2.33), la continuité de la contrainte normale en  $y = 1$  s'écrit :

$$-\alpha \frac{[B + W\alpha^2]}{c - 1/2} \phi(1) + \alpha[3R(c - 1/2) + 3i\alpha] \phi'(1) - i\phi'''(1) = 0, \quad (2.38)$$

De même, la continuité de la contrainte tangentielle (2.32) combinée avec (2.37) fournit :

$$\phi''(1) + \left[ \alpha^2 - \frac{1}{c - 1/2} \right] \phi(1) = 0, \quad (2.39)$$

Les conditions aux limites en  $y = 0$  s'écrivent :

$$\phi(0) = \phi'(0) = 0. \quad (2.40)$$

Le système (2.36–2.40) a été obtenu par Yih [120].

## 2.4 Étude asymptotique à petits nombres d'onde

Étudions, le comportement asymptotique du système (2.36–2.40) près de l'axe  $\alpha = 0$ . Pour cela nous allons suivre la méthode proposée par Yih [120] et développer  $\phi$  et  $c$  autour de leurs solutions pour  $\alpha = 0$ . À  $R$  et  $W$  donnés, nous choisirons le paramètre  $\alpha$  infinitésimalement petit.

Lorsque  $\alpha$  est nul le système (2.36–2.40) se résume à :

$$\phi'''' = 0 \quad (2.41)$$

avec les conditions aux limites :

$$\phi(0) = \phi'(0) = 0, \quad (2.42)$$

$$\phi'''(1) = 0, \quad (2.43)$$

$$\phi''(1) - \frac{1}{c - 1/2} \phi(1) = 0. \quad (2.44)$$

L'intégration de (2.41) donne :  $\phi = A_0 y^3 + B_0 y^2 + C_0 y + D_0$ . Les conditions d'imperméabilité et de non-glissement à la paroi (2.42) et la continuité de la contrainte normale à la surface libre (2.43) conduisent à  $A_0 = C_0 = D_0 = 0$ . La continuité de la contrainte tangentielle à la surface libre (2.44) détermine la célérité  $c_0 = 1$ . La constante  $B_0$  reste inconnue. En effet, le système est linéaire et homogène, et ses vecteurs propres sont déterminés à une constante multiplicative près. Par commodité, nous prendrons  $B_0 = 1$  et par conséquent

$$\phi_0 = y^2. \quad (2.45)$$

À  $\phi_0$  correspond un écoulement linéaire  $\phi'_0 = 2y$  dont l'origine est le cisaillement créé par l'élévation de l'interface,  $U''(1)h_1$ . Puisque  $\Im(c_0) = 0$  la perturbation n'est ni amplifiée ni amortie. L'axe  $\alpha = 0$  fait donc partie de la courbe de stabilité marginale et correspond au passage par simple élévation du débit d'une solution de Nusselt à une autre.

Posons  $c = c_0 + i\alpha c_1 - \alpha^2 c_2 - i\alpha^3 c_3 \dots$  et  $\phi = \phi_0 + i\alpha\phi_1 - \alpha^2\phi_2 - i\alpha^3\phi_3 \dots$ . Le problème à l'ordre 1 s'écrit alors :

$$\phi_1'''' = 3R[(U - c_0)\phi_0'' - U''\phi_0], \quad (2.46)$$

avec les conditions aux limites :

$$\phi_1(0) = \phi_1'(0) = 0, \quad (2.47)$$

$$\phi_1''''(1) = \frac{B}{c_0 - 1/2}\phi_0(1) - 3R(c_0 - 1/2)\phi_0'(1), \quad (2.48)$$

$$\phi_1''(1) = \frac{1}{c_0 - 1/2}\phi_1(1) - \frac{1}{(c_0 - 1/2)^2}c_1\phi_0(1). \quad (2.49)$$

La résolution du système précédent conduit à :

$$\phi_1 = R \left[ \frac{y^5}{20} - \frac{y^4}{4} \right] + \frac{B}{3}y^3 + B_1y^2, \quad (2.50)$$

$$c_1 = \frac{2}{5}R - \frac{1}{3}B. \quad (2.51)$$

La constante  $B_1$  n'est pas déterminée. Il faudrait une condition supplémentaire pour la déterminer. En effet,  $i\alpha B_1 y^2 \propto \phi_0$  et  $B_1$  peut s'intégrer dans le choix de la constante  $B_0$ . Nous annulerons  $B_1$  de manière à ce que  $\phi_1$  apparaisse comme une "vraie" correction à  $\phi_0$ .

L'équation (2.51) montre que le taux de croissance temporel des perturbations infinitésimales, *i.e.* la partie imaginaire de la célérité, est positif ou négatif à faible nombre d'onde si le nombre de Reynolds  $R$  est supérieur ou inférieur à  $5B/6$ . Dans le plan  $(R, \alpha)$ , la courbe de stabilité marginale coupe l'axe  $\alpha = 0$  en  $R_c = 5B/6$ .

Le problème à l'ordre 2 s'écrit :

$$\phi_2'''' = -2\phi_0'' + 3R[(U - c_0)\phi_1'' - c_1\phi_0'' - U''\phi_1], \quad (2.52)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \phi_2(0) &= \phi_2'(0) = 0, \\ \phi_2''''(1) &= \frac{B}{c_0 - 1/2}\phi_1(1) - \frac{B}{(c_0 - 1/2)^2}c_1\phi_0(1) - 3R(c_0 - 1/2)\phi_1'(1) \\ &\quad - (3Rc_1 + 3)\phi_0'(1), \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \phi_2''(1) &= \phi_0(1) + \frac{1}{c_0 - 1/2}\phi_2(1) - \frac{1}{(c_0 - 1/2)^2}(c_1\phi_1(1) - c_2\phi_0(1)) \\ &\quad + \frac{1}{(c_0 - 1/2)^3}c_1^2\phi_0(1). \end{aligned} \quad (2.54)$$

La résolution du système précédent conduit à :

$$\begin{aligned} \phi_2 = & -\frac{R^2}{2240}y^9 + \frac{9R^2}{2240}y^8 - \left(\frac{BR}{420} + \frac{R^2}{70}\right)y^7 + \left(\frac{BR}{60} + \frac{R^2}{40}\right)y^6 - \frac{BR}{20}y^5 \\ & + \left(-\frac{1}{6} + \frac{BR}{12} - \frac{R^2}{10}\right)y^4 + \frac{1}{3}(-1 - BR + B^2)y^3 + B_2y^2, \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$c_2 = 1 - \frac{10}{21}BR + \frac{4}{7}R^2, \quad (2.56)$$

Où  $B_2$  est une constante. À l'ordre 3, le système à résoudre est :

$$\begin{aligned} \phi_3'''' = & -2\phi_1'' + 3R[(U - c_0)(\phi_2'' - \phi_0) - c_1\phi_1'' \\ & - c_2\phi_0'' - U''\phi_2], \end{aligned} \quad (2.57)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \phi_3(0) = & \phi_3'(0) = 0, \\ \phi_3'''(1) = & -\frac{W}{c_0 - 1/2}\phi_0(1) - \left[\frac{1}{(c_0 - 1/2)^2}c_2 + \frac{1}{(c_0 - 1/2)^3}c_1^2\right]B\phi_0(1) \\ & - \frac{B}{(c_0 - 1/2)^2}c_1\phi_1(1) + \frac{B}{c_0 - 1/2}\phi_2(1) - 3Rc_2\phi_0'(1) \\ & - (3Rc_1 + 3)\phi_1'(1) - 3R(c_0 - 1/2)\phi_2'(1), \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \phi_3''(1) = & \frac{1}{c_0 - 1/2}\phi_3(1) - \frac{1}{(c_0 - 1/2)^2}c_1\phi_2(1) \\ & + \left[-\frac{1}{(c_0 - 1/2)^2}c_2 + \frac{1}{(c_0 - 1/2)^3}c_1^2 + 1\right]\phi_1(1) \\ & + \left[-\frac{1}{(c_0 - 1/2)^2}c_3 + \frac{2}{(c_0 - 1/2)^3}c_1c_2 - \frac{1}{(c_0 - 1/2)^4}c_1^3\right]\phi_0(1). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Après quelques lignes d'un calcul fastidieux, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi_3 = & \frac{R^3}{366080}y^{13} - \frac{R^3}{28160}y^{12} + \left(\frac{BR^2}{55440} + \frac{19R^3}{92400}\right)y^{11} + \left(-\frac{BR^2}{5040} - \frac{47R^3}{67200}\right)y^{10} \\ & + \left(\frac{BR^2}{960} + \frac{3R^3}{2240}\right)y^9 + \left(\frac{R}{1680} - \frac{23BR^2}{6720} - \frac{R^3}{2240}\right)y^8 \\ & + \left(-\frac{R}{280} - \frac{B^2R}{420} + \frac{3BR^2}{280} - \frac{R^3}{175}\right)y^7 + \left(\frac{R}{120} + \frac{B^2R}{60} + \frac{BR^2}{30} + \frac{R^3}{50}\right)y^6 \\ & + \left(-\frac{B}{30} + \frac{R}{20} - \frac{B^2R}{30} + \frac{3BR^2}{100}\right)y^5 + \left(-\frac{R}{4} + \frac{5BR^2}{42} - \frac{R^3}{7}\right)y^4 \\ & + \left(-B + \frac{13R}{60} + \frac{B^3}{3} - \frac{BR^2}{7} - \frac{4B^2R}{15} - \frac{W}{3}\right)y^3 + B_3y^2, \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$c_3 = -\frac{3B}{5} + \frac{471R}{224} - \frac{17363BR^2}{17325} + \frac{75872R^3}{75075} + \frac{2B^2R}{15} + \frac{W}{3}. \quad (2.61)$$

Les constantes  $B_2$  et  $B_3$  apparaissant dans les équations (2.55) et (2.60) sont indéterminées et nous choisirons  $B_2 = B_3 = 0$  de manière à ce que  $\phi_2$  et  $\phi_3$  apparaissent également comme de véritables corrections à  $\phi_0$ . Notons que ce choix revient à fixer la phase aux origines en temps et en espace de la perturbation de fonction courant  $\psi(x = 0, y, t = 0) = \Re(\phi(y))$  et par conséquent de l'interface  $h = 1 + \epsilon h_1$ .

Le développement aux petits nombres d'ondes et à l'ordre 3 de la célérité  $c$  s'écrit par conséquent :

$$c = 1 + i\alpha \left( \frac{2}{5}R - \frac{B}{3} \right) + \alpha^2 \left( -1 + \frac{10}{21}BR - \frac{4}{7}R^2 \right) + i\alpha^3 \left( \frac{3B}{5} - \frac{471R}{224} + \frac{17363BR^2}{17325} - \frac{75872R^3}{75075} - \frac{2B^2R}{15} - \frac{W}{3} \right). \quad (2.62)$$

L'équation (2.62) va nous être utile dans la suite pour valider les différents modèles obtenus. Elle est en effet un résultat asymptotique exact dont la vérification est importante notamment quant à la dispersion des ondes saturées.

## 2.5 Bilan de l'énergie contenue dans la perturbation

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser au bilan énergétique de la perturbation afin d'isoler les mécanismes en jeu lors de l'instabilité primaire et de comprendre pourquoi le film est instable.

Multipliant (2.27) par  $u_1$ , (2.28) par  $v_1$  et additionnant les deux équations, on arrive au bilan de l'énergie cinétique contenue dans la perturbation en point quelconque de l'écoulement

$$\frac{1}{2} (\partial_t + U\partial_x) (u_1^2 + v_1^2) = -U'(y)u_1v_1 - (u_1\partial_x + v_1\partial_y)p_1 + \frac{1}{3R} [u_1(\partial_{xx} + \partial_{yy})u_1 + v_1(\partial_{xx} + \partial_{yy})v_1]. \quad (2.63)$$

Considérons une perturbation localisée en espace. Celle-ci est alors décomposable en une somme de fonctions périodiques par transformée de Fourier. On sait grâce au théorème de Parseval que l'énergie cinétique contenue dans la perturbation est la somme des énergies cinétiques correspondant à chaque élément de la base de Fourier. Faisons le bilan de l'énergie cinétique de la perturbation de nombre d'onde  $\alpha = 2\pi/\lambda$  en intégrant suivant l'épaisseur  $y$  et sur une longueur d'onde. On a tout d'abord

$$\int_0^1 U(y) \int_0^\lambda \partial_x (u_1^2 + v_1^2) dx dy = \int_0^1 U [(u_1^2 + v_1^2)]_0^\lambda dy = 0. \quad (2.64)$$

De même, on obtient par une intégration par parties et en utilisant l'équation de continuité (2.29) :

$$-\int_0^\lambda \int_0^1 (u_1\partial_x + v_1\partial_y)p_1 dy dx = -\int_0^1 [u_1p_1]_0^\lambda dy - \int_0^\lambda [v_1p_1]_0^1 dx = -\int_0^\lambda v_1|_1p_1|_1. \quad (2.65)$$

Puis, de façon similaire par une double intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda \int_0^1 [u_1 (\partial_{xx} + \partial_{yy}) u_1 + v_1 (\partial_{xx} + \partial_{yy}) v_1] dy dx = \\ \int_0^1 [u_1 \partial_x u_1 + v_1 \partial_x v_1]_0^\lambda dy + \int_0^\lambda [u_1 \partial_y u_1 + v_1 \partial_y v_1]_0^1 dx \\ - \int_0^\lambda \int_0^1 \{(\partial_x u_1)^2 + (\partial_y u_1)^2 + (\partial_x v_1)^2 + (\partial_y v_1)^2\} dy dx, \end{aligned} \quad (2.66)$$

d'où, à l'aide de (2.33),  $p_1|_1 = -h_1 P'(1) - (W/(3R)) \partial_{xx} h_1 + 2/(3R) \partial_y v_1|_1$  et de l'égalité  $\int_0^\lambda v_1|_1 \partial_y v_1|_1 dx = -\int_0^\lambda v_1|_1 \partial_x u_1|_1 dx = -[v_1|_1 u_1|_1]_0^\lambda + \int_0^\lambda u_1|_1 \partial_x v_1|_1 dx$ , le résultat final :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda} \partial_t \int_0^\lambda \int_0^1 (u_1^2 + v_1^2) dy dx = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_0^1 u_1 v_1 U'(y) dy dx \\ + \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left[ \left( h_1 P'(1) + \frac{W}{3R} \partial_{xx} h_1 \right) v_1|_1 \right. \\ \left. + \frac{1}{3R} u_1|_1 (\partial_y u_1|_1 - \partial_x v_1|_1) \right] dx \\ - \frac{1}{3R\lambda} \int_0^\lambda \int_0^1 [2(\partial_x u_1)^2 + (\partial_y u_1)^2 + (\partial_x v_1)^2] dy dx, \end{aligned} \quad (2.67)$$

où l'on reconnaît le transport de la vorticité à l'interface  $(\partial_x v_1 - \partial_y u_1)|_1$  par la perturbation du champ de vitesse.

Pour faire explicitement apparaître le travail des efforts visqueux, noté DIS,

$$\text{DIS} = -\frac{1}{3R\lambda} \int_0^\lambda \int_0^1 [2(\partial_x u_1)^2 + (\partial_y u_1 + \partial_x v_1)^2 + 2(\partial_y v_1)^2] dy dx, \quad (2.68)$$

utilisons l'équation de continuité (2.29) et écrivons l'égalité

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\lambda \int_0^1 (\partial_x u_1 + \partial_y v_1)^2 dy dx \\ &= \int_0^\lambda \int_0^1 [(\partial_x u_1)^2 + (\partial_y v_1)^2] dy dx + 2 \int_0^\lambda \int_0^1 (\partial_x u_1 \partial_y v_1) dy dx \\ &= \int_0^\lambda \int_0^1 [(\partial_x u_1)^2 + (\partial_y v_1)^2] dy dx + 2 \int_0^1 [u_1 \partial_y v_1]_0^\lambda dy - 2 \int_0^\lambda [u_1 \partial_x v_1]_0^1 dx \\ &\quad + 2 \int_0^\lambda \int_0^1 \partial_y u_1 \partial_x v_1 dy dx \\ &= \int_0^\lambda \int_0^1 [(\partial_x u_1)^2 + (\partial_y v_1)^2 + 2\partial_y u_1 \partial_x v_1] dy dx - 2 \int_0^\lambda u_1|_1 \partial_x v_1|_1 dx. \end{aligned}$$

D'où la formulation de (2.67) sous la forme plus traditionnelle

$$\text{ECI} + \text{TES} + \text{PRE} = \text{CIS} + \text{REY} + \text{DIS}. \quad (2.69)$$

où, ECI est la variation de l'énergie cinétique contenue dans la perturbation :

$$\text{ECI} = \frac{1}{2\lambda} \partial_t \int_0^\lambda \int_0^1 (u_1^2 + v_1^2) dy dx \quad (2.70)$$

TES est la variation d'énergie de surface :

$$\text{TES} = -\frac{W}{3R\lambda} \int_0^\lambda [v_1|_1 (\partial_{xx}h_1)] dx \quad (2.71)$$

PRE est la variation d'énergie potentielle de gravité :

$$\text{PRE} = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda P'(1) h_1 (v_1|_1) dx \quad (2.72)$$

CIS est le travail du cisaillement à l'interface :

$$\text{CIS} = \frac{1}{3R\lambda} \int_0^\lambda u_1|_1 (\partial_y u_1|_1 + \partial_x v_1|_1) dx \quad (2.73)$$

REY est le travail du tenseur de Reynolds :

$$\text{REY} = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_0^1 u_1 v_1 U'(y) dy dx. \quad (2.74)$$

À l'aide de (2.31) TES s'écrit encore

$$\text{TES} = -\frac{W}{3R\lambda} \int_0^\lambda (\partial_t h_1 + U(1) \partial_x h_1) \partial_{xx} h_1 dx. \quad (2.75)$$

De même en utilisant le bilan la contrainte tangentielle à la paroi,

$$\text{CIS} = -\frac{1}{3R\lambda} U''(1) \int_0^\lambda h_1 u_1 dx, \quad (2.76)$$

où le travail du cisaillement créé par le déplacement de l'interface  $U''(1)h_1$  apparaît explicitement.

Le film est instable lorsque ECI croît, stable dans le cas contraire. TES et PRE sont positifs lorsque de l'énergie puisée de l'écoulement principal est stockée dans la perturbation via la gravité ou la tension superficielle. Ces trois termes au membre de gauche de (2.69) renseignent sur la répartition de l'énergie totale de la perturbation. Les termes au membre de droite sont les travaux des efforts exercés sur le fluide et indiquent la façon par laquelle l'énergie est puisée de l'écoulement de base.

L'équation bilan (2.69) a été obtenue et étudiée numériquement par Kelly *et al.* [72]. Leurs résultats démontrent que l'énergie de la perturbation est extraite de l'écoulement principal par le biais du cisaillement à l'interface CIS et non du tenseur de Reynolds.

## 2.6 Mécanismes de l'instabilité

Dans la plupart des études réalisées, la tension de surface joue un rôle prédominant, de telle sorte que  $W\alpha^2$  est de l'ordre de l'unité lorsque  $\alpha$  correspond aux ondes observables expérimentalement. Dans ce cas, l'équation de la courbe de stabilité marginale correspondant à un taux de croissance temporel nul,

soit  $\mathfrak{S}(c(R, \alpha_c)) = 0$ , peut s'obtenir au voisinage de la criticalité en tronquant le développement (2.62) au premier ordre en  $\alpha$  [8] :

$$\left(\frac{6}{5}R - B\right) - \alpha_c^2 W = 0, \quad (2.77)$$

De même, le nombre d'onde  $\alpha_m$  correspondant aux ondes les plus amplifiées, *i.e.*  $(\partial[\alpha\mathfrak{S}(c)]/\partial\alpha)_{\alpha_m} = 0$ , vérifie alors :

$$\left(\frac{6}{5}R - B\right) - 2\alpha_m^2 W = 0,$$

D'où :

$$\alpha_m = \frac{\alpha_c}{\sqrt{2}}. \quad (2.78)$$

Supposant toujours  $W\alpha^2 = \mathcal{O}(1)$ , le développement (2.45,2.50,2.56,2.62) permet d'obtenir les approximations à l'ordre  $\alpha^2$  des termes de l'équation bilan (2.69) avec  $E \equiv \exp(\alpha\mathfrak{S}(c)t)$

$$\text{ECI} \approx \frac{2}{9}\alpha^2 \left(\frac{6}{5}R - B - \alpha^2 W\right) E^2, \quad (2.79)$$

$$\text{TES} \approx \frac{2}{9}\alpha^4 \frac{W}{R} \left(\frac{6}{5}R - B - \alpha^2 W\right) E^2, \quad (2.80)$$

$$\text{PRE} \approx \frac{2}{9}\alpha^2 \frac{B}{R} \left(\frac{6}{5}R - B - \alpha^2 W\right) E^2, \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \text{CIS} \approx & \left\{ \frac{2}{3R} + \alpha^2 \left[ \frac{41}{180}B + \frac{20}{9R} - \frac{2B^2}{3R} + \frac{4321}{6720}R \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha^2 \left( \frac{41}{180}W - \frac{4}{3} \frac{BW}{R} \right) - \frac{2}{3}\alpha^4 \frac{W^2}{R} \right] \right\} E^2, \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\text{REY} \approx \frac{\alpha^2}{180} \left( B - \frac{93}{112}R + \alpha^2 W \right) E^2, \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \text{DIS} \approx & \left( -\frac{2}{3R} + \alpha^2 \left( -\frac{17}{90}B - \frac{20}{9R} + \frac{4B^2}{9R} - \frac{1249}{3360}R \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha^2 \left( -\frac{17}{90}W + \frac{8}{9} \frac{BW}{R} \right) + \frac{4}{9}\alpha^4 \frac{W^2}{R} \right) \right) E^2. \end{aligned} \quad (2.84)$$

À l'ordre le plus bas en  $\alpha$  (2.69) s'écrit donc

$$\text{CIS} = -\text{DIS} = \frac{2}{3R}, \quad \text{ECI} = \text{TES} = \text{PRE} = \text{REY} = 0. \quad (2.85)$$

L'énergie tirée de l'écoulement principal est totalement dissipée par la viscosité et, puisque l'énergie cinétique contenue dans la perturbation ne varie pas ( $\text{ECI} = 0$ ), on retrouve que l'axe  $\alpha = 0$  fait partie de la courbe de stabilité marginale.

Le calcul précédent [62] indique que le travail du tenseur de Reynolds, REY est faible devant celui du cisaillement à l'interface, CIS. De plus, l'énergie cinétique de

perturbation (ECI) et les énergies potentielles de gravité (PRE) et de tension superficielle (TES) croissent proportionnellement au taux de croissance  $\Im(c)$  conformément aux études numériques de Kelly *et al.* [72]. Ainsi l'énergie de la perturbation est extraite de l'écoulement principal par le biais du cisaillement à l'interface CIS et non du tenseur de Reynolds.

Intéressons-nous donc plus en détail au bilan du cisaillement à l'interface et utilisons des arguments semblables à ceux développés par Kelly *et al.* [72] et Hinch [59]. Notons  $\omega_1 = \Re(\Omega(y) \exp(i\alpha(x - ct)))$ , la perturbation de vorticité  $\partial_x v_1 - \partial_y u_1$ . Dérivant (2.27) par rapport à  $y$  et (2.28) par rapport à  $x$  puis faisant la différence, on obtient l'équation bilan de la vorticité,

$$(\partial_t + U\partial_x)\omega_1 - v_1 U''(y) = \frac{1}{3R}(\partial_{xx} + \partial_{yy})\omega_1. \quad (2.86)$$

Développons  $\Omega$  en série  $\Omega = \Omega_0 + i\alpha\Omega_1 \dots$ . La solution à l'ordre le plus bas (2.45), p. 31, fournit  $\Omega_0 = -2$ . La perturbation de vorticité est alors en opposition de phase avec le déplacement de la surface libre qui n'est alors ni amplifié ni amorti. À l'ordre  $\mathcal{O}(\alpha)$  le cisaillement est l'opposé de la vorticité,

$$\Omega = -\phi'' + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (2.87)$$

et (2.46), p. 32, se lit

$$\Omega_1'' = 3R[(U - c_0)\Omega_0 + U''\phi_0]. \quad (2.88)$$

Le premier terme au membre de droite correspond à l'advection de la perturbation de vorticité par le mouvement du fluide relatif au déplacement de l'onde. L'advection par la perturbation  $-v_1 U''(y)$  est à l'origine du second terme. Puisque  $\forall y \in [0, 1]$ ,  $c_0 > U$  on a  $(U - c_0)\Omega_0 = 2 - 2y + y^2 > 0$ , terme partiellement compensé par  $U''\phi_0 = -y^2 < 0$  d'où  $\Omega_1'' = 6R(1 - y) > 0$ . La continuité de la contrainte tangentielle (2.48) à l'interface s'écrit

$$\Omega_1'(1) = -\frac{B}{c_0 - 1/2}\phi_0(1) + 3R(c_0 - 1/2)\phi_0'(1). \quad (2.89)$$

Une condition aux limites supplémentaire est alors requise afin de déterminer complètement  $\Omega_1$ . Celle-ci nous est fournie via (2.87) par le choix de la constante  $B_1 = 0$  dans l'expression de  $\phi_1$ , (2.50), p. 32, soit  $\Omega_1(0) = 0$ . Puisque  $\Omega_1(0) = 0$  et  $\Omega_1'' > 0$ , la correction de la vorticité à l'interface  $\Omega_1(1)$  est d'autant plus grande que  $\Omega_1'(1)$  est élevé. Au membre de droite de (2.89) se trouve un terme négatif ( $\propto B$ ) qui correspond à la pression hydrostatique ( $P'(1)h_1$ ), et un terme positif provenant du champ de pression créé par la perturbation ( $p_1$ ) et d'origine inertielle.

Au total  $\Omega_1'(1) = 3R - 2B$ , d'où  $\Omega_1(1) = 2(R - B)$  après intégration. Ainsi la correction  $\Omega_1(1)$  est positive à l'interface si  $R \geq B$ . Le nombre d'onde  $\alpha$  étant petit et notant  $-|\Omega_0| \exp(i\varphi) \equiv \Omega(1) \approx \Omega_0(1) + i\alpha\Omega_1(1) = -2(1 - i\alpha(R - B))$ , on a  $\varphi = \mathcal{O}(\alpha) < 0$ . Par conséquent le maximum en valeur absolue de la perturbation de vorticité à l'interface est placé légèrement en aval de la déformation à l'ordre 0 de l'interface  $\Re(\phi_0(1)/(c_0 - 1/2) \exp[i\alpha(x - ct)]) = 2 \cos[\alpha(x - ct)]$ . Le champ de

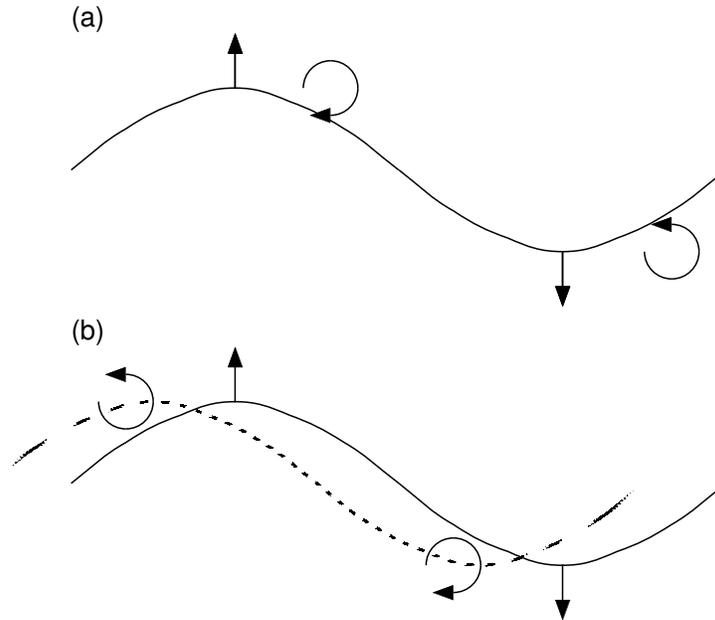


FIG. 2.3 – (a) Déplacement du maximum de vorticité à l'interface par un mécanisme inertiel lorsque  $R \geq B$ . (b) Vorticité créée par l'écoulement moyen et le mouvement de l'interface lorsque  $R \leq \frac{5}{3}B$ .

vitesse induit créé permet ensuite d'amplifier la déformation de l'onde comme le montre le schéma (fig. 2.3a).

L'équation bilan du cisaillement à l'interface (2.49), p. 32, peut se récrire

$$\Omega_1(1) + \frac{1}{c_0 - 1/2} \phi_1(1) = \frac{1}{(c_0 - 1/2)^2} c_1 \phi_0(1), \quad (2.90)$$

et fait apparaître un second terme dont l'origine est le déplacement de l'interface sous l'effet de la correction de la fonction courant soit  $\phi_1(1)/(c_0 - 1/2) = \frac{2}{3}B - \frac{2}{5}R$ . Si  $R \leq \frac{5}{3}B$ , l'interface est déplacée en amont, ce qui entraîne un transport de vorticité,  $-U''\phi_1(1)/(c_0 - 1/2) = \phi_1(1)/(c_0 - 1/2) \geq 0$  vers l'amont dont le champ de vitesse induit sur la perturbation de position de l'interface à l'ordre  $\alpha^0$ ,  $\phi_0(1)/(c_0 - 1/2)$ , contribue à la déstabilisation de l'interface, soit  $c_1 > 0$  (fig. 2.3b).

Notons que nous avons pu nous limiter ici à ne considérer que l'influence du déplacement du maximum de vorticité sur la déformation à l'ordre  $\alpha^0$  de l'interface, puisque les champs induits par ce déplacement sur la déformation à l'ordre  $\alpha$  de l'interface apparaissent à un ordre supérieur. De plus, notre raisonnement est indépendant du choix de la constante  $B_1$  (choix d'une jauge particulière) puisque la somme  $\Omega_1(1) + \phi_1(1)/(c_0 - 1/2)$  fait disparaître cette constante.

On remarque ici trois éléments essentiels identifiés par Smith [109]. Premièrement, l'interface est déformable et le respect de la continuité de la contrainte tangentielle est le moyen par lequel la perturbation puise l'énergie de l'écoulement principal. Ensuite, l'écoulement perturbé à l'ordre le plus bas  $\phi_0$  est entièrement contrôlé par la viscosité et asservi au mouvement de l'interface. Enfin, la mise en

mouvement de l'interface provoquée par  $\phi_0$  se fait à une vitesse  $c_0$  qui n'appartient pas à la gamme de vitesses atteintes à l'intérieur du fluide d'où la possibilité de déplacer le maximum de vorticité à l'interface de manière déstabilisante.

Récemment, Ooshida [89] a obtenu une équation d'évolution pour l'épaisseur du film  $h$  (cf.    3.2 et éq. (3.39)) qui peut se décomposer en une hiérarchie de deux équations d'ondes [118]. Les ondes solutions de la première équation sont d'origine cinématique et leur vitesse au premier ordre est  $c_0$  tandis que les ondes correspondant à la deuxième équation tirent leur origine de l'équilibre entre l'inertie du fluide, la tension superficielle et la gravité. Or  $c_0$  n'appartient pas à l'intervalle de célérité admis par la deuxième équation, ce qui est alors à l'origine de l'instabilité. Ce résultat confirme le rôle prépondérant joué par l'écart entre la vitesse  $U$  de l'écoulement et la vitesse de propagation des déformations de l'interface dans l'instabilité primaire des films tombants.

En résumé, après avoir posé le problème et présenté le développement asymptotique de Yih [120], nous avons écrit le bilan de l'énergie à l'interface [62] et fait le lien entre les travaux de Kelly *et al.* [72] et de Smith *et al.* [109] afin de présenter le mécanisme de l'instabilité primaire de manière nouvelle en utilisant des arguments empruntés à Hinch [59]. Notre étude met ainsi en évidence le rôle de l'inertie dans l'apparition d'un déphasage entre la position de l'interface et le champ de vorticité à l'origine de l'instabilité.

# Chapitre 3

## Brève revue des principaux modèles

La recherche de modèles pouvant se substituer aux équations de Navier–Stokes pour décrire la dynamique non-linéaire des films tombants a été très active, des premiers travaux théoriques de Kapitza [68] jusqu’à ce jour. Ce chapitre n’a pas la prétention de se substituer aux différentes revues déjà existantes [50, 21, 2, 34] ni de faire un bilan exhaustif des dernières avancées, mais de placer le cadre dans lequel les modèles décrits au chapitre suivant ont été conçus.

Après avoir obtenu les équations primitives du problème formulées aux premier puis second ordre vis-à-vis du gradient et mis en évidence l’analogie de ces équations avec les équations de Prandtl pour la couche limite (§ 3.1), nous aborderons les équations dites «de surface» ne faisant intervenir que l’épaisseur du film mais seulement valide au voisinage du point critique (§ 3.2), puis leur développement en amplitude (§ 3.3). Enfin, nous aborderons les équations intégrées (ou moyennées) suivant l’épaisseur du film (§ 3.4).

### 3.1 Équations de couche limite

L’étude linéaire démontre que la première instabilité du film est bidimensionnelle et se produit aux petits nombres d’ondes. La largeur de l’intervalle instable est fixée par la tension superficielle et l’écart au seuil  $R - R_c$ . De même, l’expérience montre que les ondes non-linéaires observées sont de grande longueur d’onde et restent bidimensionnelles sur une grande partie du plan incliné avant d’être transversalement déstabilisées. D’autre part, les ondes solitaires bidimensionnelles apparaissant lorsque le film est périodiquement forcé à suffisamment basse fréquence sont précédées d’oscillations de longueur proche du nombre d’onde marginalement stable (cf.[81]).

L’échelle des variations d’épaisseur du film étant beaucoup plus grande que  $h_N$ , introduisons un petit paramètre formel  $\epsilon \ll 1$  exprimant la lenteur des variations en temps et en espace,  $\partial_x$  et  $\partial_t$ . D’où la transformation  $\partial_t \rightarrow \epsilon \partial_t$  et  $\partial_x \rightarrow \epsilon \partial_x$ .

L'équation de continuité s'écrit

$$\epsilon \partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (3.1)$$

qui montre que  $\partial_y v$  est un terme d'ordre  $\epsilon$ , donc également  $v$ , ce qui suggère la transformation  $v \rightarrow \epsilon v$ . Le reste du système d'équations s'écrit alors

$$\partial_{yy} u + 1 = \epsilon (\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u + \partial_x p) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.2)$$

$$\partial_y p + B = \epsilon \partial_{yy} v + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.3)$$

avec les conditions aux limites en  $y = h$

$$v|_h = \partial_t h + u|_h \partial_x h, \quad (3.4)$$

$$p|_h = 2\epsilon \partial_y v|_h - \Gamma \epsilon^2 \partial_{xx} h + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.5)$$

$$\partial_y u|_h = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.6)$$

et en  $y = 0$

$$u|_0 = v|_0 = 0. \quad (3.7)$$

Seul le terme d'ordre  $\epsilon^2$  correspondant à la tension superficielle a été conservé. Ce dernier ne peut en effet pas être négligé car c'est lui qui détermine la largeur de la bande de nombres d'ondes instables et assure la validité de l'hypothèse d'évolution lente en espace et en temps. Intégrant (3.3) entre  $y$  et  $h$  à l'aide de (3.5) et (3.7), on obtient

$$p = B(h - y) + \epsilon (\partial_y v + \partial_y v|_h) - \Gamma \epsilon^2 \partial_{xx} h + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.8)$$

Puis substituant  $p$  dans (3.2) on est conduit à

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u - \partial_{yy} u = 1 - B \partial_x h + \Gamma \partial_{xxx} h, \quad (3.9)$$

d'où le paramètre formel  $\epsilon$  a été omis. Comme dans la théorie des couches limites, la séparation des échelles selon  $x$  et  $y$  permet de négliger les termes d'inertie de l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction normale à l'interface et d'éliminer la pression du problème initial. C'est pourquoi on appelle (3.9) *équation de couche limite* [76, 33, 21]. L'équation (3.9) associée à l'équation de continuité (3.1) et aux conditions aux limites (3.4, 3.6, 3.7) a été le sujet de nombreuses études numériques [20, 103, 27, 121].

Partant des équations complètes (2.13–2.21), Chang *et al.* [22] ont étudié la version tridimensionnelle de (3.9)

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x(u^2) + \partial_y(uv) + \partial_z(uw) &= 1 - B \partial_x h + \Gamma(\partial_{x^3} + \partial_{xz^2})h, \\ \partial_t w + \partial_x(uw) + \partial_y(vw) + \partial_z(w^2) &= -B \partial_z h + \Gamma(\partial_{x^3} + \partial_{xz^2})h, \end{aligned} \quad (3.10)$$

obtenue en employant la relation  $u \partial_x \varphi + v \partial_y \varphi + w \partial_z \varphi = \partial_x(u\varphi) + \partial_y(v\varphi) + \partial_z(w\varphi) - \varphi(\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w)$ .

Introduisant les nombres de Reynolds  $R = \frac{1}{3} h_N^3$  et de Weber  $W = \Gamma/h_N^2$  et avec les mêmes notations que précédemment, l'étude de stabilité linéaire de (3.9) conduit à résoudre

$$\phi''' - i\alpha R(U - c)\phi' + i\alpha R U' \phi - i\alpha B - i\alpha^3 W = 0, \quad (3.11)$$

avec les conditions aux limites,  $\phi''(1) = 1$ ,  $\phi(1) = c - 1/2$ ,  $\phi(0) = 0$  et  $\phi'(0) = 0$ , dont le développement au voisinage de  $\alpha = 0$  donne pour le problème temporel ( $\alpha$  réel)

$$\begin{aligned} c = & 1 + i\alpha \left( \frac{2}{5}R - \frac{1}{3}B \right) + \alpha^2 \left( \frac{10}{21}BR - \frac{4}{7}R^2 \right) \\ & + i\alpha^3 \left( \frac{3097}{2475}BR^2 - \frac{98342}{75075}R^3 - \frac{2}{15}B^2R - \frac{1}{3}W \right) + \mathcal{O}(\alpha^4), \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ainsi le seuil d'instabilité est encore donné par  $R_c = 5B/6$  et lorsque les effets de tension superficielle sont les effets stabilisants dominants, la courbe de stabilité marginale peut encore être approximée par (2.77). La comparaison par Yu *et al.* des courbes de stabilité marginale de (3.11) et Orr–Sommerfeld (2.36) (fig. 4 [121]) montre de plus que celles-ci sont voisines jusqu'à  $R \sim 50$ . Les tracés des familles principales d'ondes stationnaires périodiques et bidimensionnelles (*i.e.* invariants par translation selon la direction transverse à l'écoulement) par Salamon *et al.* [103] pour les équations de couche limite et Navier–Stokes entre  $3.4 \leq R \leq 7.6$  et  $43 \leq W \leq 214.7$  indiquent que les diagrammes (vitesse–nombre d'onde) sont qualitativement en accord. Notons de plus que les simulations de la dynamique des ondes bidimensionnelles par Chang *et al.* [27] à l'aide de (3.9) sont qualitativement semblables à l'expérience. En effet, on observe la formation désordonnée en temps et en espace d'ondes solitaires interagissant les unes avec les autres. Ainsi les équations de couche limite retiennent la plupart des aspects de la dynamique des ondes bidimensionnelles à la surface du film mince.

Toutefois, (3.11) ne tient pas compte des effets dispersifs provenant des termes de dissipation visqueuse du second ordre  $\propto \partial_{xx}$  d'où l'écart entre les termes  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  de (3.12) et ceux de (2.62). Or, la pression n'intervenant dans (3.2) qu'au travers de son gradient, une simple approximation à l'ordre  $\epsilon$  de cette-dernière aurait également permis d'aboutir à (3.9). Il est donc possible d'éliminer la pression à l'ordre suivant. Ainsi, en conservant tous les termes d'ordre au plus  $\epsilon^2$ , au lieu de (3.2) on a l'équation exacte,

$$\partial_{yy}u + 1 = \epsilon (\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + \partial_x p) - \epsilon^2 \partial_{xx}u. \quad (3.13)$$

de même, à la place de (3.6) on a

$$\partial_y u|_h = 2\partial_x h (\partial_x u|_h - \partial_y v|_h) - \partial_x v|_h, \quad (3.14)$$

où le paramètre formel  $\epsilon$  a été omis. La substitution de (3.8) dans (3.13), conduit à

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - (\partial_{yy} + 2\partial_{xx})u = 1 + \partial_x [\partial_x u|_h] - B\partial_x h + \Gamma\partial_{xxx}h. \quad (3.15)$$

Le système (3.1,3.15) accompagné des conditions aux limites (3.4,3.7,3.14) est cohérent à l'ordre  $\epsilon^2$  et tient compte des effets visqueux  $\propto \partial_{xx}$ . Ce système est cependant plus difficile à étudier essentiellement parce que la condition à la limite (3.14) n'est pas homogène en espace contrairement à (3.6).

Le système (3.1,3.15,3.4,3.7,3.14) inclut tous les termes d'ordre  $\epsilon^2$  à l'exception de l'inertie associée au mouvement vertical des particules fluides,  $-\epsilon^2(\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v)$

au membre de droite de (3.3). Dans le cas des couches limites près d'une paroi incurvée ces termes peuvent ne pas être négligeables car la courbure de la paroi impose un mouvement vertical des particules fluides dans le repère tangent. Ainsi les équations à l'ordre 2 de couches limites près d'une paroi courbée ([104] p. 146) approche le gradient de pression par un terme proportionnel à la courbure de la paroi et au carré de la vitesse. Dans le problème d'un écoulement le long d'un plan incliné, la courbure des lignes de courants, et par conséquent l'advection des particules fluides dans la direction normale à la paroi, est reliée à la courbure de la surface libre. Ainsi Yu *et al.* [121] ont eu l'idée de modéliser l'inertie normale au plan par un terme heuristique  $\propto u^2 \partial_{xx} h$ . Leur étude linéaire montre que leur modèle heuristique approxime raisonnablement la courbe de stabilité marginale obtenue à l'aide de Orr–Sommerfeld jusqu'à un nombre de Reynolds élevé.

## 3.2 Équations de surface libre

Les équations de couche limite (3.9) ou (3.15) ne constituent pas un réel progrès en vue de simplifier le problème initialement posé. Ces équations ont en effet la même dimensionnalité physique que les équations de Navier–Stokes. Par conséquent, la recherche des solutions de (3.9) ou (3.15) requiert à nouveau de suivre le mouvement de l'interface au cours du calcul et de modifier le maillage en conséquence, chose difficile et d'un coût numérique élevé. On a donc recherché très tôt [9] à éliminer le champ de vitesse de manière à obtenir une formulation sous forme d'une ou plusieurs équations d'évolution pour l'épaisseur du film  $h$  et d'autres variables ne dépendant que du temps  $t$  et de la position en  $x$ . Le problème à résoudre s'en trouve ainsi grandement simplifié, le maillage pouvant être choisi fixe au cours du temps.

Une façon de s'affranchir de la dépendance du champ de vitesse suivant  $y$  est d'effectuer un développement en gradient.

En effet, le nombre d'onde critique est nul et la bifurcation conduisant de la solution de Nusselt à des trains d'ondes saturées est supercritique. Par conséquent, il est toujours possible pour tout  $\epsilon_0$  et par continuité de trouver un voisinage autour du nombre de Reynolds critique  $R_c$ , ( $|R - R_c| < \eta(\epsilon_0)$ ) pour lequel  $\epsilon \leq \epsilon_0$  reste vrai même aux temps longs. Près de  $R_c$ , on peut donc supposer  $\epsilon R \ll 1$ . Cette hypothèse permet de négliger au premier ordre les effets inertiels contenus dans  $D\mathbf{u}/Dt$  devant les effets visqueux. Suivant la démarche adoptée par Benney on peut alors déterminer la fonction courant, les champs de vitesse et de pression sous la forme d'un développement asymptotique,  $\psi = \psi^{(0)} + \epsilon\psi^{(1)} + \dots$ ,  $u = u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \dots$ ,  $v = v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \dots$  et  $p = p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \dots$ . Reformulons alors le problème précédent en terme de fonction courant. Par simplicité, utilisons la jauge dans laquelle la fonction courant vérifie  $\psi|_{y=0} = 0$  (valide car  $u = \partial_x \psi = 0$  en  $y = 0$ ),

$$\begin{aligned} \partial_{yyy}\psi + 1 &= \epsilon [\partial_{yt}\psi + \partial_y\psi\partial_{xy}\psi - \partial_x\psi\partial_{yy}\psi + \partial_x p] - \epsilon^2 \partial_{xxy}\psi, \\ \partial_y p + B &= -\epsilon\partial_{xyy}\psi + \epsilon^2 [\partial_{xt}\psi + \partial_y\psi\partial_{xx}\psi - \partial_x\psi\partial_{xy}\psi] - \epsilon^3 \partial_{xxx}\psi, \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\partial_t h + \partial_x [\psi(h)] = 0, \quad (3.17)$$

et les conditions aux limites en  $y = h$  :

$$\begin{aligned}\partial_{yy}\psi &= \epsilon^2 [4\partial_x h \partial_{xy}\psi + \partial_{xx}\psi] + \mathcal{O}(\epsilon^4), \\ p &= -2\epsilon \partial_{xy}\psi - \Gamma \epsilon^2 \partial_{xx}h + \mathcal{O}(\epsilon^3),\end{aligned}\tag{3.18}$$

et en  $y = 0$  :  $\partial_y\psi = 0$ .

Le problème apparaît ainsi comme un problème de perturbation d'un système affine que nous noterons  $\mathcal{L}$  et qui s'écrit en introduisant  $\bar{y} = y/h$  :

$$\begin{aligned}\frac{d^3\psi}{d\bar{y}^3} + h^3 &= 0, \\ \frac{dp}{d\bar{y}} + Bh &= 0, \\ \frac{d^2\psi}{d\bar{y}^2} &= 0, \quad \text{en } \bar{y} = 1, \\ p &= 0, \quad \text{en } \bar{y} = 1,\end{aligned}\tag{3.19}$$

où  $\psi$  et  $p$  appartiennent à l'ensemble des fonctions infiniment différentiables s'annulant et vérifiant  $\psi_{\bar{y}} = 0$  à la paroi. Le système  $\mathcal{L}$  exprime l'équilibre du fluide sous l'influence de la gravité et de la viscosité. Notons que le temps n'apparaît pas explicitement dans le problème  $\mathcal{L}$ . En effet, les effets perturbatifs de l'inertie et de la tension superficielle s'établissent sur une échelle de temps longue correspondant au temps inertiel  $t_{\text{in}} = L/u_N$ , où  $L$  désigne l'échelle des variations d'épaisseur soit  $h_N/L \sim \epsilon$ , alors que l'équilibre gravité/viscosité s'effectue sur une échelle de temps rapide correspondant au temps de diffusion visqueuse  $t_\nu = h_N^2/\nu$ , où  $\nu$  désigne la viscosité. Ainsi, l'absence de dérivées par rapport au temps dans le système  $\mathcal{L}$  traduit l'élimination adiabatique de la dynamique à temps court correspondant au rétablissement de l'équilibre gravité/viscosité. De plus, l'absence de dérivées en espace dans  $\mathcal{L}$  permet de séparer les variables et de faire jouer à l'épaisseur, locale et à un instant donné,  $h$  du film le rôle d'une échelle de longueur. La solution de  $\mathcal{L}$  est une *solution semblable* :

$$\psi^{(0)} = -\frac{h^3}{2} \left[ \frac{\bar{y}^3}{3} - \bar{y}^2 \right] \quad \text{et} \quad p^{(0)} = Bh(1 - \bar{y}).\tag{3.20}$$

Au sens de la théorie des couches limites ([104] p. 152), une solution est considérée comme telle si deux profils de vitesse  $u(x, y)$  à des abscisses  $x_1$  et  $x_2$  différentes ne diffèrent que par un facteur d'échelle de vitesse et d'échelle de longueur en ordonnée. On peut écrire cette condition sous la forme :

$$\frac{u(x_1, y/Y_1)}{U_1} = \frac{u(x_2, y/Y_2)}{U_2}.\tag{3.21}$$

Ici, la géométrie de l'écoulement impose  $Y_1 = h(x_1)$  et  $Y_2 = h(x_2)$ .

De plus,  $\psi^{(0)}$  et  $p^{(0)}$  peuvent s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes en  $h$  et  $\bar{y}$ . Notons de façon formelle  $\mathbf{P}(\bar{y}, n)$ , un polynôme de degré  $n$  de la variable  $\bar{y}$ . Ainsi,

$$\psi^{(0)} = h^3 \mathbf{P}(\bar{y}, 3) \quad \text{et} \quad p^{(0)} = Bh \mathbf{P}(\bar{y}, 1),$$

Il nous reste à résoudre à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\partial_{yyy}\psi^{(1)} &= \partial_{yt}\psi^{(0)} + \partial_y\psi^{(0)}\partial_{xy}\psi^{(0)} - \partial_x\psi^{(0)}\partial_{yy}\psi^{(0)} + \partial_x p^{(0)}, \\ \partial_y p^{(1)} &= -\partial_{xyy}\psi^{(0)}, \\ \partial_{yy}\psi^{(1)} &= 0, \quad \text{en } y = h, \\ p^{(1)} &= -2\partial_{xy}\psi^{(0)}, \quad \text{en } y = h,\end{aligned}\tag{3.22}$$

Le monôme de degré le plus élevé de  $\psi^{(0)}$  et  $p^{(0)}$  ne dépendant pas de  $h$ ,  $\partial_x\psi^{(0)} = h\partial_x h \mathbf{P}(\bar{y}, 2)$ ,  $\partial_t\psi^{(0)} = h\partial_t h \mathbf{P}(\bar{y}, 2)$  et  $\partial_x p^{(0)} = B\partial_x h$ . D'où :

$$\begin{aligned}\psi^{(1)} &= h^4\partial_t h \mathbf{P}(\bar{y}, 4) + h^6\partial_x h \mathbf{P}(\bar{y}, 5) + B h^3\partial_x h \mathbf{P}(\bar{y}, 3), \\ p^{(1)} &= h\partial_x h \mathbf{P}(\bar{y}, 1),\end{aligned}$$

Or l'équation de continuité (3.17) permet de définir une approximation pour  $\partial_t h$  :

$$\partial_t h = -h^2\partial_x h + \mathcal{O}(\epsilon),\tag{3.23}$$

et finalement :

$$\psi^{(1)} = \frac{1}{6}h^6\partial_x h \left[ \frac{\bar{y}^5}{20} - \frac{\bar{y}^4}{4} + \bar{y}^2 \right] + \frac{B}{2}h^3\partial_x h \left[ \frac{\bar{y}^3}{3} - \bar{y}^2 \right],\tag{3.24}$$

D'où une approximation au premier ordre de  $\partial_t h$  :

$$\partial_t h = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \psi^{(0)}(h) + \epsilon \psi^{(1)}(h) \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2),\tag{3.25}$$

De même, le problème au deuxième ordre s'écrit :

$$\begin{aligned}\partial_{yyy}\psi^{(2)} &= \partial_{yt}\psi^{(1)} + \partial_y\psi^{(0)}\partial_{xy}\psi^{(1)} + \partial_y\psi^{(1)}\partial_{xy}\psi^{(0)} - \partial_x\psi^{(0)}\partial_{yy}\psi^{(1)} \\ &\quad - \partial_x\psi^{(1)}\partial_{yy}\psi^{(0)} + \partial_x p^{(1)} + \mathbf{R}(\partial_{yt}\psi^{(0)}) - \partial_{xxy}\psi^{(0)}, \\ \partial_y p^{(2)} &= -\partial_{xyy}\psi^{(1)} + \partial_{xt}\psi^{(0)} + \partial_y\psi^{(0)}\partial_{xx}\psi^{(0)} - \partial_x\psi^{(0)}\partial_{xy}\psi^{(0)}, \\ \partial_{yy}\psi^{(2)} &= 4\partial_x h\partial_{xy}\psi^{(0)} + \partial_{xx}\psi^{(0)}, \quad \text{en } y = h, \\ p^{(2)} &= -2\partial_{xy}\psi^{(1)} - \Gamma\partial_{xx}h, \quad \text{en } y = h,\end{aligned}\tag{3.26}$$

où  $\mathbf{R}(\partial_{yt}\psi^{(0)})$  est le reliquat introduit par l'approximation au premier ordre de  $\partial_t h$ , (3.25). D'où, après élimination des dérivées par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\psi^{(2)} &= h^{10}\partial_{xx}h \left[ -\frac{1}{40320}\bar{y}^9 + \frac{1}{4480}\bar{y}^8 - \frac{1}{1260}\bar{y}^7 + \frac{1}{720}\bar{y}^6 + \frac{1}{360}\bar{y}^5 - \frac{7}{360}\bar{y}^4 + \frac{5}{63}\bar{y}^2 \right] \\ &+ h^9\partial_x h^2 \left[ -\frac{1}{40320}\bar{y}^9 + \frac{1}{4480}\bar{y}^8 - \frac{1}{720}\bar{y}^7 + \frac{1}{180}\bar{y}^6 + \frac{1}{72}\bar{y}^5 - \frac{31}{180}\bar{y}^4 + \frac{158}{315}\bar{y}^2 \right] \\ &+ B h^7\partial_{xx}h \left[ -\frac{1}{2520}\bar{y}^7 + \frac{1}{360}\bar{y}^6 - \frac{1}{60}\bar{y}^5 + \frac{1}{18}\bar{y}^4 - \frac{1}{5}\bar{y}^2 \right] \\ &+ B h^6(\partial_x h)^2 \left[ -\frac{1}{30}\bar{y}^5 + \frac{1}{6}\bar{y}^4 - \frac{2}{3}\bar{y}^2 \right] \\ &+ h^4\partial_{xx}h \left[ -\frac{1}{12}\bar{y}^4 - \frac{1}{6}\bar{y}^3 + \frac{5}{4}\bar{y}^2 \right] + h^3(\partial_x h)^2 \left[ -\frac{1}{6}\bar{y}^3 + \frac{5}{2}\bar{y}^2 \right],\end{aligned}\tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}p^{(2)} &= h^5\partial_{xx}h \mathbf{P}(\bar{y}, 4) + h^4(\partial_x h)^2 \mathbf{P}(\bar{y}, 3) + B h^2\partial_{xx}h \mathbf{P}(\bar{y}, 3) \\ &+ B h(\partial_x h)^2 \mathbf{P}(\bar{y}, 2) - \Gamma\partial_{xx}h,\end{aligned}\tag{3.28}$$

On observe que le monôme de plus haut degré de  $\psi^{(2)}$  provient de l'interaction inertielle entre  $\psi^{(0)}$  et  $\psi^{(1)}$  au travers des termes  $\partial_y \psi^{(0)} \partial_{xy} \psi^{(1)} - \partial_x \psi^{(1)} \partial_{yy} \psi^{(0)}$  de (3.26). On peut montrer par récurrence que pour  $n \geq 2$ , le monôme de plus haut degré de  $\psi^{(n)}$  est de degré  $4n + 1$  et provient des termes inertiels  $\partial_y \psi^{(0)} \partial_{xy} \psi^{(n-1)} - \partial_x \psi^{(n-1)} \partial_{yy} \psi^{(0)}$ . De plus, les coefficients de ces monômes, notés  $c_n$  sont reliés par la relation.

$$c_{n+1} = -\frac{4n-1}{2(4n+3)(4n+4)(4n+5)} c_n. \quad (3.29)$$

Par conséquent, les coefficients  $c_n$  deviennent rapidement très petits et les monômes de degrés les plus grands de  $\psi^{(n)}$  contribuent très peu au calcul de la correction à l'ordre  $n$  du débit instantané local  $\psi^{(n)}(1)$ .

À l'ordre 3, on obtient, en notant  $P_H(h^n, \partial_x^m)$ , un polynôme homogène de  $h$  et de ses dérivées successives par rapport à  $x$  de degré  $n$  et pour lequel chaque monôme a un indice de dérivation de  $m$  :

$$\begin{aligned} \psi^{(3)} = & P_H(h^{15}, \partial_x^3) \partial(\bar{y}, 13) + B P_H(h^{12}, \partial_x^3) \partial(\bar{y}, 11) + B^2 P_H(h^9, \partial_x^3) \partial(\bar{y}, 7) \\ & + P_H(h^9, \partial_x^3) \partial(\bar{y}, 8) + B P_H(h^6, \partial_x^3) \partial(\bar{y}, 5) - \frac{3\Gamma}{2} h^3 \partial_{xxx} h \left[ \frac{\bar{y}^3}{3} - \bar{y}^2 \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

Finalement on obtient l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t h + A(h) \partial_x h + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \{B(h) \partial_x h\} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \{C(h) \partial_{xx} h + D(h) (\partial_x h)^2\} \\ + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \{E(h) \partial_{xxx} h + F(h) \partial_x h \partial_{xx} h + G(h) (\partial_x h)^3\} = \mathcal{O}(\epsilon^4), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \text{où : } A(h) &= h^2, \quad B(h) = \frac{2}{15} h^6 - \frac{B}{3} h^3, \quad C(h) = \frac{4}{63} h^{10} - \frac{10}{63} B h^7 + h^4, \\ D(h) &= \frac{127}{315} h^9 - \frac{8}{15} B h^6 + \frac{7}{3} h^3, \\ E(h) &= \frac{75872}{2027025} h^{14} - \frac{17363}{155925} B h^{11} + \frac{2}{45} B^2 h^8 + \frac{471}{672} h^8 - \frac{3}{5} B h^5 + \frac{1}{3} \Gamma h^3, \\ F(h) &= \frac{77390}{81081} h^{13} - \frac{26587}{14175} B h^{10} + \frac{134}{315} B^2 h^7 + \frac{2365}{252} h^7 - 4B h^4, \\ G(h) &= \frac{4016}{1575} h^{12} - \frac{1763}{567} B h^9 + \frac{2}{5} B^2 h^6 + \frac{1069}{90} h^6 - \frac{7}{3} B h^3. \end{aligned}$$

Les résultats précédents ont été obtenus par Nakaya [84] et vérifiés à l'aide du logiciel de calcul formel MATHEMATICA. Ce calcul se généralise sans difficulté particulière au cas tridimensionnel où conservant tous les termes jusqu'à l'ordre  $\epsilon^2$  on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t h + A(h) \partial_x h + \frac{\partial}{\partial x} [B(h) \partial_x h + C(h) \partial_{xx} h + C_1(h) \partial_{zz} h + D(h) (\partial_x h)^2 \\ + D_1(h) (\partial_z h)^2] + \frac{\partial}{\partial z} [B_1(h) \partial_z h + A_2(h) \partial_{xz} h + B_2(h) \partial_x h \partial_z h] \\ + \frac{\Gamma}{3} h^3 (\Delta_2)^2 h + \Gamma h^2 (h \partial_x + h \partial_z) (\Delta_2) h = 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont définis comme plus haut et

$$\begin{aligned} A_2(h) &= \frac{19}{24} h^4 - \frac{8}{105} B h^7, \quad B_1(h) = -\frac{B}{3} h^3, \quad B_2(h) = -\frac{11}{6} h^3 - \frac{2}{5} B h^6, \\ C_1(h) &= \frac{5}{24} h^4 - \frac{26}{315} B h^7, \quad D_1(h) = \frac{1}{2} h^3 - \frac{2}{15} B h^6, \end{aligned}$$

Notons qu'il est nécessaire de pousser le développement au moins jusqu'au troisième ordre afin de trouver une plage limitée de nombres d'onde linéairement instables ( $\alpha_c = \sqrt{B(1)/E(1)}$ ) et de retenir les effets de la tension superficielle. Suivant les travaux de Kapitza [68] on fait généralement l'hypothèse que le film est stabilisé par la tension superficielle ce qui conduit à ne retenir que le terme  $\Gamma h^3 \partial_{xxx} h$  de  $\psi^{(3)}(h)$ . Cette hypothèse n'est justifiée que pour de grande tension superficielle, situation correspondant à la plupart des liquides usuels. La plage de nombres d'ondes instables est alors déterminée par la compétition inertie/tension superficielle (cf. équation (2.77)) et, du moins au stade linéaire, l'inertie ( $\propto \partial_x h$ ) apparaît au même ordre que la tension de surface ( $\propto \partial_{xxx} h$ ) que l'on rencontre pourtant à un ordre supérieur dans le développement. Cette remarque conduit alors à l'hypothèse supplémentaire  $\Gamma \epsilon^2 = \mathcal{O}(1)$  [53]. On ne retient alors du développement précédent que les termes du premier ordre pour obtenir dans le cas bidimensionnel ( $\partial_z = 0$ ) l'équation suivante généralement appelée *équation de Benney* :

$$\partial_t h + h^2 \partial_x h + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{2}{5} h^6 - B h^3 \right) \partial_x h + \Gamma h^3 \partial_{xxx} h \right\} = 0. \quad (3.33)$$

Le calcul s'étend au second ordre pour conduire à [77]

$$\begin{aligned} & \partial_t h + A(h) \partial_x h + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \{ B(h) \partial_x h + E(h) \partial_{xxx} h \} \\ & + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \{ C(h) \partial_{xx} h + D(h) (\partial_x h)^2 + H(h) (\partial_{xx} h)^2 \\ & + I(h) (\partial_x h)^2 \partial_{xx} h + J(h) \partial_x h \partial_{xxx} h + K(h) \partial_{xxxx} h \} = \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (3.34)$$

où A, B, C et D sont identiques à leur expression dans (3.31) tandis que E se simplifie en  $\frac{1}{3} \Gamma h^3$  et  $H = \frac{4}{5} \Gamma h^6$ ,  $I = \frac{8}{5} \Gamma h^5$ ,  $J = \frac{4}{3} \Gamma h^6$ , et  $K = \frac{10}{63} \Gamma h^7$ .

L'équation de Benney (3.33) peut admettre des familles de solutions stationnaires saturées se prolongeant par des ondes solitaires (longueur d'onde infinie). Pumir *et al.* [95] et Nakaya [85] ont construit les ondes solitaires solution de (3.33). Pumir *et al.* ont de plus montré que (3.33) pouvait conduire à des singularités en un temps fini lorsque le nombre de Reynolds dépassait une valeur limite  $R^*$  proche du seuil au delà duquel aucune onde solitaire à une bosse ne peut être observée. L'explosion de la solution de (3.33) s'accompagne d'un rétrécissement de la zone perturbée et d'une forte croissance de son amplitude.

Ce comportement suggère la recherche d'une loi d'échelle décrivant l'évolution de la partie singulière de la solution de la forme  $h_{\text{sing}} = |t|^{-a} H(x|t|^{-b})$  où l'origine du temps a été placée en  $t^*$ , instant de la singularité. Ne conservant que les termes les plus dangereux et par un changement de variables approprié, Pumir *et al.* ont ainsi obtenu une équation universelle pour  $H$  :

$$-\left( \frac{1}{3} H + \frac{1}{2} X \frac{dH}{dX} \right) + \frac{d}{dX} \left[ H^6 \frac{dH}{dX} + H^3 \frac{d^3 H}{dX^3} \right] = 0, \quad (3.35)$$

avec les coefficients  $a = 1/9$  et  $b = 1/6$ . Faisant le chemin inverse et ne conservant que les termes contribuant à l'écriture de (3.35), on en déduit alors que  $h_{\text{sing}}$  vérifie

dans ce cas :

$$\partial_t h + \frac{1}{3} \partial_x \left\{ \frac{2}{5} h^6 \partial_x h + \Gamma h^3 \partial_{xxx} h \right\} = 0, \quad (3.36)$$

Notons que l'obtention de (3.35) n'est possible que parce que  $(2/5) h^6 \partial_x h$  contient les plus fortes non-linéarités tandis que  $\Gamma h^3 \partial_{xxx} h$  contient les plus fortes dérivées. En effet, considérons l'équation

$$\partial_t h + \partial_x \left( h^3 + \Delta h^m \partial_x h + h^3 \partial_{x^3} h \right) = 0, \quad (3.37)$$

où  $m$  est un entier positif. L'équation (3.37) a été obtenue pour  $m = 3$  par Frenkel [49] dans le contexte d'un film mince s'écoulant le long d'une fibre verticale.<sup>1</sup> Notons que les simulations numériques [73, 50] n'indiquent pas dans ce cas d'explosion en temps fini. pour  $m = 6$ , (3.37) est à nouveau l'équation de Benney (3.33) correspondant à un film vertical ( $B = 0$ ). La figure 3.1 illustre un exemple de conditions initiales pouvant conduire dans ce cas à un comportement singulier.

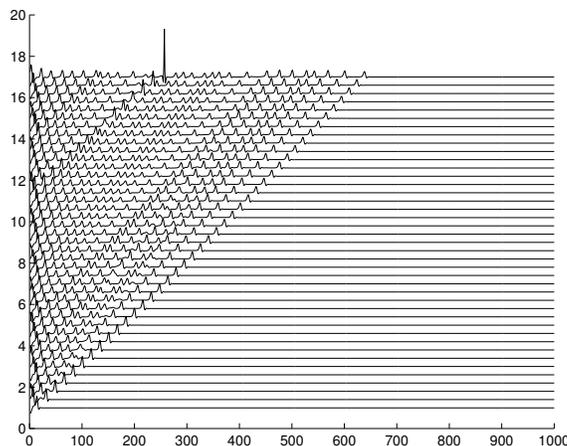


FIG. 3.1 – Diagramme spatio-temporel d'une solution de l'équation de Benney (éq. (3.37) avec  $m = 6$ ) représentant l'épaisseur du film à des intervalles de temps réguliers. L'espace est en abscisse et le temps en ordonnée.  $\Delta = 0.36$  et le film s'écoule de gauche à droite. Celui-ci est forcé par un signal périodique légèrement bruité.

La recherche d'une loi d'échelle pour cette équation de la forme  $h_{\text{sing}} = |t|^{-a} H(x|t|^{-b})$  ne conduit cette fois-ci à un résultat similaire à (3.35) que lorsque  $m > 3$ . De plus, le tracé des familles d'ondes solitaires à une bosse vérifiant  $h \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow \pm\infty$  dans le plan  $\Delta$  versus célérité  $c$  présente un point tournant pour  $m > 3$ . Au delà de la valeur  $\Delta^*$  correspondante, (3.37) n'admet plus de solutions sous forme d'ondes solitaires à une bosse (cf. fig. 3.2) Ces résultats renforcent la conjecture faite par Hocherman et Rosenau [61] selon laquelle l'équation (3.37) conduit à des singularités en un temps fini lorsque  $m > 3$ . Récemment Bertozzi et Pugh [11]

<sup>1</sup>ce qui en fait est la configuration retenue au départ par Kapitza & Kapitza. Toutefois, le rayon de courbure de la fibre est alors suffisamment faible pour que les effets de tension superficielle causés par la courbure domine sur l'inertie du film.

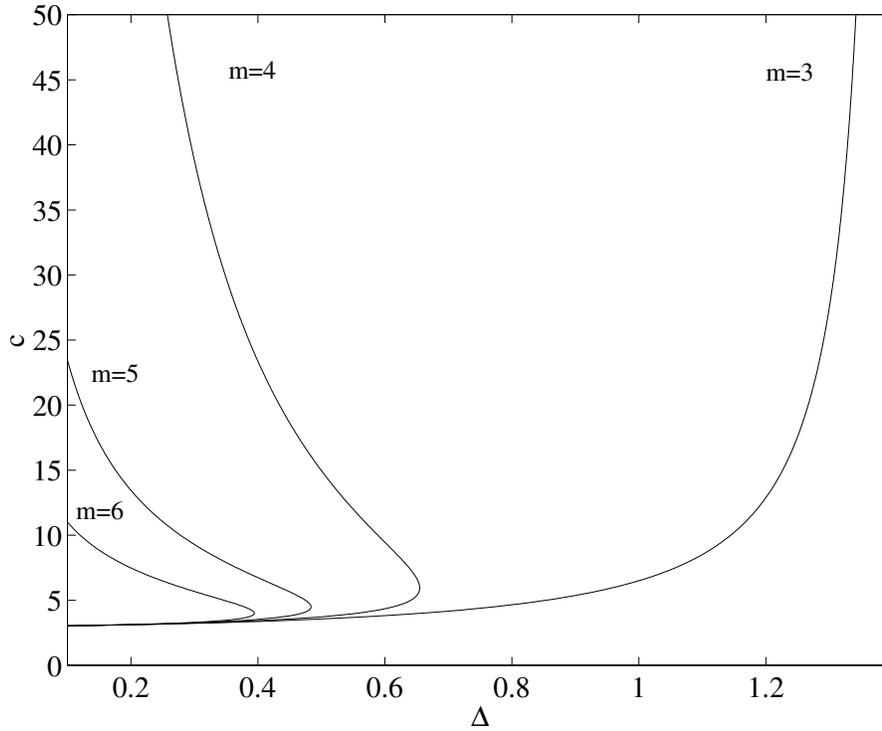


FIG. 3.2 – Lieu de la famille d’ondes solitaires à une bosse solution de (3.37) pour différentes valeurs de  $m$  dans le plan célérité  $c$  versus  $\Delta$

ont montré que (3.37) ne pouvait conduire à des singularités en temps fini pour des conditions aux limites périodiques, une condition initiale de moyenne suffisamment faible et  $m \leq 5$ . Rosenau *et al.* ont de plus étudié le comportement des solutions périodiques de l’équation de Benney (3.33) pour un film vertical, soit (3.37) avec  $m = 6$ , et pour une condition initiale  $h(x, 0) = 1 - \cos(\omega x)$  lorsque  $\omega$  varie (cf. fig. 2 de [100]). Pour  $\omega \approx 5.5$ , la limite  $\Delta^*$  entre solutions uniformément bornées et comportement singulier se trouve en  $\Delta^* \approx 0.5$ . De même, pour  $\omega \approx 3.2$ ,  $\Delta^*$  semble donc dépendre assez peu de la fréquence  $\omega$  et en assez bon accord avec la valeur du point tournant de la figure 3.2,  $\Delta = 0.39$ .

Il semble donc que le comportement singulier rencontré avec l’équation de Benney (3.33) tire son origine de la très forte non-linéarité provenant des termes inertiels,  $\partial_x(h^6 \partial_x h)$ . De plus ce comportement est probablement lié à la présence ou non de solutions sous formes d’ondes solitaires pour les valeurs des paramètres considérées.

Ainsi, le développement en ondes longues de Benney possède deux grandes limitations.

La première est intrinsèque et provient de l’utilisation de la séparation des échelles de temps inertielle et visqueuse dont le rapport est  $\epsilon$  d’où la nécessité de travailler au voisinage du point critique où cette séparation d’échelles est effective. Soit  $q = \int_0^h u(\eta) d\eta = \psi(h)$ , le débit instantané (quantité de mouvement). Le développement asymptotique de Benney exprime  $q$  sous la forme d’une série,

$q = q^{(0)} + \epsilon q^{(1)} \dots$ , fonction de  $h$  et de ses dérivées spatiales, qu'il faut tronquer en retenant les termes significatifs. La dynamique du film est alors complètement asservie à sa cinématique au travers de l'équation de continuité sous forme intégrale

$$\partial_t h + \partial_x q = 0, \quad (3.38)$$

exprimant la conservation de la masse. Ainsi, suffisamment loin du point critique, on s'attend à ce que la dynamique du film ne puisse plus être décrite par la seule évolution de la surface libre et que d'autres variables liées au champ de vitesse doivent être introduites (révolte des modes esclaves).

La deuxième est la présence d'un comportement singulier en un temps fini qui n'a pas de signification physique (expérimentalement, le film ne se rompt pas) et qui limite sévèrement la plage de paramètres où le développement est valide. Malheureusement, l'ajout des termes du second ordre conduisant à (3.34) réduit encore cette plage [89, 103], les séries asymptotiques ayant généralement de mauvaises propriétés de convergence. D'où l'idée de régulariser le développement asymptotique qui a récemment conduit Ooshida à formuler une équation d'évolution ne conduisant pas à des singularités quel que soit le nombre de Reynolds [89]

$$\partial_t h - \frac{2}{21} \partial_{xt} (h^5) - \partial_x (h^2 \partial_{xt} h) + \frac{1}{3} \partial_x \left( h^3 - \partial_x \left( \frac{B}{4} h^4 + \frac{36}{245} h^7 \right) + \Gamma h^3 \partial_{x^3} h \right) = 0. \quad (3.39)$$

(3.39) est en effet obtenue en cherchant  $q$  sous la forme du produit d'un opérateur différentiel, noté  $L = Id + \epsilon L^{(1)} + \epsilon^2 L^{(2)}$  fonction de  $h$  et  $\partial_x$ , où  $Id$  représente l'opérateur identité, et du développement de  $q = q^{(0)} + q^{(1)} + q^{(2)}$  écrit par Benney. D'où l'équation :

$$Lq = S = q^{(0)} + \epsilon S^{(1)} + \epsilon S^{(2)}.$$

Puis  $L^{(1)}$  et  $L^{(2)}$  sont identifiés de manière à annuler  $S^{(2)}$ . Ooshida appelle  $L$ , opérateur de régularisation, celui-ci jouant le rôle d'un approximant de Padé en annulant les termes suivants du développement de Benney. Bien que l'obtention de (3.39) constitue un réel progrès sur les équations du type (3.31) ou (3.33), celle-ci sous-estime la vitesse et l'amplitude des ondes observées pour des nombres de Reynolds modérés. Par conséquent, l'usage de (3.39) demeure limité à un voisinage du seuil d'instabilité relativement étroit.

### 3.3 Les modèles faiblement non-linéaires

Les équations issues du développement en gradient ne restent valides qu'au voisinage du point critique où l'amplitude des ondes observées demeure limitée. D'où l'idée de simplifier ces équations en procédant à un développement par rapport à l'amplitude  $\eta$  de la surface libre [9]. On ne conserve alors qu'un faible nombre de termes non-linéaires. Outre la simplification des équations, cette procédure a l'avantage d'éliminer le principal suspect responsable du phénomène d'explosion en un temps fini, c'est-à-dire les très fortes non-linéarités introduites par les effets inertiels. Toute la difficulté de cette étape réside dans le choix des termes que l'on

décide de conserver dans l'équation d'amplitude afin de modéliser correctement la formation des ondes solitaires.

### 3.3.1 L'équation de Korteweg-de Vries

Posons  $h = h_N(1 + \varsigma\eta)$ ,  $\varsigma \ll 1$  et substituons cette expression dans (3.31), il vient :

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \partial_x \eta + 2\varsigma \eta \partial_x \eta + \epsilon \left\{ \left( \frac{2}{5}R - \frac{1}{3}B \right) \partial_{xx} \eta \right\} \\ + \epsilon^2 \left\{ \left( \frac{4}{7}R^2 - \frac{10}{21}RB + 1 \right) \partial_{xxx} \eta \right\} = \mathcal{O}(\varsigma^2) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ceci se réécrit après le changement de variables  $H = 2\eta, \tau = t$  et  $\xi = x - t$  en supposant que  $\varsigma$  est au plus de l'ordre de  $\epsilon^{3/2}$  (hypothèse notée  $H_{3/2}$ ),

$$\partial_\tau H + H \partial_\xi H + \mu \partial_{\xi\xi} H + \vartheta \partial_{\xi\xi\xi} H = 0, \quad (3.41)$$

où  $\mu$  et  $\vartheta$  sont définis par  $\mu = 2(R - R_c)/5$  et  $\vartheta = 4R^2/7 - 10RB/21 + 1 = 4R(R - R_c)/7 + 1$ . Il suffit alors de se placer à la limite de la criticalité,  $R - R_c = \mathcal{O}(\epsilon)$ , pour obtenir l'équation de Korteweg-de Vries

$$\partial_\tau H + H \partial_\xi H + \vartheta \partial_{\xi\xi\xi} H = 0, \quad (3.42)$$

L'équation (3.42) est représentative des milieux fortement dispersifs. Elle possède une famille de solutions [41]

$$H = 3c \left[ \cosh \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{c}{\vartheta} \right)^{1/2} (\xi - c\tau) \right\} \right]^{-2} \quad (3.43)$$

appelées *solitons*, structures localisées qui, à la différence des ondes solitaires généralement observées dans les films, conservent leur identité en cas de collision.

### 3.3.2 L'équation de Kuramoto-Sivashinsky

L'équation de Korteweg-de Vries (3.42) ne tient cependant pas compte des effets inertiels et de la tension superficielle, Ainsi, supposons  $W\epsilon^2 = \mathcal{O}(1)$  et partons de l'équation de Benney (3.33). Son développement en amplitude donne

$$\partial_t \eta + \partial_x \eta + 2\varsigma \eta \partial_x \eta + \epsilon \left\{ \left( \frac{2}{5}R - \frac{1}{3}B \right) \partial_{xx} \eta + \frac{1}{3}W\epsilon^2 \partial_{xxxx} \eta \right\} = \mathcal{O}(\varsigma^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.44)$$

En supposant que  $\varsigma$  est au plus de l'ordre de  $\epsilon$  (hypothèse notée  $H_1$ ), et en faisant le changement de variables :

$$\begin{aligned} T &= \frac{12(R - R_c)^2}{25W} t, & X &= \left[ \frac{6|R - R_c|}{5W} \right]^{\frac{1}{2}} (x - t) \\ \text{et } H &= \frac{25W}{24(R - R_c)^2} \left[ \frac{6|R - R_c|}{5W} \right]^{\frac{1}{2}} \eta, \end{aligned} \quad (3.45)$$

on obtient l'équation de *Kuramoto–Sivashinsky* (KS)

$$\partial_T H + 4H \partial_X H + \varepsilon \partial_{XX} H + \partial_{XXXX} H = 0, \quad (3.46)$$

où  $\varepsilon$  est le signe de  $R - R_c$ . En effet au voisinage de  $R_c$ , le terme  $(2R/5 - B/3)\partial_{xx}\eta$  de (3.44) change de signe, d'où un changement de comportement de l'équation. Cette équation a été étudiée de façon exhaustive. En effet sa simplicité et la richesse de son comportement en font un excellent sujet d'étude du chaos spatio-temporel. Elle a servi en particulier à l'étude de la turbulence de phase dans des modèles de convection car on peut la dériver de l'équation de Ginzburg–Landau complexe par un simple développement en gradient ([83] p. 337).

Les solutions propagatives, stationnaires ou périodiques de KS ont également fait l'objet de nombreux travaux. Citons notamment le travail de Chang [17].

En partant maintenant de l'équation (3.32) on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \partial_x \eta + 2\zeta \eta \partial_x \eta + \epsilon \left\{ \left( \frac{2}{5}R - \frac{1}{3}B \right) \partial_{xx} \eta - \frac{1}{3}B \partial_{zz} \eta \right. \\ \left. + \frac{1}{3}W \epsilon^2 (\partial_{x^2} + \partial_{z^2})^2 \eta \right\} = \mathcal{O}(\zeta^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.47)$$

toujours avec  $(H_1)$ , en faisant le changement de variables précédent et posant de plus

$$Z = \left[ \frac{6|R - R_c|}{5W} \right]^{\frac{1}{2}} z$$

on obtient :

$$\partial_T H + 4H \partial_X H + \varepsilon \partial_{XX} H - \mu_z \partial_{ZZ} H + (\partial_{X^2} + \partial_{Z^2})^2 H = 0, \quad (3.48)$$

où  $\mu_z = (5/6)(B/|R - R_c|)$  est un coefficient de diffusion. Dans le cas d'un plan vertical ( $B = 0$ ),  $\mu_z = 0$  et (3.48) s'écrit alors :

$$\partial_T H + 4H \partial_X H + \varepsilon \partial_{XX} H + (\partial_{X^2} + \partial_{Z^2})^2 H = 0. \quad (3.49)$$

(3.49) a été en premier obtenue par Nepomnyaschy en 1974 [87]. Suivant les notations de Chang *et al.* [22], nous l'appellerons équation de Kuramoto–Sivashinsky 2D (KS2D).

Cependant, l'équation de Kuramoto–Sivashinsky (3.46) ne prend pas en compte de la dispersion des ondes apparaissant avec l'ordre  $\epsilon^2$ . Ainsi, à partir de (3.31) en ne conservant que le terme correspondant à la tension superficielle parmi les termes d'ordre  $\epsilon^3$ , on a

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \partial_x \eta + 2\zeta \eta \partial_x \eta + \epsilon \left( \frac{2}{5}R - \frac{1}{3}B \right) \partial_{xx} \eta \\ + \epsilon^2 \left( \frac{4}{7}R^2 - \frac{10}{21}BR + 1 \right) \partial_{xxx} \eta + \frac{1}{3}W \epsilon^3 \partial_{x^4} \eta = \mathcal{O}(\zeta^2) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (3.50)$$

D'où à l'aide du changement de variables (3.45)

$$\partial_T H + 4H \partial_X H + \varepsilon \partial_{XX} H + \delta \partial_{XXX} H + \partial_{XXXX} H = 0. \quad (3.51)$$

$$\text{avec } \delta = \left[ \frac{15}{2W|R - R_c|} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{4}{7}R(R - R_c) + 1 \right]. \quad (3.52)$$

L'équation (3.51) a été étudiée par de nombreux auteurs [69, 70, 36, 30, 29].

### 3.4 Modèles intégraux de couche limite

Ce paragraphe rassemble les principaux modèles rencontrés dans la littérature et se présentant sous la forme de deux équations couplées pour l'épaisseur du film  $h$  et le débit instantané local. Les premières équations de ce type ont été obtenues en *intégrant* les équations de continuité et de bilan de la quantité de mouvement suivant l'épaisseur du film. Cette idée simple remonte en fait aux premières études sur le sujet puisqu'on la trouve dès le travail pionnier de Kapitza.<sup>2</sup> En effet, le développement asymptotique aux petits nombres d'ondes effectué par Benney au voisinage de la criticalité indique que les premières corrections au profil de vitesse introduites par les effets inertiels (soit  $u^{(1)}$ ) peuvent s'écrire (toujours en considérant  $\Gamma\epsilon^2 = \mathcal{O}(1)$ )

$$u^{(1)} = \frac{1}{3}h^5\partial_x h f_4(y/h) + \left( -B h^2\partial_x h + \Gamma\epsilon^2 h^2\partial_{xxx} h \right) f_2(y/h) \quad (3.53)$$

où  $f_2(\bar{y}) = \bar{y} - (\bar{y}^2/2)$  et  $f_4(\bar{y}) = \bar{y} - (\bar{y}^3/2) + (\bar{y}^4/8)$ .

On observe ainsi que le profil de vitesse se réduit alors à la somme de solutions de la forme

$$u(x, y, t) = a_2(x, t) f_2(y/h) + a_4(x, t) f_4(y/h), \quad (3.54)$$

Par conséquent, à la criticalité, le champ de vitesse peut être déterminé complètement connaissant seulement deux champs,  $a_2(x, t)$  et  $a_4(x, t)$  et non un continuum indicé par la coordonnée normale au plan. Il semble ainsi possible de décrire la dynamique du film à l'aide d'un petit nombre de variables dépendant de la position sur le plan  $x$  et du temps  $t$ . Afin de préciser cette idée, nous allons changer de point de vue. Au lieu de considérer chaque particule fluide, prenons pour système chaque 'tranche' de fluide, d'épaisseur infinitésimale  $\delta x$  et cherchons un système d'équations décrivant l'évolution des grandeurs dites *intégrales* associées à cette tranche de fluide (épaisseur du film,  $h$ , débit instantané local  $q = \int_0^h u dy \dots$ ).

Écrivons l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour notre tranche fluide encore appelée équation intégrale de von Kármán (cf. [104] p. 158). En intégrant (3.9) entre 0 et  $h$ , on obtient

$$\int_0^h [\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - \partial_{yy} u] dy = h - Bh\partial_x h + \Gamma h \partial_{xxx} h. \quad (3.55)$$

---

<sup>2</sup>Employant l'hypothèse d'un profil de vitesse semi-parabolique, Kapitza a formulé un modèle en termes de  $h$  et de la vitesse moyenne  $\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dy$  très proche des équations de Shkadov (3.61) (cf. éqs. (16–22) [68](b) pp. 666–667). Toutefois, Kapitza se plaçait dans le cadre simplifié des ondes stationnaires dans leur référentiel en mouvement (cf. ch. 5).

or, avec l'aide de la condition de continuité  $v_y = -u_x$  et des conditions aux limites (3.6-3.7), il vient :

$$\int_0^h [\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u] dy = \int_0^h [\partial_t u - u \partial_y v + v \partial_y u] dy + [uv]_0^h,$$

ce qui s'écrit encore en utilisant la condition de saut cinématique (3.4),

$$\int_0^h [\partial_t u + 2u \partial_x u] dy + u|_h \partial_t h + u^2|_h \partial_x h,$$

d'où :

$$\partial_t \int_0^h u dy + \partial_x \int_0^h u^2 dy = h - Bh \partial_x h + \Gamma h \partial_x^3 h - \partial_y u|_0, \quad (3.56)$$

qui s'écrit encore :

$$\partial_t q + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Upsilon q^2}{h} \right) = h - Bh \partial_x h + \Gamma h \partial_x^3 h - \tau_w. \quad (3.57)$$

où  $\tau_w = \partial_y u|_0$  désigne le cisaillement à la paroi,  $q$  le débit instantané.  $\Upsilon$ , défini par [93] :

$$\Upsilon = \frac{h}{q^2} \int_0^h u^2 dy \quad (3.58)$$

est appelé facteur de forme [93]. La conservation de la masse (3.38) complète l'équation (3.57). Afin de fermer le système ainsi posé, on doit estimer le cisaillement à la paroi  $\tau_w$  et le facteur de forme  $\Upsilon$  qui relie le moment du second ordre  $\int_0^h u^2 dy$ , au moment du premier ordre  $\int_0^h u dy$ .

On obtient les relations de fermeture recherchées en projetant le champ de vitesse  $u$  sur une base de fonctions convenablement choisie.

$$u = \sum_i^{\infty} a_i(x, t) f_i(y)$$

les fonctions  $f_i$  appartenant à un ensemble de fonctions d'essai ou *spectre* plus ou moins bien choisi. À partir de l'équation de continuité, on trouve :

$$v = - \sum_i^{\infty} \frac{\partial a_i}{\partial x} \int_0^y f_i(\bar{y}) d\bar{y}$$

Substituant  $u$  et  $v$  dans l'équation de couche limite (3.9), on évalue les fonctions  $a_i(x, t)$  à l'aide d'une méthode des résidus pondérés (*methods of weighted residuals*, *MWR*, cf. [115] p. 74). Yu *al.* ont ainsi appliqué une méthode de collocation à deux points aux interfaces du film avec les équations intégrales (3.38, 3.57). La comparaison entre les études linéaires des modèles de couche limite qu'ils étudient et leur contreparties discrétisées sur un spectre de 4 polynômes est en accord jusqu'à  $R \sim 30$  (cf. [121] fig 6 et 7).

Remarquons que  $\Upsilon$ , qui dépend *a priori* de  $x$  et  $t$ , est une constante lorsque le champ de vitesse est une solution semblable (*i. e.*  $u = a(x, t) f(y/h)$ ) :

$$\Upsilon = \frac{h}{q^2} \int_0^h u^2 dy = \frac{\int_0^1 f^2(\bar{y}) d\bar{y}}{(\int_0^1 f(\bar{y}) d\bar{y})^2},$$

De plus, le développement asymptotique de Benney écrit le champ de vitesse sous la forme d'une série de fonctions de la coordonnée réduite  $\bar{y}$ . En effet, lorsque l'interface demeure uniforme, le problème étudié se réduit au système affine  $\mathcal{L}$  (3.19) où la dépendance en  $y$  peut s'écrire fonction de la variable réduite  $\bar{y} = y/h$ , conséquence directe de la symétrie du problème par changement d'épaisseur.

Il est donc judicieux de supposer que la solution exacte des équations peut se décomposer en une série de fonctions de la coordonnée  $\bar{y} = y/h$  vérifiant les conditions aux limites (cf. Shkadov [106])<sup>3</sup>

$$u = \sum_i^{\infty} a_i(x, t) g_i(y/h), \quad (3.59)$$

Imitant Kapitza & Kapitza [68], on se contente généralement d'approximer la vitesse  $u$  par un profil de vitesse semblable parabolique :

$$u = \frac{3q}{2h} \left[ 2\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2 \right], \quad (3.60)$$

On déduit de (3.60) la valeur du facteur de forme,  $\Upsilon = 6/5$ , et du cisaillement à la paroi,  $\tau_w = 3q/h^2$ . Notons que l'équation intégrale de la quantité de mouvement (3.57) représente alors l'évaluation du résidu moyen pour la fonction test (3.60) (le poids est uniforme sur l'épaisseur du film). On a donc fermé les équations intégrales (3.38,3.57). D'où avec le dimensionnement initial :

$$\begin{aligned} \partial_t h &= -\partial_x q, \\ \partial_t q &= h - 3\frac{q}{h^2} - \frac{12}{5}\frac{q}{h}\partial_x q + \left(\frac{6}{5}\frac{q^2}{h^2} - Bh\right)\partial_x h + \Gamma h\partial_x^3 h. \end{aligned} \quad (3.61)$$

On est en présence d'un système couplé à deux inconnues et deux équations. La première, exacte, décrit la cinématique du film ( $h$  correspond à la *masse* de la tranche fluide considérée) et la deuxième, approchée, décrit sa dynamique ( $q$  correspond à la *quantité de mouvement*). Ainsi, contrairement à l'équation de Benney, la dynamique du film n'est plus complètement asservie à sa cinématique. Ce modèle formulé dès 1967 par Shkadov [106] est parfois appelé modèle de couche limite intégral (*integral boundary layer, IBL* [21]). Comparons le résultat exact de l'équation d'Orr–Sommerfeld et l'analyse linéaire de (3.61). Pour cela, linéarisons (3.61) en posant  $h = h_N + \zeta n \exp i\alpha(x - ct)$  et  $q = \frac{1}{3}h_N^3 + \zeta p \exp i\alpha(x - ct)$ . Il vient

$$\begin{aligned} cn &= p, \\ -i\alpha cp + \frac{2}{15}i\alpha(6h_N^2 p - h_N^4 n) &= -\Gamma h_N i\alpha^3 n + n - Bi\alpha h_N n - \frac{3}{h_N^2} p - 2n, \end{aligned}$$

D'où l'équation de dispersion :

$$\alpha c^2 + \left(-\frac{4}{5}h_N^2 \alpha + \frac{3i}{h_N^2}\right) c - \alpha^3 \Gamma h_N + \alpha \left(\frac{2}{15}h_N^4 - Bh_N\right) - 3i = 0, \quad (3.62)$$

---

<sup>3</sup>toutefois, la convergence de cette méthode n'est pas garantie.

soit encore avec la transformation  $c \mapsto h_N^2 c$  et  $\alpha \mapsto \alpha/h_N$  et les définitions  $R = \frac{1}{3}h_N^3$  et  $W = \Gamma/h_N^2$

$$3R\alpha c^2 + \left(-\frac{12}{5}R\alpha + 3i\right)c - \alpha^3 W + \alpha \left(\frac{2}{5}R - B\right) - 3i = 0. \quad (3.63)$$

Pour  $\alpha = 0$ , (3.63) admet une racine double  $c(0) = 1$ . Développons  $c$  autour de cette racine pour  $\alpha$  petit en posant  $c = c_0 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 \dots$ . Il vient :

$$c = 1 + i\alpha \frac{1}{3}(R - B) - \frac{2}{5}\alpha^2 R(R - B) - i\alpha^3 \left[\frac{R}{9}(R - B) \left(\frac{133}{5}R - B\right) + \frac{W}{3}\right] + \mathcal{O}(\alpha^4), \quad (3.64)$$

dont on en déduit que le nombre de Reynolds critique est  $R_{IBL} = B$  et non pas  $R_c = (5/6)B$  comme prédit par l'équation d'Orr-Sommerfeld.

Le modèle de Shkadov (3.61) peut être complété pour tenir compte des effets du deuxième ordre vis-à-vis du gradient introduits par la dissipation visqueuse dans le sens de l'écoulement ( $\propto \partial_{xx}u$ ) et à l'interface ( $\propto 2\partial_x h (\partial_x u|_h - \partial_y v|_h) - \partial_x v|_h$ ). La méthode de moyennage précédente à l'aide d'un profil de vitesse de supposé de forme semi-parabolique est alors appliquée sur l'ensemble d'équation au second ordre (3.1,3.15,3.4,3.7,3.14) légèrement modifié pour tenir compte des termes supplémentaires dus à la tension superficielle et introduits par le développement de la courbure de l'interface  $\partial_{xx}h/[1 + (\partial_x h)^2]^{3/2}$  vis-à-vis de  $\partial_x$ . On en déduit l'expression du saut de pression à l'interface

$$p|_h = 2\partial_y v|_h - \Gamma \left[ \left(1 - \frac{3}{2}(\partial_x h)^2\right) \partial_{xxx}h - 3\partial_x h (\partial_{xx}h)^2 \right]$$

et l'équation suivante

$$\begin{aligned} \partial_t q &= h - 3\frac{q}{h^2} - \frac{12}{5}\frac{q}{h}\partial_x q + \left(\frac{6}{5}\frac{q^2}{h^2} - Bh\right)\partial_x h \\ &+ \Gamma h \left[ \left(1 - \frac{3}{2}(\partial_x h)^2\right) \partial_{xxx}h - 3\partial_x h (\partial_{xx}h)^2 \right] \\ &+ 6\frac{q}{h^2}(\partial_x h)^2 - \frac{6}{h}\partial_x q \partial_x h - 6\frac{q}{h}\partial_{xx}h + 5\partial_{xx}q, \end{aligned} \quad (3.65)$$

que l'on complète ensuite par l'équation de conservation (3.38). Bien qu'introduisant les effets du deuxième ordre vis-à-vis du gradient ( $\partial_x$ ), ce modèle proposé par Prokopiou *et al.* [93] ne permet pas de modifier convenablement la valeur prédite pour le seuil de l'instabilité  $R_{IBL}$ . En effet, les coefficients en facteur des termes inertiels et de gravité (première ligne de (3.65)) ne sont pas modifiés par l'ajout de termes du second ordre. Or ce sont ces termes qui déterminent le seuil d'instabilité. De plus, les termes supplémentaires  $\propto h(\partial_x h)^2 \partial_{xxx}h$  et  $\propto h\partial_x h (\partial_{xx}h)^2$  sont du troisième ordre (en supposant  $\Gamma\epsilon^2 = \mathcal{O}(1)$ ) Ils s'introduisent donc non pas à cet ordre mais à l'ordre suivant. Ils sont également source de singularités non physiques dans l'espace des phases du système dynamique permettant de décrire les ondes se déplaçant sans se déformer (cf. chapitre 5).

Afin de remédier à cet écart concernant la valeur du seuil  $R_c$ , Lee & Mei [75] ont ajouté des termes d'ordre supérieur au modèle tout en conservant un profil de

vitesse semblable parabolique (3.60). Toutefois, la valeur prédite pour le seuil n'a pas été modifiée par cet ajout et la complexité des équations obtenues les rendent d'un usage très limité.

Récemment, Roberts [98] a formulé un modèle en terme de  $h$  et de la valeur moyennée de la vitesse suivant l'épaisseur du film  $\bar{u} = (1/h) \int_0^h u dy$  à l'aide d'une astucieuse réduction à la variété centrale permettant de retrouver la valeur correcte du seuil. La méthode suivie par Roberts est fondée sur la présence d'un spectre discret pour l'opérateur linéarisé autour du profil semi-parabolique en supposant une interface rigide. Roberts a alors annulé la première valeur propre non-nulle en introduisant un paramètre de développement, noté  $\gamma$  et supposé petit mais dont la valeur  $\gamma = 1$  correspond au problème initialement posé. Roberts a appliqué une méthode de réduction à la variété centrale en faisant un double développement par rapport à  $\gamma$  et au gradient. Il a ensuite calculé les coefficients de ce développement pour  $\gamma = 1$  après avoir pris soin de vérifier la convergence des séries correspondantes. Le résultat peut alors s'écrire en fonction de  $h$  et du débit  $q$

$$\begin{aligned}
\partial_t q \approx & 0.8225 (h - Bh\partial_x h + \Gamma h\partial_{xxx} h) - 2.467 \frac{q}{h^2} + 1.356 \frac{q^2}{h^2} \partial_x h + 3.459 \frac{q}{h^2} (\partial_x h)^2 \\
& - 2.504 \frac{q}{h} \partial_x q - 3.353 \frac{\partial_x h \partial_x q}{h} - 4.676 \frac{q}{h} \partial_{xx} h + 4.093 \partial_{xx} q \\
& + \frac{1}{100} \left( 1.727 h q \partial_x h + 0.7983 h^2 \partial_x q - 0.1961 \frac{q^3}{h^2} (\partial_x h)^2 - 1.78 \frac{q^2}{h} \partial_x h \partial_x q \right. \\
& \left. + 0.1226 q (\partial_x q)^2 - 1.792 \frac{q^3}{h} \partial_{xx} h + 0.7778 q^2 \partial_{xx} q \right) \\
& + \frac{B}{100} \left( -1.357 h q (\partial_x h)^2 - 1.012 h^2 \partial_x h \partial_x q - 1.713 h^2 q \partial_{xx} h + 0.4821 h^3 \partial_{xx} q \right) \\
& + \frac{\Gamma}{100} \left( -10.98 \frac{q}{h} (\partial_x h)^4 + 7.12 (\partial_x h)^3 \partial_x q + 10.68 q (\partial_x h)^2 \partial_{xx} h \right. \\
& - 4.451 h \partial_x h \partial_x q \partial_{xx} h - 1.113 h q (\partial_{xx} h)^2 - 2.225 h (\partial_x h)^2 \partial_{xx} q \\
& + 0.6404 h^2 \partial_{xx} h \partial_{xx} q + 0.244 h q \partial_x h \partial_{xxx} h + 1.225 h^2 \partial_x q \partial_{xxx} h \\
& \left. + 0.4269 h^2 \partial_x h \partial_{xxx} q + 1.713 h^2 q \partial_{xxx} h - 0.4821 h^3 \partial_{xxx} q \right), \tag{3.66}
\end{aligned}$$

complété par la conservation de la masse (3.38). À part les deux termes du cinquième ordre vis-à-vis du gradient apparaissant dans (3.65), les équations de Prokopiou et Shkadov sont entièrement incluses dans le développement (3.66) qui est poussé jusqu'au quatrième ordre. De nombreux termes ont des coefficients très faibles, ce qui pose la question de leur importance dans le développement. La recherche des orbites homoclines pour le système dynamique décrivant les solutions de (3.66) stationnaires dans leur référentiel en mouvement indique que ces termes, incluant des dérivées d'ordre important, rendent difficiles les calculs numériques et pourraient être à l'origine du comportement singulier des solutions pour certains paramètres. Ce point soulève encore le problème du compromis entre propriété de convergence des développements asymptotiques lorsque le petit paramètre (ici,  $\epsilon \propto |\partial_x h|/h$ ) est fini et la précision sur la solution escomptée.

Notons de plus que l'interface n'étant ni rigide ni indéformable, les fonctions sinusoïdales introduites par Roberts ne sont certainement pas solutions du véritable problème linéarisé. En effet ce choix introduit le nombre  $\pi$  dans l'expression des coefficients du modèle dont on voit mal ici l'origine physique. De plus, le calcul de Roberts ne permet pas de comprendre l'origine des termes apparaissant dans le résultat.

Enfin, les modèles intégraux présentés ci-dessus s'étendent facilement au problème pleinement tridimensionnel ( $\partial_z \neq 0$ ). Ainsi Demekhin & Shkadov [35, 111] ont obtenu à partir de (3.61)

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x q + \partial_z q_\perp &= 0, \\ \partial_t q_\parallel + \frac{6}{5} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_\parallel^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q_\parallel q_\perp}{h} \right) \right] &= \Gamma h (\partial_{x^3} + \partial_{xz^2}) h + h - Bh \partial_x h - 3 \frac{q_\parallel}{h^2} \\ \partial_t q_\perp + \frac{6}{5} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_\parallel q_\perp}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q_\perp^2}{h} \right) \right] &= \Gamma h (\partial_{z^3} + \partial_{zx^2}) h - Bh \partial_z h - 3 \frac{q_\perp}{h^2} \end{aligned} \tag{3.67}$$

Trifonov [111] a étudié la stabilité 3D des ondes 2D solutions de (3.61) à l'aide de (3.67). Il a de même obtenu les ondes 3D stationnaires émergeant par bifurcation sous-harmonique des ondes 2D et conservant la relation de symétrie : <sup>4</sup>

$$h(x, -z) = h(x, z), \quad q_\parallel(x, -z) = q_\parallel(x, z), \quad \text{et} \quad q_\perp(x, -z) = -q_\perp(x, z).$$

Malgré sa grande brièveté, cette revue nous a aidés à mettre en évidence les lacunes des principaux travaux déjà publiés. Rappelons en particulier l'échec des efforts entrepris pour réduire les équations primitives à une seule équation d'évolution pour la seule épaisseur du film. En effet, le développement asymptotique de Benney voit son domaine d'application réduit à un faible voisinage autour du seuil d'instabilité (§ 3.2). Bien que l'équation de Ooshida (3.39) apporte un net progrès en éliminant le comportement singulier des solutions de l'équation de Benney (3.33), celle-ci ne peut correctement rendre compte des ondes de grandes amplitudes, défaut que l'on retrouve avec les formulations faiblement non-linéaires telles que l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (3.45). À ce jour, il semble donc peu probable de réussir à obtenir une équation unique décrivant de manière qualitative et quantitative la dynamique observée expérimentalement. L'alternative proposée par la méthode intégrale élaborée par Shkadov apparaît plus prometteuse, les solutions du modèle (3.61) se comparant bien aux ondes solitaires expérimentales. Toutefois, l'écart entre le seuil d'instabilité du modèle  $R_{\text{IBL}}$  et le seuil réel  $R_c$  confine son emploi au seul cas où  $R_{\text{IBL}}$  et  $R_c$  sont confondus, c.-à-d. un plan vertical. Jusqu'à présent, les tentatives pour résoudre ce problème n'ont pas réellement abouti, conduisant à une impasse [93, 75] ou une formulation complexe [98].

---

<sup>4</sup>ce qui lui permettait de diviser par deux le nombre de modes nécessaires pour représenter l'onde 3D obtenue

# Chapitre 4

## Formulation des modèles

### 4.1 Méthodes aux résidus pondérés

Afin de résoudre les problèmes rencontrés avec les modèles déjà existants, un effort de modélisation a été entrepris. À l'aide des polynômes apparaissant dans le développement de Benney, nous avons développé une méthode combinée d'approximation en série de Taylor et des résidus pondérés [102]. Celle-ci a abouti à la formulation d'un système de trois équations d'évolution couplées pour trois inconnues, l'épaisseur du film  $h$ , le débit instantané local et une nouvelle grandeur, nommée  $\tau$  mesurant l'écart entre le cisaillement à la paroi correspondant à un profil de vitesse amélioré et celui prédit par un profil de vitesse simplement parabolique (cf. § 10).

Cependant ce modèle souffre de deux grandes limitations dont la première est certainement le caractère arbitraire du choix de conditions de collocation aux limites  $y = 0$  et  $y = h$ . La deuxième est la possibilité de divergence en temps fini rencontrée lorsque le nombre de Reynolds  $R$  devient trop important. La présence de ces singularités est probablement liée à l'absence de solutions sous forme d'ondes solitaires pour de grandes valeurs de  $R$  (cf. figs. 5.11, 5.12). En appliquant différentes méthodes de résidus pondérés et comparant leurs résultats, l'espoir est de résoudre ces difficultés à la fois conceptuelles et pratiques.

Par souci de simplicité, nous nous contenterons dans un premier temps de la formulation de modèles au premier ordre en  $\epsilon$  vis-à-vis du développement en gradient et au cas d'un écoulement parallèle bidimensionnel, i.e. sans dépendance par rapport à la coordonnée transverse  $z$ . Nous avons vu que les équations de Navier–Stokes pouvaient se réduire à l'ordre  $\epsilon$  à l'équation de couche limite (3.9) accompagnée de l'équation de continuité (3.1) et des conditions aux limites (3.4, 3.6, 3.7). Par la suite, nous raisonnerons à partir de la seule composante longitudinale de la vitesse supposée connue et nous remplacerons  $v$  par  $-\int_0^y \partial_x u \, dy$ .

Enfin, les modèles seront étendus au deuxième ordre (§ 4.2) puis aux cas des écoulements non-parallèles (§ 4.3).

### 4.1.1 Méthodologie et choix des fonctions tests

Les méthodes de résidus pondérés supposent la définition d'un ensemble de fonctions tests  $\mathcal{F}^{(i)}$  sur lesquelles sont projetées les inconnues ici notées  $\mathcal{U}$ ,

$$\mathcal{U} = \sum_i \mathcal{A}_i \mathcal{F}^{(i)}.$$

On est de même appelé à choisir un ensemble de poids  $\mathcal{W}_j$  permettant de définir des résidus ou contraintes  $\mathcal{R}_j$  issues du problème à résoudre  $\mathcal{E}(\mathcal{U}) = 0$ ,

$$\mathcal{R}_j = \int \mathcal{W}_j \mathcal{E} \left( \sum_i \mathcal{A}_i \mathcal{F}^{(i)} \right).$$

Annulant les résidus  $\mathcal{R}_j$  on en déduit alors les coefficients  $\mathcal{A}_i$  de l'approximation de la solution cherchée.

Cependant, on ne s'intéresse pas ici à la résolution de (3.1–3.9) mais à l'élimination de la coordonnée normale au plan  $y$  et à la formulation de modèles simplifiés en termes de champs ne dépendant que de la position sur le plan  $x$  et du temps  $t$ . Pour ce faire, on considère une projection du champ de vitesse longitudinale  $u(x, y, t) = \sum_{i=0}^N a_i(x, t) f^{(i)}(y)$  d'où est tirée l'expression de la vitesse normale  $v$ . Substituant à  $u$  l'expression précédente, on applique ensuite une méthode des résidus pondérés à (3.9) accompagnée des conditions aux limites (3.6–3.7). La condition cinématique (3.4) ou, sous sa forme intégrale (3.38), a un statut particulier. Elle constitue en effet une condition de consistance du modèle en liant les coefficients  $a_i$  et la surface libre  $h$ .

Dans la suite, nous appellerons *profil de vitesse* toute fonction  $f$  semblable au sens de la théorie des couches limites (cf. § 3.2 et [104] p. 152), c'est-à-dire seulement fonction de la coordonnée réduite  $\bar{y} = y/h$ . Un tel champ est ainsi indépendant de la géométrie de l'écoulement et permet de caractériser la forme de chaque coupe du champ de vitesse suivant la normale au plan.

Shkadov [106] a suggéré l'emploi d'une base complète de fonctions vérifiant les conditions aux limites (3.6–3.7). Il s'est cependant restreint à ne considérer qu'une seule fonction test  $f^{(0)} = \bar{y} - \frac{1}{2}\bar{y}^2$  correspondant au profil parabolique observé pour un film uniforme. Guidés par ces considérations, nous choisirons pour le profil de vitesse un ensemble de fonctions tests  $f^{(i)}(\bar{y})$  vérifiant les conditions aux limites (3.6–3.7) soit,

$$[f^{(i)}]'(1) = 0, \quad f^{(i)}(0) = 0. \quad (4.1)$$

Au voisinage du point critique, un développement en gradients permet d'écrire le champ de vitesse sous la forme d'une série de polynômes en  $y$  [9]. Nous allons de même supposer que ceci reste valide au delà du seuil, d'où le choix d'une base complète de polynômes,

$$f^{(i)} = \bar{y}^{i+1} - \frac{i+1}{i+2} \bar{y}^{i+2}. \quad (4.2)$$

Tronquée aux  $N + 1$  premiers polynômes, l'expression de la vitesse longitudinale devient,

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^N a_i(x, t) f^{(i)}(y/h).$$

Or, lorsque le film est uniforme, seul le profil parabolique  $f^{(0)}$  apparaît et les autres coefficients  $a_i$ ,  $i \geq 1$  sont nuls. Ainsi, les profils de vitesse correspondants n'apparaissent qu'avec les déformations de la surface libre. Le raisonnement suivant permet de se convaincre que les champs  $a_i(x, t)$ ,  $i \geq 1$  sont lentement variables en temps et en espace, ce qui va nous permettre de négliger, au premier ordre, leurs dérivées. Dérivons (3.9)  $N$  fois par rapport à  $y$ , ce qui nous donne

$$\partial_{y^{N+2}} u = \partial_{y^N} (\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u). \quad (4.3)$$

Or  $\partial_{y^{N+2}} u = -(N+1)^2 N(N-1) \dots 2 a_N$  et le membre de droite de (4.3) est du premier ordre en  $\epsilon$  (tenant compte du fait que  $v$  est égal à  $-\int_0^y \partial_x u dy$ ). On en déduit donc que  $a_N$  est lentement variable. Dérivant (3.9)  $N-1$  fois, on montre ensuite que  $a_{N-1}$  est aussi au moins d'ordre  $\epsilon$  et ainsi de suite par récurrence jusqu'à  $a_1$ .

Par conséquent, les dérivées des champs  $a_i$ ,  $i \geq 1$  peuvent être négligées dans l'évaluation du membre de droite de (4.3). Ainsi, puisque  $f^{(0)}$  est de degré deux,  $\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u$  est un polynôme en  $\bar{y}$  de degré quatre au plus et le membre de droite de (4.3) s'annule pour  $N \geq 5$ . D'où  $a_i = 0$ , si  $i \geq 5$ , ce qui montre que les champs  $a_i$  sont d'ordre supérieur à  $\epsilon$  pour  $i \geq 5$ .

En pratique, après avoir défini les poids et écrit les résidus, à l'ordre  $\epsilon$  on obtient :

$$\mathbf{A}(a_{1 \leq i \leq N}) = \mathbf{B}(h, a_0, \partial_t h, \partial_x h, \partial_t a_0, \partial_x a_0), \quad (4.4)$$

complété par l'équation (3.38) pour laquelle aucun terme ne peut être négligé.  $\mathbf{A}$  est une matrice  $N+1$  par  $N$ , et  $\mathbf{B}$  un vecteur  $N+1$ . La résolution du système (4.4) permet à la fois d'exprimer les champs  $a_i$ ,  $i \geq 1$  en fonction de  $h$ ,  $a_0$  et de leurs dérivées en temps et en espace, et d'écrire une seule équation pour  $h$  et  $a_0$ . Cependant,  $a_0$  est un champ lié aux choix et aux hypothèses de la modélisation choisie et non une grandeur physique. Il est donc plus approprié de substituer le débit instantané local  $q$  à  $a_0$  en écrivant  $q = \sum_{i=0}^N h a_i \int_0^1 f^{(i)}(\bar{y}) d\bar{y}$  soit :

$$a_0 = 3 \frac{q}{h} - \sum_{i=1}^N \frac{6}{(i+2)(i+3)} a_i. \quad (4.5)$$

On obtient alors un système de deux équations couplées pour  $h$  et  $q$  dont la première (3.38) est une identité exprimant la conservation de la masse et la deuxième, une équation bilan où  $q$  est la quantité de mouvement de la tranche fluide d'épaisseur  $\delta x$  comprise entre la paroi et l'interface.

Il nous reste cependant à définir les poids  $\mathcal{W}_i$ . Ceux-ci diffèrent suivant la méthode employée : sous-domaine, collocation, Galerkin, intégrale-collocation aux frontières, etc. Cependant, il est facile de démontrer que pour un nombre  $N+1$  de fonctions tests et de résidus suffisamment élevé, le choix de la méthode importe peu et ne modifie pas le résultat.

En effet, une fois  $\sum_{i=0}^N a_i f^{(i)}$  substitué à  $u$ , (3.9) apparaît sous la forme d'un polynôme en  $\bar{y}$ , noté  $\mathcal{P}$  dont les coefficients sont fonctions de  $a_i$ ,  $h$  et les dérivées de  $h$  et  $a_0$ . Examinant plus attentivement (3.9), il est facile de se convaincre que les termes inertiels étant d'ordre au moins  $\epsilon$ , les champs  $a_i$   $i \geq 1$  n'apparaissent

qu'au travers de la dissipation visqueuse  $-\partial_{y^2}u$ . Pour  $N$  suffisamment grand (i.e.  $N \geq 4$ ), le monôme de plus haut degré de  $\mathcal{P}$  provient de l'évaluation de  $-\partial_{y^2}u$  et le degré de celui-ci est  $N$ . Poursuivant la méthode des résidus pondérés,  $N + 1$  résidus indépendants sont écrits en plus de l'identité (3.38) afin de déterminer les champs  $h$  et  $a_i$ . Or le degré de  $\mathcal{P}$  est  $N$ , et les  $N + 1$  résidus sont autant de combinaisons linéaires entre les coefficients de  $\mathcal{P}$  exprimé, par exemple, sur la base canonique  $\bar{y}^i$ . Par conséquent, pourvu que les résidus soient indépendants, imposer que ceux-ci soient nuls est équivalent à annuler le polynôme  $\mathcal{P}$ .

De ce fait, le résultat du calcul ne dépend alors plus des fonctions de poids  $\mathcal{W}_i$  mais il est entièrement déterminé par la forme de  $\mathcal{P}$ . Écrivons le polynôme  $\mathcal{P}$  sur la base canonique  $\bar{y}^i$ . Puisque  $\mathcal{P}$  est identiquement nul, ses coefficients sont tous nuls et il s'en déduit un système d'équations sous la forme (4.4) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^2}(-a_0 + 2a_1) &= -1 + B\partial_x h - \Gamma\partial_{x^3} h, \\
\frac{1}{h^2}(-4a_1 + 6a_2) &= \partial_t a_0 - \frac{a_0}{h}\partial_t h, \\
\frac{1}{h^2}(-9a_2 + 12a_3) &= -\frac{1}{2}\partial_t a_0 + \frac{a_0}{h}\partial_t h + \frac{1}{2}a_0\partial_x a_0 - \frac{a_0^2}{2h}\partial_x h, \\
\frac{1}{h^2}(-16a_3 + 20a_4) &= -\frac{1}{3}a_0\partial_x a_0 + \frac{2a_0^2}{3h}\partial_x h, \\
\frac{1}{h^2}(-25a_4 + 30a_5) &= \frac{1}{12}a_0\partial_x a_0 - \frac{a_0^2}{6h}\partial_x h, \\
\frac{1}{h^2}\left(-(i+1)^2 a_i + (i+1)(i+2)a_{i+1}\right) &= 0, \text{ pour } 5 \leq i \leq N-1, \\
-\frac{(N+1)^2}{h^2}a_N &= 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

L'inversion de (4.6) conduit à

$$\begin{aligned}
a_0 &= h^2 - \frac{1}{3}h^2\partial_t a_0 + \frac{1}{6}ha_0\partial_t h - \frac{1}{10}h^2a_0\partial_x a_0 + \frac{1}{30}ha_0^2\partial_x h \\
&\quad - Bh^2\partial_x h + \Gamma h^2\partial_{x^3} h,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$a_1 = -\frac{1}{6}h^2\partial_t a_0 + \frac{1}{12}ha_0\partial_t h - \frac{1}{20}h^2a_0\partial_x a_0 + \frac{1}{60}ha_0^2\partial_x h \tag{4.8}$$

$$a_2 = \frac{1}{18}h^2\partial_t a_0 - \frac{1}{9}ha_0\partial_t h - \frac{1}{30}h^2a_0\partial_x a_0 + \frac{1}{90}ha_0^2\partial_x h, \tag{4.9}$$

$$a_3 = \frac{1}{60}h^2a_0\partial_x a_0 - \frac{1}{30}ha_0^2\partial_x h, \tag{4.10}$$

$$a_4 = -\frac{1}{300}h^2a_0\partial_x a_0 + \frac{1}{150}ha_0^2\partial_x h, \tag{4.11}$$

et on trouve à nouveau  $a_i = 0$  pour  $i \geq 5$ . L'équation (4.5) s'écrit alors en substituant (4.8–4.11)

$$a_0 = 3\frac{q}{h} + \frac{1}{15}h^2\partial_t a_0 - \frac{1}{120}ha_0\partial_t h + \frac{9}{280}h^2a_0\partial_x a_0 - \frac{1}{168}ha_0^2\partial_x h. \tag{4.12}$$

D'où l'expression du débit instantané local en fonction de  $a_0$

$$q = \frac{1}{3}ha_0 - \frac{1}{45}h^3\partial_t a_0 + \frac{1}{360}h^2a_0\partial_t h - \frac{3}{280}h^3a_0\partial_x a_0 + \frac{1}{504}h^2a_0^2\partial_x h. \quad (4.13)$$

L'équation (4.7) et la substitution de  $q$  dans (3.38) à l'aide de l'expression (4.13) conduit ainsi à un système de deux équations couplées pour  $h$  et  $a_0$ . Il est alors tentant de tronquer les termes du deuxième ordre de l'équation (3.38) et d'écrire

$$\partial_t h = -\frac{1}{3}\partial_x(ha_0). \quad (4.14)$$

Cependant, faisant le changement de variable  $\tilde{q} = ha_0/3$  dans (4.7) et (4.14) on obtient

$$\partial_t h = -\partial_x \tilde{q}, \quad (4.15)$$

$$\partial_t q = h - 3\frac{\tilde{q}}{h^2} + \frac{\tilde{q}}{h}\partial_t h + \frac{6}{5}\frac{\tilde{q}^2}{h^2}\partial_x h - \frac{7}{5}\frac{\tilde{q}}{h}\partial_x \tilde{q} - Bh\partial_x h + \Gamma h\partial_{x^3} h. \quad (4.16)$$

Éliminer  $\partial_t h$  de (4.16) à l'aide de (4.15) conduit à nouveau au modèle de Shkadov. L'équation cinématique (3.38) apparaît encore une fois comme une équation de compatibilité du développement. Il est par conséquent commode de formuler un système d'équations couplées pour  $h$  et  $q$  au lieu de  $h$  et  $a_0$ . Substituant  $a_0$  dans (4.7) à l'aide de l'expression (4.5), on obtient alors,

$$3\frac{q}{h} = h^2 - \frac{6}{5}h\partial_t q + \frac{69}{40}q\partial_t h - \frac{333}{280}q\partial_x q + \frac{108}{70}\frac{q^2}{h}\partial_x h - Bh^2\partial_x h + \Gamma h^2\partial_{x^3} h, \quad (4.17)$$

où les termes d'ordre supérieur au second ordre ont été négligés. À l'aide de l'identité  $\partial_t h = -\partial_x q$  on écrit finalement

$$\partial_t q = \frac{5}{6}h - \frac{5}{2}\frac{q}{h^2} - \frac{17}{7}\frac{q}{h}\partial_x q + \left(\frac{9}{7}\frac{q^2}{h^2} - \frac{5}{6}Bh\right)\partial_x h + \frac{5}{6}\Gamma h\partial_{x^3} h. \quad (4.18)$$

Ainsi, quelle que soit la méthode particulière choisie, si le nombre  $N$  de polynômes  $f^{(i)}$  est suffisamment grand, soit  $N \geq 4$ , on obtient nécessairement le système (4.7–4.11) et le modèle (3.38, 4.18). Par conséquent la comparaison des différentes méthodes va porter sur la rapidité de convergence en fonction de  $N$  vers l'équation (4.18).

### 4.1.2 Méthode des sous-domaines

L'extension naturelle de la méthode intégrale développée par Shkadov est la méthode des sous-domaines. Celle-ci consiste à diviser le domaine d'intégration en sous-domaines généralement pris de même taille. Tronquant l'ensemble des fonctions tests aux  $N + 1$  premières fonctions  $f^{(i)}$ , il faut écrire  $N + 1$  résidus correspondants. On définit alors  $N + 1$  couches de fluide, délimitées par les points  $\bar{y}_i = \frac{i}{n+1}$ ,  $0 \leq i \leq N + 1$ , et  $N + 1$  intégrales par

$$\int_{\bar{y}_i}^{\bar{y}_{i+1}} (\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - \partial_y^2 u - 1 + B\partial_x h - \Gamma\partial_{x^3} h) d\bar{y} = 0, \quad (4.19)$$

ce qui revient à définir  $N + 1$  distributions poids en forme de chapeau,  $W_i(\bar{y}) = 1$  si  $\bar{y}_i \leq \bar{y} \leq \bar{y}_{i+1}$  et  $W_i(\bar{y}) = 0$  sinon. On reconnaît aisément pour  $N = 0$ , la méthode intégrale conduisant au modèle de Shkadov.

$N$	$h - Bh\partial_x h + \Gamma h\partial_x^3 h$	$\frac{q}{h^2}$	$\frac{q}{h}\partial_x q$	$\frac{q^2}{h^2}\partial_x h$	$q_{Nc}/B$
0	1	-3	$-\frac{12}{5} = 2.40$	$\frac{6}{5} = 1.20$	1
1	$\frac{16}{19} \approx 0.84$	$-\frac{48}{19} \approx 2.53$	$-\frac{1851}{760} \approx 2.44$	$\frac{993}{760} \approx 1.31$	$\frac{16}{19} \approx 0.84$
2	$\frac{5}{6}$ exact	$-\frac{5}{2}$ exact	$-\frac{175}{72} \approx 2.43$	$\frac{31}{24} \approx 1.29$	$\frac{5}{6}$ exact
3	$\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{2487}{1024} \approx 2.43$	$\frac{1317}{1024} \approx 1.29$	$\frac{5}{6}$
4	$\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{17}{7}$ exact	$\frac{9}{7}$ exact	$\frac{5}{6}$

TAB. 4.1 – méthode des sous-domaines

### 4.1.3 Méthode intégrale-collocation

Une autre façon d'étendre la méthode intégrale est d'utiliser la forme particulière des fonctions tests  $f^{(i)}$ . La projection de  $u$  sur une base de polynômes en  $\bar{y}$  se rapproche en effet d'un développement en série de Taylor à la paroi de la solution. D'où l'idée de compléter les deux premiers résidus obtenus par l'intégration de (3.9–3.1) en évaluant les dérivées successives de (3.9) en  $\bar{y} = 0$ ,

$$\partial_{y^i} (\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - \partial_{y^2} u)|_0 = 0. \quad (4.20)$$

$N$	$h - Bh\partial_x h + \Gamma h\partial_x^3 h$	$\frac{q}{h^2}$	$\frac{q}{h}\partial_x q$	$\frac{q^2}{h^2}\partial_x h$	$q_{Nc}/B$
0	1	-3	$-\frac{12}{5} = 2.40$	$\frac{6}{5} = 1.20$	1
1	$\frac{8}{11} \approx 0.73$	$-\frac{24}{11} \approx 2.18$	$-\frac{126}{55} \approx 2.29$	$\frac{48}{55} \approx 0.87$	$\frac{8}{11} \approx 0.73$
2	$\frac{5}{6}$ exact	$-\frac{5}{2}$ exact	$-\frac{31}{15} \approx 2.62$	$\frac{15}{8} \approx 1.87$	$\frac{5}{6}$ exact
3	$\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{19}{8} \approx 2.37$	$\frac{19}{8} \approx 1.12$	$\frac{5}{6}$
4	$\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{17}{7}$ exact	$\frac{9}{7}$ exact	$\frac{5}{6}$

TAB. 4.2 – méthode intégrale-collocation

### 4.1.4 Méthode de collocation

Cette méthode est très employée. On délimite à nouveau  $N + 1$  niveaux dans le domaine par les coordonnées  $\bar{y}_i = \frac{i}{n+1}$ . Les fonctions poids sont alors des fonctions de Dirac correspondant aux  $\bar{y}_i$  et les résidus sont obtenus en évaluant (3.9) aux différents  $\bar{y}_i$ .

$N$	$h - Bh\partial_x h + \Gamma h\partial_{x^3} h$	$\frac{q}{h^2}$	$\frac{q}{h}\partial_x q$	$\frac{q^2}{h^2}\partial_x h$	$q_{Nc}/B$
0	$\frac{2}{3} \approx 0.67$	-2	$-\frac{5}{h} = 2.50$	$\frac{3}{h^2} = 1.50$	$\frac{2}{3} \approx 0.67$
1	$\frac{32}{39} \approx 0.82$	$-\frac{32}{13} \approx 2.46$	$-\frac{251}{104} \approx 2.41$	$\frac{129}{104} \approx 1.24$	$\frac{32}{39} \approx 0.82$
2	$\frac{5}{6}$ exact	$-\frac{5}{2}$ exact	$-\frac{697}{288} \approx 2.42$	$\frac{121}{96} \approx 1.26$	$\frac{5}{6}$ exact
3	$\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{4973}{2048} \approx 2.43$	$\frac{2631}{2048} \approx 1.28$	$\frac{5}{6}$
4	$\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{17}{7}$ exact	$\frac{9}{7}$ exact	$\frac{5}{6}$

TAB. 4.3 – méthode de collocation

### 4.1.5 Méthode des moments

Cette méthode consiste à utiliser les polynômes de la base canonique,  $1, \bar{y}, \bar{y}^2, \dots$ , comme poids. D'où les résidus

$$\int_0^h \bar{y}^i (\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - \partial_{y^2} u - 1 + B\partial_x h - \Gamma\partial_{x^3} h) d\bar{y} = 0. \quad (4.21)$$

Pour  $N = 0$ , cette méthode est identique à celle des sous-domaines et conduit, là encore, au modèle de Shkadov.

$N$	$h - Bh\partial_x h + \Gamma h\partial_{x^3} h$	$\frac{q}{h^2}$	$\frac{q}{h}\partial_x q$	$\frac{q^2}{h^2}\partial_x h$	$q_{Nc}/B$
0	1	-3	$-\frac{12}{5} = 2.40$	$\frac{6}{5} = 1.20$	1
1	$\frac{16}{19} \approx 0.84$	$-\frac{48}{19} \approx 2.53$	$-\frac{231}{95} \approx 2.43$	$\frac{123}{95} \approx 1.29$	$\frac{16}{19} \approx 0.84$
2	$\frac{5}{6}$ exact	$-\frac{5}{2}$ exact	$-\frac{17}{7}$ exact	$\frac{9}{7}$ exact	$\frac{5}{6}$ exact

TAB. 4.4 – méthode des moments

### 4.1.6 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est probablement la plus connue et la plus employée. Ses liens avec les méthodes variationnelles sont certainement la cause de ce succès [46]. Celle-ci consiste à utiliser les poids définis par les fonctions d'essai elles-mêmes et d'écrire les résidus suivants,

$$\int_0^h f^{(i)}(y/h) (\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - \partial_{y^2} u) dy = \frac{2h}{(i+2)(i+3)} (1 - B\partial_x h + \Gamma\partial_{x^3} h) \quad (4.22)$$

Nous allons montrer que cette méthode conduit dès  $N = 0$  au résultat (4.18). Considérons  $N$  quelconque et évaluons le premier résidu.

$$\int_0^h f^{(0)}\left(\frac{y}{h}\right) (\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - \partial_{y^2} u) dy = \frac{h}{3} (1 - B\partial_x h + \Gamma\partial_{x^3} h), \quad (4.23)$$

On observe que les gradients des champs  $a_i$  étant d'ordre  $\epsilon^2$ , ceux-ci ne peuvent jouer un rôle dans le calcul qu'au travers de l'évaluation de  $\int_0^h f^{(0)}\left(\frac{y}{h}\right) \partial_{y^2} u dy$ . En intégrant deux fois par parties, on obtient,

$$\int_0^h f^{(0)}\left(\frac{y}{h}\right) \partial_{y^2} u dy = \left[ f^{(0)}\left(\frac{y}{h}\right) \partial_y u \right]_0^h - \frac{1}{h} \left[ f^{(0)'}\left(\frac{y}{h}\right) u \right]_0^h + \frac{1}{h^2} \int_0^h f^{(0)''}\left(\frac{y}{h}\right) u dy. \quad (4.24)$$

À l'aide des conditions aux frontières, (3.6–3.7), de (4.1) et  $f^{(0)''} = -1$ , (4.24) devient

$$\int_0^h f^{(0)}\left(\frac{y}{h}\right) \partial_{y^2} u \, dy = -\frac{q}{h^2}. \quad (4.25)$$

Ainsi, les champs  $a_i$  n'interviennent pas dans le calcul de (4.23) qui s'écrit

$$\frac{2}{5} \partial_t q - \frac{23}{40} \frac{q}{h} \partial_t h - \frac{18}{35} \frac{q^2}{h^2} \partial_x h + \frac{111}{280} \frac{q}{h} \partial_x q = \frac{1}{3} h - \frac{q}{h^2} - \frac{B}{3} h \partial_x h + \frac{\Gamma}{3} h \partial_{x^3} h, \quad (4.26)$$

En utilisant  $\partial_t h = -\partial_x q$ , on retrouve alors le système (3.38–4.18).

### 4.1.7 Comparaison et conclusion

La comparaison des tableaux (4.1–4.1.4) indique que les méthodes de sous-domaines et de collocation convergent rapidement vers le résultat final et que dès  $N = 1$  les coefficients ne diffèrent que de quelques pour-cents du résultat exact. La méthode intégrale–collocation aux frontières que nous avons exploitée en premier lieu pour obtenir un modèle consistant avec le développement de Benney à l'ordre  $\epsilon^2$  (voir ch. 10) s'avère être la moins efficace tandis que la méthode des moments convergent dès  $N = 2$  à (4.18).

Cependant, c'est la méthode de Galerkin pour laquelle les poids sont les fonctions–tests elles-mêmes, qui est de loin la mieux adaptée au problème puisqu'elle conduit dès  $N = 0$  au résultat (4.18).

On peut se demander pourquoi la méthode des moments et la méthode de Galerkin sont si efficaces. Récrivons les équations (3.6–3.9) de la façon suivante

$$\partial_{y^2} u + 1 = \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u \, dy + B \partial_x h - \Gamma \partial_{x^3} h, \quad (4.27)$$

$$\partial_y u|_h = 0, \quad (4.28)$$

$$u|_0 = 0, \quad (4.29)$$

Notons que la présence des termes inertiels ne permet pas de mettre le problème posé sous une forme variationnelle. Pourtant le membre de droite de (4.27) est au plus d'ordre  $\epsilon$  et (4.27–4.29) apparaît comme la perturbation d'un problème variationnel en  $\bar{y}$ . En effet, résoudre le problème sans second membre est équivalent à minimiser l'action

$$S(u) = \int_0^h \frac{1}{2} (\partial_y u)^2 \, dy - q. \quad (4.30)$$

$S(u)$  est la différence entre l'énergie dissipée par l'écoulement et le travail du poids, i.e. le débit  $q$ . Ainsi, l'écart entre le système (4.27–4.29) et un problème variationnel est d'ordre  $\epsilon$  et dépend de la déformation de l'interface. Or, il est bien connu que dans les cas où une formulation variationnelle est disponible, méthode variationnelle et méthode de Galerkin sont équivalentes. L'efficacité de la méthode de Galerkin n'est donc pas surprenante ici.

## 4.2 Formulation au deuxième ordre

L'application de différentes méthodes de résidus pondérés et leur comparaison démontre que la méthode de Galerkin est la mieux adaptée au problème étudié à l'ordre  $\epsilon$ . Nous allons montrer que cette remarque reste vraie à l'ordre  $\epsilon^2$ .

### 4.2.1 Choix d'un ensemble de fonctions-tests

À l'ordre  $\epsilon$ , les conditions aux frontières de non-glissement à la paroi (3.7) et de continuité du cisaillement tangentiel (3.5) à l'interface entraînaient, pour le développement de la vitesse longitudinale, le choix d'une base complète de polynômes  $f^{(i)}$  sous la forme (4.2) vérifiant (4.1). À l'ordre  $\epsilon^2$ , (4.1) devient (3.14), et n'est plus homogène. Ainsi (3.14) doit être également vérifiée par les amplitudes lentement variables en temps et en espace correspondant à chaque profil de vitesse, de sorte que la condition  $[f^{(i)}]'(1) = 0$  ne doit plus être imposée aux fonctions-tests choisies. Notons  $g^{(i)}$  ces fonctions-tests et  $b_i(x, t)$  les amplitudes correspondantes.

Suivre à la lettre la philosophie des méthodes de résidus pondérés, nous amène à définir une base complète de fonctions dans l'espace choisi vérifiant les conditions aux limites soit (3.7). Imitant le calcul à l'ordre  $\epsilon$ , nous allons choisir l'ensemble des polynômes s'annulant en  $\bar{y} = 0$ . La base complète la plus simple est la base canonique et la méthode la plus directe serait de tronquer cette base à un nombre  $N$  de polynômes, d'écrire  $N$  résidus et d'en déduire un système d'équations couplées pour les  $N$  amplitudes correspondant aux polynômes  $\bar{y}^i$ . Cependant, cette approche ne donne aucune indication sur le degré d'approximation réalisé par le modèle obtenu en comparaison des équations initiales du problème. On ne sait pas non plus comment réduire sa complexité et isoler les amplitudes qui jouent un rôle de celles qui pourraient être adiabatiquement éliminées. Or notre objectif est d'obtenir le modèle le plus complet et le plus simple, cohérent à l'ordre  $\epsilon^2$ , c'est-à-dire pour lequel aucun des champs retenus ne peut être éliminé adiabatiquement à cet ordre et toutes les équations du système posé réalisent une approximation à l'ordre  $\epsilon^2$  du problème initial. En nous rappelant du calcul au premier ordre, nous savons que le champ  $b_i(x, t)$  correspondant au polynôme  $g^{(i)}$  peut être éliminé adiabatiquement du système d'équations si ses dérivées sont d'ordre plus élevé qu' $\epsilon^2$  et par conséquent si celui-ci est d'ordre supérieur à  $\epsilon$ . Il nous suffit donc de déterminer quels sont les polynômes et les champs indépendants associés approximant correctement le champ de vitesse  $u$  à l'ordre  $\epsilon$ , c'est à dire vérifiant le problème posé à l'ordre  $\epsilon$  correspondant à l'équation de couche limite (3.9), l'équation de continuité (3.1) et les conditions aux limites (3.4, 3.6, 3.7).

Nous allons montrer que le nombre maximum de champs entrant dans le développement de  $u$  à l'ordre  $\epsilon$  peut se déduire de (3.7–3.9) sans faire le calcul explicite.

Dérivant (3.9) par rapport à  $y$  et utilisant l'équation de continuité (3.1), permet d'écrire

$$\partial_{ty}u + u\partial_{xy}u + v\partial_{y^2}u - \partial_{y^3}u = 0. \quad (4.31)$$

Évaluons (4.31) en  $y = h$ . (3.4) fournit  $v|_h \partial_{y^2} u|_h = (\partial_t h + u|_h \partial_x h) \partial_{y^2} u|_h$  d'où

$$\partial_t (\partial_y u|_h) + u|_h \partial_x (\partial_y u|_h) - \partial_{y^3} u|_h = 0. \quad (4.32)$$

(4.32) se simplifie grâce à (3.6)

$$\partial_{y^3} u|_h = 0. \quad (4.33)$$

De même dérivant trois fois (3.9) et utilisant l'équation de continuité (3.1), on obtient

$$\partial_{ty^3} u + u \partial_{xy^3} u + v \partial_{y^4} u + 2 \partial_y u \partial_{xy^2} u + 2 \partial_y v \partial_{y^3} u - \partial_{y^5} u = 0, \quad (4.34)$$

qui, une fois évaluée en  $y = h$  donne

$$\partial_{ty^3} u|_h + u|_h \partial_{xy^3} u|_h + v|_h \partial_{y^4} u|_h - \partial_{y^5} u|_h = 0, \quad (4.35)$$

grâce à (3.6) et (4.33). La relation (4.34) s'écrit encore

$$\partial_t (\partial_{y^3} u|_h) + u|_h \partial_x (\partial_{y^3} u|_h) - \partial_{y^5} u|_h = 0, \quad (4.36)$$

à l'aide de (3.4) et conduit par conséquent à

$$\partial_{y^5} u|_h = 0, \quad (4.37)$$

Par un raisonnement sur les dérivées successives de (3.9), on peut montrer, comme au chapitre précédent, que pour tout polynôme de degré supérieur ou égal à sept, le champ  $b_i$  associé est d'ordre supérieur à  $\epsilon$ .

Supposons que  $u$  s'écrive, à l'ordre  $\epsilon$ ,  $u = \sum_0^{N-1} \mathbf{a}_i \mathbf{f}^{(i)}(\bar{y})$  où les champs  $\mathbf{a}_i$ , fonctions de  $h, q$  et leurs dérivées, sont libres, i.e. toute combinaison linéaire des champs  $\mathbf{a}_i$  est non nulle. Supposons de plus que  $\mathbf{f}^{(i)}$  soit de degré  $i$ . La remarque précédente implique  $N \leq 7$ . Les champs  $\mathbf{a}_i$  étant libres par hypothèse, (3.6–3.7), (4.33) et (4.37) impliquent que  $\mathbf{f}^{(i)}(0) = d\mathbf{f}^{(i)}/d\bar{y}(1) = d^3\mathbf{f}^{(i)}/d\bar{y}^3(1) = d^5\mathbf{f}^{(i)}/d\bar{y}^5(1) = 0$ . D'où  $b_0 = b_1 = b_3 = b_5 = 0$ . De même,  $\mathbf{f}^{(2)}$  étant de degré deux, celui-ci est nécessairement colinéaire à  $f^{(0)}$ . Par commodité, prenons  $\mathbf{f}^{(2)} = f^{(0)}$ . Le polynôme  $d^2\mathbf{f}^{(4)}/d\bar{y}^2$  est également de degré deux et vérifie (3.6). Par conséquent,

$$d^2\mathbf{f}^{(4)}/d\bar{y}^2 = c_1 f^{(0)} + c_2, \quad (4.38)$$

où  $c_{1,2}$  sont des constantes. Pour la même raison,  $d^4\mathbf{f}^{(6)}/d\bar{y}^4 = c_3 f^{(0)} + c_4$  avec  $c_{3,4}$  constants. D'où  $d^2\mathbf{f}^{(6)}/d\bar{y}^2 = c_3 \left(-\frac{1}{3}\bar{y} + \frac{1}{6}\bar{y}^3 - \frac{1}{24}\bar{y}^4\right) - c_4 f^{(0)} + c_5$  car  $d^2\mathbf{f}^{(6)}/d\bar{y}^2$  vérifie (3.6). Soit encore,

$$d^2\mathbf{f}^{(6)}/d\bar{y}^2 = \frac{1}{6}c_3 \left(f^{(1)} - \frac{1}{3}f^{(2)}\right) - \left(c_4 + \frac{1}{3}c_3\right) f^{(0)} + c_5, \quad (4.39)$$

Nous avons donc montré que trois champs suffisaient à décrire l'évolution du champ de vitesse à l'ordre  $\epsilon$  et que ceux-ci correspondaient à des polynômes de degré deux, quatre et six vérifiant (4.38–4.39).

Revenons maintenant au calcul explicite et projetons le champ de vitesse  $u$  sur l'ensemble des polynômes  $f^{(i)}$  en écrivant  $u = \sum_{i=0}^{N-1} a_i(x, t) f^{(i)}(\bar{y})$ , où  $\bar{y} = y/h(x, t)$ .

Substituons le débit instantané  $q$  à  $a_0$  d'où  $u = \left(3\frac{q}{h} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{6}{(i+2)(i+3)} a_i\right) f^{(0)} + \sum_{i=1}^{N-1} a_i f^{(i)}$ . Imposer que ce polynôme en  $\bar{y}$  vérifie les équations (3.9–3.1), (3.4) et (3.7–3.6) conduit au système d'équations couplées

$$\begin{aligned}\partial_t h &= -\partial_x q, \\ \partial_t q &= \frac{5}{6}h - \frac{5}{2}\frac{q}{h^2} - \frac{17}{7}\frac{q}{h}\partial_x q + \left(\frac{9}{7}\frac{q^2}{h^2} - \frac{5}{6}Bh\right)\partial_x h + \frac{5}{6}\Gamma h\partial_{x^3}h,\end{aligned}\quad (4.40)$$

et aux expressions des champs  $a_i$  en fonction de  $q$  et  $h$ ,

$$\begin{aligned}a_1 &= -\frac{1}{2}h\partial_t q - \frac{3}{5}h\partial_x\left(\frac{q^2}{h}\right) \\ a_2 &= \frac{1}{6}h\partial_t q + \frac{2}{5}\frac{q^2\partial_x h}{h} + \frac{1}{5}q\partial_x q \\ a_3 &= \frac{3}{20}h^3 q\partial_x\left(\frac{q}{h^3}\right) \\ a_4 &= -\frac{3}{100}h^3 q\partial_x\left(\frac{q}{h^3}\right) \\ a_i &= 0 \quad \text{pour } i \geq 5.\end{aligned}\quad (4.41)$$

On vérifie que  $a_1 + 3a_2 = -\frac{3}{5}h^3 q\partial_x(q/h^3) = -4a_3 = 20a_4$ . D'où  $a_2 = -\frac{1}{3}a_1 - \frac{4}{3}a_3$ . Ainsi, à l'ordre  $\epsilon$ , le champ de vitesse  $u$  s'écrit sur la base des polynômes  $f^{(i)}$ ,

$$\begin{aligned}u &= 3\frac{q}{h}f^{(0)} + a_1\left(-\frac{2}{5}f^{(0)} + f^{(1)} - \frac{1}{3}f^{(2)}\right) \\ &\quad + a_3\left(\frac{8}{35}f^{(0)} - \frac{4}{3}f^{(2)} + f^{(3)} - \frac{1}{5}f^{(4)}\right).\end{aligned}\quad (4.42)$$

On prouve sans peine que les polynômes apparaissant dans (4.42) vérifient (4.38–4.39).

Dans la méthode de Galerkin les poids sont les fonctions-tests et il est intéressant de choisir une base complète de polynômes orthogonaux  $g^{(i)}$  vérifiant la condition de non-glissement, i.e.  $\int_0^1 g^{(i)}g^{(j)} = 0$  si  $i \neq j$  et  $g^{(i)}(0) = 0$ . Choisissons  $g^{(0)} = f^{(0)}$ . On cherche  $g^{(1)}$  combinaison linéaire de  $f^{(0)}$  et  $f^{(1)} - \frac{1}{3}f^{(2)}$  telle que  $\int_0^1 g^{(0)}g^{(1)} = 0$  d'où  $g^{(1)} = \bar{y} - \frac{17}{6}\bar{y}^2 + \frac{7}{3}\bar{y}^3 - \frac{7}{12}\bar{y}^4$ . Puis, on détermine  $g^{(2)}$ , combinaison linéaire de  $f^{(0)}$ ,  $f^{(1)} - \frac{1}{3}f^{(2)}$  et  $f^{(2)} - \frac{3}{4}f^{(3)} + \frac{3}{20}f^{(4)}$  en imposant  $\int_0^1 g^{(0)}g^{(2)} = \int_0^1 g^{(1)}g^{(2)} = 0$ . On déduit alors  $g^{(2)} = \bar{y} - \frac{13}{2}\bar{y}^2 + \frac{57}{4}\bar{y}^3 - \frac{111}{8}\bar{y}^4 + \frac{99}{16}\bar{y}^5 - \frac{33}{32}\bar{y}^6$ . Les relations (4.38–4.39) permettent de comprendre pourquoi  $d^2g^{(1)}/d\bar{y}^2 = 14g^{(0)} - \frac{17}{3}$  est une combinaison linéaire de  $g^{(0)}$  et de la fonction constante. De même,  $d^2g^{(2)}/d\bar{y}^2 = \frac{1485}{28}g^{(1)} + \frac{909}{28}g^{(0)} - 13$ . Ces dernières propriétés vont s'avérer très utiles par la suite lors de la formulation des modèles.

Notons par ailleurs que le développement en gradient fournit une approximation à l'ordre  $\epsilon^0$  du débit local  $q = \frac{1}{3}h^3$ . Ainsi  $q/h^3$  est une constante à cet ordre et par conséquent  $\partial_x(q/h^3)$  est asymptotiquement d'ordre supérieur à  $\epsilon$ . Le champ de vitesse  $u$  peut alors s'exprimer seulement en fonction de  $f^{(0)}$  et  $f^{(1)} - \frac{1}{3}f^{(2)} = \frac{2}{3}\left(\bar{y} - \frac{1}{2}\bar{y}^3 + \frac{1}{8}\bar{y}^4\right)$ . Ceci se vérifie aisément lors du développement systématique en gradient. Effectuant le changement de la base des  $f^{(i)}$  à celle des  $g^{(i)}$ , on en déduit

qu'au voisinage du seuil le champ de vitesse  $u$  s'écrit seulement à l'aide de  $g^{(0)}$  et  $g^{(1)}$ , ce qui implique que le champ  $b_2(x, t)$  associé à  $g^{(2)}$  est également asymptotiquement d'ordre supérieur.

De plus, les expressions (4.42) des champs  $a_i$  proviennent de l'évaluation des termes inertiels  $\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u$ . Les champs  $b_1$  et  $b_2$  ont donc une origine inertielle et on peut envisager leur élimination lorsque les effets inertiels sont faibles, i.e. pour des nombres de Reynolds peu élevés ou au voisinage du seuil d'instabilité.

Il suffit de choisir un seul polynôme non nul en  $\bar{y} = 1$  pour remplir la condition aux limites (3.14). Notons ce polynôme  $g^{(cl)}$ . Avec un nombre  $N$  de polynômes suffisamment grand (ici,  $g^{(2)}$  est de degré six et il faut au moins trois autres polynômes pour construire une base complète de l'espace des polynômes s'annulant en  $\bar{y} = 0$  et de degré inférieur ou égal à six, d'où  $N \geq 6$ ) on construit une base orthogonale de l'espace des polynômes s'annulant en  $\bar{y} = 0$  et de degré au plus  $N$ .

Cependant, les expressions des polynômes  $g^{(i)}$  complétant la base n'ont pas d'importance car nous verrons que les champs  $b_i$  qui leur sont associés, étant d'ordre supérieur à  $\epsilon$ , peuvent être éliminés du calcul.

### 4.2.2 Choix des inconnues du problème

Le champ de vitesse  $u$  s'écrit ainsi  $\sum_{i=0}^{N-1} b_i g^{(i)}(\bar{y})$  où  $b_0$  est d'ordre  $\epsilon^0$ ,  $b_1$  est d'ordre  $\epsilon$ ,  $b_2$  est aussi d'ordre  $\epsilon$ , mais, au voisinage du seuil, d'ordre  $\epsilon^2$ , et les autres champs  $b_i$  d'ordre supérieur.

Cependant, il est souhaitable d'introduire d'autres inconnues physiquement plus explicites. Pour cela revenons une fois de plus au problème posé à l'ordre  $\epsilon$ . L'intégration des équations de couche limite suivant l'épaisseur du film selon la méthode de Kármán-Polhausen conduit en effet à

$$\partial_t q + \partial_x \int_0^h u^2 dy = h - \partial_y u|_0 + \Gamma h \partial_{x^3} h - B h \partial_x h, \quad (4.43)$$

Pour tenir compte des écarts entre  $u$  et un profil parabolique, on peut ainsi introduire des corrections au cisaillement à la paroi  $\partial_y u|_0$ , c'est l'origine de l'inconnue  $\tau$  du modèle présenté en annexe (ch. 10), ou des corrections à l'énergie cinétique  $\partial_x \int_0^h u^2 dy$ . Ce dernier choix semble plus approprié ici. En effet, les polynômes choisis sont orthogonaux pour le produit scalaire  $\int_0^1 fg$  et on a l'égalité  $\int_0^h u^2 dy = E_0 + E_1 + \dots$  où  $E_i = h b_i^2 \int_0^1 (g^{(i)})^2 d\bar{y}$ . Nous choisirons donc d'écrire  $u$  sous la forme suivante

$$u = 3 \frac{q - s_1 - s_2}{h} g^{(0)} + 45 \frac{s_1}{h} g^{(1)} + 210 \left( \frac{s_2}{h} - \sum_{i=3}^{N-1} b_i \int_0^1 g^{(i)} d\bar{y} \right) g^{(2)} + \sum_{i=3}^{N-1} b_i g^{(i)}. \quad (4.44)$$

Ainsi, l'énergie  $E_0$  correspondant au profil de vitesse parabolique  $g^{(0)}$  devient

$$E_0 = \frac{6}{5h} (q - s_1 - s_2)^2, \quad (4.45)$$

$s_1$  et  $s_2$  apparaissant comme de corrections au débit instantané correspondant à l'énergie cinétique contenue dans le profil de vitesse parabolique. Les avantages de cette formulation sont multiples. En effet, les équations pour  $s_1$  et  $s_2$  ont alors la même forme que l'équation bilan de la quantité de mouvement  $q$  et la formulation du modèle est alors mieux équilibrée qu'avec la variable  $\tau$ . De plus, les définitions de  $s_1$  et  $s_2$  sont indépendantes de la normalisation des polynômes  $g^{(i)}$ .

Cependant, au voisinage du seuil, lorsque les champs  $b_i$  sont esclaves de l'épaisseur  $h$ ,  $s_2$  est d'ordre  $\epsilon^2$  et par conséquent  $s_2 \ll s_1$ . Supposant  $s_2$  d'ordre  $\epsilon^2$ , on peut ainsi simplifier le problème en écrivant

$$u = 3\frac{q-s}{h}g^{(0)}(\bar{y}) + 45\left(\frac{s}{h} - \sum_{i=2}^N b_i \int_0^1 g^{(i)} d\bar{y}\right)g^{(1)}(\bar{y}) + \sum_{i=2}^N b_i g^{(i)}(\bar{y}), \quad (4.46)$$

où  $s \equiv s_1$ .

Ainsi, la formulation (4.46) n'est valable au deuxième ordre qu'au voisinage du seuil alors que (4.44) demeure valide tant que les modulations sont lentement variables. Cette dernière conduit à un système de quatre inconnues  $h$ ,  $q$ ,  $s_1$  et  $s_2$  à la différence de (4.46) et du modèle intégral avec collocation aux frontières qui n'en impliquent que trois.

### 4.2.3 Formulation des modèles

Dans un premier temps, nous allons montrer comme pour le problème au premier ordre, que la formulation finale du modèle est indépendante du choix des poids  $\mathcal{W}_i$  affectés aux résidus et donc de la méthode choisie, collocations, méthode des moments, sous-domaines etc. Puis nous allons montrer que l'application de la méthode de Galerkin conduit à moindre frais au résultat.

Gardant tous les termes des équations initiales jusqu'au deuxième ordre en  $\epsilon$  et le premier terme impliquant la tension superficielle, on obtient le problème de couche limite (3.15) avec la continuité (3.1) et les conditions aux limites (3.7, 3.14) et (3.4), ou sous forme intégrale, (3.38).

Le développement (4.44) de  $u$  doit premièrement vérifier les équations (3.38) et (3.14) imposées par les conditions aux limites. Les  $N$  polynômes  $g^{(i)}$  forment une base de l'espace des polynômes s'annulant en  $\bar{y} = 0$  de telle manière que la condition de non-glisement (3.7) soit assurée.  $N - 1$  conditions supplémentaires sont nécessaires pour déterminer les  $N + 1$  variables indépendantes  $h$ ,  $q$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  et  $b_i$ . Définissant  $N - 1$  fonctions-poids  $\mathcal{W}_i$ , on écrit les résidus suivant à partir de (3.15)

$$\int_0^h \mathcal{W}_i(\bar{y}) (\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - \partial_{y^2} u - 2\partial_{x^2} u) dy = h \left(1 + \partial_x [\partial_x u|_h] - B\partial_x h + \Gamma\partial_{x^3} h\right) \int_0^1 \mathcal{W}_i d\bar{y}. \quad (4.47)$$

Or remplacer (4.44) dans (3.15) conduit à un polynôme  $\mathcal{P} = \sum \mathcal{A}_i \bar{y}^i$  dont les coefficients  $\mathcal{A}_i$  sont fonction de  $h$ ,  $q$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ , des champs  $b_i$ , et des dérivées de  $h$ ,  $q$ ,  $s_1$  et  $s_2$ . Puisque  $g^{(0)}$ ,  $g^{(1)}$  et  $g^{(2)}$  sont de degré inférieur ou égal à six, pour  $N \geq 14$ ,

le monôme de plus haut degré de  $\mathcal{P}$  provient de  $-\partial_{y^2}u$ . Par conséquent,  $\mathcal{P}$  est de degré  $N - 2$  et les  $N - 1$  relations indépendantes (4.47) forment un système linéaire inversible sans second membre entre les coefficients  $\mathcal{A}_i$ . Par conséquent, imposer (4.47) est équivalent à annuler les  $\mathcal{A}_i$ .

Ainsi le résultat final est indépendant du choix des fonctions poids  $\mathcal{W}_i$  pour peu que les résidus choisis soient indépendants et que  $N \geq 14$ . Nous allons voir que la méthode de Galerkin permet d'éviter l'évaluation de onze des relations (3.14, 4.47) à priori nécessaires et l'élimination explicite de onze champs  $b_i$ .<sup>1</sup>

Écrivons les résidus correspondant au poids  $g^{(i)}$  appliqués à (3.15)

$$\int_0^h g^{(i)}(y/h) (\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u - \partial_{y^2} u - 2 \partial_{x^2} u) dy = h \left( 1 + \partial_x [\partial_x u|_h] - B \partial_x h + \Gamma \partial_{x^3} h \right) \int_0^1 g^{(i)} d\bar{y}. \quad (4.48)$$

Les champs  $b_i$  étant supposés du deuxième ordre, leurs dérivées  $\partial_{x,t} b_i \sim \epsilon^3$  peuvent être négligées et ces derniers champs n'interviennent dans le calcul qu'au travers des termes  $\int_0^h g^{(i)}(y/h) \partial_{y^2} u dy$ . Par une double intégration par partie on obtient

$$\int_0^h g^{(i)}(y/h) \partial_{y^2} u dy = \left[ g^{(i)}(y/h) \partial_y u \right]_0^h - \frac{1}{h} \left[ g^{(i)'}(y/h) u \right]_0^h + \frac{1}{h^2} \int_0^h \left[ g^{(i)''} \right] (y/h) u dy. \quad (4.49)$$

Or  $g^{(i)}(0) = 0$  et (3.7) permettent de simplifier (4.49) :

$$\int_0^h g^{(i)}(y/h) \partial_{y^2} u dy = g^{(i)}(1) \partial_y u|_h - \frac{1}{h} g^{(i)'}(1) u|_h + \frac{1}{h^2} \int_0^h \left[ g^{(i)''} \right] (y/h) u dy. \quad (4.50)$$

De plus, les fonctions  $g^{(i)}$ ,  $0 \leq i \leq 2$  sont combinaisons linéaires des fonctions  $f^{(j)}$ ,  $0 \leq j \leq 4$  et par conséquent,  $\left[ g^{(i)'} \right] (1) = 0$  pour  $0 \leq i \leq 2$ . De plus,  $\left[ g^{(0)''} \right] = -1$ ,  $\left[ g^{(1)''} \right] = 14 g^{(0)} - \frac{17}{3}$  et  $\left[ g^{(2)''} \right] = \frac{1485}{28} g^{(1)} + \frac{909}{28} g^{(0)} - 13$ . À l'aide de (3.14),  $\partial_y u|_h$  devient  $4 \partial_x h \partial_x u|_h - \partial_x v|_h$ , expression où n'apparaissent que les champs  $q$  et  $h$  au deuxième ordre. Ainsi pour  $i = 0, 1$  et  $2$ , (4.50) se lit

$$\int_0^h g^{(0)}(y/h) \partial_{y^2} u dy = \frac{1}{2} \partial_y u|_h - \frac{q}{h^2}, \quad (4.51)$$

$$\int_0^h g^{(1)}(y/h) \partial_{y^2} u dy = -\frac{1}{12} \partial_y u|_h - \frac{17}{3} \frac{q}{h^2} + \frac{14}{h^2} \int_0^h g^{(0)}(y/h) u dy, \quad (4.52)$$

$$\int_0^h g^{(2)}(y/h) \partial_{y^2} u dy = \frac{1}{32} \partial_y u|_h - 13 \frac{q}{h^2} \quad (4.53)$$

$$+ \frac{1}{h^2} \int_0^h \left[ \frac{909}{28} g^{(0)} + \frac{1485}{28} g^{(1)} \right] (y/h) u dy. \quad (4.54)$$

Puisque les  $g^{(i)}$  sont orthogonaux, les champs  $b_i$ ,  $i \geq 3$  n'apparaissent pas dans le calcul de (4.48) qui s'écrit pour  $i = 0, 1, 2$  respectivement

$$0 = -\frac{1}{3} h + \frac{q}{h^2} - \frac{23}{40} \frac{q}{h} \partial_t h + \frac{2}{5} \partial_t q + \frac{27}{10} \frac{s_1 \partial_t h}{h} - \frac{1847}{640} \frac{s_2 \partial_t h}{h} - \frac{2}{5} \partial_t s_1 - \frac{2}{5} \partial_t s_2$$

<sup>1</sup>Notons au passage qu'il s'agit ici non d'une méthode de Galerkin à proprement parler mais d'une *méthode tau* [56], la vérification de la condition aux limites (3.14), qui ne peut être incluse dans le choix des fonctions-tests, étant alors imposée aux coefficients  $q$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  et  $b_i$ .

$$\begin{aligned}
& -\frac{18}{35} \frac{q^2 \partial_x h}{h^2} + \frac{111}{280} \frac{q \partial_x q}{h} + \frac{8}{5} \frac{q s_1 \partial_x h}{h^2} + \frac{36}{35} \frac{q s_2 \partial_x h}{h^2} + \frac{29}{30} \frac{s_1 \partial_x q}{h} - \frac{17281}{4480} \frac{s_2 \partial_x q}{h} \\
& -\frac{6}{5} \frac{q \partial_x s_1}{h} - \frac{27}{35} \frac{q \partial_x s_2}{h} - \frac{8}{5} \frac{q (\partial_x h)^2}{h^2} + \frac{9}{5} \frac{\partial_x h \partial_x q}{h} + \frac{12}{5} \frac{q \partial_x^2 h}{h} - \frac{9}{5} \partial_x^2 q \\
& + \frac{1}{3} B h \partial_x h - \frac{1}{3} \Gamma h \partial_x^3 h, \tag{4.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{45} h + \frac{1}{15} \frac{q}{h^2} - \frac{1}{60} \frac{q}{h} \partial_t h - \frac{361}{1440} \frac{s_1 \partial_t h}{h} + \frac{1717}{1920} \frac{s_2 \partial_t h}{h} + \frac{2}{9} \partial_t s_1 + \frac{2}{105} \frac{q^2 \partial_x h}{h^2} \\
& + \frac{28}{5} \frac{s_1}{h^2} + \frac{28}{5} \frac{s_2}{h^2} - \frac{29}{1260} \frac{q \partial_x q}{h} - \frac{24}{55} \frac{q s_1 \partial_x h}{h^2} + \frac{1116}{5005} \frac{q s_2 \partial_x h}{h^2} + \frac{2621}{15840} \frac{s_1 \partial_x q}{h} \\
& + \frac{894653}{1921920} \frac{s_2 \partial_x q}{h} + \frac{26}{165} \frac{q \partial_x s_1}{h} - \frac{1173}{5005} \frac{q \partial_x s_2}{h} - \frac{31}{60} \frac{q (\partial_x h)^2}{h^2} + \frac{23}{60} \frac{\partial_x h \partial_x q}{h} \\
& - \frac{7}{120} \frac{q \partial_x^2 h}{h} + \frac{1}{20} \partial_x^2 q + \frac{1}{45} B h \partial_x h - \frac{1}{45} \Gamma h \partial_x^3 h. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{210} h + \frac{1}{70} \frac{q}{h^2} + \frac{23}{8960} \frac{q}{h} \partial_t h - \frac{47}{640} \frac{s_1 \partial_t h}{h} - \frac{84811}{465920} \frac{s_2 \partial_t h}{h} + \frac{2}{13} \partial_t s_2 \\
& + \frac{6}{5} \frac{s_1}{h^2} + \frac{909}{70} \frac{s_2}{h^2} + \frac{23}{8960} \frac{q \partial_x q}{h} + \frac{8}{143} \frac{q s_1 \partial_x h}{h^2} - \frac{36}{143} \frac{q s_2 \partial_x h}{h^2} - \frac{17603}{274560} \frac{s_1 \partial_x q}{h} \\
& + \frac{428999}{5125120} \frac{s_2 \partial_x q}{h} - \frac{12}{715} \frac{q \partial_x s_1}{h} + \frac{576}{5005} \frac{q \partial_x s_2}{h} + \frac{247}{2240} \frac{q (\partial_x h)^2}{h^2} - \frac{201}{2240} \frac{\partial_x h \partial_x q}{h} \\
& + \frac{219}{4480} \frac{q \partial_x^2 h}{h} - \frac{43}{1120} \partial_x^2 q + \frac{1}{210} B h \partial_x h - \frac{1}{210} \Gamma h \partial_x^3 h. \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Utilisant l'équation de conservation de la masse (3.38), on remplace  $\partial_t h$  par  $-\partial_x q$ . Séparant les dérivées en temps et en espace et multipliant (4.55–4.57) par des constantes appropriées, on obtient,

$$\begin{aligned}
\partial_t q - \partial_t s_1 - \partial_t s_2 = & \frac{5}{6} h - \frac{5}{2} \frac{q}{h^2} + \frac{9}{7} \frac{q^2 \partial_x h}{h^2} - \frac{17}{7} \frac{q \partial_x q}{h} - 4 \frac{q s_1 \partial_x h}{h^2} - \frac{18}{7} \frac{q s_2 \partial_x h}{h^2} \\
& + \frac{13}{3} \frac{s_1 \partial_x q}{h} + \frac{17}{7} \frac{s_2 \partial_x q}{h} + 3 \frac{q \partial_x s_1}{h} + \frac{27}{14} \frac{q \partial_x s_2}{h} + 4 \frac{q (\partial_x h)^2}{h^2} \\
& - \frac{9}{2} \frac{\partial_x h \partial_x q}{h} - 6 \frac{q \partial_x^2 h}{h} + \frac{9}{2} \partial_x^2 q - \frac{5}{6} B h \partial_x h + \frac{5}{6} \Gamma h \partial_x^3 h, \tag{4.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t s_1 = & \frac{1}{10} h - \frac{3}{10} \frac{q}{h^2} - \frac{3}{35} \frac{q^2 \partial_x h}{h^2} - \frac{126}{5} \frac{s_1}{h^2} - \frac{126}{5} \frac{s_2}{h^2} + \frac{1}{35} \frac{q \partial_x q}{h} + \frac{108}{55} \frac{q s_1 \partial_x h}{h^2} \\
& - \frac{5022}{5005} \frac{q s_2 \partial_x h}{h^2} - \frac{103}{55} \frac{s_1 \partial_x q}{h} + \frac{9657}{5005} \frac{s_2 \partial_x q}{h} - \frac{39}{55} \frac{q \partial_x s_1}{h} + \frac{10557}{10010} \frac{q \partial_x s_2}{h} \\
& + \frac{93}{40} \frac{q (\partial_x h)^2}{h^2} - \frac{69}{40} \frac{\partial_x h \partial_x q}{h} + \frac{21}{80} \frac{q \partial_x^2 h}{h} - \frac{9}{40} \partial_x^2 q \\
& - \frac{1}{10} B h \partial_x h + \frac{1}{10} \Gamma h \partial_x^3 h. \tag{4.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t s_2 &= \frac{13}{420}h - \frac{13}{140}\frac{q}{h^2} - \frac{39}{5}\frac{s_1}{h^2} - \frac{11817}{140}\frac{s_2}{h^2} - \frac{4}{11}\frac{qs_1\partial_x h}{h^2} + \frac{18}{11}\frac{qs_2\partial_x h}{h^2} - \frac{2}{33}\frac{s_1\partial_x q}{h} \\
&\quad - \frac{19}{11}\frac{s_2\partial_x q}{h} + \frac{6}{55}\frac{q\partial_x s_1}{h} - \frac{288}{385}\frac{q\partial_x s_2}{h} - \frac{3211}{4480}\frac{q(\partial_x h)^2}{h^2} \\
&\quad + \frac{2613}{4480}\frac{\partial_x h\partial_x q}{h} - \frac{2847}{8960}\frac{q\partial_x^2 h}{h} + \frac{559}{2240}\partial_{x^2}q - \frac{13}{420}Bh\partial_x h + \frac{13}{420}\Gamma h\partial_{x^3}h. \quad (4.60)
\end{aligned}$$

D'où on tire  $\partial_t q$  fonction de  $h$ ,  $q$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  et de leur dérivées d'espace,

$$\begin{aligned}
\partial_t q &= \frac{27}{28}h - \frac{81}{28}\frac{q}{h^2} - 33\frac{s_1}{h^2} - \frac{3069}{28}\frac{s_2}{h^2} - \frac{12}{5}\frac{qs_1\partial_x h}{h^2} - \frac{126}{65}\frac{qs_2\partial_x h}{h^2} + \frac{12}{5}\frac{s_1\partial_x q}{h} \\
&\quad + \frac{171}{65}\frac{s_2\partial_x q}{h} + \frac{12}{5}\frac{q\partial_x s_1}{h} + \frac{1017}{455}\frac{q\partial_x s_2}{h} + \frac{6}{5}\frac{q^2\partial_x h}{h^2} - \frac{12}{5}\frac{q\partial_x q}{h} + \frac{5025}{896}\frac{q(\partial_x h)^2}{h^2} \\
&\quad - \frac{5055}{896}\frac{\partial_x q\partial_x h}{h} - \frac{10851}{1792}\frac{q\partial_x^2 h}{h} + \frac{2027}{448}\partial_{x^2}q - \frac{27}{28}Bh\partial_x h + \frac{27}{28}\Gamma h\partial_{x^3}h, \quad (4.61)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi un système de quatre équations d'évolution couplées pour les champs  $h$ ,  $q$ ,  $s_1$  et  $s_2$  donné par (3.38,4.61,4.59,4.60).

Comme il a déjà été noté, au voisinage de seuil,  $s_2$  est d'ordre supérieur à  $\epsilon$  et un calcul analogue au précédent conduit à partir de (4.46) au système suivant

$$\partial_t h = -\partial_x q, \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned}
\partial_t q &= \frac{14}{15}h - \frac{14}{5}\frac{q}{h^2} - \frac{126}{5}\frac{s}{h^2} - \frac{112}{55}\frac{qs\partial_x h}{h^2} + \frac{406}{165}\frac{s\partial_x q}{h} + \frac{126}{55}\frac{q\partial_x s}{h} \\
&\quad + \frac{6}{5}\frac{q^2\partial_x h}{h^2} - \frac{12}{5}\frac{q\partial_x q}{h} + \frac{253}{40}\frac{q(\partial_x h)^2}{h^2} - \frac{249}{40}\frac{\partial_x q\partial_x h}{h} - \frac{459}{80}\frac{q\partial_x^2 h}{h} \\
&\quad + \frac{171}{40}\partial_{x^2}q - \frac{14}{15}Bh\partial_x h + \frac{14}{15}\Gamma h\partial_{x^3}h, \quad (4.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t s &= \frac{1}{10}h - \frac{3}{10}\frac{q}{h^2} - \frac{126}{5}\frac{s}{h^2} + \frac{108}{55}\frac{qs\partial_x h}{h^2} - \frac{103}{55}\frac{s\partial_x q}{h} - \frac{39}{55}\frac{q\partial_x s}{h} \\
&\quad - \frac{3}{35}\frac{q^2\partial_x h}{h^2} + \frac{1}{35}\frac{q\partial_x q}{h} + \frac{93}{40}\frac{q(\partial_x h)^2}{h^2} - \frac{69}{40}\frac{\partial_x q\partial_x h}{h} + \frac{21}{80}\frac{q\partial_x^2 h}{h} \\
&\quad - \frac{9}{40}\partial_{x^2}q - \frac{1}{10}Bh\partial_x h + \frac{1}{10}\Gamma h\partial_{x^3}h. \quad (4.64)
\end{aligned}$$

Le lien entre (4.62–4.64) et (3.38,4.61,4.59,4.60) est clair. En effet, supposant  $s_2 \ll \epsilon$ , on peut éliminer les dérivées  $\partial_{t,x}s_2$  de (4.61, 4.59,4.60). On obtient alors une expression explicite de  $s_2$  grâce à (4.60) qu'il suffit de reporter dans (4.61) et (4.59) pour obtenir (4.62–4.64) avec  $s \equiv s_1$ .

La principale différence entre la formulation à l'ordre  $\epsilon$  (3.7,3.6,3.9,3.1,3.4) et celle à l'ordre  $\epsilon^2$  (3.7,3.14,3.4,3.15,3.1) tient dans l'adjonction des termes  $2\partial_{x^2}u + \partial_x[\partial_x u|_h]$  dans (3.15) et  $4\partial_x h\partial_x u|_h - \partial_x v|_h$  dans la condition aux limites (3.14). Ces termes sont d'origine visqueuse et sont du deuxième ordre vis-à-vis du gradient. Par conséquent, ils génèrent des termes en  $\partial_{x^3}h$  dans l'équation d'évolution pour  $h$  obtenue par le développement en gradient. Ils jouent donc un rôle important dans la dispersion des ondes au moins au voisinage du seuil. Ils sont de plus linéaires vis-à-vis du champ de vitesse  $u$ . Par conséquent, pour le système à l'ordre  $\epsilon^2$ , il ne peuvent donner lieu qu'à des termes linéaires vis-à-vis du débit  $q$  et homogènes,

soit  $\partial_{x^2}q$ ,  $\partial_xq(\partial_xh/h)$ ,  $q(\partial_xh/h)^2$  et  $q(\partial_{x^2}h/h)$ . D'où la question suivante : comment introduire ces quatre termes dans un système de deux équations couplées pour  $h$  et  $q$  étendant correctement le modèle au premier ordre ? La réponse peut provenir d'une élimination brutale de  $s_1$  et  $s_2$  dans (4.62–4.64) en supposant  $s_1$  et  $s_2$  d'un ordre supérieur à  $\epsilon$ , ce qui permet de négliger leurs dérivées. On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues

$$\partial_t h = -\partial_x q, \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \partial_t q = & \frac{5}{6}h - \frac{5}{2}\frac{q}{h^2} - \frac{17}{7}\frac{q}{h}\partial_x q + \left(\frac{9}{7}\frac{q^2}{h^2} - \frac{5}{6}Bh\right)\partial_x h \\ & + 4\frac{q}{h^2}(\partial_x h)^2 - \frac{9}{2h}\partial_x q\partial_x h - 6\frac{q}{h}\partial_{x^2}h + \frac{9}{2}\partial_{x^2}q + \frac{5}{6}\Gamma h\partial_{x^3}h. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Le système (4.65–4.66) a ainsi une forme proche de l'équation (19) de [93] où cependant des termes supplémentaires proportionnels à  $\Gamma$  apparaissent.

Le développement en gradient de (4.65–4.66) en posant  $q = q^{(0)} + q^{(1)} + q^{(2)}$  conduit à

$$q^{(0)} = \frac{1}{3}h^3, \quad (4.67)$$

$$q^{(1)} = \left(\frac{2}{15}h^6 - \frac{1}{3}Bh^3\right)\partial_x h, \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} q^{(2)} = & \left(\frac{7}{3}h^3 - \frac{8}{15}Bh^6 + \frac{212}{525}h^9\right)(\partial_x h)^2 \\ & + \left(h^4 - \frac{10}{63}Bh^7 + \frac{4}{63}h^{10}\right)\partial_{x^2}h. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Le même résultat peut également être obtenu en appliquant directement la méthode de Galerkin à (3.15) avec  $u = (3q/h)g^{(0)}$ .

Substituer (4.67–4.69) dans (3.38) permet de trouver une équation d'évolution pour la surface libre très proche du résultat asymptotique. En effet, seul le coefficient  $\frac{212}{525}$  du terme  $h^9(\partial_x h)^2$  de  $q^{(2)}$  diffère du résultat exact  $\frac{127}{315}$ , de moins de 0.2%. L'origine de cet écart est l'omission de l'interaction inertielle entre l'approximation à l'ordre  $\epsilon^0$  du champ de vitesse  $u$ , soit  $3(q/h)g^{(0)}$ , et les corrections à l'ordre  $\epsilon$ ,  $-((s_1 + s_2)/h)g^{(0)} + 45(s_1/h)g^{(1)} + 210(s_2/h)g^{(2)}$  au travers des termes  $\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u$ . On a déjà montré (voir § 3.2) que ces termes modifiaient assez peu la forme de l'équation d'évolution asymptotique d'où le faible écart constaté ici.

L'avantage de (4.65–4.66) tient dans la grande simplicité de cette formulation et dans la prise en compte de tous les effets physiques dominants au travers de deux équations seulement, dont l'une correspond à la cinématique du film et l'autre à sa dynamique. En effet dans l'équation (4.66),  $\frac{5}{6}h$  correspond au travail du poids,  $-\frac{5}{2}(q/h^2)$  à la dissipation visqueuse normale au plan incliné,  $\partial_t q$ ,  $\frac{17}{7}(q/h)\partial_x q$  et  $\frac{9}{7}(q^2/h^2)\partial_x h$  à l'inertie. Le terme  $-\frac{5}{6}Bh\partial_x h$  provient des effets stabilisants de la gravité suivant la normale au film,  $\frac{5}{6}\Gamma h\partial_{x^3}h$  de la tension superficielle et les quatre derniers termes rendent compte des effets dispersifs visqueux dans la direction de l'écoulement. De plus, comme nous venons de le souligner, (4.65–4.66) est en très bon

accord avec le développement asymptotique exact au seuil et constitue une excellente approximation lorsque les effets inertiels demeurent relativement peu importants.

Notons pour finir que l'origine de chaque terme de (4.65–4.66) est facilement identifiable, ce qui offre la possibilité de mieux comprendre les mécanismes des instabilités observées.

Dans la suite de ce travail, l'accent sera donc mis sur le modèle simplifié (4.65–4.66) dont l'étude reste simple en comparaison du modèle complet au second ordre (3.38,4.61, 4.59,4.60) et qui prend en compte la dispersion d'origine visqueuse. Nous verrons en effet par la suite que l'introduction de ces termes modifie notablement la forme et la stabilité des ondes solitaires.

### 4.3 Formulation tridimensionnelle des modèles

Nous allons montrer dans ce paragraphe que les formulations bidimensionnelles des modèles précédemment obtenus s'étendent aisément au cas tridimensionnel.

À l'ordre  $\epsilon^0$ , le champ de vitesse transverse  $w$  vérifie

$$\partial_{y^2} w = 0, \quad (4.70)$$

$$\partial_y w \Big|_h = 0, \quad (4.71)$$

$$w \Big|_0 = 0. \quad (4.72)$$

dont la solution est évidemment  $w \equiv 0$ . Par conséquent,  $w$  est nécessairement au moins d'ordre  $\epsilon$ . C'est une correction à la solution 2D de Nusselt induite par la déformation de la surface libre.

#### 4.3.1 Formulation à l'ordre $\epsilon$

Considérant donc  $w$  d'ordre au moins égal à  $\epsilon$ , le système à résoudre à l'ordre  $\epsilon$  s'écrit

$$\partial_{y^2} w = B\partial_z h - \Gamma(\partial_{x^2 z} + \partial_{z^3}) h, \quad (4.73)$$

$$\partial_y w \Big|_h = 0 \quad (4.74)$$

$$w \Big|_0 = 0, \quad (4.75)$$

dont la solution est

$$w = \left( -Bh^2 \partial_z h + \Gamma h^2 (\partial_{x^2 z} + \partial_{z^3}) h \right) g^{(0)}(y/h) \quad (4.76)$$

À l'ordre  $\epsilon$ , le champ de vitesse transverse est ainsi esclave de la déformation de l'interface et ne constitue pas un degré de liberté pour la dynamique du film. Projetons  $u$  sur une base de polynômes orthogonaux  $g^{(i)}$  telle que  $g^{(0)} \equiv \bar{y} - \frac{1}{2}\bar{y}^2$  soit le profil de Nusselt apparaissant à l'ordre  $\epsilon^0$ . Rappelons que les champs  $b_i$ , correspondant

aux corrections apportées au profil de vitesse parabolique, sont d'ordre supérieur ou égal à  $\epsilon$  et pourront à cet ordre être éliminé du calcul.

$$u = 3 \left( \frac{q_{\parallel}}{h} - \sum_{i=1}^{N-1} b_i \int_0^1 g^{(i)} d\bar{y} \right) g^{(0)} + \sum_{i=1}^{N-1} b_i g^{(i)}.$$

où  $h$ ,  $q_{\parallel}$  et  $b_i$  sont cette fois-ci dépendant de  $x$ ,  $z$  et  $t$ . Le système d'équations à résoudre se complète alors par le bilan de la quantité de mouvement suivant  $x$ ,

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u - \partial_{y^2} u - 1 = -B \partial_x h + \Gamma (\partial_{x^3} + \partial_{xz^2}) h, \quad (4.77)$$

$$\partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (4.78)$$

une condition cinématique exprimant que l'interface est une ligne matérielle, écrite ici sous forme intégrale

$$\partial_t h + \partial_x q_{\parallel} + \partial_z q_{\perp} = 0, \quad (4.79)$$

où  $q_{\perp} = \int_0^h w dy$  est le débit dans la direction transverse, la continuité du cisaillement à l'interface et la contrainte de non-glissement à la paroi

$$\partial_y u \Big|_h = 0, \quad u \Big|_0 = 0. \quad (4.80)$$

Notons que le terme  $\partial_z q_{\perp}$ , à priori d'ordre  $\epsilon^2$  a été conservé dans l'équation (4.79). En effet, comme précédemment, aucun terme ne peut être négligé dans cette équation qui joue le rôle de condition de compatibilité pour notre modélisation. L'intégration de (4.76) entre 0 et  $h$  donne l'expression de  $q_{\perp}$

$$q_{\perp} = \frac{1}{3} h^3 (-B \partial_z h + \Gamma (\partial_{x^2 z} + \partial_{z^3}) h). \quad (4.81)$$

Substituant (4.81) dans (4.79) on obtient alors

$$\partial_t h + \partial_x q_{\parallel} + \partial_z \left\{ \frac{1}{3} h^3 (-B \partial_z h + \Gamma (\partial_{x^2 z} + \partial_{z^3}) h) \right\} = 0, \quad (4.82)$$

De même, écrivons le premier résidu correspondant à la méthode de Galerkin :

$$\int_0^h g^{(0)} (y/h) (\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u - \partial_{y^2} u) = h (1 - B \partial_x h + \Gamma (\partial_{x^3} + \partial_{xz^2}) h) \int_0^1 g^{(i)} d\bar{y}. \quad (4.83)$$

Les polynômes  $g^{(i)}$  étant orthogonaux, l'élimination adiabatique des champs  $b_i$  est ainsi évitée, d'où

$$\frac{2}{5} \partial_t q_{\parallel} - \frac{23}{40} \frac{q_{\parallel}}{h} \partial_t h - \frac{18}{35} \frac{q_{\parallel}^2}{h^2} \partial_x h + \frac{111}{280} \frac{q_{\parallel}}{h} \partial_x q_{\parallel} = \frac{1}{3} h - \frac{q_{\parallel}}{h^2} - \frac{B}{3} h \partial_x h + \frac{\Gamma}{3} h (\partial_{x^3} + \partial_{xz^2}) h. \quad (4.84)$$

On substitue à  $\partial_t h$ , son approximation au premier ordre fournie par (4.82), soit  $\partial_t h = -\partial_x q_{\parallel}$ . On obtient finalement

$$\partial_t q_{\parallel} = \frac{5}{6} h - \frac{5}{2} \frac{q_{\parallel}}{h^2} - \frac{17}{7} \frac{q_{\parallel}}{h} \partial_x q_{\parallel} + \left( \frac{9}{7} \frac{q_{\parallel}^2}{h^2} - \frac{5}{6} B h \right) \partial_x h + \frac{5}{6} \Gamma h (\partial_{x^3} + \partial_{xz^2}) h, \quad (4.85)$$

complétant (4.82) pour former un système de deux équations d'évolution pour les champs  $h$  et  $q_{\parallel}$ .

### 4.3.2 Formulation à l'ordre $\epsilon^2$

À l'ordre  $\epsilon^2$ , les termes inertiels de l'équation bilan de la quantité de mouvement dans la direction transverse ne peuvent plus être négligés. Le système d'équations à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u + w \partial_z u &= 1 + \partial_{y^2} u + \partial_{x^2} u + \partial_{z^2} u - \partial_{xy} v - \partial_x [\partial_y v|_h] \\ &\quad - B \partial_x h + \Gamma (\partial_{x^3} + \partial_{xz^2}) h, \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \partial_t w + u \partial_x w + v \partial_y w &= \partial_{y^2} w - \partial_{yz} v - \partial_z [\partial_y v|_h] \\ &\quad - B \partial_z h + \Gamma (\partial_{xz^2} + \partial_{z^3}) h, \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \quad (4.88)$$

avec les conditions aux limites

$$\partial_y u = 2 \partial_x h (\partial_x u - \partial_y v) + \partial_z h \partial_z u - \partial_x v, \quad (4.89)$$

$$\partial_y w = -2 \partial_z h \partial_y v + \partial_x h \partial_z u - \partial_z v, \quad (4.90)$$

$$u = v = w = 0 \quad \text{en } y = 0. \quad (4.91)$$

Un raisonnement similaire à la dérivation du modèle bidimensionnel conduit au choix des polynômes  $g^{(1)} = \bar{y} - \frac{17}{6} \bar{y}^2 + \frac{7}{3} \bar{y}^3 - \frac{7}{12} \bar{y}^4$  et  $g^{(2)} = \bar{y} - \frac{13}{2} \bar{y}^2 + \frac{57}{4} \bar{y}^3 - \frac{111}{8} \bar{y}^4 + \frac{99}{16} \bar{y}^5 - \frac{33}{32} \bar{y}^6$  et reprenant les notations définies précédemment on a

$$\begin{aligned} u &= 3 \frac{q_{\parallel} - s_1 - s_2}{h} g^{(0)} + 45 \frac{s_1}{h} g^{(1)} \\ &\quad + 210 \left( \frac{s_2}{h} - \sum_{i=3}^{N-1} b_i \int_0^1 g^{(i)} d\bar{y} \right) g^{(2)} + \sum_{i=3}^{N-1} b_i g^{(i)}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

À l'ordre  $\epsilon$ , seul  $g^{(0)}$  apparaît dans l'écriture de  $w$ . Par conséquent les champs correspondant aux polynômes complétant la base, notés ici  $c_i$  sont d'ordre supérieur à  $\epsilon$ ,

$$w = 3 \left( \frac{q_{\perp}}{h} - \sum_{i=1}^{N-1} c_i \int_0^1 g^{(i)} d\bar{y} \right) g^{(0)} + \sum_{i=1}^{N-1} c_i g^{(i)}.$$

Utilisons une fois encore la méthode de Galerkin. Celle-ci évite en effet l'élimination des champs  $b_i$  et  $c_i$  en tirant parti de l'orthogonalité de la base choisie. Conservant les termes au plus d'ordre  $\epsilon^2$  de la projection de (4.86) sur  $g^{(0)}$ ,  $g^{(1)}$  et  $g^{(2)}$ , on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{3} h + \frac{q_{\parallel}}{h^2} - \frac{23}{40} \frac{q_{\parallel}}{h} \partial_t h + \frac{2}{5} \partial_t q_{\parallel} + \frac{27}{10} \frac{s_1 \partial_t h}{h} - \frac{1847}{640} \frac{s_2 \partial_t h}{h} - \frac{2}{5} \partial_t s_1 - \frac{2}{5} \partial_t s_2 \\ &\quad - \frac{18}{35} \frac{q_{\parallel}^2 \partial_x h}{h^2} + \frac{111}{280} \frac{q_{\parallel} \partial_x q_{\parallel}}{h} + \frac{8}{5} \frac{q_{\parallel} s_1 \partial_x h}{h^2} + \frac{36}{35} \frac{q_{\parallel} s_2 \partial_x h}{h^2} + \frac{29}{30} \frac{s_1 \partial_x q_{\parallel}}{h} \\ &\quad - \frac{17281}{4480} \frac{s_2 \partial_x q_{\parallel}}{h} - \frac{6}{5} \frac{q_{\parallel} \partial_x s_1}{h} - \frac{27}{35} \frac{q_{\parallel} \partial_x s_2}{h} - \frac{8}{5} \frac{q_{\parallel} (\partial_x h)^2}{h^2} + \frac{9}{5} \frac{\partial_x h \partial_x q_{\parallel}}{h} \\ &\quad + \frac{12}{5} \frac{q_{\parallel} \partial_{x^2} h}{h} - \frac{9}{5} \partial_{x^2} q_{\parallel} + \frac{1}{3} B h \partial_x h - \frac{1}{3} \Gamma h (\partial_{x^3} + \partial_{xz^2}) h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{33}{280} \frac{q_{\parallel} \partial_z q_{\perp}}{h} + \frac{18}{35} \frac{q_{\perp} \partial_z q_{\parallel}}{h} - \frac{18}{35} \frac{q_{\parallel} q_{\perp} \partial_z h}{h^2} + \frac{2}{5} \frac{\partial_z q_{\parallel} \partial_z h}{h} - \frac{3}{10} \frac{q_{\parallel} (\partial_z h)^2}{h^2} \\
& + \frac{23}{40} \frac{q_{\parallel} \partial_z^2 h}{h} - \frac{2}{5} \partial_z^2 q_{\parallel}, \tag{4.93}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{45} h + \frac{1}{15} \frac{q_{\parallel}}{h^2} - \frac{1}{60} \frac{q_{\parallel}}{h} \partial_t h - \frac{361}{1440} \frac{s_1 \partial_t h}{h} + \frac{1717}{1920} \frac{s_2 \partial_t h}{h} + \frac{2}{9} \partial_t s_1 + \frac{2}{105} \frac{q_{\parallel}^2 \partial_x h}{h^2} \\
& + \frac{28}{5} \frac{s_1}{h^2} + \frac{28}{5} \frac{s_2}{h^2} - \frac{29}{1260} \frac{q_{\parallel} \partial_x q_{\parallel}}{h} - \frac{24}{55} \frac{q_{\parallel} s_1 \partial_x h}{h^2} + \frac{1116}{5005} \frac{q_{\parallel} s_2 \partial_x h}{h^2} + \frac{2621}{15840} \frac{s_1 \partial_x q_{\parallel}}{h} \\
& + \frac{894653}{1921920} \frac{s_2 \partial_x q_{\parallel}}{h} + \frac{26}{165} \frac{q_{\parallel} \partial_x s_1}{h} - \frac{1173}{5005} \frac{q_{\parallel} \partial_x s_2}{h} - \frac{31}{60} \frac{q_{\parallel} (\partial_x h)^2}{h^2} + \frac{23}{60} \frac{\partial_x h \partial_x q_{\parallel}}{h} \\
& - \frac{7}{120} \frac{q_{\parallel} \partial_x^2 h}{h} + \frac{1}{20} \partial_x^2 q_{\parallel} + \frac{1}{45} B h \partial_x h - \frac{1}{45} \Gamma h (\partial_x^3 + \partial_{xz^2}) h - \frac{1}{252} \frac{q_{\parallel} \partial_z q_{\perp}}{h} \\
& + \frac{2}{105} \frac{q_{\parallel} q_{\perp} \partial_z h}{h^2} - \frac{2}{105} \frac{q_{\perp} \partial_z q_{\parallel}}{h} + \frac{19}{120} \frac{\partial_z q_{\parallel} \partial_z h}{h} - \frac{9}{40} \frac{q_{\parallel} (\partial_z h)^2}{h^2} + \frac{1}{60} \frac{q_{\parallel} \partial_z^2 h}{h}, \tag{4.94}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{210} h + \frac{1}{70} \frac{q_{\parallel}}{h^2} + \frac{23}{8960} \frac{q_{\parallel}}{h} \partial_t h - \frac{47}{640} \frac{s_1 \partial_t h}{h} - \frac{84811}{465920} \frac{s_2 \partial_t h}{h} + \frac{2}{13} \partial_t s_2 \\
& + \frac{6}{5} \frac{s_1}{h^2} + \frac{909}{70} \frac{s_2}{h^2} + \frac{23}{8960} \frac{q_{\parallel} \partial_x q_{\parallel}}{h} + \frac{8}{143} \frac{q_{\parallel} s_1 \partial_x h}{h^2} - \frac{36}{143} \frac{q_{\parallel} s_2 \partial_x h}{h^2} - \frac{17603}{274560} \frac{s_1 \partial_x q_{\parallel}}{h} \\
& + \frac{428999}{5125120} \frac{s_2 \partial_x q_{\parallel}}{h} - \frac{12}{715} \frac{q_{\parallel} \partial_x s_1}{h} + \frac{576}{5005} \frac{q_{\parallel} \partial_x s_2}{h} + \frac{247}{2240} \frac{q_{\parallel} (\partial_x h)^2}{h^2} - \frac{201}{2240} \frac{\partial_x h \partial_x q_{\parallel}}{h} \\
& + \frac{219}{4480} \frac{q_{\parallel} \partial_x^2 h}{h} - \frac{43}{1120} \partial_x^2 q_{\parallel} + \frac{1}{210} B h \partial_x h - \frac{1}{210} \Gamma h (\partial_x^3 + \partial_{xz^2}) h \\
& + \frac{23}{8960} \frac{q_{\parallel} \partial_z q_{\perp}}{h} - \frac{233}{4480} \frac{\partial_z q_{\parallel} \partial_z h}{h} + \frac{279}{4480} \frac{q_{\parallel} (\partial_z h)^2}{h^2} - \frac{23}{8960} \frac{q_{\parallel} \partial_z^2 h}{h}. \tag{4.95}
\end{aligned}$$

De même, la projection de (4.90) sur  $g^{(0)}$  s'écrit

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{q_{\perp}}{h^2} - \frac{23}{40} \frac{q_{\perp}}{h} \partial_t h + \frac{2}{5} \partial_t q_{\perp} - \frac{33}{280} \frac{q_{\perp} \partial_x q_{\parallel}}{h} + \frac{13}{40} \frac{\partial_z h \partial_x q_{\parallel}}{h} \\
& + \frac{43}{40} \frac{\partial_x h \partial_z q_{\parallel}}{h} - \frac{13}{10} \frac{q_{\parallel} \partial_x h \partial_z h}{h^2} + \frac{73}{40} \frac{q_{\parallel} \partial_{xz} h}{h} - \frac{7}{5} \partial_{xz} q_{\parallel} \\
& + \frac{1}{3} B h \partial_z h - \frac{1}{3} \Gamma h (\partial_{x^2 z} + \partial_{z^3}) h + \frac{18}{35} \frac{q_{\parallel} \partial_x q_{\perp}}{h} - \frac{18}{35} \frac{q_{\perp} \partial_x h}{h^2}. \tag{4.96}
\end{aligned}$$

Une simple combinaison linéaire de (4.93–4.96) et de la condition cinématique (4.79), permet de séparer dérivées temporelles et spatiales et d'obtenir le système

$$\begin{aligned}
\partial_t q_{\parallel} = & \frac{27}{28} h - \frac{81}{28} \frac{q_{\parallel}}{h^2} - 33 \frac{s_1}{h^2} - \frac{3069}{28} \frac{s_2}{h^2} - \frac{12}{5} \frac{q_{\parallel} s_1 \partial_x h}{h^2} - \frac{126}{65} \frac{q_{\parallel} s_2 \partial_x h}{h^2} + \frac{12}{5} \frac{s_1 \partial_x q_{\parallel}}{h} \\
& + \frac{171}{65} \frac{s_2 \partial_x q_{\parallel}}{h} + \frac{12}{5} \frac{q_{\parallel} \partial_x s_1}{h} + \frac{1017}{455} \frac{q_{\parallel} \partial_x s_2}{h} + \frac{6}{5} \frac{q_{\parallel}^2 \partial_x h}{h^2} - \frac{12}{5} \frac{q_{\parallel} \partial_x q_{\parallel}}{h} + \frac{5025}{896} \frac{q_{\parallel} (\partial_x h)^2}{h^2} \\
& - \frac{5055}{896} \frac{\partial_x q_{\parallel} \partial_x h}{h} - \frac{10851}{1792} \frac{q_{\parallel} \partial_x^2 h}{h} + \frac{2027}{448} \partial_x^2 q_{\parallel} - \frac{27}{28} B h \partial_x h + \frac{27}{28} \Gamma h (\partial_x^3 + \partial_{xz^2}) h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{6}{5} \frac{q_{\parallel} \partial_z q_{\perp}}{h} - \frac{6}{5} \frac{q_{\perp} \partial_z q_{\parallel}}{h} + \frac{6}{5} \frac{q_{\parallel} q_{\perp} \partial_z h}{h^2} - \frac{2463}{1792} \frac{\partial_z q_{\parallel} \partial_z h}{h} + \frac{2433}{1792} \frac{q_{\parallel} (\partial_z h)^2}{h^2} \\
& - \frac{5361}{3584} \frac{q_{\parallel} \partial_z^2 h}{h} + \partial_z^2 q_{\parallel}, \tag{4.97}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t s_1 = & \frac{1}{10} h - \frac{3}{10} \frac{q_{\parallel}}{h^2} - \frac{3}{35} \frac{q_{\parallel}^2 \partial_x h}{h^2} - \frac{126}{5} \frac{s_1}{h^2} - \frac{126}{5} \frac{s_2}{h^2} + \frac{1}{35} \frac{q_{\parallel} \partial_x q_{\parallel}}{h} + \frac{108}{55} \frac{q_{\parallel} s_1 \partial_x h}{h^2} \\
& - \frac{5022}{5005} \frac{q_{\parallel} s_2 \partial_x h}{h^2} - \frac{103}{55} \frac{s_1 \partial_x q_{\parallel}}{h} + \frac{9657}{5005} \frac{s_2 \partial_x q_{\parallel}}{h} - \frac{39}{55} \frac{q_{\parallel} \partial_x s_1}{h} + \frac{10557}{10010} \frac{q_{\parallel} \partial_x s_2}{h} \\
& + \frac{93}{40} \frac{q_{\parallel} (\partial_x h)^2}{h^2} - \frac{69}{40} \frac{\partial_x h \partial_x q_{\parallel}}{h} + \frac{21}{80} \frac{q_{\parallel} \partial_x^2 h}{h} - \frac{9}{40} \partial_x^2 q_{\parallel} - \frac{1}{10} B h \partial_x h \\
& + \frac{1}{10} \Gamma h (\partial_{x^3} + \partial_{xz^2}) h - \frac{2}{35} \frac{q_{\parallel} \partial_z q_{\perp}}{h} + \frac{3}{35} \frac{q_{\perp} \partial_z q_{\parallel}}{h} - \frac{3}{35} \frac{q_{\parallel} q_{\perp} \partial_z h}{h^2} \\
& - \frac{57}{80} \frac{\partial_z q_{\parallel} \partial_z h}{h} + \frac{81}{80} \frac{q_{\parallel} (\partial_z h)^2}{h^2} - \frac{3}{40} \frac{q_{\parallel} \partial_z^2 h}{h}, \tag{4.98}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t s_2 = & \frac{13}{420} h - \frac{13}{140} \frac{q_{\parallel}}{h^2} - \frac{39}{5} \frac{s_1}{h^2} - \frac{11817}{140} \frac{s_2}{h^2} - \frac{4}{11} \frac{q_{\parallel} s_1 \partial_x h}{h^2} + \frac{18}{11} \frac{q_{\parallel} s_2 \partial_x h}{h^2} - \frac{2}{33} \frac{s_1 \partial_x q_{\parallel}}{h} \\
& - \frac{19}{11} \frac{s_2 \partial_x q_{\parallel}}{h} + \frac{6}{55} \frac{q_{\parallel} \partial_x s_1}{h} - \frac{288}{385} \frac{q_{\parallel} \partial_x s_2}{h} - \frac{3211}{4480} \frac{q_{\parallel} (\partial_x h)^2}{h^2} + \frac{2613}{4480} \frac{\partial_x h \partial_x q_{\parallel}}{h} \\
& - \frac{2847}{8960} \frac{q_{\parallel} \partial_x^2 h}{h} + \frac{559}{2240} \partial_x^2 q_{\parallel} - \frac{13}{420} B h \partial_x h + \frac{13}{420} \Gamma h (\partial_{x^3} + \partial_{xz^2}) h \\
& + \frac{3029}{8960} \frac{\partial_z q_{\parallel} \partial_z h}{h} - \frac{3627}{8960} \frac{q_{\parallel} (\partial_z h)^2}{h^2} + \frac{299}{17920} \frac{q_{\parallel} \partial_z^2 h}{h}, \tag{4.99}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t q_{\perp} = & -\frac{5}{2} \frac{q_{\perp}}{h^2} + \frac{9}{7} \frac{q_{\parallel} q_{\perp} \partial_x h}{h^2} - \frac{8}{7} \frac{q_{\perp} \partial_x q_{\parallel}}{h} - \frac{9}{7} \frac{q_{\parallel} \partial_x q_{\perp}}{h} + \frac{13}{4} \frac{q_{\parallel} \partial_x h \partial_z h}{h^2} \\
& - \frac{43}{16} \frac{\partial_z q_{\parallel} \partial_x h}{h} - \frac{13}{16} \frac{\partial_x q_{\parallel} \partial_z h}{h} - \frac{73}{16} \frac{q_{\parallel} \partial_{xz} h}{h} + \frac{7}{2} \partial_{xz} q_{\parallel} - \frac{5}{6} B h \partial_z h \\
& + \frac{5}{6} \Gamma h (\partial_{x^2 z} + \partial_{z^3}) h, \tag{4.100}
\end{aligned}$$

auquel il faut adjoindre la condition cinématique (4.79).

Le système (4.79,4.97–4.100) est ainsi formé de cinq équations d'évolution couplées décrivant la dynamique des champs  $h$ ,  $q_{\parallel}$ ,  $q_{\perp}$ ,  $s_1$  et  $s_2$ . Ce système est cohérent avec le développement asymptotique en ondes longues effectué par Krishna et Lin [74]. Il est cependant fort compliqué et son étude numérique est lourde. De plus, le nombre important de termes rend difficile l'identification des mécanismes essentiels de la dynamique du film. Il est donc préférable de se tourner vers une version simplifiée du système précédent. Une telle démarche peut être entreprise en éliminant adiabatiquement les champs  $s_1$  et  $s_2$ . En effet, comme pour les équations bidimensionnelles, il suffit de supposer  $s_1$  et  $s_2$  d'ordre supérieur à  $\epsilon^2$  et d'éliminer les dérivées partielles de  $s_1$  et  $s_2$ . Les équations (4.98–4.99) fournissent ainsi des expressions de  $s_1$  et  $s_2$  en fonction de  $h$ ,  $q$ ,  $q_{\perp}$  et leurs dérivées partielles qu'il suffit

ensuite de reporter dans le reste du système d'équations. D'où l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t q_{\parallel} = & \frac{5}{6}h - \frac{5}{2}\frac{q_{\parallel}}{h^2} + \frac{9}{7}\frac{q_{\parallel}^2 \partial_x h}{h^2} - \frac{17}{7}\frac{q_{\parallel} \partial_x q_{\parallel}}{h} - \frac{97}{56}\frac{q_{\parallel} \partial_z q_{\perp}}{h} - \frac{9}{7}\frac{q_{\perp} \partial_z q_{\parallel}}{h} + \frac{129}{56}\frac{q_{\parallel} q_{\perp} \partial_z h}{h^2} \\ & + 4\frac{q(\partial_x h)^2}{h^2} - \frac{9}{2}\frac{\partial_x q_{\parallel} \partial_x h}{h} - 6\frac{q_{\parallel} \partial_{x^2} h}{h} - \frac{\partial_z q_{\parallel} \partial_z h}{h} + \frac{3}{4}\frac{q_{\parallel} (\partial_z h)^2}{h^2} - \frac{23}{16}\frac{q_{\parallel} \partial_{z^2} h}{h} \\ & + \frac{9}{2}\partial_{x^2} q_{\parallel} + \partial_{z^2} q_{\parallel} - \frac{5}{6}Bh \partial_x h + \frac{5}{6}\Gamma h (\partial_{x^3} + \partial_{xz^2}) h, \end{aligned} \quad (4.101)$$

complétée par la conservation de la masse (4.79) et le bilan de la quantité de mouvement transverse (4.100) pour former un système de trois équations à trois inconnues  $h$ ,  $q_{\parallel}$  et  $q_{\perp}$ . Posant  $q_{\parallel} = q_{\parallel}^{(0)} + q_{\parallel}^{(1)} + q_{\parallel}^{(2)}$  et  $q_{\perp} = q_{\perp}^{(1)} + q_{\perp}^{(2)}$ , le développement asymptotique au voisinage du seuil de (4.79,4.101, 4.100) conduit à

$$\begin{aligned} q_{\parallel} = & \frac{1}{3}h^3 + \left(-\frac{1}{3}Bh^3 + \frac{2}{15}h^6\right) \partial_x h + \left(\frac{7}{3}h^3 - \frac{8}{15}Bh^6 + \frac{212}{525}h^9\right) (\partial_x h)^2 \\ & + \left(h^4 - \frac{10}{63}Bh^7 + \frac{4}{63}h^{10}\right) \partial_{x^2} h + \left(\frac{1}{2}h^3 - \frac{1}{10}Bh^6\right) (\partial_z h)^2 \\ & + \left(\frac{5}{24}h^4 - \frac{71}{1260}Bh^7\right) \partial_{z^2} h, \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$q_{\perp} = -\frac{1}{3}Bh^3 \partial_z h + \left(\frac{11}{6}h^3 - \frac{2}{5}Bh^6\right) \partial_x h \partial_z h + \left(\frac{19}{24}h^4 - \frac{8}{105}Bh^7\right) \partial_{xz} h. \quad (4.103)$$

Ces expressions, une fois substituées dans (4.79) conduisent à une équation d'évolution pour l'épaisseur  $h$  du film semblable à celle dérivée par Krishna et Lin.<sup>2</sup> Cependant, la comparaison avec le développement asymptotique exact met en évidence quelques écarts. En effet, les coefficients facteurs de  $Bh^6 (\partial_z h)^2$ ,  $Bh^7 \partial_{z^2} h$  et  $h^9 (\partial_x h)^2$  devraient être respectivement  $-\frac{2}{15}$ ,  $-\frac{26}{315}$  et  $\frac{127}{315}$  au lieu de  $-\frac{1}{10}$ ,  $-\frac{71}{1260}$  et  $\frac{212}{525}$ . Le système (4.79,4.101,4.100) est également obtenu en limitant l'ensemble des fonctions-tests utilisées au seul polynôme de degré deux  $g^{(0)}$ . Ainsi les écarts constatés sur les développements asymptotiques au seuil doivent être attribués aux corrections par rapport au profil de vitesse parabolique.

Pour conclure, notons qu'il a été ici possible d'obtenir de manière systématique des modèles au premier et second ordre en accord avec le développement asymptotique au seuil. Ces modèles sont de plus *optimaux* en ce sens qu'ils ne dépendent pas du choix d'une méthode particulière de résidus pondérés mais proviennent uniquement du choix d'une base de fonctions polynomiales. Toutefois, le modèle obtenu au second ordre (3.38,4.61,4.59,4.60) demeure très compliqué, ce qui en limite l'usage. Une simplification importante est obtenue en projetant les équations de couche limite au second ordre (3.1,3.4,3.7,3.14,3.15) sur un profil de vitesse semi-parabolique à l'aide d'une méthode de Galerkin pour aboutir au modèle (4.65–4.66) introduisant au moindre coût la dispersion d'origine visqueuse. Cette simplification est équivalente à l'élimination des champs  $s_1$  et  $s_2$  à partir de (3.38,4.61,4.59,4.60) en supposant nulles leurs dérivées en espace et en temps, c.-à-d. en les asservissant à

<sup>2</sup>à l'exception toutefois de termes d'ordre supérieur à  $\epsilon^2$  correspondant à la tension superficielle. Considérant seulement les premiers termes provenant du développement à l'ordre  $\epsilon^3$  et faisant intervenir la tension superficielle, nous n'avons pas fait apparaître ces termes dans nos calculs.

la dynamique de l'épaisseur et du débit instantané local. Les chapitres suivants vont nous permettre de vérifier le bien fondé de cette approximation. Il semble cependant possible d'améliorer la formulation d'un modèle à deux équations d'évolution couplées en éliminant "proprement" les champs  $s_1$  et  $s_2$ . Cette dernière étude reste à effectuer. Enfin, tous les modèles obtenus ici ont été étendus pour tenir compte de la direction transverse  $z$ .

# Chapitre 5

## Ondes stationnaires dans leur référentiel

Les structures cohérentes jouent un rôle souvent essentiel dans l'apparition du chaos spatio-temporel et, en particulier, dans la transition vers la turbulence. Il est alors parfois possible de décrire des phénomènes non-linéaires compliqués en termes d'interaction entre structures élémentaires localisées, ce qui permet une grande simplification et une réduction spectaculaire du nombre de degrés de liberté du système. Dès les premières expériences de Kapitza & Kapitza [68], la présence d'ondes solitaires bidimensionnelles, c.-à.-d. sans modulation suivant la direction  $z$  transverse à l'écoulement, a été mise en évidence. Ces ondes en forme de larmes précédées d'oscillations capillaires dominent la dynamique du film dans une large gamme de paramètres [81]. Ces structures se déforment et interagissent sur des échelles de temps et d'espace très grandes. Un forçage approprié du film permet aussi d'obtenir des trains d'ondes presque solitaires se déplaçant à vitesse constante et sans se déformer [68, 1, 81].

Les ondes évoluant sans se déformer dans leur référentiel ont par conséquent fait l'objet de nombreuses études à la fois théoriques et numériques [113, 95, 33, 18, 20, 75, 112, 114, 60, 103] qui ont révélé une dynamique extrêmement riche. Ainsi le but de ce chapitre n'est pas d'obtenir une description exhaustive de toutes les solutions stationnaires possibles mais bien plutôt de préciser l'influence de paramètres physiques tels que l'inclinaison du plan ou la dispersion d'origine visqueuse sur la forme et la vitesse des ondes et en particulier sur les ondes solitaires observées expérimentalement. Nous en profiterons également pour valider les modèles développés au ch. 4 et les comparer aux simulations numériques directes et aux expériences. Cette étude sera centrée sur les modèles les plus simples obtenus, soit le modèle au premier ordre (3.38,4.18) et le modèle simplifié au second ordre (4.65–4.66). Les systèmes dynamiques correspondant aux modèles plus complexes seront présentés à part en annexe (§ 5.6).

Le paragraphe 5.1.1 précisera les notations employées puis au § 5.1.2 nous écrirons les différents systèmes dynamiques obtenus et nous entamerons l'étude de ceux correspondant aux modèles au premier ordre et simplifié en commençant par l'étude de leurs points fixes (§ 5.2) puis des cycles limites apparaissant par bifur-

cation de Hopf (§ 5.3) pour finir par les orbites homoclines (§ 5.4). La fin du chapitre sera consacré aux solutions stationnaires obtenues en imposant une épaisseur ou un débit moyen et nous permettra de comparer nos résultats aux simulations numériques directes et aux expériences (§ 5.5).

## 5.1 Formulation du problème

### 5.1.1 Changement de variables

En cas de forçage du film, les structures considérées sont périodiques. On peut alors associer à chaque onde une “masse”  $\langle h \rangle$  et une quantité de mouvement propre  $\langle q \rangle$  où les crochets  $\langle \rangle$  désignent la moyenne spatiale sur une longueur d’onde (ou temporelle sur une période). Dans le cas d’une onde solitaire, le film est uniforme et de même épaisseur  $h^*$  à l’aval et à l’amont. La solution de Nusselt correspondante peut servir de référence avec  $q^* = h^{*3}/3$  et l’on peut déterminer par différence une masse et une quantité de mouvement finies

$$\begin{aligned} H &= \int_{-\infty}^{+\infty} (h - h^*) dx, \\ Q &= \int_{-\infty}^{+\infty} (q - q^*) dx. \end{aligned}$$

Ainsi une onde solitaire est a priori caractérisée par  $q^*$  ou  $h^*$ , parfois appelée épaisseur de substrat, sa vitesse  $c$ ,  $H$  et  $Q$  en plus des paramètres physiques. Les simulations numériques de Chang *et al.* [23, 27] ont montré que, lorsque le film amplifiait en aval un signal bruité, l’écoulement suffisamment loin de l’entrée se présentait comme une suite de quasi-ondes solitaires dont les épaisseurs de substrat  $h^*$  pouvaient être différentes (cf. fig. 7.8)<sup>1</sup>. Il peut donc s’avérer intéressant d’utiliser explicitement  $h^*$  en tant qu’échelle de longueur afin de faciliter la comparaison entre différentes ondes solitaires.

Cherchons la présentation du problème la plus universelle possible, c.-à-d. faisant intervenir le nombre minimum de paramètres. Ici l’idée est de ne pas choisir les mêmes échelles en  $x$  et  $y$  et de redéfinir l’échelle de temps. Définissons donc pour la coordonnée  $x$ , l’échelle de longueur  $\lambda_x$  correspondant à l’équilibre entre l’accélération de la gravité et le gradient de pression créé par la tension superficielle  $\Gamma \partial_x^3 h$  soit  $\lambda_x = (\Gamma h^*)^{1/3}$ . Ainsi  $\lambda_x$  est l’échelle des ondes capillaires qui apparaissent lors du raidissement des ressauts hydrauliques créés en augmentant brutalement le débit à l’entrée de l’écoulement (cf. [95] fig. 13). Notons de plus  $\kappa = \lambda_x/h^* = \Gamma^{1/3} h^{*-2/3}$  le rapport entre  $h^*$  et  $\lambda_x$ . Le nombre sans dimension  $\kappa$  est donc le rapport des échelles de longueur définies par les équilibres tension superficielle/gravité et viscosité/gravité. En appliquant la transformation la transformation  $\mathcal{T} : x \mapsto \lambda_x x$ ,  $(y, h) \mapsto (h^* y, h^* h)$ ,  $(u, v) \mapsto (h^{*2} u, h^{*2} v/\kappa)$ ,  $t \mapsto t \kappa/h^*$ , les équations de couche

---

<sup>1</sup>Si les épaisseurs de substrat entre deux structures localisées ne sont pas identiques il s’agit à proprement parler de ressauts (orbites hétéroclines).

limite au deuxième ordre s'écrivent alors

$$\frac{h^*{}^3}{\kappa} (\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u) = 1 + \partial_{y^2} u + \frac{1}{\kappa^2} (2\partial_{x^2} u + \partial_x [\partial_x u|_h]) - \frac{B}{\kappa} \partial_x h + \partial_{x^3} h, \quad (5.1)$$

$$\partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (5.2)$$

où le coefficient du gradient de pression créé par la tension de surface  $\partial_{x^3} h$  devient unitaire. Les conditions aux limites sont :

$$u|_0 = 0, \quad (5.3)$$

$$\partial_y u|_h = \frac{1}{\kappa^2} (4\partial_x h \partial_x u|_h - \partial_x v|_h), \quad (5.4)$$

$$v|_h = \partial_t h + u|_h \partial_x h. \quad (5.5)$$

Le système (5.1–5.5) fait alors intervenir les paramètres réduits,  $\delta = h^*{}^3/\kappa = 3R/\kappa$ ,  $\zeta = B/\kappa$  et  $\eta = 1/\kappa^2$ . Le paramètre  $\eta$  apparaît en facteur des termes du deuxième ordre provenant de la dissipation visqueuse suivant  $x$ . En pratique le nombre de Kapitza  $\Gamma$  est tel que  $\Gamma \gg 1$  pour la plupart des fluides étudiés. Il est par conséquent possible de se placer dans un régime tel que  $\kappa \gg 1$  et  $\eta \ll 1$ . Ainsi,  $\eta$  est un petit paramètre rendant compte des effets dissipatifs dans le sens de l'écoulement d'ordre  $\epsilon^2$  sur la solution. Le nombre  $\eta$  mesure également les effets de tension superficielle au travers de  $\kappa$ . Notons que poser  $\eta = 0$  permet de passer d'une solution du problème à l'ordre  $\epsilon^2$  à une solution du problème à l'ordre  $\epsilon$ . Dans ce dernier cas, il ne reste plus alors que deux paramètres  $\delta$  et  $\zeta$  au lieu de trois initialement (et un seul si on se limite au plan vertical correspondant à  $\zeta = 0$ ).

Nous nous intéressons ici aux solutions des équations initiales ne se déformant pas dans un référentiel en mouvement à une vitesse constante  $c$ . Dans ce cas précis, le temps  $t$  n'est plus une variable du problème pour peu que l'on se place dans le référentiel en mouvement. Notons  $\xi = x - ct$  la variable d'espace dans ce référentiel. Remplaçant l'équation cinématique (5.5) par le bilan de la masse, (3.38) devient

$$-c h' + q' = 0, \quad (5.6)$$

où les primes indiquent les dérivées ordinaires par rapport à  $\xi$  et qui peut s'intégrer une fois pour donner

$$q = c h + q_0. \quad (5.7)$$

$q_0$  est une constante d'intégration et représente le débit circulant sous l'onde dans son repère en mouvement. Ainsi  $q_0$  est généralement négatif car la vitesse des ondes observées à la surface du film est plus grande que la vitesse moyenne du liquide.  $q_0$  est fixée par une condition au limite (on impose par exemple l'épaisseur du film au bord amont ou aval) ou une condition intégrale, moyenne  $\langle h \rangle$  (ou  $\langle q \rangle$ ) déterminée. Si l'on impose  $h(\xi \rightarrow \pm\infty) = 1$  alors la valeur de  $q_0$  est fixée par la solution de

Nusselt  $q = h^3/3$  soit<sup>2</sup>

$$q_0 = \frac{1}{3} - c. \quad (5.8)$$

La dimension spatio-temporelle du problème initial diminue d'une unité et l'équation (5.1) s'écrit

$$\delta((u-c)\partial_\xi u + v\partial_y u) = 1 + \partial_{y^2} u + \eta \left( 2\partial_{\xi^2} u + [\partial_\xi u|_h]' \right) - \zeta h' + h'''. \quad (5.9)$$

La contrainte de non glissement à la paroi et la continuité de la contrainte tangentielle à l'interface se réécrivent

$$u|_0 = -c, \quad (5.10)$$

$$\partial_y u|_h = \eta(4h'\partial_\xi u|_h - \partial_\xi v|_h). \quad (5.11)$$

Le passage des notations  $h^*$  (ou  $R$ ),  $B$  et  $\Gamma$  à  $\delta$ ,  $\zeta$  et  $\eta$  se fait grâce aux formules,

$$\delta = h^{*11/3}\Gamma^{-1/3} = (3R)^{11/9}\Gamma^{-1/3}, \quad (5.12)$$

$$\zeta = Bh^{*2/3}\Gamma^{-1/3} = B(3R)^{2/9}\Gamma^{-1/3}, \quad (5.13)$$

$$\eta = h^{*4/3}\Gamma^{-2/3} = (3R)^{4/9}\Gamma^{-2/3}, \quad (5.14)$$

et dans le sens inverse

$$R = \frac{1}{3}h^{*3} = \frac{1}{3}\delta\eta^{-1/2}, \quad (5.15)$$

$$B = \zeta\eta^{-1/2}, \quad (5.16)$$

$$\Gamma = \delta^{2/3}\eta^{-11/6}. \quad (5.17)$$

Le nombre de Weber s'écrit alors

$$W = \Gamma h^{*-2} = \eta^{-3/2}, \quad (5.18)$$

d'où  $\delta$ ,  $\zeta$  et  $\eta$  en fonction de  $R$  et  $W$

$$\delta = 3RW^{-1/3}, \quad (5.19)$$

$$\zeta = BW^{-1/3}, \quad (5.20)$$

$$\eta = W^{-2/3} \quad \text{ou} \quad \kappa = W^{1/3}. \quad (5.21)$$

De même, le nombre de Reynolds s'écrit en fonction de  $\delta$  et du nombre de Kapitza<sup>3</sup>

$$R = \frac{1}{3}\delta^{9/11}\Gamma^{3/11}. \quad (5.22)$$

<sup>2</sup>Notons qu'à un débit sous l'onde  $q_0$  peut correspondre plusieurs solutions de Nusselt  $h_1 \neq h_2$ . En effet, l'équation  $\frac{1}{3}h^3 = ch + q_0$  est du troisième degré, ce qui autorise l'existence de solutions hétéroclines, c.-à-d. d'ondes en forme de ressaut hydraulique.

<sup>3</sup>(5.22) s'écrit encore en introduisant le nombre réduit du film  $F$  [2],  $R/F = \frac{1}{3}\delta^{9/11}$ , par conséquent  $R/F$  joue le même rôle que  $\delta$ .

La décroissance du nombre de Reynolds réduit  $\delta$  en fonction de  $\Gamma$  fait apparaître le rôle joué par la tension superficielle dans la stabilisation du film (cf. éq. (5.12)). L'équation (5.18) met en évidence un paradoxe lié au choix des notations : le nombre de Weber compare le gradient de pression adverse causé par la tension superficielle, soit en grandeur dimensionnée  $\gamma h^{*-2}$ , et le poids  $\rho g \sin \beta$ . Ainsi, plus  $W$  est important, plus la tension superficielle est forte. Cependant, puisque  $\eta = W^{-2/3}$ ,  $W$  mesure également l'importance des termes du second ordre d'origine visqueuse. Par conséquent, à une forte tension superficielle est aussi associée une faible dispersion des ondes provoquée par la viscosité. Notons également que pour un liquide donné son nombre de Kapitza  $\Gamma$  est constant et donc  $\eta$  croît comme  $R^{4/9}$ . Ainsi, l'effet de la viscosité sur la dispersion des ondes augmente ici avec le nombre de Reynolds!

Ces notations introduites en premier par Demekhin *et al.*<sup>4</sup> [33] correspondent à une 'remise à l'échelle' des solutions pour mieux les comparer. En effet, avec ces échelles réduites, l'épaisseur de substrat  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h$  et le coefficient en facteur de  $\partial_{x^3} h$ , correspondant aux efforts de tension superficielle, sont fixés à l'unité.  $\delta = 3q^*/\kappa$  peut également être vu comme une quantité de mouvement réduite propre à chaque onde solitaire considérée, ou *impulsion*. Notons que les notations primitives  $h^*$ ,  $B$  et  $\Gamma$  ne font appel qu'aux paramètres physiques, à la géométrie de l'écoulement et aux conditions initiales en amont au travers de  $h^*$  ou  $q^*$  en  $x = 0$ , tandis que les notations réduites  $\delta$ ,  $\zeta$  et  $\eta$  font appel à un état de référence, film uniforme d'épaisseur connue  $h^*$ , permettant de définir une solution localisée.

Bien qu'un retour aux notations initiales plus physiques pourra être intéressant, notamment lors de l'étude des familles d'ondes stationnaires pour un débit constant, nous allons adopter dans la majeure partie de ce qui suit les notations réduites. En effet, ces dernières ont l'avantage de rendre explicite l'origine des différents termes dans les équations. Les termes inertiels apparaissent en facteur de  $\delta$  et les termes visqueux d'ordre  $\epsilon^2$  en facteur de  $\eta$ .

## 5.1.2 Les systèmes dynamiques étudiés

### Modèles au premier ordre

À l'aide de (5.7), récrivons l'équation bilan de la quantité de mouvement (4.18) dans le référentiel en mouvement

$$-\frac{5}{2} \frac{q_0}{h^2} - \frac{5}{2} \frac{c}{h} + \frac{5}{6} h + \left\{ \delta \left( \frac{9}{7} \frac{q_0^2}{h^2} + \frac{1}{7} \frac{c q_0}{h} - \frac{c^2}{7} \right) - \frac{5}{6} \zeta h \right\} h' + \frac{5}{6} h h''' = 0, \quad (5.23)$$

Faisons de plus l'hypothèse que le film ne s'assèche jamais, soit  $h \neq 0$ , et divisons (5.23) par  $-5h/6$  pour obtenir

$$h''' = 3 \frac{q_0}{h^3} + 3 \frac{c}{h^2} - 1 + \left\{ \delta \left( -\frac{54}{35} \frac{q_0^2}{h^3} - \frac{6}{35} \frac{c q_0}{h^2} + \frac{6}{35} \frac{c^2}{h} \right) + \zeta \right\} h' \quad (5.24)$$

---

<sup>4</sup>En réalité, Demekhin *et al.* définissent un nombre de Reynolds réduit, tel que  $\delta = 45\delta_D$ . Notre choix du dimensionnement de  $\delta$  a été guidé par le souci de ne pas introduire de constante inutile dans les équations afin de faciliter le passage des notations initiales  $q^*$  ou  $h^*$ ,  $B$  et  $\Gamma$  aux notations réduites  $\delta$ ,  $\zeta$  et  $\eta$ .

qui peut encore se mettre sous la forme d'un système d'équations ordinaires du premier ordre pour  $U_1 = h$ ,  $U_2 = h'$  et  $U_3 = h''$ .

$$\begin{aligned} U_1' &= U_2, & U_2' &= U_3, \\ U_3' &= 3\frac{q_0}{U_1^3} + 3\frac{c}{U_1^2} - 1 + \left\{ \delta \left( -\frac{54}{35} \frac{q_0^2}{U_1^3} - \frac{6}{35} \frac{c q_0}{U_1^2} + \frac{6}{35} \frac{c^2}{U_1} \right) + \zeta \right\} U_2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Pour comparaison, le système obtenu à partir du modèle de Shkadov (3.61) s'écrit

$$\begin{aligned} U_1' &= U_2, & U_2' &= U_3, \\ U_3' &= 3\frac{q_0}{U_1^3} + 3\frac{c}{U_1^2} - 1 + \left\{ \delta \left( -\frac{6}{5} \frac{q_0^2}{U_1^3} + \frac{2}{15} \frac{c^2}{U_1} \right) + \zeta \right\} U_2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

De même, le modèle au premier ordre présenté en annexe (cf. ch. 10, éqs. (9, 58)), conduit au système suivant

$$\begin{aligned} U_1' &= U_2, & U_2' &= U_3, \\ U_3' &= 3\frac{q_0}{U_1^3} + 3\frac{c}{U_1^2} - 1 + \left\{ \delta \left( -\frac{6}{5} \frac{q_0^2}{U_1^3} + \frac{2}{5} \frac{c q_0}{U_1^2} + \frac{2}{5} \frac{c^2}{U_1} \right) + \zeta \right\} U_2 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Les systèmes (5.25,5.26,5.27) sont des systèmes dynamiques autonomes de dimension trois dans l'espace des phases  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ ,

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\xi} = \mathbf{F}(\mathbf{U}; c, q_0, \delta, \zeta) \quad (5.28)$$

### Modèle simplifié au second ordre

Remplaçant le débit  $q$  par l'expression (5.7) dans (4.65–4.66) on obtient dans le référentiel en mouvement

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2} \frac{q_0}{h^2} - \frac{5}{2} \frac{c}{h} + \frac{5}{6} h + \left\{ \delta \left( \frac{9}{7} \frac{q_0^2}{h^2} + \frac{1}{7} \frac{c q_0}{h} - \frac{c^2}{7} \right) - \frac{5}{6} \zeta h \right\} h' + \frac{5}{6} h h''' \\ + \eta \left\{ \left( \frac{4q_0}{h^2} - \frac{c}{2h} \right) (h')^2 + \left( -\frac{3}{2} c - 6 \frac{q_0}{h} \right) h'' \right\} = 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

d'où, avec  $U_1 = h$ ,  $U_2 = h'$  et  $U_3 = h''$ , le système dynamique :

$$\begin{aligned} U_1' &= U_2, & U_2' &= U_3, \\ U_3' &= 3\frac{q_0}{U_1^3} + 3\frac{c}{U_1^2} - 1 + \left\{ \delta \left( -\frac{54}{35} \frac{q_0^2}{U_1^3} - \frac{6}{35} \frac{c q_0}{U_1^2} + \frac{6}{35} \frac{c^2}{U_1} \right) + \zeta \right\} U_2 \\ &+ \eta \left\{ \left( -\frac{24}{5} \frac{q_0}{U_1^3} + \frac{3}{5} \frac{c}{U_1^2} \right) U_2^2 + \left( \frac{36}{5} \frac{q_0}{U_1^2} + \frac{9}{5} \frac{c}{U_1} \right) U_3^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Annulant  $\eta$  on retrouve alors (5.25) correspondant au modèle au premier ordre (3.38,4.18). En effet, les deux modèles au premier ordre et simplifié au second ordre ne diffèrent l'un de l'autre que par l'adjonction de termes du second ordre d'origine visqueuse que l'on retrouve en facteur de  $\eta$  avec les notations réduites.

## 5.2 Les points fixes et leur stabilité

Les points fixes des différents systèmes dynamiques sont obtenus en annulant leur membre de droite. Le résultat est alors le même pour (5.25), (5.26), (5.27) ou (5.30), soit

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1^3 - 3c\mathbf{U}_1 - 3q_0 &= 0 \\ \mathbf{U}_2 = 0, \quad \mathbf{U}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

L'équation (5.31) correspond à (5.7) où le débit a été éliminé à l'aide de la relation  $q = h^3/3$  entre débit et épaisseur d'un film uniforme.

Un film d'épaisseur uniforme correspond à un point fixe de (5.28). Il est ainsi commode d'imposer que  $\mathbf{U}_1 = 1$  soit solution de (5.31), ce qui revient à prendre pour épaisseur de référence  $h^*$  servant aux définitions des paramètres réduits, l'une des valeurs  $\mathbf{U}_1$  atteintes pour les points fixes du système. Par conséquent,  $q_0$  est fixé par la relation (5.8). Les deux autres solutions de (5.31) vérifient

$$\mathbf{U}_1^2 + \mathbf{U}_1 + 1 - 3c = 0. \quad (5.32)$$

La somme des racines de (5.32) est égale à  $-1$ . Par conséquent l'une de ces deux racines est négative et (5.31) n'admet de solution positive que si leur produit est négatif soit  $c \geq 1/3$ . Dans ce cas deux points fixes sont possibles,  $\mathbf{U}_I = (1, 0, 0)$  et

$$\mathbf{U}_{II} = \left( -\frac{1}{2} + \sqrt{3\left(c - \frac{1}{4}\right)}, 0, 0 \right). \quad (5.33)$$

Ainsi  $c = 1/3$  correspond à l'annulation de  $\mathbf{U}_{II}$ .

Notons que la position des points fixes ne dépend plus que de la vitesse  $c$ . Dans la suite de cet exposé et jusqu'à ce qu'il en soit fait une mention contraire, la constante  $q_0$  sera fixée par la condition (5.8) de sorte que  $\mathbf{U}_I = 1$ .

Un développement limité de  $\mathbf{U}_{II}$  autour de  $c = 1$  en posant  $\delta c \equiv c - 1$  donne  $\mathbf{U}_{II} = 1 + \delta c$ . On a de plus  $\frac{d^2}{dc^2}\mathbf{U}_{II} = -\frac{9}{4}(c - 1/4)^{-1/2} < 0$  et par conséquent la courbe  $\mathbf{U}_{II}$  en fonction de  $c$  est concave et toujours située sous la première bissectrice (cf. fig. 5.1) soit  $c \geq \mathbf{U}_{II}$ .

### 5.2.1 Motivation

Gardant à l'esprit la dynamique aléatoire du film faisant apparaître des trains désordonnés d'ondes quasi-solitaires interagissant les unes avec les autres ([27] et fig. 7.8), nous allons centrer cette étude sur la description des ondes solitaires correspondant aux orbites homoclines solutions des systèmes dynamiques rencontrés. Une orbite est dite homocline lorsque celle-ci quitte pour  $\xi = -\infty$  un point fixe suivant la variété instable  $W^u$  pour le rejoindre ensuite en  $\xi = +\infty$  suivant la variété stable  $W^s$ . Les variétés  $W^{s,u}$  ont localement la structure de leurs espaces tangents  $E^{s,u}$ . Or  $E^{s,u}$  sont les sommes directes des sous-espaces propres correspondant aux valeurs propres de parties réelles respectivement négatives et positives. Par conséquent, une

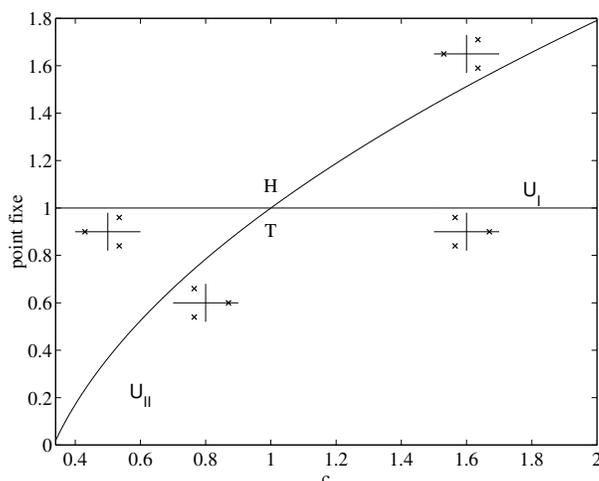


FIG. 5.1 – schéma précisant la position des points fixes et les valeurs propres associées dans l'espace complexe. 'T' ('H') désigne une bifurcation trans-critique (Hopf). Les paramètres sont  $\zeta = 0$  et  $\delta = 1$ .

orbite homocline correspond à un point col. Il est également facile de se convaincre, par exemple en examinant le portrait de phase au voisinage d'un nœud stable, qu'une orbite homocline retournera, sauf cas pathologique, préférentiellement vers un point fixe en suivant la sous-variété stable correspondant à la valeur propre de partie réelle négative la plus petite en valeur absolue. Renversant le sens du temps pour utiliser cet argument pour la variété instable  $W^u$  permet de conclure que les valeurs propres les plus proches de l'axe imaginaire jouent un rôle prépondérant dans la formation des orbites homoclines en déterminant leurs trajectoires au voisinage du point fixe. Intéressons-nous donc au comportement de ces valeurs propres, dites *dominantes* [16], dans l'espace des paramètres.

On constate que l'étude des orbites homoclines du système dynamique (5.56–5.59) de dimension cinq correspondant au modèle au deuxième ordre (3.38,4.61,4.59,4.60) conduit ainsi au suivi de trois valeurs propres dans l'espace des paramètres, les deux autres valeurs propres étant réelles positives et beaucoup plus éloignées de l'axe imaginaire (voir en annexe § 5.6). Par conséquent cette étude est qualitativement identique à celles ayant pour point de départ les systèmes dynamiques (5.25) et (5.30) de dimension trois correspondant aux modèles au premier et second ordre simplifié. On se contentera ici de cette dernière étude et nous n'aborderons que très partiellement les modèles plus complexes afin seulement de déterminer certaines de leurs solutions sous forme d'ondes solitaires à une bosse (cf. figs. 5.11,5.12).

Suivant la démonstration présentée par Pumir [94], imaginons une sphère de rayon suffisamment petit et placée au point fixe considéré. Puisque la somme des dimensions des variétés stable et instable est celle de l'espace des phases, soit trois et que ces variétés sont supposées non-vides, cette sphère intersecte les variétés stable et instable en un point et une courbe. Génériquement, faire passer une courbe par un

point dans une variété de dimension deux est un problème de codimension un, c.-à-d. nécessitant l’ajustement d’un seul paramètre. Ainsi, l’existence d’orbites homoclines implique une relation entre les paramètres, soit un problème aux valeurs propres non-linéaires définissant la vitesse  $c$  en fonction de  $\delta$ ,  $\zeta$  et  $\eta$ . On peut cependant parfois rencontrer des bifurcations homoclines de codimension deux correspondant à des dégénérescences causant un changement qualitatif à leur voisinage [16].

Un tel changement qualitatif apparaît en cas de point col-spiral neutre ou résonnant, soit un point fixe ayant une valeur propre réelle, notée  $\lambda_1$  et deux complexes conjuguées,  $\lambda_{2,3}$  telles que  $\Re(\lambda_{2,3}) = -\lambda_1$ , c.-à-d. équidistantes de l’axe imaginaire. Ce cas correspond à l’apparition du *chaos homocline* à la Shilnikov se caractérisant par la présence d’un ensemble invariant hyperbolique de trajectoires ou “*horseshoe*” lorsque le critère  $-\Re(\lambda_{2,3})/\lambda_1 < 1$  est vérifié [57]. La valeur propre la plus proche de l’axe imaginaire, ou *déterminante*, est alors complexe.

Un autre cas tout aussi important est celui d’un point col-spiral à divergence nulle, soit en gardant les notations précédentes,  $\Re(\lambda_{2,3}) = -\frac{1}{2}\lambda_1$ . Ici, la divergence du champ de vecteurs est nulle ce qui implique la transition entre la présence de cycles limites stables de grandes périodes près de l’orbite homocline en cas de contraction (la divergence du champ de vecteur est négative au voisinage du point fixe) et leur disparition dans le cas contraire [54].

Enfin, un dernier cas de figure est celui d’une valeur propre double déterminante correspondant à la transition d’un point col à un point col-spiral accompagné de l’apparition de chaos à la Shilnikov [16]. En effet, on passe alors de trois valeurs propres réelles à une valeur propre réelle et des valeurs propres complexes conjuguées. C’est pourquoi, notre étude des valeurs propres du champ de vecteurs linéarisé autour des points fixes sera axée sur la recherche des bifurcations de Hopf, des valeurs propres doubles et des points col-spiraux neutres ou à divergence nulle.

## 5.2.2 Symétries

Avant de continuer, arrêtons-nous un instant sur les symétries du problèmes afin de simplifier notre étude.

Chang *et al.* [23, 27] ont noté deux symétries essentielles des équations permettant de caractériser l’interaction entre les structures localisées. La première est liée à l’invariance par translation  $\xi \mapsto \xi + \xi_0$ . La deuxième est plus subtile et liée à l’existence d’une famille de solutions uniformes paramétrée par le débit  $q^*$  ou l’épaisseur du film  $h^*$ . Avec la transformation  $h \mapsto h^*h$ , cette famille se réduit à une seule et même solution. Cette symétrie est bien entendu brisée lorsque la surface du film est ondulée. L’expérience [81] et la simulation numérique [27] montrent cependant qu’à un nombre de Reynolds donné, c.-à-d. un débit moyen donné  $\langle q \rangle$ , définissant l’épaisseur de référence  $h^{**}$  via la solution de film uniforme  $\langle q \rangle = q^{**} = \frac{1}{3}h^{**3}$ , des ondes périodiques presque homoclines de différentes amplitudes, vitesses et épaisseurs de substrat  $h^*$  pouvaient être observées. À l’inverse, fixant l’épaisseur du film à l’infini  $h(\pm\infty) = h^*$  et l’inclinaison du plan, les ondes solitaires (orbites homoclines) solutions de l’équation de couche limite (3.9) forment une famille de codimension un (paramétrée par leur vitesse).

Le passage d'une solution homocline, notée  $h_1, u_1$  vérifiant  $h_1(\pm\infty) = h^{**}_1 = h^*_1/h^{**}$  pour les paramètres  $\delta_1, \zeta_1, \eta_1, c_1$  et  $q_{01}$  à une autre, notée  $h_2, u_2$  vérifiant  $h_2(\pm\infty) = h^{**}_2 = h^*_2/h^{**}$  avec les paramètres  $\delta_2, \zeta_2, \eta_2, c_2$  et  $q_{02}$  peut se faire en définissant le rapport  $\chi = h^*_2/h^*_1$  par la transformation

$$\begin{aligned} h_2(\xi) &= h_1(\xi\chi^{-1/3})\chi, & u_2(\xi, y) &= u_1(\xi\chi^{-1/3}, y\chi^{-1})\chi^2, \\ q_2(\xi) &= q_1(\xi\chi^{-1/3})\chi^3 \\ \delta_2 &= \delta_1\chi^{-11/3}, & \zeta_2 &= \zeta_1\chi^{-2/3}, & \eta_2 &= \eta_1\chi^{-4/3}, \\ c_2 &= c_1\chi^2 & q_{02} &= q_{01}\chi^3. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Ainsi l'étude des orbites homoclines autour du point fixe  $\mathbf{U}_{\text{II}}$  peut se déduire de l'étude correspondant à  $\mathbf{U}_{\text{I}}$  par un simple changement de variables. En effet, on peut intervertir le rôle des points fixes en utilisant la transformation (5.34). Dénotant par l'indice 2 l'orbite autour de  $\mathbf{U}_{\text{II}}$  et ses paramètres, et par l'indice 1 l'orbite autour de  $\mathbf{U}_{\text{I}}$  et les paramètres correspondants, on obtient à l'aide de (5.34) et avec  $\chi = \mathbf{U}_{\text{II}}(c_2)$ ,  $\xi_1 = \xi_2\mathbf{U}_{\text{II}}^{-1/3}$ ,  $c_1 = c_2\mathbf{U}_{\text{II}}^{-2}$ ,  $\delta_1 = \delta_2\mathbf{U}_{\text{II}}^{11/3}$ ,  $\zeta_1 = \zeta_2\mathbf{U}_{\text{II}}^{2/3}$ ,  $\eta_1 = \eta_2\mathbf{U}_{\text{II}}^{4/3}$  et  $q_{01} = q_{02}\mathbf{U}_{\text{II}}^{-3}$ . La symétrie  $\mathbf{U}_{\text{I}} \leftrightarrow \mathbf{U}_{\text{II}}$  permet également de simplifier de moitié l'étude de stabilité des points fixes et des solutions apparaissant par bifurcation de Hopf.

On a de plus  $\mathbf{U}_{\text{II}}^2 = 3c_2 - \mathbf{U}_{\text{II}} - 1$ , d'où l'on tire  $c_2 > 1$  ce qui implique  $\mathbf{U}_{\text{II}}^2 - c_2 = c_2 - 1 + c_2 - \mathbf{U}_{\text{II}} > 0$  et  $c_1 < 1$ . Par conséquent, un cycle limite émergeant de  $\mathbf{U}_{\text{I}}$  pour  $c < 1$  correspond à un cycle limite émergeant de  $\mathbf{U}_{\text{II}}$  pour  $c > 1$ . De la même manière, une orbite homocline autour de  $\mathbf{U}_{\text{II}}$  pour  $c > 1$  correspond à une orbite homocline autour de  $\mathbf{U}_{\text{I}}$  pour  $c < 1$ .

### 5.2.3 Modèle au premier ordre

Les valeurs propres  $\lambda$  du problème linéarisé de (5.25) autour de la solution uniforme  $\mathbf{U}_{\text{I}}$  vérifient

$$\lambda^3 + \lambda \left\{ \delta \left( \frac{6}{5}c^2 - \frac{34}{35}c + \frac{6}{35} \right) - \zeta \right\} - 3(c-1) = 0 \tag{5.35}$$

La définition  $\xi \equiv x - ct$ , implique que l'étude de stabilité autour du point fixe  $\mathbf{U}_{\text{I}}$  est identique à l'étude de stabilité linéaire spatiale du film (pulsation  $\omega \in \mathbb{R}$ , nombre d'onde  $\alpha \in \mathbb{C}$ ), d'où la correspondance  $\lambda \leftrightarrow i\alpha$ . Les trajectoires quittant  $\mathbf{U}_{\text{I}}$  tangentiellement à  $E^u$  correspondent donc à des perturbations de la solution uniforme croissantes en espace. Par conséquent, nous pourrions restreindre notre analyse au cas où le film est linéairement instable, soit  $R \geq \frac{5}{6}B$ , soit encore avec les notations réduites,  $\delta \geq \frac{5}{2}\zeta$ .

La somme des racines  $\lambda_i$  de (5.35) est nulle. Une d'entre elles est réelle, disons  $\lambda_1$  et a le signe du produit, i.e.  $c - 1$ . Le caractère réel ou complexe des deux autres racines  $\lambda_{2,3}$  dépend du signe de

$$\Delta = 4 \left[ \delta \left( \frac{6}{5}c^2 - \frac{34}{35}c + \frac{6}{35} \right) - \zeta \right]^3 + 27 [3(c-1)]^2 \tag{5.36}$$

Lorsque  $\Delta$  est négatif, ces deux racines sont réelles et de signe opposé à  $c - 1$ . Si  $\Delta > 0$ , elles sont complexes conjuguées et le signe de leur partie réelle est à nouveau

l'opposé de celui de  $c - 1$ . Si  $c > 1$  alors  $\lambda_{2,3}$  sont certainement complexes tandis qu'on ne peut rien conclure si  $c < 1$ . Quand  $c > 1$ ,  $\lambda_1$  est positif et définit une variété instable de dimension un. De même, la partie réelle de  $\lambda_{2,3}$  est alors négative et la variété stable est de dimension deux. On se trouve alors dans le cas d'un point col-spiral à divergence nulle discuté au § 5.2.1.

Puisque la somme des racines est nulle et que leur produit vaut  $3(c - 1)$ , le point fixe  $\mathbf{U}_I$  subit une bifurcation de Hopf lorsque ses trois racines sont nulles, c.-à.-d. pour  $c = 1$ . La partie imaginaire de  $\lambda_{2,3}$  est alors donnée par

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{2}{5}\delta - \zeta}. \quad (5.37)$$

En  $c = 1$ , les points fixes sont de plus confondus (cf. fig. 5.1). Les deux cycles subissent ainsi une bifurcation de Hopf en même temps qu'une bifurcation trans-critique. On est en présence d'un point de bifurcation de codimension deux, appelé point de Gavrilov–Guckenheimer [16], correspondant à une instabilité stationnaire–oscillante ( $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i\omega$ ). Cette situation a été étudiée par Gaspard [52] qui a prouvé l'existence de chaos homocline au voisinage de ce point.

#### 5.2.4 Modèle au deuxième ordre simplifié

Utilisant la symétrie  $\mathbf{U}_I \leftrightarrow \mathbf{U}_{II}$ , l'étude de stabilité de  $\mathbf{U}_{II}$  se déduit de celle de  $\mathbf{U}_I$  et nous ne présenterons les calculs que pour  $\mathbf{U}_I$ .

Au lieu de (5.35) on obtient l'équation de dispersion

$$\lambda^3 + \lambda^2\eta \left( -\frac{12}{5} + \frac{27}{5}c \right) + \lambda \left\{ \delta \left( \frac{6}{5}c^2 - \frac{34}{35}c + \frac{6}{35} \right) - \zeta \right\} - 3(c - 1) = 0 \quad (5.38)$$

Notons que la somme des valeurs propres n'est plus nulle ici. L'introduction de la dissipation visqueuse du second ordre brise la dégénérescence correspondante. Toutefois, la divergence du champ de vecteurs s'annule pour  $c = \frac{12}{27} \approx 0.44$  soit  $\mathbf{U}_{II} = 0.26$ , situation qui n'a pas été rencontrée lors de notre étude des orbites homoclines.

Par conséquent, le point de bifurcation trans-critique entre les points fixes ne correspond plus à une bifurcation de Hopf survenant lorsque la partie réelle des valeurs propres complexes  $\lambda_{2,3}$  passe par zéro. L'introduction de la dispersion a ainsi levé la singularité de codimension deux en  $c = 1$ .

Substituer  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  dans (5.38), puis annuler  $\lambda_r$  et séparer partie réelle et imaginaire conduit à

$$3 - 3c + \lambda_i^2\eta \left( \frac{12}{5} - \frac{27}{5}c \right) = 0, \quad (5.39)$$

$$-\zeta + \delta \left( \frac{6}{35} - \frac{34}{35}c + \frac{6}{5}c^2 \right) - \lambda_i^2 = 0. \quad (5.40)$$

D'où par simple combinaison linéaire de (5.39–5.40),

$$-\frac{4}{63} - \frac{25}{54\delta\eta} + c \left( \frac{95}{189} - \frac{5\zeta}{6\delta} + \frac{25}{54\delta\eta} \right) + \frac{79}{63}c^2 + c^3 = 0, \quad (5.41)$$

$$\frac{1}{\eta^2} \left( \frac{25}{81}\zeta - \frac{10}{81}\delta \right) + \lambda_i^2 \left( \frac{25}{81\eta^2} + \frac{10\zeta}{9\eta} - \frac{2\delta}{567\eta} \right) + \lambda_i^4 \left( \zeta + \frac{22}{945}\delta + \frac{10}{9\eta} \right) + \lambda_i^6 = 0. \quad (5.42)$$

La figure 5.2 représente le comportement de la partie imaginaire de  $\lambda$  et de la vitesse de phase  $c$  au moment de la traversée de l'axe réel. On observe que, pour des valeurs croissantes de  $\eta$ ,  $c$  et  $\lambda_i$  diminuent fortement. En fonction de l'écart au seuil  $\delta - \frac{5}{2}\zeta$ , la diminution de  $\lambda_i$  est d'autant plus rapide que l'inclinaison du plan  $\beta$  est faible soit  $\zeta$  élevé. La situation s'inverse quand on considère  $c$ . En effet, la décroissance de la vitesse de phase est alors plus forte dans le cas d'un plan vertical. Par commodité, notons (5.38) sous la forme

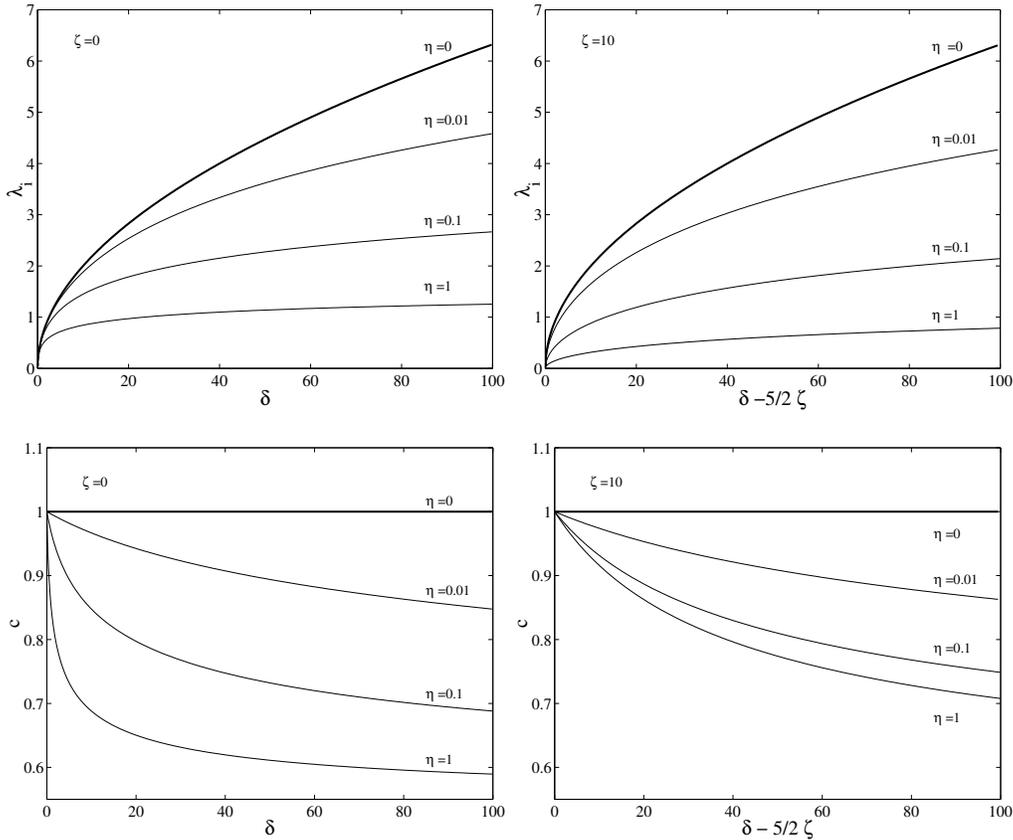


FIG. 5.2 – Lieu de la bifurcation de Hopf pour différentes valeurs de  $\zeta$  et  $\eta$ . En haut partie imaginaire de  $\lambda$ , en bas vitesse de phase  $c$  en fonction de l'écart au seuil.

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (5.43)$$

avec  $A = \eta \left( -\frac{12}{5} + \frac{27}{5}c \right)$ ,  $B = \delta \left( \frac{6}{5}c^2 - \frac{34}{35}c + \frac{6}{35} \right) - \zeta$  et  $C = 3 - 3c$ .

Les valeurs propres doubles de (5.43) s'obtiennent en écrivant que  $\lambda$  est racine du polynôme  $\mathcal{P} = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C$  et de  $\mathcal{P}'$  soit encore que  $\mathcal{P}'$  divise  $\mathcal{P}$ , ce qui

s'écrit

$$\left(C - \frac{AB}{9}\right) \left(-\frac{4}{9}A^3 + \frac{5}{3}AB - 3C\right) - B \left(-\frac{2}{9}A^2 + \frac{2}{3}B\right)^2 = 0. \quad (5.44)$$

Regroupant les termes de (5.44) suivant les puissances de  $c$ , on observe que (5.44) admet l'asymptote

$$\delta = \frac{243}{40}\eta^2, \quad (5.45)$$

pour  $c \rightarrow +\infty$  correspondant au monôme de (5.44) de degré le plus élevé. En un point de l'espace des paramètres vérifiant (5.44) le point fixe  $\mathbf{U}_I$  change de nature, d'un point col-spiral à un point nœud-col ou d'un point spiral stable à un nœud [83]. Dans le premier cas, les orbites homoclines changent alors d'aspect car elles cessent de s'approcher du point fixe en tournoyant, ce qui correspond à la disparition des oscillations capillaires précédant les ondes solitaires.

Tandis que pour  $\eta = 0$ , le point fixe est de type col-spiral à divergence nulle ( $\lambda_1 = -\frac{1}{2}\Re(\lambda_{2,3})$ ) entraînant la présence de chaos homocline pour toute valeur des paramètres  $\delta$  et  $\zeta$ , lorsque  $\eta \neq 0$  le critère de Shilnikov n'est pas toujours vérifié. La somme  $\Sigma$  des valeurs propres est telle que  $\Sigma = -\lambda_1 = -A$ . Par conséquent, les valeurs propres sont équidistantes de l'axe imaginaire lorsque  $\lambda - A$  divise le polynôme caractéristique  $\mathcal{P}$  soit

$$2A^3 + AB + C = 0, \quad (5.46)$$

ou encore sous forme développée

$$\begin{aligned} c^3\eta \left(\frac{162}{25}\delta + \frac{39366}{125}\eta^2\right) + c^2\eta \left(-\frac{1422}{175}\delta - \frac{52488}{125}\eta^2\right) + c \left[\frac{23328}{125}\eta^3 \right. \\ \left. + \eta \left(\frac{114}{35}\delta - \frac{27}{5}\zeta\right) - 3\right] + 3 + \eta \left(-\frac{72}{175}\delta + \frac{12}{5}\zeta\right) - \frac{3456}{125}\eta^3 = 0, \quad (5.47) \end{aligned}$$

Pour  $\eta = 0$ , (5.47) se réduit évidemment à  $c = 1$ .

Le comportement des valeurs propres dans l'espace des paramètres a été exploré mais pas de façon exhaustive. En particulier, nous nous sommes limités au cas où le film est instable et où les effets de tension superficielle prédominent, assurant que l'hypothèse de faible gradient est vérifiée soit  $\delta > \frac{5}{2}\zeta$  et  $\eta \leq 1$ . Les figures 5.3–5.7 décrivent schématiquement la position des valeurs propres dans le plan complexe pour  $\zeta = 0$ ,  $\zeta = 10$ ,  $\eta = 0.01$ ,  $\eta = 0.1$  et  $\eta = 1$ .

Décrivons les résultats correspondant au point fixe  $\mathbf{U}_I$  en fonction de  $\delta$  et  $c$  pour  $\zeta$  et  $\eta$  fixés. Pour un plan incliné à la verticale, soit  $\zeta = 0$  et une dispersion d'origine visqueuse modérée  $\eta = 0.1$ , le lieu de la bifurcation de Hopf reste assez proche de l'axe  $c = 1$  (correspondant au modèle au premier ordre  $\eta = 0$ ). Le critère d'apparition du chaos homocline à la Shilnikov n'est vérifié que dans une portion du plan  $(\delta, c)$  limitée par l'axe  $\delta = 0$  et la ligne pointillée, et en dessous de la ligne de bifurcation de Hopf. De plus  $\mathbf{U}_I$  est un point spiral sauf au voisinage du point  $(\delta = 0, c = 1)$ , correspondant au seuil de l'instabilité primaire du film. Notons que pour une valeur faible de  $\eta$ , soit  $\eta = 0.01$ , le diagramme de stabilité (non représenté) n'est pas qualitativement modifié. On observe par exemple que le domaine où le

chaos homocline est possible ne franchit pas la valeur  $\delta \approx 21$ . Ainsi, même pour une dispersion visqueuse faible le domaine des paramètres où le chaos homocline est possible est déjà réduit alors qu'il est possible presque partout dans le cas  $\eta = 0$ . Pour une valeur plus grande de  $\eta$ , soit  $\eta = 1$ , le domaine où le critère de Shilnikov est vérifié se limite à la partie du plan située sous la bifurcation de Hopf. Le lieu des valeurs propres doubles dans l'espace des paramètres fait alors apparaître l'asymptote (5.45).

Dans le cas d'un plan plus faiblement incliné ( $\zeta = 10$ ), le diagramme se modifie encore. Ainsi, pour  $\eta = 0.01$ , le domaine où le chaos homocline est envisageable se réduit à une bande entre les lieux de la bifurcation de Hopf (ligne continue) et des valeurs propres doubles (trait mixte), et une portion du plan à gauche de la ligne pointillée. Cette dernière portion disparaît avec  $\eta = 0.1$  et le domaine où le critère de Shilnikov est vérifié diminue encore quand  $\eta = 1$ . Le lieu correspondant au passage valeurs propres complexes à réelles se rapproche alors du lieu de la bifurcation de Hopf de telle manière que la portion plan où  $\mathbf{U}_I$  est un point spiral devient limitée.

Les diagrammes présentant la stabilité de  $\mathbf{U}_{II}$  dans l'espace des paramètres se déduisent de l'étude précédente à l'aide de l'échange  $\mathbf{U}_I \leftrightarrow \mathbf{U}_{II}$ . La bifurcation de Hopf se fait alors pour des valeurs de la vitesse  $c > 1$ . L'allure des diagrammes est approximativement le symétrique par rapport à l'axe  $c = 1$  de ceux obtenus pour  $\mathbf{U}_I$  (cf figs. 5.3 et 5.4) en raison de la relation  $c_1 = c_2 \mathbf{U}_{II}^{-2}$  (avec les conventions du § 5.2.2). En effet, un développement limité de cette relation autour de  $c_2 = 1$  en posant  $\delta c \equiv c_2 - 1 \ll 1$  donne  $c_1 = 1 - \delta c$ .

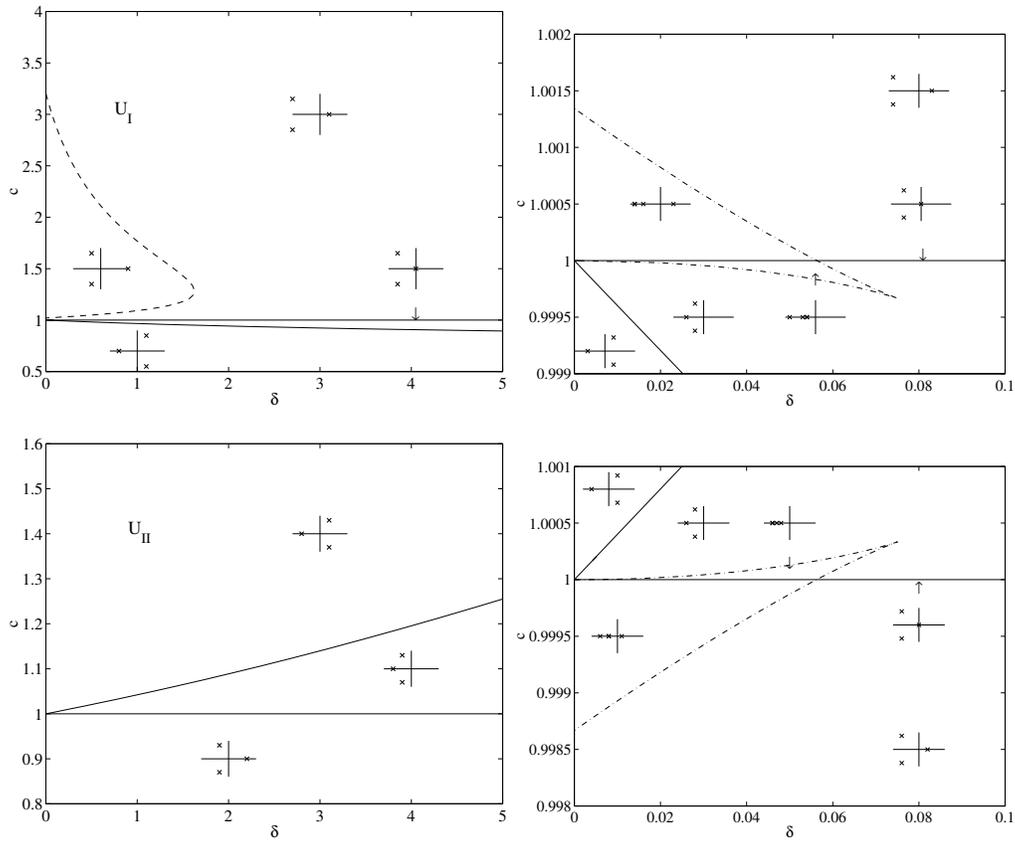


FIG. 5.3 – Comportements des valeurs propres dans le plan  $(\delta, c)$  pour  $\zeta = 0$  (plan vertical) et  $\eta = 0.1$ . Au dessus, point fixe  $U_I$  et au dessous  $U_{II}$ . Les diagrammes de droite sont des agrandissements en  $c = 1$  et  $\delta = 0$  des diagrammes de gauche.

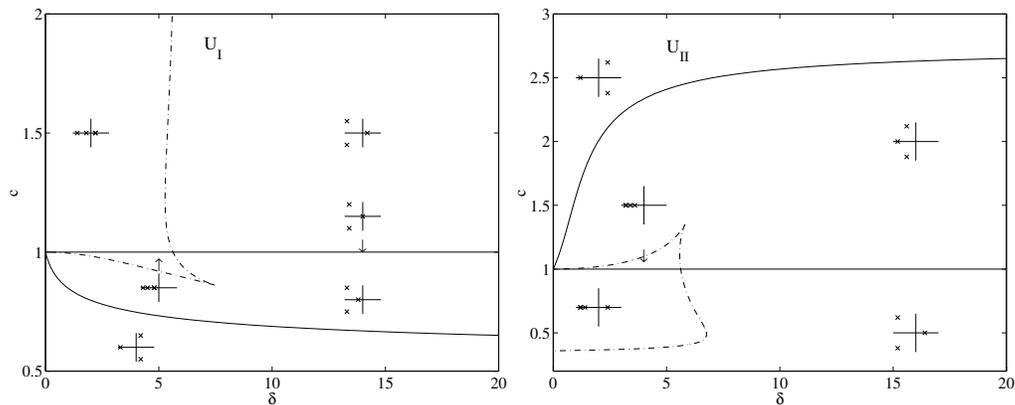


FIG. 5.4 – Comportements des valeurs propres dans le plan  $(\delta, c)$  pour  $\zeta = 0$  (plan vertical) et  $\eta = 1$ . À gauche, point fixe  $U_I$  et à droite  $U_{II}$

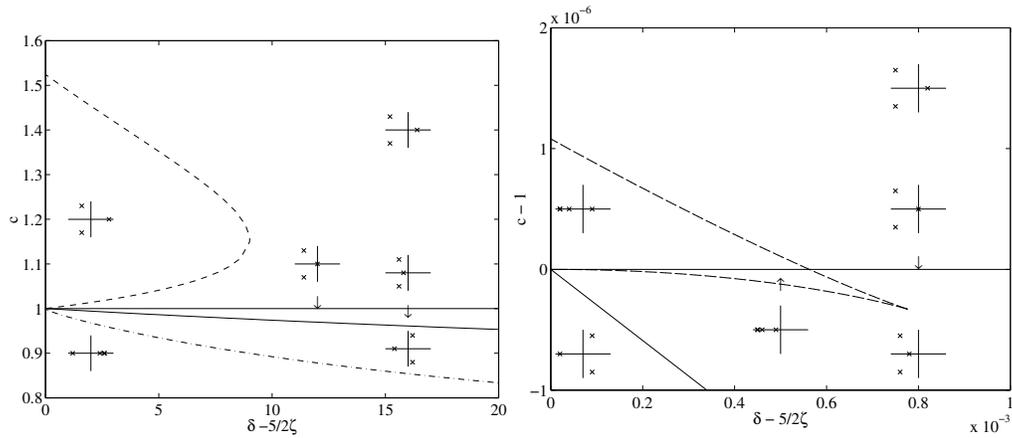


FIG. 5.5 – Comportements des valeurs propres dans le plan  $(\delta, c)$  pour le point fixe  $\mathbf{U}_I$ . Les paramètres sont  $\zeta = 10$  et  $\eta = 0.01$ . Le diagramme de droite est un agrandissement en  $c = 1$   $\delta = 25$  du diagramme de gauche.

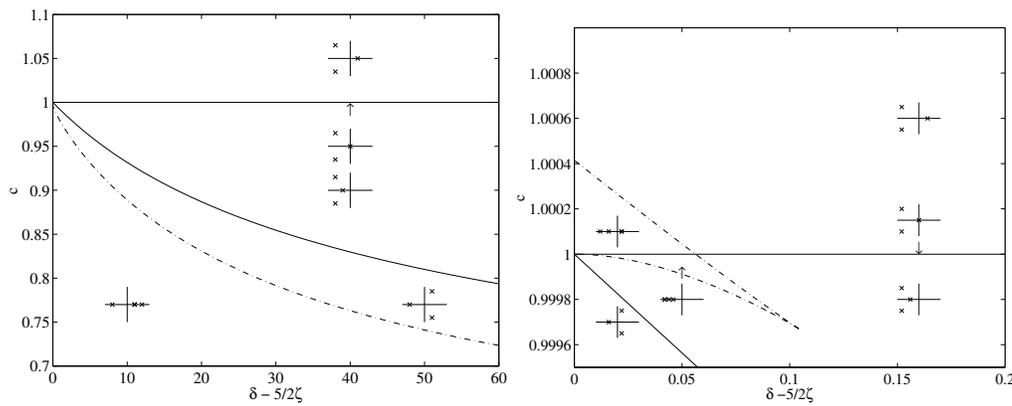


FIG. 5.6 – Comportements des valeurs propres dans le plan  $(\delta, c)$  pour le point fixe  $\mathbf{U}_I$ . Le diagramme de droite est un agrandissement en  $c = 1$   $\delta = 25$  du diagramme de gauche. Les paramètres sont  $\zeta = 10$  et  $\eta = 0.1$ .

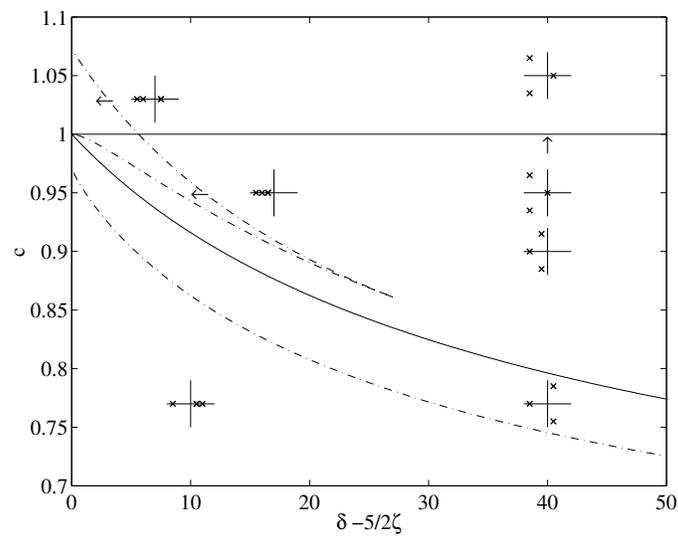


FIG. 5.7 – Comportements des valeurs propres dans le plan  $(\delta, c)$  pour le point fixe  $\mathbf{U}_I$ . Les paramètres sont  $\zeta = 10$  et  $\eta = 1$ .

## 5.3 Orbites périodiques

L'étude des orbites périodiques, ou cycles limites, solutions du système dynamique (5.26) correspondant au modèle de Shkadov (3.61) a été faite en détail par Trifonov & Tsveldub [112, 114]. Ces derniers ont montré l'existence d'une grande variété de solutions périodiques de (5.26). Les diagrammes de bifurcation obtenus sont d'une très grande complexité, les branches de solutions formant dans l'espace des paramètres des surfaces comprenant de nombreux feuilletés. On pourrait consacrer une thèse entière à l'étude des cycles limites solutions des modèles développés ici! Nous nous sommes donc volontairement restreints à quelques exemples afin d'illustrer cette étude et de passer aux solutions homoclines correspondant aux ondes solitaires observées expérimentalement.

À partir de chaque point de bifurcation de Hopf naît une orbite périodique que l'on peut suivre en abaissant le nombre d'onde  $\alpha$  à partir de sa valeur au point de bifurcation  $\alpha = \Im(\lambda)$ . La taille du cycle limite dans l'espace des phases augmente au fur et à mesure que sa période croît jusqu'à ce que celui-ci vienne tangenter un des points fixes pour former une orbite homocline de période infinie ( $\alpha = 0$ ) au cours d'une *bifurcation homocline*. La figure 5.8 illustre ces branches de solutions émergeant de  $\mathbf{U}_I$  (point 1,  $c < 1$ ) ou de  $\mathbf{U}_{II}$  (point 2,  $c > 1$ ) pour les paramètres  $\delta = 1$ ,  $\eta = 0.1$  et  $\zeta = 0$  (plan vertical, nombre de Reynolds faible et dispersion visqueuse assez importante). Les solutions présentées ont été calculées à l'aide d'une méthode de continuation prédicteur-correcteur et d'un schéma numérique pseudo-spectral présenté plus loin (§ 8.1).

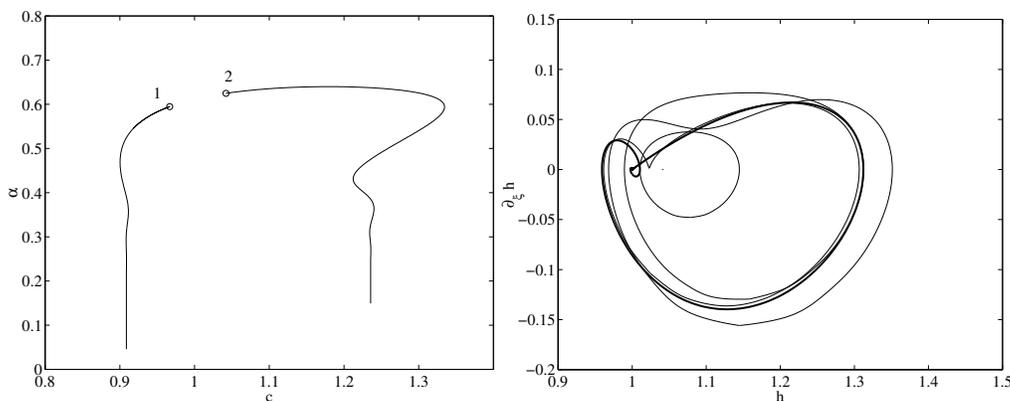


FIG. 5.8 – Orbites périodiques apparaissant par bifurcation de Hopf à partir des points fixes  $\mathbf{U}_I$  et  $\mathbf{U}_{II}$  pour  $\zeta = 0$  (plan vertical),  $\delta = 1$  et  $\eta = 0.1$ . À gauche, nombre d'onde  $\alpha$  en fonction de la vitesse  $c$ ; à droite projections des orbites émergeant de  $\mathbf{U}_{II}$  dans le plan ( $U_1 \equiv h$ ,  $U_2 \equiv h'$ ). Le point 1 (respectivement 2) correspond à la bifurcation de  $\mathbf{U}_I$  ( $\mathbf{U}_{II}$ ). Pour  $\alpha \ll 1$ , le cycle limite approche une orbite homocline autour de  $\mathbf{U}_I$  (en gras).

Pour obtenir les solutions émergeant par doublement, triplement ou quadruplement de périodes,  $n$  cycles limites identiques de nombre d'onde  $\alpha_0$  ont été placés

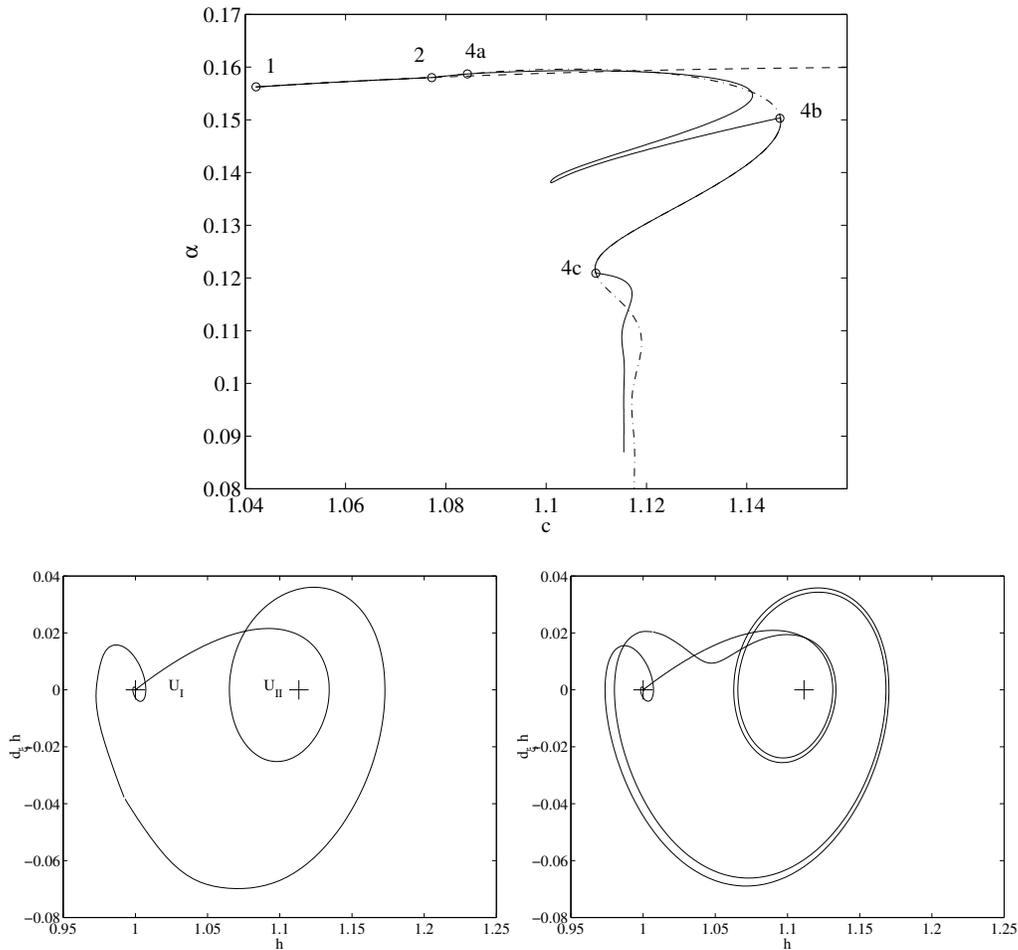


FIG. 5.9 – Orbites périodiques émergeant du point fixe  $\mathbf{U}_{II}$ . En haut, diagramme de bifurcation dans le plan  $(c, \alpha)$ ; en bas orbites homoclines obtenues par doublement de périodes (à gauche) et quadruplement de périodes (à droite). Les paramètres sont identiques à ceux de fig. 5.8 ( $\zeta = 0$ ,  $\delta = 1$  et  $\eta = 0.1$ ).

dans un domaine périodique de taille initiale  $L_0 = 2\pi n/\alpha_0$ , de telle façon que les nouvelles solutions apparaissent ensuite par brisure de la symétrie  $\xi \mapsto \xi + L/n$  lorsqu'on fait varier la taille  $L$  du domaine. La figure 5.9 présente le schéma de bifurcation correspondant au cycle limite issu de  $\mathbf{U}_{II}$  au point 1 (pointillés), soit  $\alpha = \alpha_0/4$  en fonction de  $c$ . Une première branche apparaît par un premier doublement de période au point 2 (trait mixte). Celle-ci conserve alors la symétrie  $\xi \mapsto \xi + L/2$  et aboutit à une orbite homocline joignant  $\mathbf{U}_I$  à lui-même après avoir tourné autour du point fixe  $\mathbf{U}_{II}$ . Le profil de l'onde stationnaire correspondante,  $h(\xi) = \mathbf{U}_I$ , a alors la forme d'une onde solitaire à deux bosses ressemblant aux solutions de l'équation de Benney calculée par Pumir *et al.* [95]. Une deuxième branche émerge ensuite peu après par un deuxième doublement de période au point 4a puis rejoint à nouveau la première en 4b au cours d'une bifurcation inverse. Elle réapparaît finalement en 4c pour finir par une orbite homocline partant de  $\mathbf{U}_I$ , faisant un tour autour de  $\mathbf{U}_{II}$

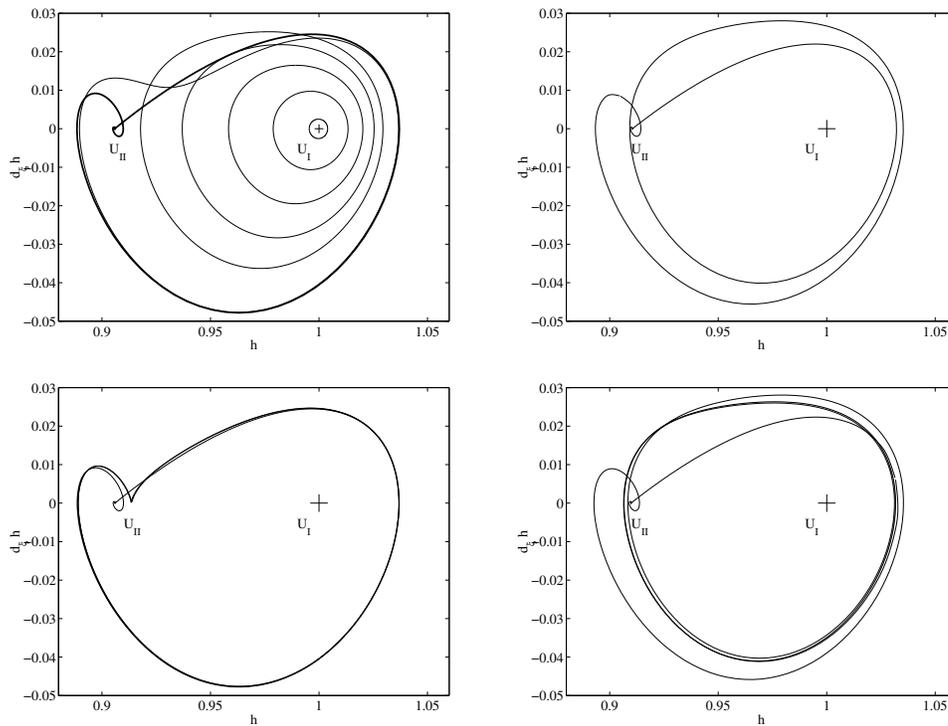


FIG. 5.10 – Orbites périodiques émergeant du point fixe  $\mathbf{U}_I$  en projection sur le plan ( $U_1 \equiv h$ ,  $U_2 \equiv h'$ ). En haut à gauche, orbites apparaissant par bifurcation de Hopf et se terminant par une orbite homocline autour de  $\mathbf{U}_{II}$  (en gras) ; puis de haut en bas et de gauche à droite, orbites homoclines terminant les branches de cycles limites issus de la première respectivement par doublement, triplement et quadruplement de périodes. Les paramètres sont identiques à ceux de fig. 5.8 ( $\zeta = 0$ ,  $\delta = 1$  et  $\eta = 0.1$ ).

puis de  $\mathbf{U}_I$  et enfin un deuxième tour autour de  $\mathbf{U}_{II}$  avant de retourner au point  $\mathbf{U}_I$ . Les orbites tracées sur la figure 5.9 sont des orbites homoclines *secondaires* selon la terminologie de Glendinning & Sparrow [54]. La figure 5.10 présente les orbites homoclines secondaires terminant les branches de solutions périodiques obtenues par doublement, triplement et quadruplement de période à partir de la branche de solutions apparaissant par bifurcation de Hopf de  $\mathbf{U}_I$ . À la différence du cas précédent, les orbites partent de  $\mathbf{U}_{II}$  et reviennent systématiquement au voisinage de  $\mathbf{U}_{II}$  sans tourner autour de  $\mathbf{U}_I$ .

En imposant que  $h(\xi \rightarrow \pm\infty) = 1$ , soit  $q_0 = 1/3 - c$ , il n'a pas été trouvé de solutions correspondant aux ondes solitaires en forme de trous obtenus par Shkadov [107] et Trifonov & Tsveldub [112] à partir des cycles limites apparaissant par bifurcation de Hopf. Nous verrons par la suite que cette impossibilité est levée par exemple en la remplaçant par la condition  $\langle h \rangle = 1$ . Cette remarque met en évidence le rôle joué par le choix d'une condition particulière fixant la constante d'intégration  $q_0$ . D'où l'importance de l'étude à débit moyen  $\langle q \rangle$  fixé, seule condition respectant la réalité expérimentale (cf. § 5.5.2).

## 5.4 Orbites homoclines

Le suivi des orbites homoclines dans l'espace des phases a été réalisé pour le point fixe  $\mathbf{U}_1$  à l'aide de la version 1997 du logiciel de continuation AUTO développé par Doedel *et al.* [38, 39, 40] et de la librairie de procédures HOMCONT [16].<sup>5</sup> Pour être capable de suivre une famille d'orbites homoclines dans l'espace des paramètres, HOMCONT exige la connaissance d'une première orbite homocline. Celle-ci est généralement obtenue à l'aide d'une méthode de tir ou d'une orbite périodique de grande longueur d'onde.

### 5.4.1 Comparaison et validation des modèles

La construction des orbites homoclines correspondant aux ondes solitaires observées expérimentalement est un bon moyen de tester la validité des modèles mathématiques formulés au cours de ce travail. Par ailleurs, la plupart des travaux antérieurs se sont concentrés sur l'étude des ondes solitaires. La comparaison avec les résultats trouvés dans la littérature va donc nous permettre de situer notre étude et de discuter ses avantages par rapport aux formulations présentées au chapitre 3.

En premier lieu, il est important de vérifier la présence d'orbites homoclines en forme d'impulsions isolées précédées d'ondes capillaires de plus faible amplitude. Nous les appellerons *orbites homoclines principales* en suivant la terminologie adoptée par Glendinning & Sparrow [54]. En effet, la présence de comportements singuliers est liée à l'absence de cette orbite homocline principale : lors des explosions observées au cours des simulations spatio-temporelles de l'équation de Benney (3.33), la solution diverge en effet après avoir, semble-t-il, vainement cherché une solution localisée qui n'existe pas pour les paramètres étudiés (cf. fig. 17 de [95], fig. 3.1 et la discussion au § 3.2). Par ailleurs, les simulations numériques directes [103] et les études numériques des équations de couche limite [18] suggèrent la présence de l'orbite homocline principale pour tout nombre de Reynolds. Ce fait corrobore pleinement les observations expérimentales démontrant la présence –même bruitée– des ondes solitaires jusqu'à un nombre de Reynolds élevé [81, 82].

La figure 5.11 représente la vitesse (en haut) et l'amplitude maximale (en bas) des orbites homoclines principales en fonction du nombre de Reynolds réduit  $\delta$  et pour des effets dispersifs visqueux relativement faibles  $\eta = 0.012$ . Or la définition des notations réduites mélange les effets physiques au travers du rapport  $\kappa = \eta^{-1/2}$  des échelles correspondant aux équilibres tension superficielle/gravité et viscosité/gravité. On a donc représenté sur la figure 5.12 les mêmes graphes en fonction du nombre de Reynolds pour un nombre de Kapitza fixé ( $\Gamma = 252$ ), correspondant aux conditions expérimentales de Liu *et al.* [78]. Ces deux graphiques sont complémentaires et permettent de comparer l'effet d'une dispersion visqueuse faible et maintenue arbitrairement constante vis-à-vis des effets de gravité et de tension superficielle ( $\eta$  fixé) à une situation réaliste où la dispersion d'origine visqueuse croît

---

<sup>5</sup>AUTO97 et HOMCONT sont librement distribués sur le site internet de Concordia University (Toronto, Canada) à l'adresse suivante : [ftp.cs.concordia.ca](ftp://ftp.cs.concordia.ca) dans le répertoire `pub/doedel/auto`.

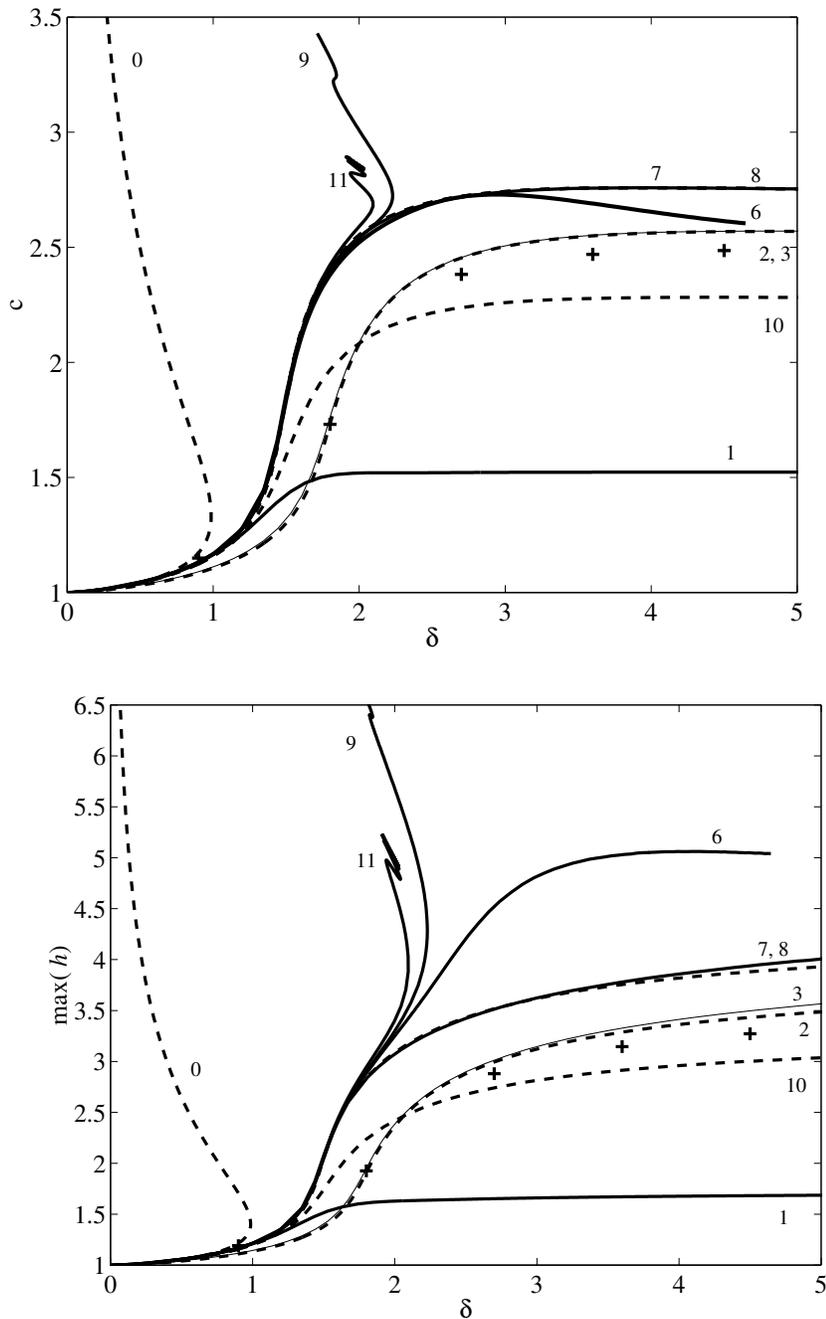


FIG. 5.11 – Vitesse (en haut) et amplitude (en bas) des orbites homoclines principales en forme de bosses isolées en fonction de  $\delta$  pour  $\eta = 0.012$  et  $\zeta = 0$  (plan vertical). Courbe 0 : équation de Benney (3.33); courbe 1 : équation de Ooshida (3.39); courbe 2 : modèle de Shkadov (3.61); courbe 3 : modèle de Prokopiou *et al.* (3.65); courbe 6 : modèle de Galerkin au second ordre (3.38, 4.59–4.61); courbe 7 : modèle de Galerkin au premier ordre (3.38, 4.18); courbe 8 : modèle simplifié au second ordre (4.65–4.66); courbe 9 : modèle à 3 champs (4.62–4.64); courbe 10 : modèle au premier ordre, équation (58), ch. 10; courbe 11 : équations (78–80), ch. 10; + : équation de couche limite (3.9).

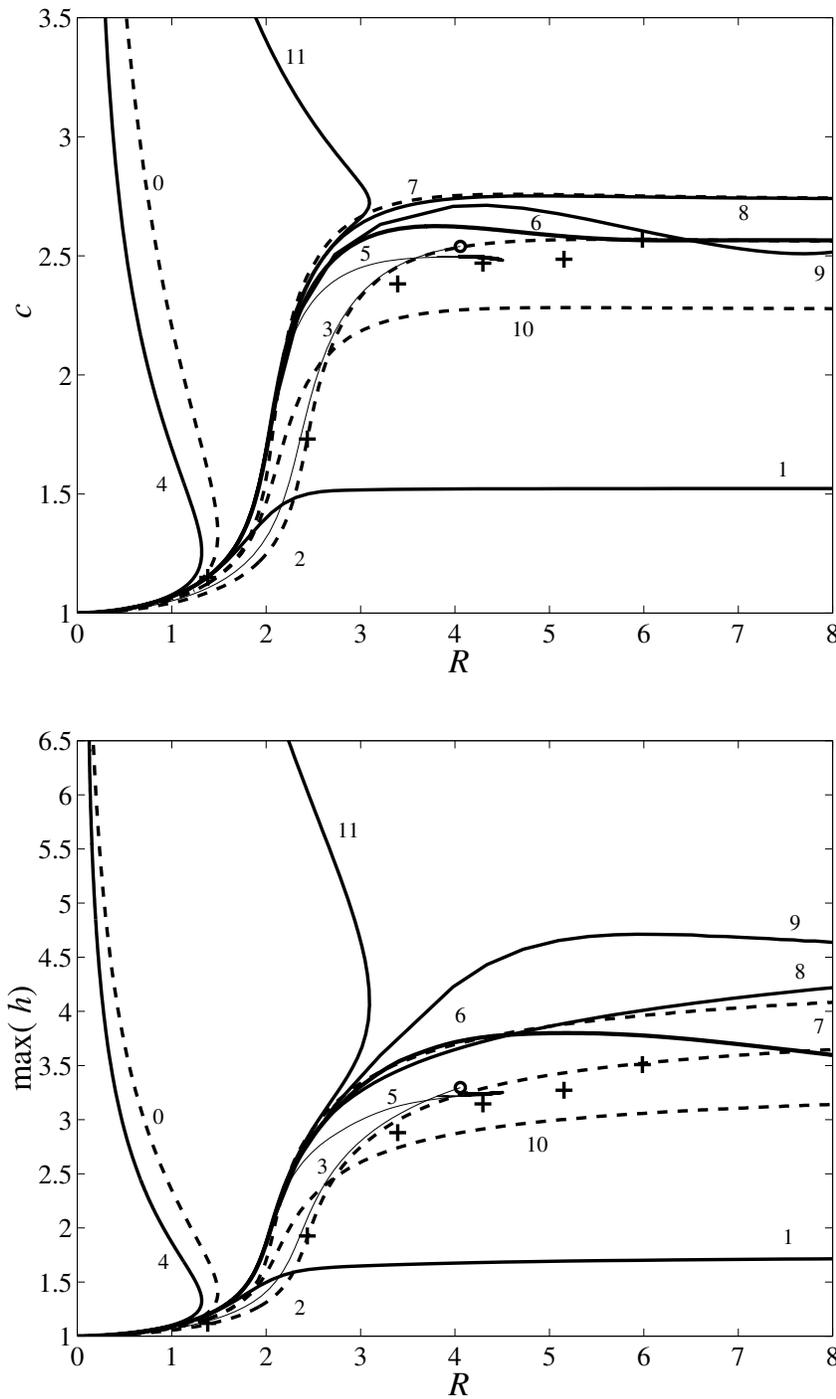


FIG. 5.12 – Vitesse(en haut) et amplitude (en bas) des orbites homoclines principales en forme de bosses isolées en fonction de  $R$  pour  $\Gamma = 252$  et  $B = 0$  (plan vertical). Courbe 0 : équation de Benney (3.33); courbe 1 : équation de Ooshida (3.39); courbe 2 : modèle de Shkadov (3.61) (pointillés); courbe 3 : modèle de Propkopiou *et al.* (ligne fine), 'o' point d'arrêt du lieu des solutions de (3.65); courbe 4 : équation de Benney au second ordre (3.34); courbe 5 : modèle de Roberts (ligne fine) (3.66); courbe 6 : modèle complet de Galerkin au second ordre (3.38, 4.59–4.61); courbe 7 : modèle au premier ordre (3.38, 4.18); courbe 8 : modèle simplifié (4.65–4.66); courbe 10 : modèle au premier ordre, équation (58) ch. 10; courbe 11 : équations (78–80) ch. 10; + : équation de couche limite (3.9) (tableau 1 de [27]).

avec le nombre de Reynolds ( $\eta$  augmente avec  $R$  d'après (5.14)).

Commentons d'abord la figure 5.11 en débutant par les équations et modèles trouvés dans la littérature et décrits au chapitre 3, des plus simples aux plus complexes. La courbe 0 correspond à l'équation de Benney (3.33) et se caractérise par la présence d'un point tournant pour  $\delta \approx 0.986$  à la différence de la courbe 1, lieu des solutions de l'équation de Ooshida (3.39), existant pour tout nombre de Reynolds. Ceci semble confirmer les simulations spatio-temporelles de Ooshida [89] qui ne présentent apparemment pas de singularité en temps fini. Les courbes 2 et 3, presque indiscernables sur la figure, correspondent au modèle de Shkadov (3.61) et à celui proposé par Prokopiou *et al.* (3.65). À la différence des modèles à une équation dite "de surface" (3.33) et (3.39), ceux-ci sont formés de deux équations couplées pour deux champs,  $h$  et  $q$  sont alors nécessaires pour décrire la solution. Les courbes 2 et 3 subissent un brusque saut de vitesse et d'amplitude qui correspond remarquablement bien à la prédiction erronée de Kapitza (1.1) définissant un seuil  $\delta_c$  non nul pour l'instabilité primaire du film vertical et qui s'écrit en fonction de  $\delta$  à l'aide de (5.22) :

$$\delta_c = 2.1. \quad (5.48)$$

En effet, les arguments ayant conduit Kapitza [68] à (1.1) reposent sur l'hypothèse d'une dynamique relaxationnelle dominée par la viscosité. Bien qu'incapables de rendre compte des subtils déphasages entre position de l'interface et vorticités conduisant à l'instabilité primaire (cf. ch. 2), ces arguments semblent être pertinents dans le cas des régimes stationnaires.

On peut noter que ce rapide saut de vitesse et d'amplitude se fait pour des valeurs de  $\delta$  plus importantes que dans le cas de (3.39). Cet écart est probablement lié au mauvais accord entre les développements en gradient de (3.61) et (3.65) et le développement de Benney (3.31), tandis que (3.39) respecte les résultats asymptotiques. En effet, les courbes 0 et 1 sont presque superposées jusqu'à  $\delta \approx 0.8$  tandis que les courbes 2 et 3 s'écartent rapidement de la courbe 0. Les croix correspondent à l'équation de couche limite (3.9) (table 1 de [27]) et présentent un meilleur accord avec la théorie asymptotique au voisinage du seuil ( $\delta \ll 1$ ). Sur la figure 5.12, la courbe 4 est le lieu des orbites homoclines principales pour l'équation de Benney au second ordre (3.34) et fait apparaître les mauvaises propriétés de convergence du développement asymptotique en présentant un point tournant pour une valeur encore plus faible que dans le cas de l'équation (3.33). Le modèle de Roberts (courbe 5) ne semble pas souffrir de ces problèmes de convergence jusqu'à  $R \sim 2$ . Les courbes 4 et 5 ont été obtenues à l'aide d'une méthode de continuation couplée à une méthode pseudo-spectrale (cf. chapitre 8.1). Dans le cas du modèle de Roberts (3.66), nous avons employé jusqu'à 1024 modes de Fourier complexes pour représenter la solution. Toutefois, une croissance très rapide de l'amplitude des gradients se manifeste (en particulier  $h'''$  représenté sur la figure 5.13). Cette croissance des gradients est accompagnée de bifurcations nœud-cols correspondant à un nombre croissant d'oscillations capillaires précédant l'onde solitaire. Toutefois, ces résultats doivent être nuancés par les erreurs liées à la représentation de la solution sur un nombre trop limité de modes de Fourier. Bien que le profil de la solution à la fin du calcul (fig. 5.13) semble correct, les coefficients de Fourier correspondant aux nombres d'ondes les plus

grands ne sont alors pas négligeables, ce qui entraîne des doutes quant à la validité du calcul.

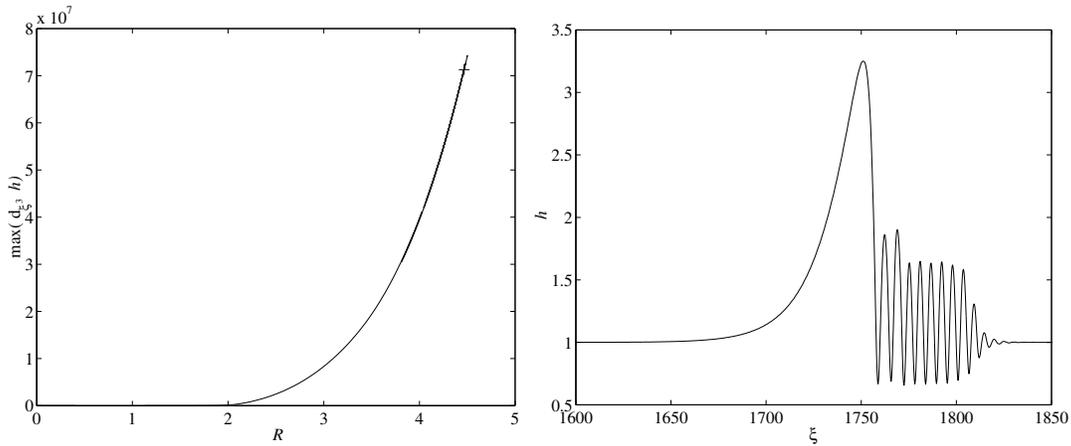


FIG. 5.13 – Orbites homoclines principales en forme de bosse pour le modèle de Roberts.  $B = 0$  (plan vertical) et  $\Gamma = 252$  ; à gauche, maximum de  $h'''$  en fonction de  $R$  ; la croix correspond à la solution à la fin du calcul dont le profil est représenté à droite ( $\xi$  et  $h$  sont adimensionnés par  $h_N$ )

Il se peut cependant que ce comportement soit lié à la présence de dérivées d'ordre élevé dans (3.66) dont l'origine est la tension superficielle (en facteur de  $\Gamma$ ). Pour accréditer cette thèse, nous avons étudiés le modèle au premier ordre obtenu lorsque le terme provenant de la tension superficielle dans l'expression de la pression (3.8), soit  $-\Gamma\partial_{xx}h$ , est remplacé par l'expression complète de la courbure,  $-\Gamma\partial_{xx}h/(1 + \partial_x^2h)^{3/2}$ . Soit

$$\begin{aligned} \partial_t q = & \frac{5}{6}h - \frac{5}{2}\frac{q}{h^2} - \frac{17}{7}\frac{q}{h}\partial_x q + \left(\frac{9}{7}\frac{q^2}{h^2} - \frac{5}{6}Bh\right)\partial_x h \\ & + \frac{5}{6}\Gamma h \left(-3\frac{\partial_x h \partial_{xx} h^2}{(1 + \partial_x h^2)^{5/2}} + \frac{\partial_{xxx} h}{(1 + \partial_x h^2)^{3/2}}\right), \end{aligned} \quad (5.49)$$

complétée par la conservation du volume  $\partial_t h = -\partial_x q$  (3.38). Nous avons ensuite comparé les ondes solitaires solutions de (3.38, 5.49) et celles du modèle au premier ordre (3.38,4.18) (cf. fig. 5.14). Bien que les vitesses, amplitudes et profils des ondes soient proches, les orbites présentent dans l'espace des phases des différences significatives et les maxima des gradients y croissent rapidement. D'où la remarque suivante : Il n'est pas anodin de tronquer le développement en gradient à un certain ordre. En effet, les propriétés de convergence des différents modèles dépendent fortement de l'ordre des dérivées qui y sont introduites.

Venons en aux modèles présentés dans cette étude. Les solutions du modèle complet au deuxième ordre (3.38,4.59–4.61), du modèle au premier ordre (3.38,4.18) et du modèle simplifié (4.65–4.66) sont respectivement indiquées par les courbes 6, 7 et 8. L'accord entre celles-ci est excellent jusqu'à  $\delta \approx 2$ , les courbes 7 et 8 étant

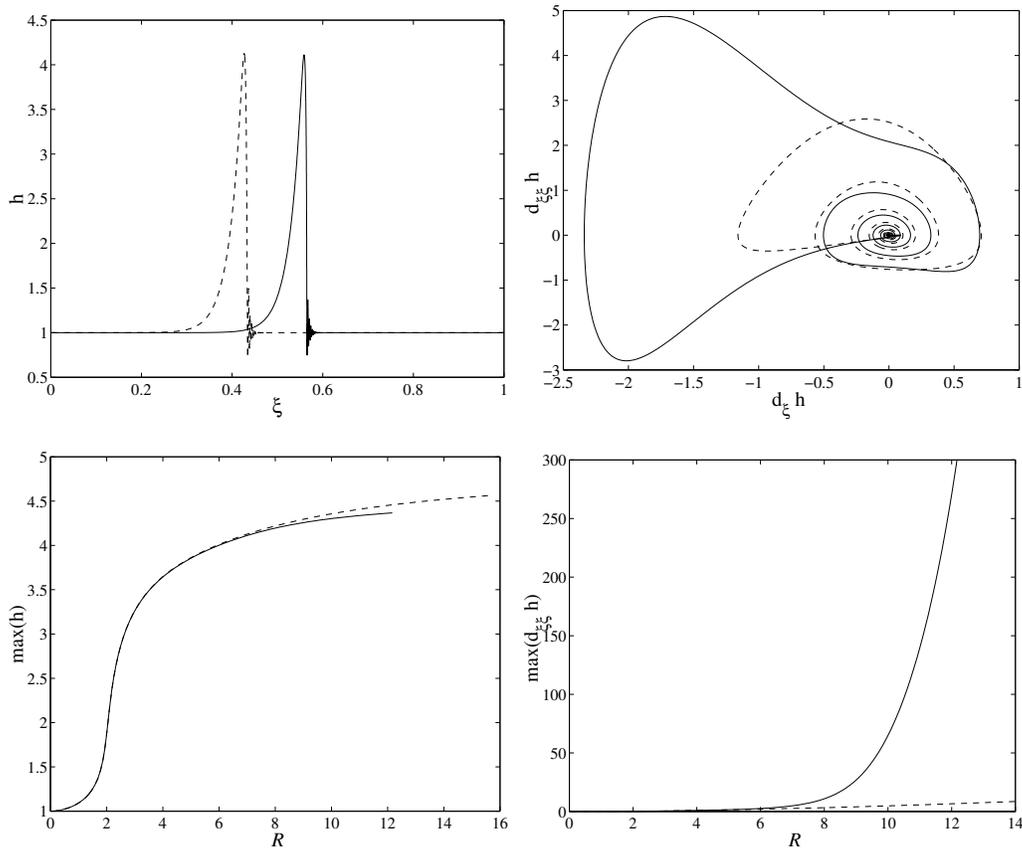


FIG. 5.14 – Comparaison entre les solutions stationnaires du modèle au deuxième ordre simplifié (pointillé) et du système (3.38,5.49) (ligne continue). Au dessus, profils des ondes  $h(\xi)$  et projection de la trajectoire dans l'espace des phases sur  $(h', h'')$  pour les paramètres  $B = 0$ ,  $R = 7$  et  $\Gamma = 252$ ; au dessous amplitude et maximum de  $h''$  en fonction de  $R$ .

quasiment indiscernables. Ce bon accord est dû à la faible valeur choisie pour la dispersion d'origine visqueuse  $\eta$  pour ce calcul et l'écart entre les courbes 7 et 6 ou 8 peut être attribué aux termes d'origine inertielle correspondant à  $s_1$  et  $s_2$ . Toutefois, sur la figure 5.12, le désaccord entre modèle au premier ordre et modèle simplifié y est plus sensible sous l'effet d'une dispersion visqueuse plus importante et croissant avec  $R$ . Par ailleurs, bien que les vitesses et les amplitudes de ces deux modèles changent peu entre les deux calculs (courbes 7 et 8), les amplitudes atteintes par les solutions du modèle complet (courbes 6) sont beaucoup plus importantes lorsque les effets dispersifs visqueux sont faibles que dans le cas contraire. Il n'a pas été trouvé de points tournants pour chacun des modèles (3.38,4.59–4.61), (3.38,4.18) et (4.65–4.66), et il semble que la présence d'ondes solitaires soit assurée pour toute valeur de  $\delta$  ou de  $R$ , ce qui permet d'espérer l'absence de comportements singuliers. Notons de plus que la vitesse et l'amplitude des solutions calculées à l'aide de ces modèles sont beaucoup plus importantes que dans le cas du modèle de Ooshida et

en meilleur accord avec les simulations numériques des équations de couche limite. Par contre, la courbe 9 de la figure 5.11 correspond au modèle (4.62–4.64) à trois champs  $h$ ,  $q$ ,  $s$  et présente un point tournant pour  $\delta \approx 2.23$  permettant de conclure à une perte de validité de ce modèle pour des valeurs supérieures de  $\delta$ . Notons le changement de comportement des courbes 9 entre les figures 5.11 et 5.12. Pour une dispersion visqueuse faible, la branche de solutions de (4.65–4.66) comporte des bifurcations nœud-col n’apparaissant pas lors du calcul à  $\Gamma$  fixé. De même, les ondes solitaires de grande amplitude correspondant à la fin du calcul ont la forme d’ondes solitaires à deux bosses pour une dispersion visqueuse faible, tandis que dans le cas  $\Gamma$  fixé, les ondes solitaires de grande amplitude comporte une seule bosse. On observe de plus la disparition du point tournant entre les deux figures. Par conséquent la dispersion visqueuse augmentant avec le nombre de Reynolds tend à régulariser le comportement de la famille d’orbites homoclines principales.

Pour finir, les courbes 10 et 11 des figs. 5.11, 5.12 correspondent respectivement aux modèles au premier et deuxième ordre formulés à l’aide d’une méthode intégrale avec collocation aux frontières (cf. ch. 10). Laissant une place trop importante aux conditions aux limites à l’interface et à la paroi dans le but de faire apparaître des grandeurs ayant un sens physique, cette dernière méthode s’avère être décevante vraisemblablement en raison des conditions aux limites au niveau de la plaque plane particularisant le cisaillement à la paroi,  $\tau_w$  alors que l’étude des mécanismes de l’instabilité primaire met en avant le transfert d’énergie entre l’écoulement de base et les perturbations à l’interface (cf. § 2.6 et réf. [72]). Ainsi le modèle au premier ordre sous-estime nettement l’amplitude et la vitesse des ondes et la courbe 11, correspondant aux solutions du modèle au second ordre fait apparaître un point tournant pour  $\delta \approx 2.10$ .

Pour mieux comprendre l’effet des termes visqueux du deuxième ordre sur la perte de solutions homoclines principales pour le modèle intégral–collocation au second ordre, nous avons tracé les diagrammes vitesse  $c$  fonction de  $\delta$  pour trois valeurs croissantes de  $\eta$  et pour un plan vertical sur la figure 5.15. On observe ainsi le recul du point tournant vers des valeurs plus élevées de  $\delta$  au fur et à mesure de la croissance de  $\eta$ . Les orbites correspondant au point tournant dans l’espace des phases font apparaître des gradients moins forts et surtout un nombre bien moins élevé de rotations autour du point fixe (oscillations capillaires). Ceci peut s’expliquer en comparant les valeurs propres du sous-espace tangent à la variété stable de  $\mathbf{U}_1$ ,  $E^s$  pour le point tournant (croix représentées sur la figure 5.15). Pour  $\eta = 0.02$ , on a  $\lambda_{2,3} = -0.28 \pm i3.65$  et pour  $\eta = 0.15$ ,  $\lambda_{2,3} = -1.12 \pm i4.08$ . Ainsi le rapport  $\Re(\lambda_{2,3})/\Im(\lambda_{2,3})$  augmente avec  $\eta$  de sorte que les trajectoires convergent plus vite vers le point fixe qu’elles ne “tournent” autour de celui-ci d’où la diminution du nombre d’oscillations d’amplitude notable.

### 5.4.2 Influence de l’inclinaison du plan et de la dispersion visqueuse sur la forme des ondes solitaires

Grâce à sa simplicité, le modèle de Galerkin simplifié au deuxième ordre (4.65–4.66) va nous permettre d’étudier l’influence de l’inclinaison du plan ( $\zeta$ ) et de la

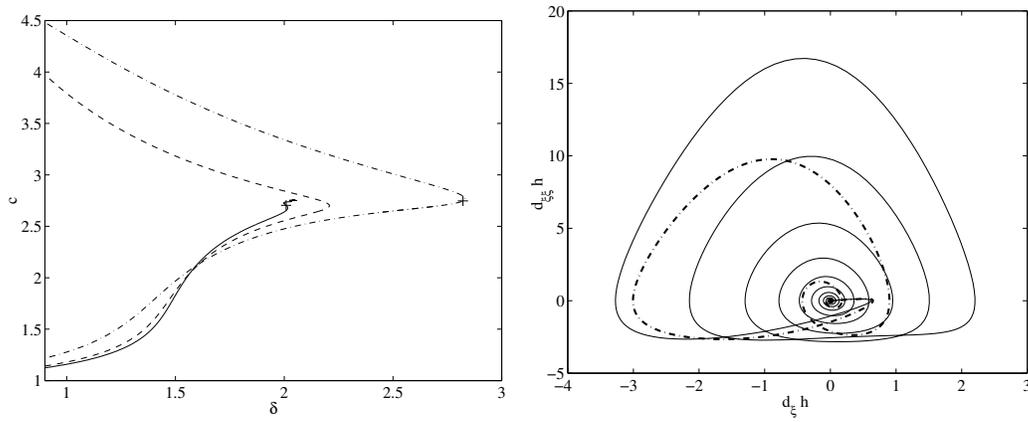


FIG. 5.15 – Orbites homoclines principales en forme de bosse pour les éqs. (78,80) en annexe ch. 10 avec  $\zeta = 0$  (plan vertical),  $\eta = 0$  (ligne continue),  $\eta = 0.03$  (pointillés) et  $\eta = 0.15$  (trait mixte). À gauche vitesse  $c$  en fonction du nombre de Reynolds réduit  $\delta$ ; à droite, projection des orbites calculées dans le plan des gradients de  $h$  correspondant aux croix portés sur le graphique de gauche.

dispersion visqueuse ( $\eta$ ) sur le profil des ondes solitaires observées. De plus, la discussion au § 5.4.1 à partir des graphes des figures 5.11 et 5.12 indiquent que ce modèle donne de bons résultats tant au plan qualitatif que quantitatif. Cette affirmation sera de plus étayée aux § 5.5 et au ch. 7.

Les profils des ondes pour  $\zeta = 0$  (plan vertical),  $\zeta = 10$ ,  $\eta = 0.01$ ,  $0.1$  et  $1$ , et un jeu de valeurs croissantes de  $\delta$  sont représentés sur les figures 5.16 et 5.17. On observe que de nombreuses oscillations capillaires précèdent les fronts lorsque la dispersion d'origine visqueuse est faible. Celles-ci sont d'autant moins marquées que  $\eta$  est grand, et disparaissent complètement pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds réduit  $\delta$ . L'amplitude des ondes varie assez peu en fonction de  $\eta$  ou de  $\zeta$ . Toutefois, les ondes présentent une queue beaucoup plus marquée pour une faible inclinaison du plan ( $\zeta = 10$ ) correspondant à une variété instable  $W^u$  s'éloignant plus lentement du point fixe. Ces variations sont liées au comportement des valeurs propres de l'espace tangent au point fixe et peuvent être comprises au vu des diagrammes 5.3–5.7 et de la table 5.1 fournissant les valeurs de  $\lambda_{1,2,3}$  pour les profils d'ondes des figures 5.16 et 5.17. Ainsi,  $\Re(\lambda_{2,3})$  augmente fortement avec  $\eta$  tandis que  $\Im(\lambda_{2,3})$  diminue lorsque  $\eta$  croît. De sorte que la variété stable  $W^s$  rejoint le point fixe plus rapidement en spiralant moins vite ce qui explique la diminution d'amplitude, et aussi la disparition ( $\Im(\lambda_{2,3}) = 0$ ), des oscillations capillaires précédant les fronts solitaires. On observe de même que  $\lambda_1$  varie peu en fonction de  $\eta$  de sorte que la variété instable  $W^u$  subit peu l'influence des variations de  $\eta$  au voisinage du point fixe. Ceci semble vrai également loin de  $\mathbf{U}_1$  puisque l'amplitude des ondes change peu en fonction de  $\eta$ . Toutefois,  $\lambda_1$  décroît rapidement en fonction de  $\zeta$  expliquant l'allongement des queues des ondes ( $W^u$ ).

Sur la partie gauche des figures 5.16 et 5.17 a été également représenté le lieu

de l'orbite homocline principale dans le plan nombre de Reynolds réduit  $\delta$  et vitesse  $c$ . On observe que le brusque saut de vitesse (et aussi d'amplitude) au voisinage de  $\delta = 0$  s'estompe avec  $\eta$  et disparaît pour une faible inclinaison du plan. De même, lorsque l'inclinaison du plan diminue, le palier de la courbe vitesse fonction de  $\delta$  ne se manifeste plus.

### 5.4.3 Chaos homocline

Le recoupement entre les diagrammes 5.3–5.7 décrivant le comportement des valeurs propres pour le point fixe  $\mathbf{U}_1$  et les lieux des orbites homoclines principales présentés en fig. 5.16 et 5.17 permet de déterminer l'ensemble des valeurs du nombre de Reynolds réduit  $\delta$  avec les valeurs choisies de  $\zeta$  et  $\eta$  pour lesquelles le critère de Shilnikov est vérifié. Il existe alors au voisinage de l'orbite homocline correspondante une dynamique chaotique dans l'espace des phases.

Les orbites homoclines ayant une vitesse  $c > 1$ , au voisinage de  $\delta = 0$ , le chaos homocline est impossible puisque  $\Im(\lambda_{2,3}) = 0$  d'après les figs. 5.3–5.7. Cependant pour des valeurs faibles à modérées de  $\eta$  la vitesse des ondes croît rapidement et l'on entre alors dans la zone où le critère de Shilnikov est vérifié pour en sortir ensuite pour des valeurs plus importantes de  $\delta$ . L'intervalle de valeurs de  $\delta$  correspondant diminue rapidement quand  $\eta$  augmente tandis que le chaos homocline est présent partout lorsque  $\eta = 0$ .

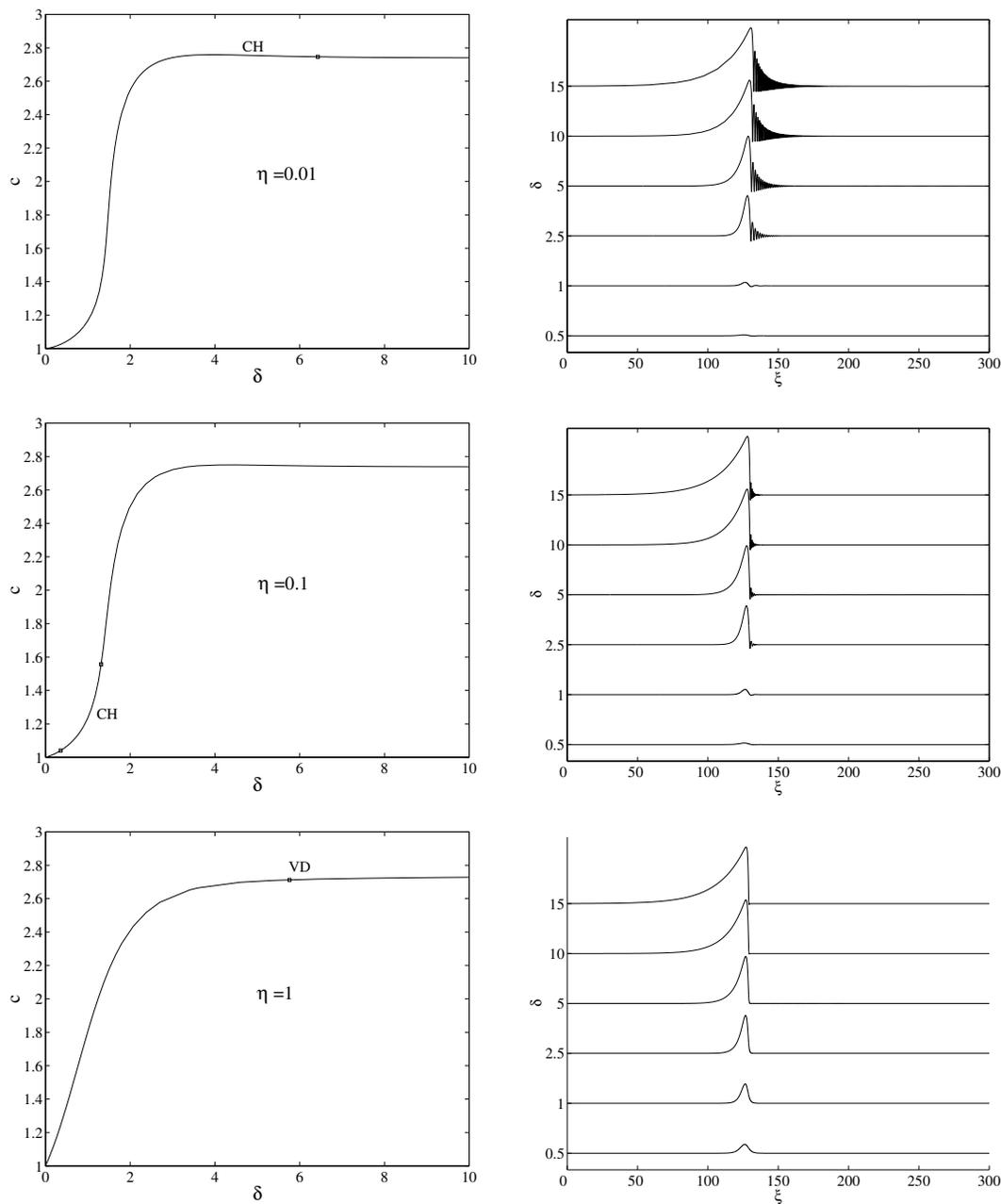


FIG. 5.16 – À gauche, lieu de l'orbite homocline principale dans le plan vitesse  $c$  fonction du nombre de Reynolds réduit  $\delta$ . Le chaos homocline est repéré par les lettres CH, les lettres VD indiquent la transition entre un point col-spiral et un point col. À droite, profils  $h(\xi)$  des ondes correspondantes pour différentes valeurs de  $\delta$  (0.5, 1, 2.5, 5, 10 et 15) affichées en ordonnée des graphiques. Les paramètres sont  $\zeta = 0$  (plan vertical) et, de haut en bas,  $\eta = 0.01$ ,  $\eta = 0.1$  et  $\eta = 1$ .

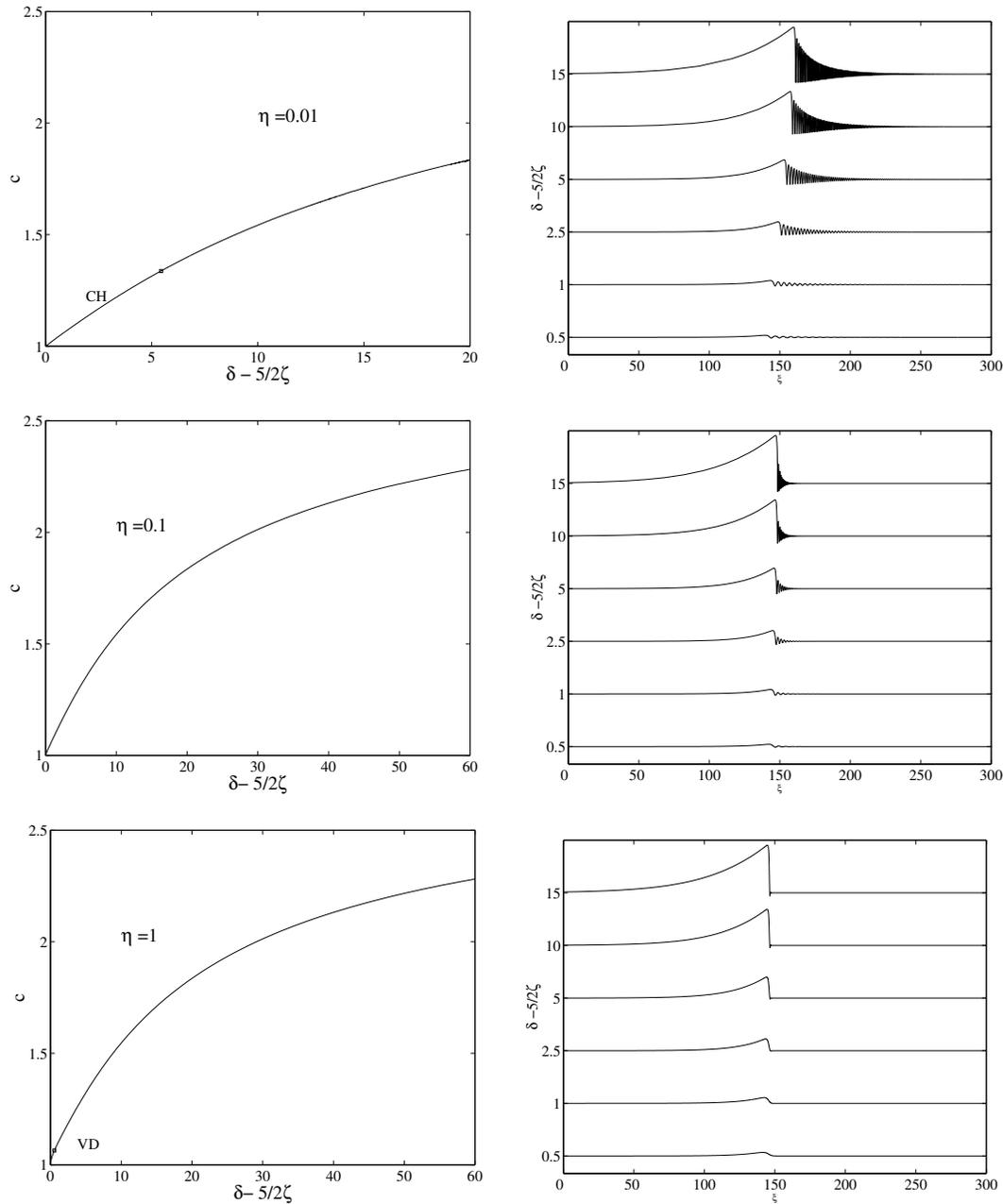


FIG. 5.17 – À gauche, lieu de l'orbite homocline principale dans le plan vitesse  $c$  fonction du nombre de Reynolds réduit  $\delta$ . Le chaos homocline est repéré par les lettres CH, les lettres VD indiquent la transition entre un point col-spiral et un point col. À droite, profils  $h(\xi)$  des ondes correspondantes pour différentes valeurs de  $\delta$  (0.5, 1, 2.5, 5, 10 et 15) affichées en ordonnée des graphiques. Les paramètres sont  $\zeta = 10$  et, de haut en bas,  $\eta = 0.01$ ,  $\eta = 0.1$  et  $\eta = 1$ .

TAB. 5.1 – Valeur(s) propre(s) correspondant au sous-espace tangent à la variété stable (instable),  $\lambda_1$  ( $\lambda_{2,3}$ ) pour les ondes solitaires représentées en fig. 5.16 et 5.17.

$\zeta = 0, \eta = 0.01$						
$\delta$	0.5	1	2.5	5	10	15
$\lambda_1$	0.353	0.549	0.318	0.158	0.080	0.053
$\Re(\lambda_{2,3})$	-0.193	-0.295	-0.220	-0.141	-0.102	-0.089
$\Im(\lambda_{2,3})$	$\pm 0.575$	$\pm 1.030$	$\pm 3.994$	$\pm 5.771$	$\pm 8.746$	$\pm 9.883$
$\zeta = 0, \eta = 0.1$						
$\delta$	0.5	1	2.5	5	10	15
$\lambda_1$	0.378	0.536	0.317	0.159	0.080	0.053
$\Re(\lambda_{2,3})$	-0.357	-0.482	-0.758	-0.701	-0.660	-0.646
$\Im(\lambda_{2,3})$	$\pm 0.626$	$\pm 1.043$	$\pm 3.892$	$\pm 5.706$	$\pm 8.050$	$\pm 9.862$
$\zeta = 0, \eta = 1$						
$\delta$	0.5	1	2.5	5	10	15
$\lambda_1$	0.218	0.427	0.275	0.153	0.079	0.053
$\Re(\lambda_{2,3})$	-0.249	-0.811	-1.700	-4.015	-6.205	-6.206
$\Im(\lambda_{2,3})$	-	-	-	-	$\pm 5.196$	$\pm 7.704$
$\zeta = 10, \eta = 0.01$						
$\delta$	0.5	1	2.5	5	10	15
$\lambda_1$	0.069	0.066	0.059	0.050	0.037	0.030
$\Re(\lambda_{2,3})$	-0.051	-0.050	-0.049	-0.048	-0.048	-0.049
$\Im(\lambda_{2,3})$	$\pm 1.240$	$\pm 1.776$	$\pm 2.920$	$\pm 4.356$	$\pm 6.592$	$\pm 8.405$
$\zeta = 10, \eta = 0.1$						
$\delta$	0.5	1	2.5	5	10	15
$\lambda_1$	0.069	0.066	0.059	0.049	0.037	0.030
$\Re(\lambda_{2,3})$	-0.195	-0.202	-0.225	-0.260	-0.315	-0.357
$\Im(\lambda_{2,3})$	$\pm 1.278$	$\pm 1.800$	$\pm 2.930$	$\pm 4.358$	$\pm 6.589$	$\pm 8.399$
$\zeta = 10, \eta = 1$						
$\delta$	0.5	1	2.5	5	10	15
$\lambda_1$	0.066	0.064	0.058	0.049	0.037	0.030
$\Re(\lambda_{2,3})$	-1.315	-1.787	-2.030	-2.398	-2.993	-3.434
$\Im(\lambda_{2,3})$	-	$\pm 1.107$	$\pm 2.354$	$\pm 3.757$	$\pm 5.923$	$\pm 7.698$

## 5.5 Ondes stationnaires à débit ou épaisseur fixé

Dans la fin du chapitre nous allons remplacer la condition (5.8) fixant la constante  $q_0$  par une condition sur une grandeur moyennée sur une période, soit  $\langle h \rangle = h_N$  ou  $\langle q \rangle = q_N$ , ou encore avec les notations réduites  $\langle h \rangle = 1$  ou  $\langle q \rangle = \frac{1}{3}$ .

Les simulations numériques directes avec conditions aux limites périodiques existant dans la littérature pour le problème des films minces tombants [60, 103, 96] ont été effectués en supposant une épaisseur moyennée sur une longueur d'onde constante soit  $\langle h \rangle = h_N$ . Cette condition intégrale ne pouvant être implémentée à l'aide d'un logiciel tel qu'AUTO97, nous avons écrit un code permettant le suivi de solutions en ondes périodiques (cf. § 8.1).

### 5.5.1 Ondes stationnaires à épaisseur fixée : comparaison avec les études antérieures

Nous avons dans un premier temps cherché à valider nos modèles en comparant nos résultats aux simulations numériques directes et en particulier à celles de Salamon *et al.* [103] mettant en évidence le rôle de la dissipation visqueuse.

En effet, au voisinage du seuil d'instabilité, les ondes de faibles amplitudes peuvent être décrites par l'équation de Kawahara (1.9) où apparaît le terme dispersif  $\delta \partial_{XXX} H$ .<sup>6</sup> Un examen attentif de la formule (3.52) et du développement en gradient (§ 3.2) révèle deux origines à la dispersion. La première est inertielle (terme  $\propto R(R - R_c)$  dans l'éq. (3.52)), la seconde découle des effets visqueux dans le sens de l'écoulement. Or, les familles d'ondes stationnaires dans leur référentiel en mouvement, solutions de (1.9) et paramétrées par leur nombre d'onde  $\alpha$ , subissent une catastrophe de type fonce [42] (cf. fig. 1.6). La bifurcation fourche donnant naissance à deux familles d'ondes lentes et rapides dans le cas de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky ( $\delta = 0$ ) devient imparfaite sous l'effet de la dispersion. Salamon *et al.* ont vérifié ce scénario pour le développement en gradient au deuxième ordre (3.34) et les équations de Navier-Stokes (cf. fig. 12 et 14 de [103]). La figure 5.18 présente les mêmes calculs pour le modèle simplifié (4.65–4.66) et le modèle au premier ordre (3.38, 4.18). La branche numérotée 1 bifurque à partir de la courbe de stabilité marginale (définie par un taux de croissance linéaire nulle). Les branches 2a, 2b, 2c et 2d correspondent à des bifurcations secondaires de la famille d'ondes stationnaires 1. Elles sont obtenues en multipliant par deux le domaine d'intégration en espace. Deux ondes périodiques identiques sont alors placées dans le domaine.<sup>7</sup> La bifurcation détectée par le schéma numérique signale ensuite la brisure de la symétrie  $h(\xi + L/2) = h(\xi)$  par doublement de période. Notons que chaque point de la courbe secondaire obtenue correspond en réalité à deux solutions symétriques par  $h(\xi) \mapsto h(\xi + L/2)$ . La bifurcation imparfaite signalée précédemment fait intervenir les branches 1 et 2a. Les diagrammes de bifurcation correspondant au modèle au premier ordre (effets visqueux du second ordre négligés) et au modèle simplifié sont

<sup>6</sup>Attention, ici  $\delta$  n'est pas à confondre avec le nombre de Reynolds réduit !

<sup>7</sup>Il suffit pour cela de diviser le nombre d'onde par deux et de décaler les coefficients de Fourier de la solution (cf. § 8.1.7).

ainsi images inverses l'un de l'autre. Dans le premier cas (diagramme de gauche de fig. 5.18), la branche 1 correspond à des ondes lentes qui se localisent pour former à faible nombre d'onde des ondes solitaires en forme de bosse, et la branche 2a à des ondes rapides en forme de bosse. Dans le second cas, en tenant compte des effets du second ordre (diagramme de droite), la branche 1 correspond à des ondes rapides qui forment des ondes solitaires en forme de bosse en se localisant, et la branche 2a à des ondes lentes. Les points de bifurcation obtenus avec le modèle simplifié sont en bon accord avec les résultats de Salamon *et al.* (soit, en dimensionnant  $\alpha$  par  $1/h_N$ ,  $\alpha = 0.0496$ ,  $\alpha = 0.0247$ ,  $\alpha = 0.0208$ ,  $\alpha = 0.0141$  et  $\alpha = 0.0123$  à comparer avec  $\alpha = 0.0498$ ,  $\alpha = 0.0247$ ,  $\alpha = 0.0208$ ,  $\alpha = 0.0141$  et  $\alpha = 0.0122$ ).

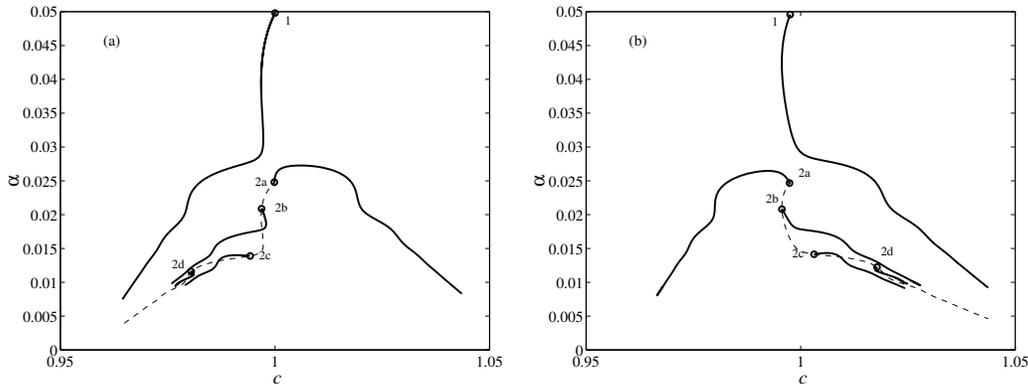


FIG. 5.18 – Vitesse des trains d’ondes périodiques en fonction de leur nombre d’onde  $\alpha$  pour  $B = 0$  (plan vertical),  $R = 2.66$  et  $\Gamma = 3375$ . L’épaisseur moyenne  $\langle h \rangle$  est fixée égale à  $h_N$ , l’échelle de longueur est ici  $h_N$ . À gauche, modèle au premier ordre ; à droite, modèle simplifié.

Ainsi est-il nécessaire de correctement prendre en compte la dispersion d’origine visqueuse pour recouvrer la bifurcation imparfaite observée dans les simulations numériques directes. La figure 5.19 présente les résultats de nos calculs correspondant aux conditions des simulations numériques directes de Salamon *et al.* pour un nombre de Reynolds plus grand. Ces derniers ont choisi les paramètres utilisés par Chang *et al.* [18] à partir de l’équation de couche limite (3.9). Entre les deux calculs,  $\zeta$  et  $\delta$  sont inchangés et seul  $\eta$  est modifié afin d’observer l’effet de la dispersion d’origine visqueuse. Malgré les déformations du diagramme de bifurcation, la catastrophe fonce reste visible et changer  $\eta$  permet de modifier la bifurcation imparfaite qualitativement de la même manière que plus près du seuil d’instabilité.

Les calculs de Chang *et al.* [18] à l’aide de (3.9) font apparaître une famille d’ondes lentes émanant de la courbe de stabilité marginale appelée  $\gamma_1$  et une deuxième famille d’ondes rapides,  $\gamma_2$  bifurquant par brisure de symétrie de la branche  $\gamma_1$ . Cependant l’introduction des termes du second ordre permet de renverser ce scénario, la famille d’ondes rapides ayant pour point de départ la courbe de stabilité marginale et les ondes lentes apparaissant par doublement de périodes (cf. fig. 5.20). C’est pourquoi dans la suite de cet exposé nous identifierons les familles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$

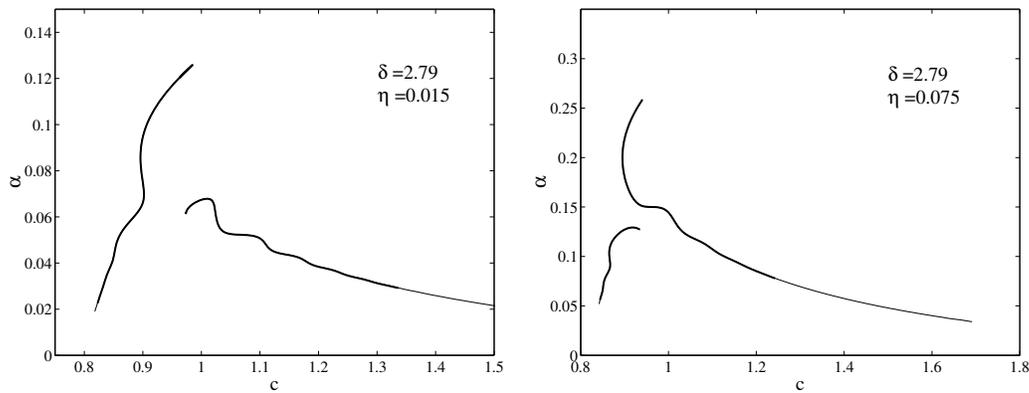


FIG. 5.19 – Vitesse des trains d’ondes périodiques en fonction de leur nombre d’onde  $\alpha$  avec  $\zeta = 0$  (plan vertical) et  $\langle h \rangle = h_N$  correspondant aux simulations numériques de Salamon *et al.* (fig. 15 et 17 de [103]) pour le modèle au second ordre (trait épais) et le modèle simplifié (trait mince). Ici l’échelle de longueur est choisie égale à  $h_N$ . À gauche :  $\delta = 2.79$  et  $\eta = 0.015$  ( $R = 7.59$  et  $\Gamma = 4374$ ). À droite :  $\delta = 2.79$  et  $\eta = 0.075$  ( $R = 3.40$  et  $\Gamma = 228.8$ ).

en fonction des ondes solitaires auxquelles l’allongement de leur période conduit, à la différence de Chang *et al.* qui les distinguent en fonction de leur origine. Ainsi, la famille d’onde donnant naissance à une orbite homocline principale en forme de bosse sera appelée  $\gamma_2$  et à l’inverse la famille donnant naissance à une orbite homocline principale en forme de trou sera notée  $\gamma_1$ . Les calculs ont été faits à la fois pour le modèle au second ordre complet et pour le modèle simplifié. L’accord entre les résultats est excellent puisque les courbes sont à l’œil confondues. Ces calculs ont été aussi réalisés pour le modèle intégral avec collocations aux frontières, ch. 10 éq. (78–80) [101], et sont aussi en bon accord avec les résultats de Salamon *et al.*, prouvant que ce dernier modèle reste quantitativement satisfaisant dans la gamme de nombre de Reynolds considérée.

Toujours pour un plan vertical, Salamon *et al.* ont déterminé une approximation de la famille d’ondes solitaires à “une bosse” solution de l’équation de Navier–Stokes en fonction de  $R$  et fixant le nombre d’onde à une valeur assez basse  $\alpha = 0.07$  et le nombre de Weber  $W = 76.4$  (soit  $\eta = 0.0554$ ). La figure (5.21) présente les résultats des calculs correspondants aux mêmes conditions (à comparer avec la figure 11 de [103]) pour le modèle de Galerkin au premier ordre, le modèle complet au second ordre et le modèle simplifié. Encore une fois, les écarts entre le modèle simplifié et le modèle complet au second ordre sont faibles et ne deviennent notables que pour des nombres de Reynolds relativement élevés. Le nombre d’onde étant fixé à une valeur non nulle, les branches de solutions correspondant aux modèles complet et simplifié partent de la courbe de stabilité marginale pour un nombre de Reynolds différent de zéro  $R \approx 0.32$  et une vitesse de phase inférieure à l’unité, soit  $c \approx 0.995$ , en bon accord avec la simulation numérique directe ( $R \approx 0.45$  et  $c \approx 0.995$ ). Quant au modèle au premier ordre, la branche de solutions en forme d’onde à “une bosse”

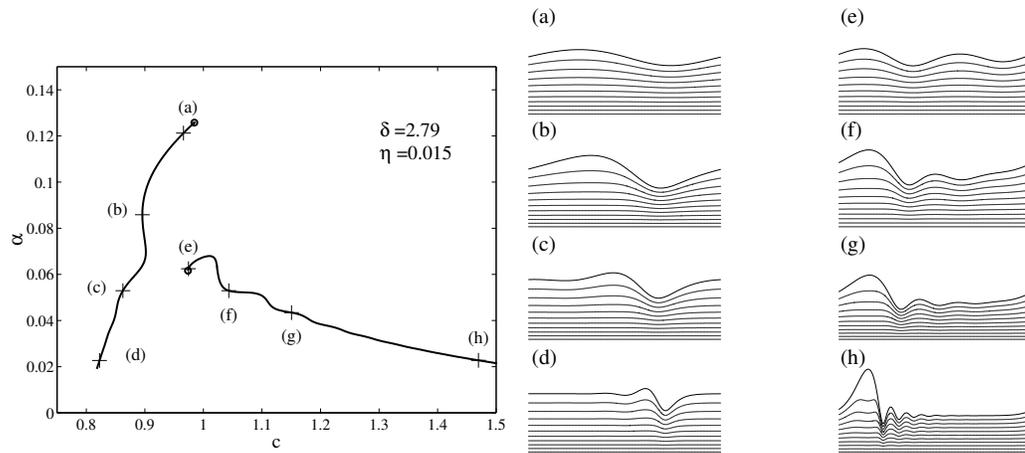
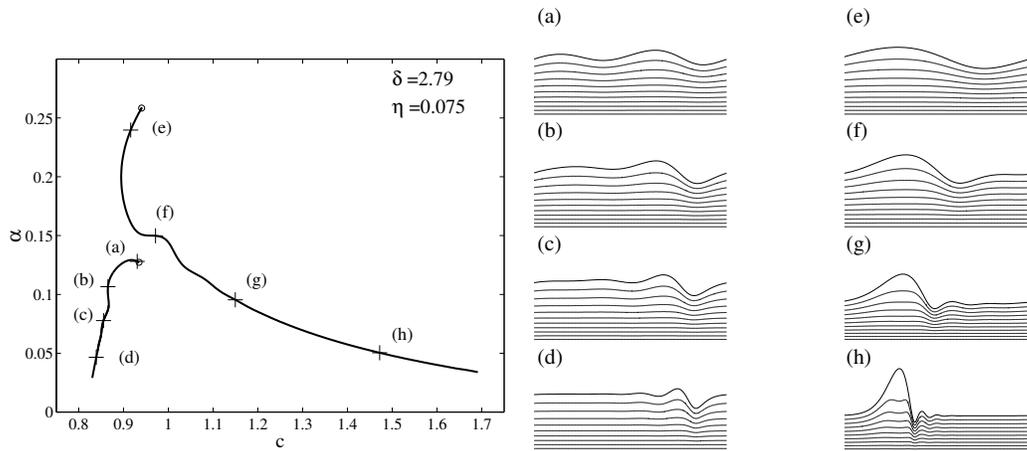
(a)  $\delta = 2.79$ ,  $\zeta = 0$  et  $\eta = 0.015$ (b)  $\delta = 2.79$ ,  $\zeta = 0$  et  $\eta = 0.075$ 

FIG. 5.20 – Ondes 2D périodiques solutions du modèle (4.65–4.66) et correspondant à la figure 5.19. À gauche vitesse en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  ; à droite, profils des ondes et lignes de courant dans le référentiel en mouvement pour les familles  $\gamma_1$  (de (a) à (d)) et  $\gamma_2$  (de (e) à (h)).

apparaît par doublement de période. Le point de bifurcation est obtenu lorsqu'une branche de solutions émergeant de la courbe marginale  $(R, \alpha_c/2)$  subit la brisure de la symétrie  $h(\xi + L/2) = h(\xi)$  en  $\alpha = 0.07$ . Ceci explique que la branche bifurque pour un nombre de Reynolds nettement plus élevé  $R \approx 1.26$  car  $\alpha_c = 0.14$  correspond à  $R = 1.248$  d'après (2.77). Au premier ordre en  $\epsilon$ , i.e. lorsque la dispersion d'origine visqueuse est négligée, la vitesse de phase est  $c = 1$  à la marginalité (cf. § 5.2.4). Par conséquent au point de bifurcation on a  $c \approx 1$ . Par ailleurs, le diagramme vitesse de phase fonction du nombre de Reynolds présente des plis similaires à ceux rencontrés dans les simulations de l'équation de couche limite (3.9) [18]. Notons que les branches de solutions  $\gamma_2$  décrites par Chang *et al.* et se terminant par les ondes solitaires en forme de bosse recherchées semblent systématiquement apparaître au cours d'une bifurcation sous-harmonique de la famille  $\gamma_1$  émergeant de la courbe de stabilité marginale, scénario qui correspond ici aux résultats obtenus avec le modèle au premier ordre. Enfin, les oscillations capillaires précédant le front de grande amplitude sont à nouveau beaucoup plus marquées pour le modèle au premier ordre (fig. 5.21, à droite).

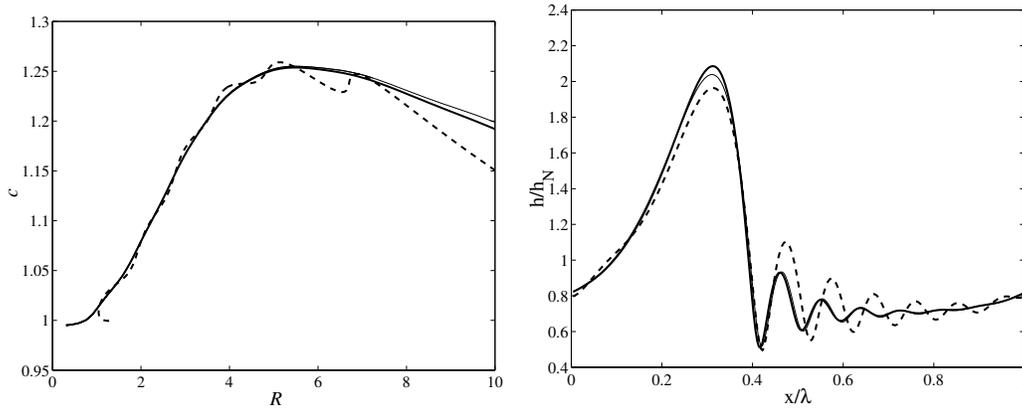


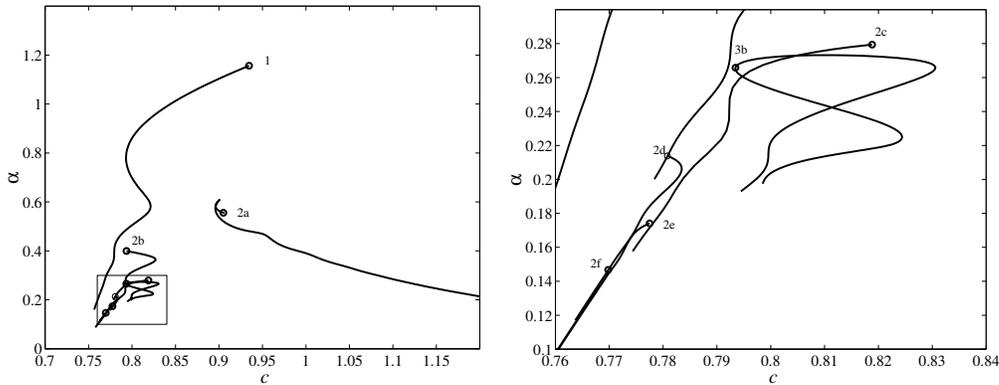
FIG. 5.21 – À gauche : vitesse des ondes en fonction du nombre de Reynolds ; à droite : profils des ondes correspondantes pour  $R = 10$ . Le nombre d'onde et le nombre de Weber sont respectivement  $\alpha = 0.07$  et  $W = 76.4$ . l'épaisseur moyenne  $\langle h \rangle$  est fixé à  $h_N$ . Le trait épais correspond au modèle au second ordre complet, le trait mince au modèle simplifié et la ligne pointillée au modèle au premier ordre.

### 5.5.2 Ondes stationnaires à débit fixé : comparaison avec les expériences

Le code numérique servant à obtenir les solutions périodiques stationnaires dans leur référentiel, calcule la constante  $q_0$  en même temps que la solution. Ceci permet d'imposer aisément la condition intégrale  $\langle q \rangle = q_N$  (cf. § 8.1.3).

Or cette condition est la seule qui puisse être imposée expérimentalement. Nous avons ainsi réalisé la figure 5.22 présentant pour le modèle au premier ordre

(3.38,4.18) et le modèle simplifié au second ordre (4.65–4.66) le diagramme de bifurcation correspondant à une expérience réalisée par Kapitza & Kapitza. Le fluide considéré est de l'alcool de viscosité  $\nu = 2,02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  et de tension superficielle  $\gamma/\rho = 29 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$  soit un nombre de Kapitza  $\Gamma = 531$ .



(a) modèle simplifié (4.65–4.66)

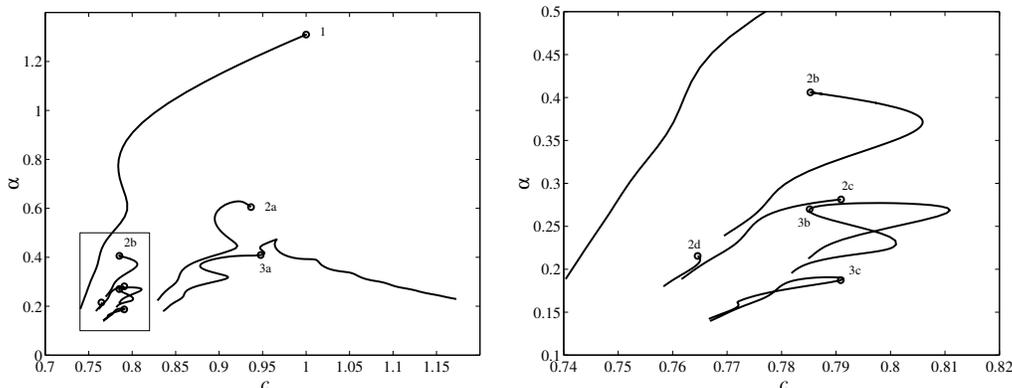
(b) modèle au premier ordre (3.38,4.18) (soit  $\eta = 0$ )

FIG. 5.22 – Vitesse des trains d'ondes périodiques en fonction de leur nombre d'onde  $\alpha$  avec les paramètres  $\zeta = 0$  (plan vertical),  $\delta = 4.289$  et  $\eta = 0.0554$  correspondant à une expérience de Kapitza & Kapitza (débit moyen  $\langle q \rangle = 0.123 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$  et tension de surface  $\gamma/\rho = 29 \text{ cm}^3\text{s}^{-2}$ ). L'échelle de longueur est ici  $\lambda_x = \kappa h_N$ . Les graphes de droite sont des agrandissements des parties encadrées à gauche.

Pour le modèle simplifié au second ordre (fig. 5.22(a)), la famille de solutions émergeant de la courbe de stabilité marginale est notée 1, les branches bifurquant de cette famille par doublement de période, c.-à-d. par brisure de la symétrie  $h(\xi) = h(\xi + L/2)$  initialement créée en plaçant deux ondes identiques dans le domaine d'intégration, sont notées 2a, 2b, 2c, 2d, 2e et 2f. De même les ondes apparaissant

par triplement de périodes sont indiquées par 3b. La branche 3b ne se termine plus au point de bifurcation. En effet, chacun de ses points correspond à une seule solution et non plus à deux solutions symétriques l'une de l'autre. La famille de solutions  $\gamma_2$ , se terminant par des ondes solitaires en forme de bosse, apparaît par doublement de période (branche 2a). Il en va différemment pour le modèle simplifié (cf. fig. 5.22(b)). En plus de la branche 1, on a représenté les branches 2b, 2c et 2d apparaissant par doublement de période et les branches 3a, 3b et 3c apparaissant par triplement de période, soit deux de plus qu'avec le modèle simplifié. Cette fois-ci la branche  $\gamma_2$  correspond à la branche 3a et bifurque par triplement de période et non par simple doublement. Les branches 2a et 3a forme un col qui se résorbe lorsqu'on tient compte de la dispersion d'origine visqueuse en passant du modèle au premier ordre ( $\eta = 0$ ) au modèle simplifié ( $\eta = 0.0554$ ). Notons au passage que les ondulations de la branche 3a de fig. 5.22(b) sont lissées sur la branche 2a de fig. 5.22. Glendinning & Sparrow [54] ont montré que lorsque le critère de Shilnikov était vérifié (cf. § 5.2.4) une orbite périodique approchant l'orbite homocline en augmentant sa période subissait une séquence infinie de bifurcations nœud-col. pour le modèle au premier ordre, le critère de Shilnikov est partout vérifié et les plis de la courbe 3a correspondent à ces bifurcations. Nous avons vérifié que le critère de Shilnikov était vérifié en tout point de la branche 2a tracée sur la figure 5.22. Toutefois, le ratio entre les valeurs absolues des parties réelles des valeurs propres  $|\lambda_{2,3}|/|\lambda_1|$  se rapproche de la valeur limite 1.

Enfin, les résultats de Kapitza & Kapitza servent de référence à la plupart des simulations numériques directes de films minces s'écoulant le long d'une paroi inclinée [60, 103, 96]. Nous avons donc comparé nos résultats pour les modèles au premier ordre, second ordre complet et simplifié aux simulations numériques directes, pour lesquelles l'épaisseur moyenne  $\langle h \rangle$  du film est fixée, et à l'expérience de Kapitza & Kapitza où le débit moyen  $\langle q \rangle$  est fixé. Les vitesses de phase obtenues pour l'onde de longueur  $\lambda = 1.77$  cm observée par Kapitza sont rassemblées dans la table 5.2 et se comparent favorablement à la fois à l'expérience et aux simulations numériques directes.

En résumé, terminons ce chapitre en mettant l'accent sur deux points importants. Premièrement, la recherche des orbites homoclines correspondant aux ondes solitaires "à une bosse" observées expérimentalement semble indiquée que, pour les modèles complets au premier et second ordre, (3.38,4.18) et (3.38,4.61,4.59,4.60), et le modèle simplifié au second ordre (4.65–4.66) obtenus au ch. 4, ces orbites existent pour une large gamme de nombre de Reynolds. Par conséquent, on s'attend à ce que ces modèles ne présentent pas le comportement singulier rencontré avec l'équation de Benney (3.33). Par ailleurs, les résultats obtenus avec le modèle au second ordre simplifié se comparent favorablement aux simulations numériques directes et aux expériences. Deuxièmement, notre étude a permis de mettre en évidence le rôle des termes du deuxième ordre d'origine visqueuse quant à la possibilité de chaos à la Shilnikov, à la forme des ondes solitaires et au comportement des familles d'ondes stationnaires dans l'espace des paramètres. En particulier, le changement

TAB. 5.2 – Comparaison entre les vitesses de phase ( $\text{cm s}^{-1}$ ) rapportées dans les travaux expérimentaux de Kapitza & Kapitza, les simulations numériques directes des équations de Navier–Stokes et les résultats des différents modèles. Les paramètres sont  $R = 6.07$ ,  $W = 76.4$  (débit moyen  $\langle q \rangle = 0.123 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ , tension superficielle  $\gamma/\rho = 29 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$  et longueur d’onde  $\lambda = 1.77 \text{ cm}$ ). La première colonne correspond aux calculs à épaisseur moyenne fixée et la deuxième aux calculs à débit fixé

	$\langle h \rangle = h_N$	$\langle q \rangle = q_N$
Éq. (3.38,4.59–4.61)	23.5	20.4
Éq. (4.65–4.66)	23.5	20.3
Éq. (3.38,4.18)	23.2	20.5
Kapitza & Kapitza [68]	–	19.5
Ho & Patera [60]	24.7	–
Salamon <i>et al.</i> [103]	23.5	–
Ramaswamy <i>et al.</i> [96]	23.1	–

de comportement des familles d’ondes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  observé par Salamon *et al.* [103], et correspondant à une catastrophe de type fronce (cf. fig. 5.19), doit être attribuée aux effets visqueux et non à la tension superficielle comme le suggéraient ces auteurs. Ainsi, bien que les effets du second ordre soient faibles, ceux-ci jouent un rôle non négligeable dans la dynamique du film.

## 5.6 Annexe : Systèmes de dimension supérieure à trois

### 5.6.1 Modèle au second ordre

Avec les notations réduites, pour lesquelles  $s_1$  et  $s_2$  subissent les transformations  $s_1 \mapsto h^{*3}s_1$  et  $s_2 \mapsto h^{*3}s_2$ , le modèle au deuxième ordre (3.38,4.61,4.59,4.60) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\delta\partial_t q &= \frac{27}{28}h - \frac{81}{28}\frac{q}{h^2} - 33\frac{s_1}{h^2} - \frac{3069}{28}\frac{s_2}{h^2} \\
&+ \delta \left( -\frac{12}{5}\frac{qs_1\partial_x h}{h^2} - \frac{126}{65}\frac{qs_2\partial_x h}{h^2} + \frac{12}{5}\frac{s_1\partial_x q}{h} + \frac{171}{65}\frac{s_2\partial_x q}{h} \right. \\
&\quad \left. + \frac{12}{5}\frac{q\partial_x s_1}{h} + \frac{1017}{455}\frac{q\partial_x s_2}{h} + \frac{6}{5}\frac{q^2\partial_x h}{h^2} - \frac{12}{5}\frac{q\partial_x q}{h} \right) \\
&+ \eta \left( \frac{5025}{896}\frac{q(\partial_x h)^2}{h^2} - \frac{5055}{896}\frac{\partial_x q\partial_x h}{h} - \frac{10851}{1792}\frac{q\partial_{x^2} h}{h} + \frac{2027}{448}\partial_{x^2} q \right) \\
&- \frac{27}{28}\zeta h\partial_x h + \frac{27}{28}h\partial_{x^3} h, \tag{5.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\partial_t s_1 &= \frac{1}{10}h - \frac{3}{10}\frac{q}{h^2} - \frac{3}{35}\frac{q^2\partial_x h}{h^2} - \frac{126}{5}\frac{s_1}{h^2} - \frac{126}{5}\frac{s_2}{h^2} \\
&+ \delta \left( \frac{1}{35}\frac{q\partial_x q}{h} + \frac{108}{55}\frac{qs_1\partial_x h}{h^2} - \frac{5022}{5005}\frac{qs_2\partial_x h}{h^2} - \frac{103}{55}\frac{s_1\partial_x q}{h} \right. \\
&\quad \left. + \frac{9657}{5005}\frac{s_2\partial_x q}{h} - \frac{39}{55}\frac{q\partial_x s_1}{h} + \frac{10557}{10010}\frac{q\partial_x s_2}{h} \right) \\
&+ \eta \left( \frac{93}{40}\frac{q(\partial_x h)^2}{h^2} - \frac{69}{40}\frac{\partial_x h\partial_x q}{h} + \frac{21}{80}\frac{q\partial_{x^2} h}{h} - \frac{9}{40}\partial_{x^2} q \right) \\
&- \frac{1}{10}\zeta h\partial_x h + \frac{1}{10}h\partial_{x^3} h, \tag{5.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\partial_t s_2 &= \frac{13}{420}h - \frac{13}{140}\frac{q}{h^2} - \frac{39}{5}\frac{s_1}{h^2} - \frac{11817}{140}\frac{s_2}{h^2} \\
&+ \delta \left( -\frac{4}{11}\frac{qs_1\partial_x h}{h^2} + \frac{18}{11}\frac{qs_2\partial_x h}{h^2} - \frac{2}{33}\frac{s_1\partial_x q}{h} - \frac{19}{11}\frac{s_2\partial_x q}{h} \right. \\
&\quad \left. + \frac{6}{55}\frac{q\partial_x s_1}{h} - \frac{288}{385}\frac{q\partial_x s_2}{h} \right) \\
&+ \eta \left( -\frac{3211}{4480}\frac{q(\partial_x h)^2}{h^2} + \frac{2613}{4480}\frac{\partial_x h\partial_x q}{h} - \frac{2847}{8960}\frac{q\partial_{x^2} h}{h} + \frac{559}{2240}\partial_{x^2} q \right) \\
&- \frac{13}{420}\zeta h\partial_x h + \frac{13}{420}h\partial_{x^3} h. \tag{5.52}
\end{aligned}$$

Plaçons-nous dans le référentiel en mouvement  $\xi = x - ct$  où les ondes sont supposées stationnaires. Il vient :

$$0 = -\frac{81q_0}{28h^2} - \frac{81c}{28h} + \frac{27}{28}h - 33\frac{s_1}{h^2} - \frac{3069s_2}{28h^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \delta \left( -\frac{c^2}{5} + \frac{6q_0^2}{5h^2} - \frac{12q_0s_1}{5h^2} - \frac{126q_0s_2}{65h^2} + \frac{9cs_2}{13h} \right) - \frac{27}{28}\zeta h \right) h' \\
& + \frac{15\eta}{448} \left( \frac{335q_0}{2h^2} - \frac{c}{h} \right) (h')^2 + \frac{12}{5}\delta \left( c + \frac{q_0}{h} \right) s'_1 \\
& + \frac{1017}{455}\delta \left( c + \frac{q_0}{h} \right) s'_2 + \eta \left( -\frac{2743c}{1792} - \frac{10851q_0}{1792h} \right) h'' + \frac{27}{28}hh''', \quad (5.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{3q_0}{10h^2} - \frac{3c}{10h} + \frac{h}{10} - \frac{126s_1}{5h^2} - \frac{126s_2}{5h^2} \\
& + \left( \delta \left( -\frac{2c^2}{35} - \frac{3q_0^2}{35h^2} - \frac{cq_0}{7h} + \frac{108q_0s_1}{55h^2} + \frac{cs_1}{11h} - \frac{5022q_0s_2}{5005h^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{927cs_2}{1001h} \right) - \frac{\zeta h}{10} \right) h' + \frac{3}{5}\eta \left( \frac{31q_0}{8h^2} + \frac{c}{h} \right) (h')^2 \\
& + \delta \left( \frac{16c}{55} - \frac{39q_0}{55h} \right) s'_1 + \frac{10557}{10010}\delta \left( c + \frac{q_0}{h} \right) s'_2 \\
& + \frac{3}{80}\eta \left( c + \frac{7q_0}{h} \right) h'' + \frac{1}{10}hh''', \quad (5.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{13q_0}{140h^2} - \frac{13c}{140h} + \frac{13}{420}h - \frac{39s_1}{5h^2} - \frac{11817s_2}{140h^2} \\
& + \left( \delta \left( -\frac{4q_0s_1}{11h^2} - \frac{14cs_1}{33h} + \frac{18q_0s_2}{11h^2} - \frac{cs_2}{11h} \right) \right. \\
& \left. - \frac{13}{420}\zeta h \right) h' + \eta \left( -\frac{3211q_0}{4480h^2} - \frac{299c}{2240h} \right) (h')^2 + \frac{6}{55}\delta \left( c + \frac{q_0}{h} \right) s'_1 \\
& + \delta \left( \frac{97}{385}c - \frac{288q_0}{385h} \right) s'_2 + \eta \left( -\frac{611}{8960}c - \frac{2847q_0}{8960h} \right) h'' + \frac{13}{420}hh'''. \quad (5.55)
\end{aligned}$$

Isoler  $h'''$ ,  $s'_1$  et  $s'_2$  permet d'écrire (5.53–5.55) comme un système dynamique autonome de dimension cinq pour les variables  $U_1 = h$ ,  $U_2 = h'$ ,  $U_3 = h''$ ,  $U_4 = s_1$  et  $U_5 = s_2$  :

$$U'_1 = U_2, \quad U'_2 = U_3, \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned}
U'_3 = & 3\frac{q_0}{U_1^3} + 3\frac{c}{U_1^2} - 1 + \frac{1}{U_1^3 \left( c^2U_1^2 + \frac{152}{11}cq_0U_1 - \frac{444}{11}q_0^2 \right)} \left\{ \right. \\
& \left( \delta \left( \frac{2160}{121}q_0^4 - \frac{720}{11}cq_0^3U_1 - \frac{3060}{121}c^2q_0^2U_1^2 + \frac{540}{121}c^3q_0U_1^3 + \frac{580}{363}c^4U_1^4 \right) \right. \\
& \left. + \zeta U_1^3 \left( c^2U_1^2 + \frac{152}{11}cq_0U_1 - \frac{444}{11}q_0^2 \right) \right. \\
& + \delta \left( \frac{10080}{121}q_0^3 + \frac{7056}{121}cq_0^2U_1 - \frac{24584}{121}c^2q_0U_1^2 - \frac{504}{11}c^3U_1^3 \right) U_4 \\
& + \delta \left( \frac{25920}{121}q_0^3 + \frac{74376}{121}cq_0^2U_1 + \frac{27336}{121}c^2q_0U_1^2 - \frac{324}{11}c^3U_1^3 \right) U_5 \left. \right) U_2 \\
& + \eta \left( \frac{909}{4}q_0^3 - \frac{1971}{11}cq_0^2U_1 - \frac{42589}{352}c^2q_0U_1^2 - \frac{4525}{176}c^3U_1^3 \right) U_2^2 \\
& \left. + \eta \left( -\frac{15957}{88}q_0^3 + \frac{7221}{88}cq_0^2U_1 + \frac{6727}{704}c^2q_0U_1^2 - \frac{9071}{2112}c^3U_1^3 \right) U_1U_3 \right\} \quad (5.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U'_4 = & \frac{1}{\delta U_1 \left( c^2 U_1^2 + \frac{152}{11} c q_0 U_1 - \frac{444}{11} q_0^2 \right)} \left\{ \right. \\
& \left( \frac{13689}{11} q_0 + \frac{949}{11} c U_1 \right) U_4 + \left( \frac{91143}{22} q_0 + \frac{37479}{11} c U_1 \right) U_5 \\
& + \left( \delta \left( \frac{45942}{4235} q_0^3 + \frac{24986}{4235} c q_0^2 U_1 - \frac{533}{8470} c^2 q_0 U_1^2 - \frac{16003}{25410} c^3 U_1^3 \right) \right. \\
& + \delta \left( -\frac{50772}{605} q_0^2 + \frac{5850}{121} c q_0 U_1 + \frac{1069}{55} c^2 U_1^2 \right) U_4 \\
& + \delta \left( -\frac{166644}{4235} q_0^2 - \frac{96825}{847} c q_0 U_1 + \frac{5058}{385} c^2 U_1^2 \right) U_5 \left. \right) U_2 \\
& + \eta \left( -\frac{905931}{24640} q_0^2 + \frac{436553}{12320} c q_0 U_1 + \frac{35659}{3080} c^2 U_1^2 \right) U_2^2 \\
& + \eta \left( -\frac{1647087}{49280} q_0^2 U_1 + \frac{61217}{9856} c q_0 U_1^2 + \frac{50167}{18480} c^2 U_1^3 \right) U_3 \left. \right\}, \quad (5.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U'_5 = & \frac{1}{\delta U_1 \left( c^2 U_1^2 + \frac{152}{11} c q_0 U_1 - \frac{444}{11} q_0^2 \right)} \left\{ \right. \\
& \left( \frac{4186}{11} q_0 + \frac{728}{33} c U_1 \right) U_4 + \left( \frac{4559}{11} q_0 - \frac{1729}{11} c U_1 \right) U_5 \\
& + \left( \delta \left( \frac{1404}{605} q_0^3 + \frac{312}{605} c q_0^2 U_1 - \frac{13}{605} c^2 q_0 U_1^2 + \frac{416}{5445} c^3 U_1^3 \right) \right. \\
& + \delta \left( \frac{6552}{605} q_0^2 + \frac{6188}{363} c q_0 U_1 - \frac{182}{165} c^2 U_1^2 \right) U_4 \\
& + \delta \left( -\frac{51528}{605} q_0^2 + \frac{1146}{121} c q_0 U_1 - \frac{94}{55} c^2 U_1^2 \right) U_5 \left. \right) U_2 \\
& + \eta \left( \frac{75179}{1760} q_0^2 + \frac{3913}{5280} c q_0 U_1 - \frac{3497}{2640} c^2 U_1^2 \right) U_2^2 \\
& + \eta \left( \frac{16783}{3520} q_0^2 U_1 - \frac{611}{528} c q_0 U_1^2 - \frac{11947}{31680} c^2 U_1^3 \right) U_3 \left. \right\}. \quad (5.59)
\end{aligned}$$

Ce système dynamique devient singulier au voisinage des points qui annulent les différents dénominateurs des équations (5.57–5.59), soit lorsque

$$D \equiv \delta U_1 \left( c^2 U_1^2 + \frac{152}{11} c q_0 U_1 - \frac{444}{11} q_0^2 \right) \neq 0. \quad (5.60)$$

L'équation  $U_1 = 0$  signifie la formation de zones sèches sur le plan incliné. Les deux autres racines de  $D = 0$  sont  $\mathbf{U}_{\text{sing}\pm} = \frac{2}{11} q_0 (-38 \pm \sqrt{2665})/c$  dont l'une au moins est positive. La présence de  $\mathbf{U}_{\text{sing}\pm}$  traduit la complexité du système (5.57–5.59) et non une impossibilité physique. Elle résulte de la discrétisation du champ de vitesse sur une somme de fonctions et l'on pouvait s'attendre à ce que l'espace des phases considéré garde trace des limitations provenant de cette hypothèse.<sup>8</sup>

Les points fixes de (5.57–5.59) vérifient  $U_2 = U_3 = U_4 = U_5 = 0$  et (5.31). Par commodité, on ne les distinguera pas des points fixes  $\mathbf{U}_I$  et  $\mathbf{U}_{II}$  de (5.25). Or pour

<sup>8</sup>Cette limitation n'apparaît pas avec les modèles au premier ordre ou simplifié car la dimension 3 des systèmes dynamiques correspondants est imposée par la tension superficielle ( $\propto h'''$ ) et non par le champ de vitesse.

qu'une trajectoire hétérocline soit possible, il faut que celle-ci puisse connecter les deux points fixes sans rencontrer de singularités. Ainsi, est-il utile de déterminer les conditions pour lesquelles les points fixes rencontrent les points singuliers  $\mathbf{U}_{\text{sing}\pm}$ . Imposons comme précédemment que  $\mathbf{U}_I = 1$  soit solution de (5.31), soit  $\mathbf{U}_I = 1$ , d'où  $q_0 = 1/3 - c$ . Puisque  $c > 1/3$ ,  $q_0 < 0$  et seul  $\mathbf{U}_{\text{sing}-} = \frac{2}{11}(38 + \sqrt{2665})(1 - 1/(3c))$  est positif.  $\mathbf{U}_{\text{sing}-} = \mathbf{U}_I$  admet pour racine

$$c_- = \frac{2}{3} \frac{38 + \sqrt{2665}}{65 + 2\sqrt{2665}} \approx 0.355127.$$

De même l'équation  $\mathbf{U}_{\text{sing}-} = \mathbf{U}_{II}$  conduit à  $c = 1/3$  ou  $c$  racine de

$$\frac{16436}{1089} + \frac{304\sqrt{2665}}{1089} - \left( \frac{17272}{363} + \frac{326\sqrt{2665}}{363} \right) c + c^2.$$

soit  $c \approx 0.315117$  ou  $c \equiv c_+ \approx 93.6279$ . La première de ces valeurs est inférieure à  $1/3$  et la deuxième est très supérieure aux vitesses observées expérimentalement et dans les simulations numériques. Ainsi nous restreindrons notre étude à la condition

$$c_- < c < c_+. \quad (5.61)$$

Cette condition est peu restrictive. Les valeurs limites  $c_-$  et  $c_+$  correspondent à des positions extrêmes du point fixe  $\mathbf{U}_{II}$ , soit très près de l'origine,  $\mathbf{U}_{II} \approx 0.0615879$  soit très éloignée,  $\mathbf{U}_{II} \approx 16.2372$ . Or la position des points fixes influence beaucoup les orbites dans l'espace des phases. On observe notamment que les orbites homoclines passant par  $\mathbf{U}_I$  viennent s'enrouler autour de  $\mathbf{U}_{II}$  de telle sorte que leur amplitude, et par conséquent la distance maximale à l'origine atteinte dépend fortement de la position de  $\mathbf{U}_{II}$ . De même, s'éloignant en spiralant de  $\mathbf{U}_I$ , les maxima de  $\mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_5$  croissent avec la distance séparant  $\mathbf{U}_I$  et  $\mathbf{U}_{II}$  de telle manière que la condition (5.61) peut s'interpréter comme des bornes pour les gradients maxima atteints justifiant la troncature du modèle à un ordre donné.

### 5.6.2 Modèles de dimension quatre

Dans les notations réduites,  $\tau$  subissant la transformation  $\tau \mapsto h^{\star 3}\tau$ , le modèle à trois champs  $h$ ,  $q$  et  $\tau$  (équations (78–80) au ch. 10) s'écrit

$$\partial_t h = -\partial_x q, \quad (5.62)$$

$$\delta \partial_t q = h - \frac{3q}{h^2} - \tau + \delta \partial_x \left[ \frac{2}{35} h \tau q - \frac{6q^2}{5h} - \frac{6q \partial_x h}{h} + \frac{9 \partial_x q}{2} \right] - \zeta h \partial_x h + h \partial_{x^3} h, \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} \delta \partial_t \tau = & \frac{7}{h} - \frac{21q}{h^4} - \frac{42\tau}{h^2} + \delta \left\{ -\frac{18q^2 \partial_x h}{5h^4} + \frac{6q \partial_x q}{5h^3} + \frac{2q \tau \partial_x h}{5h^2} + \frac{\tau \partial_x q}{15h} - \frac{3q \partial_x \tau}{5h} \right\} \\ & + \eta \left\{ \frac{84q(\partial_x h)^2}{h^4} - \frac{63 \partial_x q \partial_x h}{h^3} \right\} - \frac{7\zeta \partial_x h}{h} + \frac{7 \partial_{x^3} h}{h}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

d'où pour  $U_1 \equiv h$ ,  $U_2 \equiv h'$ ,  $U_3 \equiv h''$  et  $U_4 \equiv \tau$ , le système dynamique suivant

$$U'_1 = U_2, \quad U'_2 = U_3, \quad (5.65)$$

$$U'_3 = 3\frac{q_0}{U_1^3} + 3\frac{c}{U_1^2} - 1 - \frac{2c\delta U_4}{9q_0} - \frac{\delta U_4}{3U_1} + \left\{ \zeta + \delta \left[ \frac{10c^3}{7q_0} - \frac{18q_0^2}{35U_1^3} + \frac{36cq_0}{35U_1^2} + \frac{3c^2}{5U_1} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{189}cU_4 + \frac{2q_0U_4}{315U_1} - \frac{2c^2U_1U_4}{945q_0} \right] \right\} U_2 + \eta \left\{ -\frac{42q_0}{5U_1^3} - \frac{18c}{5U_1^2} - \frac{6c^2}{5q_0U_1} \right\} U_2^2 \\ + \eta \left\{ -\frac{3c^2}{5q_0} + \frac{18q_0}{5U_1^2} - \frac{3c}{2U_1} \right\} U_3, \quad (5.66)$$

$$U'_4 = -\frac{35U_4}{\delta q_0 U_1} + \left\{ \frac{108q_0}{U_1^3} + \frac{54c}{U_1^2} + \frac{9c^2}{q_0U_1} - 15\frac{c}{q_0}U_4 \right\} U_2 + \frac{\eta}{\delta} \left\{ -\frac{378}{U_1^3} - \frac{189c}{q_0U_1^2} \right\} U_2^2 \\ + \frac{\eta}{\delta} \left\{ -\frac{378}{U_1^2} - \frac{189c}{2q_0U_1} \right\} U_3. \quad (5.67)$$

De même le modèle (3.38,4.61,4.59,4.60) où  $s \mapsto h^{*3}s$  se présente en notations réduites

$$\partial_t h = -\partial_x q, \quad (5.68)$$

$$\delta\partial_t q = \frac{14}{15}h - \frac{14}{5}\frac{q}{h^2} - \frac{126}{5}\frac{s}{h^2} + \delta \left[ -\frac{112}{55}\frac{qs\partial_x h}{h^2} + \frac{406}{165}\frac{s\partial_x q}{h} + \frac{126}{55}\frac{q\partial_x s}{h} \right. \\ \left. + \frac{6}{5}\frac{q^2\partial_x h}{h^2} - \frac{12}{5}\frac{q\partial_x q}{h} \right] + \eta \left[ \frac{253}{40}\frac{q(\partial_x h)^2}{h^2} - \frac{249}{40}\frac{\partial_x q\partial_x h}{h} - \frac{459}{80}\frac{q\partial_{x^2} h}{h} \right. \\ \left. + \frac{171}{40}\partial_{x^2} q \right] - \frac{14}{15}\zeta h\partial_x h + \frac{14}{15}h\partial_{x^3} h, \quad (5.69)$$

$$\delta\partial_t s = \frac{1}{10}h - \frac{3}{10}\frac{q}{h^2} - \frac{126}{5}\frac{s}{h^2} + \delta \left[ \frac{108}{55}\frac{qs\partial_x h}{h^2} - \frac{103}{55}\frac{s\partial_x q}{h} - \frac{39}{55}\frac{q\partial_x s}{h} \right. \\ \left. - \frac{3}{35}\frac{q^2\partial_x h}{h^2} + \frac{1}{35}\frac{q\partial_x q}{h} \right] + \eta \left[ \frac{93}{40}\frac{q(\partial_x h)^2}{h^2} - \frac{69}{40}\frac{\partial_x q\partial_x h}{h} + \frac{21}{80}\frac{q\partial_{x^2} h}{h} \right. \\ \left. - \frac{9}{40}\partial_{x^2} q \right] - \frac{1}{10}\zeta h\partial_x h + \frac{1}{10}h\partial_{x^3} h. \quad (5.70)$$

L'équivalent de (5.65–5.67) où  $U_1 \equiv h$ ,  $U_2 \equiv h'$ ,  $U_3 \equiv h''$  et  $U_4 \equiv s$  est alors

$$U'_1 = U_2, \quad U'_2 = U_3, \quad (5.71)$$

$$U'_3 = 3\frac{q_0}{U_1^3} + 3\frac{c}{U_1^2} - 1 + \frac{1}{U_1^3} \left( q_0 - \frac{c}{21}U_1 \right) \left\{ \right. \\ \left[ \delta \left( -\frac{36}{49}q_0^3 + \frac{48}{49}cq_0^2U_1 + \frac{33}{49}c^2q_0U_1^2 + \frac{4}{49}c^3 \right) \right. \\ \left. + \zeta \left( q_0U_1^3 - \frac{1}{21}cU_1^4 \right) \right] U_2 + \eta \left[ -\frac{4317}{392}q_0^2 - \frac{155}{28}cq_0U_1 - \frac{74}{49}c^2U_1^2 \right] U_2^2 \\ \left. + \left[ \frac{594}{7}q_0 + \frac{396}{7}cU_1 + \delta \left( -\frac{24}{7}q_0^2 - \frac{44}{7}cq_0U_1 - \frac{2}{21}c^2U_1^2 \right) U_2 \right] U_4 \right\}$$

$$+\eta \left[ \frac{3051}{784} q_0^2 \mathbf{U}_1 - \frac{1161}{784} c q_0 \mathbf{U}_1^2 - \frac{225}{392} c^2 \mathbf{U}_1^3 \right] \mathbf{U}_3 \left. \vphantom{\frac{3051}{784}} \right\} , \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}'_4 = & \frac{1}{\delta \mathbf{U}_1 (21q_0 - c\mathbf{U}_1)} \left\{ -495 \mathbf{U}_4 \right. \\ & + \delta \left[ -\frac{33}{7} q_0^2 - \frac{22}{7} c q_0 \mathbf{U}_1 - \frac{11}{14} c^2 \mathbf{U}_1^2 + (48q_0 + c) \mathbf{U}_4 \right] \mathbf{U}_2 \\ & \left. + \eta \left[ \frac{4059}{112} q_0 + \frac{363}{28} c \mathbf{U}_1 \right] \mathbf{U}_2^2 + \eta \left[ \frac{4323}{224} q_0 \mathbf{U}_1 + \frac{957}{224} c \mathbf{U}_1^2 \right] \mathbf{U}_3 \right\} . \quad (5.73) \end{aligned}$$

# Chapitre 6

## Stabilité des ondes bidimensionnelles

À nombre de Reynolds modéré, le film tombant ne demeure pas parallèle dans la direction transverse  $z$  et l'on passe très vite à une dynamique tridimensionnelle (3D) et instationnaire dont l'élément essentiel est la présence d'ondes solitaires courbées en forme de "fer à cheval" [90, 2]. Afin de mettre expérimentalement cette instabilité secondaire en évidence, la symétrie  $\partial_z = 0$ ,  $w = 0$  peut être brisée par un forçage imposé à la paroi ou à l'interface. En modifiant localement la rugosité de la paroi ou les conditions aux bords, des ondes stationnaires et fortement courbées sont générées [2]. Celles-ci ressemblent aux solitons courbés déjà mentionnés. Toutefois, les modulations transverses des fronts apparaissent spontanément sous l'effet de l'amplification du bruit ambiant sans qu'un forçage soit nécessaire. Deux types d'instabilités sont alors rencontrés [82]. Lorsque les fronts se déforment en phase, l'instabilité est dite *synchrone* tandis qu'un déphasage de  $\pi$  entre deux fronts successifs correspond à une instabilité *sous-harmonique* conduisant à des motifs en forme de *chevrons* ou damiers. L'instabilité synchrone est la plus facile à observer tandis que les motifs en chevrons apparaissent de manière aléatoire et ne sont stabilisés qu'en excitant le sous-harmonique  $f/2$  à l'entrée de l'écoulement [45].

Les instabilités secondaires tridimensionnelles du film tombant ont suscité un grand nombre d'études tant théoriques que numériques au moins à partir des années 1960 [8]. La stabilité d'un film uniforme et de solutions parallèles (2D) stationnaires dans leur référentiel en mouvement a été considérée, entre autres, par Benjamin [8], Roskes [99], Krishna & Lin [74], Joo & Davis [65] à l'aide du développement de Benney et d'une théorie faiblement non-linéaire. Demekhin & Shkadov ont étudié les solutions instationnaires tridimensionnelles périodiques du modèle (3.67) et obtenu des solutions en fer à cheval ou des chevrons [35]. Trifonov a construit les solutions non-linéaires bifurquant par doublement de période des familles de solutions 2D du modèle de Shkadov (3.67) [111], tandis que l'analyse de Joo & Davis supposait des déformations transverses synchrones seulement. Récemment Chang *et al.* [18] ont construit les solutions en forme de fronts parallèles de l'équation de couche limite (3.9) puis ils ont conduit l'analyse de stabilité de celles-ci. Leurs simulations de l'évolution spatio-temporelle 3D d'une onde lente de type  $\gamma_1$  avec des conditions

aux limites périodiques montrent que cette évolution dépend fortement du contenu du bruit imposé. Il y a alors compétition entre deux mécanismes. (i) l'onde subit une première instabilité sous-harmonique 2D conduisant à la formation d'ondes rapides  $\gamma_2$  qui subissent ensuite une instabilité transverse modulant la crête des ondes et que Chang *et al.* appellent instabilité de phase; (ii) l'onde  $\gamma_1$  subit une instabilité 3D sous-harmonique conduisant à la formation de motifs en chevrons. Les calculs de Chang *et al.* indiquent que pour les ondes  $\gamma_2$  de grandes longueurs la perturbation 3D la plus amplifiée est sous-harmonique (cf. [22] table 1). De plus les diagrammes présentés par Chang *et al.* semblent indiquer une instabilité sous-harmonique pour les deux mécanismes décrits ([22], fig 12 et fig. 14).

Ainsi aucune de ces études mentionnées ne permet de rendre compte des instabilités tridimensionnelles synchrones décrites par Liu *et al.* [82]. De plus aucune étude n'introduit les effets dispersifs d'origine visqueuse. Nous porterons donc ici notre attention sur le rôle des effets visqueux du second ordre et la compréhension des observations de Liu *et al.* Le § 6.1 présente le schéma numérique écrit afin de d'effectuer l'analyse de stabilité des ondes primaires 2D. Au § 6.2, les problèmes de convergence de la solution numérique vers la solution du problème seront abordés. Enfin, les résultats obtenus seront discutés au vu des travaux de Chang *et al.* [18] au § 6.3, et des expériences de Liu *et al.* au § 6.4.

## 6.1 Analyse de Floquet

Reprenant la méthode développée par Liu *et al.* [82], on s'intéresse ici à la stabilité des ondes périodiques 2D stationnaires dans leur référentiel propre,  $\xi = x - ct$ , construites au chapitre précédent vis-à-vis de perturbations infinitésimales quelconques. Ce travail s'avérant coûteux en temps de calcul, notre étude se limite au modèle simplifié (4.65–4.66).

L'amplification ou la décroissance des perturbations ne peut être estimée qu'après soustraction du comportement oscillant des solutions stationnaires [83]  $H(\xi)$ ,  $Q(\xi) \equiv cH(\xi) + q_0$  dont nous noterons  $\alpha$  le nombre d'onde. Cette soustraction s'effectue en incluant un terme de même périodicité dans l'expression des perturbations. Écrivant l'épaisseur  $h$ , le débit dans le sens de l'écoulement  $q_{\parallel}$  et dans la direction transverse  $q_{\perp}$  sous la forme  $h = H + \epsilon h_1$ ,  $q_{\parallel} = cH + q_0 + \epsilon q_{\parallel,1}$  et  $q_{\perp} = \epsilon q_{\perp,1}$ , où  $\epsilon \ll 1$ , nous prendrons  $h_1$ ,  $q_{\parallel,1}$  et  $q_{\perp,1}$  sous la forme

$$\begin{aligned} h_1(\xi, z, t) &= \sum_{\varsigma, \alpha_z} \tilde{h}(\xi) \exp\{i\alpha\varsigma\xi + i\alpha_z z + st\}, \\ q_{\parallel,1}(\xi, z, t) &= \sum_{\varsigma, \alpha_z} \tilde{q}_{\parallel}(\xi) \exp\{i\alpha\varsigma\xi + i\alpha_z z + st\}, \\ q_{\perp,1}(\xi, z, t) &= \sum_{\varsigma, \alpha_z} \tilde{q}_{\perp}(\xi) \exp\{i\alpha\varsigma\xi + i\alpha_z z + st\}, \end{aligned}$$

où  $\tilde{h}$ ,  $\tilde{q}_{\parallel}$  et  $\tilde{q}_{\perp}$  sont des fonctions réelles et de même période  $2\pi/\alpha$  que  $H$ . Le nombre sans dimension  $\varsigma$  représente le décalage en nombre d'onde entre la perturbation et l'onde considérée varie dans un intervalle de longueur unité, par exemple  $[-1/2, 1/2]$ .

Lorsque  $\varsigma = 0$ , l'instabilité est en phase avec l'onde primaire et si  $\varsigma = 1/2$ , la perturbation double la périodicité initiale. Suivant Chang *et al.* [22] nous qualifierons par la suite de sous-harmonique toute instabilité correspondant à un taux d'amplification maximum pour  $\varsigma = 1/2$ .

Introduisant la décomposition précédente dans (4.65–4.66), on obtient alors

$$s\tilde{h} = i\alpha\varsigma (c\tilde{h} - \tilde{q}_{\parallel}) - i\alpha_z\tilde{q}_{\perp} + c\tilde{h}' - \tilde{q}'_{\parallel}, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} s\tilde{q}_{\parallel} = & -\frac{97}{56}i\alpha_z \left(c + \frac{q_0}{H}\right) \tilde{q}_{\perp} + \left[\frac{9}{7} \left(c + \frac{q_0}{H}\right)^2 - 12i\alpha\varsigma \left(c + \frac{q_0}{H}\right) \right. \\ & - \frac{5}{6} (\alpha_z^2 + B + 3\alpha^2\varsigma^2) H + \left(\frac{8q_0}{H} + \frac{7c}{2}\right) \frac{H'}{H} \left. \right] \tilde{h}' \\ & + \left[9i\alpha\varsigma - \frac{10}{7}c - \frac{17q_0}{7H} - \frac{9H'}{2H}\right] \tilde{q}'_{\parallel} \\ & + \left[-i\alpha\varsigma \left(\frac{10}{7}c + \frac{17q_0}{7H}\right) - \frac{5}{2H^2} + \left[\frac{1}{7} \left(18\frac{q_0}{H} + c\right) - \frac{9}{2}i\alpha\varsigma\right] \frac{H'}{H} \right. \\ & + 4 \left(\frac{H'}{H}\right)^2 - \alpha_z^2 - \frac{9}{2}\alpha^2\varsigma^2 - 6\frac{H''}{H} \left. \right] \tilde{q}_{\parallel} \\ & + \left[\frac{5}{2}i\alpha\varsigma H - 6c - 6\frac{q_0}{H}\right] \tilde{h}'' + \frac{9}{2}\tilde{q}''_{\parallel} \\ & + \left[\frac{5}{2} + \frac{9}{7}i\alpha\varsigma \left(c + \frac{q_0}{H}\right)^2 - \frac{5}{6}i\alpha\varsigma (\alpha_z^2 + B + \alpha^2\varsigma^2) H \right. \\ & + \left(-\frac{5}{2}B - \frac{17cq_0}{7H^2} - \frac{3c^2}{7H} + 8i\alpha\varsigma\frac{q_0}{H^2} + \frac{7}{2}i\alpha\varsigma\frac{c}{H}\right) H' \\ & - \frac{9c}{2} \left(\frac{H'}{H}\right)^2 + \alpha_z^2\frac{23q_0}{16H} + 6\alpha^2\varsigma^2\frac{q_0}{H} - 6\frac{q_0H''}{H^2} \\ & \left. + c \left(\frac{23}{16}\alpha_z^2 + 6\alpha^2\varsigma^2 + 3\frac{H''}{H}\right) + \frac{5}{2}\Gamma H'''\right] \tilde{h} + \frac{5}{6}\Gamma H\tilde{h}''', \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} s\tilde{q}_{\perp} = & \left[-i\alpha\varsigma \left(\frac{2}{7}c + \frac{9q_0}{7H}\right) - \frac{5}{2H^2} + \left(\frac{c}{7} + \frac{9q_0}{7H}\right) \frac{H'}{H}\right] \tilde{q}_{\perp} \\ & + \left[\frac{73}{16}\alpha\varsigma\alpha_z \left(c + \frac{q_0}{H}\right) + \frac{5}{6}i\alpha_z (\alpha^2\varsigma^2 - B - \alpha_z^2) H \right. \\ & + i\alpha_z \left(\frac{13q_0}{4H} + \frac{39}{16}c\right) \frac{H'}{H} \left. \right] \tilde{h} + \left(-\frac{7}{2}\alpha\alpha_z\varsigma - i\alpha_z\frac{43}{16}\frac{H'}{H}\right) \tilde{q}_{\parallel} \\ & + \left[-i\alpha_z\frac{73}{16} \left(c + \frac{q_0}{H}\right) - \frac{5}{3}\alpha\varsigma\alpha_z H\right] \tilde{h}' + \frac{7}{2}i\alpha_z\tilde{q}'_{\parallel} \\ & - \left(\frac{2}{7}c + \frac{9q_0}{7H}\right) \tilde{q}'_{\perp} + \frac{5}{6}i\alpha_z\Gamma H\tilde{h}'' . \end{aligned} \quad (6.3)$$

Le problème posé peut ainsi se mettre sous la forme

$$sX = L(H(\xi), \partial_{\xi}; c, q_0, \Gamma, \varsigma, \alpha_z)X, \quad (6.4)$$

où  $X = (\tilde{h}, \tilde{q}_{\parallel}, \tilde{q}_{\perp})$  et  $L$  un opérateur linéaire. On cherche donc la valeur propre  $s^*$  de partie réelle la plus élevée appartenant au spectre de  $L$  avec  $c, q_0, \Gamma$  et  $H(\xi)$  fixés soit  $\Re(s^*) = \max_{\varsigma, \alpha_z} \Re(s)$ . Les équations (4.65–4.66) étant réelles, le système (6.1–6.3) présente la symétrie  $(\alpha_{\varsigma}, \alpha_z, s, \tilde{h}, \tilde{q}_{\parallel}, \tilde{q}_{\perp}) \mapsto (-\alpha_{\varsigma}, -\alpha_z, \bar{s}, \bar{\tilde{h}}, \bar{\tilde{q}}_{\parallel}, \bar{\tilde{q}}_{\perp})$ , de sorte que l'on peut limiter l'intervalle de  $\varsigma$  à  $[0, 1/2]$ . De plus, les ondes considérées sont symétriques par réflexion autour de l'axe  $x$  :  $(\alpha_z, \tilde{q}_{\perp}) \mapsto (-\alpha_z, -\tilde{q}_{\perp})$  et l'on peut se contenter de  $\alpha_z \in [0 + \infty[$ . La recherche de  $s^*$  et des fonctions propres correspondantes a été effectuée numériquement à l'aide d'une discrétisation sur un maillage régulier de  $M$  points  $x_k$  et de pas  $2\pi/(M\alpha)$ . Soit  $N$  le nombre de modes de Fourier utilisés pour représenter la solution  $H$  et  $\hat{H}_k^N$ , les coefficients correspondants. Le passage de la solution discrétisée  $X_k^M = (\tilde{h}(x_k), \tilde{q}_{\parallel}(x_k), \tilde{q}_{\perp}(x_k))$  à sa représentation dans l'espace spectral  $\hat{X}_k^M = (\hat{h}_k^M, \hat{q}_{\parallel,k}^M, \hat{q}_{\perp,k}^M)$ , se fait par transformée de Fourier rapide, en abrégé FFT (cf. § 8.1.1),

$$s\hat{X}_k^M = sFFT(X_k^M) = FFT(LX_k^M) = \hat{L}^M(\hat{X}_k^M). \quad (6.5)$$

Toutefois, la définition de la matrice  $\hat{L}^M$  est malaisée. En effet, les produits dans l'espace physique correspondent à des convolutions dans l'espace spectral. On s'affranchit de cette difficulté par une méthode pseudo-spectrale. Notant  $E_i$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{C}^M$ , on écrit

$$\hat{L}_{i,j}^M = (\hat{L}^M E_i)_j = FFT(L(FFT^{-1} E_i))_j, \quad (6.6)$$

et l'on calcule ainsi ligne après ligne la matrice  $\hat{L}^{M1}$

Pour obtenir la valeur propre de plus grande partie réelle de la matrice complexe  $\hat{L}^M$ , on utilise une méthode de décomposition QR permettant d'obtenir tous les vecteurs et toutes les valeurs propres, algorithme dont la complexité est  $M^3$  (sous-programme ZGEEV de la bibliothèque de procédures FORTRAN LAPACK). Ainsi, le nombre de modes utilisés  $M$  pour représenter les fonctions propres  $\tilde{h}, \tilde{q}_{\parallel}$  et  $\tilde{q}_{\perp}$  est le facteur limitant de la méthode choisie. Celui-ci ne peut être choisi trop élevé sans ralentir considérablement le calcul et le rendre prohibitif. En pratique, au plus 256 modes ont été utilisés et dans la plupart des calculs  $M$  ne dépassait pas 128. La recherche du maximum  $s^*$  pour  $(\varsigma, \alpha_z) \in [0, 1/2] \times [0, +\infty[$  se fait alors en deux étapes. (i) après avoir défini un maillage régulier sur  $[0, 1/2] \times [0, A\alpha[$  de taille  $K \times L$  où  $A$  est une constante convenablement choisie, on cherche alors le point  $(\varsigma_i, \alpha_{z,j})$  correspondant au maximum de la fonction  $f(\varsigma, \alpha_z) = \max_{\varsigma, \alpha_z} \Re(s)$  sur le maillage. Dans la plupart des calculs,  $K = L = 8$  et  $A = 4$ . (ii) Afin de raffiner la première approximation obtenue, nous avons employé une méthode de recherche d'extrema ne nécessitant pas la connaissance du gradient de la fonction à maximiser, la méthode de Powell [92]. Celle-ci repose essentiellement sur la recherche successive d'extrema suivant une direction choisie dans l'espace des inconnues, ici de dimension deux, et la recherche de directions conjuguées (pour lesquelles la minimisation selon une

---

<sup>1</sup>Il faut cependant prendre garde aux erreurs de repliements. Ainsi on prend soin d'effectuer les transformées de Fourier directes et inverses sur un plus grand nombre de modes  $N_{TF} = P \times \max(N, M)$  avec  $P = 4$  (cf. § 8.1.2).

direction ne modifie pas le résultat de la minimisation suivant les autres directions). La recherche d'un maximum suivant une direction particulière est réalisée à l'aide de la méthode de Brent par interpolation parabolique, c.-à.-d. à l'aide de polynômes de degré deux. Le processus s'arrête lorsque la valeur du maximum de  $f$  obtenue après chaque itération cesse de croître d'au plus une certaine quantité en valeur relative (fixée ici à  $10^{-4}$ ). La méthode de Powell est réputée converger quadratiquement, la distance au point cherché diminuant suivant une suite quadratique. Cette propriété permet d'atteindre une précision acceptable en un minimum d'appels de la procédure de factorisation QR permettant le calcul des valeurs propres (de l'ordre de la centaine).

Bien évidemment, les bornes du domaine de recherche de  $s^*$  ne sont pas limitées à  $[0, 1/2] \times [0, A\alpha[$  afin de ne pas compliquer l'algorithme, particulièrement lorsque l'instabilité secondaire est sous-harmonique  $\varsigma = 1/2$ ! Il arrive donc fréquemment que le minimum trouvé n'appartienne pas au domaine de recherche défini plus haut. Pour s'y ramener on utilise les propriétés de symétries du problème de la manière suivante. Si,  $\alpha_z < 0$ , on effectue la transformation  $\alpha_z \rightarrow -\alpha_z$ ,  $\hat{q}_{\perp,k}^M \rightarrow -\hat{q}_{\perp,k}^M$ . De même, lorsque  $\varsigma < 0$ , on utilise la conjugaison  $\varsigma \rightarrow -\varsigma$ ,  $\alpha_z \rightarrow -\alpha_z$ ,  $s \rightarrow -s$  et  $X_k^M \rightarrow \overline{X_k^M}$ . Enfin, dans le cas où  $\varsigma > 1/2$ , on écrit  $x_1(\xi, z, t) = \sum_{\varsigma, \alpha_z} \tilde{x}(\xi) \exp\{i\alpha\varsigma\xi + i\alpha_z z + st\} = \sum_{\varsigma, \alpha_z} [\tilde{x} \exp(i\alpha\xi)] \exp\{i\alpha(\varsigma - 1)\xi + i\alpha_z z + st\}$  avec  $x$  désignant  $h$ ,  $q_{\parallel}$  ou  $q_{\perp}$ . Or,  $TF[\tilde{x}(\xi) \exp(i\alpha\xi)](k) = TF[\tilde{x}](k + \alpha)$ , d'où la transformation  $\varsigma \rightarrow \varsigma - 1$ ,  $\hat{X}_k^M \rightarrow \hat{X}_{k-1}^M$ .

Enfin signalons qu'il existe toujours une valeur propre nulle au problème (6.4), correspondant au libre choix de la phase de l'onde périodique considérée. Ainsi, dans le cas d'une onde 2D stationnaire stable, l'algorithme précédent prédira un taux de croissance  $\sigma$  nul et non pas négatif pour la perturbation la moins amortie.

## 6.2 Convergence

Le passage d'une description continue à une description discrète via la transformation de Fourier pose un problème de convergence. Il faut ainsi vérifier que la valeur propre de partie réelle la plus élevée, notée  $s^{*,M}$  (pour rendre compte de sa dépendance vis-à-vis du nombre de modes  $M$  utilisés pour représenter la perturbation) et le vecteur propre correspondant  $\hat{X}^{*,M}$  tendent vers une valeur indépendante de  $M$ . Ont été représentés sur la figure 6.1, le décalage en nombre d'onde  $\varsigma^M$ , le nombre d'onde transverse  $\alpha_z^M$ , le taux d'amplification maximum  $\sigma^M = \Re(s^{*,M})$  et la pulsation  $\omega^M = -\Im(s^{*,M})$  en fonction du nombre d'onde de la solution de base  $\alpha$ . Les paramètres choisis correspondent à un calcul de stabilité des solutions des équations de couche limite par Chang *et al.* (cf. réf. [18], fig. 12). Il est alors commode d'utiliser les notations réduites car un paramètre disparaît du problème (cf. ch. 5). Les vecteurs d'onde  $\alpha$ ,  $\alpha_z$  sont donc dimensionnés à l'aide de l'échelle de longueur  $\kappa h_N$ , tandis que le taux de croissance et la pulsation le sont par  $\kappa/h_N$ .<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Avec ce choix d'échelles, la vitesse de phase des ondes infinitésimales au point critique est égale à l'unité. Chang *et al.* ayant utilisé la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme correspondant (vitesse de Nusselt), il faut tenir compte d'un facteur trois lors des comparaisons des taux de

Le calcul a été effectué pour quatre valeurs du nombre de modes de la perturbation,  $M = 16, 32, 64$  et  $128$  et le nombre  $N$  de modes employés pour représenter la solution de base est de  $16$  pour  $2.185 < \alpha < 2.197$ ,  $32$  pour  $1.886 < \alpha < 2.181$ ,  $64$  lorsque  $1.278 < \alpha < 1.876$  et enfin  $128$  pour les solutions les plus localisées  $0.292 < \alpha < 1.265$ . Les courbes correspondant à  $M = 64$  et  $M = 128$  ne peuvent être discernées sur la figure 6.1 tandis que l'écart avec la courbe  $M = 32$  ne devient évident que pour les plus faibles valeurs de  $\alpha$ . Notons que la valeur  $M = 16$  fournit un résultat acceptable jusqu'à  $\alpha \approx 1.5$  pour lequel  $N$  est déjà égal à  $64$ . L'augmentation du nombre de modes  $M$  lorsque  $\alpha$  diminue est ici rendu nécessaire du fait de la localisation du vecteur d'onde le plus instable accompagnant la localisation de l'onde primaire  $H$ .

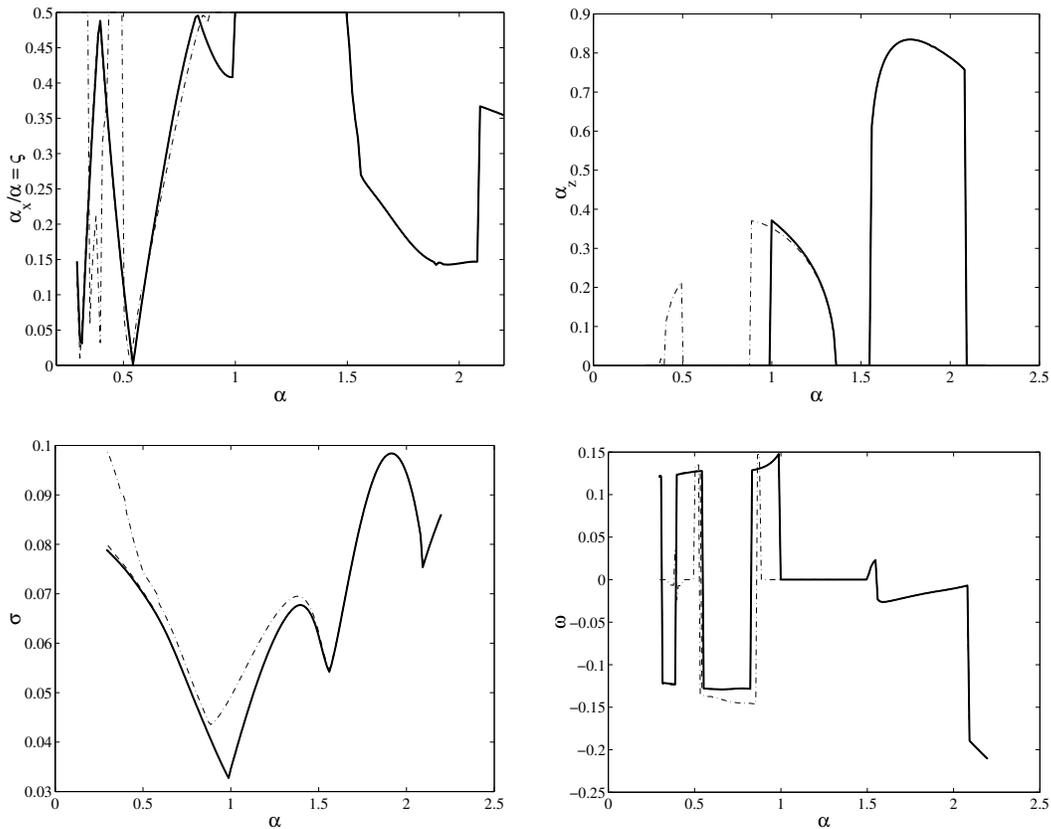


FIG. 6.1 – Caractéristiques de la perturbation 3D dominante pour  $\delta = 12.15$ ,  $\zeta = 0$  et  $\eta = 0$  en fonction du nombre d'onde de la solution 2D stationnaire (En haut à gauche, décalage en fréquence  $\zeta$ , en haut à droite, nombre d'onde transverse  $\alpha_z$ , en bas à gauche, taux de croissance  $\sigma = \Re(s^*)$  et en bas à droite, pulsation,  $\omega = -\Im(s^*)$ ).  $\alpha$  et  $\alpha_z$  sont dimensionnés en utilisant les notations réduites (cf. § 5.1.1). Trait mixte fin,  $M = 16$ , pointillé  $M = 32$ , trait continu fin  $M = 64$  et trait continu fort  $M = 128$ .

croissance. De même, notre définition ( $\delta$ ) et celle de Chang *et al.* ( $\delta_D$ ) se correspondent à un facteur près,  $\delta = 45 \delta_D$ .

On a également représenté sur la figure 6.2, le comportement du maximum des parties réelles des valeurs propres  $s^M$  en fonction de  $\zeta$  et de  $\alpha_z$  pour la solution de base de plus faible nombre d'onde (et donc la plus localisée) nécessitant 128 modes pour sa représentation dans l'espace spectral. Notons que, mis à part le cas  $M = 16$  prédisant une instabilité sous-harmonique, l'allure des lignes de niveau ne varie guère entre  $M = 32, 64$  et 128. La convergence du résultat peut être examinée en détail à l'aide du tableau 6.1 où  $\zeta^M$ ,  $\alpha_z^M$ ,  $\sigma^M$  et  $\omega^M$  sont présentés pour trois valeurs du nombre d'onde  $\alpha$  correspondant à la limite du critère de doublement du nombre de modes  $N$  de la solution de base par l'algorithme de construction des ondes stationnaires (cf. § 8.1.1). Tenant compte de la valeur  $10^{-4}$  retenue pour la valeur relative de  $\sigma$  à partir de laquelle la procédure de recherche du maximum s'arrête, on ne peut espérer une précision supérieure à quatre chiffres significatifs. Il semble que pour les trois exemples présentés, utiliser le même nombre de modes de Fourier pour représenter les fonctions propres que le nombre de modes décrivant la solution de base, soit  $M = N$  donne un résultat fort suffisant. Évidemment cette constatation dépend de la façon de choisir  $N$  (cf. condition (8.10)) et donc du seuil  $\epsilon$  contrôlant le doublement de modes. (ici,  $\epsilon$  vaut  $10^{-8}$ ).

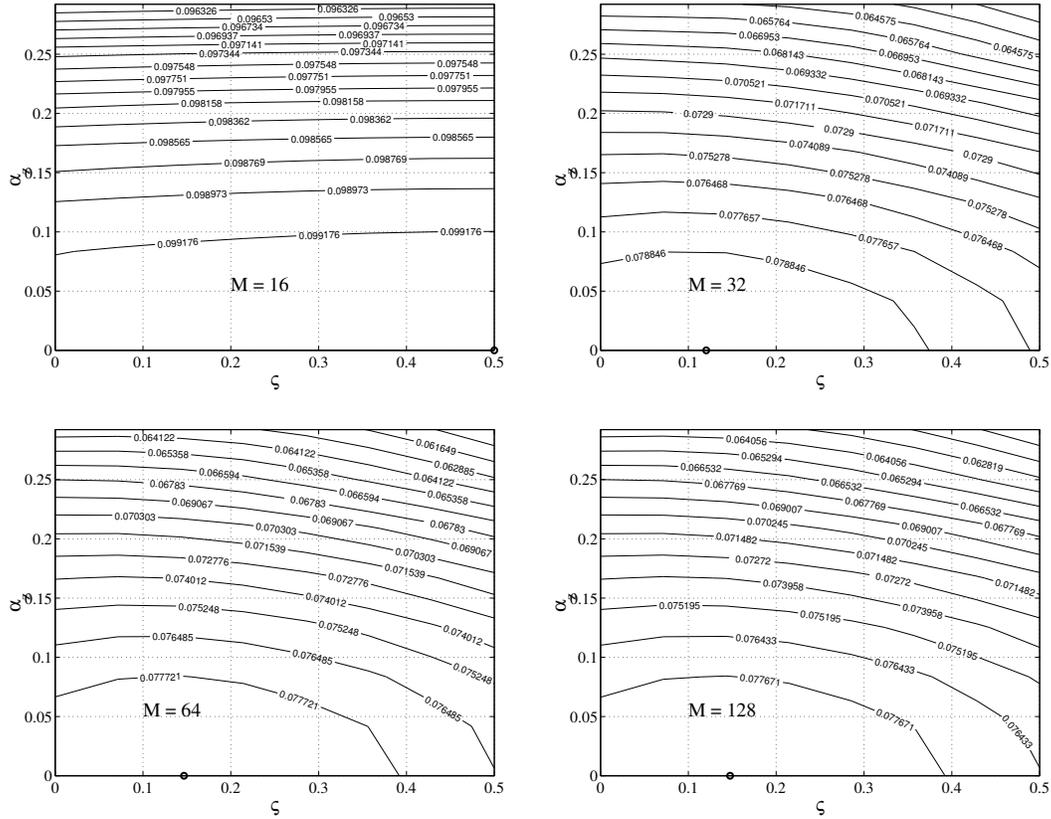


FIG. 6.2 – Représentation du maximum de la partie réelle des valeurs propres  $s$  dans le plan nombre d'onde transverse en fonction du décalage en fréquence  $\zeta = \alpha_x/\alpha$  (grille  $8 \times 8$ ). En haut à gauche,  $M = 16$ ; en haut à droite,  $M = 32$ , en bas à gauche,  $M = 64$  et en bas à droite,  $M = 128$ . Le calcul correspond à l'onde parallèle stationnaire de nombre d'onde le plus petit,  $\alpha = 0.292204$  (cf. table 6.1), de la famille étudiée ( $N = 128$ ,  $\delta = 12.15$ ,  $\zeta = 0$  et  $\eta = 0$ ).

TAB. 6.1 – Convergence de la recherche de la perturbation tridimensionnelle la plus amplifiée en fonction du nombre  $M$  de modes de Fourier servant à la représenter. La solution 2D stationnaire, de nombre d'onde  $\alpha$ , est définie sur une base de  $N$  modes de Fourier et calculée en imposant  $\langle h \rangle = 1$ . Les paramètres sont  $\delta = 12.15$ ,  $\zeta = 0$  et  $\eta = 0$ .

$N = 128, \alpha = 0.292204$				
$M$	$\zeta^M$	$\alpha_z^M$	$\sigma^M$	$\omega^M$
16	$5.00000E - 1$	$5.20515E - 11$	$9.93797E - 2$	$5.04695E - 8$
32	$1.20356E - 1$	$1.95789E - 8$	$8.00457E - 2$	$1.22470E - 1$
64	$1.46612E - 1$	$4.65931E - 11$	$7.89576E - 2$	$1.20947E - 1$
128	$1.47464E - 1$	$9.03471E - 9$	$7.89088E - 2$	$1.20891E - 1$
256	$1.47464E - 1$	$6.54882E - 8$	$7.89088E - 2$	$1.20891E - 1$

$N = 64, \alpha = 1.27834$				
$M$	$\zeta^M$	$\alpha_z^M$	$\sigma^M$	$\omega^M$
16	$5.00000E - 1$	$2.01465E - 1$	$6.67756E - 2$	$9.19275E - 9$
32	$5.00000E - 1$	$2.05208E - 1$	$6.31151E - 2$	$3.86264E - 9$
64	$5.00000E - 1$	$2.05210E - 1$	$6.31125E - 2$	$6.10349E - 9$
128	$5.00000E - 1$	$2.05210E - 1$	$6.31125E - 2$	$1.49119E - 8$

$N = 32, \alpha = 1.88644$				
$M$	$\zeta^M$	$\alpha_z^M$	$\sigma^M$	$\omega^M$
16	$1.42306E - 1$	$8.16695E - 1$	$9.82294E - 2$	$1.38606E - 2$
32	$1.46510E - 1$	$8.20377E - 1$	$9.79846E - 2$	$1.43459E - 2$
64	$1.46509E - 1$	$8.20376E - 1$	$9.79846E - 2$	$1.43459E - 2$
128	$1.46511E - 1$	$8.20377E - 1$	$9.79846E - 2$	$1.43460E - 2$

### 6.3 Comparaisons avec les résultats antérieurs

À fin de comparaison, l'analyse de Floquet décrite ci-dessus a été refaite dans les conditions des calculs effectués par Chang *et al.* [18]. La figure 6.3 reproduit les décalages en fréquence  $\varsigma$  et le nombre d'onde transverse  $\alpha_z$  correspondant aux perturbations les plus amplifiées pour une famille de solutions stationnaires dans leur référentiel en mouvement émergeant de la courbe de stabilité marginale et se terminant par des ondes presque solitaires en forme de “trous”, appelée  $\gamma_1$  par Chang (résultats déjà présentés sous d'autres formes dans les figures 6.1, 6.2). Cette famille  $\gamma_1$  a été calculée en imposant une épaisseur moyenne constante  $\langle h \rangle = 1$ . Les comparaisons avec la figure 12 de [18] indiquent un bon accord qualitatif. En particulier, les deux portions de courbe correspondant au cas où la perturbation la plus amplifiée est 3D ( $\alpha_z \neq 0$ ) sont reproduites. On retrouve l'augmentation sans à-coup du nombre d'onde transverse  $\alpha_z$  lors de la deuxième transition d'une instabilité 2D à une instabilité 3D puis la brusque transition inverse correspondant au maximum atteint par  $\alpha_z$ . De même, les taux d'amplification maximaux  $\sigma$  sont du même ordre compte-tenu du facteur 3 entre notre définition et celle de Chang *et al.* Toutefois, les nombres d'ondes transverses  $\alpha_z$  prédits par notre calcul sont supérieurs à ceux obtenus par Chang *et al.*. Il n'est pas facile de comprendre quelle est l'origine de l'écart entre les calculs effectués avec l'équation de couche limite (3.67) et le modèle au premier ordre (3.38, 4.18). En effet, cet écart peut autant provenir des termes inertiels négligés dans la formulation de (3.38, 4.18) que d'erreurs liés aux schémas numériques utilisés. Afin de tester notre schéma, la figure 6.4 représente le taux de croissance  $\Re(s)$  en fonction de  $\varsigma$  et de  $\alpha_z$  pour un point correspondant à la transition entre instabilités 3D et 2D. Le code numérique a été dans le cas présent capable de choisir la bonne valeur de  $s^*$  malgré la proximité des deux maximaux locaux.

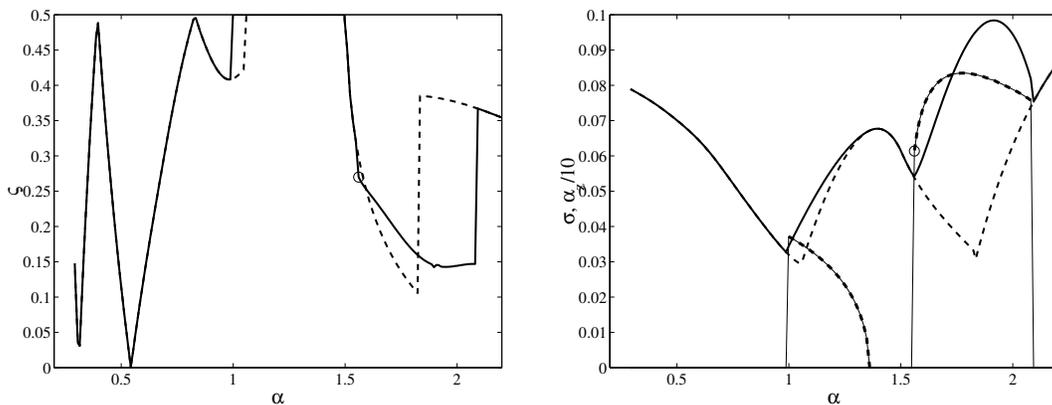


FIG. 6.3 – Caractéristiques des perturbations 2D (pointillés) et 3D (ligne continue) dominantes pour  $\delta = 12.15$ ,  $\zeta = 0$  et  $\eta = 0$  en fonction du nombre d'onde de la solution 2D stationnaire. Le nombre de modes de Fourier est  $M = 128$ . À gauche, décalage en fréquence  $\zeta$  ; à droite, taux de croissance maximal  $\sigma$  et nombre d'onde transverse  $\alpha_z$  correspondant (ligne continue doublée d'une ligne pointillée), ce-dernier a été multiplié d'un facteur d'échelle 10.

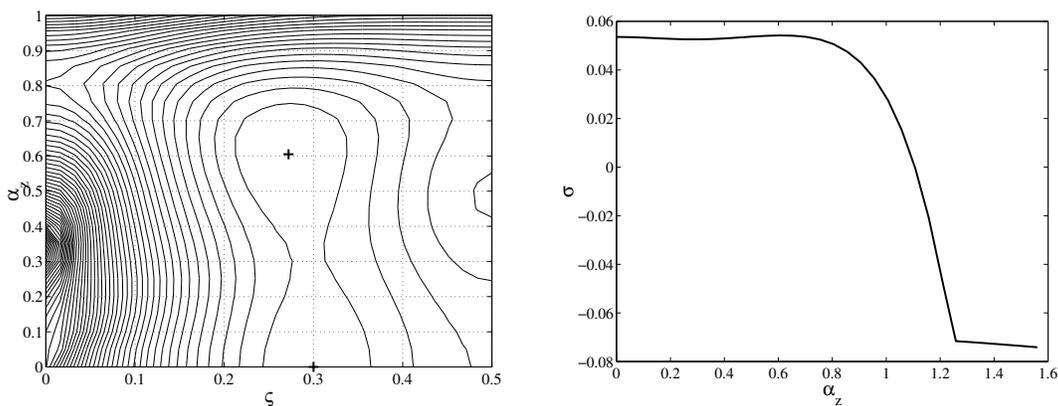


FIG. 6.4 – Comportement du taux de croissance  $\Re(s)$  en fonction de  $\zeta$  et d' $\alpha_z$  pour la solution 2D de nombre d'onde  $\alpha = 1.56022$  et les paramètres  $\delta = 12.15$ ,  $\zeta = 0$  et  $\eta = 0$  (point repéré par un cercle sur la figure 6.3). À gauche, lignes de niveaux ; à droite,  $\Re(s)$  fonction de  $\alpha_z$  pour  $\zeta = 0.269880$  correspondant au maximum  $\sigma$ .

Après l'analyse de stabilité d'une famille d'ondes lentes  $\gamma_1$ , passons à une famille d'ondes rapides  $\gamma_2$ . La figure 6.5 présente les résultats pour les paramètres  $\delta = 2.79$ ,  $\zeta = 0$  et  $\eta = 0$  correspondant aux figures 8 et 15 de [18]. Les calculs des perturbations 2D les plus amplifiées par Chang *et al.* indiquent l'existence de nombreux intervalles de stabilité s'accumulant en une valeur maximum du nombre d'onde, notée  $\alpha_f$  au-delà de laquelle les solutions sont instables vis-à-vis de perturbations 2D. On retrouve dans la figure 6.5 ce même comportement et une valeur de  $\alpha_f \approx 0.16$  proche de celle obtenue par Chang *et al.*. Notons que pour les ondes de plus grandes longueurs, le décalage en fréquence  $\zeta$  oscille entre ses valeurs extrêmes, 0 et 0.5 correspondant à une instabilité 2D synchrone ou sous-harmonique. La famille d'ondes  $\gamma_2$  est pour les paramètres choisis toujours instables vis-à-vis de perturbations 3D. Pour les plus faibles nombre d'ondes  $\alpha$ , le nombre d'onde transverse  $\alpha_z$  de la perturbation 3D la plus amplifiée semble converger en oscillant vers une valeur indépendante de  $\alpha$ . On peut en effet s'attendre à ce que la longueur d'onde transverse soit fonction de la taille des structures localisées, apparaissant au fur et à mesure que l'onde stationnaire 2D s'approche dans l'espace des phases d'une orbite homocline, et non de la distance séparant les structures localisées. Cette affirmation doit cependant être nuancée par deux observations. (i) L'instabilité 3D prédite est sous-harmonique et par conséquent implique deux ondes solitaires successives et non pas une seule. (ii) Le résultat du calcul devient sujet à caution aux faibles valeurs de  $\alpha$  car le nombre de modes sur lesquels la perturbation est discrétisée devient insuffisant (ici  $M = 128$ ). Les tracés du nombre d'onde transverse  $\alpha_z$  et du taux d'amplification maximal  $\sigma$  en fonction du nombre d'onde suivent les fluctuations de la vitesse  $c$  lorsque la période de l'onde stationnaire 2D augmente. Celles-ci correspondent à la présence d'une infinité de bifurcations nœud-col accompagnant la bifurcation homocline en présence de chaos homocline (cf. § 5.5.2 et réf. [54]).

Nous avons reproduit les calculs précédents mais cette fois ci en présence de dispersion d'origine visqueuse,  $\eta = 0.075$ , calculs qui correspondent alors aux simulations de Salamon *et al.* (cf. [103] fig. 17 et § 5.5.1, fig. 5.19). Les résultats sont rassemblés sur la figure 6.6. Rappelons que dans ce cas la famille de solutions  $\gamma_2$  part de la courbe de stabilité marginale et n'apparaît plus par doublement de période. Le nombre d'oscillations des courbes  $\sigma$  et  $\alpha_z$  a fortement diminué par rapport au calcul précédent jusqu'à totalement disparaître aux grandes longueurs d'ondes. En effet, au fur et à mesure que le nombre d'onde diminue et que l'onde 2D s'approche d'une orbite homocline, le rapport des parties réelles des valeurs propres du point fixe correspondant s'approche de  $-1$  et le critère d'apparition du chaos homocline n'est plus vérifié quand  $\alpha < 0.1612$  d'où la disparition de la suite de bifurcations nœud-col rencontrées précédemment. De plus, il existe alors un intervalle important centré autour de  $\alpha = 0.2$  d'ondes stables vis-à-vis de perturbations 2D.

## 6.4 Comparaisons avec l'expérience

Après nous être assuré de la convergence de notre code numérique et de son bon accord avec les résultats antérieurs, nous pouvons maintenant nous attaquer

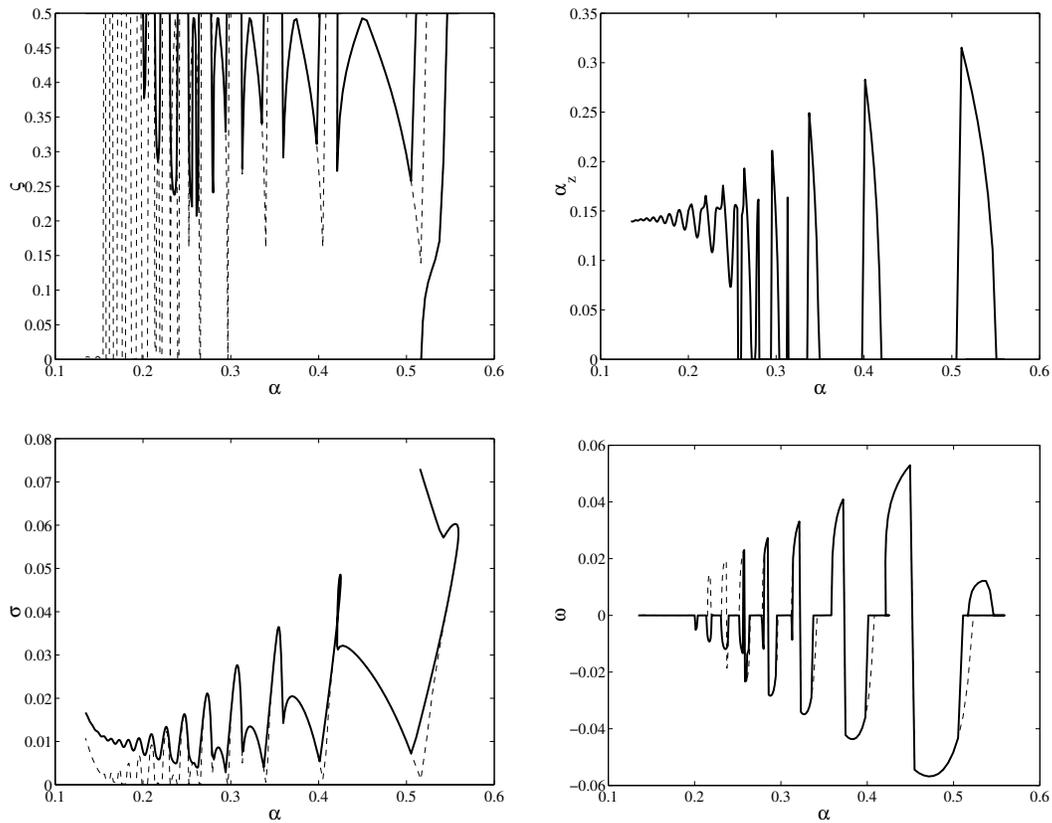


FIG. 6.5 – Caractéristiques des perturbations 2D (pointillés) et 3D (ligne continu) dominantes pour  $\delta = 2.79$ ,  $\zeta = 0$  et  $\eta = 0$  en fonction du nombre d'onde de la solution 2D stationnaire. Le nombre de modes  $M$  utilisés pour représenter la perturbation est égal au nombre de modes  $N$  pour représenter la solution de base avec  $M$  au plus égal à 128.

à l'étude de stabilité des ondes 2D stationnaires correspondant aux expériences de Liu *et al.* [82] et créées par un forçage périodique au bord amont. Nos modèles faisant explicitement apparaître le débit sous l'onde dans son référentiel  $q_0$ , notre schéma numérique est capable de construire les familles d'ondes à débit constant en déterminant l'inconnue  $q_0$  en même temps que la solution (cf. § 8.1.3). Nous avons construit la famille d'ondes lentes  $\gamma_1$  émanant de la courbe de stabilité marginale pour des paramètres correspondant à un mélange eau-glycérol ( $\nu = 2.3 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\rho = 1.07 \text{ g cm}^{-3}$  et  $\gamma = 67 \text{ N mm}^{-1}$ ) et un angle d'inclinaison  $\beta = 6.4^\circ$  soit un nombre de Kapitza de  $\Gamma = 2002.6$ . Le nombre de Reynolds  $R = 56$  est choisi relativement élevé. Les résultats sont rassemblés sur les figures 6.7 et 6.8. La stabilité marginale est obtenue pour une fréquence de coupure  $f_c \approx 30.46 \text{ Hz}$ . Les ondes de longueur de plus en plus grandes correspondent à une fréquence d'excitation de plus en plus basse de sorte que sur les diagrammes la famille  $\gamma_1$  évolue depuis la criticalité vers des structures de plus en plus localisées de droite à gauche. Ainsi, la longueur des ondes primaires 2D,  $\lambda_x$ , augmente rapidement avec l'abaissement de

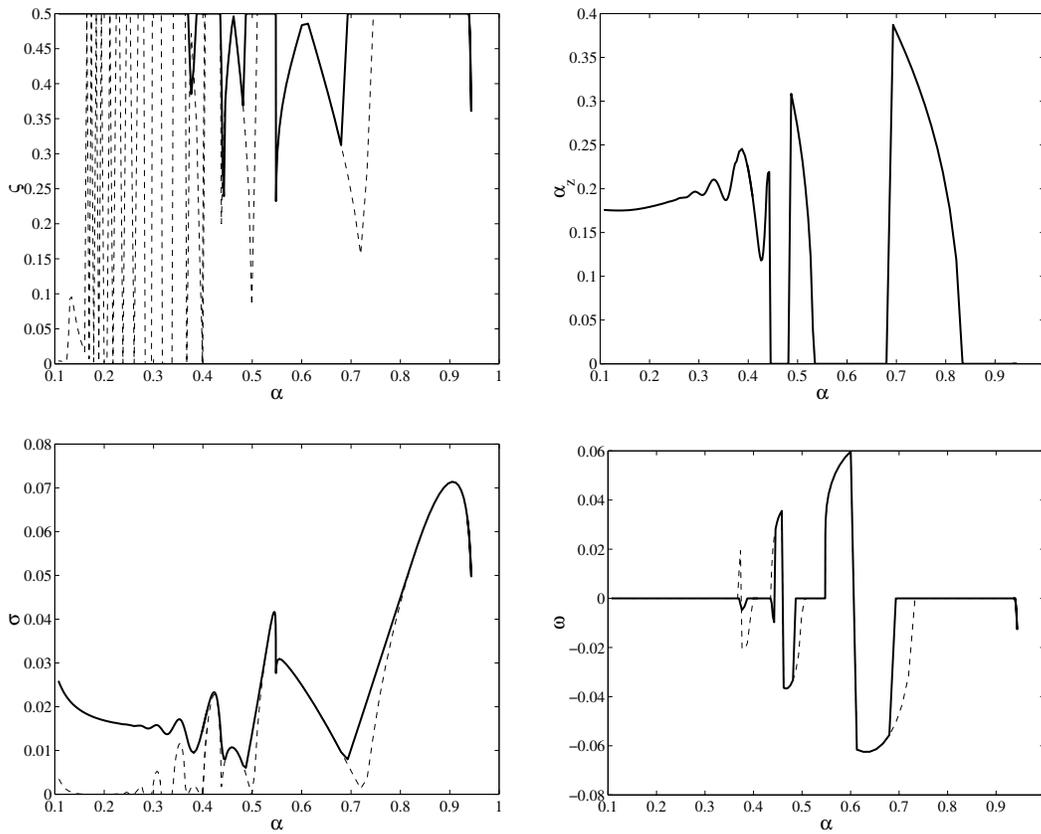


FIG. 6.6 – Caractéristiques des perturbations 2D (pointillés) et 3D (ligne continu) dominantes pour  $\delta = 2.79$ ,  $\zeta = 0$  et  $\eta = 0.075$  en fonction du nombre d'onde de la solution 2D stationnaire. Le nombre de modes  $M$  utilisés pour représenter la perturbation est égal au nombre de modes  $N$  pour représenter la solution de base avec  $M$  au plus égal à 128.

la fréquence. La comparaison des longueurs d'ondes primaires  $\lambda_x$  expérimentales et théoriques est excellente et les prédictions du modèle simplifié se trouvent presque toujours dans l'intervalle défini par les barres d'erreur (cf. fig. 6.8). Les ondes  $\gamma_1$  sont ici toujours instables vis-à-vis de perturbations 3D et l'instabilité dominante est sous-harmonique ( $\zeta = 1/2$ ) mis à part au voisinage immédiat de la courbe de stabilité marginale et aux plus basses fréquences où l'instabilité est 2D. Toujours à basse fréquence,  $\zeta$  s'approche de zéro et l'instabilité 2D correspondante est de type Eckhaus. À l'opposé de la longueur d'onde primaire  $\lambda_x$ , la longueur d'onde de l'instabilité transverse  $\lambda_z$  subit peu de variations. Bien que les barres d'erreur sur la longueur d'onde transverse soient beaucoup plus importantes que pour la longueur d'onde primaire, les prédictions du modèle simplifié sont bien moins convaincantes pour les ondes primaires que pour la perturbation. D'ailleurs notre calcul prédit à faible fréquence une instabilité 2D tandis que l'expérience indique une instabilité 3D. Plus grave encore, lorsque le modèle prédit une instabilité 3D, celle-ci est sous-

harmonique et devrait conduire à des motifs en chevrons, ce qui est en profond désaccord avec les observations expérimentales de Liu *et al.* qui ne décrivent cette instabilité qu'au voisinage de la courbe de stabilité marginale où justement elle n'est pas dominante!

Les mêmes constatations peuvent être faites à partir de la figure 6.9 présentant le diagramme de stabilité secondaire de la famille  $\gamma_1$  lorsqu'on varie le nombre de Reynolds pour une fréquence de forçage fixée à 9 Hz. En effet dans ce dernier cas, la perturbation 3D la plus amplifiée correspond toujours à un mode sous-harmonique. De plus, celle-ci disparaît à faible nombre de Reynolds, le nombre d'onde transverse tendant vers zéro ( $\lambda_z \rightarrow \infty$ ). Pour un nombre de Reynolds inférieur à  $R \approx 57$ , la perturbation la plus amplifiée est 2D. Tout ceci est en désaccord avec les résultats expérimentaux mettant en évidence une instabilité 3D synchrone pour ces paramètres. Bien qu'ici les prédictions de la longueur d'onde transverse  $\lambda_z$  soient en meilleur accord avec les données expérimentales, il est troublant de constater que le modèle prédit très correctement la longueur d'onde primaire  $\lambda_x$  et non  $\lambda_z$ .

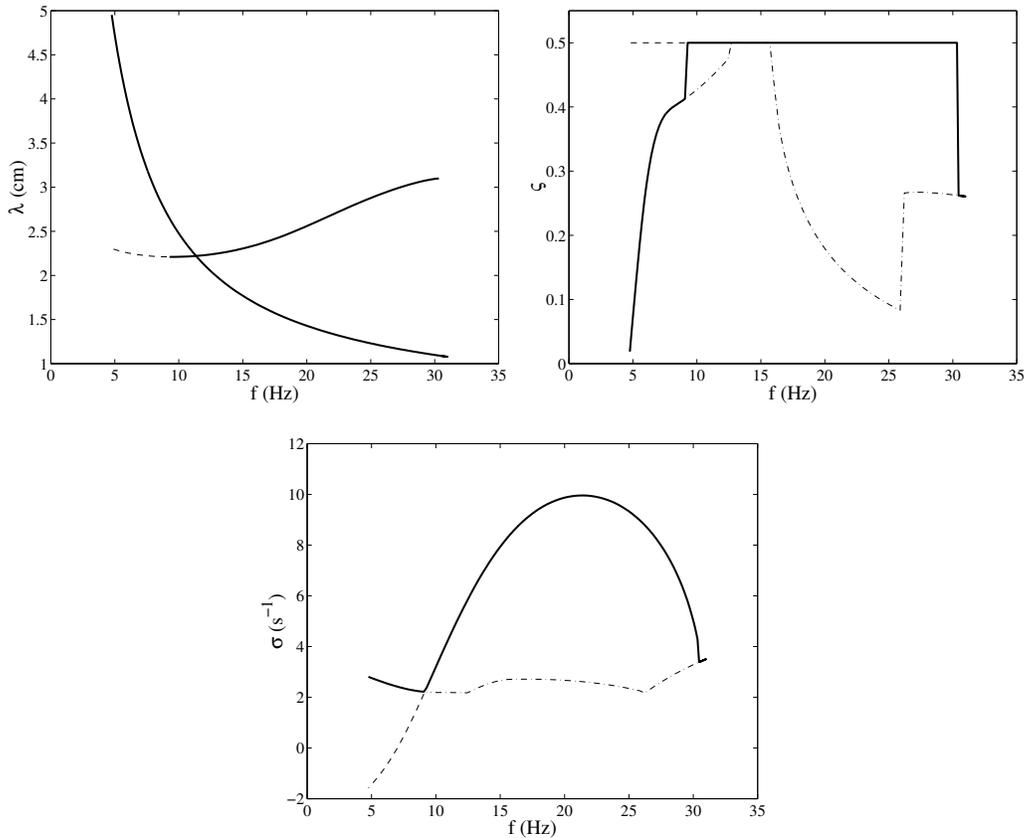


FIG. 6.7 – Caractéristiques des perturbations 2D (trait mixte) et 3D correspondant à un maximum global (ligne continue) ou local (pointillée) du taux de croissance pour la famille d'ondes  $\gamma_1$  à  $\langle q \rangle$  fixé correspondant aux expériences de Liu *et al.* [82] ( $\beta = 6.4^\circ$ ,  $R = 56$  et  $\Gamma = 2002.6$ ).

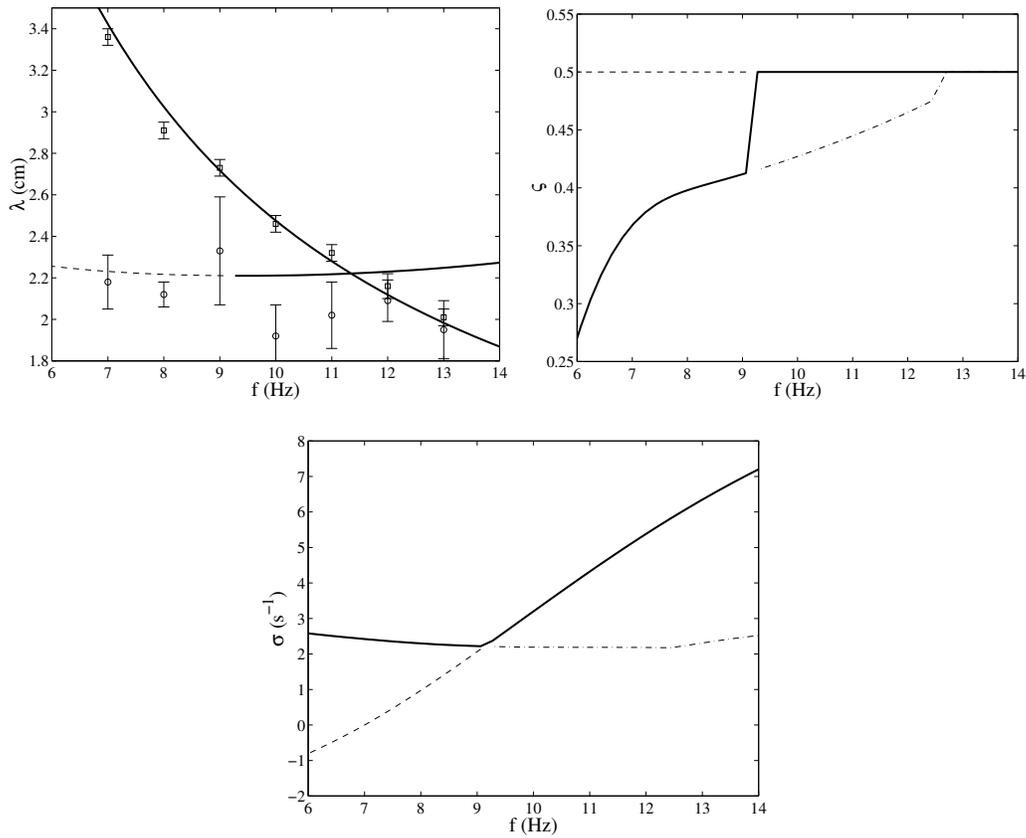


FIG. 6.8 – Comparaison avec l'expérience des résultats de la fig. 6.7. Les carrés sont les mesures dans le sens de l'écoulement et les cercles dans la direction transverse.

Il est en effet possible qu'il manque un ou plusieurs ingrédients essentiels à l'analyse de stabilité exposée ici pour rendre correctement compte des expériences de Liu *et al.* Les calculs précédents supposent des ondes primaires parallèles, c'est-à-dire respectant la symétrie par translation le long de la direction transverse, et un domaine infini transversalement. Or ces hypothèses ne correspondent pas à la réalité expérimentale. Les ondes 2D ont une courbure transverse non-négligeable et régulière suivant la largeur du plan incliné qui est évidemment de dimensions finies (cf. fig. 1.4). Les effets de bord et de courbure peuvent avoir un effet important sur les mécanismes de l'instabilité secondaire. Dans le cas de la propagation des fronts de flammes, il est connu que la courbure des fronts a un effet stabilisant significatif en permettant l'advection vers les bords du front des perturbations infinitésimales [67]. Bien que la stabilité des fronts de flamme ait des similitudes avec l'écoulement de films le long d'un plan incliné, l'analogie entre les deux problèmes s'arrête probablement là.<sup>3</sup> Toutefois la courbure des ondes nous semble un bon candidat pour

<sup>3</sup>Bien que l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (KS) apparaisse dans les deux situations, leurs géométries sont différentes car pour l'une, KS décrit la propagation du front dans le sens de l'écoulement, et pour l'autre dans la direction transverse.

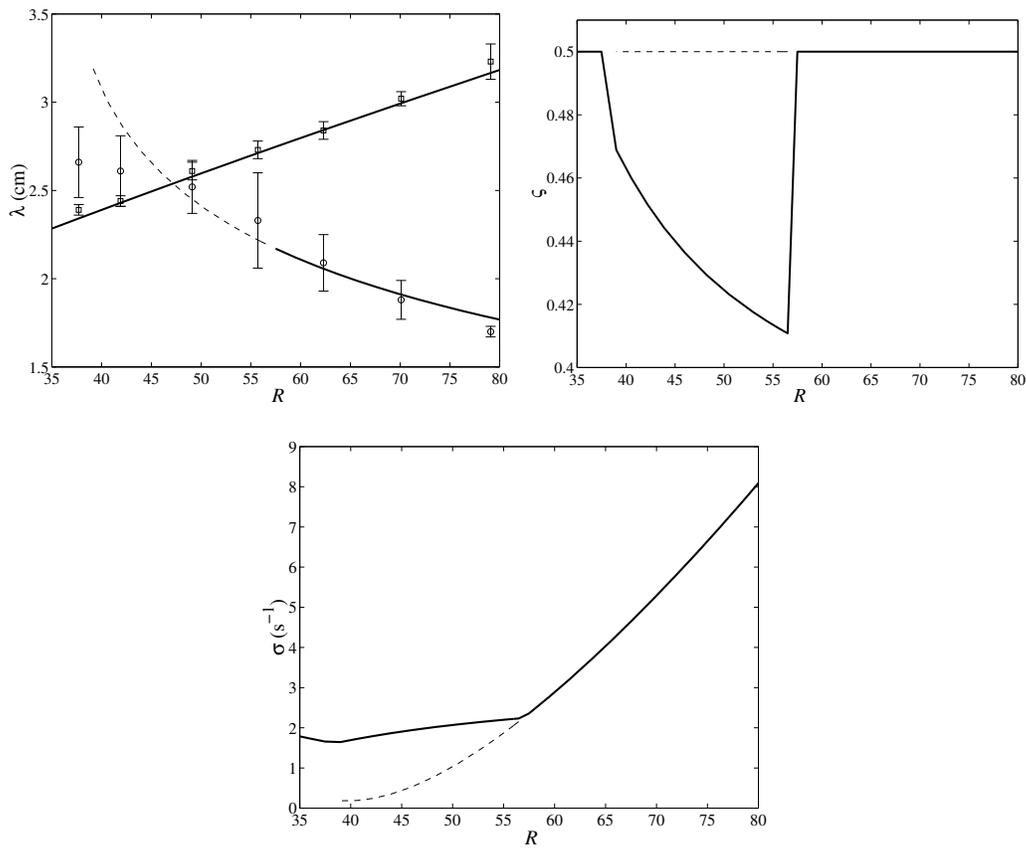


FIG. 6.9 – Caractéristiques des perturbations correspondant à un maximum global (ligne continue) ou local (pointillée) du taux de croissance pour la famille d'ondes  $\gamma_1$  à  $\langle q \rangle$  fixé correspondant aux expériences de Liu *et al.* ( $\beta = 6.4^\circ$ ,  $f = 9$  Hz et  $\Gamma = 2002.6$ ). Les carrés sont les mesures expérimentales dans le sens de l'écoulement et les cercles dans la direction transverse.

expliquer les écarts entre analyse théorique et résultats expérimentaux.

# Chapitre 7

## Évolution spatiale d'ondes forcées

Dans ce chapitre, nous allons décrire quelques simulations du développement en espace des ondes générées par une perturbation à l'entrée de l'écoulement, ceci afin de valider le modèle au second ordre simplifié (4.65–4.66). Faute de temps, les simulations du modèle complet au second ordre (3.38, 4.59–4.61) ont été reportées à une étude ultérieure. Le § 7.1 fait le lien entre la stabilité des points fixes dans l'espace des phases et l'analyse de stabilité linéaire du film, puis compare les résultats expérimentaux et théoriques de la réponse du film à une excitation infinitésimale en amont de l'écoulement. Le § 7.2 compare les résultats du modèle aux expériences et aux simulations numériques directes. Enfin au § 7.3, nous présenterons la simulation de la réponse du film à un bruit.

### 7.1 Analyse de stabilité linéaire

Il y a une étroite relation entre l'analyse de stabilité linéaire de l'écoulement uniforme de Nusselt et la stabilité du point fixe  $\mathbf{U}_I$  dans l'espace des phases (cf. § 5.2). En effet les transformations formelles  $\partial_x \mapsto i\alpha$  et  $\partial_t \mapsto -i\omega$  sont équivalentes à la succession  $\partial_x \mapsto \partial_\xi$ ,  $\partial_t \mapsto -c\partial_\xi$  et  $\partial_\xi \mapsto \lambda$  ou  $c$  et  $\lambda$  sont a priori complexes. L'équation de dispersion du modèle simplifiée est alors obtenue en appliquant les changements  $\lambda \mapsto i\alpha$  et  $c \mapsto \omega/\alpha$  à (5.38) préalablement multipliée par  $\alpha/3$  :

$$\alpha + i \left( \frac{2}{35}\delta - \frac{1}{3}\zeta \right) \alpha^2 + \frac{4}{5}\eta\alpha^3 - i\frac{1}{3}\alpha^4 - \left( 1 + i\frac{34}{105}\delta\alpha + \frac{9}{5}\eta\alpha^2 \right) \omega + i\frac{2}{5}\delta\omega^2 = 0, \quad (7.1)$$

puis en faisant les transformations  $\alpha \mapsto \kappa\alpha$  et  $\omega \mapsto \kappa\omega$  pour revenir aux notations traditionnelles à l'aide de la définition de  $\delta$  et de (5.19–5.21)

$$\alpha + i \left( \frac{6}{35}R - \frac{1}{3}B \right) \alpha^2 + \frac{4}{5}\alpha^3 - i\frac{1}{3}W\alpha^4 - \left( 1 + i\frac{34}{35}R\alpha + \frac{9}{5}\alpha^2 \right) \omega + i\frac{6}{5}R\omega^2 = 0. \quad (7.2)$$

La courbe de stabilité marginale, nombre d'onde critique  $\alpha_c$  en fonction du nombre de Reynolds  $R$ , correspond alors au lieu de la bifurcation de Hopf dans le plan  $(\delta, \Im(\lambda))$  et a donc le même comportement (cf. fig. 5.2). Ainsi, si le nombre de Weber augmente, soit  $\eta = W^{-2/3}$  diminue, la courbe de stabilité marginale va tendre vers la prédiction du modèle au premier ordre identique à (2.77).

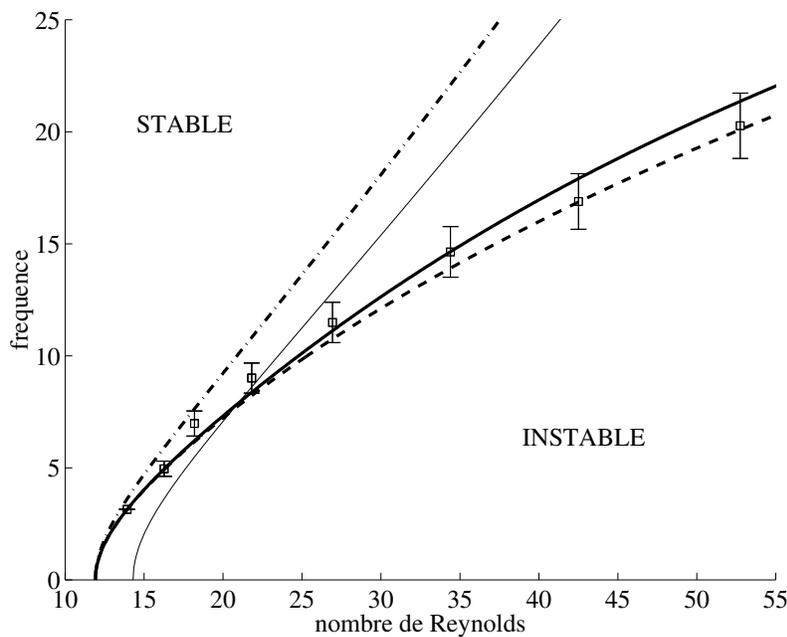


FIG. 7.1 – Fréquence de coupure  $f_c$  (Hz) en fonction du nombre de Reynolds. Le fluide est un mélange eau-glycérol et le plan est incliné d'un angle  $\beta = 4^\circ$  ( $\Gamma = 2341$  et  $R_c = 11.9$ ). Les carrés sont les mesures expérimentales de Liu *et al.* avec leur barre d'erreur. (cf. [82] fig. 6 et fig. 1.3); la courbe continue épaisse correspond au modèle au second ordre complet; les pointillés sont les résultats du modèle simplifié; le trait mixte correspond au modèle au premier ordre et le trait mince au modèle de Shkadov.

La figure 7.1 décrit la réponse spatiale linéaire du film à un forçage en amont d'amplitude faible et de fréquence  $f$  en fonction du nombre de Reynolds pour un plan incliné d'un angle  $\beta = 4^\circ$  et un mélange eau-glycérol. Dans la région stable, l'excitation au bord amont est amortie et le film demeure uniforme. Au contraire, dans la région instable, la perturbation croît et il se développe en espace des ondes périodiques à la fréquence de forçage<sup>1</sup>. La limite entre ces deux régions définit la fréquence de coupure  $f_c$  correspondant à la courbe de stabilité marginale. On a représenté les prédictions des modèles de Shkadov (3.61), au premier ordre (3.38, 4.18), au second ordre complet (3.38, 4.59–4.61) et simplifié (4.65–4.66). Les points correspondent aux données expérimentales de Liu *et al.* [82]. Comme prévu par la théorie asymptotique (cf. § 3.4), le modèle de Shkadov prédit une valeur trop élevée du seuil d'instabilité tandis que le modèle au premier ordre, ne tenant pas compte des effets visqueux du second ordre, s'écarte rapidement de la courbe expérimentale. À l'opposé, les prédictions des modèles au second ordre complet ou simplifié sont en très bon accord avec les observations de Liu *et al.* puisque les courbes correspondantes restent dans les limites fixées par les barres d'erreur.

<sup>1</sup>Cependant rien n'interdit en aval une instabilité secondaire de briser cette périodicité. Par exemple, une instabilité sous-harmonique divise la fréquence par deux.

## 7.2 Ondes forcées périodiquement

Les modèles au second ordre reproduisent donc fidèlement l'instabilité primaire au stade linéaire. Afin de vérifier cette affirmation au stade non-linéaire pour les ondes parallèles (2D) saturées, nous avons écrit un code appliquant un schéma aux différences finies au modèle simplifié (4.65–4.66) et dont les grandes lignes sont exposées au § 8.2. Les figures 7.2 et 7.3 comparent les résultats des simulations

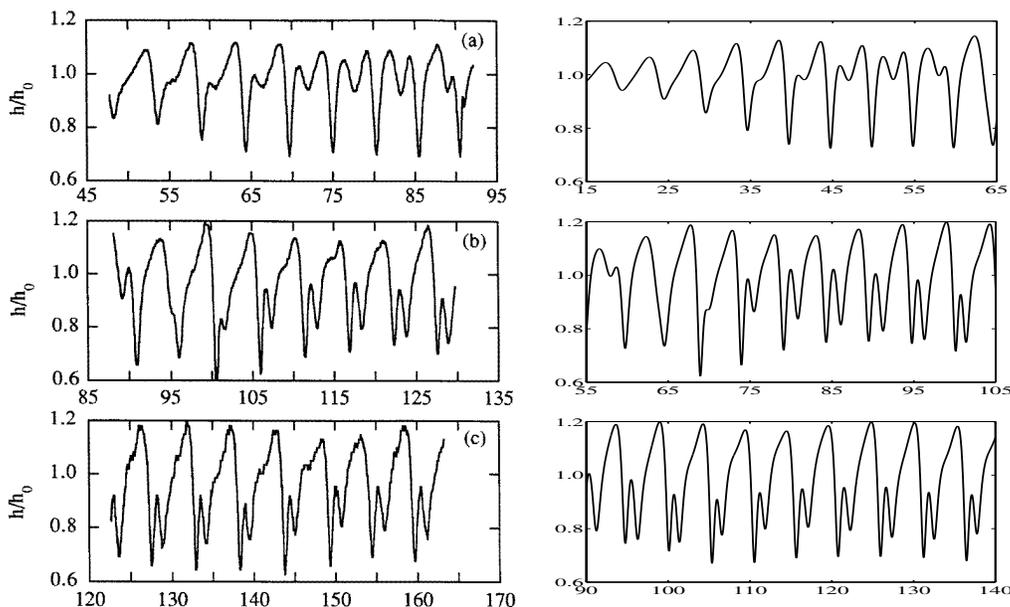


FIG. 7.2 – Comparaison entre les expériences (à gauche) et les simulations du modèle simplifié (4.65–4.66) (à droite). Le plan est incliné d'un angle  $\beta = 6.4^\circ$  par rapport à l'horizontale, le fluide est un mélange eau-glycérol ( $\Gamma = 524.4$ ) et  $R = 19.33$  [81]. Trois instantanés de l'épaisseur du film en trois positions différentes sur le plan depuis l'entrée de l'écoulement (en haut) jusqu'en aval (en bas) sont représentés. La fréquence de forçage de 4.5 Hz. Les échelles sont identiques tant pour les graphes expérimentaux que numériques (ici  $h_0 \equiv h_N$ ).

numériques et de l'expérience [81]. Le pas d'espace a été choisi égal à  $\Delta x = 0.02\kappa h_N$ . Le forçage au bord amont est effectué sur le débit  $q$  en deux points hors domaine d'intégration,  $x_0 = 0$  et  $x_{-1} = -\Delta x$ , tel que

$$q(x_{-1}, t) = q(x_0, t) = q_N (1 + A \cos(\omega t)) . \quad (7.3)$$

L'amplitude du forçage est ici  $A = 0.03$ . À la fréquence  $f = 4.5$  Hz (fig. 7.2), le train d'onde sature en même temps qu'il se forme une arche secondaire à l'arrière de l'onde qui ensuite la dépasse puis ajuste sa vitesse de phase avec l'onde principale. Des modulations de grandes longueurs sont alors visibles sur le train d'onde qui évolue ensuite peu en aval. Le modèle simplifié reproduit fidèlement l'amplitude et l'allure des ondes. En particulier à la fois la modulation de l'onde et le mécanisme

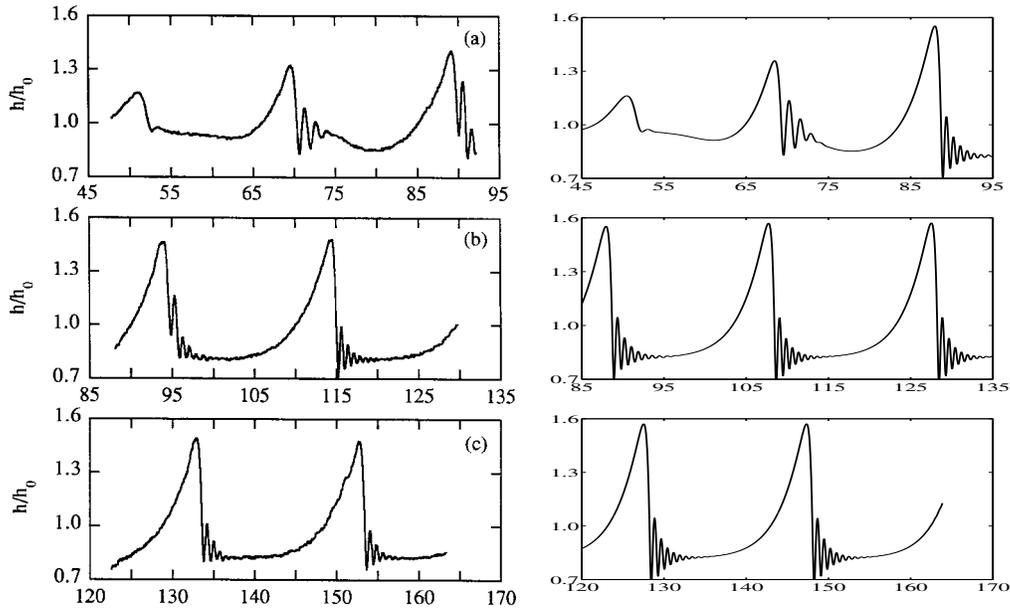


FIG. 7.3 – Comparaison entre les expériences (à gauche) et les simulations du modèle simplifié (à droite). pour un forçage à basse fréquence (1.5 Hz). Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 7.2 ( $\beta = 6.4^\circ$ ,  $\Gamma = 524.4$  et  $R = 19.33$ ).

d'accrochage de phase entre l'onde primaire et son harmonique sont visibles sur la simulation. À plus faible fréquence  $f = 1.5$  Hz (fig. 7.3), il se forme directement des trains d'ondes stationnaires quasi-solitaires. Ici encore, la simulation numérique donne de bons résultats. À la fois l'amplitude et la longueur des ondes se comparent favorablement. Toutefois, le modèle prédit des amplitudes légèrement plus importantes ainsi que des oscillations capillaires précédant chaque onde solitaire plus marquées. Il est possible que cet écart soit imputable aux techniques de mesure expérimentales qui moyennent les profils des ondes sur plusieurs images et écrètent les zones où les fluctuations, et par conséquent les gradients, sont les plus forts.

Ramaswamy *et al.* [96] ont également simulé les expériences de Liu & Gollub pour les mêmes paramètres directement à partir des équations de Navier–Stokes. À fin de comparaison, présentons les diagrammes spatio-temporels tirés de nos simulations à l'aide du modèle simplifié dans les mêmes conditions que Ramaswamy *et al.* Le parallèle entre la figure 7.4 et la figure 16 de [96] est très satisfaisant. La simulation à amplitude de forçage  $A = 0.03$  sur le débit est en bon accord avec les calculs de Ramaswamy *et al.* En particulier les longueurs des zones transitoires conduisant à la formation du train d'ondes modulé sont comparables. Nos calculs reproduisent aussi l'onde en forme de trou se formant à l'arrière de l'onde solitaire initialement formée et qui est ensuite absorbée par le transitoire. La figure 7.4 présente également les résultats de la simulation de la réponse du film à un forçage sur le débit à une amplitude plus importante  $A = 0.15$ . Notons que si les trains d'ondes modulés formés en aval pour un forçage d'amplitude  $A = 0.03$  ou  $A = 0.15$  sont identiques, la portion du plan correspondant à l'évolution du film vers cet état diminue avec l'augmentation de l'amplitude  $A$  et surtout fait apparaître une dynamique très différente selon le cas.

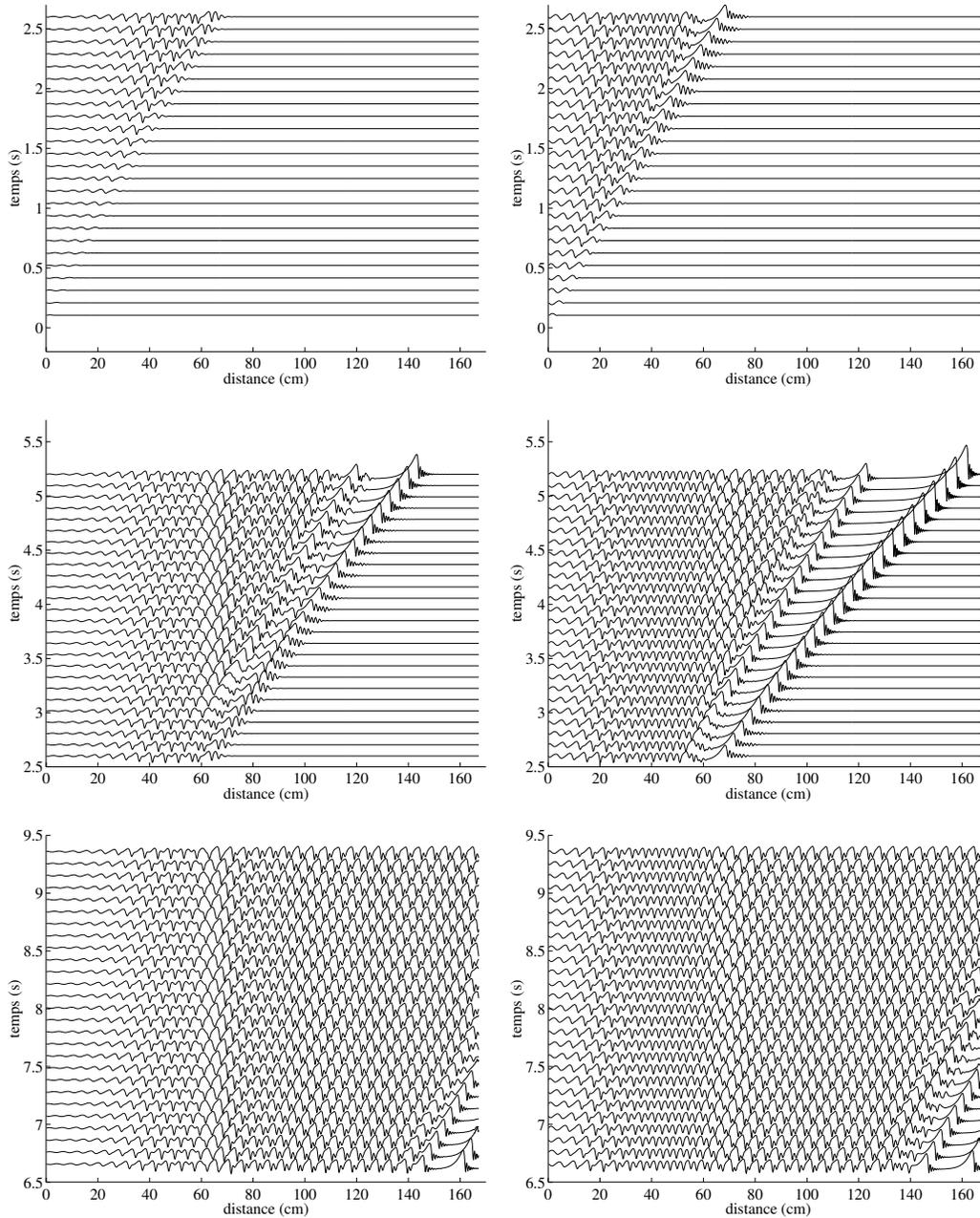


FIG. 7.4 – Diagramme spatio-temporel obtenu à l'aide du modèle simplifié (4.65–4.66) à comparer aux simulations numériques de Ramaswamy *et al.* (cf fig. 16 réf. [96]) et aux expériences de Liu & Gollub [81]. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 7.2 ( $\beta = 6.4^\circ$ ,  $\Gamma = 524.4$  et  $R = 19.33$ ). Le débit en amont  $q(0, t)$  est forcé périodiquement. L'état de la surface libre est reproduit à intervalles réguliers de 0.104 s. À gauche, amplitude de forçage  $A = 0.03$ ; à droite,  $A = 0.15$ .

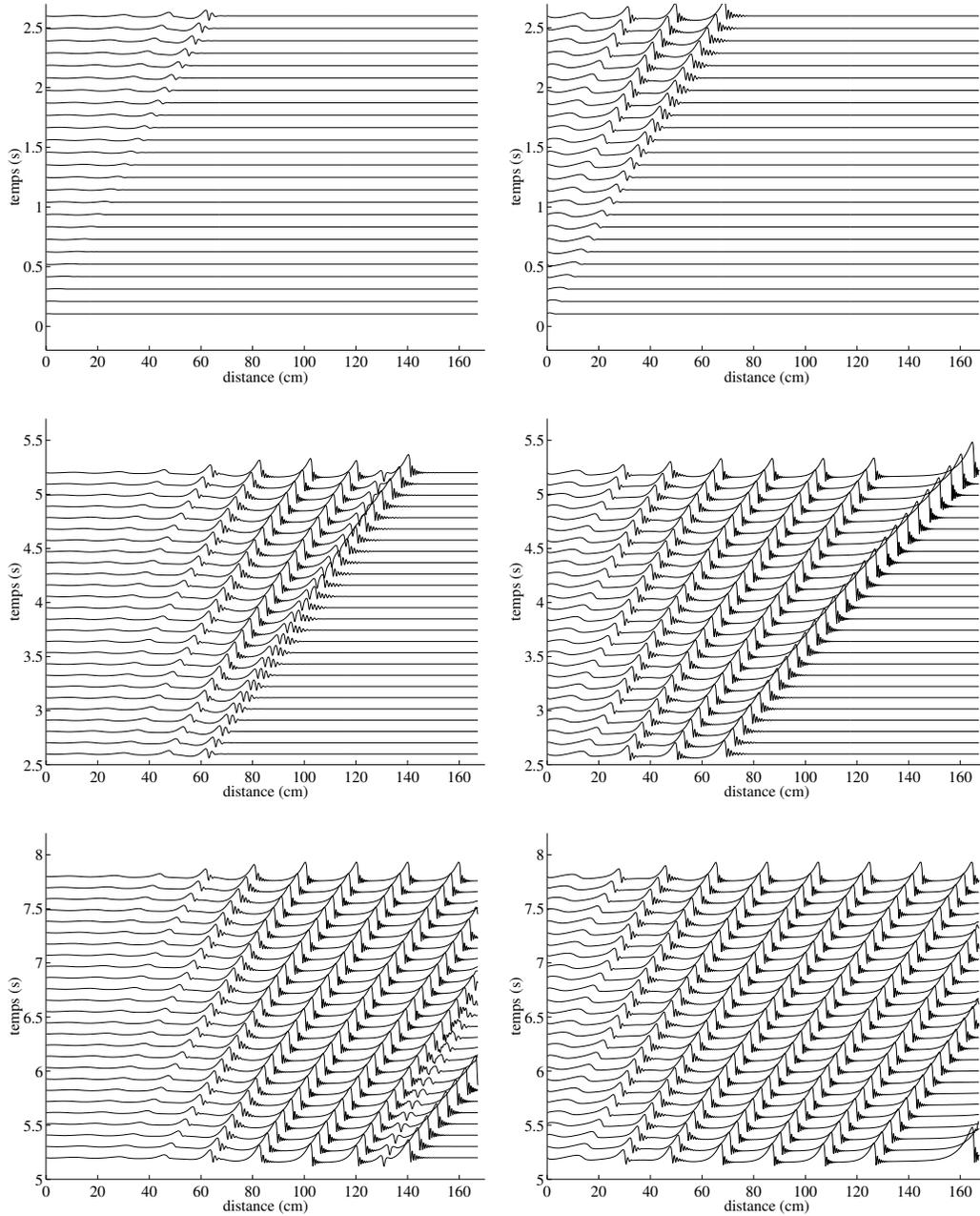


FIG. 7.5 – Diagramme spatio-temporel obtenu à l'aide du modèle simplifié (4.65–4.66) à comparer aux simulations numériques de Ramaswamy *et al.* (cf fig. 14 réf. [96]) et aux expériences de Liu & Gollub [81]. Le forçage amont se fait sur le débit. Fréquence  $f = 1.5$  Hz, paramètres et amplitudes de forçage identiques à ceux de la figure 7.4 ( $\beta = 6.4^\circ$ ,  $\Gamma = 524.4$ ,  $R = 19.33$ ; à gauche  $A = 0.03$  et à droite  $A = 0.15$ ).

On observe en effet que si  $A = 0.15$ , la croissance du pic secondaire est plus rapide et il se forme sur environ 20 cm un train d'ondes de fréquence  $\approx 2f$  se déstabilisant en aval. Le transitoire dépend donc plus fortement de l'amplitude du forçage que de la façon de forcer sur le débit (calculs présentés ici) ou sur l'épaisseur du film [96]. Ce constat est encore valable pour la simulation de trains d'ondes quasi-solitaires formés à plus basse fréquence comme le démontre la figure 7.5. Notre calcul à amplitude de forçage  $A = 0.15$  se compare alors fort bien avec la simulation numérique directe. Toutefois, ici encore le modèle simplifié prédit une amplitude plus marquée pour les oscillations capillaires précédant chaque onde. Cependant, cet écart n'est pas réellement significatif car les résultats des simulations numériques directes sont très délicats à interpréter lorsque les gradients deviennent importants. Notons au passage l'onde en forme de trou rayonnant de l'arrière de l'onde solitaire de grande amplitude initiale, très visible sur le diagramme spatio-temporel pour  $A = 0.03$ .

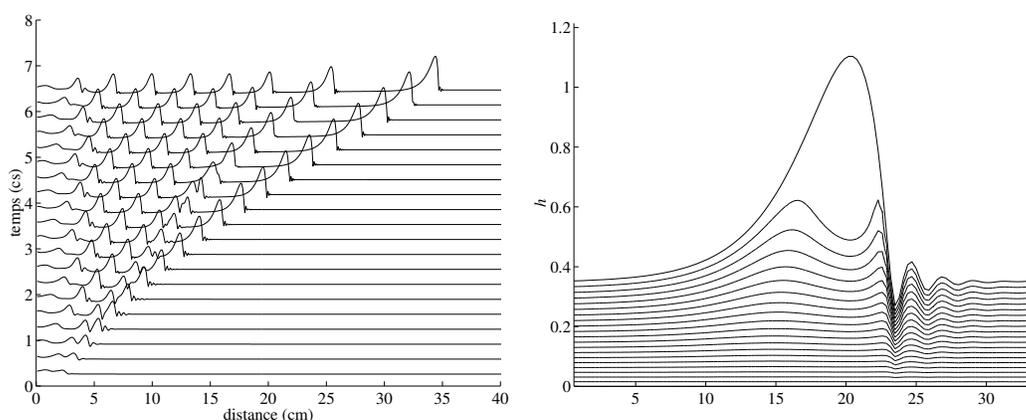


FIG. 7.6 – Simulation d'un film vertical périodiquement forcé correspondant à un expérience d'Alekseenko *et al.* à l'aide du modèle simplifié [1] ( $f = 12.8$  Hz,  $\nu = 7.2 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s et  $\gamma/\rho = 57.6 \cdot 10^{-6}$  m<sup>3</sup>/s<sup>2</sup>, soit  $R = 12.4$  et  $\Gamma = 193.6$ ). La condition initiale est un ressaut hydraulique  $h(0, 0) = h_N$  et  $h(L, 0) = 0.6 h_N$ . À gauche, diagramme spatio-temporel et à droite lignes de courant dans le référentiel de l'onde (échelles graduées en mm). Notez la zone de recirculation de grande taille (à comparer avec fig. 6 de ch. 10).

Dans chaque cas (cf. fig. 7.4 et 7.5), il se forme en avant du paquet d'onde une onde quasi-solitaire de grande amplitude et de vitesse plus élevée se détachant rapidement du train d'ondes en laissant derrière elle une portion de film presque uniforme. L'étude des ondes stationnaires au ch. 5 indique que, pour un jeu de paramètres donnés, il existe une seule orbite homocline principale en forme de bosse rejoignant à l'infini amont et aval la solution uniforme d'épaisseur  $h_N$ , notée  $\mathcal{S}$ . Ainsi, la vitesse et l'amplitude de l'onde solitaire se détachant du bord aval du train d'ondes tend vers  $\mathcal{S}$  et ne dépend que de l'épaisseur du film au bord aval, le nombre de Reynolds réduit  $\delta$  correspondant étant fixé par les paramètres et le débit  $q_N$  au bord amont. En jouant sur la symétrie (5.34) existant entre ondes solitaires

de différentes épaisseur de substrat  $h(x \rightarrow \pm\infty)$ , on peut faire correspondre à une onde solitaire d'épaisseur au bord aval  $h^* < h_N$  et de nombre de Reynolds réduit  $\delta$  une onde solitaire d'épaisseur de substrat  $h_N$  et de nombre de Reynolds réduit  $\delta^* = \delta(h^*/h_N)^{11/3} < \delta$  et par conséquent d'amplitude et de vitesse moins importante que  $\mathcal{S}$  (cf. fig 5.11). Or ces ondes de grande amplitude et de grande vitesse sont délicates et coûteuses à reproduire numériquement car il peut se produire à leur crête des instabilités numériques (cf. § 8.2). Il est donc préférable d'imposer une condition initiale en forme de ressaut hydraulique à la place d'un film uniforme afin d'évacuer plus facilement le transitoire initial. La figure 7.6 en est un exemple correspondant aux conditions des expériences d'Alekseenko *et al.* [1]. La longueur des ondes quasi-solitaires formées est alors  $\lambda = 33.4$  mm à comparer avec  $\lambda = 36$  mm mesurée par Alekseenko *et al.* Le profil de l'onde est alors proche de celui prédit par le modèle intégral-collocation (éqs. (78–80) et fig. 6, ch. 10) et se compare favorablement aux croquis de [1].

Ce dernier calcul illustre également l'absorption d'une onde secondaire par une onde d'amplitude plus importante visible sur la figure 7.6. Afin de mettre cet effet encore plus en évidence, nous avons simulé un film forcé périodiquement à basse fréquence et pour un jeu de paramètres correspondant aux expériences de Liu *et al.* Puis une brutale perturbation a créé en amont une onde de grande amplitude balayant le train d'ondes quasi-solitaires la précédant (cf. fig. 7.7). Ce même calcul permet aussi d'illustrer la nature convective de l'écoulement. Après cette perturbation de grande amplitude le forçage a été supprimé au bord amont de sorte que le film redevient uniforme et que le bord amont du paquet d'ondes est advecté vers l'aval.

### 7.3 Forçage aléatoire

Finissons ce chapitre par un exemple de dynamique forcée aléatoirement (cf. fig. 7.8). Le forçage imposé à l'entrée de l'écoulement est alors de la forme [27] :

$$\begin{aligned} q(0, t) &= q_N (1 + F(t)) , \\ F(t) &= A \sum_{k=1}^M \cos \left( \frac{k}{M} \omega_* t - \theta_k \right) , \end{aligned} \quad (7.4)$$

où  $\omega_*$  est un multiple de la pulsation de coupure  $\omega_c = 2\pi f_c$  soit  $\omega_* = K \omega_c$  avec  $K$  entier. Les nombres  $\theta_k$  forment une suite de phases aléatoires. Le bruit obtenu contient alors tous les modes de Fourier désirés sur une plage suffisamment grande. La simulation de la figure 7.8 correspond au choix  $K = 3$  et  $M = 1024$  de sorte que le forçage obtenu ne soit caractérisé que par son amplitude  $A = 3 \cdot 10^{-5}$ .

Une première phase de sélection linéaire fait apparaître préférentiellement le nombre d'onde de taux de croissance spatial maximum. Puis les ondes saturées d'amplitudes et de vitesses les plus grandes absorbent celles qui les précèdent pour former une suite d'ondes solitaires séparées par des portions de film uniforme d'épaisseur variable. Ces ondes continuent à interagir en aval conduisant à leur répulsion (événement (a)) ou leur appariement (événement (b)) de sorte que la

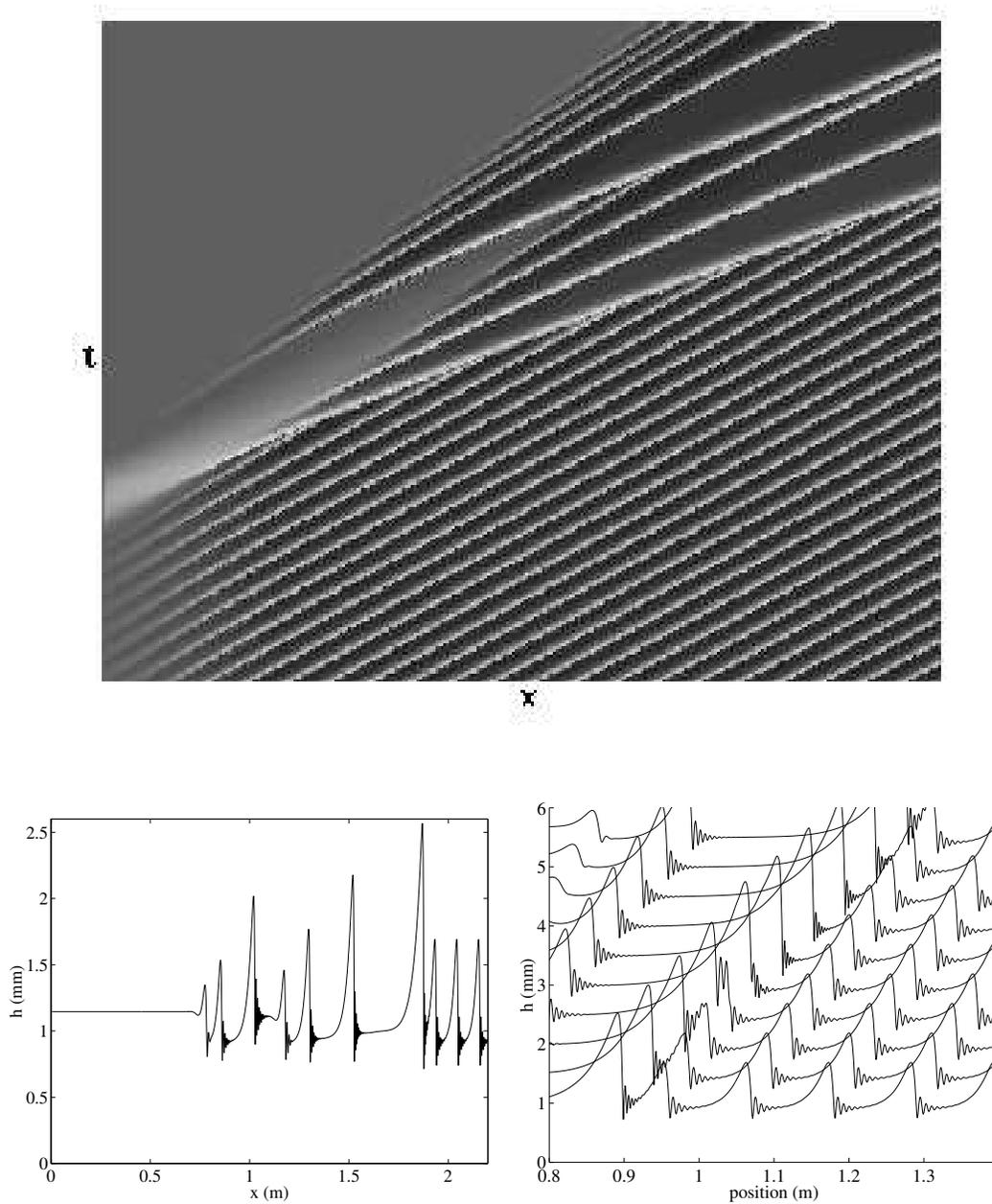


FIG. 7.7 – Simulation de l'absorption d'un train d'ondes par une onde de grande amplitude (cf. fig. 6, réf. [89]) Les paramètres sont  $R = 26$ ,  $\beta = 8^\circ$ ,  $W = 35$  et  $\nu = 6,28$  cS. Après avoir forcé le film périodiquement ( $f = 2,5$  Hz), une brusque perturbation est créée et introduite en amont puis tout forçage est stoppé. La durée simulée est 12 s et la longueur du plan réel correspondant est 2,2 m. Au-dessus, diagramme spatio-temporel; au dessous à gauche, instantané de l'épaisseur  $h$  du film au temps  $t = 8$  s, à droite, absorption d'une onde.

fréquence de passage de structures localisées en un point  $x$  du plan diminue. Plus en aval cette fréquence semble constante, de même que l'amplitude et la vitesse moyenne des ondes ne dépendent plus de la position.

Ces observations reproduisent qualitativement les résultats expérimentaux de Stainthorp & Allen [110] et de Alekseenko *et al.* [2] et les simulations numériques de Chang *et al.* [28, 27] à l'aide de l'équation de couche limite (3.9) et du modèle de Shkadov (3.61). Ainsi, la dynamique aléatoire du film s'écoulant le long d'un plan incliné est caractérisée par la présence de *structures cohérentes*, ici des ondes solitaires, interagissant les unes avec les autres.

Kawahara [69] a montré que la dispersion joue un rôle essentiel dans la formation de structures cohérentes. En effet, les non-linéarités et la dispersion permettent le transfert de l'énergie pompée par l'instabilité vers les petites échelles où elle est dissipée. Les simulations numériques de (1.9) avec conditions aux frontières périodiques révèlent une transition entre le régime de turbulence de phase rencontrée avec Kuramoto-Sivinsky et un régime permanent d'ondes solitaires en présence de dispersion. En cas de forte dispersion, les structures localisées se repoussent mutuellement. Si la dispersion est modérée, il se forme des états liés fixant la distance séparant deux ondes consécutives. Kawahara & Toh [70] ont fait le lien entre l'apparition de ces états liés et la structure des ondes solitaires loin de leur maximum d'amplitude, c.-à-d. le comportement dans l'espace des phases de la trajectoire homocline correspondante au voisinage du point fixe. Ainsi la transition entre comportement répulsif et états liés correspond au passage d'un point fixe de type col à un point fixe de type col-spiral. Elphick *et al.* [43, 44] et Balmforth *et al.* [4, 5] ont construit une théorie d'interaction entre structures cohérentes à l'aide de (1.9) permettant de rendre compte de la position de chaque onde en terme de systèmes dynamiques dont la dimension est égale au nombre de structures considérées. Un élément essentiel de cette théorie est la présence de deux valeurs propres nulles de l'opérateur linéarisé autour du profil de l'onde. L'une correspond à l'invariance par translation  $(X, T, \mu) \mapsto (X + \rho, T, \mu)$  et l'autre à l'invariance galiléenne  $(X, T, \mu) \mapsto (X + UT, T, \mu + U)$ .

Toutefois, ces théories reposent sur le postulat d'interaction faible entre structures identiques. Si ce postulat est valide en cas de conditions aux frontières périodiques, où les amplitudes et les vitesses des ondes finissent par s'ajuster, il n'en est plus de même lorsqu'on s'intéresse au développement spatial d'un train d'ondes aléatoires. En effet, dans ce dernier cas, les vitesses et les amplitudes des ondes ainsi que les épaisseurs des substrats les séparant sont variables. À l'invariance galiléenne précédemment invoquée, il faut alors substituer la symétrie liée à la présence d'une famille d'orbites homoclines paramétrée par l'épaisseur de substrat  $H(\xi \rightarrow \pm\infty)$  à  $\delta$  fixé, ou  $\delta$  lorsque  $H(\xi \rightarrow \pm\infty)$  est fixée (cf. § 5.2.2). La présence de cette symétrie implique alors une valeur propre généralisée nulle pour l'opérateur linéarisé autour d'une solution localisée d'où deux modes d'interaction entre structures cohérentes que Chang *et al.* [25, 23] appellent mode de translation et mode de vitesse. Chang *et al.* ont alors construit à partir du modèle de Shkadov une théorie rendant compte de l'interaction entre deux ondes solitaires [23] et en particulier des phénomènes de répulsion ou d'appariement, qu'ils ont ensuite étendu au problème de la distribution

statistique des amplitudes et vitesses des ondes observées [28].

Les études de Kawahara *et al.* et de Balmforth *et al.* indiquent que la forme et l'interaction entre structures cohérentes solutions de (1.9) sont fortement dépendantes de la dispersion. Cette remarque est accentuée par notre étude des orbites homoclines solutions du modèle simplifié (4.65–4.66) au § 5.4. Nous avons vu que le modèle de Shkadov (3.61) et l'équation de couche limite (3.9) ne pouvaient rendre compte de la dispersion du second ordre d'origine visqueuse. Il serait donc souhaitable d'étendre la théorie de Chang *et al.* en incluant ces termes à partir notamment du modèle simplifié au second ordre.

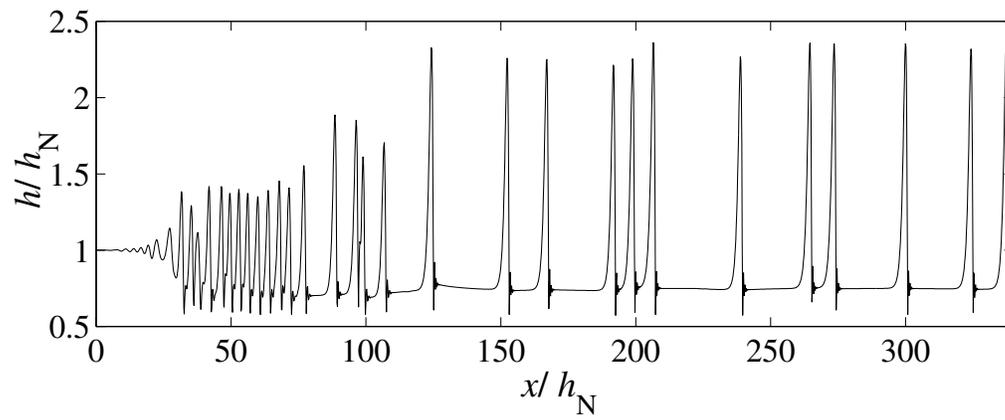
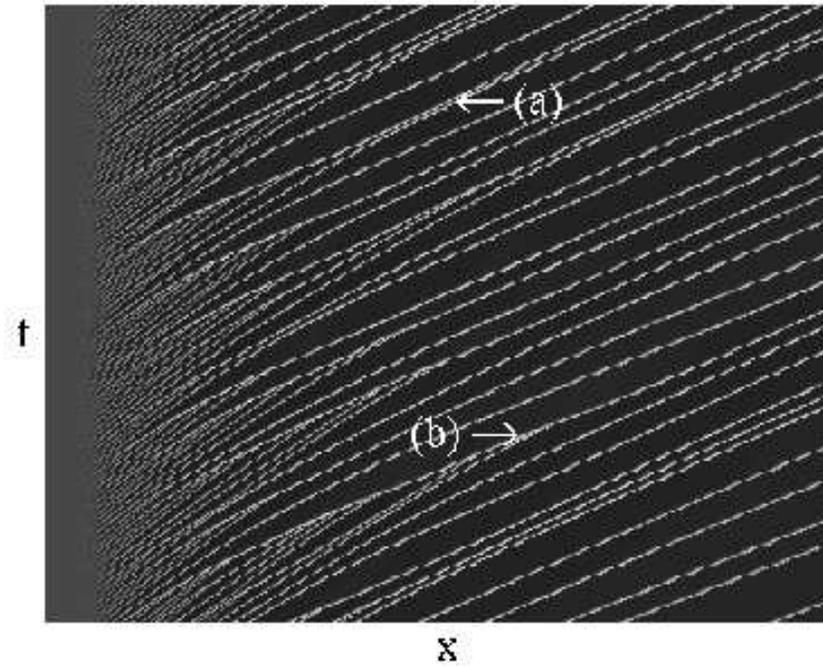


FIG. 7.8 – Diagramme spatio-temporel correspondant à un film forcé aléatoirement. Les paramètres sont  $R = 6.07$  et  $W = 25.6$ .

# Chapitre 8

## Approches numériques

Avant d'aborder la conclusion d'ensemble de ce travail, arrêtons-nous quelques instants sur les méthodes numériques utilisées pour obtenir les solutions des différents modèles exposés. Deux codes numériques ont été écrits en FORTRAN et adaptés aux différents cas, l'un réalisant le suivi et la recherche des bifurcations des familles d'ondes stationnaires dans leur référentiel en mouvement (§ 8.1) et l'autre permettant le calcul de l'évolution en temps et en espace d'un film forcé au bord amont (§ 8.2). Le code construisant les familles d'ondes stationnaires s'inspire du programme `bif` écrit par Allgower & Georg [3] et implémente les méthodes prédicteur-correcteur décrites en détail dans la première partie de leur ouvrage, méthodes dont l'exposé ne sera ici que trop brièvement résumé aux points essentiels. Quant au code ayant pour but les simulations spatio-temporelles, il est adapté du code écrit par Paul Manneville pour étudier les solutions de l'équation de Benney [95] et emploie un schéma classique aux différences [97, 55].

### 8.1 Recherche des familles d'ondes stationnaires

#### 8.1.1 Représentation dans l'espace spectral

Pour obtenir les familles d'ondes stationnaires et périodiques dans leur référentiel en mouvement  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , nous nous sommes inspirés de la méthode décrite par Chang *et al.* [20] et Salamon *et al.* [103]. Les conditions aux limites périodiques permettent de représenter la solution recherchée par une série de Fourier. Ainsi dans le référentiel en mouvement  $\xi = x - ct$  à la vitesse  $c$ , on a

$$q(\xi) = ch(\xi) + q_0, \quad (8.1)$$

$$h(\xi) = \hat{H}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{H}_{2k-1} \cos(k\alpha\xi) + \hat{H}_{2k} \sin(k\alpha\xi) \quad (8.2)$$

où  $\alpha$  est le nombre d'onde de la fonction considérée. L'équation (8.2) peut encore s'écrire

$$h(\xi) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}_k \exp(-ik\alpha\xi). \quad (8.3)$$

Les coefficients  $\hat{h}_k$  sont définis par transformée de Fourier directe

$$\hat{h}_k = \int_0^\lambda h(\xi) \exp(ik\alpha\xi) d\xi. \quad (8.4)$$

La fonction  $h$  étant réelle, ils sont complexes conjugués,  $\overline{\hat{h}_{-k}} = \hat{h}_k = \lambda(\hat{H}_{2k-1} - i\hat{H}_{2k})$ .

Une approximation de  $h$  est obtenue en tronquant le développement (8.2) à un nombre  $N$  de fonctions,

$$h \simeq \hat{H}_0 + \hat{H}_{N-1} \cos((N/2)\alpha\xi) + \sum_{k=1}^{N/2-1} \hat{H}_{2k-1} \cos(k\alpha\xi) + \hat{H}_{2k} \sin(k\alpha\xi) \quad (8.5)$$

où  $N$  est un entier pair. Cela revient à annuler tous les coefficients des fréquences n'appartenant pas à l'intervalle  $[-f_c, f_c]$  avec  $f_c = N/(2\lambda)$ , fréquence de coupure de Nyquist. Cette troncature n'est évidemment acceptable que lorsque la partie du spectre négligée a une norme suffisamment faible. Ceci se contrôle aisément sur le coefficient correspondant à la fréquence de coupure

$$\hat{H}_{N-1} \ll 1 \quad (8.6)$$

Dans ce cas, au lieu d'utiliser la transformée de Fourier sous sa forme intégrale, on fait appel à la transformée de Fourier discrète,

$$\hat{h}_k^N = \sum_{p=0}^{N-1} h(\xi_p) \exp(ik\alpha\xi_p) \quad (8.7)$$

où les points  $\xi_p = \lambda p/N$  sont répartis sur une longueur d'onde. Notons que  $\hat{h}_{N/2}^N = \hat{h}_{-N/2}^N$  est réel. L'exposant  $N$  indique que l'on utilise ici la transformée de Fourier discrète et non la transformée continue. Pour des conditions périodiques, les deux opérations convergent vers le même résultat lorsque  $N$  devient grand et que  $\hat{h}_k^N$  est convenablement remis à l'échelle,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda \hat{h}_k^N}{N} \rightarrow \hat{h}_k \quad (8.8)$$

L'avantage réside ici dans la possibilité d'utiliser un algorithme efficace, la transformée de Fourier rapide (en anglais, Fast Fourier Transform ou FFT), permettant de faire le passage entre l'espace physique et l'espace spectral. La transformée de Fourier discrète inverse s'écrit

$$h_p^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1-N/2}^{N/2} \hat{h}_k^N \exp(-ik\alpha\xi_p) = h(\xi_p). \quad (8.9)$$

Toutefois, les solutions d'ondes stationnaires recherchées se localisent lorsque le nombre d'onde  $\alpha$  décroît pour ressembler aux trains d'ondes solitaires observés par Liu et Gollub pour un forçage à faible fréquence. Un défaut de la représentation en base de Fourier est qu'une solution localisée dans l'espace physique est délocalisée

dans l'espace spectral. On s'attend donc à ce que le nombre de modes  $N$  nécessaires pour représenter la solution augmente rapidement lorsque  $\alpha$  devient relativement petit. Cette difficulté impose de contrôler régulièrement que (8.6) est vérifiée afin d'augmenter  $N$  à la demande. En pratique,  $N$  est doublé dès que

$$\left(\hat{h}_{1-N/2}^N\right)^2 + \left(\hat{h}_{N/2-1}^N\right)^2 > \epsilon, \quad (8.10)$$

où  $\epsilon \ll 1$  est une constante choisie au préalable.

### 8.1.2 Traitement des erreurs de repliement

La transformée de Fourier discrète a le défaut de confondre les harmoniques. En effet,

$$\begin{aligned} \hat{h}_k^N &= \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \hat{h}_q \exp(-iq\alpha\xi_p) \exp(ik\alpha\xi_p) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \hat{h}_q \sum_{p=0}^{N-1} \exp(i2\pi p(k-q)/N) \\ &= \frac{N}{\lambda} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \hat{h}_{k+qN}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Les erreurs qui en découlent sont appelées erreurs de repliement (aliasing). En guise d'exemple, la figure (8.1) représente le comportement d'une orbite homocline, solution stationnaire 2D du modèle (78–80) du chapitre 10, au voisinage du point fixe. Les distorsions visibles à gauche avec  $N = 64$  modes de Fourier disparaissent à droite avec 128 modes et sont imputables aux effets d'aliasing.

On s'en affranchit facilement grâce à la condition (8.6). Cependant, un produit de deux fonctions dans l'espace physique conduit à une convolution dans l'espace spectral élargissant le spectre et multipliant les risques d'erreurs.

Considérons la non-linéarité d'ordre  $\sigma$  entier<sup>1</sup>,  $h^\sigma$

$$\begin{aligned} \left(h_p^N\right)^\sigma &= \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1-N/2}^{N/2} \hat{h}_{k_j}^N \exp^{-ik\alpha\xi_p}\right)^\sigma \\ &= \frac{1}{N^\sigma} \sum_{k=\sigma-N/2}^{\sigma N/2} \sum_{D_k^N} \left(\prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^N\right) \exp(-ik\alpha\xi_p), \end{aligned} \quad (8.12)$$

où  $D_k^N$  est l'ensemble défini par

$$D_k^N = \left\{ (k_1, k_2, \dots, k_\sigma) / \sum_{j=1}^{\sigma} k_j = k; \quad -N/2 + 1 \leq k_j \leq N/2 \right\}$$

---

<sup>1</sup>le résultat final n'est pas modifié pour un produit quelconque

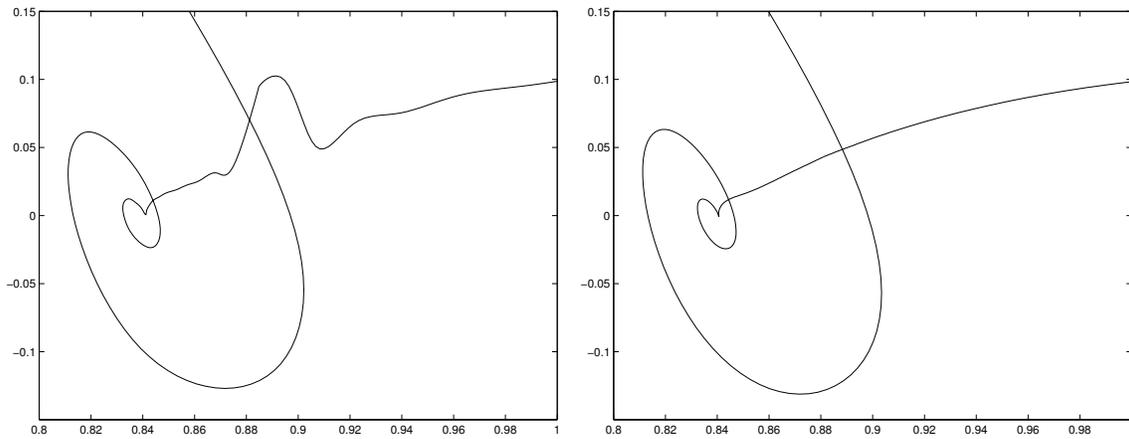
(a)  $\alpha = 0.293369$  et 64 modes(b)  $\alpha = 0.289342$  et 128 modes

FIG. 8.1 – Calcul d’une orbite périodique presque homocline pour le modèle au deuxième ordre présenté en annexe au ch. 10 (cf. équations (78–80)) mettant en évidence l’effet du repliement,  $\delta = 2.79$ ,  $\zeta = 0$  et  $\eta = 0.075$  avec  $\langle q \rangle = 1$ .  $h$  est placé en abscisse et  $h'$  en ordonnée.

. Supposons  $\sigma$  pair (seuls les détails du calcul sont modifiés dans le cas impair) et “replions” les fréquences hors intervalle  $[-f_c, f_c]$  d’abord en jouant sur la périodicité  $\exp(-ik\alpha\xi_p) = \exp(-ip(k+N)\alpha\lambda/N) = \exp(-i(k+N)\alpha\xi_p)$

$$\begin{aligned}
 (h_p^N)^\sigma &= \frac{1}{N^\sigma} \left( \sum_{k=\sigma-\sigma N/2}^{-(\sigma-1)N/2} \sum_{D_k^N} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^N \right) e^{-i(k+\sigma N/2)\alpha\xi_p} \right. \\
 &+ \sum_{k=-(\sigma-1)N/2+1}^{-(\sigma-2)N/2} \sum_{D_k^N} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^N \right) e^{-i(k+(\sigma-2)N/2)\alpha\xi_p} \dots \\
 &\left. + \sum_{k=(\sigma-1)N/2+1}^{\sigma N/2} \sum_{D_k^N} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^N \right) e^{-i(k-\sigma N/2)\alpha\xi_p} \right), \quad (8.13)
 \end{aligned}$$

puis par un changement de variables

$$\begin{aligned}
 (h_p^N)^\sigma &= \frac{1}{N^\sigma} \left( \sum_{k=\sigma}^{N/2} \sum_{D_{k-\sigma N/2}^N} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^N \right) e^{-ik\alpha\xi_p} \right. \\
 &+ \sum_{k=-N/2+1}^0 \sum_{D_{k-(\sigma-2)N/2}^N} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^N \right) e^{-ik\alpha\xi_p} + \dots \\
 &\left. + \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} \sum_{D_k^N} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^N \right) e^{-ik\alpha\xi_p} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=-N/2+1}^0 \sum_{D_{k+\sigma N/2}^N} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^N \right) e^{-ik\alpha\xi_p}. \quad (8.14)$$

De manière synthétique, on obtient, par exemple pour  $k < 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} (\hat{h}^{\sigma})_k^N &= \frac{1}{N^{\sigma}} \left( \sum_{i \in [0, (\sigma-2)/4[\cap \mathbb{N}} \sum_{D_{k-(\sigma-2-4i)N/2}^N} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^N \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \in [0, \sigma/4[\cap \mathbb{N}} \sum_{D_{k+(\sigma-4i)N/2}^N} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^N \right) + (\hat{h}_k^N)^{\sigma} \right). \end{aligned} \quad (8.15)$$

À cause des termes de repliements, le calcul des non-linéarités et la transformée de Fourier discrète ne peuvent être interverti. C'est pourtant l'essence des méthodes pseudo-spectrales que nous emploierons. En effet le calcul des convolutions rend malaisé le calcul des non-linéarités dans l'espace spectral et on a donc intérêt à évaluer celles-ci dans l'espace physique. À contrario, la dérivation est une simple produit dans l'espace spectral

$$\hat{h}'_k^N = -ik\alpha \hat{h}_k^N, \quad (8.16)$$

de sorte que les dérivées sont calculées dans cet espace.

On peut s'affranchir des termes parasites de (8.15) en évaluant cette expression pour un nombre  $M$  plus grand de modes de Fourier

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} (\hat{h}^{\sigma})_k^N &\simeq \frac{1}{M} (\hat{h}^{\sigma})_k^M \\ &= \frac{1}{M^{\sigma}} \left( \sum_{i \in [0, (\sigma-2)/4[\cap \mathbb{N}} \sum_{D_{k-(\sigma-2-4i)M/2}^M} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^M \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \in [0, \sigma/4[\cap \mathbb{N}} \sum_{D_{k+(\sigma-4i)M/2}^M} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^M \right) + (\hat{h}_k^M)^{\sigma} \right) \\ &\simeq \frac{1}{N^{\sigma}} \left( \sum_{i \in [0, (\sigma-2)/4[\cap \mathbb{N}} \sum_{D_{k-(\sigma-2-4i)M/2}^N} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^N \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \in [0, \sigma/4[\cap \mathbb{N}} \sum_{D_{k+(\sigma-4i)M/2}^N} \left( \prod_{j=1}^{\sigma} \hat{h}_{k_j}^N \right) + (\hat{h}_k^N)^{\sigma} \right), \end{aligned} \quad (8.17)$$

pour  $k < 0$ . Il suffit alors de prendre  $M$  suffisamment grand pour que l'ensemble  $(\cup_{i \in [0, (\sigma-2)/4[\cap \mathbb{N}} D_{k-(\sigma-2-4i)M/2}^N) \cup (\cup_{i \in [0, \sigma/4[\cap \mathbb{N}} D_{k+(\sigma-4i)M/2}^N)$  soit vide. Il suffit pour cela que l'ensemble  $D_{k \pm M}^N$  soit lui-même vide. Cette condition s'écrit

$$k - M < \sum_{j=1}^{\sigma} k_j < k + M; \quad k, k_j \in \{-N/2 + 1, N/2\} \quad (8.18)$$

soit encore

$$-M < \left( \sum_{j=1}^{\sigma} k_j \right) - k < M; \quad k, k_j \in \{-N/2 + 1, N/2\} \quad (8.19)$$

Or  $\sigma - (\sigma + 1)N/2 \leq \left( \sum_{j=1}^{\sigma} k_j \right) - k \leq (\sigma + 1)N/2 - 1$  d'où

$$M \geq \frac{\sigma + 1}{2} N. \quad (8.20)$$

Pour une non-linéarité quadratique, (8.20) est connue sous le nom de règle des 2/3.

### 8.1.3 Formulation numérique par méthode pseudo-spectrale

La relation (8.1) exprime la conservation de la masse et  $q_0$  est le débit circulant sous l'onde dans son référentiel en mouvement. Chang *et al.* et Salamon *et al.* n'ont tracé les ondes stationnaires qu'à épaisseur de film constante soit  $\hat{H}_0 = \langle h \rangle = 1$ . On peut cependant faire la même étude à débit constant  $\langle q \rangle = 1/3$  d'où  $\hat{H}_0 = (1/3 - q_0)/c$ . Par choix, le coefficient correspondant à la fréquence de Nyquist,  $\hat{h}_{N/2}^N$  est annulé. Afin de déterminer les  $N$  inconnues  $c$ ,  $q_0$  et  $\hat{h}_k^N$ ,  $k \in \{1 - N/2, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, N/2 - 1\}$ ,  $N$  relations restent à poser. La dynamique des ondes stationnaires dans leur référentiel en mouvement est dictée par le système dynamique  $\dot{U} = \mathbf{F}(U)$  avec  $U = (h, h', h'')$ , ce qui s'écrit encore

$$F(h, h', h'') - h^3 h''' = 0, \quad (8.21)$$

en prenant soin d'éliminer les dénominateurs. L'évaluation de (8.21) aux points  $\xi_p$ ,  $0 \leq p \leq N - 2$  dans l'espace physique permet de fixer  $N - 1$  premières relations,

$$G_p^N(c, q_0, \hat{h}_k^N) = F(h_p^N, h_p'^N, h_p''^N) - (h^3 h''')_p^N = 0. \quad 0 \leq p \leq N - 2 \quad (8.22)$$

Les non-linéarités sont d'ordre 4 et le nombre de modes utilisés est choisi comme une puissance de 2. D'où le choix  $M = 4N$  pour s'affranchir des erreurs de repliement.<sup>2</sup>  $\hat{h}^M$  est complété en supposant nuls les modes non représentés dans  $\hat{h}^N$ . Les dérivées  $(\hat{h}')^M$ ,  $(\hat{h}'')^M$  et  $(\hat{h}''')^M$  sont ensuite évaluées dans l'espace spectral puis dans l'espace physique par FFT. Les non-linéarités sont calculées en dernier lieu.

La dernière condition permet de fixer la phase de l'onde considérée,

$$G_{N-1}^N(c, q_0, \hat{h}_k^N) = \sum_{p=0}^{N-1} (h')_p^M \sin(n_d \xi_p) = 0. \quad (8.23)$$

Cette relation revient à imposer que le coefficient de Fourier  $\hat{H}_{2n_d-1}$  soit nul. L'entier  $n_d$  est ici le nombre de longueurs d'ondes contenues dans le domaine périodique.

---

<sup>2</sup>Le choix d'un nombre de modes puissance de 2 n'est donc pas judicieux puisqu'il conduit à largement surestimer  $M$ . Toutefois, les temps de calcul restant modérés (au pire de l'ordre de quelques heures et dans la plupart des cas de l'ordre de quelques minutes), je ne suis pas revenu sur ce dernier.

### 8.1.4 Méthode de continuation prédicteur-correcteur

Le problème posé serait alors relativement simple si, pour chaque nombre d'onde  $\alpha$ , il y avait unicité de la solution. Or ce n'est pas le cas, les calculs de Chang *et al.* et Salamon *et al.* ayant mis en évidence la possibilité de bifurcation sous-harmoniques donnant naissance à différentes branches de solutions. On doit donc considérer le problème posé comme étant le tracé d'une courbe  $G^{-1}(0)$  définie par la carte<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} G(u) : \mathbb{R}^{N+1} &\mapsto \mathbb{R}^N, \\ u = (c, q_0, \mathfrak{R}(\hat{h}_k), \mathfrak{S}(\hat{h}_k), \alpha) &\mapsto G(u) \end{aligned} \quad (8.24)$$

Cependant, supposant  $G$  régulière, s'il existe un vecteur  $u_0$  connu vérifiant  $G(u_0) = 0$ , tel que la matrice de Jacobi  $G'(u_0) = \partial_j G_i(u_0)$  soit de rang maximum,  $N$ , alors il existe une courbe  $\eta \in J \mapsto C(\eta) \in \mathbb{R}^{N+1}$  pour un intervalle ouvert  $J$  contenant zéro telle que

$$G(C(\eta)) = 0, \quad (8.25)$$

$$\text{rang} \left( G'(C(\eta)) \right) = N, \quad (8.26)$$

$$C'(\eta) \neq 0. \quad (8.27)$$

Ce théorème découle du théorème des fonctions implicites et constitue le point de départ de toute méthode de continuation : connaissant un point sur la courbe, on cherche à tracer celle-ci en la suivant pas à pas. En différenciant (8.25), on montre que  $C'(\eta) \in \ker \left( G'(C(\eta)) \right)$  est de dimension 1. On fait le choix de paramétriser  $C$  à l'aide d'un paramètre de longueur d'arc  $s$  défini par

$$ds = \left[ \sum_{j=1}^{N+1} \left( \frac{dC_j(\eta)}{d\eta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\eta. \quad (8.28)$$

On notera par la suite  $\dot{C} = \frac{dC}{ds}$  et  $\| \cdot \|$ , la norme euclidienne. D'où,

$$\|\dot{C}(s)\| = 1. \quad (8.29)$$

Afin de définir l'orientation de la courbe  $C$ , on définit la matrice de Jacobi élargie

$$\begin{pmatrix} G'(C(s)) \\ \dot{C}(s)^* \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

où l'astérisque dénote la transposition. Il reste à préciser l'orientation de la courbe  $C$  en la prenant positive lorsque le déterminant de la matrice de Jacobi élargie est positif, ce qui est la convention généralement retenue en géométrie différentielle.

---

<sup>3</sup>l'exposant  $N$  est abandonné, son utilité étant limitée au problème du repliement et de la distinction entre transformée continue et discrète

Orienter le vecteur  $\dot{C}(s)$  dans le sens positif permet de définir celui-ci de manière univoque. Noté  $t(G'(u))$ , il est alors appelé vecteur induit par la matrice  $G'(u)$ .

On remplace alors le problème (global) de la recherche de l'ensemble  $G^{-1}(0)$  par le problème (local) aux valeurs initiales

$$\dot{u}(s) = t(G'(u(s))), \quad (8.31)$$

$$u(0) = u_0. \quad (8.32)$$

La définition du vecteur tangent  $t(G'(u))$  n'est possible que si  $G'(u)$  est de rang maximum. On dit que le vecteur  $u$  est un point régulier de la carte  $G$  si  $G'$  est de rang maximum et, inversement,  $v$  est une valeur régulière de  $G$  si tout point  $x \in G^{-1}(y)$  est régulier. Dans le cas contraire, on dit que points et valeurs sont singuliers. Les théorèmes classiques d'existence et d'unicité de solutions pour les problèmes aux valeurs initiales permettent de montrer qu'il existe un intervalle de taille maximum d'existence de la solution de (8.31–8.32), pour lequel les points  $C(s)$  sont réguliers. La philosophie des méthodes prédicteur-correcteur (PC) est de tracer

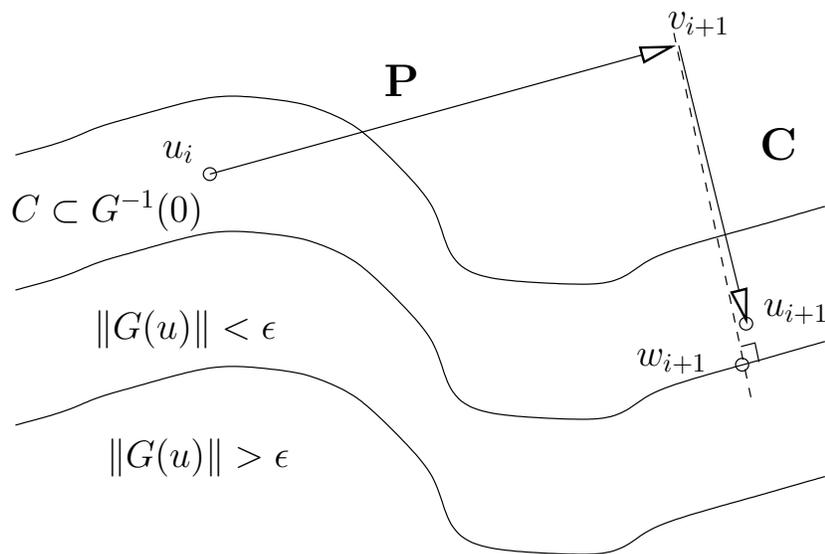


FIG. 8.2 – Schéma d'une méthode prédicteur-correcteur ; pas du prédicteur **P** ; pas du correcteur, **C**.

la courbe  $C$  en générant une suite  $u_i$ ,  $i = 1, \dots$  le long de la courbe satisfaisant un critère de tolérance, par exemple  $\|G(u_i)\| \leq \epsilon$ . Si  $\epsilon > 0$  est pris suffisamment petit, il y a bijection entre les points  $u_i$  est les points de la courbe  $C$  les plus proches des  $u_i$ . Si  $u_i$  est un point régulier de  $C$ , on peut écrire le problème aux valeurs initiales (8.31–8.32) correspondant et s'en servir pour déterminer  $u_{i+1}$ . Ceci se fait en deux temps (cf. fig. 8.2). (1) Un point  $v_{i+1}$ , approximation de  $u_{i+1}$  est obtenu à l'aide d'une formule explicite ou prédicteur. (2) Puis, une correction est effectuée pour se ramener sur la courbe en cherchant la solution du problème d'optimisation suivant

$$\|w_{i+1} - v_{i+1}\| = \min_{G(w)=0} \|w - v_{i+1}\|. \quad (8.33)$$

Itérant le processus précédent, appelé correcteur, jusqu'à obtenir un point satisfaisant le critère de convergence permet de déterminer  $u_{i+1}$ .

Le prédicteur le plus couramment utilisé est celui d'Euler

$$v_{i+1} = u_i + ht(G'(u_i)), \quad (8.34)$$

approximation linéaire de la courbe  $C$ . Il n'est généralement pas nécessaire d'utiliser un prédicteur plus élaboré car, à la différence des schémas PC servant à la résolution d'EDO, on dispose de correcteurs efficaces assurant la convergence.

### 8.1.5 Correcteur utilisant un algorithme de Newton

Abandonnons les indices  $i$ . L'équation (8.33) peut être résolue grâce à la méthode des multiplicateurs de Lagrange,

$$\begin{aligned} G(w) &= 0, \\ w - v &= G'(w)^* \lambda. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Cette dernière équation est équivalente à  $w - v \in \text{Im}(G'(w)^*) = \{t(G'(w))\}^\perp$ , d'où le problème équivalent

$$\begin{aligned} G(w) &= 0, \\ t(G'(w))^* (w - v) &= 0. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Grâce à un développement de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned} G(v) + G'(v)(w - v) &= \mathcal{O}(\|w - v\|^2) \\ t(G'(w))^* (w - v) &= 0. \end{aligned} \quad (8.37)$$

D'où le problème linéarisé

$$\begin{aligned} G'(v)(w - v) &= -G(v) \\ t(G'(w))^* (w - v) &= 0. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Il suffit d'inverser (8.38) pour obtenir une approximation (suffisante) de la solution de (8.33). Cela est rendu possible grâce à l'inverse de Moore–Penrose  $G'(v)^+ = G'(v)^* (G'(v)G'(v)^*)^{-1}$ . En effet,  $w$  défini par

$$w = v - G'(v)^+ G(v), \quad (8.39)$$

est solution de (8.38).

L'algorithme précédent est l'analogie de la méthode de Newton pour trouver les zéros d'une fonction de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$  pour laquelle on sait déterminer l'inverse de la matrice de Jacobi. Cet algorithme a le bon goût de converger quadratiquement vers la solution  $u$  recherchée. En pratique, on utilise la procédure DGEPQF de la bibliothèque LAPACK qui implémente un algorithme en  $N^3$  de décomposition QR à

l'aide de transformations successives de Householder avec permutations. On obtient alors la décomposition de la transposée de la matrice de Jacobi

$$(G'(v))^*P = Q \begin{pmatrix} R \\ 0^* \end{pmatrix} \quad (8.40)$$

où  $Q$  est une matrice orthogonale  $(N + 1) \times (N + 1)$  telle que  $Q^*Q = \text{Id}$ ,  $R$  une matrice triangulaire supérieure  $N \times N$  et  $P$  une matrice de permutation. L'inverse de Moore–Penrose s'écrit alors

$$G'(v)^+ = Q \begin{pmatrix} (R^*)^{-1} P^* \\ 0^* \end{pmatrix} \quad (8.41)$$

En pratique, celui-ci n'est pas calculé et on se contente de résoudre  $R^*y = P^*G(v)$  par un balayage direct grâce à la procédure `DTRTRS`. Puis le vecteur  $p = -Qy$  est calculée par `DORMQR` à l'aide de la décomposition en réflecteurs élémentaires  $Q = Q_1Q_2 \dots Q_{N+1}$  tels que  $Q_i = \text{Id} - \tau_i V_i V_i^*$ , où les  $\tau_i$  sont des scalaires et  $V_i$  des vecteurs de taille  $N + 1$  renvoyés par `DGEPQF`.  $Q$  étant orthogonale, il est facile de vérifier qu'un vecteur de norme unité  $z$  correspondant à la dernière colonne de  $Q$  appartient au noyau de  $G'(v)$ . Or

$$\det \begin{pmatrix} G'(v) \\ z^* \end{pmatrix} = \det(G'(v)^*, z) = \det \left[ Q \begin{pmatrix} RP^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det Q \det R \det P \quad (8.42)$$

d'où le vecteur tangent  $t$

$$t_i(G'(v)) = \text{sign}(\det Q \det R \det P) Q_{i,N+1}, \quad 1 \leq i \leq N + 1. \quad (8.43)$$

La procédure implémentant le correcteur est écrite de manière à pouvoir également résoudre le problème standard  $\tilde{G}(u) = 0$ ,  $\tilde{G} : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$  correspondant à la recherche d'un premier point sur la courbe  $C(u_0)$  pour une longueur d'onde fixée. Bien que cela ne soit pas strictement nécessaire, nous avons adapté le procédé de *backtracking* tel que décrit par Press *et al.* [92]. Celui-ci consiste à ne pas nécessairement prendre en entier le pas  $p$  prescrit par l'algorithme de Newton mais seulement une fraction  $\lambda p$ ,  $0 < \lambda < 1$  si  $\|G(v + p)\|$  ne décroît pas suffisamment vite vers zéro.  $\lambda$  est déterminée en minimisant une fonctionnelle polynômiale quadratique ou cubique utilisant les valeurs en  $p$ ,  $v + p$  puis  $v + \lambda p$  de la norme de  $G$  et de son gradient  $\nabla\|G\| = 2GG'$ . Cet algorithme a l'avantage de converger même si l'approximation initiale  $v$  est relativement éloignée de la solution recherchée.

### 8.1.6 Adaptation du pas du prédicteur

Il reste cependant à trouver un moyen efficace d'adapter le pas  $h$  à chaque appel du prédicteur. Le coût numérique de la méthode PC Euler–Newton réside essentiellement dans l'appel du correcteur d'où l'intérêt d'optimiser le pas afin d'utiliser au mieux les propriétés de convergence de ce dernier.

Notons  $\delta(u, h) = \|G'(v(h))^+ G(v(h))\|$  la longueur du pas effectué lors du premier appel du correcteur et  $\|G'(w(h))^+ G(w(h))\| \simeq \|G'(v(h))^+ G(w(h))\|$  la longueur

du pas lors du second appel.  $\delta(u, h)$  approxime correctement la distance du point prescrit par le prédicteur  $v$  à la véritable courbe  $C$ . On définit le taux de contraction  $\kappa(u, h)$  par

$$\kappa(u, h) = \frac{\|G'(v(h))^+ G(w(h))\|}{\|G'(v(h))^+ G(v(h))\|}, \quad (8.44)$$

et l'angle entre deux pas consécutifs

$$\phi(u, h) = \arccos \left( t(G'(w(h)))^* t(G'(v(h))) \right). \quad (8.45)$$

On dispose pour ces grandeurs des développements asymptotiques suivants

$$\begin{aligned} \delta(u, h) &= \delta_2(u)h^2 + \mathcal{O}(h^3) \\ \kappa(u, h) &= \kappa_2(u)h^2 + \mathcal{O}(h^3) \\ \phi(u, h) &= \phi_1(u)h + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (8.46)$$

L'idée est alors d'ajuster le pas pour maintenir des valeurs préalablement choisies de la distance à la courbe,  $\tilde{\delta}$ , du taux de contraction,  $\tilde{\kappa}$  et de l'angle  $\tilde{\phi}$  à l'aide des estimations (8.46) soit en notant  $\tilde{h}$  le pas choisi pour le prochain appel du prédicteur

$$\tilde{h} = \min \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{\delta}}{\delta(u, h)}}, \sqrt{\frac{\tilde{\kappa}}{\kappa(u, h)}}, \frac{\tilde{\phi}}{\phi(u, h)} \right\}. \quad (8.47)$$

On prend ensuite soin de vérifier que  $\tilde{h}$  reste dans des bornes prédéfinies, par exemple  $\frac{1}{2} \leq \tilde{h} \leq 2$ .

### 8.1.7 Obtention d'un point initial sur la courbe

Cependant, le tracé d'une courbe par la méthode décrite ci-dessus suppose connu un point initial sur cette courbe que nous noterons  $u_0$ . Les solutions d'ondes stationnaires dans leur référentiel en mouvement et d'amplitude très faible sont quasi-sinusoidales et correspondent aux solutions de taux d'amplification nul du problème linéarisé. Les branches recherchées partent donc toutes de la courbe de stabilité marginale du film uniforme  $h = 1$ . À paramètres fixés, la solution de la relation de dispersion  $D(\alpha, \omega) = 0$  avec  $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$  permet de déterminer la célérité  $c_c$ , la constante  $q_{0,c} = 1/3 - c_c$  et le nombre d'onde  $\alpha_c$  de l'onde correspondante. Les invariances par translation dans l'espace et par transformation galiléenne, impliquent que quels que soient le nombre d'onde et la vitesse  $c$ , le vecteur  $u = (c, q_0, \hat{h}_k = 0, \alpha)$  est solution de  $G(u) = 0$ . Pour éviter cette solution triviale, nous allons utiliser l'approximation au premier harmonique pour obtenir un point de la courbe  $C$  d'amplitude non nulle,

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{3} - c, \\ h(\xi) &= 1 + \epsilon \left( \overline{\hat{h}_1} e^{i\alpha\xi} + \hat{h}_1 e^{-i\alpha\xi} + \overline{\hat{h}_2} e^{2i\alpha\xi} + \hat{h}_2 e^{-2i\alpha\xi} \right), \end{aligned} \quad (8.48)$$

où  $\epsilon \ll 1$ . Substituant (8.48) dans (8.21), puis projetant la relation obtenue sur  $\exp(i\alpha x)$  et  $\exp(2i\alpha x)$  permet d'obtenir des relations de la forme

$$\epsilon a_1(c, \alpha) \hat{h}_1 + \epsilon^3 a_2(c, \alpha) \hat{h}_1^2 \overline{\hat{h}_1} + \epsilon^2 a_3(c, \alpha) \hat{h}_1 \overline{\hat{h}_2} + \epsilon^3 a_4(c, \alpha) \hat{h}_1 \hat{h}_2 \overline{\hat{h}_2} = 0, \quad (8.49)$$

$$\epsilon^2 a_5(c, \alpha) (\hat{h}_1)^2 + \epsilon a_6(c, \alpha) \hat{h}_2 = 0 \quad (8.50)$$

où les  $a_k$  sont des constantes fonctions de  $c$  et  $\alpha$  et seules les non-linéarités au plus cubique ont été conservées. L'équation (8.50) permet d'éliminer adiabatiquement  $\hat{h}_2 \sim \epsilon \hat{h}_1$  de (8.49). D'où,

$$a_1(c, \alpha) + \epsilon^2 \tilde{a}_2(c, \alpha) \hat{h}_1 \overline{\hat{h}_1} = \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (8.51)$$

après avoir divisé par  $\epsilon \hat{h}_1$ . Linéarisons  $c$  et  $\alpha$  autour de  $c_c$  et  $\alpha_c$  en posant  $c = c_c + \epsilon^2 \delta c$  et  $\alpha = \alpha_c + \epsilon^2 \delta \alpha$ . On obtient alors après avoir séparé partie réelle et partie imaginaire

$$\begin{aligned} b_1(c_c, \alpha_c) \delta c + b_2(c_c, \alpha_c) \delta \alpha &= b_3(c_c, \alpha_c) \hat{h}_1 \overline{\hat{h}_1}, \\ b_4(c_c, \alpha_c) \delta c + b_5(c_c, \alpha_c) \delta \alpha &= b_6(c_c, \alpha_c) \hat{h}_1 \overline{\hat{h}_1}, \end{aligned} \quad (8.52)$$

où  $b_1, \dots, b_6$  sont fonction de  $c_c$  et  $\alpha_c$ . En pratique, les expressions des coefficients  $b_k$  sont déterminés à l'aide de MATHEMATICA. Choissant une amplitude pour l'onde initiale,  $\hat{h}_1^N = N \hat{h}_1$ , on détermine  $\delta c$  et  $\delta \alpha$  en inversant (8.52) puis  $\hat{h}_2$  par (8.51). Après avoir fixé le nombre d'onde  $\alpha_0 = \alpha_c + \delta \alpha$ , le point initial  $u_0$  sur la courbe  $C$  est calculé par méthode de Newton à partir de l'approximation (8.48).

Pour chercher les branches bifurquées par multiplication de la période initiale, on réordonne les harmoniques (en notant  $j$  modulo  $k$ ,  $j [k]$ ) et on divise le nombre d'onde par un entier noté  $n_d$  :

$$\begin{aligned} u_{j+1}, u_{j+2} &\mapsto 0, \quad \text{pour } j \neq 0 [n_d], \\ u_{j+1}, u_{j+2} &\mapsto u_{j/(2n_d)+1}, u_{j/(2n_d)+2}, \quad \text{pour } j = 0 [n_d], \\ \alpha_0 &\mapsto \frac{\alpha_0}{n_d}. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Ce procédé permet de placer  $n_d$  ondes de nombre d'onde  $\alpha$  dans le domaine d'intégration initial dont la longueur est devenue  $2\pi n_d / \alpha$ . Cependant le nombre de modes représentant la solution est alors divisé par  $n_d$  et il est nécessaire d'en tenir compte lors du choix du nombre initial de modes (typiquement,  $N = 32$  ou  $N = 64$ ).

### 8.1.8 Recherche des branches bifurquées

En un point singulier  $u_s$  de la courbe  $C$ , le rang de la matrice  $G'(u_s)$  est inférieur à  $N$  et par conséquent le déterminant de la matrice de Jacobi élargie (8.30) s'annule. En fait, celui-ci change de signe en  $u_s$  et cette propriété permet de détecter le passage d'un point de bifurcation. Ce changement de signe correspond au changement d'orientation de la courbe  $C$  coupant génériquement une deuxième branche de solutions  $\tilde{C}$ . Keller [71] a montré que le schéma d'Euler–Newton décrit précédemment

permettait de “sauter” les points singuliers pour peu que l’on prenne soin de changer l’orientation du vecteur tangent.

Le passage de la courbe  $C$  à la courbe  $\tilde{C}$  peut se faire en utilisant

$$e^* G''(u_s)[t, t] = \sum_{k=1}^N \sum_{i,j=1}^{N+1} \partial_i \partial_j G_k t_i t_j e_k = 0, \quad (8.54)$$

où  $e$  est un vecteur propre de  $\ker G'(u_s)^*$  et  $t$  un vecteur tangent de  $C$  ou  $\tilde{C}$ . Connaissant une base  $\tau_1, \tau_2$  de  $\ker G'(u_s)$ , on obtient alors en posant  $t = \xi_1 \tau_1 + \xi_2 \tau_2$ ,

$$a\xi_1^2 + b\xi_1 \xi_2 + c\xi_2^2 = 0, \quad (8.55)$$

dont les solutions permettent de déterminer une direction et de faire un pas du prédicteur le long de la courbe  $C'$ .

Cependant, cette méthode requiert une bonne approximation du point singulier  $u_s$ . Or celle-ci s’avère ici relativement coûteuse à obtenir. En effet  $u_s$  est calculé en cherchant le zéro du déterminant de la matrice de Jacobi élargie (8.30), déterminant qui n’est pas aisé à déterminer précisément à cause de la taille importante de la matrice.<sup>4</sup>

Une méthode plus simple consiste à utiliser le théorème de Sard. Celui-ci stipule que presque toutes les valeurs de  $\mathbb{R}^N$  sont régulières. Ainsi, introduisons une petite perturbation au voisinage de zéro via un vecteur  $p \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\|p\| \ll 1$ . La probabilité que tous les points de  $G^{-1}(p)$  soient réguliers est donc un. Dans ce cas, il n’y a donc pas de point de bifurcation et l’on passe continûment d’une branche de solution à l’autre. Ainsi quand un point de bifurcation a été détecté entre les points  $u$  et  $w$ , une perturbation locale est choisie de manière à suivre la courbe  $C_p(s) \in G^{-1}(p)$  à partir de  $w$  en sens inverse. Lorsque le point de bifurcation est dépassé, la perturbation locale peut être annulée. En pratique  $p$  est choisi de la manière suivante. On recherche le coefficient de Fourier de plus grande valeur absolue, soit  $\hat{h}_{\max}$ , puis on perturbe les  $n_d$  premiers modes,

$$\tilde{w}_k = w_k + \epsilon \hat{h}_{\max}, \quad 3 \leq k \leq 2n_d + 2, \quad (8.56)$$

de manière à briser la symétrie introduite par la condition (8.23). Puis,  $p$  est calculé tel que

$$p = \frac{\tilde{\delta}}{2(\|G(\tilde{w}) - G(w)\|)} (G(\tilde{w}) - G(w)) \quad (8.57)$$

où  $\tilde{\delta}$  est la distance maximale à la courbe imposée au prédicteur.

Le suivi de bifurcation par cette méthode est efficace lorsque celui-ci est fait de manière interactive. Nous nous sommes inspiré du programme `bif` décrit par Allgower et Georg ([3], pp. 296–311).

---

<sup>4</sup>typiquement  $N = 32$  au moment de la bifurcation entre familles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$

## 8.2 Simulations spatio-temporelles

Les équations étudiées sont de la forme

$$\partial_t H = \mathcal{L}(H) + \mathcal{N}(H), \quad (8.58)$$

où  $H = (h, q)$ ,  $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire et  $\mathcal{N}$  un opérateur non-linéaire. Elles sont complétées par la condition initiale

$$H(x, 0) = H_0(x), \quad (8.59)$$

et la condition à la frontière

$$H(0, t) = H_f(t), \quad (8.60)$$

où  $H_f$  représente le forçage imposé à l'entrée de l'écoulement.

Les simulations numériques de l'évolution spatiale du film (8.58–8.60) ont été réalisées à l'aide de schémas aux différences finies. Ce choix a été guidé par la condition (8.60) aperiodique, se prêtant donc mal aux méthodes spectrales par ailleurs plus performantes.

On limite le domaine d'intégration numérique à une taille finie  $L$ . Celui-ci est ensuite discrétisé en un réseau de  $N$  points  $x_j = j\Delta x$ ,  $\Delta x = L/N$ , uniformément répartis. Cette limitation nécessite de préciser les conditions au bord  $x = L$  du domaine en faisant attention de ne pas générer par réflexion d'ondes parasites qui pourraient envahir le domaine.

Notons  $H_j^{(n)} = (h_j^{(n)} \ q_j^{(n)})$  la solution numérique au nœud  $(x_j, t_n)$  du réseau. Les fortes non-linéarités contenues dans la fonction  $\mathcal{N}$  suggèrent l'emploi d'un schéma inconditionnellement stable. Pour un système linéaire, le schéma implicite de Crank-Nicholson est stable sans condition,

$$H_j^{(n+1)} - H_j^{(n)} = \frac{\Delta t}{2} \left( \mathcal{L}(H_j^{(n+1)}) + \mathcal{N}(H_j^{(n+1)}) + \mathcal{L}(H_j^{(n)}) + \mathcal{N}(H_j^{(n)}) \right), \quad (8.61)$$

où  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  désigne le pas de temps. Toutefois, la stabilité de ce schéma n'est pas garantie dans un cadre non-linéaire et celle-ci sera discutée dans la suite.

L'inversion de l'expression (8.61) donnant  $H_j^{(n+1)}$  une fois connue  $H_j^{(n)}$  est rendue difficile par la non-linéarité  $\mathcal{N}(H_j^{(n+1)})$ . On préférera donc un schéma quasi-linéarisé,

$$\begin{aligned} H_j^{(n+1)} - H_j^{(n)} &= \frac{\Delta t}{2} \left( \mathcal{L}(H_j^{(n+1)}) + \mathcal{L}(H_j^{(n)}) + 2\mathcal{N}(H_j^{(n)}) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{N}'(H_j^{(n)}) \left( H_j^{(n+1)} - H_j^{(n)} \right) \right), \end{aligned} \quad (8.62)$$

Ce schéma est consistant et précis en temps au deuxième ordre. À l'aide de la formule de Taylor, on peut en effet montrer qu'au nœud  $(x_j, t_{n+1/2} = \frac{1}{2}(t_{n+1} + t_n))$

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta t}{2} \left( \mathcal{L}(H_j^{(n+1)}) + \mathcal{L}(H_j^{(n)}) + 2\mathcal{N}(H_j^{(n)}) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{N}'(H_j^{(n)}) \left( H_j^{(n+1)} - H_j^{(n)} \right) \right) - \left( H_j^{(n+1)} - H_j^{(n)} \right) \\ &\quad - \Delta t \left\{ \mathcal{L}(H_j^{(n+1/2)}) + \mathcal{N}(H_j^{(n+1/2)}) - (\partial_t H)_j^{(n+1/2)} \right\} = \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (8.63)$$

Les dérivées en espace sont approximées par des schémas centrés en espace précis au deuxième ordre

$$\begin{aligned} (\partial_x H)_j &= \frac{1}{2\Delta x} (H_{j+1} - H_{j-1}) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ (\partial_{x^2} H)_j &= \frac{1}{\Delta x^2} (H_{j+1} - 2H_j + H_{j-1}) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ (\partial_{x^3} H)_j &= \frac{1}{2\Delta x^3} (H_{j+2} - 2H_{j+1} + 2H_{j-1} - H_{j-2}) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (8.64)$$

Outre la précision, les schémas centrés permettent de conserver la propriété de diagonale dominante de la matrice, notée ici  $\mathcal{L}^n$ , correspondant à l'opérateur linéaire  $Id - (\Delta t/2) (\mathcal{L} + \mathcal{N}'(H_j^{(n)}))$ . Cette propriété a pour conséquence l'inversibilité de  $\mathcal{L}^n$  grâce au lemme d'Hadamard et permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution au pas de temps  $t_{n+1}$  du schéma (8.62). Notons que  $\mathcal{L}^n$  est une matrice bande dont la largeur dépend de l'ordre de dérivation en espace du problème posé. En pratique, au lieu de calculer  $(\mathcal{L}^n)^{-1}$ , on décompose  $\mathcal{L}^n$  par méthode LU à l'aide de la procédure DGBSV de la bibliothèque LAPACK de sous-programmes en langage FORTRAN. Cet algorithme est efficace car le balayage aller et le balayage retour nécessaires au calcul de la décomposition nécessitent un nombre d'opérations d'ordre  $N$  pour une matrice bande.

Cependant, le choix de dérivées centrées impose de définir le forçage amont en deux points du maillage. Deux points hors du domaine d'intégration  $x_0 = 0$  et  $x_{-1} = -\Delta x$  ont été définis tels que

$$H_{-1}^{(n)} = H_0^{(n)} = H_f(t_n). \quad (8.65)$$

Les conditions de bord aval sont plus délicates à traiter. Des conditions de bord libre n'introduisant pas de réflexion pourraient être formulées en utilisant des schémas décentrés ne faisant pas appel aux points  $x_{j+1}$  et  $x_{j+2}$  pour calculer les dérivées pour  $j = N - N + 1$ . Ce choix a l'inconvénient d'élargir la bande de la matrice  $\mathcal{L}^n$  et donc de multiplier le coût numérique de chaque inversion. C'est pourquoi, nous allons nous contenter d'utiliser la nature convective des instabilités primaires et secondaires du film [31, 26, 65, 79]. En effet, supposons qu'au points  $x_{N-1}$  et  $x_N$ , nous écrivions un schéma inconsistant, c'est à dire n'approximant pas (8.58) mais une autre équation plus simple. Celui-ci introduit alors des défauts se propageant vers l'amont. Or, plus en amont, ces perturbations vont être advectées en aval à cause de la nature convective de l'écoulement. Il se crée alors une zone tampon, de faible largeur, sur laquelle le schéma ne converge pas vers une solution de (8.58). Cependant cette zone reste localisée et n'envahit pas l'écoulement, ce qui nous suffit. Ainsi, au point  $x_{N-1}$ , la dérivée d'ordre le plus élevé de  $H$ ,  $(\partial_{x^3} H)_{N-1}$  est négligée et le schéma (8.62) n'approxime (8.58) qu'en supposant  $\partial_{x^3} H \equiv 0$ . En  $x_N$ ,  $(\partial_{x^2} H)_N$  est également annulée, cependant  $(\partial_x H)_N$  est évaluée à l'aide d'un schéma décentré vers l'amont afin de conserver la nature convective de l'équation en ce point,

$$(\partial_x H)_N = \frac{1}{2\Delta x} (H_{N-2} - 4H_{N-1} + 3H_N) + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (8.66)$$

La figure (8.3) est un exemple de train d'ondes solitaires de grande amplitude approchant le bord aval. Les perturbations restent effectivement localisées au bord dans une faible zone d'une centaine de mailles de largeur ( $\Delta x = 0.1$ ) et s'atténuent rapidement.

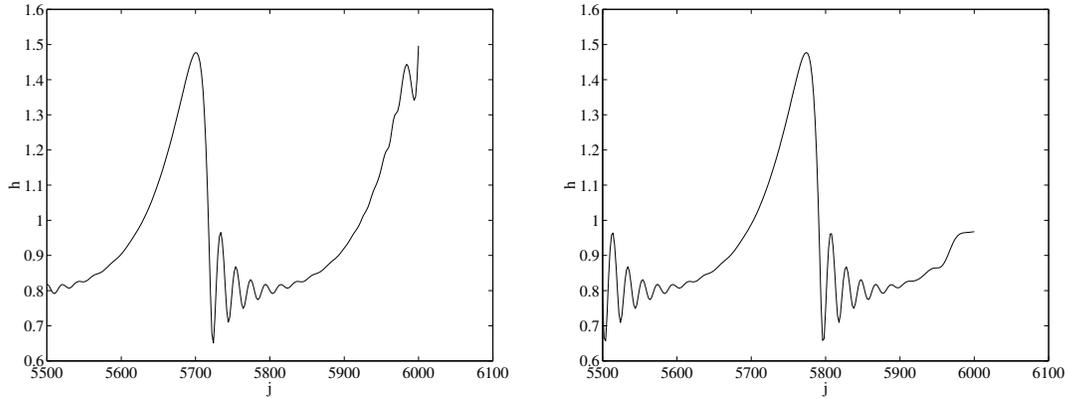


FIG. 8.3 – exemple de zone tampon au bord aval pour le modèle simplifié, avec  $\delta = 15.9$ ,  $\zeta = 2.18$  et  $\eta = 0.0935$  ( $R = 39$ ,  $\Gamma = 487$ ,  $\theta = 8^\circ$ ) et un pas  $\Delta x = 0.1$  correspondant aux expériences de Liu & Gollub [81].

Le théorème d'équivalence de Lax [97] affirme que dans le cas d'un schéma aux différences finies consistant pour un problème linéaire, il y a équivalence entre convergence et stabilité. Dans un cas linéaire, on peut donc se contenter de faire une étude de stabilité pour ensuite conclure sur la convergence du schéma. Ceci n'est pas possible ici. On se convainc pourtant facilement que, si le problème posé admet une solution bornée, la convergence du schéma vers cette solution implique la stabilité puisque dans le cas contraire la norme de  $H_j^{(n)}$  tendrait vers l'infini avec  $n$ . Cependant, pour le problème de Cauchy (8.58–8.60), l'étude de stabilité est rendue difficile par la complexité des équations et la présence des non-linéarités. Ce problème n'a pas été abordé et nous nous sommes contentés d'une approche pragmatique aidée par les résultats déjà connus sur la convergence du schéma de Crank-Nicholson.

Richtmyer & Morton [97] énoncent le résultat suivant quant à la stabilité du schéma de Crank-Nicholson. Considérons le problème unidimensionnel

$$\partial_t u + a(x) \partial_x u = 0, \quad (8.67)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = F(x), \quad (8.68)$$

où  $a(x)$  est une fonction positive. Le schéma de Crank-Nicholson correspondant à (8.67–8.68) est stable et convergent si

$$4K \Delta t < 1, \quad (8.69)$$

où  $K$  est une constante de Lipschitz de la fonction  $a(x)$ , telle que  $\forall x, x' \in \mathbb{R}$ ,  $|a(x) - a(x')| \leq K|x - x'|$ . Or  $a(x) = -\partial_t u / \partial_x u \sim -\Delta x / \Delta t$ . Cette remarque

suggère de vérifier un critère similaire à la condition nécessaire de convergence de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) pour un schéma aux différences finies approximant un problème aux valeurs initiales [55].

Soit une équation d'évolution  $E(u)$  pour une grandeur  $u$ , donnons-nous une condition initiale de Cauchy  $u(x, 0) = \phi(x)$  et un schéma discrétisé  $E^{\Delta x, \Delta t}(u_j^{(n)})$  de pas  $\Delta x$  et  $\Delta t$  sur un maillage  $(x_j, t_n)$ . Appelons,  $G_\phi(P)$ , l'ensemble des points du domaine de définition de  $\phi$  dont dépend la solution  $u$  au point  $P$  du maillage et  $G_\phi^{\Delta x, \Delta t}(P)$  l'ensemble des points du maillage en  $t_0$  dont dépend la solution numérique  $u_j^{(n)}$  au point  $P$ . Alors, s'il y a convergence, tout voisinage de  $G_\phi(P)$  contient au moins un point de  $G_\phi^{\Delta x, \Delta t}(P)$  pour  $\Delta x$  suffisamment petit.

L'application de la condition CFL implique généralement une contrainte sur le choix du pas de temps. Énoncée en termes simples, celle-ci impose que l'information contenue dans la donnée  $\phi$  au temps  $t_0$  soit accessible par la solution au pas de temps  $t_n$ , ce qui implique que la vitesse de propagation de l'information initiale à l'intérieur du maillage soit suffisamment rapide d'où généralement une contrainte du type  $\Delta x / \Delta t > K$  où  $K$  est une constante.

En nous inspirant de l'exemple (8.67–8.68), définissons une vitesse de propagation locale  $a_j^{(n)} = \Delta t \|(\partial_x H)_j^{(n)}\| / \|H_j^{(n)} - H_j^{(n-1)}\|$ . On impose alors que la diffusion de l'information dans le schéma soit plus rapide que la vitesse locale  $a_j^{(n)}$  en tout point  $x_j$ . Soit encore

$$\Delta t < \frac{C \Delta x}{\max_j |a_j^{(n)}|}, \quad (8.70)$$

avec  $C$  une constante choisie telle que  $C < 1$ .

En pratique, une procédure adaptative du pas de temps a été implémentée de manière à augmenter également le pas de temps quand celui-ci devenait trop petit soit lorsque (8.70) est vérifiée avec une constante  $C'$  choisie telle que  $C' < C$ .

Cependant la contrainte (8.70) a été choisie de manière intuitive sans aucune preuve à l'appui et le seul vrai test de convergence du schéma consiste à vérifier que la solution du calcul n'est pas dépendante du pas d'espace choisi lorsque celui-ci est suffisamment petit.

L'application du critère (8.70) donne de bons résultats. Toutefois, prendre une condition initiale sous la forme d'un film uniforme  $H_0(x) = (h(x, 0), q(x, 0)) = (1, 1/3)$  dans l'ensemble du domaine d'intégration conduit lors des calculs à la formation d'une première onde solitaire de grande amplitude et de grande vitesse. Lors des simulations de l'évolution spatiale du film forcé correspondant aux expériences de Liu & Gollub [81], la présence de cette onde nécessite un choix prohibitivement petit du pas de temps  $\Delta t$ . De plus, cette onde engendre des gradients très importants à sa crête de sorte que le pas d'espace doit être choisi suffisamment petit afin de ne pas y voir apparaître des instabilités numériques, instabilités que le choix d'un petit pas de temps ne suffit pas à éliminer (cf. figs. 8.4 et 8.5).

Dans ce cas, nous avons choisi une condition initiale sous la forme d'un ressaut hydraulique

$$h(x, 0) = 1 + A \left( \frac{2}{\pi} \arctan(x - x') - 1 \right),$$

$$q(x, 0) = \frac{1}{3} \left( 1 + (3 - 6A + 4A^2) (h(x, 0) - 1) \right), \quad (8.71)$$

de telle manière que le transitoire soit rapidement évacué.

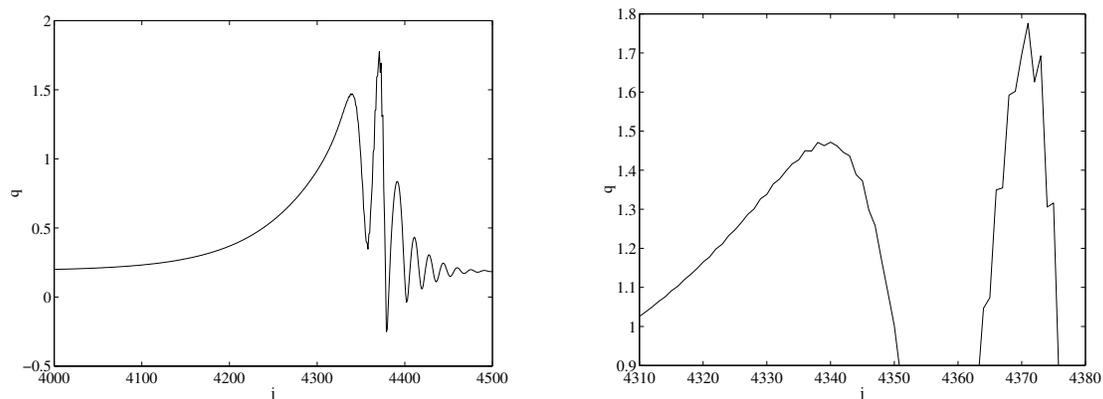


FIG. 8.4 – exemple d’instabilité numérique à la crête d’une onde solitaire pour le modèle intégral-collocation au deuxième ordre (éqs.(78–80) ch. 10)

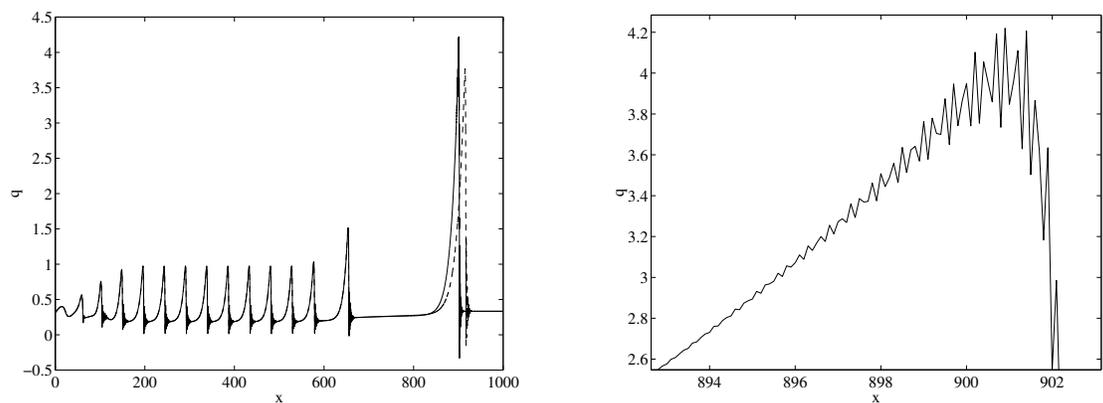


FIG. 8.5 – Comparaison entre deux calculs pour deux pas d’espace différents  $\Delta x = 0.02$  (pointillés) et  $\Delta x = 0.1$  (trait continu). Les paramètres correspondants sont  $\beta = 6.4^\circ$ ,  $R = 19.3$  et  $\Gamma = 521$  [81]. À gauche, instantané du débit local  $q$  à la fin de la simulation. À droite, vue agrandie de l’instabilité de la crête de l’onde de plus grande amplitude pour  $\Delta x = 0.1$ .

# Chapitre 9

## Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire est une contribution à la compréhension des mécanismes conduisant au désordre spatio-temporel un film mince visqueux s'écoulant par gravité le long d'une paroi inclinée. La formulation de modèles simplifiés en a constitué la première étape. Elle a été suivie d'une recherche des solutions bidimensionnelles et stationnaires dans leur référentiel en mouvement avec les outils des systèmes dynamiques, puis d'une étude de leur stabilité grâce à une analyse de Floquet. Enfin, les simulations numériques d'un film forcé au bord amont à l'aide du modèle simplifié au second ordre (4.65–4.66) ont achevé l'étude.

L'importante recherche bibliographique accompagnant ce travail a révélé un problème d'une grande complexité mettant en jeu des effets physiques très divers (écoulement visqueux avec surface libre, tension superficielle en milieu ouvert). Son traitement demande un travail de rationalisation nécessitant la formulation de modèles réalistes. Une telle simplification est ici rendue possible par la cohérence imposée par la viscosité permettant de réduire la dimensionalité du problème initial à l'aide du principe d'esclavage.

Notre effort de modélisation s'est fondé sur une démarche systématique inspirée des méthodes aux résidus pondérés. Il a débouché sur la formulation de modèles cohérents au premier et second ordre vis-à-vis du gradient de l'interface et ne dépendant pas de la méthode aux résidus pondérés choisie. Par construction ces modèles décrivent fidèlement à leur niveau le développement des ondes longues au voisinage du seuil. La recherche des familles d'ondes solitaires correspondantes suggère de plus que ces modèles ne conduisent pas à l'apparition de singularité en temps fini pour une gamme étendue de paramètres. Les principales limitations des modèles déjà présents dans la littérature (équation de Benney (3.33) et modèle de Shkadov (3.61)) ont donc été surmontées.

L'étude des ondes stationnaires dans leur référentiel en mouvement est en bon accord avec les simulations numériques directes et les expériences. En particulier, il a été démontré qu'une légère approximation pouvait conduire à un modèle simplifié au second ordre (4.65–4.66) reproduisant de manière fidèle les familles de solutions obtenues par simulation numérique directe. Mais plus important encore, cette étude a permis de mettre en évidence le rôle prépondérant joué par les termes visqueux au second ordre sur la forme et la dispersion des ondes, sur la présence

de chaos homocline et sur les diagrammes de bifurcation des ondes stationnaires. Les études de stabilité linéaire et les simulations numériques d'un écoulement forcé périodiquement ou aléatoirement à son bord aval confirment le bon comportement du modèle simplifié et son très bon accord avec les expériences [81, 82] et les simulations numériques directes [96]. De plus, les théories d'interaction entre structures cohérentes développées par Elphick *et al.* [43, 44], Balmforth *et al.* [4, 5] et Kawahara *et al.* [69, 70] insistent sur l'importance de la dispersion pour traiter la formation et l'interaction des ondes solitaires dominant la dynamique aléatoire du film. La théorie élaborée par Chang *et al.* [26], qui ne tient pas compte de la dispersion d'origine visqueuse, doit donc être corrigée dans ce sens.

Les instabilités secondaires 3D ont été abordées grâce à l'analyse de stabilité des ondes périodiques stationnaires 2D solutions de (4.65–4.66). Là encore, les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats antérieurs [18]. Toutefois, bien que le modèle (4.65–4.66) reproduise correctement les caractéristiques (profils, amplitudes, vitesses et longueurs) des ondes parallèles stationnaires et les processus de croissance et de saturation non-linéaire conduisant à partir d'une excitation périodique au bord amont à la formation des trains d'ondes périodiques correspondants, l'analyse de stabilité de ces ondes ne permet pas de rendre compte des observations expérimentales des instabilités tridimensionnelles du film. En particulier, en accord avec les études théoriques antérieures [35, 22], notre étude prédit presque toujours une instabilité sous-harmonique et ne peut expliquer les instabilités 3D synchrones mises en évidence par Liu *et al.* [82]. Notons cependant que l'analyse de Floquet entreprise repose sur le postulat que les ondes 2D arrivent à saturation *avant* de développer une instabilité 3D. Or ceci n'est pas garanti expérimentalement de sorte que ce type d'approche ne peut rendre compte de la compétition entre instabilités 2D et 3D. Il se peut également que cet écart soit imputable à l'absence de prise en compte d'un ou plusieurs effets physiques. Les ondes expérimentalement observées ayant une courbure non négligeable, les effets de bord latéraux influent peut-être sur les mécanismes de sélection de l'instabilité 3D dominante et il serait intéressant de tenir compte de la courbure des fronts solitaires (cf. fig 1.4) dans leur analyse.

Les modèles développés dans cette étude et en particulier le modèle simplifié (4.65–4.66) sont suffisamment simples pour envisager des simulations numériques du développement en espace des motifs 3D observés expérimentalement en s'affranchissant des traditionnelles conditions aux limites périodiques, ce qui permettra de lever nos doutes quant aux conclusions tirées d'une simple analyse de Floquet des ondes saturées 2D. Cette étude devra être complétée par l'obtention de fronts solitaires courbés 'en fer à cheval' [86, 35, 20] et de leur étude de stabilité.

Enfin, ce travail m'a permis de me familiariser avec les outils de l'analyse numérique, de la théorie des systèmes dynamiques et de celle des instabilités hydrodynamiques. L'écoulement d'un film mince le long d'un plan incliné constitue donc une étude de cas que nous avons essayé de pousser aussi loin que possible. Elle démontre qu'il est parfois possible de proposer des modèles simples permettant de rendre compte qualitativement mais surtout quantitativement des observations expérimentales et d'espérer ainsi une compréhension détaillée des mécanismes conduisant au désordre spatio-temporel. À plus long terme, par son analogie avec le

problème de la transition vers la turbulence des couches limites, notre travail offre l'espoir de comprendre les mécanismes des instabilités 3D dans ces écoulements et d'y contrôler la production de la turbulence.

## Chapitre 10

Annexe : Eur. Phys. J. B 6,  
277–292 (1998)

# Bibliographie

- [1] Alekseenko, S.V., Nakoryakov, V.Y. and Pokusaev, B.G. 1985. Wave Formation on a Vertical Falling Liquid Film. *AIChE J.***31** : 1446-60.
- [2] Alekseenko, S.V., Nakoryakov, V.Y. and Pokusaev, B.G. 1990. *Wave flow of liquid films*. ed. F. Tukano, Begell House.
- [3] Allgower, E.L., Georg K., *Numerical continuation methods* (Spriger-Verlag, 1990).
- [4] Balmforth, N.J. 1995. Solitary waves and homoclinic orbits. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1995. **27** : 335-73.
- [5] Balmforth, N.J., Ierley, G.R. and Worthing, R. 1997. Pulse formation in an unstable medium. *preprint submitted to Siam J. Appl. Math.*
- [6] Balmforth, N.J., Ierley, G.R. and Spiegel E.A. 1994. Chaotic pulse trains. *SIAM J. Appl. Math.* 54 (5) : 1291-334.
- [7] Benjamin, B.T. 1957. Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluid. Mech.* **2** :554-74; corrigendum, **3** : 657.
- [8] Benjamin, B.T. 1961. The development of three-dimensional disturbances in an unstable film of liquid flowing down an inclined plane. *J. Fluid. Mech.* **10** :401-19.
- [9] Benney, J. 1966. Long waves on liquid film. *J. Math. Phys.* **45** : 150-5.
- [10] Bertschy, J.R., Chin, R.W. and Abernathy, F.H. 1983. High-strain-rate free-surface boundary-layer flows. *J. Fluid Mech.* **126** : 443-61.
- [11] Bertozzi, A.L. and Pugh, M. 1998. Long-wave instabilities and saturation in thin film equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **51** : 625-661.
- [12] Binnie, A.M. 1957. Experiments on the onset of wave formation on a film of water flowing down a vertical plane. *J. Fluid Mech.* **2** : 551-553.
- [13] Boag, J.W, Rubinin, P.E., Shoenberg, D. 1990. *Kapitza in Cambridge and Moscow. Life and letters of a Russian physicist*. North Holland.
- [14] Brevdo, L., Laure, P., Dias, F. and Bridges, T.J. 1999. Linear pulse structure and signaling in a film flow on an inclined plane. *J. Fluid Mech.* **396** : 37-71.
- [15] Carbone, F., Aubry, N., Liu, J., Gollub, J.P. and Lima, R. 1996. Space-time description of the splitting and coalescence of wave fronts in film flows. *Physica D* 96 (1996) 182-199.

- [16] Champneys, A.R. and Kuznetsov, Y.A. 1994. Numerical detection and continuation of codimension-two homoclinic bifurcations. *Int. J. Bif. and Chaos* **4** : 785-822.
- [17] Chang, H.C. 1986. Traveling waves on fluid interfaces : Normal form analysis of the Kuramoto-Sivashinsky equation. *Phys. Fluids* **29** : 3142-47.
- [18] Chang, H.C., Demekhin, E.A. and Kopelevitch, D.I. 1993. Nonlinear evolution of waves on a vertically falling film. *J. Fluid Mech* **250** : 433-480.
- [19] Chang, H.C., Demekhin, E.A. and Kopelevitch, D.I. 1993. Laminarizing effects of dispersion in an active-dissipative nonlinear medium. *Physica D* **63** : 299-320.
- [20] Chang, H.C., Demekhin, E.A. and Kopelevitch, D.I. 1993. Construction of stationary waves on a falling film. *Comp. Mech.* **11** : 313-322.
- [21] Chang, H.C. 1994. Wave evolution on a falling film. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1994. **26** : 103-36.
- [22] Chang, H.C., Cheng, M., Demekhin, E.A. and Kopelevitch, D.I. 1994. Secondary and tertiary excitation of three-dimensional patterns on a falling films. *J. Fluid Mech.* **270** : 251-75.
- [23] Chang, H. C., Demekhin, E. A. and Kalaidin,E. 1995. Interaction dynamics of solitary waves on a falling film. *J. Fluid Mech.* **294** : 123-154.
- [24] Chang, H.C., Demekhin, E.A. and Kopelevitch, D.I. 1995. Stability of a solitary pulse against wave packet disturbances in an active medium. *Phys. Rev. Letters* **75** : 1747-50.
- [25] Chang, H.C., Demekhin, E.A. and Kopelevitch, D.I. 1996. Local stability theory of solitary pulses in an active medium. *Physica D* **97** : 353-75.
- [26] Chang, H. C., Demekhin, E. A. 1996. Solitary waves formation and dynamics on falling films. in *Advances in applied mechanics* **32** : 1-58.
- [27] Chang, H. C., Demekhin, E. A. and Kalaidin,E. 1996. Simulation of noise-driven wave dynamics on a falling film. *AIChE J.* **42** : 1553-68.
- [28] Chang, H. C., Demekhin, E. A., Kalaidin,E. and Ye, Y. 1996. Coarsening dynamics of falling-film solitary waves. *Phys. rev. E* **54** : 1467-77.
- [29] Chang, H. C., Demekhin, E. A., Kopelevitch, D.I. and Ye, Y. 1996. Nonlinear wavenumber selection in gradient-flow systems. *preprint*
- [30] Chang, H. C., Demekhin, E. A., Kalaidin,E. 1996. Generation and suppression of radiation by solitary pulses. *preprint*
- [31] Cheng, M. and Chang, H.C. 1995. Competitions between subharmonic and sideband secondary instabilities on a falling film. *Phys. Fluids* **7** : 34-54.
- [32] Cross, M.C. and Hohenberg, P.C. 1993. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.* **65** : 851-1112.
- [33] Demekhin, E.A., Demekhin,I.A. and Shkadov,V.Y. 1983. Solitons in viscous films down a vertical wall. *Izv. Ak. Nauk SSSR, Mekh. Zhi. Gaza* **4** : 9-16.

- [34] Demekhin, E.A., Kaplan, M.A. and Shkadov, v.Ya. 1987. Mathematical models of the theory of viscous liquid films. *Izv. Ak. Nauk SSSR, Mekh. Zhi. Gaza* **6** : 73-81.
- [35] Demekhin, E.A. and Shkadov, V.Ya. 1984. Three-dimensional waves in a liquid flowing down a wall. 1984. *Izv. Ak. Nauk SSSR, Mekh. Zhi. Gaza* **5** : 21-27.
- [36] Demekhin, Y.A., Tokarev, G.Y. and Shkadov, V.Y. 1991. Hierarchy of bifurcations of space-periodic structures in a nonlinear model of active dissipative media. *Physica D* **52** : 338-61.
- [37] Dijkstra, H.A. 1998. Pattern selection in surface tension driven flows. in *Free surface flows*, ed. by Kuhlmann, H.C. and Rath, H.-J. (Springer-Verlag Wien New York).
- [38] Doedel, E.J. and Kernévez, J.P. 1986. AUTO : Software for continuation problems in ordinary differential equations with applications, Technical report, California Institute of Technology. Applied Mathematics.
- [39] Doedel, E.J., Keller, H.B, and Kernévez, J.P. 1991. Numerical analysis and control of bifurcations problems : (I) Bifurcation in finite dimensions. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **1** : 493-520.
- [40] Doedel, E.J., Keller, H.B, and Kernévez, J.P. 1991. Numerical analysis and control of bifurcations problems : (II) Bifurcation in infinite dimensions. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **1** : 745-772.
- [41] Drazin, P.G. and Johnson, R.S. 1989. *Solitons : an introduction*. Cambridge University Press.
- [42] Drazin, P.G. 1992. *Nonlinear systems*. Cambridge University Press.
- [43] Elphick, C., Meron, E. and Spiegel, A. 1988. Spatiotemporal Complexity in Travelling Patterns. *Phys. Rev. Letters* **61** : 496-99 .
- [44] Elphick, C., Ierley, G. R., Regev, O. and Spiegel, E. A. 1991. Interacting localized structures with Galilean invariance. *Phys. Rev. A* **44** : 1110-23.
- [45] Émery, H. et Brosse, O. 1995. Écoulement d'un film le long d'un plan incliné : développement spatio-temporel des instabilités. École Polytechnique, rapport d'option X92.
- [46] Finlayson, B.A., *The method of weighted residuals and variational principles, with applications in fluid mechanics, heat and mass transfer* (Academic Press, 1972)
- [47] Feigenbaum, M. 1983 Universal behavior in nonlinear systems. *Physica* **7D** : 16.
- [48] Floryan, J.M., Davis, S.H. and Kelly, R.E. 1987. Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane. *Phys. Fluids* **30** : 983-9.
- [49] Frenkel, A.L. 1992. Nonlinear theory of strongly undulating thin films flowing down vertical cylinders. *Europhys. Lett.* **18** : 583-588.
- [50] Frenkel, A.L. and Indireskumar, K. 1996. Derivations and simulations of evolution equations of wavy film flows, in *Mathematical modeling and simulation in hydrodynamic stability*, ed. D.N. Riahi, World Scientific, Singapore.

- [51] Frisch, U. 1995. *Turbulence, the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- [52] Gaspard, P. 1993. Local birth of homoclinic chaos. *Physica D* **62** : 94-122.
- [53] Gjevik, B. 1970. Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films. *Phys. Fluids* **13** : 1918-25.
- [54] Glendinning, P. and Sparrow, C. 1984. Local and Global Behaviour near Homoclinic Orbits. *J. Stat. Phys.* **35** : 645-96.
- [55] Godounov, S. et Riabenki, V. 1977. *Schémas aux différences*. Éd. Mir, Moscou.
- [56] Gottlieb, D and Orszag, S. 1977. *Numerical analysis of spectral methods : theory and applications*. CBMS **26**, SIAM, Philadelphia.
- [57] Guckenheimer, J. and Holmes, P. 1983. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag.
- [58] Herbert, T. 1988. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20** : 487-526.
- [59] Hinch, E.J. 1984. A note on the mechanism of the instability at the interface between two shearing fluids. *J. Fluid Mech.* **144** : 463-465
- [60] Ho, L.W. and Patera, A.T. 1990. A Legendre spectral element method for simulation of unsteady incompressible viscous free-surface flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **80** :355-366.
- [61] Hocherman, T. and Rosenau, P. 1993. On KS-type equations describing the evolution and rupture of a liquid interface. *Physica D* **67** : 113-125
- [62] Hsu, F.K. M.S. thesis, Clarkson College of Technology, 1977.
- [63] Huerre, P. and Monkewitz, P.A. 1990. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1990. **22** : 473-537.
- [64] Huerre, P. and Rossi, M. 1998. Hydrodynamic instabilities in open flows, in *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*. pp. 81–294, ed. by Godrèche C. and Manneville P. (Cambridge University Press).
- [65] Joo, S.W. and Davis, S.H. 1992. Instabilities of three-dimensional viscous falling films. *J. Fluid Mech.* **242** : 529-47.
- [66] Joo, S.W. and Davis, S.H. and Bankoff, S.G. 1991. Long-wave instabilities of heated falling films : two-dimensional theory of uniform layers. *J. Fluid Mech.* **230** : 117-46.
- [67] Joulin, G. and Vidal, P. 1998. An introduction to the instability of flames, shocks and detonations, in *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*. pp. 81–294, ed. by Godrèche C. and Manneville P. (Cambridge University Press).
- [68] (a) Kapitza, P.L. and Kapitza, S.P. 1949. Wave flow of thin layers of a viscous fluid. *Zh. Ekper. Teor. Fiz.* **19**, 105. traduction anglaise dans (b) *Collected papers of P.L. Kapitza* (ed. D. Ter Haar), pp. 690-709.
- [69] Kawahara, T. 1983. Formation of Saturated Solitons in a Nonlinear Dispersive System with Instability and Dissipation. *Phys Rev. Letters* **51** : 381-3.
- [70] Kawahara, T. and Toh, S. 1988. Pulse interactions in an unstable dissipative-dispersive nonlinear system. *Phys. Fluids* **31** :2103-2111.

- [71] Keller, H.B. 1977. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. in *Applications of bifurcation theory.*, pp. 359-384, ed. Rabinowitz, P.H., New York Academic press.
- [72] Kelly, R.E., Goussis, D.A., Lin, S.P. and Hsu, F.K. 1989. The mechanism for surface wave instability in film flow down an inclined plane. *Phys. Fluids A1* : 819-828.
- [73] Kerchman, V.I. and Frenkel, A.L. 1994. Interactions of coherent structures in a film flow : simulations of a highly nonlinear evolution equation. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* **6** : 235-254.
- [74] Krishna, M.V.G. and Lin, S.P. 1977. Nonlinear stability of a viscous film with respect to three-dimensional side-band disturbances. *Phys. Fluids* **20** : 1039-43.
- [75] Lee, J.-J. and Mei, C.C. 1996. Stationary waves on an inclined sheet of viscous fluid at high Reynolds and moderate Weber numbers. *J. Fluid Mech.* **307** : 191-229.
- [76] Levich, V.G. 1959. *Physico-chemical hydrodynamics* (Fizmatgiz, Moscou).
- [77] Lin, S.P. 1974. Finite amplitude side-band stability of a viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **63** : 417-429.
- [78] Liu, J., Paul, J.D., Banilower, E. and Gollub, J.P. 1991. Film flow instabilities and spatiotemporal dynamics. in *proceed. of the 1st Exp. Chaos Conf.* ( Arlington Virginia )
- [79] Liu, J. and Gollub, J.P. 1993. Onset of Spatially Chaotic Waves on Flowing Films. *Phys. Rev. Letters* **70** : 2289-92.
- [80] Liu, J., Paul, J. D. and Gollub, J.P. 1993. Measurements of the primary instabilities of film flows. *J. Fluid Mech.* **250** : 69-101.
- [81] Liu, J. and Gollub, J.P. 1994. Solitary wave dynamics of film flows. *Phys. Fluids* **6** : 1702-12.
- [82] Liu, J., Schneider, B. and Gollub, J.P. 1995. Three-dimensional instabilities of film flows. *Phys. Fluids* **7** : 55-67.
- [83] Manneville, P. 1991. *Structures dissipatives, chaos et turbulence.* Aléa-Saclay.
- [84] Nakaya, C. 1975. Long waves on a thin fluid layer flowing down an inclined plane. *Phys. Fluids* **18** : 1407-12.
- [85] Nakaya, C. 1989. Waves on a viscous fluid down a vertical wall. *Phys. Fluids A* **1** : 1143-54.
- [86] Nakoryakov, V.E., Pokusaev, B.G. and Alekseenko, C.B. and Orlov, V.V. 1977. *Inzh.-Fiz Zh.* **33** : 399-404.
- [87] Nepomnyashchy, A.A. 1974. Stability of wavy conditions in a film flowing down on inclined plane. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk i Gaza* **3** : 28-34.
- [88] Nusselt, W. 1916. Die oberflächenkondensation des Wasserdampfes. *Z. Ver. Dtsch. Ing.* **60** : 541-552.
- [89] Ooshida, T. 1999. Surface equation of falling film flows which is valid even far beyond the criticality. *à paraître dans Phys. Fluids*

- [90] Petviashvili, V.I. and Tsvelodub, O.Y. 1978. Horseshoe-shaped solitons on a flowing viscous film of fluid. *Sov. Phys. Dokl.* **23** : 117-8.
- [91] Pierson, F.W. and Whitaker, S. 1977. Some theoretical and experimental observations of the wave structure of falling liquid films. *Ind. Eng. Chem. Fundam.* **16** : 401-408.
- [92] Press, W.H, Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P. 1992. *Numerical recipes in Fortran 77. The art of scientific computing. Second Edition.* Cambridge University Press.
- [93] Prokopiou, T., Cheng, M., Chang, H.C. 1991. Long waves on inclined films at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **222** : 665-691.
- [94] Pumir, A. 1982. *Structures localisées et turbulence.* thèse de l'université P. & M. Curie (Paris VI), spécialité physique théorique.
- [95] Pumir, A., Manneville, P. and Pomeau, Y. 1983. On solitary waves running down an inclined plane. *J. Fluid Mech.* **135** : 27-50.
- [96] Ramaswamy, B., Chippada, S. and Joo, S.W. 1996. A full-scale numerical study of interfacial instabilities in thin-film flows. *J. Fluid Mech* **325** : 163-194.
- [97] Richtmyer, R.D. and Morton, K.W. 1967. *Difference methods for initial-value problems.* Interscience
- [98] Roberts, A.J. 1996. Low-dimensional models of thin fluid dynamics. *Physics Letters A* **212** : 63-71.
- [99] Roskes, G.J. 1970. Three-Dimensional Long Waves on a liquid Film. *Phys. Fluids* **13** : 1440-45.
- [100] Rosenau, P. and Oron, A. 1992. Bounded and unbounded patterns of the Benney equation. *Phys. Fluids A4* : 1102-04.
- [101] C. Ruyer-Quil, P. Manneville, "Transition to turbulence of fluid flowing down an inclined plane : Modeling and simulation," *Proceedings of the 7th European Turbulence Conference*, Saint Jean Cap Ferrat, 06/30-07/03/1998, in *Advances in Turbulence VII*, ed. U. Frisch, (Kluwer, 1998) 93-96.
- [102] Ruyer-Quil, C. and Manneville, P. 1998. Modeling film flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B* **6** : 277-292.
- [103] Salamon, T.R., Armstrong, R.C. and Brown, R.A. 1994. Traveling waves on vertical films : Numerical analysis using the finite element method. *Phys. Fluids* **6** : 2202-20.
- [104] Schlichting, H. 1955. *Boundary-Layer Theory.* McGraw-Hill, New York.
- [105] Shoenberg, D. 1985. Piotr Leonidovich Kapitza. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* **31** : 327-374.
- [106] Shkadov, V.Ya. 1967. Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity. *Izv. Ak. Nauk SSSR, Mekh. Zhi. Gaza* **2** : 43-51.
- [107] Shkadov, V.Ya. 1977. Solitary waves in a layer of viscous liquid. *Izv. Ak. Nauk SSSR, Mekh. Zhi. Gaza* **1** : 63-66.

- [108] Shkadov, V.Ya. 1968. Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity. *Izv. Ak. Nauk SSSR, Mekh. Zhi. Gaza* **3** : 20-25.
- [109] Smith, M.K. 1990. The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films. *J. Fluid Mech.* **217** : 469-85.
- [110] Stainthorp, F.P. & Allen, J.M. 1965. The developpement of ripples on the inside of a liquid film flowing inside a vertical tube. *Trans. Inst. Chem. Eng.* **43** : 85-91.
- [111] Trifonov, Y. Y. 1989. Bifurcations of two-dimensional into three-dimensional wave regimes for a vertically flowing liquid film. *Izv. Ak. Nauk SSR, Mekh. Zh. Gaza* **5** : 109-114
- [112] Trifonov, Y. Y. and Tselodub, O. Y. 1991. Nonlinear waves on the surface of a falling liquid film. Part 1. Waves of the first family and their stability. *J. Fluid Mech.* **229** : 531-54.
- [113] Tselodub, O. Y. 1980. Stationary travelling waves on a film flowing down an inclined plane. *Izv. Ak. Nauk SSR, Mekh. Zh. Gaza* **4** : 142-6.
- [114] Tselodub, O. Y. and Trifonov, Y. Y. 1992. Nonlinear waves on the surface of a falling liquid film. Part 2. Bifurcations of the first-family waves and other types of nonlinear waves. *J. Fluid Mech.* **244** : 149-69.
- [115] J. Villadsen, M.L. Michelsen, *Solution of differential equation models by polynomial approximation* (Prentice-Hall, 1978).
- [116] Wasden, F.K. and Duckler, A.E. 1989. Insights into the hydrodynamics of free falling wavy films. *AIChE J.* **35** : 187.
- [117] Whitaker, S. 1964. Effect of surface active agents on the stability of falling liquid films. *I & EC fund.* **3** : 132-142.
- [118] Whitham, G.B. 1973. *Linear and nonlinear waves*. Wiley-Interscience.
- [119] Yih, C.-S. 1955. Stability of two-dimensional parallel flows for three-dimensional disturbances. *Quart. Appl. Math.* **12** : 434.
- [120] Yih, C.-S. 1963. Stability of liquid flow down an inclined plane. *Phys. Fluids* **6** : 321-34.
- [121] Yu, L.-Q., Wasden F.K., Dukler, A.E. and Balakotaiah, V. 1995. Nonlinear evolution of waves on falling films at high Reynolds numbers. *Phys. Fluids* **7** : 1886-902.

## Résumé

L'écoulement d'un film mince visqueux le long d'un plan incliné est un prototype d'écoulement ouvert avec surface libre, caractérisé par la présence d'ondes solitaires et d'une suite bien définie d'instabilités secondaires conduisant au chaos spatio-temporel. L'objectif de cette thèse est de développer des modèles mathématiques permettant une description à la fois qualitative et quantitative des instabilités secondaires tridimensionnelles du film. La démarche suivie combine une méthode aux résidus pondérés dans la direction normale au film à un développement en gradients, ceci afin d'éliminer les degrés de liberté esclaves de l'épaisseur  $h$  du film. Un premier modèle, obtenu en utilisant les profils de vitesse asymptotiques au voisinage du seuil et une méthode de moyennage et de collocations aux frontières, est présenté en annexe (ch. 10). Une démarche plus systématique est exposée ici et conduit au premier ordre à un système de deux équations couplées décrivant l'évolution de l'épaisseur  $h$  et du débit local  $q$ . Au second ordre le modèle ainsi écrit implique quatre équations. Cependant un modèle au second ordre simplifié à deux champs (4.65–4.66) est obtenu en appliquant une méthode de Galerkin. À l'aide de la théorie des systèmes dynamiques, la recherche des ondes stationnaires bidimensionnelles dans leur référentiel en mouvement met en évidence le rôle joué par la dispersion d'origine visqueuse quant à la possibilité de chaos homocline, à la forme des ondes solitaires et à la sélection des familles d'ondes stationnaires. L'analyse de Floquet des solutions de (4.65–4.66) reproduit les résultats théoriques antérieurs sans toutefois expliquer les observations expérimentales. Enfin, les simulations numériques du développement spatial des solutions de (4.65–4.66) avec forçage périodique ou aléatoire se comparent très favorablement à l'expérience et à la simulation numérique directe.

**mots-clés :** FILM MINCE, SURFACE LIBRE, ÉCOULEMENT OUVERT, INSTABILITÉ, CHAOS SPATIO-TEMPOREL, CHAOS HOMOCLINE, RÉSIDUS PONDÉRÉS.

## Summary

The thin film flowing down an inclined plane is a prototype of free-surface open flow and is characterized by the presence of solitary waves as well as a well-defined cascade of secondary instabilities leading to spatio-temporal chaos. The aim of this thesis is the formulation of models enabling both a qualitative and a quantitative description of three-dimensional secondary instabilities of the film. Our method combines a gradient expansion to a weighted residual method in the direction normal to the plane, in order to eliminate the degrees of freedom slaved to the film thickness  $h$ . A first model, obtained using the asymptotic velocity profiles close to the threshold and an integral method with collocation at the boundaries, is described in the appendix (Ch. 10). A more systematic methodology is followed here and leads at first order to a system of two coupled evolution equations for the thickness  $h$  and the local flow rate  $q$ . At second order, the model involves four equations. Instead, a simplified second-order model (4.65–4.66), involving two fields only, can be derived by applying a Galerkin method. The role played by viscous dispersion on homoclinic chaos, wave profiles and stationary wave selection, has been pointed out using the tools of dynamical-systems theory to study waves stationary in their moving frame. The stability analysis of the solutions of (4.65–4.66) reproduces earlier theoretical results but turns out to be insufficient to explain experimental observations. Finally, the spatial evolution of the solutions of Equations (4.65–4.66) in the presence of noise or periodic forcing compares favorably to both experiments and direct numerical simulations.

**key words :** THIN FILM, FREE SURFACE, OPEN FLOW, INSTABILITY, SPATIO-TEMPORAL CHAOS, HOMOCLINIC CHAOS, WEIGHTED RESIDUALS.