



POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Laboratoire d'Hydrodynamique

Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité: Mécanique

par

Cornel OLENDRARU

Etude spatio-temporelle de jets et sillages
tournants

soutenue le 17 février 1999
devant le jury composé de:

Mr	Grégoire Casalis	Rapporteur	Directeur de Recherche à l'ONER A, Toulouse
Mr	Olivier Daube	Rapporteur	Professeur, Université d'Evry
Mr	Patrick Huerre	Examineur	Professeur, Ecole Polytechnique
Mme	Christiane Normand	Examineur	Chercheur, CEA, Saclay
Mr	Nigel Peake	Examineur	Professeur, Université de Cambridge, UK
Mr	Pierre Perrier	Président	Dassault Aviation
Mr	Antoine Sellier	Examineur	<i>Maître de conférences</i> Ecole Polytechnique

ECOLE POLYTECHNIQUE
Laboratoire d'Hydrodynamique

Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité: Mécanique

par

Cornel OLENDRARU

Etude spatio-temporelle de jets et sillages
tournants

soutenue le 17 février 1999
devant le jury composé de:

Mr	Grégoire Casalis	Rapporteur	Directeur de Recherche à l'ONER A, Toulouse
Mr	Olivier Daube	Rapporteur	Professeur, Université d'Evry
Mr	Patrick Huerre	Examineur	Professeur, Ecole Polytechnique
Mme	Christiane Normand	Examineur	Chercheur, CEA, Saclay
Mr	Nigel Peake	Examineur	Professeur, Université de Cambridge, UK
Mr	Pierre Perrier	Président	Dassault Aviation
Mr	Antoine Sellier	Examineur	Directeur de Recherche au CNRS, Ecole Polytechnique

A notre fille, Ana, qui en arrivant a donné un vrai sens à ce travail.

A ma famille qui de loin ou de près m'a donné le courage, la confiance et la sérénité.

Et à tous mes amis pour les moments de bonheur, sensibilité et folie pendant toutes ces années
parisiennes.

Ce travail a été entièrement effectué au Laboratoire d'Hydrodynamique de l'Ecole Polytechnique. Je tiens particulièrement à remercier son Directeur, Patrick Huerre, pour m'avoir accueilli dans son Laboratoire dans un premier temps pendant mon stage de D.E.A., puis dans un second temps durant la préparation de cette thèse. Il m'a accordé toute sa confiance et sa générosité.

Merci à Antoine Sellier d'avoir encadré ce travail avec beaucoup de patience et de bonne humeur. Toute ma gratitude pour sa disponibilité extraordinaire envers mes problèmes auxiliaires: administration, intégration, langue française etc.

Je remercie le Département des Relations Extérieures de l'Ecole Polytechnique, et en particulier Madame Martine Guibert pour sa compréhension et son efficacité lors du financement de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Messieurs Olivier Daube et Grégoire Casalis pour avoir accepté d'être Rapporteurs sur ce travail. Enfin, j'exprime ma gratitude à Madame Christiane Normand et à Messieurs Nigel Peake et Pierre Perrier qui ont participé au Jury en tant qu'examineurs.

Table des matières

Introduction	9
1 La stabilité des jets et des sillages tourbillonnaires	11
1.1 Introduction sur les jets et les sillages tourbillonnaires	11
1.1.1 La formation des jets et des sillages tourbillonnaires	12
1.1.2 L'éclatement tourbillonnaire: phénoménologie et applications	13
1.1.3 Les instabilités hydrodynamiques et l'éclatement tourbillonnaire	16
1.2 La stabilité des tourbillons: méthodes d'études et concepts associés	20
1.2.1 La méthodes des modes normaux appliquée aux écoulements en rotation	20
1.2.2 Instabilité convective et instabilité absolue	22
1.2.3 L'approche spatiale	26
2 Etude spatio-temporelle du tourbillon de Batchelor dans le cas du fluide parfait	29
2.1 La stabilité du tourbillon de Batchelor	29
2.1.1 Le tourbillon de Batchelor	29
2.1.2 Le problème aux valeurs et vecteurs propres en fluide parfait	33
2.2 Résolution numérique par une méthode de "shooting"	34
2.2.1 Un problème aux valeurs propres dans le plan complexe	34
2.2.2 Les comportements asymptotiques	36
2.2.3 Points critiques et choix du contour d'intégration	38
2.2.4 Mise en oeuvre pratique et validation du Code numérique	39
2.3 Présentation et discussion des résultats obtenus	44
2.3.1 L'instabilité spatiale du tourbillon	44
2.3.2 Transitions instable convectif-instable absolu	48
2.3.3 Fonctions propres spatiales	56
2.4 Conclusions	56
2.4.1 Résultats principaux	56
2.4.2 Points forts ou avantages de la méthode de shooting	58
2.4.3 Les inconvénients de la méthode de shooting	58
3 Etude spatio-temporelle du tourbillon de Batchelor: influence de la viscosité	61
3.1 Résolution, par méthode spectrale, de l'équation de dispersion en fluide visqueux	62
3.1.1 Le problème aux valeurs et vecteurs propres pour le fluide visqueux	62
3.1.2 La méthode de collocation spectrale de Chebyshev	63
3.1.3 Validation du Code de calcul	67
3.2 Présentation et discussion des résultats obtenus	70
3.2.1 L'influence de la viscosité sur les modes "non-visqueux"	71

3.2.2	Existence de modes visqueux spatialement amplifiés	73
3.3	L'influence de la viscosité sur les courbes de transition instable convectif- instable absolu	75
3.4	Les fonctions propres	87
3.5	Conclusions	88
	Conclusions et perspectives	91
A		101
B		103
C		113
D		139

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de la stabilité de jets et sillages tournants. Ce travail est motivé par l'instabilité de certains écoulements rencontrés dans divers domaines: les tourbillons issus d'une aile delta d'un avion de combat, le sillage tourbillonnaire des avions de transport, l'instabilité d'écoulements géophysiques tels que les tornades. Pour cette classe d'écoulements, une particule fluide a un mouvement hélicoïdal ayant une composante azimutale et une composante axiale de vitesse.

A une certaine vitesse de rotation les jets et les sillages tourbillonnaires peuvent subir une destruction spectaculaire et prématurée qui porte le nom d'éclatement tourbillonnaire. Les causes et les mécanismes qui interviennent dans ce phénomène restent mal identifiés malgré sa mise en évidence depuis plus de quarante ans. Les rubriques 1.1 et 1.2 passent en revue la plupart des théories et modèles proposés pour expliquer ce phénomène.

A notre avis, la théorie la plus séduisante reste celle proposée par Benjamin [7], [8], [9]. Nous nous proposons de voir le phénomène d'éclatement tourbillonnaire comme une transition entre deux états avec des propriétés différentes, appelés état souscritique et état supercritique. Par analogie avec les écoulements compressibles, l'état sous-critique est le pendant d'un écoulement subsonique (où les ondes acoustiques peuvent se propager aussi bien en aval qu'en amont) et l'état supercritique, la contrepartie d'un écoulement supersonique (où les ondes acoustiques peuvent se propager seulement en aval) le phénomène d'éclatement tourbillonnaire tenant le lieu du choc.

Les études ultérieures reposant sur cette théorie n'ont cependant réussi à développer un critère en accord avec les paramètres critiques observés expérimentalement. Le principal inconvénient réside dans l'incapacité du modèle choisi à traiter des perturbations supposées être capables de se propager dans des écoulements souscritiques et supercritiques.

Des études *temporelles* de stabilité sur des modèles idéalisés de jets tournants ont replacé le problème dans le cadre des instabilités hydrodynamiques. Dans cette approche, les perturbations sont des ondes d'instabilité, dispersives, de nombre d'onde azimutaux et axiaux arbitraires.

Dans le cadre de la théorie linéaire des instabilités hydrodynamiques, nous proposons un éclairage nouveau sur la dynamique *spatio-temporelle* des jets et sillages tournants.

Pour cette étude nous avons modélisé les jets et les sillages tournants par le tourbillon de Batchelor. L'obtention de cette solution et sa pertinence en tant que modèle des jets et sillages tournants sont présentées dans la rubrique 2.1.1. Le tourbillon de Batchelor est caractérisé par deux paramètres: le premier lié à la vitesse axiale et le second à la vitesse azimutale.

Nous nous proposons dans un premier temps de délimiter dans l'espace de ces paramètres

de contrôle les domaines de stabilité ou d'instabilité de l'écoulement de base choisi. Ensuite, nous proposons une généralisation des notions d'écoulement supercritique et d'écoulement souscritique à des notions d'écoulement instable convectif et respectivement d'écoulement instable absolu. Nous essayons en fait de trouver un lien entre le phénomène d'éclatement tourbillonnaire et le changement de nature d'instabilité (convective-absolue) dans le tourbillon de Batchelor.

Nous nous proposons donc de déterminer les courbes de transition instable convectif-instable absolu dans l'espace des paramètres de contrôle de l'écoulement de base choisi. Les paramètres critiques obtenus dans notre approche devraient alors être confrontés avec les paramètres critiques observés dans les études expérimentales sur l'éclatement tourbillonnaire.

Après cette brève introduction nous présentons dans le chapitre suivant une description du processus de formation des jets et des sillages tournants, la phénoménologie et les principales applications de l'éclatement tourbillonnaire. Ensuite nous précisons le cadre mathématique de notre étude en introduisant la méthode des modes normaux appliquée aux écoulements en rotation, les concepts d'instabilité convective et absolue et justifions le choix d'une approche purement spatiale pour la résolution de la relation de dispersion. Au chapitre 2 nous présentons l'étude spatio-temporelle du tourbillon de Batchelor dans le cas d'un fluide parfait avec une résolution de la relation de dispersion par une méthode de "shooting". Le chapitre 3 est consacré à l'étude de l'influence de la viscosité sur la stabilité spatio-temporelle de tourbillon de Batchelor. Cette fois, une méthode de collocation spectrale est utilisée pour la résolution de la relation de dispersion. Pour terminer nous présentons les conclusions et les perspectives de notre travail.

Chapitre 1

La stabilité des jets et des sillages tourbillonnaires

1.1 Introduction sur les jets et les sillages tourbillonnaires

L'écoulement d'un fluide en milieu ouvert ou confiné montre souvent des structures rotationnelles cohérentes, appelées couramment *tourbillons*. Les tourbillons sont un spectacle fascinant pour plusieurs raisons.

Tout d'abord leur origine n'est pas toujours évidente, même si au prix d'un arsenal mathématique on peut l'expliquer. Ensuite leur présence est une surprise dans une dynamique souvent monotone, comme l'écoulement laminaire autour d'un obstacle, où dans une dynamique chaotique, comme les écoulements turbulents derrière une aile d'avion, les mélanges etc... L'apparition de tourbillon peut être liée à un changement dans l'équilibre des forces qui régissent l'écoulement. La présence des tensions internes ou des forces extérieures se traduit dans un milieu solide par l'apparition de déformations, de brisures ou de cassures alors que dans un milieu fluide les tourbillons permettent de dissiper l'énergie accumulée sous une forme plus élégante.

Dans un deuxième temps, le tourbillon fascine par sa composante de rotation, qui induit au sein du fluide un mouvement organisé. Au sein de l'écoulement, un tourbillon dissipe par cisaillement et viscosité de l'énergie.

Enfin, la "poésie" du tourbillon vient aussi de son caractère éphémère (dû soit à sa diffusion soit à sa destruction rapide par instabilité). L'existence des anneaux tourbillonnaires formés par la fumée d'une cigarette, des tourbillons de mélange, des tourbillons périodiques de l'allée de von Karman derrière un cylindre, des sillages tourbillonnaires en aéronautique s'avère limitée dans l'espace-temps.

Notre travail s'intéresse particulièrement à ce dernier aspect de la dynamique des tourbillons. Nous étudions les propriétés d'instabilité d'une certaine classe de tourbillons (ceux qui présentent non seulement une importante rotation mais aussi une forte composante de vitesse axiale). Nous appelons ces structures *jets ou sillages tourbillonnaires*, selon la direction de la composante de vitesse axiale. Le processus principal de formation des jets et sillages tourbillonnaires derrière une aile d'avion est présenté à la rubrique suivante.

La dynamique des tourbillons est régie par un système d'équations du mouvement dont, sous certaines conditions, une solution analytique approchée ou exacte existe (penser au tourbillon de Batchelor [4] ou à celui de Burgers [19]). Le passage d'un tel état stationnaire, fourni par un écoulement de base analytique, à un état plus complexe, turbulent ou simplement instable mais sans description en termes d'équations du mouvement, peut faire l'objet d'une étude avec les concepts des instabilités hydrodynamiques. La rubrique 1.1.2

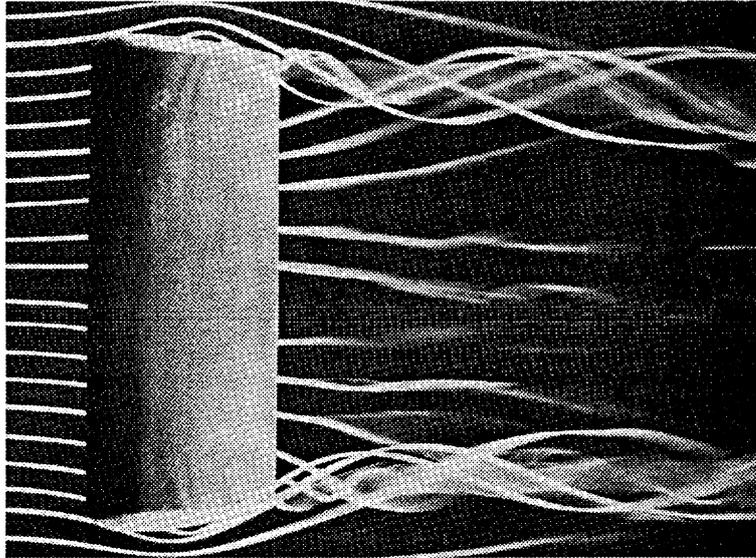


Figure 1.1: La formation des tourbillons de bout d'aile par enroulement de la nappe tourbillonnaire issue d'une surface portante rectangulaire (*Head 1982* [38]).

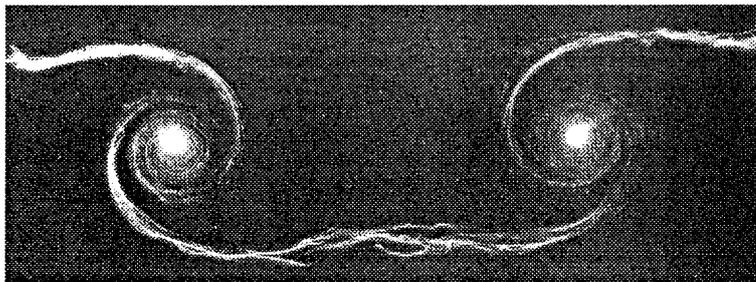


Figure 1.2: La formation des tourbillons de bout d'aile par enroulement de la nappe tourbillonnaire (vue transversale selon la direction de l'écoulement (*Bippes 1972* [14])).

présente la description de *l'éclatement tourbillonnaire*, un phénomène qui conduit à une destruction rapide des tourbillons. Le rôle joué par les instabilités dans ce phénomène est décrit dans la rubrique 1.1.3. La méthode des modes normaux appliquée aux écoulements en rotation ainsi que le cadre mathématique nécessaire pour la définition des concepts d'*instabilité spatio-temporelle*, d'*instabilité convective* et d'*instabilité absolue* sont présentés à la rubrique 1.2.

1.1.1 La formation des jets et des sillages tourbillonnaires

Les jets et les sillages tourbillonnaires apparaissent principalement derrière une surface portante et le processus de leur formation est fortement lié à la séparation de la couche limite existante sur cette surface. Les figures 1.1 et 1.2 montrent la formation de tourbillons de bout d'aile sur une surface portante rectangulaire. Les figures 1.7 et 1.8 montrent la formation des tourbillons sur une aile delta et sur un corps de révolution. Ces tourbillons résultent de l'enroulement de la nappe tourbillonnaire qui se forme sur l'aile. La forme du profil d'aile, la vitesse et l'incidence de l'avion déterminent la séparation de la couche limite et ensuite la forme et l'intensité des tourbillons émis. La forme de ces tourbillons est quasi-cylindrique et axisymétrique et une coupe transversale (selon la direction de l'écoulement; voir la figure 1.2) montre comment la nappe tourbillonnaire s'enroule en une spirale de plus

en plus serrée autour d'un axe de rotation. Cette zone où la vorticité est très concentrée, appelée coeur visqueux, connait une faible expansion radiale quand on s'éloigne de l'aile de l'avion. Au contraire, la distribution de vorticité demeure constante quand on s'éloigne de l'aile car la vorticité est crée dans la couche limite sur la surface portante et ensuite injectée d'une façon continue dans le coeur du tourbillon (voir Batchelor [4]). Ainsi les tourbillons se développent et gardent une structure bien définie jusqu'à leur dissipation progressive par effets visqueux ou par une destruction prématurée due au phénomène d'éclatement tourbillonnaire.

1.1.2 L'éclatement tourbillonnaire: phénoménologie et applications

A une certaine vitesse de rotation et à une certaine distance le long de l'axe de rotation, un jet tourbillonnaire peut être sujet au phénomène d'éclatement. Dans ce phénomène spectaculaire, le coeur du tourbillon subit une dilatation rapide accompagnée d'une altération du champ des vitesses et de l'apparition d'oscillations de grandes amplitudes. En se déplaçant sur l'axe de rotation (c'est-à-dire en coordonnées cylindriques l'axe x ; voir la figure 2.1) nous pouvons décrire en détail les étapes de ce phénomène:

1) Avant le lieu de l'éclatement, l'écoulement se compose d'un coeur tourbillonnaire concentré le long de l'axe x et d'un écoulement extérieur qui peut être considéré comme irrotationnel. La vitesse axiale du tourbillon sur l'axe de rotation est supérieure à celle en dehors du coeur tourbillonnaire ce qui correspond à un profil de type jet. C'est un état bien défini, facile à simuler dans des conditions de laboratoire et apparemment contrôlable par la vitesse de rotation du tourbillon.

2) Cependant, sans aucun signe préalable, sur un intervalle très faible de l'axe x la vitesse axiale du tourbillon peut chuter   zéro (avec l'apparition d'un point d'arrêt). Ce phénomène est rapidement suivi de l'expansion du coeur tourbillonnaire. Une fois celle-ci terminée, la nature de l'écoulement devient compliquée mais trois formes géométriques principales de l'éclatement se distinguent:

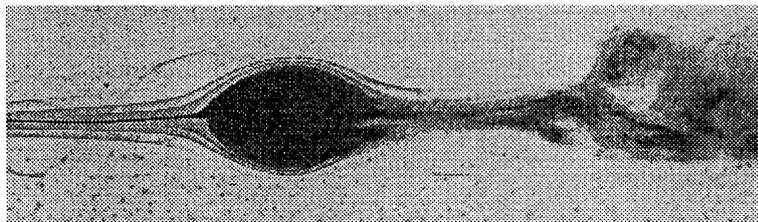


Figure 1.3: L'éclatement de type bulle (*Sarpkaya 1971 [72]*).

a) l'éclatement de type bulle qui est caractérisé par la formation d'une région en forme de bulle quasi-axisymétrique. Les mesures du champ des vitesses effectuées par Bruckner et Althaus [18] ont mis en évidence la présence d'un contre-courant le long de l'axe de rotation et donc l'existence d'une zone de recirculation. De plus, les expériences de Sarpkaya [72] ont révélé qu'aucun échange de fluide n'intervient le long de l'enveloppe de la bulle et que l'écoulement irrotationnel est dévié autour de la bulle, comme si un corps de révolution était placé dans l'écoulement (voir la figure 1.3). L'éclatement de type cône est une variété de l'éclatement de type bulle obtenue dans un milieu non confiné (voir la figure 1.4).

b) l'éclatement de type spirale est caractérisé par une ondulation du tourbillon, suivie d'une torsion de celui-ci en forme de tirebouchon. La spirale de ce tirebouchon s'enroule en sens inverse du sens de rotation du tourbillon avant l'éclatement (voir la figure 1.5).

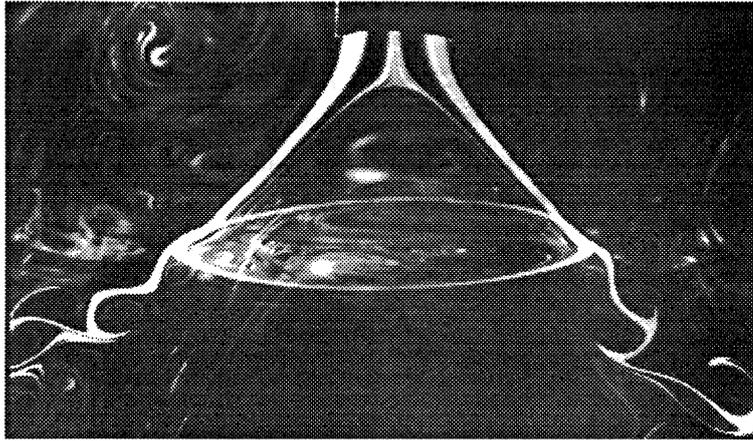


Figure 1.4: L'éclatement de type cone dans un milieu faiblement confiné (*Billant 1998* [13]).

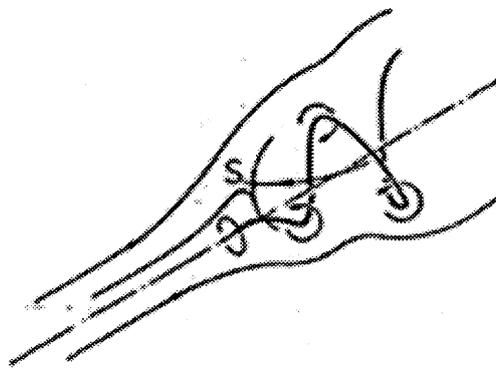


Figure 1.5: La dynamique tri-dimensionnelle de l'éclatement de type spirale avec la formation d'un point d'arrêt S . La spirale du tourbillon éclaté tourne en sens inverse du sens de rotation du tourbillon avant l'éclatement (*Brücker 1993* [17]).

c) **l'éclatement de type double hélice** a été mis en évidence par Sarpkaya [72] (voir figure 1.6). Le coeur tourbillonnaire s'évase hyperboliquement et ensuite s'enroule en deux spirale tressées.

Toutes ces formes géométriques de l'éclatement ont été confirmées numériquement par les études de Krause [48], Spall *et al.* [75], Breur et Hänel [15] et Gatski et Spall [34].

3) En aval de la zone d'éclatement, l'écoulement devient turbulent avec de fortes perturbations. La vitesse axiale du tourbillon diminue sur l'axe ce qui correspond à un profil de type sillage. Un filament de colorant introduit sur l'axe du tourbillon reste concentré et bien défini avant l'éclatement. Ensuite il se contorsionne, oscille fortement et se diffuse enfin par l'apparition de fluctuations turbulentes.

Nous retenons, comme caractéristique marquante de l'éclatement tourbillonnaire, le passage entre deux états bien définis et distincts. En fonction des propriétés de ces deux états, les applications du phénomène d'éclatement tourbillonnaire cherchent soit à le retarder le plus possible soit à le provoquer rapidement. Ainsi, l'éclatement des tourbillons issus du bord d'attaque d'un avion pose de grands problèmes de manoeuvrabilité (Peake et Tobak [69]). D'ailleurs, le phénomène d'éclatement tourbillonnaire lui-même a été mis en évidence pour la première fois par Peckam et Atkinson [70] sur une aile gothique (comme celle de l'avion supersonique Concorde) et confirmé par Elle [28] sur une aile delta (toutes

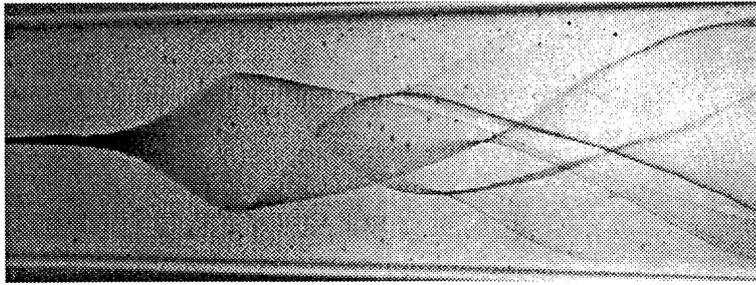


Figure 1.6: L'éclatement de type double hélice (*Sarpkaya 1971 [72]*).

deux placées en forte incidence). La figure 1.7 montre la formation de deux jet tourbillonnaires au bord d'attaque d'une aile delta placée à grande incidence puis leur éclatement. Nous observons que le tourbillon du haut éclate sous une forme spirale alors que celui du bas éclate sous une forme bulle. Même si ces deux tourbillons éclatent simultanément

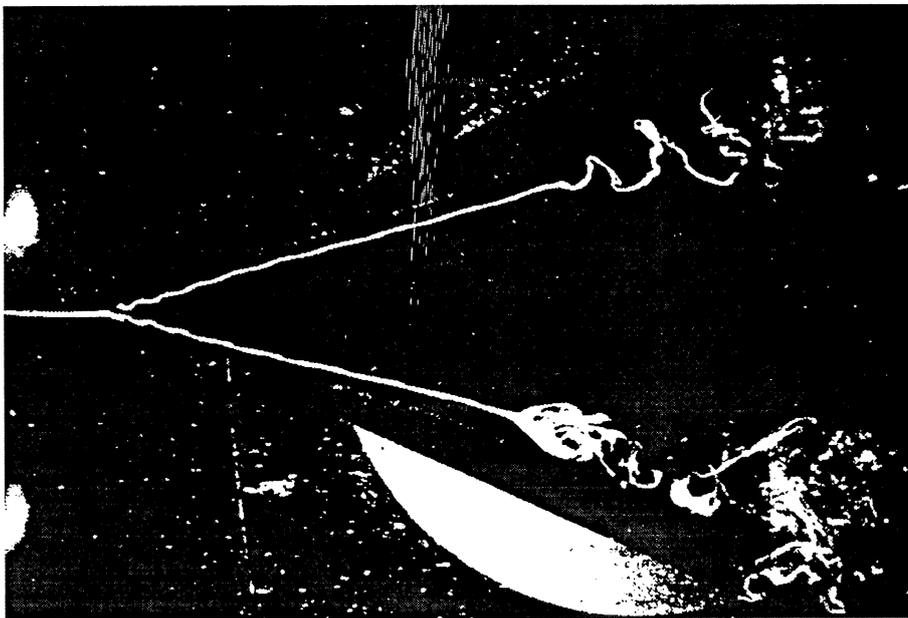


Figure 1.7: L'éclatement des tourbillons issus du bord d'attaque d'une aile delta. Le tourbillon du haut montre un éclatement de type spirale alors que le tourbillon du bas montre un éclatement de type bulle (*Lambourne et Bryer 1961 [51]*).

(cas très peu probable cependant), la différence du type d'éclatement ou/et sa position différente et non stationnaire le long de la corde de l'aile provoquent un déséquilibre dans la répartition transversale des forces aérodynamiques (avec des conséquences parfois dramatiques sur la portance et la traînée). Par exemple, un fort moment de roulis peut en résulter et provoquer le décrochage en vrille de l'avion. Les expériences ont montré que l'éclatement dépend principalement de l'intensité de rotation des tourbillons (directement proportionnelle à l'incidence de l'aile de l'avion; voir Solignac et Pagan [74], [68], Delery [23]). Par conséquent, ce phénomène comporte beaucoup de risques surtout lors des phases d'atterrissage ou de décollage (avion placé en forte incidence). Les fuselages d'avions et particulièrement ceux des missiles et des lanceurs peuvent rencontrer le même type de problème à cause des tourbillons émis (voir la figure 1.8). Pour les missiles et les lanceurs l'éclatement des tourbillons pose d'importants problèmes de trajectoire. De plus, le lieu d'éclatement du tourbillon oscille le long de la corde de l'aile. Cette oscillation peut être à l'origine de phénomènes aéroélastiques tels que des oscillations de l'aile. Enfin,

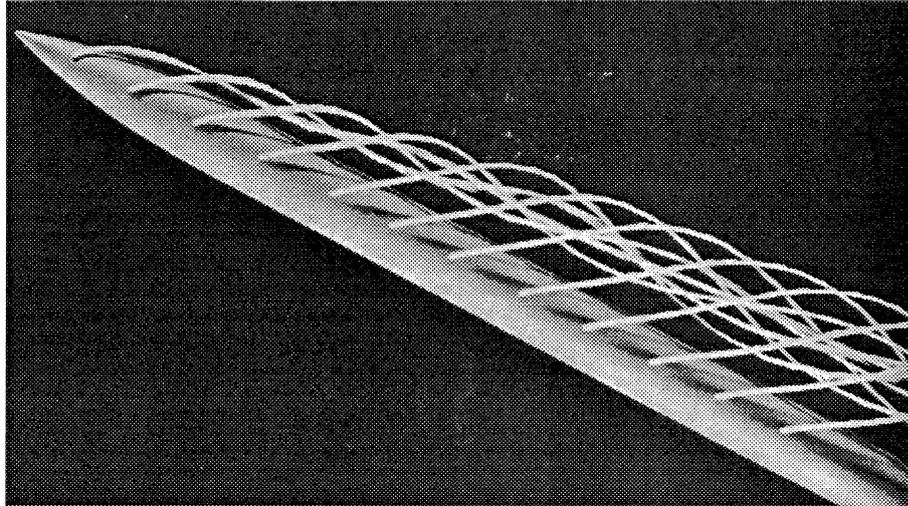


Figure 1.8: La formation des tourbillons sur un corps de révolution tel qu'un fuselage, un missile ou un lanceur (Fiechter 1969 [33]).

l'éclatement tourbillonnaire interagit avec les autres phénomènes traditionnels présents sur une aile d'avion (les chocs et les phénomènes aéroélastiques) en modifiant les propriétés de l'écoulement le plus souvent de façon défavorable. En résumé, le phénomène d'éclatement tourbillonnaire affecte les performances d'un avion de combat et en particulier sa capacité à évoluer aux grandes incidences. Les recherches étudient des configurations d'aile et des formes de bord d'attaque qui retardent le plus possible l'éclatement des tourbillons.

Dans d'autres cas, l'éclatement tourbillonnaire est délibérément favorisé. En effet, l'état après l'éclatement est caractérisé par de grandes oscillations qui dissipent l'énergie mécanique de l'écoulement (voir Chevalier [20] et Bilanin et Widnall [12]). Les gros avions de transport génèrent dans leur sillage de grands tourbillons de forte intensité qui sont de véritables pièges pour les avions évoluant à proximité. Le phénomène d'éclatement tourbillonnaire offre une possibilité de détruire ces tourbillons émis (surtout à l'atterrissage et au décollage) et qui ne se dissipent par viscosité et instabilité [12] qu'au bout d'un certain temps de vie. Ce temps typique de vie se traduit par une distance de sécurité obligatoire entre deux avions (distance évaluée à une centaine d'envergures d'aile du premier avion). Ainsi, les gros porteurs risquent par leur tourbillons d'encombrer encore plus le trafic des aéroports. Les enjeux économiques sont très importants et les projets de gros porteurs (cas de l'Airbus A3XX, [83]) doivent prendre en compte des solutions pour une disparition rapide de tels tourbillons sans que celles-ci n'affectent les performances de l'avion.

Enfin, dans d'autres domaines, l'éclatement des jets de combustible sortant d'un injecteur favorise par production rapide de turbulence l'homogénéisation et la stabilisation de la combustion dans les chambres de combustion des moteurs et augmente ainsi leurs performances. Ce problème a été posé pour la première fois par Swithenbank et Chigier [81] en 1969 pour les combustions supersoniques.

1.1.3 Les instabilités hydrodynamiques et l'éclatement tourbillonnaire

La complexité du phénomène d'éclatement tourbillonnaire explique, depuis sa découverte il y a plus de 40 ans, la quantité impressionnante de travaux ayant tenté d'en fournir une explication complète. Plusieurs articles de synthèse ([53], [54], [80], [29], [23]) passent en revue les travaux expérimentaux, théoriques et numériques consacrés à ce problème complexe. Les théories avancées sont souvent contradictoires car beaucoup des mécanismes

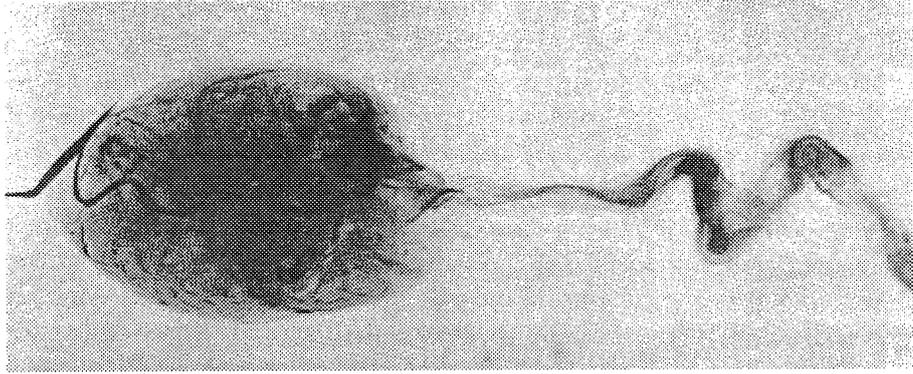


Figure 1.9: Le filament du tourbillon reste concentré, axisymétrique et bien défini avant l'éclatement. La bulle d'éclatement est le lieu d'oscillations fortes, asymétriques et turbulentes (Sarpkaya 1971 [72]).

intervenant dans l'éclatement tourbillonnaire restent mal identifiés.

Toutefois, les études expérimentales visualisent avec précision le phénomène et les mesures des champs de vitesse et de pression ont conduit à l'identification des principaux paramètres qui interviennent. Ainsi, les profils de vitesse axiale, l'intensité de la vitesse azimutale et le gradient de pression présent sur l'axe du tourbillon apparaissent comme les principaux paramètres de contrôle de l'éclatement tourbillonnaire. En pratique, pour certains modèles le seul paramètre qui mesure l'intensité de rotation (le paramètre q) peut s'avérer suffisant pour prédire l'apparition de l'éclatement. Les études expérimentales et numériques (voir Krause [48], [49], [50], Hall [35], [37] et Pagan et Benay [67]) s'accordent sur plusieurs aspects de l'éclatement tourbillonnaire. Les deux autres paramètres que sont les profils de vitesse axiale et le gradient de pression sur l'axe du tourbillon interviennent pour la dynamique de ce dernier mais ne prédisent pas d'éclatement tourbillonnaire pour une vitesse azimutale faible. En effet, l'éclatement tourbillonnaire peut se produire sous l'action d'un gradient de pression adverse qui induit une décélération rapide de la vitesse axiale jusqu'à la formation d'un point d'arrêt et d'une zone de recirculation (défaut de vitesse sur le profil de vitesse axiale) au voisinage de l'axe de rotation du tourbillon. Ce processus dépend cependant de la valeur de la vitesse azimutale de sorte que plus la vitesse azimutale augmente plus la pression sur l'axe du tourbillon augmente et le gradient de pression adverse nécessaire pour l'éclatement du tourbillon diminue. Il existe une valeur seuil de la vitesse de rotation pour laquelle l'éclatement se produit sans aucun gradient de pression adverse. En terme du paramètre de rotation, cela nous fournit un paramètre critique, q_c , qui sert dans la plupart des études expérimentales, théoriques ou bien numériques de critère d'apparition de l'éclatement tourbillonnaire. Un tel critère est pertinent pour modéliser certains aspects du phénomène mais ne peut pas rendre compte de l'éclatement tourbillonnaire dans toute sa complexité. Nous avons décrit l'écoulement en aval de l'éclatement comme étant le siège d'oscillations importantes et d'une turbulence qui s'y développe rapidement. En pratique, si l'écoulement amont est laminaire alors il devient turbulent et s'il était déjà turbulent alors son degré de turbulence augmente (voir l'étude sur l'éclatement tourbillonnaire turbulent de Sarpkaya [73]). En ce qui concerne les oscillations, elles peuvent être asymétriques même si l'écoulement amont est rigoureusement axisymétrique (voir figure 1.9). Les études de Faler et Leibovich [30], [31] ont mis en évidence l'existence d'oscillations à basse fréquence dans la bulle et le sillage de l'éclatement. Ensuite, Garg et Leibovich [32] ont montré expérimentalement que le sillage de l'éclatement tourbillonnaire est instable par rapport aux oscillations asymétriques

(surtout le premier mode azimutal) à basse fréquence. La turbulence et les instabilités déclenchent la destruction du coeur du tourbillon à l'aval de l'éclatement tourbillonnaire. A ce jour, le rôle des instabilités dans l'apparition de l'éclatement tourbillonnaire n'est pas identifié mais ces instabilités jouent vraisemblablement un rôle essentiel dans la définition des propriétés globales de l'écoulement.

Plusieurs théories ont proposé une explication du phénomène d'éclatement tourbillonnaire en considérant les oscillations qui peuvent se développer dans deux états bien définis et distincts et se propager le long de l'axe de rotation du tourbillon. Ainsi, Squire [76] propose une théorie selon laquelle si un tourbillon peut supporter une onde stationnaire (dont la vitesse de groupe est nulle) alors l'éclatement est provoqué par de petites oscillations qui se propagent de l'aval vers l'amont. Il définit deux états: un état supercritique pour lequel l'écoulement ne peut supporter que des ondes se propageant en aval et un état souscritique dans lequel l'écoulement peut supporter des ondes stationnaires et des ondes qui se propagent aussi bien en avant qu'en amont. Pour une certaine valeur de q , l'écoulement passe d'un état supercritique à un état souscritique. L'éclatement est expliqué alors comme la transition discontinue entre un état supercritique et un état souscritique. Puis, Benjamin ([7], [8], [9]) a proposé une théorie plus séduisante qui généralise la théorie de Squire. Selon Benjamin, l'éclatement est une transition entre deux états tourbillonnaires voisins "conjugués", c'est-à-dire présentant des caractéristiques cinématiques proches mais, alors que l'un peut supporter des oscillations d'amplitude finie, l'autre ne le peut pas. A partir de cette description Benjamin propose une analogie entre l'éclatement tourbillonnaire et le ressaut hydraulique dans les écoulements à surface libre. Ce parallèle a été par la suite étendu par Leibovich [53] à la théorie des ondes de chocs pour les écoulements compressibles. Dans tous ces cas, les ondes de faible amplitude peuvent se propager et le ressaut hydraulique, le choc et pourquoi pas l'éclatement tourbillonnaire séparent un écoulement amont (l'écoulement supersonique ou supercritique) dans laquelle les ondes ne peuvent pas se propager en amont d'un écoulement aval (l'écoulement subsonique ou souscritique) où les perturbations se propagent dans toutes les directions. Cependant, cette analyse s'avère incomplète car elle ne considère ni les ondes dispersives (dont le nombre d'onde axiale est fonction de la pulsation) ni les ondes asymétriques (dont le nombre d'onde azimutale est non nul) ni les longueurs d'ondes arbitraires. Tsai et Widnall [84] ont complété cette étude en définissant les notions d'écoulement souscritique et supercritique en termes de vitesse de groupe des ondes neutres dispersives et de longueur d'onde finie.

Dans le cadre d'une analyse d'instabilité linéaire nous proposons une généralisation naturelle des théories présentées ci-dessus en étudiant la propagation des perturbations instables avec des nombres d'onde azimutaux et axiaux arbitraires dans les écoulements de type tourbillon (voir la rubrique suivante). Ainsi, l'étude des transitions entre un écoulement instable convectif (extension d'un écoulement supercritique) et un écoulement instable absolu (extension d'un écoulement souscritique) peut apporter un éclairage nouveau à la description du phénomène d'éclatement tourbillonnaire.

Les premières investigations sur la stabilité des tourbillons ont été effectuées par Rayleigh et Kelvin à la fin du siècle dernier pour un fluide parfait incompressible. En 1880, Kelvin [44] a été le premier à étudier les modes d'oscillation d'une colonne axisymétrique de fluide en rotation solide (la solution de base a seulement une composante azimutale de vitesse $W = \Omega r$, Ω étant la vitesse de rotation solide). Malgré la mise en évidence des perturbations dispersives et leur confirmation expérimentale, ces résultats ne sont pas applicables à d'autres classes importantes de tourbillons. En 1916, Rayleigh [71] a fourni un critère de stabilité pour les écoulements rotationnels axisymétriques de type $\mathbf{U}(0, 0, W(r))$ en coordonnées cylindriques (x, r, θ) . Plus précisément, il trouve qu'un tel écoulement est stable par rapport aux perturbations axisymétriques si la valeur absolue

de la circulation, Γ , est une fonction croissante monotone. La condition

$$\Phi(r) = \frac{1}{r^3} \frac{d\Gamma^2}{dr} = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr}(rV)^2 > 0 \quad (1.1)$$

est une condition suffisante pour la stabilité de l'écoulement. La fonction Φ s'appelle le discriminant de Rayleigh et la condition établie, $\Phi > 0$, est une contribution majeure à l'étude de stabilité des écoulement en rotation. Une vérification de cette condition a été fournie par Synge [82] qui montre que l'écoulement est stable aux perturbations axisymétriques si et seulement si $\Phi(r) > 0$ dans l'intervalle $r_1 < r < r_2$ où r_1 et r_2 sont les frontières du domaine radial. Sous cette condition suffisante, l'écoulement de base $\mathbf{U} = (0, 0, W(r))$ est temporellement instable par rapport aux perturbations asymétriques du type $\phi(r)e^{i(m\theta - \omega t)}$ (m étant le nombre d'onde azimutal qui est un entier et ω la pulsation complexe) avec $m \neq 0$ si $Im[\omega_i] > 0$ et le gradient de la vorticité $\zeta = \nabla \times \mathbf{U}$ change de signe dans l'intervalle $[r_1, r_2]$. Cette dernière condition est une application aux écoulements en rotation du fameux théorème du point d'inflexion de Rayleigh qui s'applique à l'instabilité (linéaire) des écoulements parallèles cisailés.

En fluide parfait l'instabilité temporelle des jets et sillages tournants parallèles (une composante axiale $U(r)$ est ajoutée à la composante azimutale $W(r)$) repose sur le problème classique aux valeurs et vecteurs propres donné par l'équation différentielle du deuxième ordre de Howard et Gupta [39]. Les recherches ([39], [55], [62]) ont démontré qu'un écoulement tournant ayant une composante azimutale de vitesse obéissant au critère de Rayleigh (1.1) peut cependant être instable si on ajoute une composante axiale de vitesse. Ainsi, le critère de Rayleigh ne s'applique pas aux écoulements avec composante axiale et à ce jour aucun critère théorique pour ces écoulements n'a été dégagé. Il est donc nécessaire de faire une étude de stabilité pour chaque écoulement de base.

Nous présentons dans la suite les principaux résultats obtenus pour les profils de vitesse donnés par la solution de Batchelor (2.14). La rubrique 2.1.1 est entièrement consacrée à l'obtention de cette solution. Batchelor [4], Faler et Leibovich [30] et Garg et Leibovich [32] ont montré que ces profils de vitesse sont très utiles parce qu'ils sont proches des profils de vitesses expérimentaux dans les jets et les sillages tournants. En fluide parfait, Lessen *et al.* [58] et Mayer et Powell [63] ont montré que les modes azimutaux négatifs ($m < 0$) sont instables alors que les modes azimutaux positifs ($m \geq 0$) sont stables quand $q > -0.08$.

Les études de Lessen et Singh [57] et Loiseleux *et al.* [60] ont montré que les modes azimutaux positifs des différents profils de jets axisymétriques se stabilisent rapidement quand une faible rotation est ajoutée à l'écoulement de base axial. Dans le cas du tourbillon de Batchelor, les modes $m = \pm 1$ sont les seuls modes à se déstabiliser quand $q = 0$ (jet pur). Pour des valeurs modérées de la rotation, les modes azimutaux négatifs $m < 0$ sont fortement déstabilisés. Stewartson et Leibovich [79] ont montré théoriquement que le mode axisymétrique $m = 0$ est stable pour $q > 0.4$ mais à ce jour aucune étude numérique n'a mis en évidence une instabilité de ce mode pour le tourbillon de Batchelor. Les études de Lessen *et al.* [58], Leibovich et Stewartson [55] et Mayer et Powell [63] donnent les taux de croissance temporels maximaux (qui sont d'un ordre de grandeur plus grand que les ceux des jets purs). Le taux de croissance temporel maximal augmente avec le nombre d'onde azimutal m et atteint une valeur asymptotique finie pour $m = -\infty$ et $q = 0.87$. De plus, ces modes sont stabilisés au fur et à mesure que la rotation augmente. La frontière supérieure de stabilité en q est fixé à $q \simeq 1.5$. Cependant des études ultérieures ont montré que cette frontière n'est pas très fiable. Leibovich et Stewartson [55] ont obtenu par une étude asymptotique une condition suffisante d'instabilité pour le tourbillon de Batchelor pour $q < \sqrt{2}$ mais au dessus de cette limite l'instabilité reste possible. Ainsi, Stewartson

et Brown [77] ont mis en évidence l'existence de modes instables faiblement amplifiés (temporellement) pour de valeurs de $q > 1.5$ mais à ce jour ces prédictions théoriques n'ont reçu aucune confirmation numérique.

L'effet de la viscosité sur la stabilité du tourbillon de Batchelor a été étudié par Lessen et Paillet [56], Khorrani [45] et Mayer et Powell [63]. Ces deux dernières études ont détecté des modes visqueux instables dont les taux de croissance temporels sont de plusieurs ordres de grandeurs plus faibles que ceux des modes non visqueux.

1.2 La stabilité des tourbillons: méthodes d'études et concepts associés

1.2.1 La méthodes des modes normaux appliquée aux écoulements en rotation

En coordonnées cylindriques (x, r, θ) les équations du mouvement d'un fluide newtonien et incompressible en absence de toute source de chaleur s'écrivent successivement:

- pour l'équation de continuité:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0, \quad (1.2)$$

- pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon e_x :

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X_x + \nu \nabla^2 u, \quad (1.3)$$

- pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon e_r :

$$\frac{Dv}{Dt} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + X_r + \nu(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta}), \quad (1.4)$$

- pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon e_θ :

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{vw}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + X_\theta + \nu(\nabla^2 w - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}), \quad (1.5)$$

avec

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (1.6)$$

et

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (1.7)$$

Le champ de vitesse est donné par ses composante axiale u , radiale v et azimutale w ; p est la pression, ρ la densité du fluide, ν sa viscosité cinématique et X_x, X_r et X_θ sont les composantes des forces de volume (qui dépendent de l'espace mais pas du temps).

Nous supposons que les vitesses et la pression suivantes

$$U = U(x, r), \quad V = V(x, r), \quad W = W(x, r), \quad P = P(x, r) \quad (1.8)$$

sont une solution stationnaire, axisymétrique et tridimensionnelle du système (1.2)-(1.5), c'est-à-dire que

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV) = 0, \quad (1.9)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + X_x + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right], \quad (1.10)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{W^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + X_r + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right], \quad (1.11)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} = X_\theta + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right], \quad (1.12)$$

avec un jeu de conditions aux limites appropriées. Nous supposons que cette solution (U, V, W, P) est perturbée par de petites perturbations u', v', w' et p' avec

$$u = U + u'(x, r, \theta, t), \quad (1.13)$$

$$v = V + v'(x, r, \theta, t), \quad (1.14)$$

$$w = W + w'(x, r, \theta, t), \quad (1.15)$$

$$p = P + p'(x, r, \theta, t). \quad (1.16)$$

L'écoulement de base perturbé ci-dessus doit être aussi une solution du système (1.2)-(1.5). Quand on injecte (1.13)-(1.16) dans les équations du mouvement nous retirons la partie stationnaire portant sur la solution (U, V, W, P) . En négligeant les termes quadratiques en perturbations et en adimensionnant par rapport à une vitesse axiale spécifique U_s et à rayon spécifique r_s , nous obtenons alors les équations de perturbations linéarisées et adimensionnées

$$\frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - 2 \frac{Wv}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \\ + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{Wv + Vw}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 w - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (1.20)$$

où $Re = U_s r_s / \nu$ est le nombre de Reynolds.

Ces équations sont valables pour des écoulements en rotation, non parallèles au besoin, mais leur utilisation pose des problèmes numériques (temps de calcul élevés) alors que les résultats en termes d'instabilité ne sont pas facile à interpréter. Une hypothèse simplificatrice revient à restreindre l'étude aux cas d'écoulements quasi-cylindriques (dont les surfaces de courant sont cylindriques), hypothèse satisfaite par la classe d'écoulements que nous étudions. En supposant les gradients de vitesse axiaux petits devant les gradients de vitesse azimutaux et la vitesse radiale petite devant la vitesse axiale (approximation de type couche limite) pour notre écoulement de base, c'est-à-dire

$$\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right| \ll 1 \quad \text{et} \quad |V| \ll 1, \quad (1.21)$$

nous pouvons écrire les profils d'un écoulement parallèle en rotation sous la forme

$$U = U(r), \quad V \simeq 0, \quad W = W(r). \quad (1.22)$$

Le choix d'un écoulement de base parallèle nous permet aussi de prendre des perturbations sous la forme des modes normaux suivants

$$\{u', v', w', p'\} = Re \{ [F(r), iG(r), H(r), P(r)] e^{i(kx + m\theta - \omega t)} \} \quad (1.23)$$

où F, G, H et P sont les amplitudes complexes des perturbations, k est le nombre d'onde axial complexe, m est le nombre d'onde azimutal entier et ω est la pulsation complexe. Au système (1.17)-(1.20) nous devons adjoindre des conditions aux limites appropriées. En tenant compte de la singularité introduite sur l'axe par le système de coordonnées cylindriques (x, r, θ) nous exigeons que toute quantité physique soit continue et finie quand $r \rightarrow 0$. Conformément à Batchelor et Gill [5] ou Khorrami *et al.* [47], sur l'axe du tourbillon nous imposons donc les relations de compatibilité

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (1.24)$$

avec $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_r + w\mathbf{e}_\theta$. Plus précisément, nous obtenons en termes d'amplitudes des perturbations les conditions

$$F(0) = G(0) = H(0) = P(0) = 0 \quad \text{pour} \quad m^2 > 1, \quad (1.25)$$

$$G(0) = H(0) = 0, \quad F(0) \text{ et } P(0) \text{ finis si } m = 0, \quad (1.26)$$

$$H(0) \pm G(0) = 0, \quad F(0) = P(0) = 0 \quad \text{pour} \quad m = \pm 1. \quad (1.27)$$

Enfin, nous ajoutons à ce système les conditions loin de l'axe du tourbillon

$$F(\infty) = G(\infty) = H(\infty) = P(\infty) = 0 \quad \text{pour tout } m. \quad (1.28)$$

Le système des équations de perturbations linéarisés (1.17)-(1.20) et les conditions aux limites associées (1.25)-(1.28) forment un problème aux valeurs et vecteurs propres. Des solutions non nulles existent si et seulement si la pulsation ω et le nombre d'onde axial k satisfont une relation de dispersion du type

$$D(k, \omega; \mu) = 0 \quad (1.29)$$

où μ représente l'ensemble des paramètres de contrôle de l'écoulement de base (par exemple le nombre de Reynolds) auquel nous ajoutons le nombre d'onde azimutal m . La relation de dispersion (1.29) nous fournit les modes temporels $\omega = \omega(k; \mu)$ dans le cas où les pulsations ω complexes sont cherchées en fonction du nombre d'onde axial k réel. D'un autre point de vue, les branches spatiales $k = k(\omega, \mu)$ sont mises en évidence en cherchant les nombres d'onde axiaux k complexes pour des pulsations ω réelles données.

1.2.2 Instabilité convective et instabilité absolue

Dans cette rubrique nous présentons le cadre mathématique qui nous permet de caractériser l'instabilité spatio-temporelle d'un écoulement parallèle. Ensuite nous analysons la pertinence de l'approche spatiale qui nous permet de mieux saisir des aspects particuliers des écoulements instables.

Les résultats présentés sont obtenus pour un écoulement de cisaillement parallèle [41] mais restent applicables à un écoulement parallèle en rotation. Comme nous l'avons vu, l'instabilité de l'écoulement de base est décrite par la relation de dispersion dans l'espace spectral (k, ω) ce qui correspond à une évolution spatio-temporelle des modes instables dans l'espace physique (x, t) . Par conséquent, nous pouvons négliger les variations dans les directions radiale et azimutale des perturbations (1.23) tout en retenant l'essentiel de la description de l'instabilité de l'écoulement de base (voir Huerre et Monkewitz [41]). Dans l'espace physique (x, t) , nous associons à la relation de dispersion (1.29) de l'espace spectral (k, ω) un opérateur intégral-différentiel $D[-i(\partial/\partial x), i(\partial/\partial t); \mu]$ tel que

$$D[-i(\partial/\partial x), i(\partial/\partial t); \mu]\psi(x, t) = 0. \quad (1.30)$$

Pour caractériser l'instabilité d'un écoulement de base il faut regarder la réponse de cet écoulement à une impulsion élémentaire en temps $\delta(t)$ et en espace $\delta(x)$ où δ est la fonction Dirac. Cette réponse impulsionnelle est donnée par la fonction de Green, G , telle que

$$D[-i(\partial/\partial x), i(\partial/\partial t); \mu]G(x, t) = \delta(x)\delta(t). \quad (1.31)$$

Nous disons que l'écoulement de base est stable si sur tout rayon $x/t = cste$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0, \quad (1.32)$$

tandis que l'écoulement est dit instable si sur au moins un rayon $x/t = cste$ nous obtenons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty. \quad (1.33)$$

De plus, un écoulement instable est dit convectivement instable si sur le rayon $x/t = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0, \quad (1.34)$$

tandis qu'un écoulement instable est absolument instable si sur le rayon $x/t = 0$ cette fois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty. \quad (1.35)$$

Nous présentons à la figure 1.10 (a-c) dans le plan spatio-temporel les cas d'un mode stable, convectivement instable et absolument instable. Dans un écoulement convectivement instable, les perturbations sont convectées au fur et à mesure qu'elles s'amplifient, de sorte que dans un repère fixe l'écoulement reste stable aux temps longs. Au contraire, dans un écoulement absolument instable il existe au moins un mode qui s'amplifie sur place à $x = 0$ en contaminant ainsi tout l'écoulement. Pour caractériser l'instabilité de l'écoulement, il faut suivre dans le paquet d'ondes qui surgit suite à une perturbation impulsionnelle, le comportement des modes dont la vitesse de groupe est nulle. Si parmi ces modes il existe au moins un mode amplifié alors l'écoulement est absolument instable. Sinon l'écoulement est convectivement instable. La nature convective ou absolue

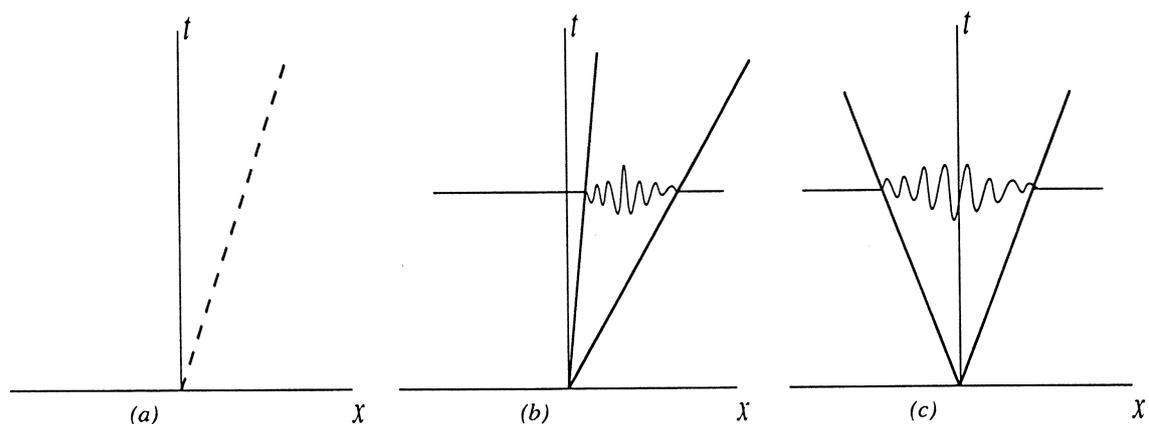


Figure 1.10: La réponse impulsionnelle. (a) Mode stable. (b) Mode instable convectif. (c) Mode instable absolu.

d'un écoulement instable peut être déterminée en examinant sa réponse à une perturbation impulsionnelle (la fonction de Green (1.31)). Ceci peut être réalisé par simulation numérique directe (voir l'exemple [22]). La méthode classique consiste à déceler la nature

de l'instabilité à partir des propriétés de la relation de dispersion (1.29) dans les plans complexes k et ω . Dans ce dernier cas, la fonction de Green définie par la relation (1.31) est donnée explicitement par une double intégrale Fourier sur l'espace-temps

$$G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_L \int_F \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{D(k, \omega; \mu)} d\omega dk. \quad (1.36)$$

Les singularités de l'intégrand sont données par les zéros de la relation de dispersion. Nous considérons seulement la partie discrète du spectre, partie fournie par les solutions d'un problème aux valeurs et vecteurs propres comme celui proposé dans la rubrique précédente ((1.17)-(1.20) et (1.24)-(1.28)). Pour satisfaire la condition de causalité ($G(x, t) = 0$ pour $t < 0$) il faut que le contour horizontal L d'intégration dans le plan complexe ω soit placé au dessus de toutes les singularités (voir la figure 1.11a). Le contour d'intégration F dans le plan complexe k est placé au début sur l'axe réel (voir la figure 1.12a). Pour des raisons de simplicité nous considérons que la relation de dispersion (1.29) admet un seul mode $\omega(k)$. Ainsi, la fonction de Green est obtenue par un calcul des résidus dans le plan complexe ω et s'écrit

$$G(x, t) = -\frac{i}{2\pi} H(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i[kx - \omega(k)t]}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}[k, \omega(k); \mu]} dk, \quad (1.37)$$

où $H(t)$ est la fonction de Heaviside dont la dérivée est la fonction Dirac. Pour évaluer la fonction de Green aux temps longs nous appliquons la méthode de "steepest descent" (voir Bender et Orszag [6]) en ne retenant que la contribution la plus importante dans l'intégrale ci-dessus et en négligeant les autres. Ainsi nous obtenons que le maximum de la phase $kx - \omega(k)t$ a lieu pour un point, k^* , donné par la relation suivante

$$\frac{\partial \omega}{\partial k}(k^*) = \frac{x}{t}. \quad (1.38)$$

Nous supposons que le mode $\omega(k)$ présente un seul point k^* . L'évaluation asymptotique pour $t \rightarrow \infty$ de la fonction Green (1.37) en appliquant la méthode de "steepest descent" autour du point k^* donne alors le résultat suivant

$$G(x, t) \sim -\frac{e^{i[k^*x - \omega(k^*)t]}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}[k^*, \omega(k^*)][\frac{d^2 \omega}{dk^2}]^{1/2}}. \quad (1.39)$$

A présent, si nous considérons tous les modes solutions de la relation de dispersion (1.29) nous pouvons dire que la fonction Green a la forme d'un paquet d'ondes qui évolue dans le plan spatio-temporel (x, t) . A l'intérieur de ce paquet la contribution du point k^* est dominante de sorte que parmi tous les nombres d'ondes contenus dans l'impulsion initiale l'écoulement sélectionne, sur chaque rayon x/t , le nombre d'onde k^* . La vitesse de groupe est réelle et égale à x/t tandis que le taux d'amplification temporel, σ , pour le nombre d'onde k^* s'écrit

$$\sigma = \omega_i(k^*) - \left(\frac{x}{t} k_i^*\right). \quad (1.40)$$

Pour une approche temporelle (k réel et ω complexe) ce taux d'amplification admet la forme simple

$$\sigma_t = \omega_i(k) \quad (1.41)$$

et le taux de croissance temporel maximal sur un rayon x/t quelconque est donné par

$$\sigma_{t, max} = \omega_i(k_{max}), \quad \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_{max}) = 0. \quad (1.42)$$

La valeur $\sigma = \omega_{i,max}$ observée sur le rayon $x/t = \partial\omega_r/\partial k(k_{max})$ est maximale sur tous les rayons x/t . Nous pouvons aisément en déduire le critère pour l'instabilité linéaire selon les définitions (1.32)-(1.33):

$$\omega_{i,max} > 0 \quad \text{pour un écoulement linéairement instable,} \quad (1.43)$$

$$\omega_{i,max} < 0 \quad \text{pour un écoulement linéairement stable.} \quad (1.44)$$

A ce stade, pour caractériser l'instabilité il faut analyser le comportement de $G(x, t)$ sur le rayon $x/t = 0$. Le nombre d'onde axial complexe k_0 a, par définition, une vitesse de groupe nulle

$$\frac{\partial\omega}{\partial k}(k_0) = 0. \quad (1.45)$$

La pulsation complexe $\omega_0 = \omega(k_0)$ correspondante s'appelle pulsation absolue et le taux de croissance temporel absolu est fourni par sa partie imaginaire $\omega_{0,i} = \omega_i(k_0)$. La nature convective ou absolue de l'instabilité est facilement déterminée selon le signe du $\omega_{0,i}$. Ainsi pour

$$\omega_{0,i} > 0, \quad (1.46)$$

l'écoulement est absolument instable tandis que pour

$$\omega_{0,i} < 0, \quad (1.47)$$

l'écoulement est convectivement instable. La fréquence ω_0 est un point de rebroussement de la fonction $k(\omega)$ alors que le nombre d'onde absolu k_0 est un point selle de la fonction $\omega(k)$. Mais selon Briggs [16] et Bers [11], le critère fourni par les définitions (1.46) et (1.47) n'est pas assez fin. Supposons en effet que le mode temporel admet un seul point algébrique de rebroussement avec deux branches spatiales k^+ et k^- . Si le chemin d'intégration (L) dans le plan complexe ω est au-dessus de toute singularité de la relation de dispersion (1.29) alors aucune des branches $k^+(\omega)$ ou $k^-(\omega)$ ne coupe la portion horizontale (F) du chemin d'intégration dans le complexe k . Quand $x > 0$ (respectivement $x < 0$), le contour (F) se referme dans le demi-plan complexe supérieur k (respectivement inférieur) et les branches spatiales k^+ et k^- contribuent à la réponse impulsionnelle dans deux régions distinctes de l'espace.

Deux situations sont alors possibles:

a) les branches $k^+(\omega)$ et $k^-(\omega)$ sont situées de part et d'autres de (F) quand le contour (L) est suffisamment haut. Dès que le chemin (L) s'approche des singularités (voir la figure 1.11b), les branches $k^+(\omega)$ et $k^-(\omega)$ s'approchent aussi l'une de l'autre. Le chemin d'intégration dans le plan complexe k est déformé comme le souligne la figure 1.12b. Quand le chemin (L) contient le point de rebroussement ω_0 (voir la figure 1.11c) les deux branches k se touchent au point selle k_0 (voir figure 1.12c). Ce pincement se produit précisément au point k_0 où la vitesse de groupe $d\omega/dk(k_0) = x/t$ est nulle. Simultanément, un point de rebroussement se forme sur le mode $\omega(k)$ en ω_0 , propriété que nous utilisons pour détecter la proximité d'un point selle. Un point selle k_0 qui respecte ce scénario est dit "bon point selle". Si le point correspondant ω_0 est dans le demi-plan supérieure du plan ω alors l'instabilité est absolue. Sinon l'instabilité est convective.

b) les branches $k_1^+(\omega)$ et $k_2^+(\omega)$ sont situées dans le demi-plan complexe k même si (L) est suffisamment haut. Si par déplacement vers le bas de contour (L), $k_1^+(\omega)$ et $k_2^+(\omega)$ donnent lieu cette fois à un point de rebroussement dans le plan ω , ce dernier ne correspond pas à une fréquence absolue car il n'y a pas de pincement de (F) par $k_1^+(\omega)$ et $k_2^+(\omega)$.

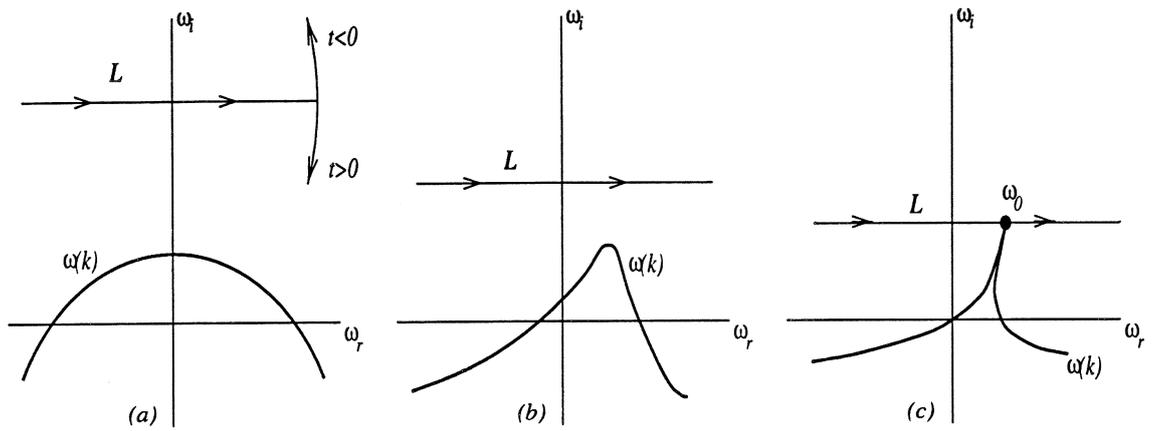


Figure 1.11: Le mode temporel $\omega(k)$ dans le plan complexe ω . (a), (b) et (c): Le contour d'intégration L approche du point de rebroussement ω_0 .

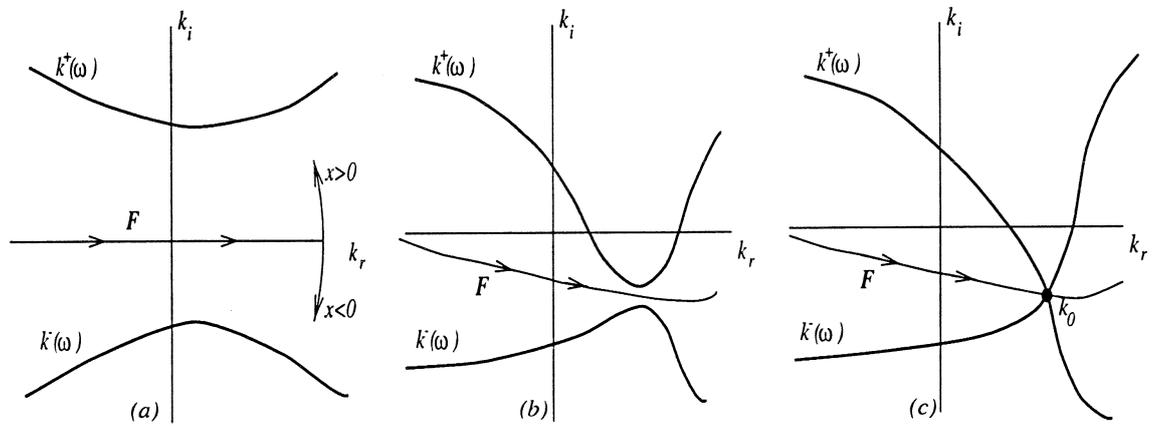


Figure 1.12: Les branches spatiales $k^+(\omega)$ et $k^-(\omega)$ dans le plan complexe k . (a) Le contour d'intégration F est sur l'axe réel quand les deux branches spatiales sont séparées dans les demi-plans du plan complexe k . (b) Le contour d'intégration F est déformé pour passer entre les deux branches spatiales. (c) Le contour d'intégration F traverse le point selle k_0 .

1.2.3 L'approche spatiale

Généralement, les problèmes de stabilité hydrodynamiques sont étudiés selon une approche temporelle (la relation de dispersion (1.29) fournit les valeurs propres ω complexes pour k réel fixé), le critère d'instabilité temporelle d'un écoulement étant donné par les relations (1.44) et (1.43). Dans l'approche spatiale, nous considérons cette fois une valeur réelle de la pulsation ω et, via la relation de dispersion, nous recherchons les valeurs propres $k = k_r + ik_i$. Les modes spatiaux admettent un comportement de type $e^{i(kx + \omega t)} = e^{-k_i x + i(k_r + \omega t)}$ de sorte qu'on pourrait fournir un critère d'instabilité très simple ($k_i < 0$) pour une pulsation réelle ω . Mais les choses ne sont pas aussi simples.

Les modes spatiaux, comme les modes temporels, permettent de construire la réponse impulsionnelle. Un mode spatial ne peut pas cependant être une solution d'un tel problème s'il s'avère amplifié à l'infini. Il peut toutefois décrire la solution durant un certain temps lorsqu'une source localisée commence à osciller à une pulsation réelle imposée ω_f . Plus précisément, pour interpréter sans aucune ambiguïté les modes spatiaux, il faut revoir le problème de la réponse d'un système (un écoulement ici) à une excitation monochroma-

tique de pulsation ω_f , appliquée en $x = 0$ et déclenchée à $t = 0$. Une perturbation $\psi(x, t)$ satisfait la relation

$$D[-i(\partial/\partial x), i(\partial/\partial t); \mu]\psi(x, t) = \delta(x)H(t)e^{-i\omega_f t}. \quad (1.48)$$

En supposant que la relation de dispersion conduit à un seul mode discret $\omega(k)$ nous obtenons une solution donnée par une intégrale de Fourier sur tout le domaine spectral k

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i[kx - \omega(k)t]}}{[\omega(k) - \omega_f] \frac{\partial D}{\partial \omega}[k, \omega(k); \mu]} dk + \frac{e^{-i\omega_f t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{D[k, \omega_f; \mu]} dk. \quad (1.49)$$

Quand $t \rightarrow \infty$, la contribution dominante de cette solution est obtenue asymptotiquement en appliquant la méthode de "steepest descent". Le deuxième terme est obtenu en fermant le contour (F) dans le demi-plan supérieur $x > 0$ et dans le demi-plan inférieur pour $x < 0$ (voir la figure (1.12a)). En définitive, on obtient pour $\psi(x, t)$ le comportement suivant

$$\begin{aligned} \psi(x, t) \sim & - \frac{e^{i[k^*x - \omega(k^*)t]}}{[\omega(k^*) - \omega_f] \frac{\partial D}{\partial \omega}[k^*, \omega(k^*)] [\frac{d^2\omega}{dk^2}]^{1/2}} \\ & + i \frac{e^{i[k^+(\omega_f)x - \omega_f t]}}{\frac{\partial D}{\partial k}[k^+(\omega_f), \omega_f; \mu]} H(x) - i \frac{e^{i[k^-(\omega_f)x - \omega_f t]}}{\frac{\partial D}{\partial k}[k^-(\omega_f), \omega_f; \mu]} H(-x). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Ainsi, la réponse est composée d'une partie transitoire de la même nature que la fonction de Green et d'une partie stationnaire issue du forçage de l'écoulement à la pulsation ω_f .

Les modes spatialement amplifiés ou atténués sont localisés de chaque côté de la source $x = 0$ de sorte que la branche $k^+(\omega)$ donne l'évolution du mode dans le domaine $x > 0$ et la branche $k^-(\omega)$ indique l'évolution du mode dans le domaine $x < 0$. Le problème est mal posé dans le cas d'une instabilité absolue car la partie transitoire de la réponse contamine la partie stationnaire, la source située à $x = 0$ incluse. Ainsi, nous pouvons dire que seuls les écoulements instables convectifs (les perturbations y sont advectés au fur et à mesure qu'elles sont amplifiées) peuvent être décrits par les branches spatiales. L'avantage majeure de l'utilisation des branches spatiales est qu'elle permet l'étude des transitions instable convectif-instable absolu. En effet, en partant d'un écoulement instable convectif la déformation des branches $k^+(\omega)$ et $k^-(\omega)$ obtenue en modifiant les paramètres de contrôle μ peut conduire, pour un certain paramètre μ_c , à un pincement des branches en un point selle k_0 . Comme $\omega_{0,i} = 0$, la valeur critique μ_c procure un point de transition instable convectif-instable absolu dans l'espace des paramètres de contrôle.

Chapitre 2

Etude spatio-temporelle du tourbillon de Batchelor dans le cas du fluide parfait

Dans ce chapitre nous présentons l'étude linéaire de la stabilité du tourbillon de Batchelor dans le cas du fluide parfait. Nous introduisons le tourbillon de Batchelor, l'origine de ce modèle et sa pertinence pour décrire les instabilités des écoulements en rotation (jets et sillages) et les configurations de base qui interviennent dans le phénomène de l'éclatement tourbillonnaire. La relation de dispersion issue du problème aux valeurs et vecteurs propres est résolue numériquement par une méthode dite de "shooting". Nous nous intéressons aux propriétés d'instabilité spatiale du tourbillon de Batchelor. Ensuite, cette approche spatiale de l'instabilité nous permet de déterminer directement les transitions instable convectif-instable absolu. Une première communication sur les résultats de ce problème a été faite dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* en 1996 (voir l'annexe B). Un article avec les résultats complets a été soumis à *Physics of Fluids* en 1998 (voir l'annexe C).

2.1 La stabilité du tourbillon de Batchelor

2.1.1 Le tourbillon de Batchelor

Nous avons adopté comme solution de base pour l'étude de la stabilité de jets ou sillages tournants le "tourbillon de Batchelor". Il s'agit d'une solution stationnaire, axisymétrique et auto-similaire des équations de Navier-Stokes linéarisées [4]. Nous présentons ici la démarche simplifiée qui conduit à l'obtention de cette solution.

Les écoulements tourbillonnaires issus d'une surface portante, les tourbillons dans les chambres de combustion ou les tornades sont considérés comme des écoulements stationnaires et axisymétriques dont la vorticité est concentrée près de l'axe de rotation. Ces écoulements présentent des vitesses axiales très fortes le long de cet axe. Pour étudier cette famille d'écoulements nous utilisons les coordonnées cylindriques (x, r, θ) (voir la figure 2.1) en désignant les composantes associées de vitesse par u , v et w . Nous nous plaçons par exemple dans le sillage lointain d'une surface portante évoluant à une vitesse uniforme U_0 . Les équations de Navier-Stokes qui régissent l'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible sont données par (1.2)-(1.5). Pour ces équations nous employons une approximation de type couche limite en considérant que les gradients axiaux sont petits

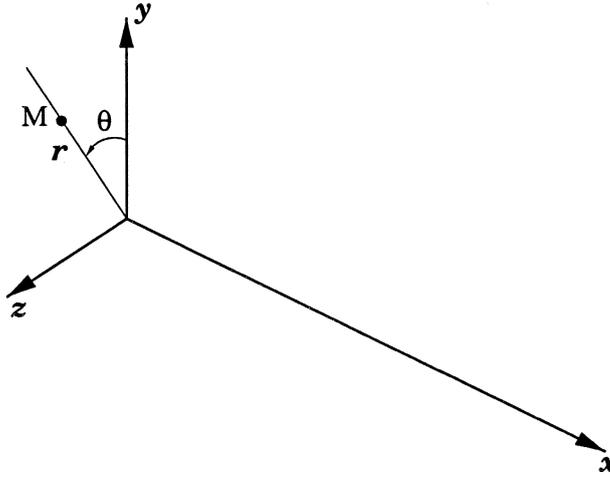


Figure 2.1: Les coordonnées cylindriques (x, r, θ) .

devant les gradients radiaux, c'est-à-dire:

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial r}, \quad v \ll u. \quad (2.1)$$

De plus, nous supposons que loin en aval la vitesse axiale u du tourbillon est faible devant la vitesse axiale extérieure U_0 , c'est-à-dire que:

$$|u - U_0| \ll U_0. \quad (2.2)$$

Sous ces hypothèses les équations de Navier-Stokes d'un fluide visqueux (de viscosité cinématique ν), incompressible (de densité constante ρ) et de pression p se réduisent à:

$$U_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{w^2}{r}, \quad (2.4)$$

$$U_0 \frac{\partial w}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w^2}{r} \right). \quad (2.5)$$

Quand $x \rightarrow \infty$, ce système admet une solution asymptotique sous la forme suivante:

$$u(x, r) = U_0 - \frac{\Gamma_0^2}{8\nu x} \log\left[\frac{U_0 x}{\nu}\right] e^{-\eta} + \frac{\Gamma_0^2}{8\nu x} Q(\nu) - L \frac{U_0^2}{8\nu x} e^{-\eta}, \quad (2.6)$$

$$v(x, r) = 0, \quad (2.7)$$

$$w(x, r) = \frac{1 - e^{-\eta}}{r_0} \Gamma_0 \quad (2.8)$$

où la variable autosimilaire η vérifie $\eta = U_0 r^2 / 4\nu x$. Si $\Gamma = 2\pi r w$ désigne la circulation sur un cercle de rayon r autour de l'axe du tourbillon alors Γ_0 apparaissant en (2.8) représente la circulation à l'infini. Enfin, L est une constante homogène à une surface et $Q(\eta)$ est donné par la relation suivante (voir Batchelor [4])

$$Q(\eta) = e^\eta [\log \eta + Ei(\eta) - 0.807] + 2Ei(\eta) - 2Ei(2\eta), \quad (2.9)$$

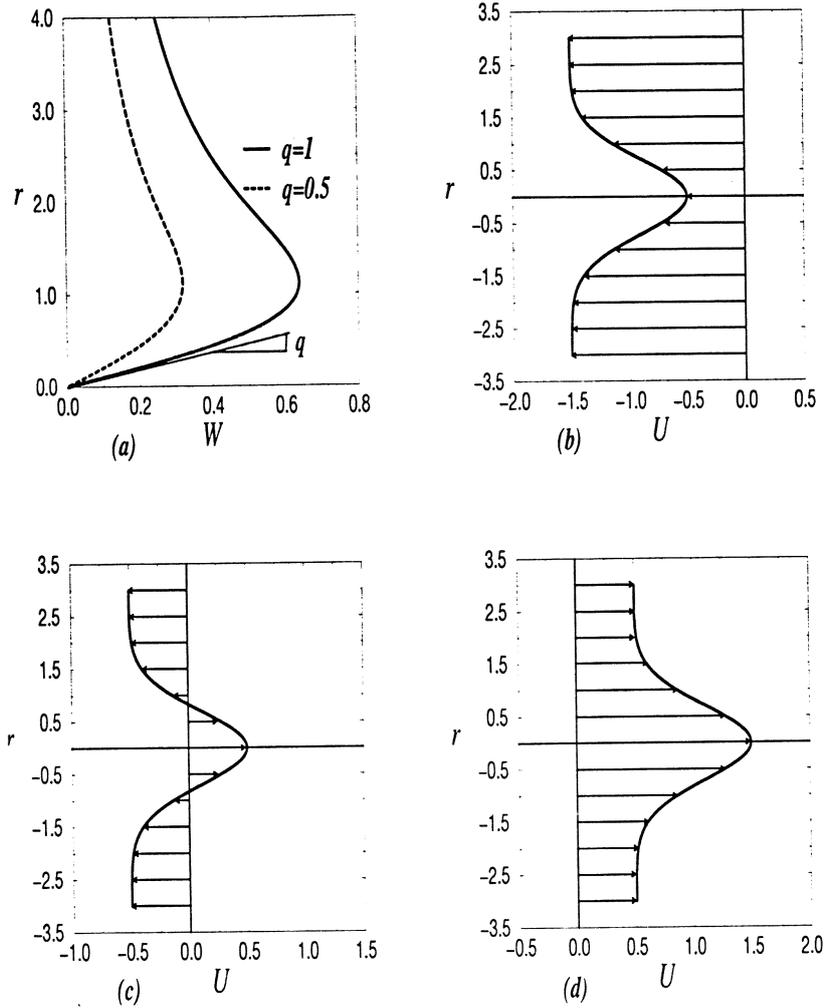


Figure 2.2: Les profils des vitesses du tourbillon de Batchelor. (a): Le profil de vitesse azimutale $W(r)$ pour $q = 0.5$ et $q = 1.0$. Le profil de vitesse axiale $U(r)$ pour (b): sillages authentiques si $a < -1$; (c): sillages ou jets avec contre-courant pour $-1 < a < 0$; (d): jets authentiques pour $a > 0$.

avec

$$Ei(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy. \quad (2.10)$$

Le troisième terme du membre droite de (2.6), comprenant $Q(\eta)$, est plus petit que le deuxième terme surtout pour de grands nombres de Reynolds $Re := U_0 x / \mu$. Il sera donc négligé dans cette thèse. Nous pouvons définir les quantités suivantes (Lessen *et al.* [58], Batchelor [4]):

- $$U_s = U_c - U_0 = -\frac{\Gamma_0^2}{8\nu x} \log\left[\frac{U_0 x}{\nu}\right] - L \frac{U_0^2}{8\nu x}, \quad (2.11)$$

- $$r_s = \sqrt{\frac{4\nu x}{U_0^2}}. \quad (2.12)$$

La vitesse U_s mesure l'écart entre la vitesse axiale U_c sur l'axe ($r = 0$) et la vitesse axiale à l'infini U_0 , tandis que r_s désigne le rayon typique du coeur visqueux du tourbillon. En injectant ces choix (2.11)-(2.12) dans les formules (2.6)-(2.8) le tourbillon de Batchelor admet, en variables dimensionnées, la forme suivante:

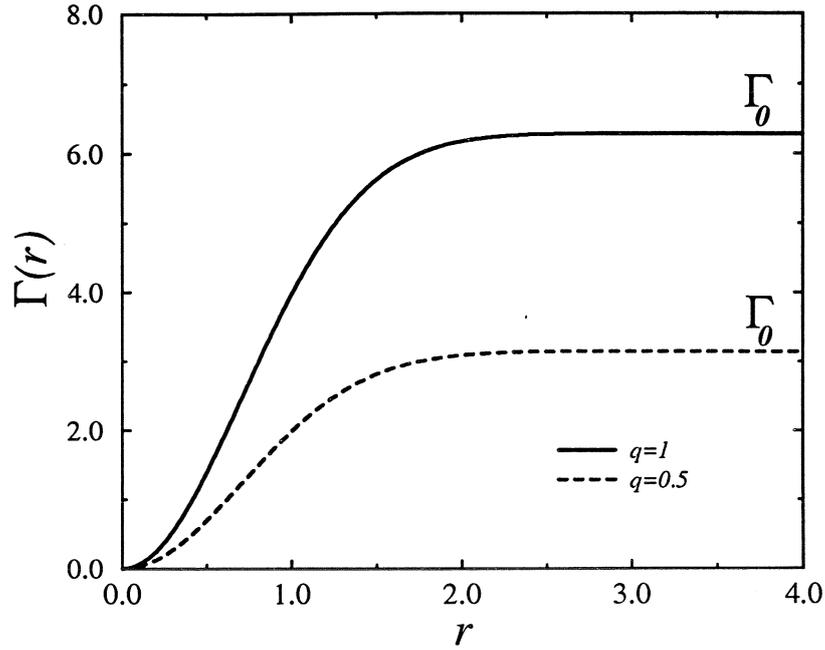


Figure 2.3: La circulation $\Gamma(r)$ pour $q = 1.0$ (traits pleins) et $q = 0.5$ (traits pointillés).

$$U(r) = U_0 + U_s e^{-(r/r_s)^2}; \quad V(r) = 0; \quad W(r) = \frac{\Gamma_0}{r_s} \left[\frac{1 - e^{-(r/r_s)^2}}{r/r_s} \right]. \quad (2.13)$$

En adimensionnant par rapport à r_s et U_s nous obtenons ainsi le profil de vitesse adimensionné (en adoptant les notations $r^* \equiv r/r_s$ et $U_i^* \equiv U_i/U_s$ pour toute composante i de la vitesse):

$$U(r) = a + e^{-r^2}; \quad V(r) = 0; \quad W(r) = q \left[\frac{1 - e^{-r^2}}{r} \right], \quad (2.14)$$

où les deux seuls paramètres a et q qui décrivent ce tourbillon sont définis par

$$a \equiv \frac{U_0}{U_s}, \quad (2.15)$$

$$q \equiv \frac{\Gamma_0}{2\pi U_s r_s}. \quad (2.16)$$

De ce fait, a est un paramètre qui nous indique la vitesse axiale de l'écoulement extérieur (ainsi que son orientation). En augmentant a nous pouvons successivement étudier des sillages authentiques¹ ($a < -1$; voir figure la 2.2b), des sillages ou des jets avec contre-courant (prendre $-1 < a < 0$; voir la figure 2.2c) et enfin des jets authentiques (prendre $a \geq 0$; voir la figure 2.2d). Les cas $a = -1$ et $a = 0$ correspondent respectivement à un sillage et à un jet sans écoulement extérieur. Dans la suite nous désignerons par coté sillage le demi-plan $a < -0.5$ et par coté jet le demi-plan $a > -0.5$. La configuration "sillage" modélise très bien les sillages tourbillonnaires émis par les avions de transport tandis que la configuration "jet" modélise correctement les tourbillons formés sur les ailes delta des avions militaires en forte incidence. Le paramètre q mesure l'intensité de rotation du coeur visqueux. La figure 2.2a montre le profil de vitesse azimutale $W(r)$ pour deux valeurs successives de ce paramètre de rotation. Nous remarquons que loin du coeur $W(r) \sim 1/r$ c'est-à-dire que l'écoulement devient potentiel. En revanche, près de l'axe

¹On appellera authentique un écoulement dont la vitesse axiale conserve le même signe dans tout l'espace.

($r = 0$) le tourbillon possède un mouvement de rotation solide avec $W \sim r$. Entre ces deux régions une zone de transition assure une variation continue du profil. Le paramètre q est directement proportionnel à la circulation à l'infini Γ_0 . La figure 2.3 donne la fonction $\Gamma(r)$. Dans la partie irrotationnelle de l'écoulement nous retrouvons $\Gamma(r) = \Gamma_0 = cste$.

Il faut remarquer que le profil de vitesses (2.14) est parallèle seulement si on gèle la variable x (qui intervient dans la définition (2.12) de r_s). En effet, le rayon typique du tourbillon r_s varie en \sqrt{x} et le tourbillon se développe ainsi selon x . Par conséquent, notre étude reste seulement valable sur des petites échelles en x où notre hypothèse d'un écoulement parallèle reste valable. Ajoutons enfin que le profil de vitesse (2.14) (en gelant x dans r_s) est une solution des équations d'Euler.

2.1.2 Le problème aux valeurs et vecteurs propres en fluide parfait

L'écoulement incompressible en absence de viscosité, de source de chaleur et de forces massiques extérieures est régi pour un fluide parfait par les équations d'Euler

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.17)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho}, \quad (2.18)$$

où $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_r + w\mathbf{e}_\theta$ désigne la vitesse (en coordonnées cylindriques (x, r, θ)) et P la pression du fluide. Comme dans le cas général (voir section 1.2.1) nous linéarisons les équations (2.17)-(2.18) autour du tourbillon de Batchelor (2.14) parallèle et stationnaire. Les perturbations adimensionnées injectées dans les équations linéarisées autour de l'écoulement de base sont décomposées en modes normaux (voir la relation (1.23)).

Batchelor et Gill [5], dans le cas du jet pur ($q = 0$), et Lessen *et al.* [58], pour les jets tournants, ont montré que la substitution des perturbations (1.23) dans les équations d'Euler adimensionnées et linéarisées autour de l'écoulement de base (2.14) mène au système différentiel du premier ordre suivant:

$$krF + (rG)' + mH = 0, \quad (2.19)$$

$$\gamma G + 2WH/r - P' = 0, \quad (2.20)$$

$$\gamma rH + (rW)'G + mP = 0, \quad (2.21)$$

$$\gamma F + U'G + kP = 0. \quad (2.22)$$

Dans les relations précédentes a' signifie da/dr et nous avons posé

$$\gamma(r) \equiv kU(r) - \omega + mW(r)/r. \quad (2.23)$$

Nous associons à ce système les conditions sur l'axe du tourbillon (1.25)-(1.27) et les conditions de champ lointain (1.28). Le système (2.19)-(2.22) peut être réécrit sous la forme d'une équation différentielle de deuxième ordre pour la fonction auxiliaire

$$Z(r) \equiv \frac{rG(r)}{\gamma(r)}. \quad (2.24)$$

Cette équation (voir Howard et Gupta [39]) admet la forme suivante

$$\begin{aligned} & r^2\gamma^2(m^2 + k^2r^2)Z'' + [(m^2 - k^2r^2)r\gamma^2 + 2(m^2 + k^2r^2)r^2\gamma\gamma']Z' \\ & - [\gamma^2(m^2 + k^2r^2)^2 + 2(m^2 + k^2r^2)m\gamma(W/r)' - 4mk^2r\gamma W \\ & - 2kW(m^2 + k^2r^2)(k(rW)' - mU')]Z = 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

à laquelle il faut adjoindre les deux conditions aux limites

$$Z(0) = Z(\infty) = 0. \quad (2.26)$$

Ainsi, nous obtenons un problème aux valeurs et vecteurs propres. Pour des paramètres de contrôle (m, a, q) donnés, des solutions non triviales $Z(r)$ existent si et seulement si la pulsation complexe ω et le nombre d'onde axial complexe k sont liés par une relation de dispersion de la forme

$$D(k, \omega; m, a, q) = 0. \quad (2.27)$$

A tout couple (k, ω) solution de l'équation de dispersion (2.27) nous associons alors une fonction auxiliaire Z et le jeu correspondant de vecteurs propres complexes (F, G, H, P) par les relations suivantes

$$F(r) = \frac{\{\frac{m}{r}[k(rW)' - mU'] - kr\gamma'\}Z - \gamma krZ'}{m^2 + k^2r^2}, \quad (2.28)$$

$$G(r) = \frac{\gamma}{r}Z, \quad (2.29)$$

$$H(r) = \frac{\{k[mU' - k(rW)'] - m\gamma'\}Z - \gamma mZ'}{m^2 + k^2r^2}, \quad (2.30)$$

$$P(r) = \frac{\gamma\{r\gamma' - \frac{1}{r}[kr^2U' + m(rW)']\}Z + r\gamma Z'}{m^2 + k^2r^2}, \quad (2.31)$$

qui sont obtenues en combinant (2.19)-(2.22) et la définition (2.24).

Traditionnellement deux situations distinctes sont alors envisagées:

- a) L'approche **temporelle** qui consiste à fixer k réel et à chercher les solutions complexes $\omega = \omega(k; m, a, q)$.
- b) L'approche **spatiale** qui consiste à fixer ω réel et à chercher les solutions complexes $k = k(\omega; m, a, q)$.

L'équations (2.25) et les conditions aux limites (2.26) sont invariantes par la transformation $(m, q) \rightarrow (-m, -q)$. Cette propriété demeure donc valable pour la relation de dispersion (2.27). Dans notre étude nous nous restreindrons donc parfois au cas de q positif et m entier quelconque. La forme (2.14) des composantes de vitesse du tourbillon de Batchelor empêche l'écriture analytique de l'équation de dispersion (2.27) et une résolution numérique s'impose. Ainsi, Lessen *et al.* [58] ont effectué l'étude temporelle en employant pour résoudre le problème aux valeurs propres (2.25)-(2.26) une méthode de "shooting". Nous utilisons dans ce chapitre une telle méthode (qui sera décrite dans la rubrique suivante) mais pour réaliser l'étude spatiale.

2.2 Résolution numérique par une méthode de "shooting"

2.2.1 Un problème aux valeurs propres dans le plan complexe

Il est plus pratique d'intégrer numériquement avec les outils disponibles un système du premier ordre de deux équations qu'une seule équation différentielle du second ordre. Aussi, nous commençons par réécrire l'équation différentielle (2.25) sous la forme d'un système différentiel du premier ordre pour les fonctions Z et $Y := dZ/dr$. Un tel système s'écrit, si $r\gamma(r)[m^2 + k^2r^2] \neq 0$,

$$Z' = Y, \quad (2.32)$$

$$Y' = -\left[\frac{1}{r} + \frac{2\gamma'}{\gamma} - \frac{2k^2r}{m^2 + k^2r^2}\right]Y + \left[\frac{m^2 + k^2r^2}{r^2} + \frac{2m}{\gamma r}\left(\frac{W}{r}\right)' - \frac{4mk^2W}{\gamma r(m^2 + k^2r^2)} - \frac{2kW}{\gamma^2r^2}(k(rW)' - mU')\right]Z. \quad (2.33)$$

Ce système (2.32)-(2.33) est donc légitime pour $r > 0$ si γ ne s'annule pas dans l'intervalle

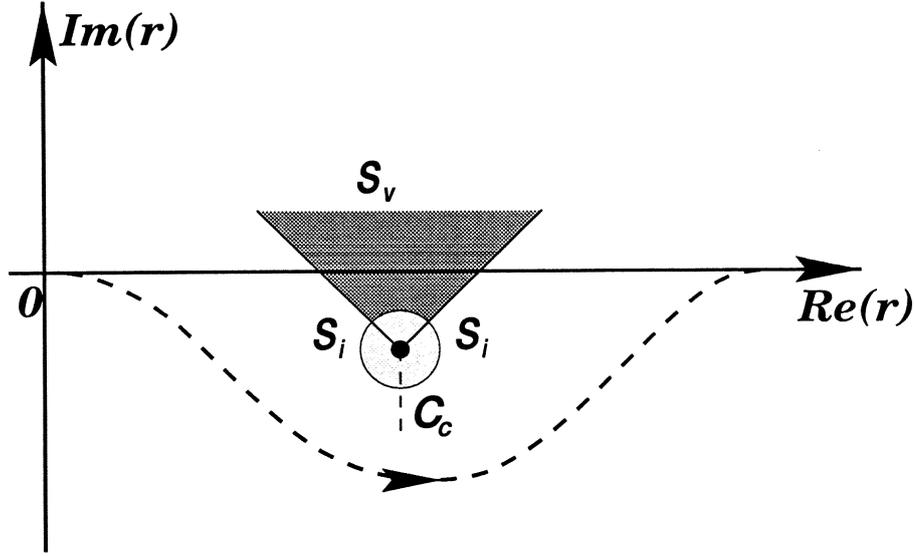


Figure 2.4: La déformation du chemin d'intégration dans le plan complexe. Le point critique, r_c , est entouré d'une couche critique C_c et l'axe réel traverse le secteur visqueux S_v (ici $Re[\gamma'(r_c)] > 0$). La solution obtenue en approche fluide parfait reste valable dans les secteurs non-visqueux S_i .

$]0, \infty[$. Si γ s'annule en $r_1 > 0$ il n'est pas alors possible d'employer (2.32)-(2.33) sur le demi-axe $]0, \infty[$ et il faut contourner, dans le plan complexe, la singularité r_1 . De façon plus générale, nous appelons point critique de l'équation différentielle de départ (2.25), et donc du système (2.32)-(2.33), toute racine complexe r_c de l'équation $r\gamma(r)[m^2 + k^2r^2] = 0$. Ainsi, nous pouvons intégrer le système différentiel (2.32)-(2.33) uniquement sur des contours appropriés du plan complexe. En toute rigueur, nous devons intégrer numériquement (2.32)-(2.33) en tenant compte des conditions aux limites (2.26) en $r = 0$ et à l'infini ainsi que des conditions portant sur Z' à adjoindre en ces points. Cependant, l'origine $r = 0$ est un point critique et pour une implantation numérique il faut de plus intégrer notre système sur un chemin fini. En pratique, nous choisissons donc un contour complexe (contournant "correctement" les autres points critiques complexes éventuels; voir figure 2.4) qui relie les réels ϵ (avec $0 < \epsilon \ll 1$) et $r = r_{max} \gg 1$ et nous imposons des conditions aux limites (Z, Z') en ces points à l'aide des développements asymptotiques adéquates de la fonction Z solution de (2.25) pour une variable réelle.

Pour (m, a, q) fixé, la résolution de l'équation de dispersion (2.27) équivaut donc au problème suivant: trouver le couple complexe (k, ω) tel que si on intègre (2.32)-(2.33) pour prédire la valeur (Z, Z') en un point $M(h, l)$ (voir figure 2.5 avec $\epsilon < h < r_{max}$) en utilisant respectivement les contours (ϵ, M) et (r_{max}, M) (valeurs prédites (Z_+, Z'_+) et (Z_-, Z'_-)) alors

$$\frac{Z'_+}{Z_+} = \frac{Z'_-}{Z_-}. \quad (2.34)$$

Ainsi, le Wronskien $W(k, \omega; m, a, q)$ défini par

$$W(k, \omega; m, a, q) \equiv Z'_+ Z_- - Z'_- Z_+ \quad (2.35)$$

s'annule si et seulement si $D(k, \omega; m, a, q) = 0$.

En pratique, un algorithme itératif de type Newton-Raphson est appliqué à la fonction Wronskien en partant d'une valeur initiale $W(k_G, \omega_G; m, a, q)$ où le couple (k_G, ω_G) désigne

une solution approchée ("guess value") fournie par l'utilisateur (voir la rubrique 2.2.4). Nous avons employé l'algorithme DNEQNF de la bibliothèque scientifique IMSL pour annuler numériquement le Wronskien.

2.2.2 Les comportements asymptotiques

Comportements de (Z, Z') pour r réel et petit

Pour examiner le comportement de toute solution Z de l'équation (2.25) au voisinage de $r = 0$ il faut supposer que $\gamma(0) = k(a+1) - \omega + mq \neq 0$. Pour une étude spatio-temporelle où seul l'un des complexes k ou ω est réel, l'hypothèse indiquée ci-dessus est valable. Nous appliquons la méthode de Frobénius (voir Bender et Orszag [6]) à l'équation différentielle (2.25) pour r réel et voisin de zéro. Nous cherchons ainsi une solution sous la forme:

$$Z(r) = \sum_{i \geq 0} a_i r^{\beta+i}, \quad \text{Re}(\beta) > 0 \quad (2.36)$$

où le complexe β est solution d'une équation indicelle et la condition $Z(0) = 0$ impose de ne retenir que les racines β de partie réelle positive. Nous obtenons alors aisément les comportements suivants:

- Si $m = 0$:

$$Z(r) = r^2[1 + br^2 + O(r^3)]; \quad \frac{Z'}{Z} = \frac{1}{r}[2 + 3br^2 + O(r^3)], \quad (2.37)$$

avec:

$$b \equiv \frac{k^2}{8} \left[1 - \frac{4q^2}{\gamma^2(0)}\right] + \frac{k}{\gamma(0)}. \quad (2.38)$$

- Si $|m| \geq 1$

$$Z(r) = r^{|m|} \left[1 + \frac{dr^2}{|m|+1} + O(r^3)\right], \quad \frac{Z'}{Z} = \frac{1}{r} \left[|m| + dr^2 + O(r^3)\right], \quad (2.39)$$

avec:

$$d \equiv \frac{k^2}{4} \left[1 + \frac{2}{|m|} - \frac{4q}{m\gamma(0)} - \frac{4q^2}{\gamma^2(0)}\right] + \frac{4k}{\gamma(0)} \left[|m| - \frac{mq}{\gamma(0)}\right] + \frac{2m(|m|-1)q}{\gamma(0)}. \quad (2.40)$$

Pour le programme numérique nous choisissons $Z(\epsilon) = 1$ et $Z'(\epsilon)$ est donné par les formes asymptotiques (2.37) ou (2.39) avec $0 < \epsilon \ll 1$.

Comportement asymptotique à l'infini pour r réel

Lessen *et al.* [58] mais aussi Ash et Khorrami [2] montrent que, pour $r \rightarrow \infty$,

$$G \sim \frac{F'}{k}. \quad (2.41)$$

En observant que

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{1}{r} + \frac{G'}{G} - \frac{\gamma}{\gamma} \quad (2.42)$$

nous pouvons écrire

$$\frac{Z'}{Z} \sim \frac{1}{r} + \frac{F''}{F'} - \frac{\gamma}{\gamma}. \quad (2.43)$$

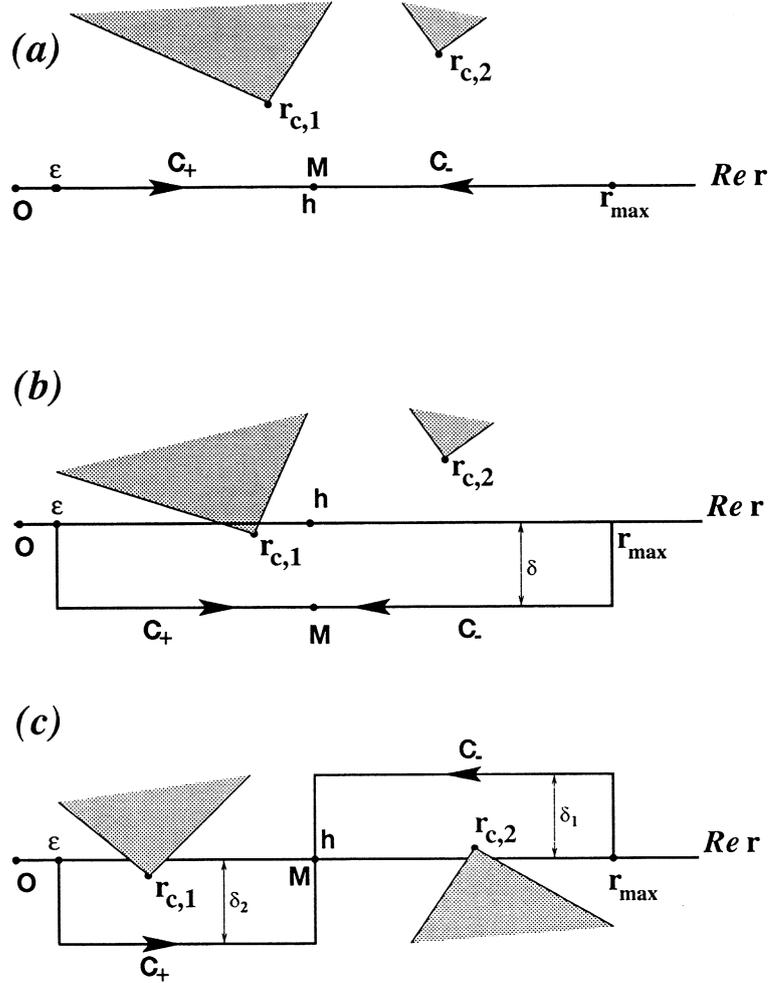


Figure 2.5: La règle de déformation du contour dans le plan complexe r . Les secteurs visqueux sont indiqués en gris. (a) Cas où $Im[r_{c,j}] \times Re[\gamma'(r_{c,j})] > 0$ pour $j \in \{1, 2\}$: les chemins d'intégration C_- et C_+ étant sur l'axe réel. (b) Cas où $Im[r_{c,1}] < 0$, $Re[\gamma'(r_{c,1})] > 0$ et $Im[r_{c,2}] > 0$, $Re[\gamma'(r_{c,2})] > 0$: les chemins d'intégration C_- et C_+ sont tracés dans le demi-plan complexe inférieur. (c) Cas où $Im[r_{c,1}] < 0$, $Re[\gamma'(r_{c,1})] > 0$ et $Im[r_{c,2}] > 0$, $Re[\gamma'(r_{c,2})] < 0$: les chemins d'intégration C_+ et C_- sont tracés dans le demi-plan inférieur et respectivement dans le demi-plan supérieur du plan complexe r .

Le comportement asymptotique de Z'/Z est directement déduit de celui de la fonction F . Pour $r \rightarrow \infty$, cette fonction $F(r)$ obéit à l'équation de Bessel modifiée

$$F'' + \frac{F'}{r} - \frac{k^2 r^2 + m^2}{r^2} F = 0. \quad (2.44)$$

Ainsi, la fonction $F(u)$ de la nouvelle variable complexe $u = kr$, satisfait l'équation de Bessel modifiée dont les solutions générales s'écrivent

$$F(u) = AK_{|m|}(u) + BI_m(u) + CI_{-m}(u) \quad (2.45)$$

où A, B, C sont des constantes arbitraires et $I_{\pm\nu}$ et K_ν désignent les fonctions de Bessel modifiées (voir Abramovitz et Stegun [1]). Lorsque $|arg u| < \pi/2$ et $|u| \rightarrow \infty$, ces dernières fonctions vérifient les comportements suivants

$$I_\nu(u) \sim \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}}; \quad K_\nu(u) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2u}} e^{-u}. \quad (2.46)$$

Pour une étude spatio-temporelle nous pouvons restreindre le domaine du nombre d'onde axial k à la partie $k_r = \text{Re}(k) > 0$ (voir Huerre et Monkewitz [40] et Huerre [42]). La fonction $F(r) = AK_{|m|}(kr)$ est la seule solution de l'équation (2.25) qui vérifie la condition à l'infini (2.26), c'est-à-dire que $B = C = 0$ dans (2.45). En introduisant la fonction F dans l'équation (2.44) et en tenant compte des relations de récurrence

$$K_{n+1}(u) = \frac{2n}{u}K_n(u) + K_{n-1}(u); \quad \frac{dK_n}{du} = -\frac{n}{u}K_n(u) - K_{n-1}(u); \quad -\frac{dK_0}{du} = K_1(u) \quad (2.47)$$

sur K_n et sa dérivée, nous obtenons, pour $r = \infty$, les résultats asymptotiques

- Si $m = 0$:

$$\frac{Z'}{Z} \sim -k \frac{K_0(kr)}{K_1(kr)}. \quad (2.48)$$

- Si $|m| \geq 1$:

$$\frac{Z'}{Z} \sim \frac{2mq}{mqr + (ka - \omega)r^3} - \frac{k[1 + m^2/(k^2r^2)]K_{|m|}(kr)}{\frac{m}{kr}K_{|m|}(kr) + K_{|m|-1}(kr)}. \quad (2.49)$$

Remarquons que les comportements asymptotiques obtenus au voisinage de l'origine et à l'infini dépendent du couple (k, ω) solution de l'équation de dispersion (en effet dans (2.37) et (2.39), $\gamma(0)$ dépend de ω).

2.2.3 Points critiques et choix du contour d'intégration

Nous précisons à présent la façon correcte de choisir un contour complexe d'intégration de manière à tenir compte des points critiques complexes. Dans le cas d'une étude strictement temporelle (k réel et ω complexe) Lessen *et al.* [58] ont appliqué à l'équation (2.25) le critère de Lin [59] qui a été établi pour l'équation d'Orr-Sommerfeld (cas strictement temporel). Pour k réel, les seuls points critiques r_c obéissent à $r_c\gamma(r_c) = 0$, c'est-à-dire en dehors de $r = 0$ (puisque $\gamma(0) \neq 0$ par hypothèse formulée pour établir le comportement asymptotique de Z'/Z près de l'origine) à $\gamma(r_c) = 0$.

Dans ce cas, la déformation du contour proposée par Lessen *et al.* [58] est la suivante: *pour tout point critique r_c complexe ($\gamma(r_c) = 0$) tel que $\gamma'(r_c) \neq 0$, le chemin d'intégration doit passer au dessous de r_c quand $\text{Re}[\gamma'(r_c)] > 0$ et au dessus de r_c quand $\text{Re}[\gamma'(r_c)] < 0$.* Ainsi, le chemin d'intégration ne traverse pas le secteur visqueux situé dans le demi-plan supérieur $\text{Im}(r) \geq \text{Im}(r_c)$ (respectivement demi-plan inférieur $\text{Im}(r) \leq \text{Im}(r_c)$). La généralisation de cette règle pour (k, ω) complexe quelconque (notre étude s'intéresse surtout au cas spatial, ω réel et k complexe) n'est pas facile. En effet, à chaque point critique r_c est associé un secteur visqueux et une couche critique où la solution Z cherchée n'est pas la limite, à viscosité évanescence, de la solution du problème visqueux associé et seul un contour tracé de manière à éviter ce secteur visqueux est donc autorisé (voir figure 2.4). Nous admettons que ce critère employé par Lessen *et al.* [58], dans un cadre strictement temporel, s'applique également à notre étude spatio-temporelle pour des valeurs modérées de k_i et ω_i . La justification de cette extension n'est pas triviale. Dans le cas de l'équation d'Orr-Sommerfeld, Le Dizès *et al.* [52] montrent (voir leur figure 1) comment le point critique situé sur l'axe réel pour des ondes neutres (k et ω réels) se déplace dans le plan complexe dès que k et ω deviennent complexes. En même temps, l'orientation du secteur visqueux subit une rotation d'angle $\text{arg}[k/3]$. Nous admettons que ces caractéristiques demeurent valables pour notre équation (2.25) dans le cas spatio-temporel (la démonstration réclamerait en toute rigueur une étude complète et directe de l'équation (2.25)). Nous appelons donc dorénavant point critique, r_c , toute racine de

$\gamma(r_c) = 0$ avec $r_c \neq 0$. La forme des profils de vitesse du tourbillon de Batchelor montre qu'au plus deux points critiques r_c tels que $Re(r_c) \geq 0$ existent quand $m\eta \neq 0$ ou $m\eta = 0$ et $(k, \omega) = (0, 0)$ (voir l'annexe A). En pratique, nous pouvons rencontrer a priori trois différents types de contour complexes lors de l'intégration numérique de notre système différentiel (2.32)-(2.33) entre ϵ et $r = r_{max}$ (voir notre figure 2.5):

(1) premier type de contour: Ce premier type de contour correspond à l'intégration le long de l'axe réel. Cette situation est légitime dans les circonstances suivantes:

- a) l'équation $\gamma(r_c) = 0$ n'a pas de solution.
- b) l'équation $\gamma(r_c) = 0$ a une, voire deux, solution(s) complexe(s) mais l'orientation du ou des secteurs visqueux associés autorise cependant l'intégration sur l'axe réel (voir figure 2.5a).

(2) deuxième type de contour: Dès que l'axe réel traverse le secteur visqueux d'un ou deux point(s) critique(s) nous devons choisir un contour d'intégration dans le plan complexe. Le contour classique pour une telle situation est montré à la figure 2.5b. Nous utiliserons ce contour dans les deux cas suivants:

- a) l'équation $\gamma(r_c) = 0$ a une seule solution r_c dont le secteur visqueux affecte une partie de l'axe réel. Le contour d'intégration peut passer en dessous de l'axe réel suivant la règle définie auparavant quand $Re[\gamma'(r_c)] > 0$ ou au dessus quand $Re[\gamma'(r_c)] < 0$.
- b) l'équation $\gamma(r) = 0$ admet deux solutions complexes $r_{c,1}$ et $r_{c,2}$ dont les secteurs visqueux ont la même orientation, c'est-à-dire avec $Re[\gamma'(r_{c,1})] \times Re[\gamma'(r_{c,2})] > 0$. Plus précisément:
 Si $Re[\gamma'(r_{c,1})] > 0$, alors le contour passe en dessous de l'axe réel. Si $Re[\gamma'(r_{c,1})] < 0$, alors le contour passe en dessus de l'axe réel.

Pour ce type de contour, la variable d'intégration et le point de rencontre $M(h, l)$ sont complexes. Le paramètre $\delta = l$ désigne l'élévation algébrique ($\delta < 0$ sur la figure 2.5b) d'intégration et est choisi en fonction des parties imaginaires des solutions $r_{c,1}$ et $r_{c,2}$.

(3) troisième type de contour: Ce contour est adopté lorsque l'équation $\gamma(r_c) = 0$ admet deux racines $r_{c,1}$ et $r_{c,2}$ avec $Re[\gamma'(r_{c,1})] \times Re[\gamma'(r_{c,2})] < 0$. Dans ce cas, le contour a la forme proposée à la figure 2.5c. La variable d'intégration est complexe tandis que le point de rencontre $M(h, 0)$ est réel ($l = 0$). Les élévations du contour δ_1 et δ_2 tiennent compte des parties imaginaires des solutions $r_{c,1}$ et $r_{c,2}$.

En conclusion, chaque type de contour se décompose en portions horizontales et/ou verticales dans le plan complexe. Sur chaque portion nous intégrons le système différentiel (2.32)-(2.33) avec une variable réelle (obtenue par changement de variable). Le sous-programme DIVPAG de la bibliothèque scientifique IMSL est employé pour effectuer chaque intégration numérique.

Le contour d'intégration passe d'abord en dessous ou au dessus de l'axe réel selon le signe de $Re[\gamma'(r_{c,1})]$. Le point de rencontre M est sur l'axe réel $r_h = h$. Dans les calculs nous prenons $h = Re[r_{c,1} + r_{c,2}]/2$. L'élévation de contour δ dépend toujours de la partie imaginaire des solutions $r_{c,1}$ et $r_{c,2}$.

2.2.4 Mise en oeuvre pratique et validation du Code numérique

Choix de (k_G, ω_G) et détermination des points critiques

Il s'avère indispensable, pour que le Code converge rapidement vers une solution (k, ω) de l'équation de dispersion, de fournir au départ une valeur approchée (k_G, ω_G) réaliste. Si nous connaissons déjà une partie (dans le domaine fréquentiel) d'une branche $k(\omega; m, a, q)$

nous choisissons alors (k_G, ω_G) par interpolation polynomiale sur le morceau connu et nous progressons de la sorte avec un petit pas en pulsation ω . S'il s'agit de trouver une branche (spatio-temporelle) $k(\omega; m, a, q)$ initialement inconnue il faut fournir (k_G, ω_G) d'une autre manière. Nous avons utilisé deux façons différentes de trouver de nouvelles branches spatio-temporelles.

1) En s'appuyant sur des branches strictement temporelles $\omega = \omega(k; m, a, q)$ amplifiées (avec $\omega_i = \text{Im}(\omega) > 0$ et k réel) connues. Nous suivons alors ces branches dans le domaine spatio-temporel en faisant varier ω_i à ω_r fixé pour une solution $k(\omega; m, a, q)$ passant par une branche temporelle. Dans ce but, nous utilisons les branches temporelles amplifiées données par Lessen *et al.* [58].

2) En utilisant des points appartenant à des branches spatiales (ω réel, k complexe) obtenues par une autre approche de simulation numérique directe de la réponse du tourbillon de Batchelor à une excitation impulsionnelle. Cette approche a été effectuée au LadHyX par Delbende *et al.* [22]. Cependant, la précision des valeurs (k_G, ω_G) de départ fournies par cette seconde méthode n'est pas toujours suffisante pour permettre à la méthode de "shooting" de converger. Dans des cas défavorables il faut employer la première méthode.

La rubrique relative au choix du contour d'intégration dans le plan complexe a clairement montré l'importance de la détermination, dans ce plan, des points critiques r_c solutions de l'équation $\gamma(r_c) = 0$. Sachant (voir (2.23)) que la fonction γ dépend non seulement de (m, a, q) mais aussi du couple (k, ω) les points critiques éventuels sont affectés à chaque branche $k(\omega; m, a, q)$. La résolution numérique de l'équation $\gamma(r_c) = 0$ est accomplie une fois de plus par le sous-programme DNEQNF qui requiert la donnée d'une valeur approchée r_c^G pour chaque racine éventuelle (il y en a au plus deux $r_{c,1}$ et $r_{c,2}$ dans le demi-plan complexe $\text{Re}(r_c) \geq 0$). Le long d'une branche $k(\omega; m, a, q)$, les valeurs approchées $r_{c,1}^G$ et $r_{c,2}^G$ sont obtenues par interpolation sur la portion connue de la branche. Pour le premier point d'une nouvelle branche spatialement amplifiée (ω réel, $-k_i > 0$), dont la valeur approchée (k_G, ω_G) est fournie par l'une ou l'autre des deux méthodes précédentes, nous déterminons les valeurs $r_{c,1}^G$ et $r_{c,2}^G$ comme suit:

1) Si $|m| = 1$, les points critiques sont déduits pour $q \neq 0$ en suivant ceux obtenus sur la branche $k(\omega; m, a, 0)$.

2) Si $|m| > 1$, les points critiques sont déduits pour $q \neq 0$ en suivant ceux obtenus sur une branche $k(\omega; m, a, q \rightarrow 0)$.

Choix des paramètres ϵ , r_{max} et de l'élévation du contour

Dans leur étude Lessen *et al.* [58] ont choisi $r_{max} = 3$. Cette valeur s'avère, d'après Mayer et Powell [63], insuffisante. Pour déterminer une valeur $r_{max} > 3$ convenable et pas trop grande (pour ne pas engendrer des intégrations trop longues) nous avons donc utilisé les résultats temporels de Mayer et Powell [63] pour $\text{Re} \rightarrow \infty$ et $r_{max} = 100$. La table 2.1 compare, en fonction de r_{max} et pour $\epsilon = 10^{-3}$, nos résultats aux trois premiers modes

r_{max}	$k(\text{mode 1})$	$k(\text{mode 2})$	$k(\text{mode 3})$
2	0.500805491+0.001536202i	0.499020489+0.001385733i	0.498500626- 0.000421804i
3	0.500001528- 0.000004729i	0.500002756+0.000000103i	0.499999502+0.000002971i
10	0.499999415-0.000000133i	0.499999779- 0.000000159i	0.500000034+0.000000087i
15	0.499999106-0.000000268i	0.499999827-0.000000096i	0.500000031- 0.000000097i
50	0.499999464-0.000000135i	0.499999829-0.000000191i	0.500000035- 0.000000092i

Table 2.1: Comparaisons avec Mayer et Powell [63] ($\epsilon = 10^{-3}$).

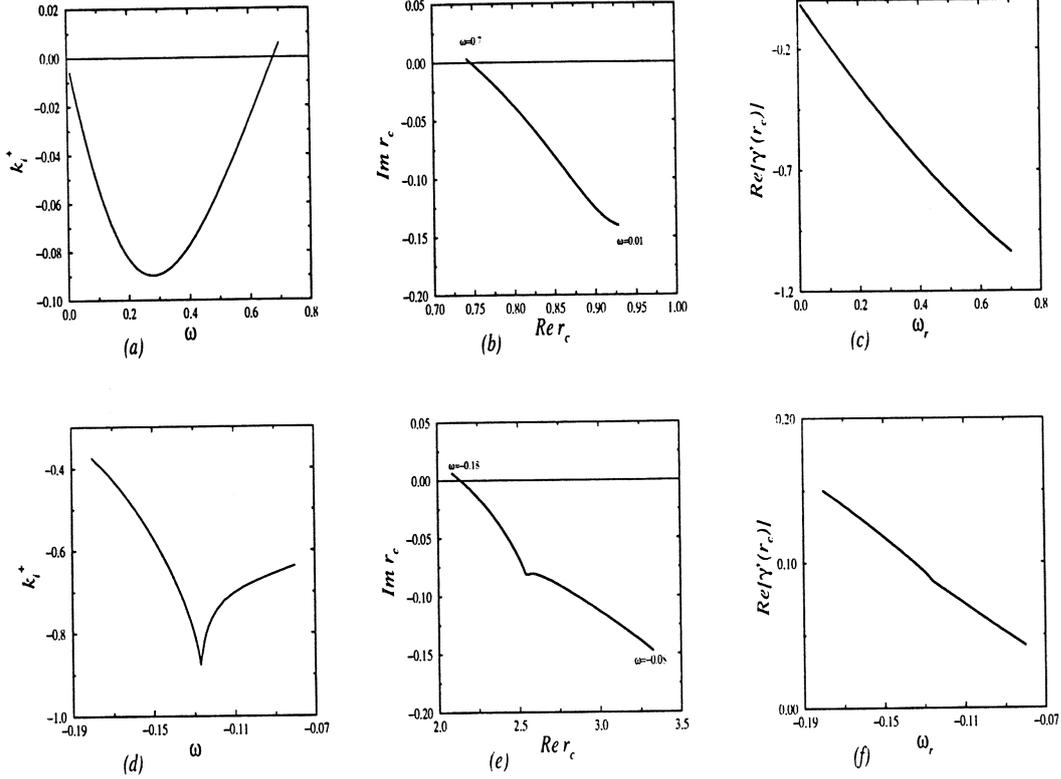


Figure 2.6: Le cas $m = -1$, $a = 0$, $q = 0$, ω varie de 0.01 à 0.7: (a) la branche spatiale $k_i^+(\omega)$; (b) l'évolution du point critique r_c correspondant dans le plan complexe; (c) le paramètre $Re[\gamma'(r_c)]$ qui indique l'orientation du secteur visqueux. Le cas $m = -2$, $a = -0.01$, $q = 0.4$, ω varie de -0.18 à -0.08 : (d) la branche spatiale $k_i^+(\omega)$; (e) l'évolution du point critique r_c correspondant dans le plan complexe; (f) le paramètre $Re[\gamma'(r_c)]$ qui indique l'orientation du secteur visqueux.

temporellement instables de Mayer et Powell [63] pour le mode azimutal $m = -1$ et $(a, q) = (0, 0.5)$. Ainsi, Mayer et Powell [63] trouvent $\omega_1 = (0.0497186499174, 0.2026281012942)$ (pour le mode 1), $\omega_2 = (-0.01620888889, 0.10582318954)$ (pour le mode 2) et $\omega_3 = (-0.029538003, 0.06005365)$ (pour le mode 3) avec $k = (0.5, 0)$. Nous avons injecté ces valeurs ω_1 , ω_2 et ω_3 et obtenu par notre code la valeur complexe de k qui est procurée par la table 2.1.

En conséquence, nous adoptons pour la suite la valeur $r_{max} = 15$. L'étude de l'influence de ϵ sur la précision du code montre que les résultats ne changent pratiquement pas quand ce paramètre reste inférieur à 10^{-1} . Nous gardons donc pour la suite $\epsilon = 10^{-3}$.

Enfin, nous donnons quelques précisions sur le choix des élévations des contours, selon la position des points critiques. Nous devons vérifier a posteriori ce choix d'élévation qui peut très bien changer lorsqu'on se déplace sur une branche spatiale $k(\omega; m, a, q)$ (ω réel). Nous illustrons ceci sur les modes $m = -1$, $m = -2$ et $m = -3$. Ainsi sur les figures 2.6(a-c) nous donnons pour $m = -1$ la position du point critique r_c trouvé et la valeur de $Re[\gamma'(r_c)]$ quand on se déplace sur une branche $k^+(\omega; m, a, q)$. Nous voyons donc qu'on peut toujours ici intégrer sur l'axe réel sauf au voisinage de $\omega = 0.68$, valeur pour laquelle r_c est réel (voir figure 2.6b). Dans ce cas nous pouvons calculer analytiquement le point critique $r_c = 0.747$ en choisissant $a = 0$, $q = 0$, $\omega_i = 0$ et $k_i = 0$ dans l'équation (2.23). Ainsi pour $\omega > 0.68$ il faut changer de contour et adopter un contour identique à celui de la figure 2.7 avec une élévation suffisante ($\delta > 0$ car $Re[\gamma'(r_c)] < 0$).

Les figures 2.6(d-f) montrent le cas d'une branche $m = -2$ qui admet cette fois un

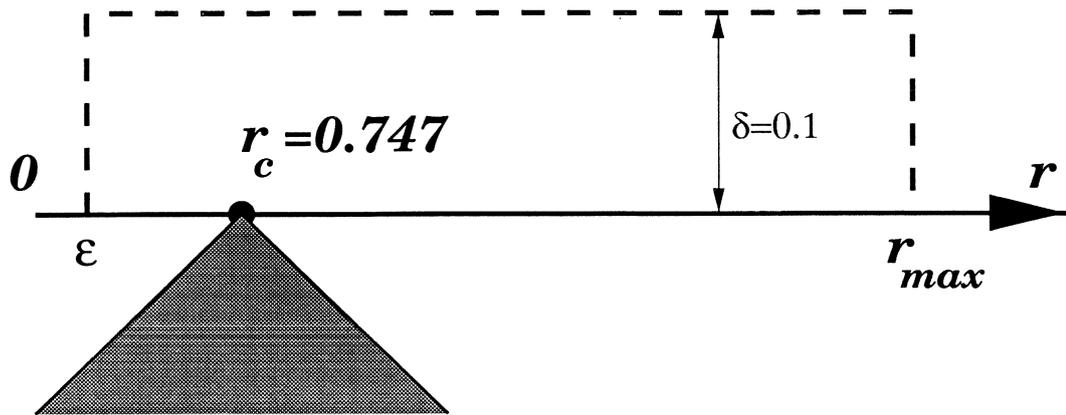


Figure 2.7: Cas d'un point critique $r_c = 0.747$ situé sur l'axe réel pour $m = -1$, $a = 0$, $q = 0$, $\omega = 0.68$ et $k = 1.2$. Le contour passe dans le demi-plan supérieur car $Re[\gamma'(r_c)] = -1.02$.

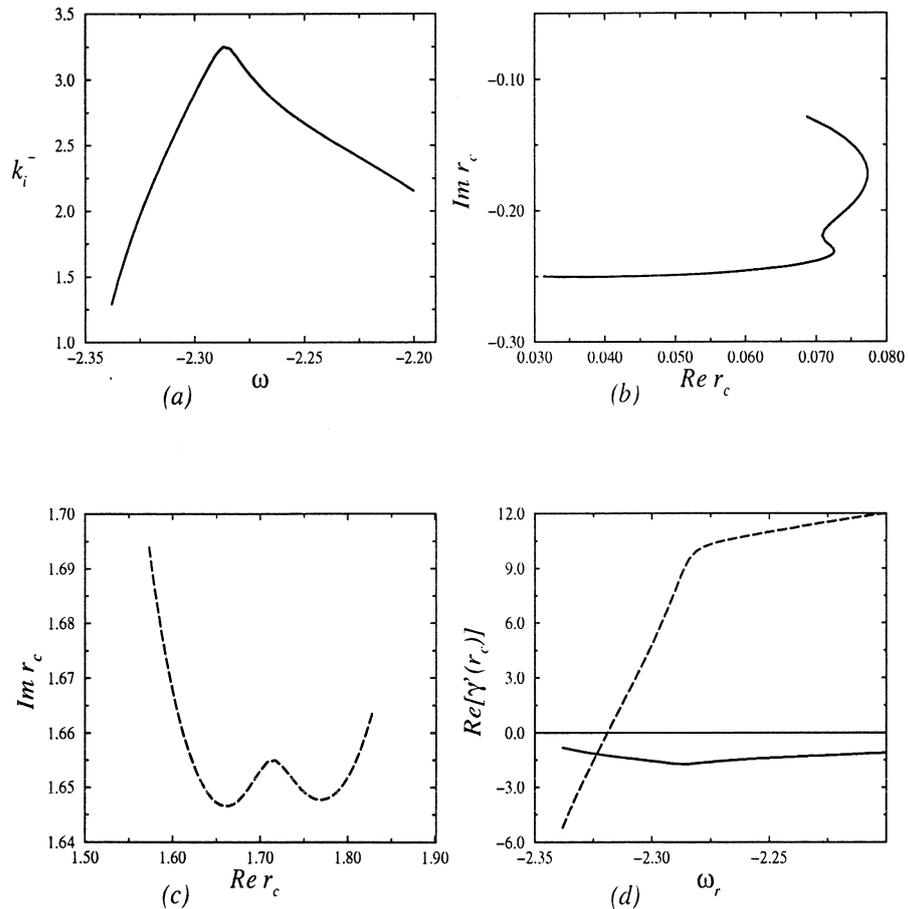


Figure 2.8: Le cas $m = -3$, $a = -1.058$, $q = 0.7$ et ω varie de -2.34 à -2.2 . (a) La branche spatiale $k_i^+(\omega)$. (b) et (c) L'évolution des points critiques $r_{c,1}$ et $r_{c,2}$ correspondants dans le plan complexe. Les paramètres $Re[\gamma'(r_{c,1})]$ et $Re[\gamma'(r_{c,2})]$ qui indiquent l'orientation des secteurs visqueux.

point critique réel sans être à la neutralité pour $\omega \simeq -0.17$. Cette fois $Re[\gamma'(r_c)] > 0$, ce qui implique l'utilisation d'un contour de type 2 avec $\delta_1 < 0$ où $|\delta_1|$ qui doit être assez grand quand ω augmente (en effet $Im(r_c)$ diminue quand ω augmente). Enfin les figures 2.8(a-d), montrent pour $m = -3$, le cas d'une branche spatiale pour laquelle deux points critiques complexes, $r_{c,1}$ et $r_{c,2}$, ont été trouvés. Si $r_{c,1}$ autorise une intégration sur l'axe réel ce n'est pas toujours le cas de $r_{c,2}$ car $Re[\gamma'(r_{c,2})] > 0$ change de signe pour $\omega \simeq -2.32$ ce qui imposerait pour $\omega < -2.32$ d'intégrer sur un contour de type 2 avec $\delta_1 > 0$ et $\delta_1 > Im(r_{c,2})$ c'est-à-dire ici une élévation importante $\delta_1 > 1.64$. En pratique nous avons pu intégrer sur l'axe réel. Une explication pour ce comportement est que la solution visqueuse valable dans le secteur visqueux d'un point critique situé très loin de l'axe réel et la solution non visqueuse valable à l'extérieur peuvent être raccordées malgré les variations importantes (conformément à la théorie de l'équation d'Orr-Sommerfeld dans la limite des grands nombres de Reynolds développée par Wasow [86], Lin [59] et Drazin et Reid [25]). En effet, comme nous l'avons montré à la figure 2.4, le raccordement entre les deux solutions est impossible surtout dans une couche critique et ensuite dans le secteur visqueux. Remarquons qu'en pratique le troisième type de contour est rarement employé.

Comparaisons

Les résultats obtenus par Mayer et Powell [63] restent très proches de ceux de Lessen *et al.* [58] ce qui nous autorise à prendre ces derniers comme valeurs approchées pour le Code de "shooting".

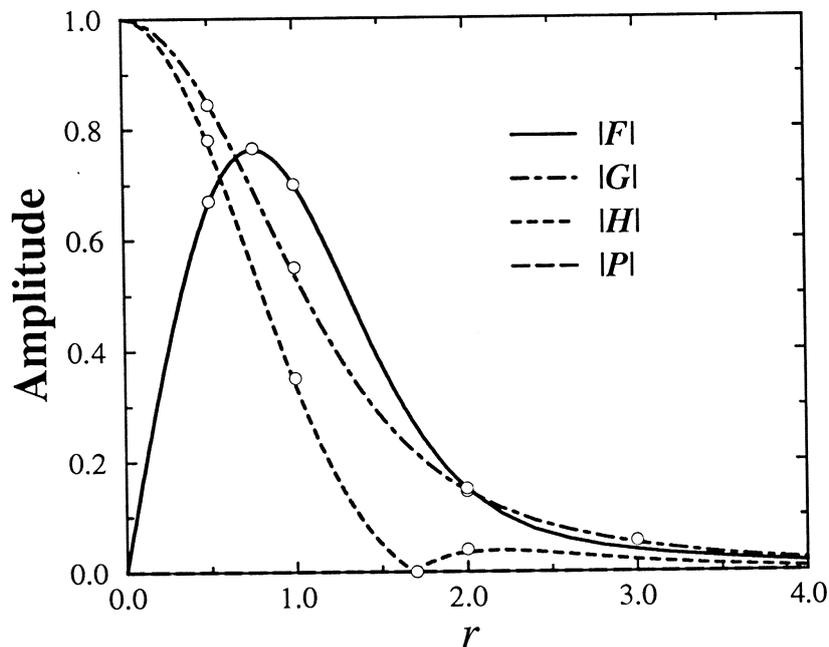


Figure 2.9: Les modules des fonction propres $|F(r)|$, $|G(r)|$, $|H(r)|$ et $|P(r)|$ d'un mode neutre pour $m = 1$, $a = 0$, $q = 0.7$, $\omega = 0.0425$ et $k = 0.6$. Traits continus ou pointillés: la présente étude. (o): résultats obtenus par Duck et Khorrami [27].

Une vérification supplémentaire a été effectuée en comparant les modules des fonctions propres obtenues selon les formules (2.28)-(2.31) et les fonctions propres calculées par Duck et Khorrami [27] pour un mode neutre avec $m = 1$, $a = 0$, $q = 0.7$, $\omega = 0.0425$ et $k = 0.6$. Comme le montre la figure 2.9, l'accord entre les deux programmes est excellent. Il faut

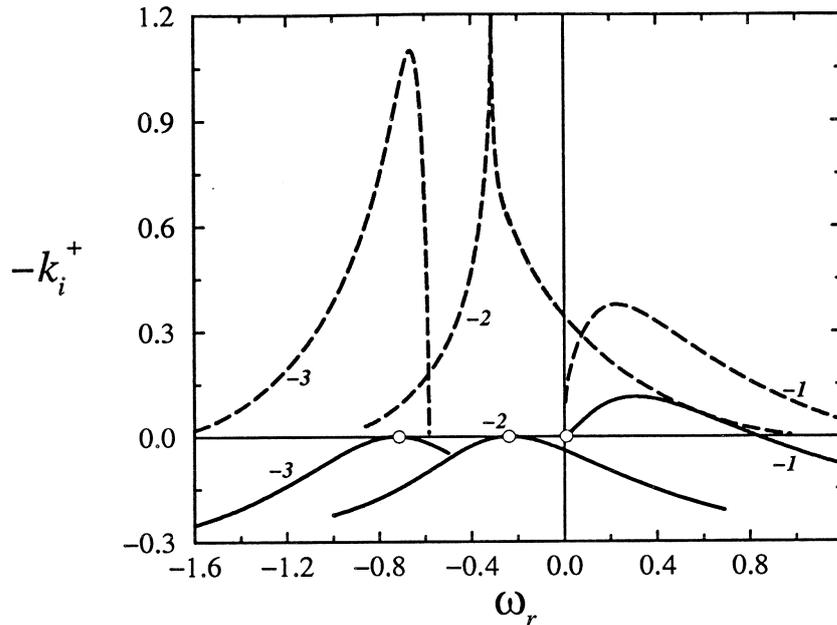


Figure 2.10: Les branches spatio-temporelles $k(\omega_r + \omega_{i,max})$, $\omega_{i,max}$ étant le taux de croissance temporel maximal (symboles (o)) indiqué par Lessen *et al.* [58] (traits continus). En traits pointillés: les branches purement spatiales $k(\omega_r)$ correspondantes obtenues en variant ω_i de $\omega_{i,max}$ à 0 (traits pointillés).

remarquer que $|P(r)|$ reste très faible dans tout le domaine considéré.

2.3 Présentation et discussion des résultats obtenus

2.3.1 L'instabilité spatiale du tourbillon

Dans notre étude, notamment pour déterminer le lieu des transitions instable convectif-instable absolu, nous fournissons donc ω complexe et nous cherchons le complexe k . La donnée de ω réel conduit à la notion de branches spatiales $k^+(\omega; m, a, q)$ qui peuvent être instables (si $k_i^+ > 0$) ou stables (si $-k_i^+ < 0$). Plus précisément, dans le chapitre précédent nous avons montré que la stabilité spatiale de l'écoulement est caractérisée par le comportement des branches $k^+(\omega; m, a, q)$ et $k^-(\omega; m, a, q)$ qui correspondent respectivement à la propagation spatiale en aval ($x > 0$) et en amont ($x < 0$) d'une perturbation située en $x = 0$ et de pulsation donnée et réelle ω . Du côté jet ($a > -0.5$), l'attention est focalisée sur le comportement de la branche k^+ parce qu'elle est la seule amplifiée ($-k_i^+ > 0$). Par conséquent, nous nous intéressons à l'évolution des branches $k^+(\omega; m, a, q)$ quand le paramètre q de rotation du tourbillon augmente et pour différents nombres d'onde azimutaux m . Lessen *et al.* [58] et Mayer et Powell [63] montrent que le mode axisymétrique $m = 0$ et les modes azimutaux $m > 1$ sont stables pour toute valeur de $q \geq 0$ (à l'exception du mode $m = 1$ pour des q très petits). Nous nous concentrons donc sur l'étude des trois premiers modes azimutaux $m = -1$, $m = -2$ et $m = -3$. En effet, l'étude de chaque mode requiert une quantité importante de calculs et les modes $m \in \{-3, -2, -1\}$ ont été les plus étudiés, du moins en approche temporelle, par les travaux précédents. Notons que pour chaque valeur de m plusieurs branches solutions $k^+(\omega)$ existent a priori. Par exemple, en approche temporelle, Mayer et Powell [63] trouvent cinq modes temporellement instables pour $m = -1$. Nous choisissons d'étudier pour chaque mode azimutal la contre-partie

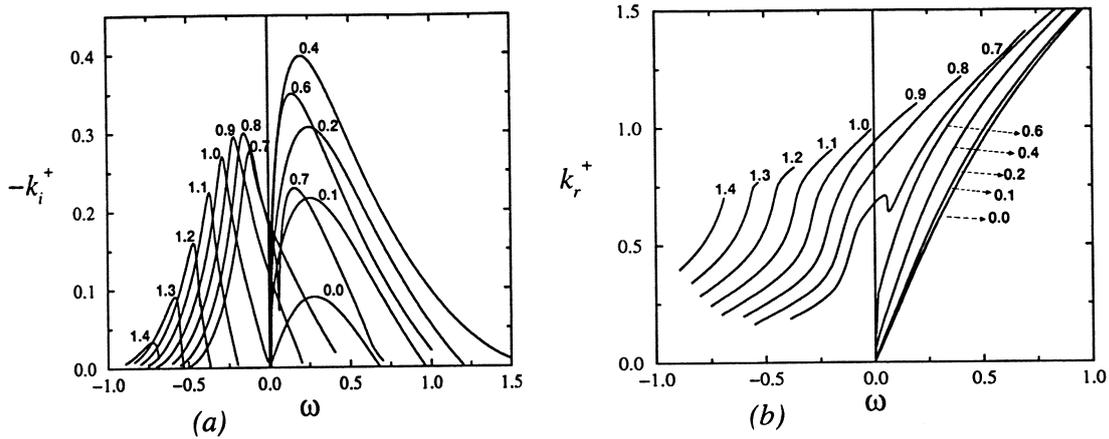


Figure 2.11: Evolution des caractéristiques d'instabilité spatiale quand la rotation augmente pour le mode azimutal $m = -1$ et un jet authentique $a = 0$. (a) Les taux de croissance spatiale $-k_i^+(\omega_r)$. (b) La partie réelle $k_r^+(\omega_r)$. Le paramètre de rotation q est indiqué à coté de chaque courbe.

spatiale de la branche temporellement la plus amplifiée trouvée par Lessen *et al.* [58]. Ainsi, Lessen *et al.* [58] procurent pour chaque mode $m = -1$, $m = -2$ et $m = -3$ la valeur $\omega_{i,max}$ (et le nombre d'onde axial réel $(k_{T,max}, 0)$ associé) du taux d'amplification temporel maximum. Cette valeur maximale, $\omega_{i,max}(m)$, est obtenue pour un certain $q(m)$ dépendant du mode m . Nous déterminons la partie réelle $\omega_{r,max}$ de la pulsation associée en traçant pour $a = 0$ sur une certaine plage de ω_r , pour $\omega = \omega_r + \omega_{i,max}$, la branche spatio-temporelle $k^+(\omega; m, 0, q(m))$. Pour les modes $m = -1$, $m = -2$ et $m = -3$ nous traçons à la figure 2.10 (courbes en traits pleins) les taux d'amplification $-k_i^+(\omega; m, 0, q(m))$ pour $\omega_r = Re(\omega)$ variable et $\omega_i = Im(\omega) = \omega_{i,max}$. Remarquons que ces courbes admettent leur maximum en $k_i = 0$ pour $m = -2$ et $m = -3$. En effet, la branche temporelle $\omega_i(k)$ est approximativement une cloche qui pour $\omega_i < \omega_{i,max}$ coupe une droite $\omega_i = ct$ en deux points k et k' réels sauf pour $\omega_i = ct = \omega_{i,max}$ où ces deux points se confondent. Ce point k réel est le maximum des courbes $-k_i^+(\omega = \omega_r + \omega_{i,max}; m, 0, q(m))$ pour les modes $m = -2$ et $m = -3$. Ceci n'est pas le cas pour le mode $m = -1$ car Lessen *et al.* [58] n'ont pas trouvé la bonne valeur $\omega_{i,max}$. En réalité, Mayer et Powell [63] trouvent pour ce mode une valeur $\omega_{i,max} = 0.242$ contre $\omega_{i,max} = 0.147$ pour Lessen *et al.* [58]. Nous avons vérifié que la courbe en trait plein pour $\omega_{i,max} = 0.242$ admet bien son maximum en $k_i = 0$ (cette démarche procure une méthode pour trouver le taux de croissance temporel maximum $\omega_{i,max}$ avec un code spatial). Enfin nous obtenons nos modes spatiaux en "suivant" ces branches spatio-temporelles lorsque ω_i passe de $\omega_{i,max}$ à zéro. Les taux d'amplification spatiale, $-k_i^+$, des modes obtenus sont donnés par les courbes en traits pointillés de la figure 2.10. Par la suite nous pouvons faire varier, à partir de $q(m)$, le paramètre de rotation q . Pour cela nous choisissons $a = 0$ et $m \in \{-3, -2, -1\}$. Notons, que si en approche strictement temporelle la valeur de a n'intervient pas (dans les cas $a \neq 0$, ω_r subit simplement une transformation galiléenne $\omega_r \rightarrow \omega_r + ak$), c'est n'est plus le cas lors d'une étude spatio-temporelle avec $k_i \neq 0$.

Le taux de croissance spatiale, $-k_i^+(\omega_r)$, et la partie réelle, $k_r^+(\omega_r)$, des modes étudiés sont présentés aux figures 2.11(a-b) pour $m = -1$, 2.12(a-b) pour $m = -2$ et enfin 2.13(a-b) pour $m = -3$. Le mode $m = 1$ est proposé à la figure 2.14(a-b).

Selon ces résultats nous observons que les modes $m = \pm 1$ sont les seuls modes spatialement amplifiés pour $q = 0$ (jet pur). Quand q diminue de 0 le mode $m = +1$ se stabilise

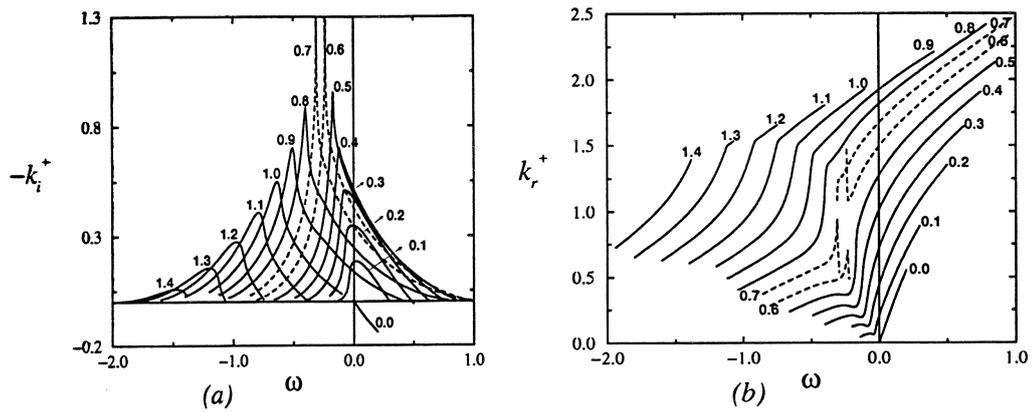


Figure 2.12: Evolution des caractéristiques d'instabilité spatiale quand la rotation augmente pour le mode azimutal $m = -2$ et un jet authentique $a = 0$. (a) Les taux de croissance spatiale $-k_i^+(\omega_r)$. (b) La partie réelle $k_r^+(\omega_r)$. Le paramètre de rotation q est indiqué à coté de chaque courbe. Les lignes pointillées indiquent des branches spatiales dans le domaine d'instabilité absolue.

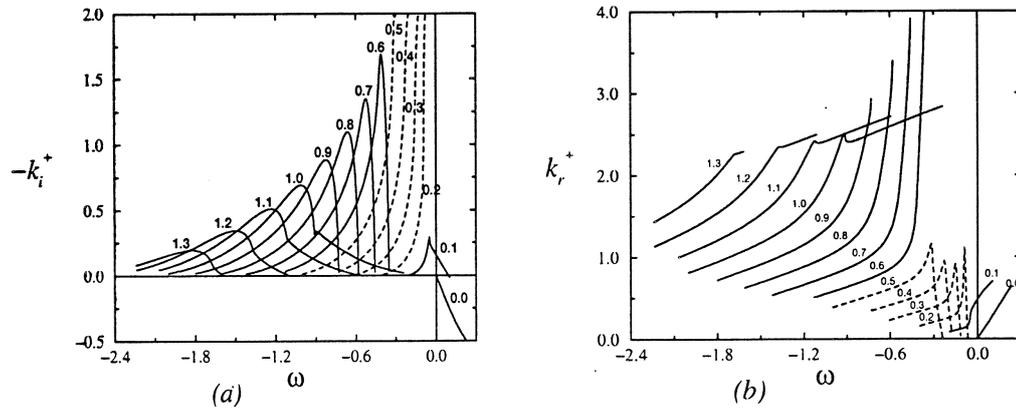


Figure 2.13: Evolution des caractéristiques d'instabilité spatiale quand la rotation augmente pour le mode azimutal $m = -3$ et un jet authentique $a = 0$. (a) Les taux de croissance spatiale $-k_i^+(\omega_r)$. (b) La partie réelle $k_r^+(\omega_r)$. Le paramètre de rotation q est indiqué à coté de chaque courbe. Les lignes pointillées indiquent des branches spatiales dans le domaine d'instabilité absolue.

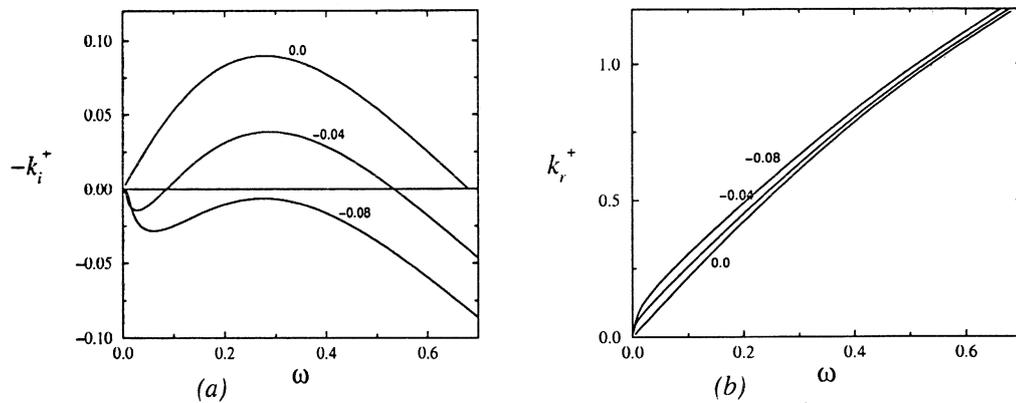


Figure 2.14: Evolution des caractéristiques d'instabilité spatiale quand la rotation diminue pour le mode azimutal $m = +1$ et un jet authentique $a = 0$. (a) Les taux de croissance spatiale $-k_i^+(\omega_r)$. (b) La partie réelle $k_r^+(\omega_r)$. Le paramètre de rotation q est indiqué à coté de chaque courbe.

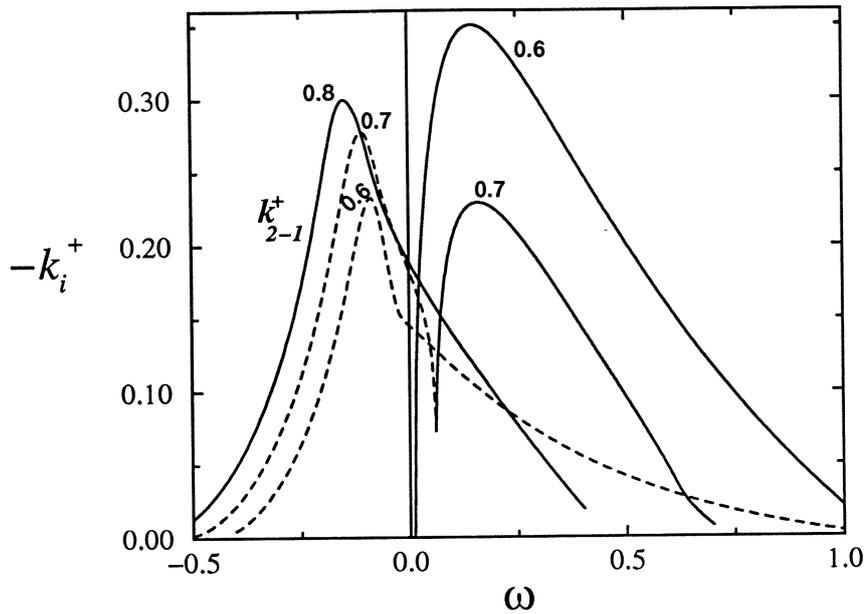


Figure 2.15: Evolution du taux de croissance, $-k_i^+(\omega_r)$, en fonction du paramètre de rotation q pour le mode azimuthal $m = -1$ d'un jet authentique avec $a = 0$. Le phénomène de changement de modes entre la branche $k_1^+(\omega)$ (ligne continue) et la branche $k_2^+(\omega)$ (ligne pointillée) apparaît. La branche hybride $k_{2-1}^+(\omega)$ qui en résulte demeure dominante pour $q > 0.7$. Le paramètre de la rotation q est indiqué à coté de chaque courbe.

très rapidement (pour $q = -0.08$ il est stable; voir la figure 2.14). Quand q augmente de 0 à 0.4 le mode $m = -1$ devient de plus en plus instable alors qu'au-delà de $q = 0.4$ la rotation a un effet stabilisant.

Quand q passe de $q = 0.6$ à $q = 0.8$ notre branche spatiale la plus amplifiée pour $m = -1$ rencontre la deuxième branche spatiale la plus amplifiée. Plus précisément, considérons sur la figure 2.15 la branche k_1^+ la plus amplifiée jusqu'à $q = 0.6$ (courbes traits pleins) et la seconde branche k_2^+ (courbes en traits pointillés). Pour q voisin de 0.7 ces branches k_{1-2}^+ et k_2^+ se coupent en un point selle (qui correspond physiquement à un point de résonance) et donnent naissance à deux autres branches hybrides k_{1-2}^+ et k_{2-1}^+ . Le mode k_1^+ est très faiblement amplifié ce qui rend difficile son suivi par notre méthode de "shooting". Ceci explique que sur la figure 2.15 seul le mode hybride k_{2-1}^+ le plus amplifié est représenté pour $q = 0.8$. Remarquons que ce phénomène dit d'échange ("switching") laisse également une trace sur les courbes k_r^+ de la figure 2.11b (noter, pour $q = 0.7$, le décrochement sur la courbe k_r^+).

Cette discussion sera détaillée dans le cadre de l'approche visqueuse où nous suivrons l'évolution des branches k_1^+ , k_2^+ , k_{1-2}^+ et k_{2-1}^+ au voisinage de $q = 0.7$. Ce phénomène d'échange des branches a été mis en évidence par Cotton et Salwen [21] sur un écoulement de Poiseuille et par Khorrami [46] pour le tourbillon de Batchelor en étude temporelle. Pour le mode $m = -1$ le plus amplifié, Mayer et Powell [63] trouvent une structure bi-lobale dont la frontière des deux lobes est voisine de $q = 0.7$. A la lueur de notre prochaine étude des courbes de transitions, le lecteur pourra vérifier que toutes les branches présentées pour différentes valeurs de q sont convectivement instables. En effet, nous pouvons suivre les branches $k^+(\omega)$ en considérant $\omega = \omega_r + i\omega_i$ avec ω_i négatif. Pour un certain $\omega_i < 0$ chaque branche k^+ "pinçe" avec une k^- en un point selle. Conformément à la théorie présentée dans le chapitre précédent, un tel point ($\omega_{i,0} < 0$) indique que l'écoulement est

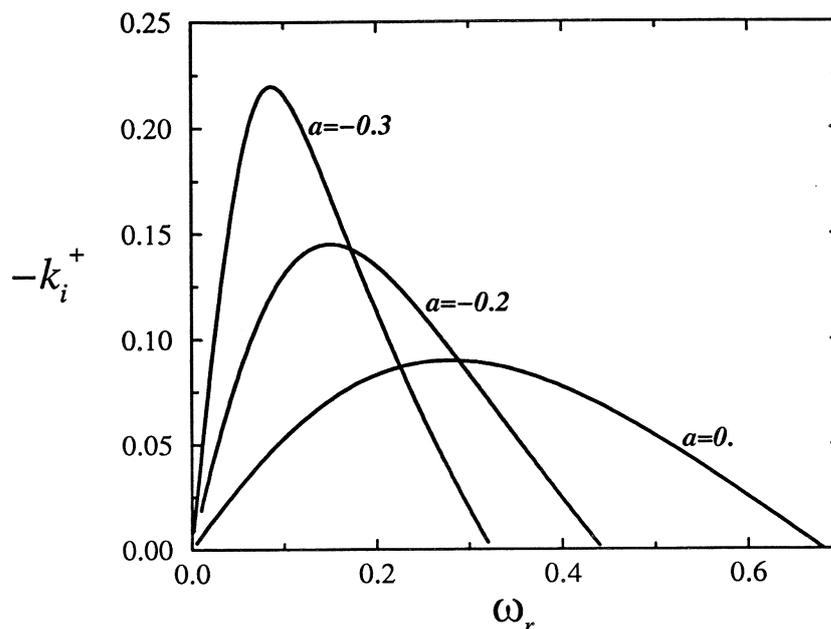


Figure 2.16: La déformation des branches spatiales $k_i^+(\omega)$ quand a varie de 0 à -0.3 pour le mode azimutal $m = -1$ et $q = 0$.

convectivement instable. Rappelons que la notion de branche spatiale perd son sens dans le cas d'un écoulement instable absolu.

Des résultats similaires sont présentés pour les modes $m = -2$ et $m = -3$ aux figures 2.12 et 2.13. Nous pouvons observer que ces deux modes sont stables pour $q = 0$. Pour des valeurs de q relativement petites l'écoulement se déstabilise rapidement et les branches spatiales, $-k_i^+$, ont tendance à présenter un point de rebroussement. Pour le mode $m = -2$, ce phénomène est très clair pour les branches tracées à $q = 0.4$ et à $q = 0.5$. Les branches associées à $q = 0.6$ et à $q = 0.7$ sont tracées en pointillés parce que dans ce cas l'écoulement n'est plus convectivement instable mais absolument instable (elles perdent donc leur sens physique). Pour le mode $m = -3$, les branches associées à $q = 0.2$, $q = 0.3$, $q = 0.4$ et $q = 0.5$ sont tracées elles aussi en pointillés pour la même raison. Notons que le mode $m = -2$ est absolument instable pour $0.5 < q \leq 0.7$ en absence d'un écoulement extérieur ($a = 0$). La même observation est valable pour le mode $m = -3$ pour un domaine $0.1 < q \leq 0.5$ plus large. Dès que q dépasse 0.7 pour le mode $m = -2$ et 0.5 pour le mode $m = -3$, l'écoulement redevient convectivement instable. Les fortes rotations ont dans ces deux cas, comme dans le cas $m = -1$, un effet stabilisateur. Nous étudions plus précisément les domaines d'instabilité absolue et convective dans le plan (a, q) dans la partie suivante.

2.3.2 Transitions instable convectif-instable absolu

Comme indiqué au chapitre précédent, nous déterminons la nature absolue ou convective de l'instabilité de chaque mode azimutal en examinant le comportement des branches spatiales $k(\omega; m, a, q)$ au voisinage des points complexes (k_0, ω_0) de la relation de dispersion tels que

$$\left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)(k_0, \omega_0) = 0, \quad \text{Im}(\omega_0) = 0. \quad (2.50)$$

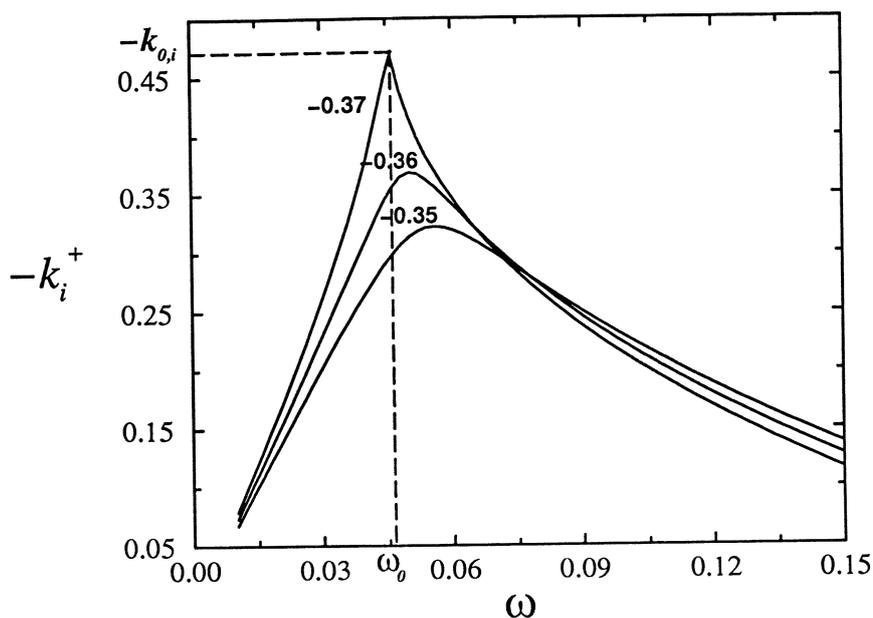


Figure 2.17: L'apparition d'un point de rebroussement $k_{i,0}^+(\omega_0)$ pour le mode azimutal $m = -1$ à $q = 0$, $a \simeq -0.37$, $\omega_0 \simeq 0.04$ et $k_{i,0}^+ \simeq -0.5$.

En pratique, l'apparition d'un point selle se manifeste par un point de rebroussement sur la courbe $k_i(\omega; m, a, q)$. Ainsi, par exemple, les figures 2.16 et 2.17 montrent l'évolution du taux d'amplification spatiale, $-k_i^+(\omega; m, a, q)$, du mode azimutal $m = -1$ pour une rotation q nulle (cette branche est tracée pour $a = 0$ à la figure 2.11a) lorsque a diminue à partir de la valeur nulle. Nous voyons clairement (figure 2.17) que la branche présente pour a voisin de -0.37 un point de rebroussement. Une étude plus complète dans le plan complexe (k_r, k_i) au voisinage de la valeur critique $a_t = -0.371$ montre, figure 2.18, que la relation de dispersion admet un point selle où se rejoignent deux branches k^+ et k^- . Ce point selle vérifie en outre le critère de Briggs-Bers car ces modes k^+ et k^- présentent un bon comportement (ils se déplacent entièrement dans les bons demi-plans $k_i > 0$ ou $k_i < 0$ lorsque ω_i augmente à partir de zéro). Nous venons donc de trouver une transition instable convectif-instable absolu pour une valeur critique de a , notée $a_t^j \simeq -0.371$. Nous pouvons vérifier pour $a > a_t^j$ l'existence d'un bon point selle (k_0, ω_0) avec $\omega_{0,i} = \text{Im}(\omega_0) < 0$, c'est-à-dire la nature instable convectif de l'écoulement. Pour $a < a_t^j$ nous obtenons une zone importante où le point selle admet cette fois $\omega_{0,i} > 0$, c'est à dire où l'écoulement est instable absolu. Pour $a_t^s \simeq -0.825$ une nouvelle transition ($\omega_{0,i} = 0$) apparaît. Enfin, pour $a < a_t^s$ l'écoulement redevient instable convectif. Remarquons que le point selle correspondant au premier point de transition (a_t^j) est situé dans le demi-plan $k_i < 0$ (la branche k^+ étant instable du côté jet) alors que le point selle correspondant au deuxième point de transition (a_t^s) est dans le demi-plan $k_i > 0$ (du côté sillage la branche k^+ est instable).

En résumé, en étudiant avec soin le signe de $\omega_{0,i}$ partie imaginaire de la pulsation complexe d'un "bon" point selle, nous avons trouvé que l'écoulement est instable absolu dans l'intervalle $[a_s^j, a_t^j]$ et instable convectif (pour $q = 0$) en dehors. Ces conclusions sont obtenues en considérant notre mode spatial $m = -1$ le plus amplifié. Les modes moins amplifiés que nous n'étudions pas peuvent étendre le domaine précédent d'instabilité absolue (nous laissons de côté cette éventualité). Nous avons appliqué cette démarche pour

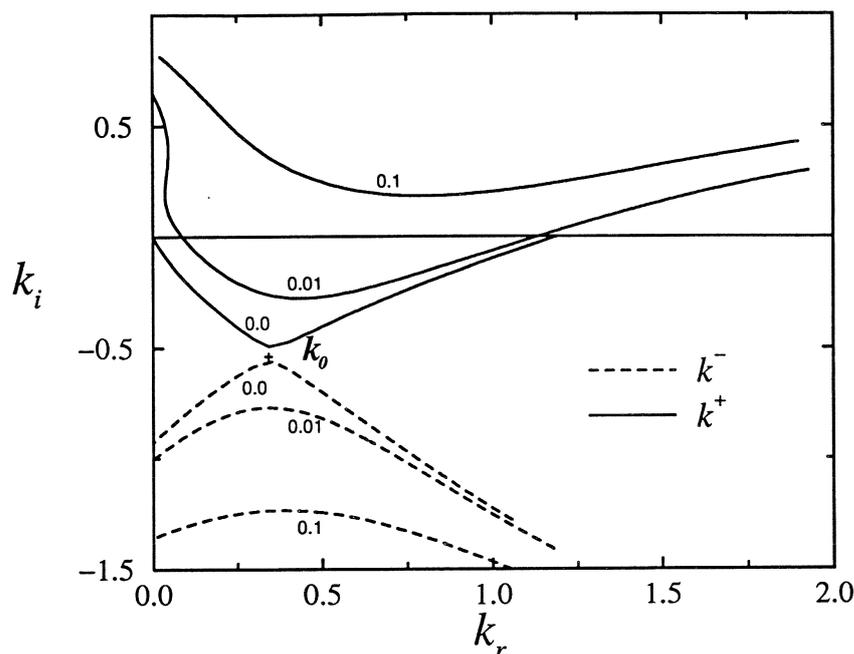


Figure 2.18: Le lieu des branches spatiales $k(\omega)$ dans le plan complexe k pour le jeu de paramètres $m = \pm 1$, $a = -0.371$ et $q = 0$. Les courbes de niveau $\omega_i = 0.1$, $\omega_i = 0.01$ et $\omega_i = 0.0$ sont tracées. Le point selle k_0 est fourni par le pincement entre la branche $k^+(\omega)$ (ligne continue) et la branche $k^-(\omega)$.

des valeurs non nulles du paramètre de rotation q afin de situer, dans le plan (a, q) des paramètres de contrôle du tourbillon de Batchelor, les domaines d'instabilité absolue et convective au sens des différents modes azimutaux considérés. Ces domaines sont séparés par des courbes de transition. La figure 2.19 montre ainsi nos résultats pour les modes $m = \pm 1$ (il suffit de passer du mode m au mode $-m$ en changeant q en $-q$). Pour $q = 0$, nous avons porté sur l'axe a l'intervalle $[a_s^j, a_t^j]$. Lorsque q diminue la région d'instabilité absolue (IA) à q constant s'amenuise pour devenir un point E pour $q \simeq -0.075$. Pour des valeurs plus petites de rotation, le mode $m = -1$ est stabilisé. Lorsque q augmente à partir de zéro, la région d'instabilité absolue s'étend. Nous n'avons pu tracer les courbes de transition du côté jet ($a > -0.5$) et du côté sillages ($a < -0.5$) que jusqu'à certaines valeurs de rotation (points J du côté jet et W du côté sillage). Pour ces deux points, le mode spatial devient très faiblement amplifié ($k_i \rightarrow 0$) ce qui crée des difficultés de convergence pour notre méthode de "shooting". En effet, au voisinage de la neutralité plusieurs branches associées à la même valeur du mode azimutal m sont voisines (voir Ash et Khorrami [2]) et le programme peut sauter (lors de l'algorithme de Newton-Raphson) d'une solution à une autre avec en définitive une absence de convergence. Cet inconvénient constitue l'une des faiblesses de la méthode de "shooting". Observons que pour les faibles rotations le contre-courant nécessaire pour favoriser une instabilité absolue est assez important du côté jet et du côté sillage. Par contre, pour des valeurs moyennes de q la valeur de transition a_t diminue mais reste toujours négative du côté jet alors que du côté sillage nous remarquons la présence d'une instabilité absolue sans contre-courant ($a_t \leq -1$ pour $q > 0.135$). Notons enfin que du côté jet la courbe de transition admet pour q voisin de 0.7 un décrochement (entre les points A_0 et B_0) sur lequel nous reviendrons dans l'étude du lieu, dans le plan complexe, des "bons" points selles associés à la courbe de transition.

En adoptant la même démarche, nous avons obtenu les courbes de transitions des modes

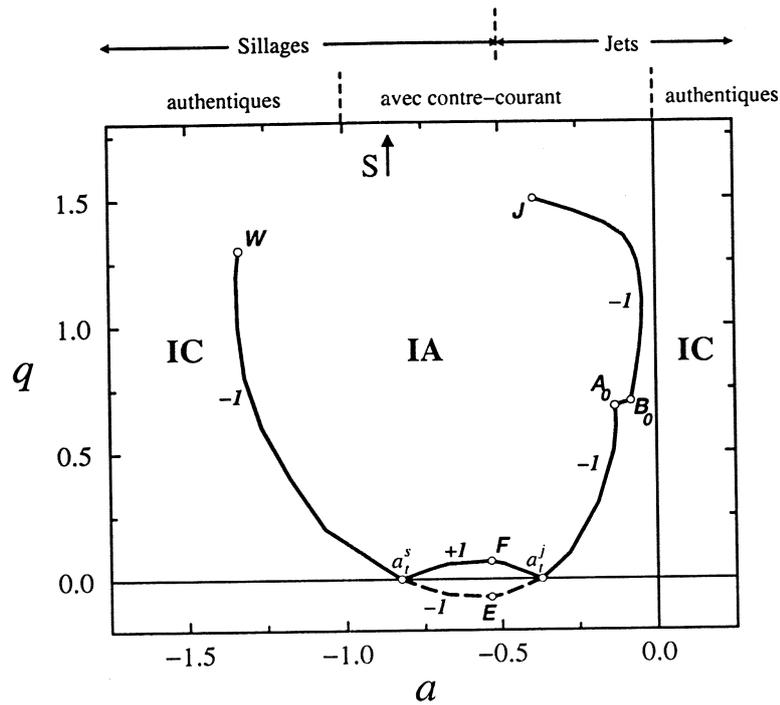


Figure 2.19: Les domaines de stabilité (S), d'instabilité absolue (IA) et d'instabilité convective (IC) du mode azimutal $m = -1$. La courbe JB_0A_0EW indique la courbe de transition du mode $m = -1$ alors que la courbe $a_i^j F a_i^s$ indique la courbe de transition du mode $m = 1$.

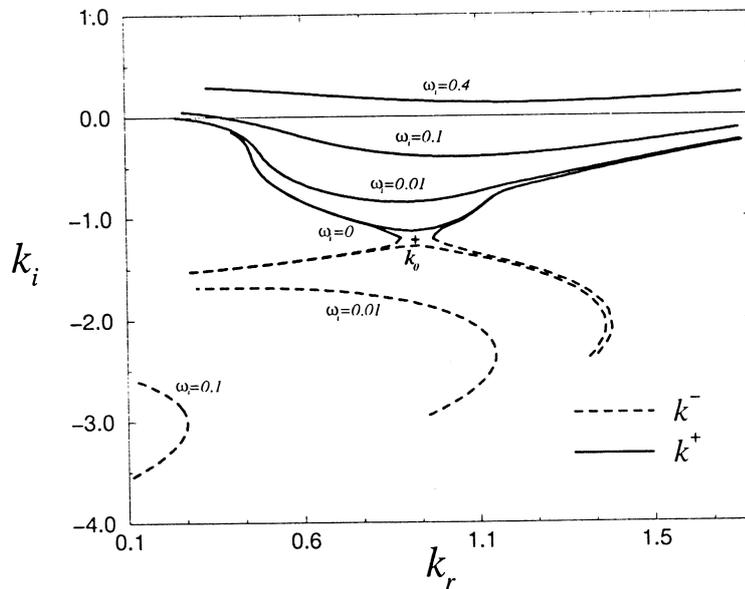


Figure 2.20: Le lieu des branches spatiales $k(\omega)$ dans le plan complexe k pour le jeu de paramètres $m = -2$, $a = 0.0022$ et $q = 0.6$. Les courbes de niveau $\omega_i = 0.4$, $\omega_i = 0.1$, $\omega_i = 0.01$ et $\omega_i = 0.0$ sont tracées. Le point selle k_0 est fourni par le pincement entre la branche $k^+(\omega)$ (ligne continue) et la branche $k^-(\omega)$.

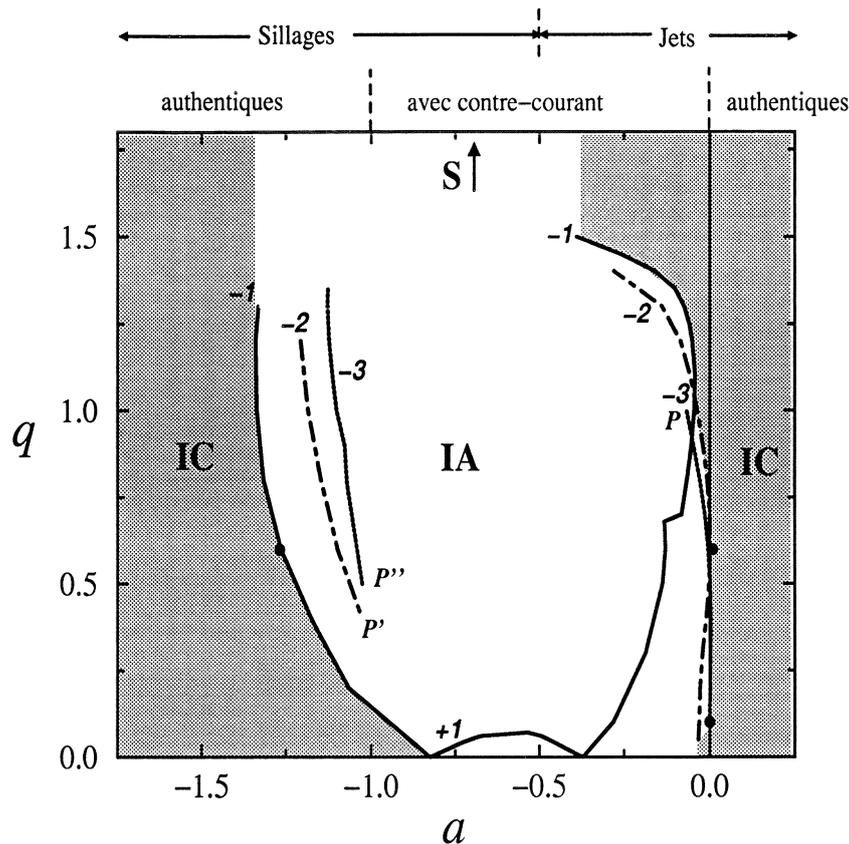


Figure 2.21: Les domaines de stabilité (S), d'instabilité absolue (IA) et d'instabilité convective (IC) du tourbillon de Batchelor. Les courbes de transition pour les modes azimutaux $m = \pm 1$, $m = -2$ et $m = -3$ sont indiquées sur la figure.

$m = -2$ et $m = -3$. La figure 2.20 montre un bon point selle et le comportement des branches k^+ et k^- associées pour le mode $m = -2$, $a = 0.0022$ et $q = 0.6$. L'existence de ce point explique maintenant le comportement des amplifications spatiales, $-k_i^+(\omega)$, tracées aux figures 2.12, 2.13 pour $m = -2$ et respectivement $m = -3$. Pour ces deux modes, les courbes tracées en pointillés indiquent l'état d'instabilité absolue. Par conséquent, pour les valeurs de q correspondantes, les points de transition instable convectif-instable absolu ont été cherchés dans le plan (a, q) du côté de $a = 0$. Comme pour le point de transition montré à la figure 2.20, nous avons trouvé des points similaires avec des a légèrement positifs.

Nous avons regroupé tous nos résultats en présentant, dans le plan (a, q) à la figure 2.21, les courbes de transitions obtenues pour les modes azimutaux $m = \pm 1$, -2 et -3 . Ces courbes de transitions ne sont tracées que dans une certaine gamme de rotations q . Sauf aux points P , P' et P'' , les difficultés éprouvées par le code au voisinage de la stabilité (et examinées auparavant pour les modes $m = \pm 1$) limitent en effet nos investigations. En P , P' et P'' d'autres problèmes (voir les conclusions de ce chapitre) surgissent.

Remarquons aussi que le mode critique (c'est-à-dire celui associé à la première transition observée) du côté sillage n'est pas le même que celui du côté jet. Du côté sillage, ($a < -0.5$) le mode critique reste $m = -1$ pour toute valeur de q . De plus, si $q > 0.135$ la transition a lieu pour des sillages avec un écoulement extérieur dans la même direction ($a < -1$). Du côté jet ($a > -0.5$) le mode critique dépend de la vitesse de rotation. Quand $q \rightarrow 0$, l'instabilité absolue surgit par le mode $m = -1$, comme dans le cas du jet pur. Pour $0 < q < 0.5$, le mode $m = -3$ devient critique tandis que pour $0.5 < q < 0.7$ il est

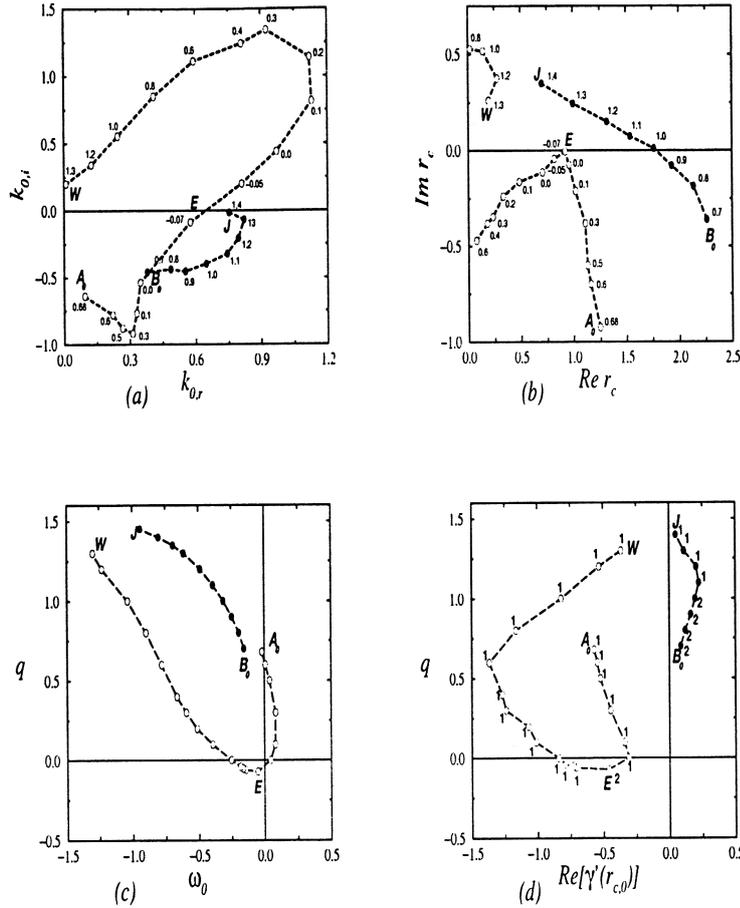


Figure 2.22: Le mode azimutal $m = -1$. (a) Le lieu du nombre d'onde axial absolu k_0 le long de la courbe marginale (le nombre à coté de chaque point indiquant la valeur du paramètre de rotation q). (b) Le lieu du point critique $r_{c,0}$ le long de la courbe marginale (le nombre à coté de chaque point indiquant la valeur du paramètre de rotation q). (c) La variation de la fréquence absolue selon q . (d) La variation de $Re[\gamma'(r_{c,0})]$ en fonction de q (le nombre à coté de chaque point indiquant le type de contour nécessaire pour l'intégration au voisinage de point selle).

remplacé par le mode $m = -2$. Dès que q dépasse 0.7, le mode $m = -1$ redevient critique. Il faut noter que dans le domaine $0.134 < q < 0.704$, le tourbillon de Batchelor peut être absolument instable même pour $a \geq 0$ c'est-à-dire pour des jets avec un écoulement extérieur dans le même sens.

Seuls les modes $m < 0$ sont ici critiques pour $q > 0$. Le mode $m = 1$ est amplifié pour $0 < q < 0.08$ mais n'est jamais critique dans ce domaine. Pour $q < 0$, il faut changer m en $-m$ et faire la symétrie par rapport à l'axe a des courbes de transitions précédentes.

À présent nous donnons des informations sur les points selles qui déterminent les courbes de transition dans le plan (a, q) . Nous étudions le nombre d'onde axial absolu k_0 , la fréquence absolue ω_0 et le point critique associé $r_{c,0}$. La figure 2.22a donne le lieu du complexe k_0 pour les modes azimutaux $m = \pm 1$ en fonction du paramètre de rotation positif q . Les images des points W, E, A_0, B_0, J (introduits à la figure 2.19) sont clairement indiquées. Nous voyons donc que lorsqu'on parcourt la portion WA_0 de la courbe de transition de la figure 2.19 (les cercles vides sur la figure 2.22a correspondent au tronçon A_0J de la figure 2.19) le complexe k_0 se déplace dans le plan complexe avec $k_{0,i}$ qui change de signe entre le côté sillage et le côté jet. Du côté jet, nous observons un

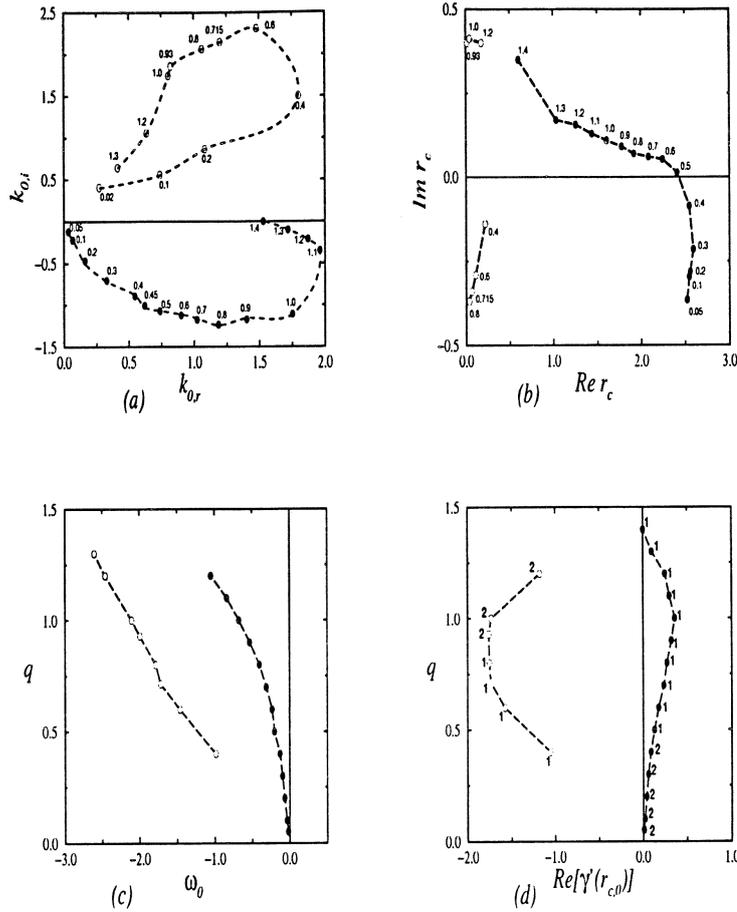


Figure 2.23: Le mode azimutal $m = -2$. (a) Le lieu du nombre d'onde axial absolu k_0 le long de la courbe marginale (le nombre à coté de chaque point indiquant la valeur du paramètre de rotation q). (b) Le lieu du point critique $r_{c,0}$ le long de la courbe marginale (le nombre à coté de chaque point indiquant la valeur du paramètre de rotation q). (c) La variation de la fréquence absolue selon q . (d) La variation de $Re[\gamma'(r_{c,0})]$ en fonction de q (le nombre à coté de chaque point indiquant le type de contour nécessaire pour l'intégration au voisinage du point selle). Les cercles pleins correspondent aux points de transition du coté jets alors que les cercles vides correspondent aux points de transition du coté sillage.

déplacement de k_0 entre A_0 et B_0 (cercles pleins sur la figure 2.22a) qui indique que le point selle est en réalité donné par un autre mode au voisinage de $q = 0.7$. Nous avons déjà expliqué ce phénomène d'échange avec création de deux branches hybrides. Au delà de B_0 du côté jet, nous avons donc un point selle associé au mode hybride k_{2-1}^+ .

A $q = 0.68$, le point de transition est donné par le pincement de la branche k_1^+ avec une branche k^- pour $a = -0.133$ alors qu'à $q = 0.7$ ce pincement critique est assuré par la branche hybride k_{2-1}^+ qui pince avec une branche k^- pour $a = -0.0815$. Le changement brutal du lieu de k_0 dans le plan complexe k quand on passe de A_0 à B_0 est donc expliqué. Remarquons qu'aux trois points W , E et J nous approchons de la neutralité $|k_{0,i}| \ll 1$. La fréquence absolue $\omega_0(q)$, illustrée figure 2.22, montre également un décrochement lorsqu'on passe de A_0 à B_0 .

Pour le mode azimutal $m = -1$, l'équation $\gamma(r) = 0$ a toujours une racine r_c dont le lieu $r_{c,0}$ est tracé figure 2.22c pour le point de transition k_0 . La discontinuité dans la trajectoire de $r_{c,0}$, pour $q = 0.8$, est seulement apparente car l'équation $\gamma(r) = 0$ peut être

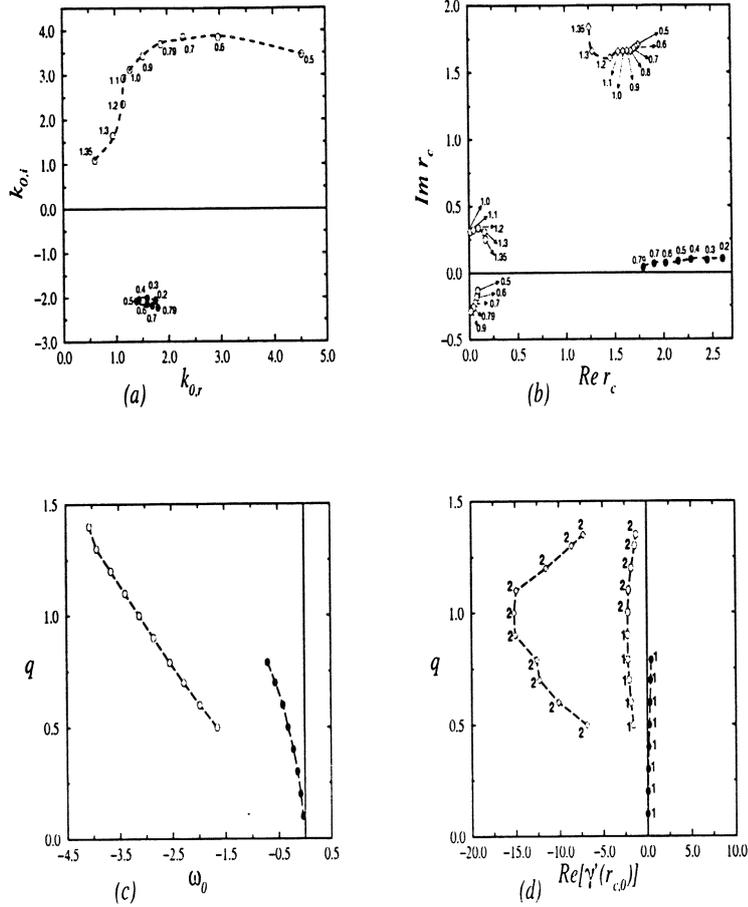


Figure 2.24: Le mode azimutal $m = -3$. (a) Le lieu du nombre d'onde axial absolu k_0 le long de la courbe marginale (le nombre à coté de chaque point indiquant la valeur du paramètre de rotation q). (b) Le lieu du point critique $r_{c,0}$ le long de la courbe marginale (le nombre à coté de chaque point indiquant la valeur du paramètre de rotation q). (c) La variation de la fréquence absolue selon q . (d) La variation de $Re[\gamma'(r_{c,0})]$ en fonction de q (le nombre à coté de chaque point indiquant le type de contour nécessaire pour l'intégration au voisinage du point selle). Les cercles pleins correspondent aux points de transition du coté jets alors que les cercles ou les losanges vides correspondent aux points de transition du coté sillage (dans ce cas nous avons trouvé deux points critiques).

écrite sur la forme $\Gamma(r_c^2)$ (voir annexe A) et les racines sont obtenues par paires $(r_c, -r_c)$. Comme nous nous intéressons seulement aux racines telles que $Re[r_c] \geq 0$, il faut changer r_c en $-r_c$ quand r_c approche l'axe vertical $Re[r_c] = 0$. La figure 2.22d indique, pour $r_{c,0}$, la valeur de $Re[\gamma'(r_{c,0})]$ en fonction de q et le type de contour (ici contour 1 ou contour 2) employé. Lorsque nous passons de A_0 à B_0 le contour de type 1 doit être remplacé par le contour de type 2. En E , $r_{c,0}$ est réel et le contour 1 est interdit ce qui explique le choix du contour 2.

Les trajectoires de k_0 , ω_0 et $r_{c,0}$ sont également fournies pour les modes azimutaux $m = -2$ et $m = -3$ (voir figures 2.23 et 2.24). Les cercles vides indiquent le côté sillages, ceux en plein le côté jet. Un seul point critique $r_{c,0}$ est tracé pour $m = -2$. Pour $m = -3$, deux points critiques $r_{c,0}$ existent du côté sillage et un seul du côté jet.

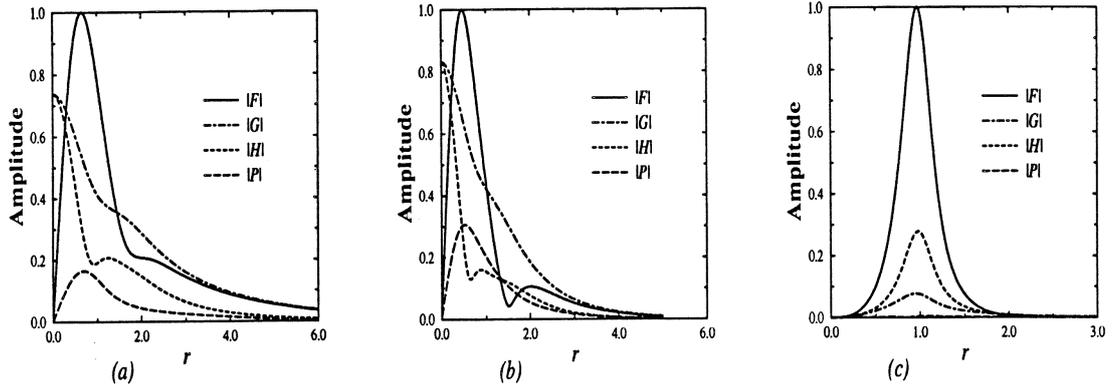


Figure 2.25: Les amplitudes des fonctions propres spatiales $|F|$, $|G|$, $|H|$ et $|P|$. (a) sillage authentique ($m = -1$, $a = -1.268$ et $q = 0.6$) pour la branche k^- spatialement la plus amplifiée en aval à $\omega = -0.78$, $k = (0.454, 1.274)$. (b) jet avec contre-courant ($m = -1$, $a = -0.128$ et $q = 0.6$) pour la branche k^+ spatialement la plus amplifiée en aval à $\omega = -0.01$, $k = (0.339, -0.686)$. (c) jet authentique ($m = -3$, $a = 0$ et $q = 0.1$) pour la branche k^+ spatialement la plus amplifiée en aval à $\omega = -0.01$, $k = (0.339, -0.686)$.

2.3.3 Fonctions propres spatiales

Pour terminer nous présentons quelques exemples du module des fonctions propres. En pratique il faut employer les expressions (2.28)-(2.31) en intégrant à partir de $(\epsilon, 0)$ sur un contour approprié. Ici les trois cas illustrés figures 2.25(a-c) permettent le choix d'un contour sur l'axe réel et sont choisis, pour avoir un sens, dans une région du plan (a, q) où le tourbillon du Batchelor est instable convectif. La figure 2.25a montre les fonctions propres associées à l'onde spatialement la plus amplifiée en aval, k^- , pour un sillage authentique ($a = -1.268$). La figure 2.25b montre les fonctions propres associées à l'onde spatialement le plus amplifiée en aval, k^- , pour le mode $m = -1$ pour un jet authentique ($a = 0.01$, à l'extérieur de la frontière de transition IC/AI sur la figure 2.21). Enfin, la figure 2.25c est associée au cas d'une onde amplifiée en aval pour le mode $m = -3$ quand $a = 0$. Nous remarquons que les conditions aux limites en zéro (1.25)-(1.27) imposent une forme annulaire pour les fonctions propres des modes azimutaux $m \neq \pm 1$. La rotation choisie, $q = 0.6$, nous place toujours dans le domaine d'instabilité convectif. Pour chaque situation présentée, le point critique est situé dans le demi-plan inférieur et l'axe réel a été choisi comme chemin d'intégration. La présence d'un point critique sur le chemin d'intégration produit dans son voisinage de grandes variations des dérivées des fonctions propres. Les résultats présentés à la figure 2.9 cachent la présence d'un point critique à $r_c = 4.058$ situé un peu à l'extérieur du domaine radial pris en compte pour le calcul.

2.4 Conclusions

2.4.1 Résultats principaux

Dans le cadre d'une étude linéaire de stabilité nous avons mis en évidence l'instabilité spatiale du tourbillon de Batchelor pour un fluide parfait. En appliquant le critère de Briggs-Bers, nous avons déterminé les courbes de transition instable convectif-instable absolu.

Les résultats principaux de cette étude sont résumés dans l'espace des paramètres

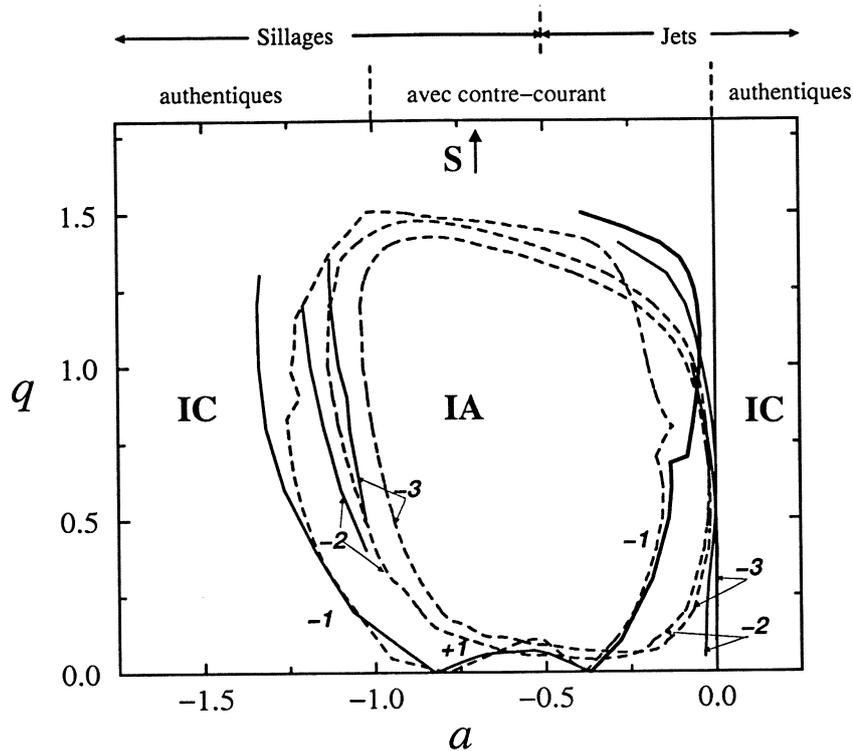


Figure 2.26: Les courbes de transition instable convectif-instable absolu des modes azimutaux $m = \pm 1$, $m = -2$ et $m = -3$. Les lignes continues: la présente étude. Les lignes pointillées: l'approche de Delbende *et al.* [22]. Les nombres à coté de chaque courbe indiquent le nombre d'onde azimutal.

de contrôle (a, q) du tourbillon de Batchelor. Ainsi, en augmentant la rotation, nous observons l'extension du domaine du paramètre a dans lequel l'écoulement est instable absolu. Le mode de transition dépend à la fois du paramètre q et du paramètre a . Du coté sillage, le mode azimutal $m = -1$ est critique pour toute valeur de q tandis que du coté jet les modes critiques sont successivement $m = -1, -3, -2, -1$ quand le paramètre q augmente. Les sillages authentiques deviennent absolument instables pour des valeurs de q supérieures à 0.135, alors que les jets authentiques sont absolument instables dans le domaine $0.134 < q < 0.704$.

Ces résultats ont été comparés avec les résultats obtenus par Delbende *et al.* [22]. Ces derniers ont étudié par simulation numérique directe la réponse de l'écoulement à une impulsion. Dans cette approche visqueuse, le nombre de Reynolds est fixé à $Re = 667$. A la figure 2.26, nous représentons les courbes de transition obtenues par les deux méthodes pour les modes azimutaux $m = \pm 1, -2, -3$. Nous remarquons le bon accord tant qualitatif que quantitatif. Toutefois, nous pouvons déjà constater que les courbes en fluide visqueux ($Re = 667$) se placent à l'intérieur des courbes en fluide parfait. La viscosité mais aussi les calculs faits par deux méthodes différentes sont à l'origine de ces différences. La conséquence la plus importante est que les jets authentiques en fluide parfait deviennent instables absolus pour les modes azimutaux $m = -2$ et $m = -3$ alors que les courbes de transition correspondantes de Delbende *et al.* [22] sont situées dans le domaine $a < 0$. Nous détaillons le comportement de ces courbes de transition au voisinage de l'axe $a = 0$ (voir figure 2.27).

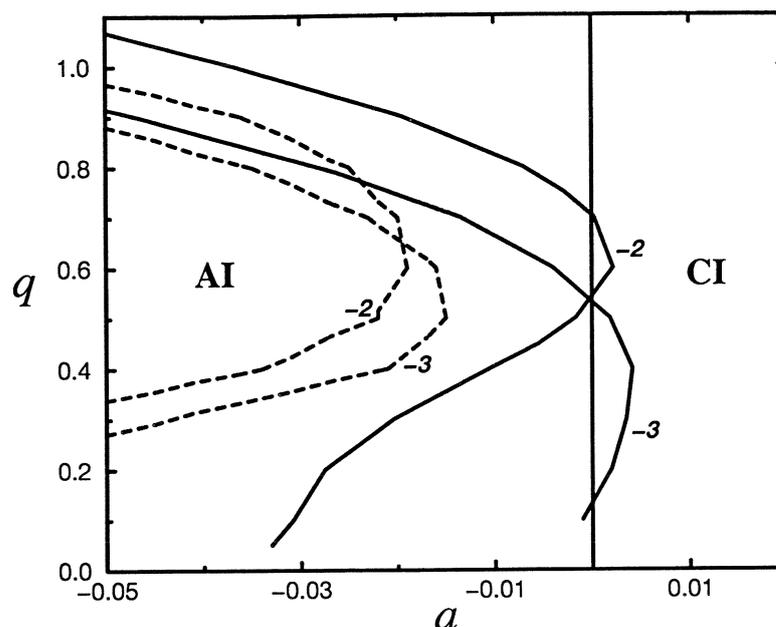


Figure 2.27: Détail des courbes de transition des modes $m = -2$ et $m = -3$ au voisinage de $a = 0$. En lignes continues: la présente approche. En lignes pointillées: l'approche de Delbende *et al.* [22]. Les nombres à côté de chaque courbe indiquent le nombre d'onde azimutal.

2.4.2 Points forts ou avantages de la méthode de shooting

Les avantages de la méthode numérique (le code de "shooting") utilisée dans notre approche de fluide parfait sont multiples. Citons d'abord la simplicité de la méthode qui demande des ressources informatiques raisonnables (surtout en ce qui concerne la taille de mémoire utilisée) et permet une exploitation rapide. La méthode de shooting est très précise. Les résultats comparés avec ceux de Duck et Khorrami [27] et ensuite avec ceux obtenus dans la limite des nombres de Reynolds très grands (voir le chapitre suivant) montrent un accord excellent. Enfin, la mise en oeuvre d'un algorithme de recherche soignée des points critiques r_c et l'intégration sur un contour complexe nous a permis de trouver des résultats inaccessibles autrement et de vérifier la théorie des points critiques et le critère de Lin au moins dans ce cas particulier.

2.4.3 Les inconvénients de la méthode de shooting

La convergence de la méthode de shooting dépend fortement des valeurs de départ (k_G, ω_G) et r_c^G . Nous avons seulement deux possibilités d'obtenir ces valeurs qu'il faut suivre ensuite avec des pas très petits dans tout l'espace des paramètres de contrôle.

Les difficultés rencontrées par le code au voisinage de la stabilité empêchent la fermeture des courbes de transition dans cette zone. En dehors de ce problème qui limite souvent nos investigations sur les courbes marginales, nous avons rencontré deux problèmes supplémentaires.

Ainsi, du côté jet, la courbe $m = -3$ s'arrête pour $q > 0.79$ (voir le point P sur la figure 2.21) parce que le sous-programme DNEQNF n'arrive plus à annuler le wronskien W (2.35). En constituant une grille très fine autour de la valeur propre cherchée, nous avons calculé la valeur du Wronskien en chaque point de la grille. La représentation de

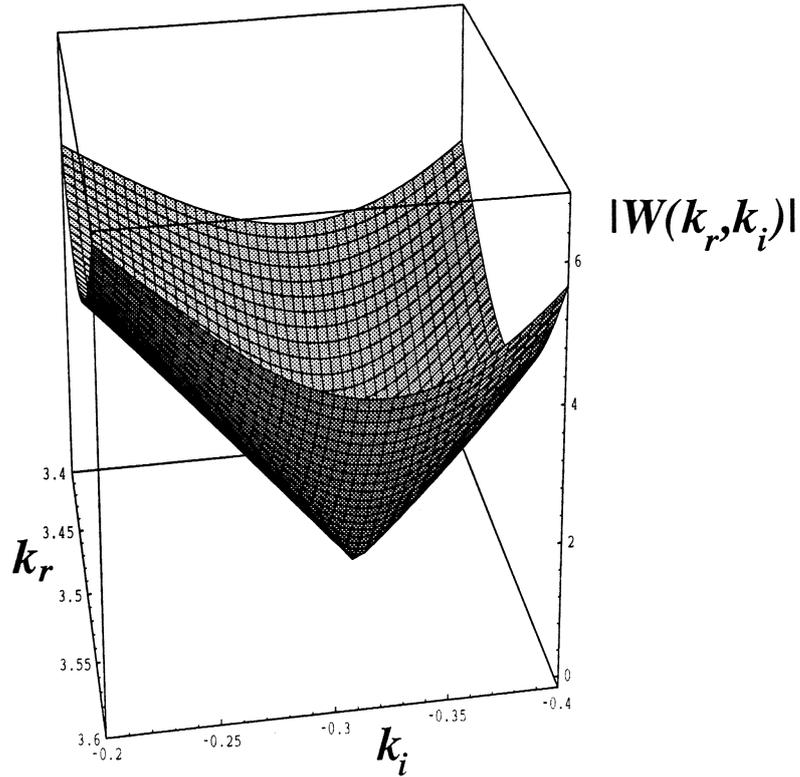


Figure 2.28: Module du Wronskien W sur une grille constituée autour d'une solution k complexe (k_r varie de 3.4 à 3.6 et k_i varie de -0.4 à -0.2). La valeur $W = 0$ qui fournit la solution k est dans un véritable "puits" inaccessible par une méthode de type Newton-Raphson.

$|W(k_r, k_i)|$ par une surface est donnée à la figure 2.28. Nous observons comment la valeur $W \rightarrow 0$ est située dans un "puits". Par conséquent, la variation brutale de la fonction $W(k)$ sur une surface très petite rend impossible son annulation par une méthode de type Newton-Raphson (à la base du sous-programme DNEQNF).

Le deuxième problème rencontré est un problème de point critique et de conditions aux limites. Les courbes de transition $m = -2$ et $m = -3$ du côté sillage finissent pour $q = 0.4$ (point P' sur la figure 2.21) et respectivement $q = 0.5$ (point P'' sur la figure 2.21) ce qui est loin de la neutralité. Les tentatives de prolongement de ces courbes pour des valeurs de q inférieures ont échoué à cause de la présence d'un point critique qui affecte l'origine du domaine d'intégration (voir la figure 2.29). En effet, le secteur visqueux du point critique contient le point de départ de l'intégration du système différentiel (2.32)-(2.33) (voir aussi les figures 2.23b et 2.23d pour $q = 0.4$ et $m = -2$ et les figures 2.24b et 2.24d pour $q = 0.5$ et $m = -3$). Le code numérique "explose" après deux-trois itérations.

Enfin, il faut préciser que la présente approche suit seulement la contre-partie spatiale $k(\omega)$ du mode temporel le plus amplifié sur tout le domaine de valeurs de q . Nous ne pouvons pas savoir (faute de valeurs de départ (k_G, ω_G)) si les modes moins amplifiés deviennent instables absolus avant les modes les plus amplifiés.

L'étude de la stabilité linéaire du tourbillon de Batchelor pour un fluide parfait par une méthode de shooting donne donc une première image des propriétés d'instabilité de cet écoulement en rotation. Malgré la confirmation de ces résultats par l'étude de Delbende *et*

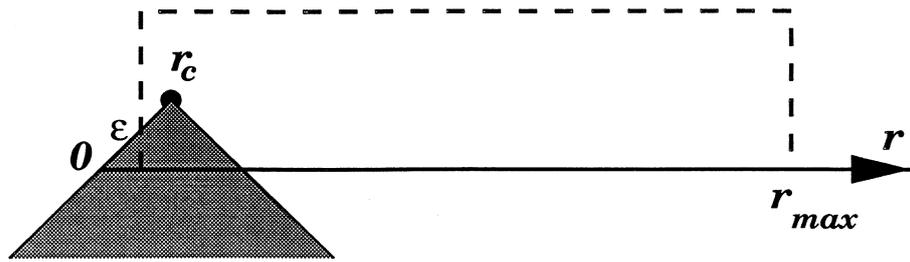


Figure 2.29: Le point de départ de l'intégration $r = \epsilon$ est situé dans le secteur visqueux (en gris) du point critique r_c .

al. [22], des différences entre les deux approches subsistent. Ces différences probablement dues à la viscosité et les inconvénients rappelés ci-dessus nous ont conduit à construire un nouveau code. Ce code prend en compte la viscosité du fluide et résout numériquement le problème aux valeurs et vecteurs propres par une méthode de collocation de Chebyshev. Cette méthode numérique nous permettra de suivre à la fois le comportement de tous les modes stables ou instables pour un jeu fixé des paramètres de contrôle de l'écoulement de base.

Chapitre 3

Etude spatio-temporelle du tourbillon de Batchelor: influence de la viscosité

L'analyse effectuée dans le chapitre précédent pour le fluide parfait donne une première image dans le plan (a, q) des propriétés d'instabilité absolue ou convective du tourbillon de Batchelor. La distribution de vorticité de ce tourbillon est stable alors que la composante de vitesse axiale $U(r)$ par son point d'inflexion est instable. Nous avons vu comment la rotation du tourbillon (caractérisée par le paramètre q) stabilise l'écoulement axial, même si au début les petites rotations ont un effet déstabilisant. Le paramètre de l'écoulement extérieur a n'a aucune influence sur les propriétés d'instabilité temporelles car pour $a \neq 0$ il suffit d'un changement galiléen $\omega \rightarrow \omega + ak$ pour en déduire les propriétés à partir du cas $a = 0$. On ne peut pas dire la même chose dans le cas spatial: l'introduction d'un petit contre-courant $a < 0$ change complètement les propriétés d'instabilité convective ou absolue. Dans un premier temps, l'approche non-visqueuse du problème est appropriée car les principales applications sont les sillages ou les tourbillons émis par les avions. Dans le cas laminaire, l'évolution de ces structures est caractérisée par un nombre de Reynolds de 10^6 alors que dans le cas turbulent ce nombre est encore plus grand.

Cependant, les résultats en fluide parfait montrent que notre tourbillon s'avère le plus instable pour des rotations modérées. L'étude asymptotique de Leibovich et Stewartson [55] prédit que le taux de croissance temporel maximal s'accroît, pour $q \geq 0$, avec l'opposé, $-m$, du nombre d'onde azimutal $m < 0$ et qu'il tend vers une valeur asymptotique $\omega_{i,Max} = 0.459$ pour la valeur $q = 0.87$. De plus, le comportement des courbes de transition, dans le plan (a, q) , révèle que pour des valeurs modérées de q ($0.134 < q < 0.704$) le tourbillon de Batchelor est absolument instable sans écoulement extérieur.

A partir de ces observations, la question de l'influence de la viscosité sur ces propriétés s'impose. La confirmation des résultats obtenus dans l'approche non-visqueuse pour des grands nombres de Reynolds, le rôle d'une viscosité plus importante ainsi que l'effet conjugué de celle-ci et des grandes rotations stabilisatrices sont ici examinés à l'aide d'un nouveau code numérique qui modélise les écoulements de fluide en rotation (et pas seulement ceux-ci) à l'aide des équations de Navier-Stokes. Enfin, les études temporelles de Khorrani [45] et de Mayer et Powell [63] ont mis en évidence l'existence de deux modes visqueux pour $m = 0$ et $m = 1$ qui peuvent éventuellement donner lieu à des transitions instable convectif-instable absolu pour le tourbillon de Batchelor.

Ici, les difficultés numériques rencontrées dans l'approche non-visqueuse suggèrent une démarche différente pour l'approche visqueuse. Nous employons dans ce cas une résolution

numérique de type collocation spectrale avec des polynômes de Chebyshev (voir Gottlieb et Orszag [36]). Cette technique a l'avantage de fournir simultanément toutes les branches stables ou instables pour certains paramètres de l'écoulement. Comme nous l'avons déjà souligné, les résultats en fluide parfait sont incomplets surtout dans la zone, a priori dite de stabilité, $q > 1.5$. Des problèmes numériques empêchent la détermination de la valeur de q qui stabilise le tourbillon de Batchelor. La littérature sur ce sujet n'indique pas avec exactitude les frontières d'instabilité du tourbillon. Lessen *et al.* [58] donnent $q > 1.5$ comme domaine de stabilité, le mode $m = -1$ étant stabilisé en dernier. Leibovich et Stewartson [55] et Stewartson et Capell [78] montrent que les jets tournants sont instables pour $q < \sqrt{2}$ (dans la limite $|m| \rightarrow \infty$) mais ne disent rien pour $q > \sqrt{2}$. Toutefois, Stewartson et Brown [77] prédisent l'existence, dans certaines plages de $q > \sqrt{2}$, de modes centrés (dont les fonctions propres ont une amplitude non-négligeable seulement près de l'axe du tourbillon) faiblement amplifiés en approche temporelle. Le domaine d'existence de ces modes amplifiés est constitué de segments disjoints de valeurs de q . Par exemple, pour $m = -1$ les segments trouvés pour $q > \sqrt{2}$ sont:

$$2.43 < q^2 < 2.64 \quad \text{et} \quad 3.15 < q^2 < 5.33.$$

Lessen et Paillet [56] dans leur étude visqueuse parlent également du modèle de Bergman [10] (U et V sont les mêmes que celles du tourbillon de Batchelor alors que la vitesse azimutale $W(r)$ est d'ordre $O(r^2)$ quand $r \rightarrow 0$). Pour ce modèle, l'instabilité persiste encore pour des rotations très grandes ($q \sim 5$) mais les modes restent très faiblement amplifiés et de type annulaire avec $k_r \rightarrow 0$ (c'est-à-dire là où les autres modes sont stables).

Pour $Re = 667$, Delbende *et al.* [22] trouvent que le domaine de stabilité commence après $q > 1.55$. Nous avons vérifié que nos résultats sont en très bon accord avec les leurs. Toutefois, des faibles différences quantitatives apparaissent.

Les résultats de la présente approche ont fait l'objet d'un article soumis au *Journal of Fluid Mechanics* début décembre 1998 (voir l'annexe D).

3.1 Résolution, par méthode spectrale, de l'équation de dispersion en fluide visqueux

3.1.1 Le problème aux valeurs et vecteurs propres pour le fluide visqueux

En coordonnées cylindriques (x, r, θ) , l'étude linéaire de la stabilité de l'écoulement axisymétrique d'un fluide visqueux, incompressible et en l'absence de toute source de chaleur est faite à l'aide des équations de Navier-Stokes linéarisées et adimensionnées (1.17)-(1.20) (voir la rubrique 1.2.1). Les perturbations sont cherchées sous la forme habituelle des modes normaux (1.23). En injectant ces perturbations dans les équations de Navier-Stokes linéarisées, nous obtenons le système différentiel suivant

$$krF + (rG)' + mH = 0, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} -\frac{F''}{Re} - \frac{F'}{rRe} + \left(\frac{m^2}{r^2Re} + \frac{iWm}{r} - i\omega\right)F \\ + iU'G + iUkF + ikP + \frac{k^2F}{Re} = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} -\frac{iG''}{Re} - \frac{iG'}{rRe} + \left(\frac{i}{Re} \frac{m^2 + 1}{r^2} - \frac{mW}{r} + \omega\right)G \\ - \frac{2}{r} \left(W - \frac{im}{rRe}\right)H + P' - kUG + \frac{ik^2G}{Re} = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$-\frac{H''}{Re} - \frac{H'}{rRe} + \left(\frac{m^2 + 1}{r^2 Re} + \frac{iWm}{r} - i\omega\right)H + (iW' + \frac{2m}{r^2 Re} + \frac{iW}{r})G + \frac{imP}{r} + ikUH + \frac{k^2 H}{Re} = 0, \quad (3.4)$$

où on pose $a' := da/dr$.

Pour ces équations, comme dans le cas du fluide parfait, la vitesse radiale de l'écoulement de base $V(r)$ est nulle. Si nous conservons comme écoulement de base le tourbillon de Batchelor (2.14), alors le nombre de Reynolds défini sous la forme (voir la section 1.2.1)

$$Re = U_s r_s / \nu \quad (3.5)$$

prend en compte les grandeurs indiquées dans la rubrique 2.1.1 que sont U_s (2.11) et r_s (2.12) (également introduites à la rubrique 1.2.1).

Les conditions aux limites pour ce système sont les mêmes que celles écrites dans le cas du fluide parfait (1.24) et (1.28).

Pour un jeu donné de paramètres (m, a, q, Re) , le système (3.1)-(3.4) avec les conditions aux limites adjointes (1.28) et (1.24) constitue un problème aux valeurs et vecteurs propres car nous obtenons des solutions (F, G, H, P) non nulles si et seulement si le nombre d'onde axial k et la pulsation ω vérifient une relation de dispersion du type

$$D(k, \omega; m, a, q, Re) = 0. \quad (3.6)$$

A la différence de la relation de dispersion obtenue (2.27) en fluide parfait, la viscosité intervient ici via le nombre de Reynolds qui est un paramètre de contrôle supplémentaire. Notons que si on remplace (m, a, q) par $(-m, a, -q)$ la solution (k, ω) du système (3.1)-(3.4) et des conditions aux limites associées est conservée (remplacer (F, G, H, P) par $(F, -G, H, P)$).

3.1.2 La méthode de collocation spectrale de Chebyshev

Les équations obtenues à la rubrique précédente sont valables pour tout écoulement de base parallèle et axisymétrique. Il est hors de question de résoudre analytiquement la relation de dispersion (3.6). Dans le cas du fluide parfait, des solutions approchées existent seulement pour des écoulements de base très simples (comme le tourbillon de Rankine dont l'analyse de stabilité a été faite par Loiseleux *et al.* [60]). Orszag [65] a montré que les méthodes spectrales fournissent un outil bien adapté à la résolution des problèmes de stabilité tels que celui qui nous préoccupe. Depuis, la méthode spectrale de Chebyshev a été employée avec succès pour la résolution des problèmes aux valeurs et vecteurs propres. Contrairement aux méthodes de Galerkin et tau [66], un code spectral ne demande pas de modifications majeures lorsque le profil de base est modifié et une telle approche simplifie considérablement la prise en compte des conditions aux limites. Cependant, la méthode de collocation doit s'effectuer sur un domaine borné et dispose a priori beaucoup de points de contrôle près des frontières du domaine. Ainsi, si cette répartition est tout à fait appropriée pour saisir les conditions aux limites dans le cas d'un écoulement confiné (par exemple un écoulement de Poiseuille) il faudra pour un écoulement en milieu infini au préalable utiliser une transformation ramenant l'espace physique à un domaine borné. En pratique, nous concentrons les points de collocation au voisinage de l'axe ($r = 0$) du tourbillon étudié. La suite précise cette manière de faire, dans le cas du tourbillon de Batchelor.

Les polynômes de Chebyshev sont définis dans l'intervalle $-1 \leq \xi \leq 1$ par la relation suivante

$$T_k(\xi) = \cos(k \cos^{-1} \xi). \quad (3.7)$$

En posant $\xi = \cos \phi$, nous pouvons écrire

$$T_k(\xi) = \cos(k\phi). \quad (3.8)$$

Nous interpolons alors la solution cherchée en $N + 1$ points de collocation définis par le dernier polynôme de Chebyshev T_N tel que

$$\xi_j = \cos \frac{\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (3.9)$$

Il est évident que les frontières du domaine physique correspondent aux points de collocation ξ_0 et ξ_N . Pour le tourbillon de Batchelor, une transformation appropriée possible est fournie par Malik *et al.* [61] sous la forme suivante

$$\frac{r}{r_c} = \frac{r_c + r_{max} \xi}{r_c} = \frac{r}{r_c} = [1 + \xi] / [1 - \xi + \frac{2r_c}{r_{max}}]. \quad (3.10)$$

C'est une transformation simple à deux paramètres r_c et r_{max} qui ramène l'infini à une distance fini ($r = r_{max}$). Le premier paramètre r_c est très important car la moitié des points de collocation sont disposés dans l'intervalle $[0, r_c]$. Les points de collocation sont nombreux près de l'origine $r = 0$ et de plus en plus rares quand $r \rightarrow r_{max}$. En général, le choix de r_c tient compte de l'intervalle où se produisent les variations les plus importantes de l'écoulement de base ou des fonctions propres. Khorrami *et al.* [47] montrent que l'utilisation d'une transformation plus compliquée pour ce type de problème ne modifie pas les résultats.

Pour un écoulement de type Poiseuille nous pouvons choisir la transformation

$$\xi = 1 - \frac{2r}{R} \quad (3.11)$$

qui assure une densité égale de points près de l'origine et près de la paroi $r = R$.

Dans l'espace de Chebyshev, les solutions cherchées (c'est-à-dire les amplitudes des perturbations) sont représentées sous la forme

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(\xi). \quad (3.12)$$

En posant $F_l = F(\xi_l)$, les deux premières dérivées de la fonction F s'écrivent

$$\frac{dF}{d\xi} \Big|_j = \sum_{l=0}^N A_{jl} F_l; \quad j = 0, 1, \dots, N; \quad (3.13)$$

et

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} \Big|_j = \sum_{l=0}^N B_{jl} F_l; \quad j = 0, 1, \dots, N; \quad (3.14)$$

où (A_{jl}) et (B_{jl}) sont les matrices de dérivation du premier ordre et du second ordre. La matrice (A_{jl}) est donnée par les formules

$$A_{jl} = \frac{C_j (-1)^{l+j}}{C_l (\xi_j - \xi_l)}; \quad \text{pour } j \neq l \quad (3.15)$$

et

$$A_{jj} = -\frac{\xi_j}{2(1 - \xi_j^2)} \quad \text{pour } j = l \neq 0 \quad (3.16)$$

$$A_{00} = -A_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6}$$

dans lesquelles $C_0 = C_N := 2$ et $C_j := 1$ pour $1 \leq j \leq N-1$. La matrice (B_{jl}) est définie par

$$B_{jl} = A_{jp}A_{pl}. \quad \checkmark$$

En utilisant ces relations, le système (3.1)-(3.4) admet, en variable de Chebyshev ξ , la discrétisation suivante

$$kr_j F_j + r_j S_{1,j} \sum_{l=0}^N A_{jl} G_l + G_j + m H_j = 0, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} -\frac{S_{2,j}}{Re} \sum_{l=0}^N B_{jl} F_l - \frac{S_{1,j}}{r_j Re} \sum_{l=0}^N A_{jl} F_l + \left(\frac{m^2}{r_j^2 Re} + i \frac{W_j m}{r_j} - i\omega \right) F_j \\ + iU'_j G_j + iU_j k F_j + ik P_j + \frac{k^2}{Re} F_j = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} -i \frac{S_{2,j}}{Re} \sum_{l=0}^N B_{jl} G_l - i \frac{S_{1,j}}{r_j Re} \sum_{l=0}^N A_{jl} G_l + \left(i \frac{m^2 + 1}{r_j^2 Re} - \frac{W_j m}{r_j} + \omega \right) G_j \\ - \frac{2}{r_j} \left(W_j - \frac{im}{r_j Re} \right) H_j + S_{1,j} \sum_{l=0}^N A_{jl} P_l - k U_j G_j + \frac{i}{Re} k^2 G_j = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} -\frac{S_{2,j}}{Re} \sum_{l=0}^N B_{jl} H_l - \frac{S_{1,j}}{r_j Re} \sum_{l=0}^N A_{jl} H_l + \left(\frac{m^2 + 1}{r_j^2 Re} + i \frac{W_j m}{r_j} - i\omega \right) H_j \\ + (iW'_j + \frac{2m}{r_j^2 Re} + i \frac{W_j}{r_j}) G_j + i \frac{m}{r_j} P_j + iU_j k H_j + \frac{k^2}{Re} H_j = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

où on a noté $r_j := r(\xi_j)$ et les coefficients $S_{1,j}$ et $S_{2,j}$ sont introduits par le changement de variable $r = r(\xi)$ donné par (3.10). Ces coefficients vérifient donc

$$S_{1,j} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \Big|_j, \quad S_{2,j} = S_{1,j} \times S_{1,j}. \quad (3.21)$$

Pour notre transformation (3.10) nous avons noté

$$r_j = r_c (1 + \xi_j) / \left(1 - \xi_j + \frac{2r_c}{r_{max}} \right), \quad (3.22)$$

et dans le cas du tourbillon de Batchelor nous avons posé

$$U_j = a + e^{-r_j^2}, \quad U'_j = -2r_j e^{-r_j^2}, \quad (3.23)$$

$$W_j = \frac{q}{r_j} (1 - e^{-r_j^2}), \quad W'_j = \frac{q}{r_j^2} (e^{-r_j^2} + 2r_j^2 e^{-r_j^2} - 1). \quad (3.24)$$

Dans l'espace de Chebyshev, les conditions aux limites (1.28) et (1.25)-(1.27) s'écrivent:

- en $\xi = 1$ (en $r = \infty$):

$$F(1) = G(1) = H(1) = P(1) = 0, \quad (3.25)$$

- en $\xi = -1$ (en $r = 0$):

$$F(-1) = G(-1) = H(-1) = P(-1) = 0 \text{ pour } m^2 > 1, \quad (3.26)$$

$$G(-1) = H(-1) = 0, \quad F(-1) \text{ et } P(-1) \text{ finis pour } m = 0, \quad (3.27)$$

$$H(-1) \pm G(-1) = 0, \quad F(-1) = P(-1) = 0 \text{ pour } m = \pm 1. \quad (3.28)$$

Selon l'approche considérée (spatiale ou temporelle), le rôle de la valeur propre du système (3.17)-(3.20) est tenu par k ou ω . Dans le cas temporel, la résolution du système ne pose pas de problème particulier. A l'inverse, dans le cas spatial la présence des termes en k^2 requiert l'utilisation d'inconnues auxiliaires. Plus précisément, nous introduisons les nouvelles fonctions \overline{F} , \overline{G} et \overline{H} par

$$\overline{F}_j := kF_j, \quad \overline{G}_j := kG_j, \quad \overline{H}_j := kH_j. \quad (3.29)$$

Les conditions aux limites adjointes à \overline{F} , \overline{G} , et \overline{H} proviennent de celles imposées à F , G et H . Le système (3.17)-(3.20), (3.29) apparaît ainsi sous la forme d'un problème généralisé aux valeurs et vecteurs propres du type

$$AX = \lambda BX \quad (3.30)$$

où A et B sont des matrices carrées de dimension $7(N+1) \times 7(N+1)$ dans le cas spatial et de dimension $4(N+1) \times 4(N+1)$ dans le cas temporel. Le vecteur propre prend la forme $X = (F, G, H, \overline{F}, \overline{G}, \overline{H}, P)$ dans le spatial et $X = (F, G, H, P)$ dans le cas temporel. La matrice B est singulière dans les deux approches à cause des conditions aux limites qui ne font pas intervenir la valeur propre.

Le problème discretisé (3.30) est résolu en utilisant les sous-programmes CGEGS et CGEGV de la bibliothèque scientifique SCILIB. Par un algorithme de décomposition de Schurr, ces sous-programmes fournissent le spectre S_{N+1} de valeurs propres k et si nécessaire les fonctions propres X . Une grande partie des éléments de S_{N+1} sont des valeurs propres d'origine numérique car liées au choix de la discrétisation et dépourvues de toute signification physique. Mayer et Powell [63] montrent que ces valeurs propres parasites se situent sur des courbes bien déterminées (chose confirmée par notre étude; voir la figure 3.1). De plus, leurs positions dans le plan complexe sont très sensibles au nombre N des points de collocation. Parmi les nombreux éléments du spectre, les valeurs propres physiques bougent au contraire très peu lorsque le nombre des points de collocation est modifié. Cette observation permet d'établir un moyen très simple de faire le tri entre les valeurs propres physiques et les éléments parasites en comparant successivement toutes les valeurs propres obtenues pour deux, voire trois nombres N de points de collocation. Par exemple, si nous obtenons S_{N_1} , S_{N_2} et S_{N_3} (pour $N_3 > N_2 > N_1$) alors une valeur propre $k(N)$ est sélectionnée si et seulement si

$$\text{Min}|k(N_2) - k(N_1)| < \varepsilon_1 \quad (3.31)$$

$$\text{Min}|k(N_3) - k(N_2)| < \varepsilon_2 \quad (3.32)$$

où ε_1 et ε_2 sont des petits paramètres de précision. Très souvent deux simulations S_{N_1} et S_{N_2} assorties d'une seule comparaison avec ε_1 s'avèrent suffisantes. En pratique nous avons travaillé avec $N_3 > N_2 > N_1 \geq 60$ et $\varepsilon_2 < \varepsilon_1 < 10^{-2}$. Par exemple, considérons deux valeurs du nombre de points de collocation $N_1 = 70$ et $N_2 = 80$ et réalisons le tri pour $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ et pour les paramètres $m = -1$, $a = 0$, $q = 0.6$ et $Re = 667$. Conformément à Huerre et Monkewitz [40], nous retenons seulement les valeurs propres k telle que $k_r = Re(k) > 0$. Ensuite nous nous intéressons principalement aux valeurs propres disposées au voisinage de l'axe $k_i = 0$ (où se produisent les instabilités spatiales) et qui ont un k_r de l'ordre de l'unité. Les branches $k(\omega)$ obtenues quand ω varie de -1 à 1.5 sont présentées à la figure 3.1. Nous remarquons une région A avec plusieurs branches k^+ (stables ou instables), une région B avec deux branches k^- (stables) et deux régions C_1 et C_2 où subsistent des valeurs propres non physiques qui ont survécu au tri mis en place. Pour les éliminer il faut augmenter le nombre des points de collocation et imposer une

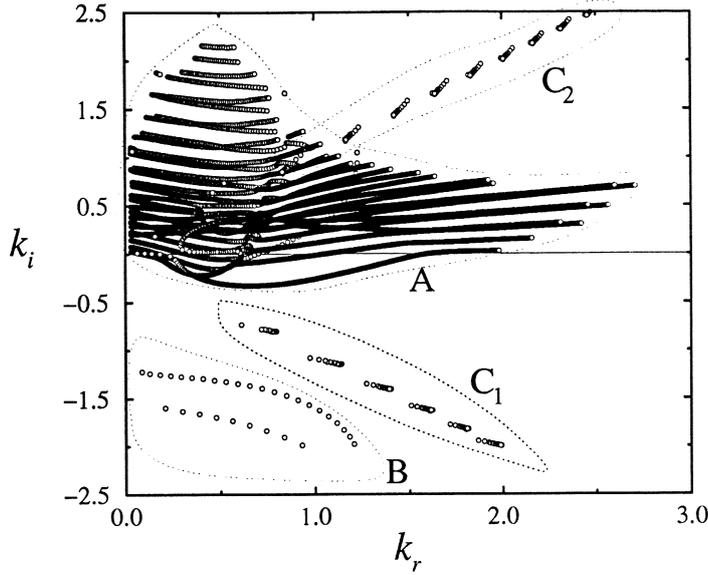


Figure 3.1: Le spectre $k(\omega)$ obtenu pour le jeu de paramètres $m = -1$, $a = 0$, $q = 0.6$ et $Re = 667$. La pulsation ω varie de -1 à 1.5 . Nous distinguons trois régions principales: A est la région des branches $k^+(\omega)$ stables ($k_i^+ < 0$) ou instables ($k_i^+ > 0$), B la région des branches $k^-(\omega)$ stables ($k_i^- < 0$) et C_1 et C_2 deux régions qui contiennent des valeurs propres dues à la discrétisation.

précision plus grande. Toutefois, nous remarquons que les valeurs propres non physiques se placent le long des courbes bien déterminées dans l'espace complexe k .

Les tests du code numérique ont été effectués sur les machines du LadHyX et la plus grande partie des calculs a été exécutée, en double précision, sur un ordinateur CRAY C90 de l'IDRIS.

3.1.3 Validation du Code de calcul

Pour valider notre code numérique dans le cas spatial nous avons choisi dans un premier temps de travailler avec un écoulement de base de Poiseuille, caractérisé par les profils de vitesses

$$U(r) = 1 - r^2, \quad V(r) = 0, \quad W(r) = 0 \quad (3.33)$$

et les conditions aux limites suivantes:

- en $\xi = -1$ (en $r = R$):

$$\begin{aligned} F(-1) &= G(-1) = H(-1) = 0, \\ \bar{F}(-1) &= \bar{G}(-1) = \bar{H}(-1) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{\xi=-1} &= \chi, \quad \text{pour tout } m. \end{aligned} \quad (3.34)$$

- en $\xi = 1$ (en $r = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{\xi=1} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial r} \Big|_{\xi=1} = 0, \\ G(1) &= H(1) = \bar{G}(1) = \bar{H}(1) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{\xi=1} &= \chi, \quad \text{pour } m = 0; \\ F(1) &= P(1) = \bar{F}(1) = 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

m	k_{Kh}	k_{Ol}
0	0.51998925171+0.02083549388i	0.51998925171+0.02083549388i
1	0.53525108000+0.01722763000i	0.53525108365+0.01722764418i

not converged!

Table 3.1: La comparaison entre Khorrami *et al.* [47] (k_{Kh}) et Olendraru (k_{Ol}) dans le cas spatial pour un écoulement de base de Poiseuille, $Re = 10000$ et $\omega = 0.5$. Pour $m = 0$, $N = 40$ et pour $m = 1$, $N = 80$.

$$\begin{aligned}
G(1) + mH(1) &= 0, \\
\overline{G}(1) + m\overline{H}(1) &= 0, \\
2G'(1) + mH'(1) &= 0, \\
2\overline{G}'(1) + m\overline{H}'(1) &= 0, \quad \text{pour } m = \pm 1;
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
F(1) = P(1) = \overline{P}(1) &= 0, \\
G(1) = H(1) = \overline{G}(1) = \overline{H}(1) &= 0, \quad \text{pour } m > 1.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Ici la transformation $\xi = \xi(r)$ choisie s'écrit

$$\xi = 1 - 2\frac{r}{R} \tag{3.38}$$

et les coefficients de dérivation deviennent tout simplement

$$S_1 = 2, \quad S_2 = 4. \tag{3.39}$$

En dehors de modifications portant sur les conditions aux limites et de ce choix de transformation, la structure des matrices A et B est préservée.

Nos résultats sont comparés avec ceux de Khorrami *et al.* [47]. La table 3.1 résume ces comparaisons: Pour les deux modes $m = 0$ et $m = 1$, nous observons un accord parfait avec seulement 40 points de collocation.

N	branche 1: $\omega = 0.1$	branche 2: $\omega = -0.15$
60	0.669 367 151 -0.181 999 974i	0.367 202 058 -0.220 458 484i
70	0.669 365 472 -0.181 997 057i	0.367 202 508 -0.220 457 875i
80	0.669 363 836 -0.181 994 107i	0.367 202 981 -0.220 457 371i
100	0.669 360 884 -0.181 988 583i	0.367 203 916 -0.220 456 594i

Table 3.2: La convergence des valeurs propres en fonction du nombre N de points de collocation.

r_{max}	branche 1: $\omega = 0.1$	branche 2: $\omega = -0.15$
80	0.669 361 381 -0.181 989 583i	0.367 203 729 -0.220 456 678i
100	0.669 363 836 -0.181 994 107i	0.367 202 981 -0.220 457 371i
120	0.669 365 149 -0.181 996 458i	0.367 202 602 -0.220 457 782i

Table 3.3: La convergence des valeurs propres en fonction de r_{max} .

Après cette première vérification, nous avons configuré notre code pour l'étude du tourbillon de Batchelor. Les premiers tests dans ce cas ont porté sur la convergence en fonction du nombre N de points de collocation (voir la table 3.2) et du choix de la valeur

Re	ω_{Kh}	k_{Kh}	k_{Ol}
1000	0.48258294+0.0008141i	0.5	0.49972253- 0.0007506973i
10000	0.48359283+0.0001847i	0.5	0.49999441+0.0000993556i
100000	0.48361751-0.000018i	0.5	0.49999965+0.0000103157i

Table 3.4: Le mode visqueux axisymétrique $m = 0$: comparaisons entre Khorrami [45] (k_{Kh}) et Olendraru (k_{Ol}).

de r_{max} (voir la table 3.3). Ces comparaisons sont effectuées pour les deux modes spatiaux les plus amplifiés (modes 1 et 2) pour $a = 0$, $m = -1$, $Re = 667$ et $q = 0.7$. On observe que les valeurs $N = 80$ et $r_{max} = 100$ procurent une très bonne précision (de l'ordre de 10^{-5}).

La comparaison, pour $N = 80$ et $r_{max} = 100$, avec les résultats obtenus par Khorrami [45] qui mettent en évidence une faible instabilité temporelle visqueuse est présentée aux tables 3.4 et 3.5. Nous observons un bon accord qui de plus s'améliore lorsque le nombre de Reynolds augmente.

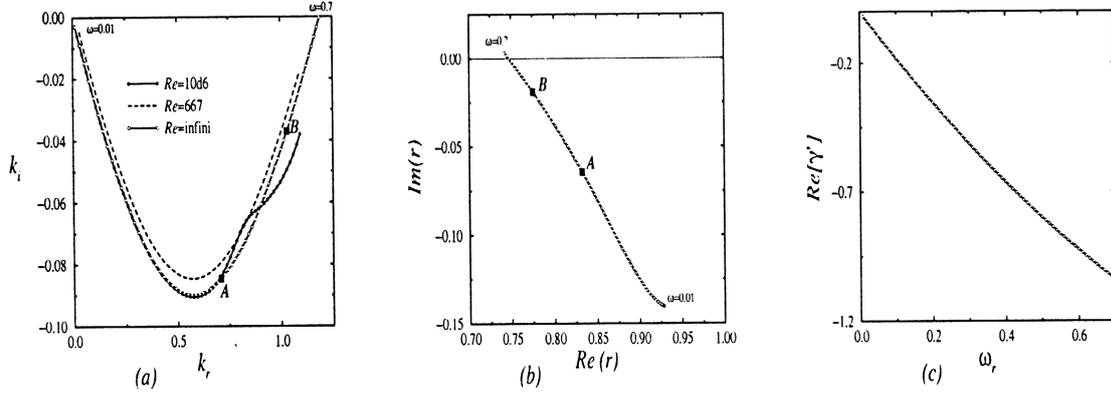


Figure 3.2: Comparaison entre l'approche visqueuse et l'approche fluide parfait pour $m = -1$, $a = 0$ et $q = 0$. (a) Les branches $k(\omega)$ obtenues dans la présente approche pour deux valeurs de Reynolds ($Re = 667$ et $Re = 10^6$) sont comparées avec celle obtenue en fluide parfait. (b) L'évolution du point critique r_c dans le plan complexe r en fluide parfait. (c) Le paramètre $Re[\gamma'(r_c)]$ qui "indique" le type de contour d'intégration.

La vérification suivante du code a été réalisée pour des résultats obtenus pour le fluide parfait (par notre méthode de shooting). Nous avons tracé une branche spatiale $k^+(\omega)$ pour $a = 0$, $q = 0$ et $m = -1$ en approche fluide parfait et pour deux valeurs de nombre de Reynolds $Re = 667$ et $Re = 10^6$ (voir figure 3.2a). Nous observons dans le plan complexe k que si $k_r < 0.5$ les deux courbes $Re = \infty$ (obtenue par la méthode de shooting) et $Re = 10^6$ se superposent alors que la courbe $Re = 667$ est légèrement décalée vers le haut.

Re	ω_{Kh}	k_{Kh}	k_{Ol}
1000	0.32346214+0.00097904i	0.3	0.30004716- 0.00056087i
10000	0.32345326-0.00009192i	0.3	0.29999826+0.00005638i
100000	0.32345378-0.00000865i	0.3	0.29999945+0.00000384i

Table 3.5: Le mode visqueux asymétrique $m = 1$: comparaisons entre Khorrami [45] (k_{Kh}) et Olendraru (k_{Ol}).

La viscosité est la seule responsable de ce décalage par effet stabilisant. Pour $k_r > 0.5$, la courbe $Re = 10^6$ montre une évolution particulière. Celle-ci est due à la présence d'un point critique (voir figure 3.2b) qui traverse l'axe réel pour $\omega = 0.68$. L'influence de ce point critique devient visible sur courbe $Re = 10^6$ dès que $\omega > \omega_A$ (le point A avec $\omega_A = 0.38$ est indiqué sur les figures 3.2(a-b)). Le décalage observé n'est pas dû au secteur visqueux qui est orienté vers le bas du plan complexe r ($Re[\gamma'(r_{c,A})] < 0$ sur toute la branche $k(\omega)$; voir la figure 3.2c) mais à la couche critique qui entoure le point critique (voir la figure 2.4) qui s'approche de l'axe réel ($Im(r_{c,A}) = -0.065$). Au point B tel que $\omega_B = 0.57$, la courbe $Re = 10^6$ s'arrête car le point critique $r_{c,B}$ est si proche de l'axe ($Im(r_{c,B}) \simeq -0.02$) que le code spectral n'arrive plus à sélectionner les valeurs propres. La présence de points critiques n'est préjudiciable que pour Re très grand et pour Re modéré notre code n'est pas affecté. La dernière vérification concerne les fonctions propres. Un

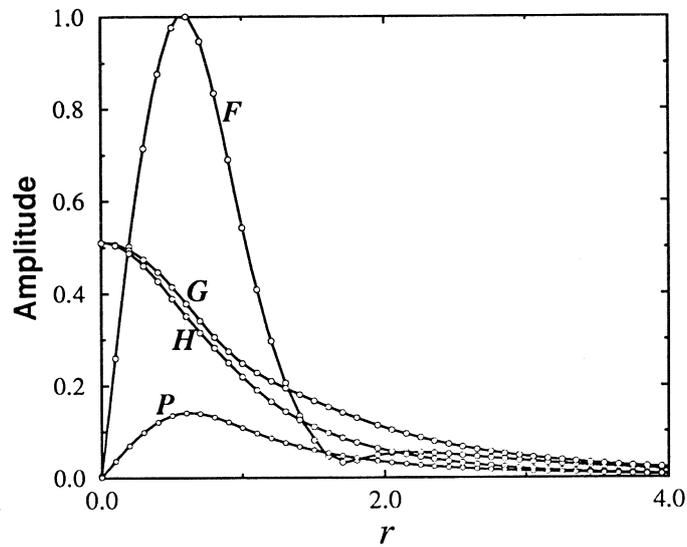


Figure 3.3: La comparaison entre les modules des fonctions propres obtenus en approche fluide parfait (en symboles (o)) et en approche fluide visqueux (ligne continue) pour $m = -1$, $a = 0$, $q = 0.3$ et $Re = 10^6$. Ici, nous avons $k_1^+ = (0.507, -0.364)$ pour $\omega = 0.2$.

ensemble de fonctions propres (leur modules plus précisément) obtenues pour une valeur très grande de $Re = 10^6$ est comparé avec les fonctions propres non-visqueuses. L'accord est excellent (voir figure 3.3).

3.2 Présentation et discussion des résultats obtenus

L'analyse du cas visqueux par une méthode de collocation spectrale fournit l'ensemble des modes impliqués dans la stabilité du tourbillon de Batchelor: nous pouvons capturer tous les modes "non-visqueux" instables (dont le premier a déjà été étudié) ainsi que les éventuels modes visqueux. Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'effet de la viscosité sur les branches spatiales amplifiées. Ensuite, nous déterminons les courbes de transition instabilité convective-instabilité absolue dans le plan (a, q) des paramètres de contrôle en complétant les courbes déjà tracées par la méthode de "shooting" et en étudiant l'influence de la viscosité sur ces courbes.

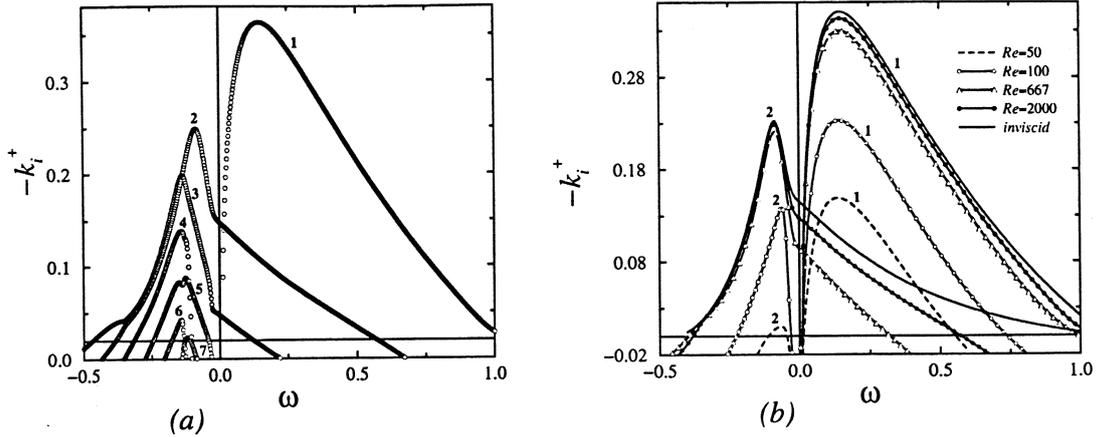


Figure 3.4: Le mode azimutal $m = -1$ pour un jet authentique $a = 0$ et $q = 0.6$. (a) Les branches spatiales instables $k^+(\omega)$ quand $Re = 2000$. (b) L'influence de la viscosité sur les deux premières branches k_1^+ et k_2^+ .

3.2.1 L'influence de la viscosité sur les modes "non-visqueux"

L'analyse temporelle visqueuse des modes non-visqueux a été réalisée pour la première fois par Lessen et Paillet [56] par une méthode de shooting. Le mode azimutal qui se déstabilise en premier avec la viscosité est le mode $m = -1$ et son nombre de Reynolds d'apparition, Re_a , (pour lequel le mode devient temporellement instable) est $Re_c = 13.9$. Lorsque la viscosité diminue les modes azimutaux supérieurs se déstabilisent également. Cette étude présente cependant deux inconvénients confirmés par les études ultérieures ([55], [26], [63]). Tout d'abord la valeur $r_{max} = 3$ choisie par Lessen et Paillet [56] est trop petite pour saisir correctement le comportement à l'infini et conduit à une perte de précision. Ceci a été montré par Duck et Foster [26], Ash et Khorrami [2] et confirmé par Mayer et Powell [63]. Ces derniers présentent un tableau des nombres de Reynolds d'apparition (voir le tableau 4 de [63]), $Re_a(m)$, de chaque mode azimutal m instable et montrent que ceux-ci respectent la loi $Re_a(m) \sim m^2$ quand $m \rightarrow \infty$. Le seul effet de la viscosité est celui de stabiliser l'écoulement au fur et à mesure que le nombre de Reynolds diminue.

De plus, l'étude de Lessen et Paillet [56] ne s'intéresse qu'à la première branche instable pour chaque mode azimutal. Mayer et Powell [63] mettent en évidence l'existence de cinq branches instables pour le premier mode azimutal $m = -1$ mais n'étudient pas l'influence de la viscosité sur ces branches.

Le but de notre étude est de localiser dans le plan (a, q) les courbes de transition instable convectif-instable absolu. L'approche non-visqueuse et l'étude de Delbende *et al.* [22] ont seulement considéré la branche la plus amplifiée de chaque mode azimutal. Cependant, une branche moins amplifiée peut très bien donner un point de transition pour des paramètres (a, q) placés à l'extérieur des courbes de transition tracées pour la branche la plus amplifiée. Dans ces conditions, il est nécessaire pour un ensemble de paramètres fixés (m, a, q, Re) , d'étudier le comportement de toutes les branches amplifiées $k^+(\omega; m, a, q, Re)$. La déformation de ces branches selon a , q ou Re permet la détection de la première branche qui assure la transition vers l'instabilité absolue sans tenir compte de son taux d'amplification. Nous présentons à la figure 3.4a toutes les branches instables k^+ pour les paramètres $m = -1$, $Re = 2000$, $a = 0$ et $q = 0.6$. La seule branche située entièrement dans le domaine $\omega_r > 0$ est aussi la branche la plus amplifiée (la branche 1). Les branches 2 et 3 s'étendent non seulement dans le domaine $\omega_r > 0$ mais aussi dans le

branche	1	2	3	4	5	6	7
Re_a	20.9	47.6	167.4	428	861.2	1521	1931

Table 3.6: Le nombre de Reynolds d'apparition Re_a des sept premières branches instables $k^+(\omega)$ du mode azimutal $m = -1$ pour $a = 0$ et $q = 0.6$.

domaine $\omega_r < 0$. Lorsque la pulsation (réelle) diminue, la branche 1 puis les branches 2 et 3 donnent successivement le taux de croissance spatiale maximal. Les branches 4, 5, 6 et 7 sont moins amplifiées, se placent seulement dans le domaine $\omega_r < 0$ et en général leur structure est moins bien définie que celle des trois premières branches. Le taux de croissance spatiale maximal pour la branche 1 est obtenu pour $\omega_{r,max} = 0.15$ et vaut $(-k_i^+)_{max} = 0.35$. La méthode de shooting ne permettait de détecter les branches k^- qu'à la proximité du point selle. A présent, nous obtenons simultanément dans l'espace complexe k (voir la figure 3.1) les branches k^+ stables et instables (région A) et les branches k^- stables (région B). Nous montrons à la figure 3.4b la stabilisation de ces branches par effet visqueux. Seules les deux premières branches 1 et 2 sont tracées pour $Re = 2000$, $Re = 667$, $Re = 100$ et $Re = 50$. Nous donnons également les courbes pour $Re \rightarrow \infty$. Ainsi, pour la première branche, $Re = 667$ est une valeur élevée du nombre de Reynolds (du moins, comme nous le verrons plus tard, pour ce paramètre de rotation $q = 0.6$). Aux faibles nombres de Reynolds ($Re = 100$ et $Re = 50$), les branches sont très sensibles à la viscosité. Toutes les courbes associées à la branche 1 demeurent dans le domaine $\omega_r > 0$. La branche 2 est plus sensible à la variation de la viscosité dans le domaine $\omega_r > 0$ alors que dans le domaine $\omega_r < 0$ les courbes sont presque superposées pour des Re grands et moyens. Pour $Re = 100$, les deux branches sont complètement séparées dans les domaines ω_r positifs et négatifs. Pour $Re = 50$, la deuxième branche approche la neutralité. Nous procurons à la table 3.6 le nombre de Reynolds d'apparition de ces sept branches indiquées à la figure 3.4a pour $q = 0.6$ et $a = 0$. Après leur apparition les branches suivent la même évolution que celle exhibée par les branches 1 ou 2 quand Re augmente. Chaque branche atteint son taux de croissance maximal pour $Re = \infty$. Pour cette raison, ces branches sont dites modes "non-visqueux". Sans doute que pour $Re > 2000$ d'autres modes non-visqueux instables existent mais pour des valeurs élevées de Re notre Code rencontre des difficultés numériques dues à la présence de points critiques (voir la figure 3.2). La viscosité n'est pas la seule responsable de la stabilisation des modes non-visqueux. Comme cela a été souligné lors de l'approche non-visqueuse, les rotations modérées et fortes ont le même effet sur les modes azimutaux $m = -1$, $m = -2$ et $m = -3$. De plus, la rotation n'exerce pas une influence égale sur tous les modes azimutaux et sur toutes les branches instables de chacun de ces modes. Ainsi, la rotation est aussi à l'origine du phénomène d'échange des branches ("switching modes"). Nous montrons comment la première branche amplifiée, la branche 1, est atténuée puis remplacée par la branche 2 quand $q > 0.6$. A $Re = 667$, nous voyons à la figure 3.4b que la branche 1 est plus amplifiée que la branche 2 pour $q = 0.6$ et moins amplifiée pour $q = 0.725$ (voir la figure 3.5). De plus, si pour $q = 0.725$ les deux branches gardent toujours leur allure initiale, pour $q = 0.74$ elles se modifient radicalement (voir la figure 3.5). Entre ces deux valeurs de rotation, les deux branches k_1^+ et k_2^+ pincement en un point selle qui, selon le critère de Briggs-Bers, n'est pas un point de transition. Comme le chapitre précédent l'a déjà montré, de ce pincement résultent deux branches hybrides k_{1-2}^+ et k_{2-1}^+ que la figure 3.5 montre. La branche k_{2-1}^+ reste fortement amplifiée, présente deux lobes et occupe un domaine d'amplification très large issu des deux domaines associés qui correspondaient avant le pincement aux branches k_1^+ et k_2^+ . De même, la branche k_{1-2}^+ faiblement amplifiée admet un domaine d'amplification très

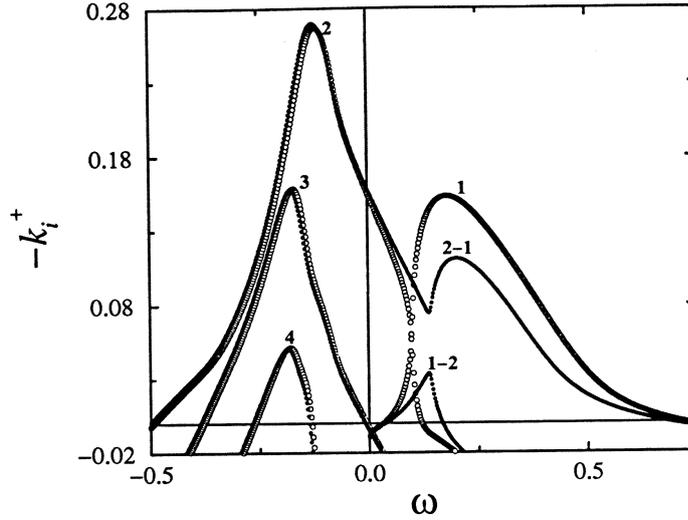


Figure 3.5: Le phénomène d'échange ("switching") des branches spatiales k_1^+ et k_2^+ pour $m = -1$, $a = 0$ et $Re = 667$. (○) $q = 0.725$; (●) $q = 0.74$.

branche	1(1-2)	2(2-1)	3	4	+1v
q_{min}	-0.074	0.035	0.095	0.21	0.011
q_{max}	0.83	1.632	1.273	0.987	0.848

Table 3.7: Les domaines d'instabilité en fonction du paramètre q pour les branches spatiales instables $k^+(\omega)$ du mode $m = -1$ (ou du mode visqueux $m = \pm 1$; noté +1v à $Re = 667$).

petit, résultat de l'intersection des deux domaines précédemment évoqués. Si la rotation augmente la branche k_{1-2}^+ devient de moins en moins amplifiée et se stabilise très vite. La table 3.7 présente les domaines d'instabilité des branches 1(1-2), 2(2-1), 3 et 4 pour le mode visqueux $m = +1$ (voir la rubrique suivante) à $Re = 667$. Ainsi, nous observons que la branche k_{1-2}^+ se stabilise pour $q = 0.83$. Au contraire, la branche k_{2-1}^+ reste amplifiée jusqu'à $q = 1.632$ en donnant ainsi la frontière de stabilité aux fortes rotations de ce mode $m = -1$ et même de l'ensemble des modes azimutaux pour $Re = 667$. Pour $Re = 2000$, la branche hybride k_{2-1}^+ se stabilise aux grandes rotations plus rapidement que dans le cas $Re = 667$. La figure 3.6 montre, pour $Re = 2000$, les taux d'instabilité spatiale maximaux des branches k_{2-1}^+ et k_3^+ . Nous observons que la branche hybride k_{2-1}^+ se stabilise pour une valeur de $q = 1.48$ alors que l'instabilité spatiale du tourbillon continue cette fois par l'intermédiaire de la branche k_3^+ qui ne se stabilise que pour $q = 2.089$. Le même comportement est observable dans le cas $Re = 10000$: même si la branche k_{2-1}^+ se stabilise pour une valeur de $q \simeq 1.5$, l'instabilité spatiale du tourbillon est assurée par la branche k_3^+ dans un certain intervalle en q et ensuite par une branche moins amplifiée (k_4^+ ou k_5^+) jusqu'à la stabilité qui a lieu pour une valeur de $q \simeq 3.2$.

3.2.2 Existence de modes visqueux spatialement amplifiés

Khorrani [45] puis Mayer et Powell [63] ont détecté deux modes visqueux ($m = 0$ et $m = 1$) temporellement amplifiés avec un taux de croissance de l'ordre 10^{-4} . Au voisinage de la neutralité les études temporelles et spatiales se rejoignent et en partant des valeurs indiquées dans ces articles nous avons étudié les contre-parties spatiales de ces modes axisymétrique ($m = 0$) et asymétrique ($m = \pm 1$). Nous montrons, figure 3.7a, le domaine

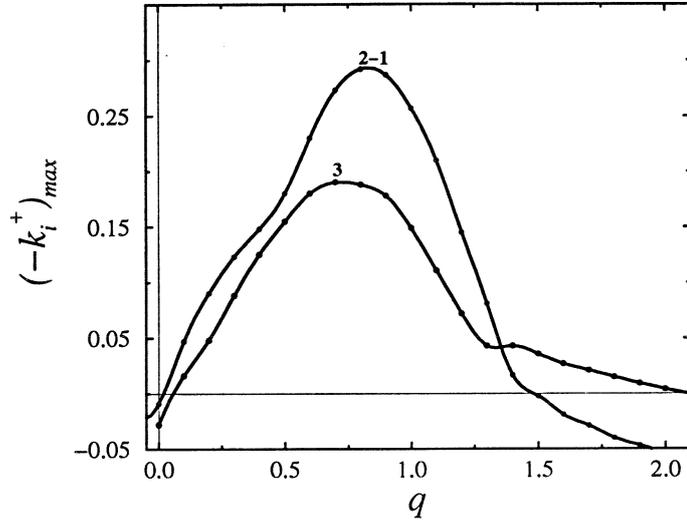


Figure 3.6: Les domaines d'instabilité, en fonction du paramètre q , des branches k_{2-1}^+ et k_3^+ pour un jet authentique $a = 0$ à $Re = 2000$.

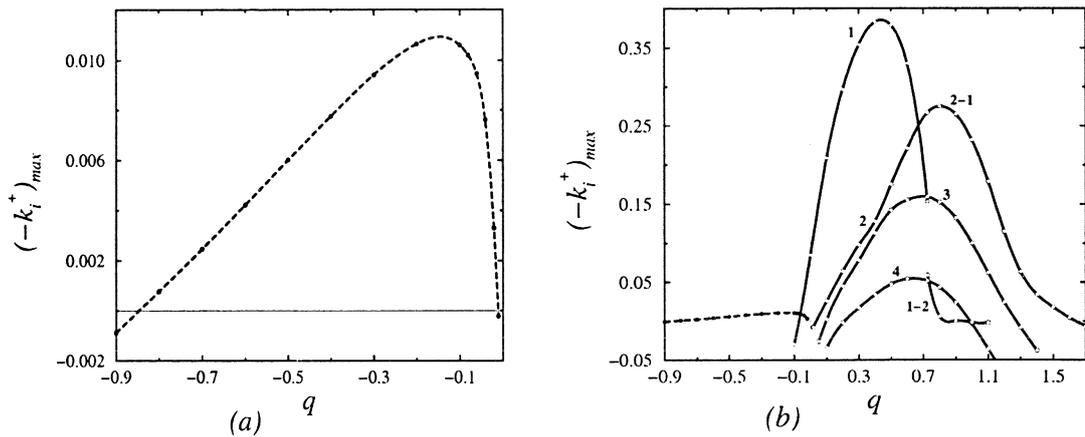


Figure 3.7: Jet authentique $a = 0$ à $Re = 667$. (a) Le taux de croissance spatiale maximal, $(-k_i^+(\omega))_{max}$, du mode visqueux $m = -1$ en fonction du paramètre q . (b) Les taux de croissance spatiale maximal, $(-k_i^+(\omega))_{max}$, des branches du mode azimutal $m = -1$. Le numéro de la branche est indiqué à coté de chaque ligne continue. La ligne pointillée indique le mode visqueux dans le domaine des valeurs négatives de q .

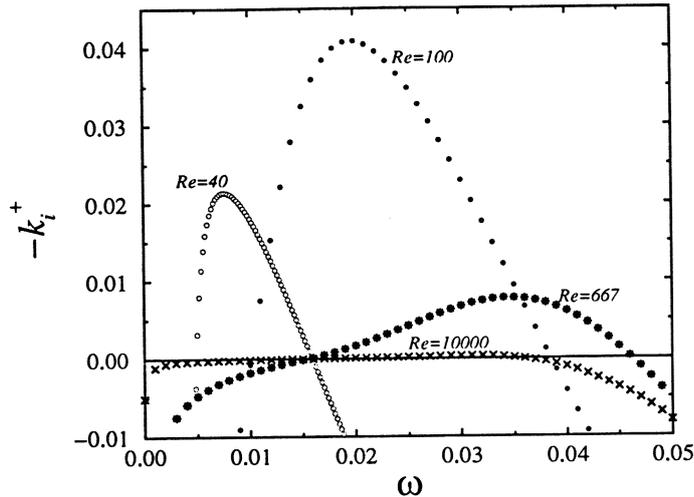


Figure 3.8: L'influence de la viscosité sur le taux de croissance spatiale du mode visqueux $m = -1$ pour un jet authentique $a = 0$ et $q = -0.4$.

d'instabilité spatiale du mode visqueux asymétrique $m = -1$ en fonction de q pour $Re = 667$. Nous précisons que notre étude a confirmé en approche spatiale les valeurs présentées par Khorrami [45] pour le mode visqueux axisymétrique $m = 0$ (voir la table 3.4) mais n'a pas réussi à mettre en évidence la courbe de transition associée. La figure 3.7b présente les domaines d'instabilité et les taux de croissance maximum associés des quatre modes non-visqueux instables et du mode visqueux $m = -1$, pour $Re = 667$. Pour des raisons de clarté nous n'avons considéré que $m = -1$ et $q < 0$ pour ce dernier mode. Nous remarquons que le taux d'instabilité spatiale est beaucoup plus petit que celui des modes non-visqueux. Le premier mode non-visqueux se déstabilise à $q = -0.074$, atteint son maximum à $q = 0.45$ et au-delà a tendance à se stabiliser. Le phénomène d'échange des modes interrompt cette branche autour de la valeur $q = 0.7$ et nous observons qu'elle est ensuite prolongée par la courbe 1-2 (qui correspond à la branche hybride k_{1-2}^+). Nous pouvons dire que le premier mode devient stable pour $q \sim 0.9$. Le mode visqueux est instable pour des rotations $-0.848 \leq q \leq -0.011$ quand $Re = 667$ (voir la table 3.7). La figure 3.8 montre l'effet de la viscosité sur ce mode. Nous constatons qu'il "surgit" pour $Re < 40$, atteint son maximum pour $Re \sim 100$ et devient stable pour $Re > 10000$. Ce mode est seulement amplifié dans le domaine $40 \leq Re \leq 10000$, comportement caractéristique d'un mode visqueux. Sa mise en évidence est impossible par une approche non-visqueuse. Les taux de croissance spatiale sont un voire deux ordres de grandeur plus grands que ceux de l'approche temporelle (10^{-3} , 10^{-2} au lieu de 10^{-4}).

3.3 L'influence de la viscosité sur les courbes de transition instable convectif-instable absolu

L'étude réalisée en fluide parfait a mis en évidence les courbes de transition instable convectif-instable absolu pour les jets ($a > -0.5$) et sillages ($a < -0.5$) tournants. Ces résultats ont été comparés avec les seuls données similaires présentées par Delbende *et al.* [22] pour un fluide visqueux. Cependant, pour des raisons numériques, ces derniers résultats sont obtenus pour la seule valeur du nombre de Reynolds $Re = 667$ (voir la figure 2.26). Les différences entre les deux séries de résultats admettent deux causes principales: la viscosité ($Re = 667$ dans le cas de Delbende *et al.* [22] et $Re = \infty$ dans le cas du fluide parfait) et la précision de la méthode d'investigation choisie pour les deux études. Dans la

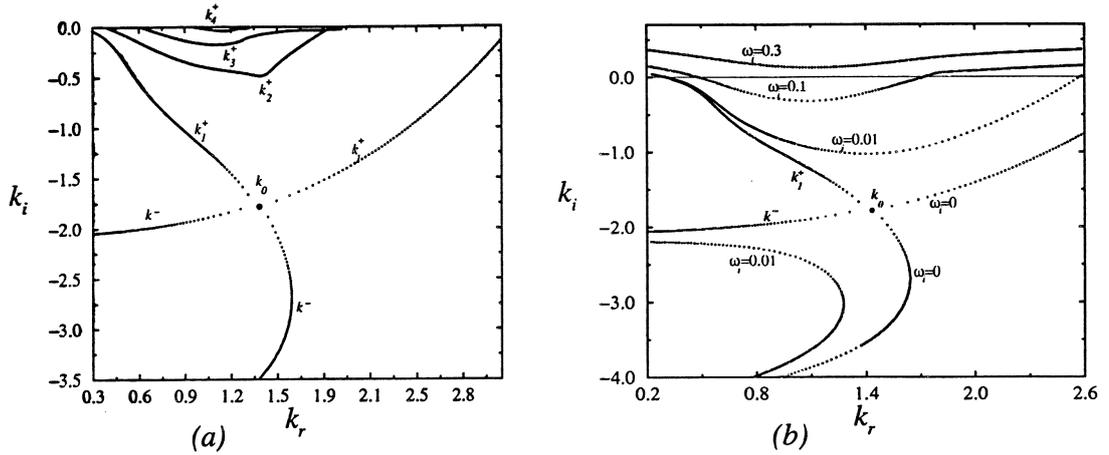


Figure 3.9: Le point selle k_0 dans le plan complexe k pour le mode azimutal $m = -3$, $a = 0.0021$, $q = 0.4$ et $Re = 667$. (a) Le point selle est le résultat du pincement des branches k_1^+ et k^- ; les autres branches spatiales amplifiées k^+ y sont indiquées. (b) Les courbes $\omega_i = cte$ autour du point selle k_0 .

branche	1	2	3	4
$\omega_{i,max}$	0.228	0.121	0.055	0.012

Table 3.8: Le taux de croissance temporel maximal des 4 branches instables pour $a = 0.0021$, $q = 0.4$, $m = -3$ et $Re = 667$.

rubrique précédente, nous avons vu que le code spectral construit pour l'étude visqueuse des branches spatiales permet le choix de toute valeur du nombre de Reynolds. Par conséquent, nous avons naturellement commencé l'étude des courbes de transition instable convectif-instable absolu pour $Re = 667$. Pour tracer ces courbes de transition nous appliquons toujours le critère de Briggs-Bers. Les branches spatiales, $-k_i(\omega)$, obtenues pour $a = 0$, sont déformées à rotation constante dans le domaine des a positifs ou des a négatifs jusqu'au moment où ces branches exhibent un point de rebroussement $-k_{i,0}(\omega_0)$. Dans le plan complexe k , ce point de rebroussement se traduit par un point selle k_0 . La figure 3.9a montre un tel point selle obtenu pour $a = 0.0021$, $q = 0.4$ et $m = -3$. Nous remarquons la présence simultanée de quatre branches k^+ amplifiées. Parmi ces quatre branches, la branche k_1^+ (celle qui correspond en fait au mode temporellement le plus amplifié) rencontre en premier une branche k^- pour donner un point selle. La "vérification" de ce point selle au sens du critère de Briggs-Bers est illustrée à la figure 3.9b. Pour des raisons de clarté, cette dernière figure procure seulement l'évolution de la branche k_1^+ et de la branche k^- correspondante quand ω_i devient positif. Les branches k_2^+ , k_3^+ et k_4^+ ont la même évolution que la branche k_1^+ , c'est-à-dire que pour un certain ω_i positif correspondant à chaque branche k^+ , celle-ci se retrouve entièrement dans le demi-plan supérieur du plan complexe k . Nous avons montré, pour le fluide parfait, que la valeur ω_i de passage dans le demi-plan supérieur du plan complexe k est la valeur d'amplification temporelle maximale $\omega_{i,max}$ pour un jeu fixé des paramètres (m, a, q). Par exemple, nous présentons à la table 3.8 la valeur $\omega_{i,max}$ correspondante à chaque branche spatialement amplifiée quand $m = -3$, $a = 0.0021$, $q = 0.4$ et $Re = 667$.

Pour un nombre azimutal m fixé nous avons tracé les courbes marginales pour différentes valeurs du nombre de Reynolds (en commençant par 667 dans la gamme des

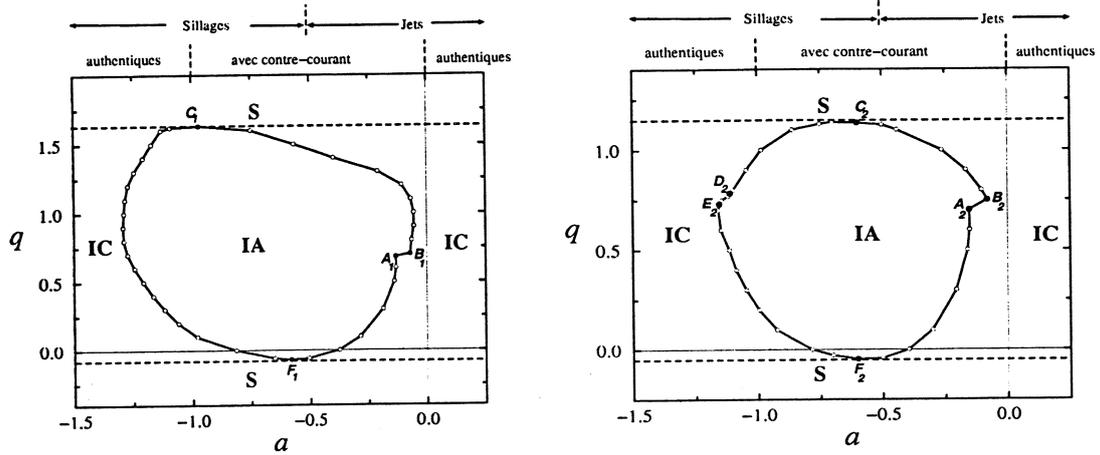


Figure 3.10: Les courbes de transition instable convectif-instable absolu dans le plan des paramètres de contrôle (a, q) pour le mode azimutal $m = -1$. (a) $Re = 667$. (b) $Re = 100$.

Reynolds moyens, ensuite 100 et 50 pour les petits Reynolds et enfin 10000 pour une grande valeur de Reynolds). Une fois les deux paramètres (m, Re) fixés, les courbes marginales sont tracées point par point (chaque petit symbole sur les courbes marginales indique la détermination d'un "bon" point selle) en général avec un pas en q ou en a (pour les portions parallèles à l'axe a) de 0.1. La courbe marginale du mode $m = -1$ obtenue pour $Re = 667$ est montrée à la figure 3.10a. Comme dans le cas du fluide parfait (voir la figure 2.19), nous retrouvons le long de l'axe a du côté jet une zone d'instabilité convective (IC), une poche d'instabilité absolue (IA) au milieu et enfin la zone d'instabilité convective du côté sillage. Nous précisons que le mode $m = -1$ se déstabilise pour $q > -0.074$ (ce qui n'est pas très différent de la valeur correspondante obtenue en fluide parfait) et se stabilise (S) aux grandes rotations pour $q > 1.63$. Les points F_1 ($a = -0.59, q = -0.074$) et C_1 ($a = -0.97, q = 1.632$) sont des points de neutralité spatiale: $k_{i,0} \sim 0$. Les branches k^+ se déstabilisent ($-k_i > 0$ et $x > 0$) alors que les branches k^- restent stables pour $a \geq a_{F_1}$ pour q faible et pour $a \geq a_{C_1}$ pour q élevé et les points de transition k_0 se situent dans le demi-plan inférieur du plan complexe k . À l'inverse, dès que $a \leq a_{F_1}$ pour q faible et $a \leq a_{C_1}$ pour q élevé, les branches k^- se déstabilisent ($-k_i < 0$ et $x < 0$) alors que les branches k^+ se stabilisent et les points de transition k_0 se situent cette fois dans le demi-plan supérieur du plan complexe k .

La courbe marginale du même mode, cette fois pour $Re = 100$, est présentée à la figure 3.10b. Dans ce cas, le premier seuil de stabilité est à $q_{F_2} = -0.05 > q_{F_1}$ et $a_{F_2} = -0.595$. Si ce seuil est peu différent de celui à $Re = 667$, le seuil de stabilité aux grandes rotations pour $Re = 100$ varie puisque $q_{C_2} = 1.14$ et $a = -0.69$. Les points A_1, B_1 (voir la figure 3.10a) et A_2, B_2 (voir la figure 3.10b) indiquent une discontinuité de la pente des courbes marginales autour de la valeur de $q = 0.7$. Cette discontinuité n'est que l'image en fluide visqueux de la discontinuité montrée pour le fluide parfait (voir les points A_0, B_0 sur la figure 2.19). Elle est due au phénomène d'échange (switching) des modes k^+ . Sur la portion $F_1 A_1$ de la courbe marginale, la transition instable convectif-instable absolu est obtenue par la branche k_1^+ alors que sur la portion $B_1 C_1$ la transition est obtenue par la branche hybride k_{2-1}^+ (voir la rubrique précédente). Du côté sillages (la portion $C_1 F_1$) la transition est assurée par une seule branche k^- . Pour $Re = 100$, du côté sillage, nous rencontrons un phénomène d'échange des deux branches k^- . Ce phénomène se produit sur

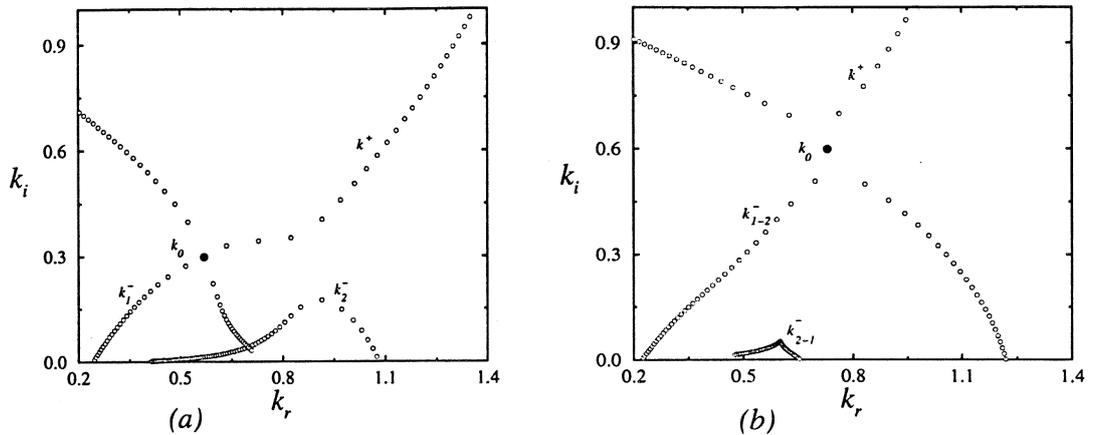


Figure 3.11: Le phénomène d'échange des branches spatiales k^- du coté sillage. (a) La branche k^+ pince avec la branche k_1^- . (b) La branche k^+ pincement avec la branche hybride k_{1-2}^- .

la figure 3.10b entre les points D_2 et E_2 . Pour cette figure, nous montrons comment une branche k^+ rencontre d'abord la branche k_1^- (point selle E_2 , voir la figure 3.11a) et ensuite la branche k_2^- (point selle D_2 , voir la figure 3.11b). Sur la portion F_2E_2 la transition est assurée par la branche k_1^- alors que sur la portion D_2C_2 la transition est donnée par la branche hybride k_{1-2}^- . La figure 3.12 nous présente les courbes de transition du mode $m = -1$ pour différents nombres de Reynolds. Nous observons que la poche d'instabilité absolue tend à diminuer au fur et à mesure que la viscosité augmente. Cette tendance est plus évidente aux grandes rotations. A $Re = 50$, l'instabilité du tourbillon de Batchelor a lieu entre $q = -0.035$ et $q = 0.83$. Nous n'avons pas considéré des nombres de Reynolds inférieurs à 50 car les hypothèses d'un écoulement de base stationnaire, parallèle et auto-similaire (sous lesquelles nous obtenons la solution de Batchelor; voir la rubrique 2.1.1) ne sont plus valables lorsque la viscosité est très grande. La viscosité a peu d'influence du coté jet ($a > -0.5$) pour les rotations modérées alors que du coté sillage ($a < -0.5$), surtout aux grandes rotations, son influence devient très importante. Nous avons aussi disposé sur la figure 3.12 la courbe marginale obtenue par Delbende *et al.* [22]. Nous observons que l'accord entre les deux résultats (à $Re = 667$) est excellent pour des rotation modérées. A la neutralité, pour des rotations négatives, un petit décalage existe alors que pour les grandes rotations les différences entre les deux courbes augmentent progressivement, tout en observant que la courbe Delbende *et al.* [22] reste pratiquement toujours à l'intérieur de notre courbe.

Les courbes marginales des modes azimutaux $m = -2$ et $m = -3$, pour les mêmes valeurs de Reynolds, sont montrées aux figures 3.13 et 3.14. A la différence du mode $m = -1$, ces courbes ne présentent plus de ruptures de pente car nous n'avons plus rencontré de phénomène d'échange entre les branches spatiales amplifiées. Pour ces deux modes, même si il y a plusieurs branches spatialement amplifiées, la branche qui se déstabilise en premier reste dominante dans tout le domaine de rotation. Les domaines d'instabilité en q de ces deux modes (selon les nombres de Reynolds considérés) sont présentés à la table 3.9. Les points de transition instable convectif-instable absolu des modes $m = -2$ et $m = -3$ sont le résultat du pincement des branches dominantes k_1^+ et k_1^- , tant du coté jet où la branche k^+ est instable que du coté sillage où la branche k^- est instable. Remarquons que ce comportement demeure valable pour le mode $m = -1$ avec le mode spatial le

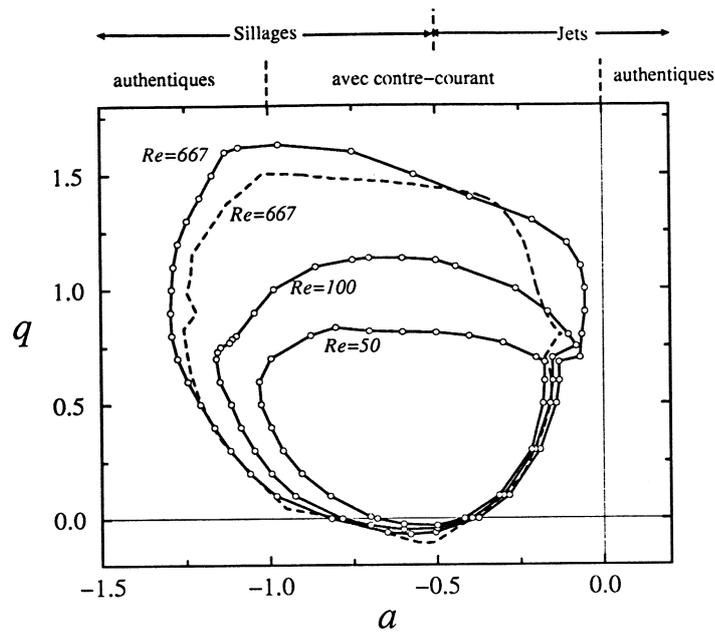


Figure 3.12: L'influence de la viscosité sur les courbes de transition instable convectif-absolu du mode azimutal $m = -1$. Les traits pointillés indiquent les résultats de Delbende *et al.* [22].

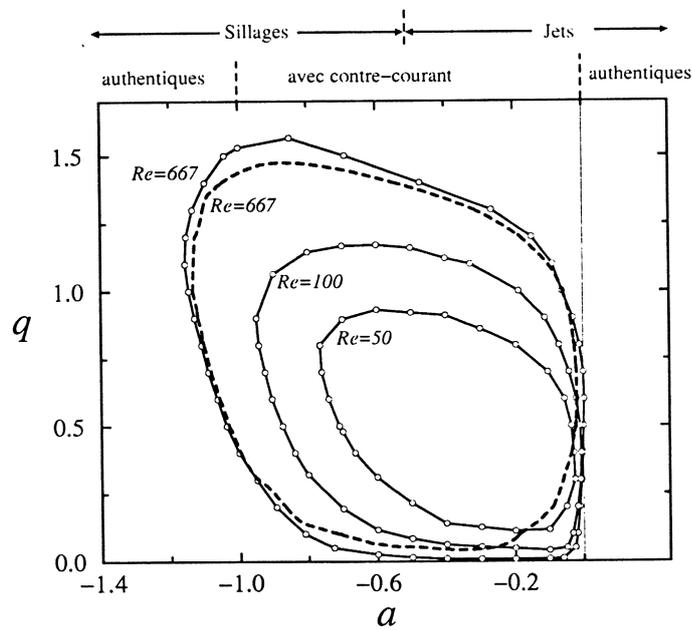


Figure 3.13: L'influence de la viscosité sur la courbe de transition instable convectif-absolu du mode azimutal $m = -2$. Les traits pointillés indiquent les résultats de Delbende *et al.* [22].

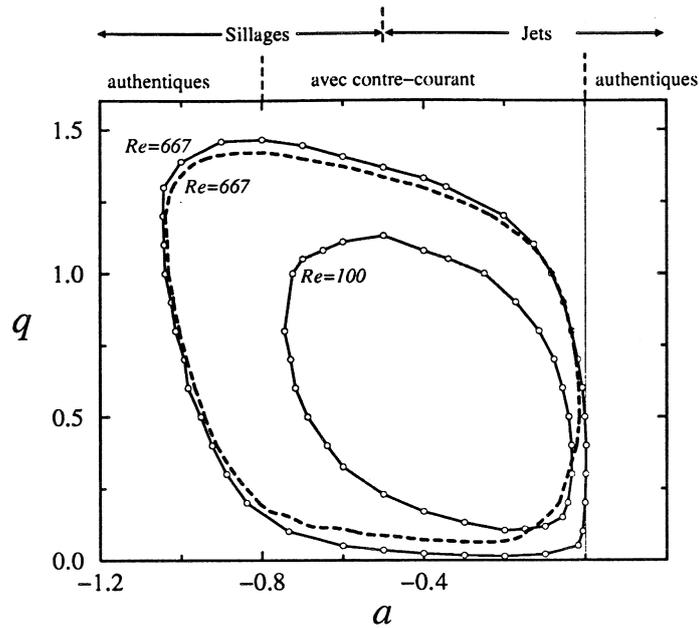


Figure 3.14: L'influence de la viscosité sur la courbe de transition instable convectif-absolu du mode azimutal $m = -3$. Les traits pointillés indiquent les résultats de Delbende *et al.* [22].

mode	q	$Re = 50$	$Re = 100$	$Re = 667$
2	q_{min}	0.109	0.04	0.007
2	q_{max}	0.929	1.17	1.565
3	q_{min}	-	0.104	0.013
3	q_{max}	-	1.295	1.465

Table 3.9: Les domaines d'instabilité spatiale en fonction du paramètre de rotation q pour les modes azimutaux $m = -2$ et $m = -3$ et pour différents nombres de Reynolds.

plus amplifié qui pince en premier, même si, temporellement, il n'est pas dominant. La comparaison de nos courbes de transition pour les modes $m = -2$ et $m = -3$ à $Re = 667$ avec celles obtenues par Delbende *et al.* [22] révèle un très bon accord pour les rotations modérées et une différence de plus en plus accentuée lorsque nous approchons des régions de stabilité. Les courbes de Delbende *et al.* [22] restent de plus à l'intérieur de nos courbes. Nous proposons plusieurs explications à ces différences. La première serait que la méthode numérique utilisée par Delbende *et al.* [22] introduit une petite viscosité numérique (due à la discrétisation) responsable surtout des différences rencontrées dans l'étude des modes au voisinage de la neutralité. La seconde explication est que Delbende *et al.* [22] calculent numériquement, pour chaque mode azimutal m , le taux de croissance temporelle $\sigma(v_g)$ observé le long du rayon $x/t = v_g = cte$ pour la réponse linéaire du tourbillon de Batchelor (dans un régime asymptotique $t \rightarrow \infty$). Pour des temps très longs, nous obtenons (voir Huerre et Monkewitz [41])

$$\sigma_m(v_g) = \sigma_m^d(v_g) + \frac{d}{dt}[\log \sqrt{t}] \quad (3.40)$$

où $\sigma_m^d(v_g)$ désigne le comportement asymptotique calculé par Delbende *et al.* [22]. La

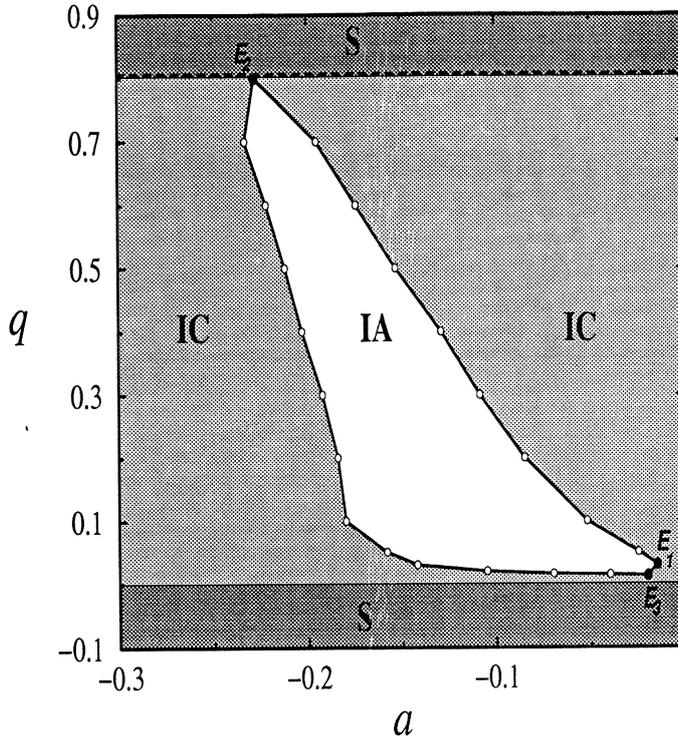


Figure 3.15: La courbe de transition instable convectif-instable absolu du mode visqueux $m = 1$ à $Re = 667$.

détermination numérique de Delbende *et al.* [22], $\sigma_m^{d,n}(v_g)$, est différente de $\sigma_m(v_g)$ avec $\sigma_m(v_g) - \sigma_m^{d,n}(v_g) = O(10^{-2}) > 0$. Au voisinage de la neutralité, cette petite différence du taux de croissance temporelle peut être une source d'erreur sur les courbes de transition qui demande une étude à $\omega_i = 0$. La troisième explication est fournie dans les conclusions de l'article de Delbende *et al.* [22], où ces auteurs remarquent que le temps fini d'intégration utilisé sous-estime l'étendue de la zone d'instabilité absolue. Ceci explique pourquoi les courbes Delbende *et al.* [22] restent pratiquement dans leur intégralité à l'intérieur de nos courbes de transition évaluées selon le critère de Briggs-Bers. Cet aspect est particulièrement mis en évidence quand nous étudions les courbes marginales au voisinage de l'axe $a = 0$. Comme nous l'avons déjà vu à la figure 2.27, les courbes de Delbende *et al.* [22] pour $m = -2$ et $m = -3$ à $Re = 667$ se placent à gauche de l'axe $a = 0$ alors que pour la même valeur de Reynolds, nos courbes traversent cet axe (voir les détails fournis par la figure 3.18). Selon nos approches, fluide parfait dans un premier temps et fluide visqueux maintenant, le tourbillon de Batchelor devient donc instable absolu en absence d'un écoulement extérieur sur une large gamme du nombre de Reynolds (de $Re \simeq 500$ à $Re = \infty$). Comme pour le mode $m = -1$, l'effet d'une viscosité croissante est de diminuer la taille des poches d'instabilité absolue des modes $m = -2$ et $m = -3$. Ainsi, pour $Re = 100$ et $Re = 50$, ces poches d'instabilité absolue sont entièrement dans le demi-plan $a < 0$. Nous nous sommes intéressés jusqu'à présent à l'effet de la viscosité sur les transitions instable convectif-instable absolu des modes non-visqueux. Dans le paragraphe 3.2.2 nous avons mis en évidence l'instabilité spatiale d'un mode visqueux asymétrique $m = \pm 1$. Nous avons étudié les propriétés de l'instabilité convective ou absolue de ce mode ainsi que

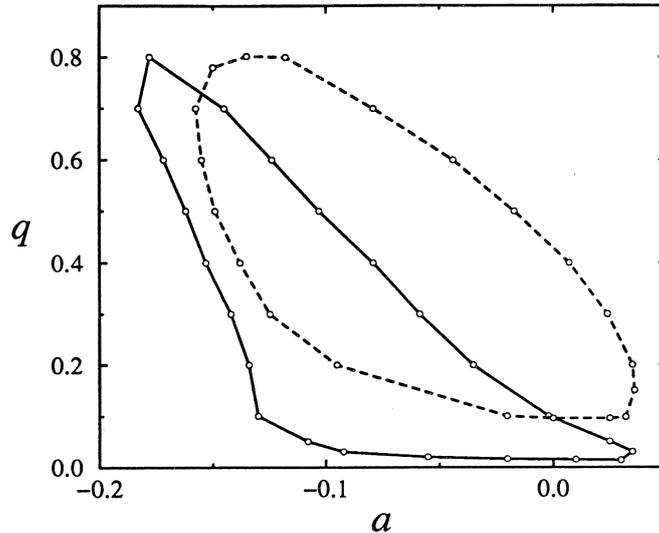


Figure 3.16: L'influence de la viscosité sur la courbe de transition instable convectif-absolu du mode visqueux $m = 1$. Traits continus: $Re = 667$. Traits pointillés: $Re = 100$.

l'effet de la viscosité sur ces propriétés. La figure 3.15 donne la courbe marginale du mode visqueux $m = 1$ à $Re = 667$. La poche d'instabilité absolue dans ce cas est située entièrement du côté jet ($a > -0.5$). La portion E_1E_2 est obtenue par pincement de la branche k^+ instable (il n'en existe qu'une seule) et d'une branche k_1^- stable alors que la portion E_2E_3 est fournie par le pincement de la même branche k^+ cette fois stabilisée et d'une autre branche k_1^- qui est instable. Quand la viscosité augmente, la poche d'instabilité absolue s'élargit (voir la figure 3.16) dans un premier temps puis diminue.

La nature de l'instabilité convective ou absolue du tourbillon de Batchelor dépend du nombre d'onde azimutal m . Pour un jeu de paramètres (m, a, q) fixé, l'écoulement de base est convectivement instable si et seulement si il est convectivement instable pour tout mode azimutal m non-visqueux ou visqueux. Pour $Re = 667$, nous montrons à la figure 3.17 le domaine d'instabilité absolue (IA) séparé par les courbes marginales de chaque mode m des deux domaines d'instabilité convective (IC). Du côté sillage, le mode $m = -1$ est critique pour toute rotation q alors que du côté jet le mode critique dépend de la rotation. Plus précisément, en partant de la stabilité (pour de faibles valeurs de q), le premier mode critique est le mode $m = -1$ pour $-0.074 \leq q \leq 0.0087$, puis le mode $m = -2$ pour $0.0087 \leq q \leq 0.0153$, le mode visqueux $m = +1$ pour $0.0153 \leq q \leq 0.042$, le mode $m = -4$ pour $0.042 \leq q \leq 0.078$, le mode $m = -3$ pour $0.078 \leq q \leq 0.466$, ensuite le mode $m = -2$ redevient critique pour $0.466 \leq q \leq 0.983$ et aussi le mode $m = -1$ pour $0.98 \leq q \leq 1.632$. Le mode $m = -4$ n'est pas représenté sur cette figure parce que (comme pour le mode $m = -5$) seule l'étude des transitions a été effectuée au voisinage de $a = 0$. Dans cette région, qui présente un intérêt particulier, nous détaillons les courbes de transitions (voir la figure 3.18). Nous remarquons que notre étude confirme partiellement les résultats de Delbende *et al.* [22] dans le sens où seul le mode $m = -4$ est critique alors que le mode $m = -5$ ne l'est pas. De plus, le mode visqueux asymétrique $m = +1$ devient critique aux faibles rotations. Comme dans le cas du fluide parfait, lorsque $Re = 667$ et $a = 0$ le tourbillon de Batchelor est absolument instable dans l'intervalle $0.225 \leq q \leq 0.7$.

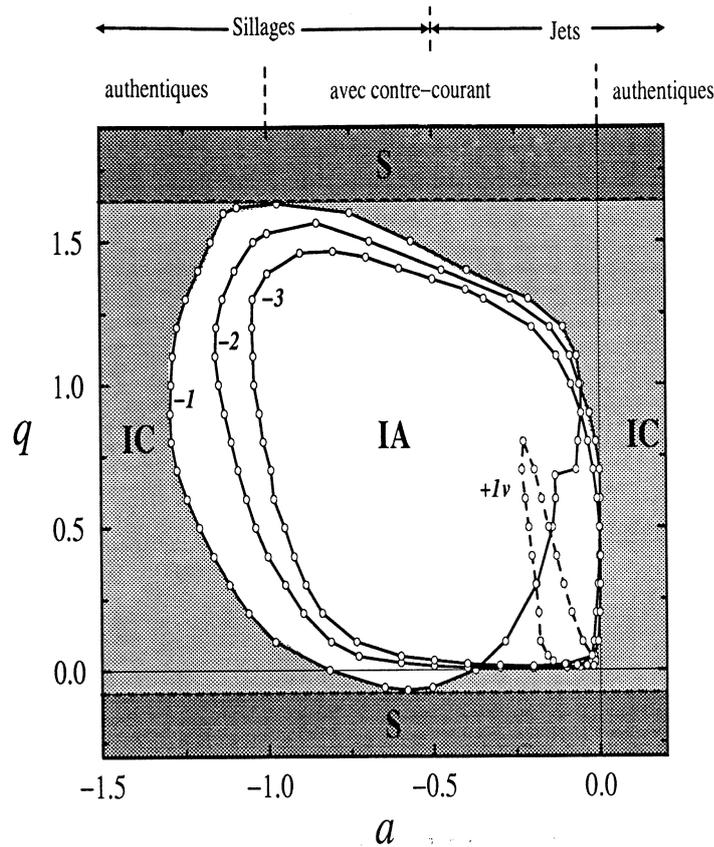


Figure 3.17: Les domaines d'instabilité absolue IA , d'instabilité convective IC et de stabilité S du tourbillon de Batchelor pour $Re = 667$. Le nombre azimutal est indiqué à côté de chaque courbe:

Lorsque la viscosité augmente, les domaines d'instabilité et le mode critique du tourbillon de Batchelor changent. Ainsi, à $Re = 100$ (voir la figure 3.19) et du côté sillage le mode $m = -1$ n'est critique que dans l'intervalle $-0.048 \leq q \leq 1.1$, le reste du domaine $1.1 \leq q \leq 1.17$ étant assuré par le mode $m = -2$. Du côté jet, le mode $m = -1$ reste critique aux faibles rotations $-0.048 \leq q \leq 0.055$ mais il est remplacé dans ce rôle aux fortes rotations par le mode $m = -2$, critique dans les intervalles $0.055 \leq q \leq 0.094$ et $0.213 \leq q \leq 1.17$. Nous remarquons que le mode visqueux $m = +1$ reste critique dans l'intervalle $0.094 \leq q \leq 0.213$. De plus à cette valeur du nombre de Reynolds, le tourbillon de Batchelor reste convectivement instable dans le cas d'un jet authentique ($a \geq 0$). Enfin, nous avons recherché le comportement des courbes marginales pour des grands nombres de Reynolds. Nous avons considéré la valeur $Re = 10000$ pour les résultats présentés à la figure 3.20 (à titre de comparaison nous avons également disposé les résultats obtenus pour $Re = 667$ et en fluide parfait). Pour des raisons numériques et des questions de temps de calcul, seuls les deux premiers modes azimutaux $m = -1$ et $m = -2$ ont été analysés. Nous remarquons d'abord qu'à ce nombre de Reynolds, comme dans le cas du fluide parfait, les résultats sont incomplets. Dans les régions où nous avons réussi à déterminer un point de transition par les deux méthodes (shooting et spectral) l'accord est excellent. Pratiquement, il n'y a pas de différences sur la portion A_0W_1 de la courbe de transition du mode $m = -1$. Au point W_1 la courbe $Re = 10000$ continue visiblement sans discontinuité vers les grandes valeurs de q . Remarquons que dans l'approche fluide parfait nous

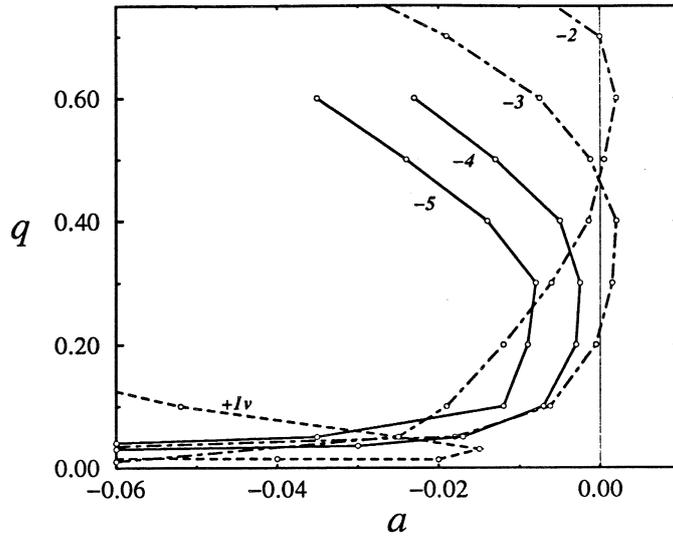


Figure 3.18: Détail des courbes de transition instable convectif-instable absolu au voisinage de $a = 0$ pour $Re = 667$. Le nombre azimutal est indiqué à côté de chaque courbe.

avons suivi, dans notre recherche des points de transition, seulement la branche spatiale qui correspondait à la branche temporelle la plus amplifiée (on appelle branche temporelle la plus amplifiée une branche qui fournit le taux de croissance temporel maximal de toutes les branches amplifiées). Comme nous l'avons déjà vu lors du phénomène d'échange des modes, la branche temporelle la plus amplifiée est aussi dominante en approche spatiale (la branche k_1^+) mais seulement sur un certain domaine en q (voir la figure 3.9b). Au-delà, les branches moins amplifiées deviennent dominantes sur certains intervalles en q . Ainsi, pour $Re = 2000$ la branche k_1^+ est dominante dans l'intervalle $-0.074 \leq q \leq 0.68$, puis la branche k_{2-1}^+ sur l'intervalle $0.68 \leq q \leq 1.36$ et enfin la branche k_3^+ reste dominante jusqu'à $q = 2.089$ (voir la figure 3.6). Ainsi, dans l'approche fluide parfait nous avons trouvé la portion W_1W_2 qui correspond à la branche k_1^- (cette branche pince avec la branche k_{2-1}^+ stable) en train de se stabiliser (à $q \simeq 1.5$) alors que les autres branches moins amplifiées assurent les transitions pour les rotations plus grandes. Ceci explique pourquoi notre courbe de stabilité continue à se développer pour $Re = 10000$ jusqu'à une valeur de $q = 3.2$ (valeur à laquelle la stabilisation de toutes les branches s'effectue). Toutes les transitions instable convectif-instable absolu de la portion W_1J de la courbe marginale $Re = 10000$ sont fournies par une branche moins amplifiée mais dominante sur le domaine de rotation. Malgré la résolution de certains des problèmes posés par le code de "shooting", le code spectral n'arrive pas à tracer en totalité les courbes marginales aux grands nombres de Reynolds. Les points critiques dont la couche critique et/ou le secteur visqueux affectent l'axe réel posent en effet des problèmes de convergence sinon de précision pour les valeurs propres calculées. La portion HB_0 de la courbe marginale en fluide parfait pour le mode $m = -1$ a besoin d'une intégration dans le plan complexe (contour 2 sur la figure 2.5b) pour la détermination des points de transition. Dans cette zone le code spectral n'arrive plus à sélectionner les valeurs propres pour $Re > 5000$. Le même phénomène a lieu aux faibles rotations de côté sillage (voir le point F' sur la figure 3.20) et sur tout le domaine de valeurs de q du côté jet pour le mode azimutal $m = -2$. Pour ce mode au point P' un problème de conditions aux limites et de point critique (voir

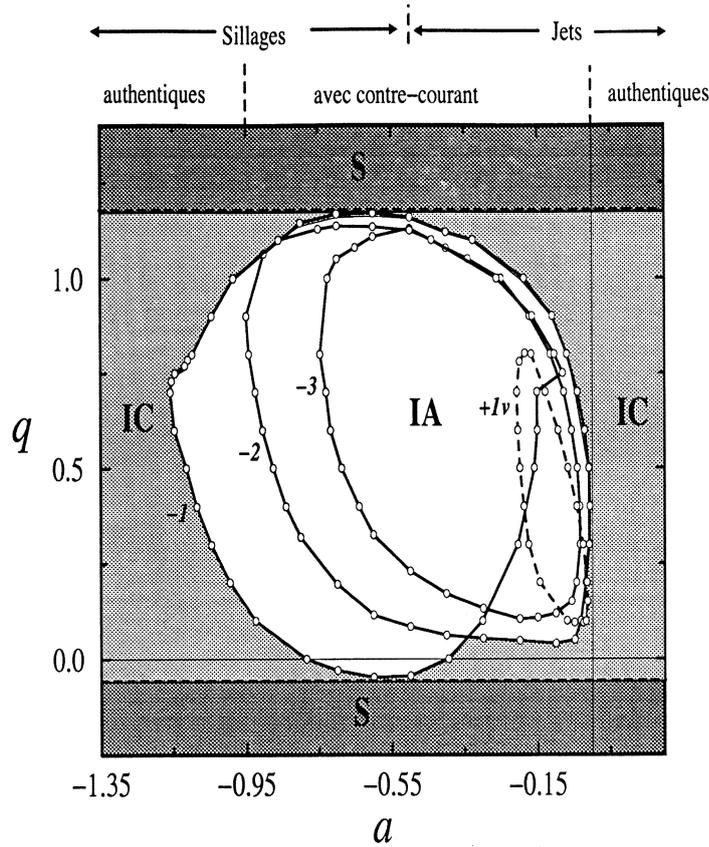


Figure 3.19: Les domaines d'instabilité absolue IA , d'instabilité convective IC et de stabilité S du tourbillon de Batchelor pour $Re = 100$. Le nombre azimutal est indiqué à coté de chaque courbe.

la rubrique 2.4) nous a conduit à tracer en fluide parfait la portion $P'F$ car le code de "shooting" a sauté sur une autre branche k^- moins amplifiée alors que la branche la plus amplifiée n'est plus accessible par la méthode de shooting (son suivi par le code spectral donne une courbe de transition différente). Enfin nous remarquons que si le point critique est loin de l'axe réel ($\delta \sim O(1)$), nous pouvons intégrer sans problème sur cet axe même si la règle fixée dans la rubrique 2.2.3 ne le permet pas. Nous avons observé que l'influence du secteur visqueux S_v n'est pas aussi forte que celle de la couche critique C_c (voir la figure 2.4). Cette influence diminue lorsque le point critique r_c est loin de l'axe réel. Des résultats obtenus tant dans l'approche fluide parfait que dans l'approche fluide visqueux aux grands nombres de Reynolds confirment cette observation.

Le résultat spectaculaire de l'étude des transitions aux grands nombres de Reynolds est l'évolution de la courbe de marginalité $Re = 10000$ aux grandes valeurs de q . Nous avons vu que pour $q < 0.7$, l'influence de la rotation ajoutée à l'effet de la viscosité n'est pas très grande et que les résultats obtenus pour $Re = 667$ diffèrent peu de ceux obtenus en fluide parfait. Par contre, pour $q > 0.7$, au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de Reynolds, le tourbillon de Batchelor a besoin d'une rotation de plus en plus grande pour se stabiliser. Pour $Re = 10000$, le mode $m = -1$ (le mode le plus étendu en q) se stabilise à $q \simeq 3.2$. Stewartson et Brown [77] trouvent qu'en fluide parfait le mode $m = -1$ du tourbillon de Batchelor reste temporellement instable aux grandes rotations sur certaines plages de la rotation q . Cette instabilité temporelle est assurée par des modes centrés (dont

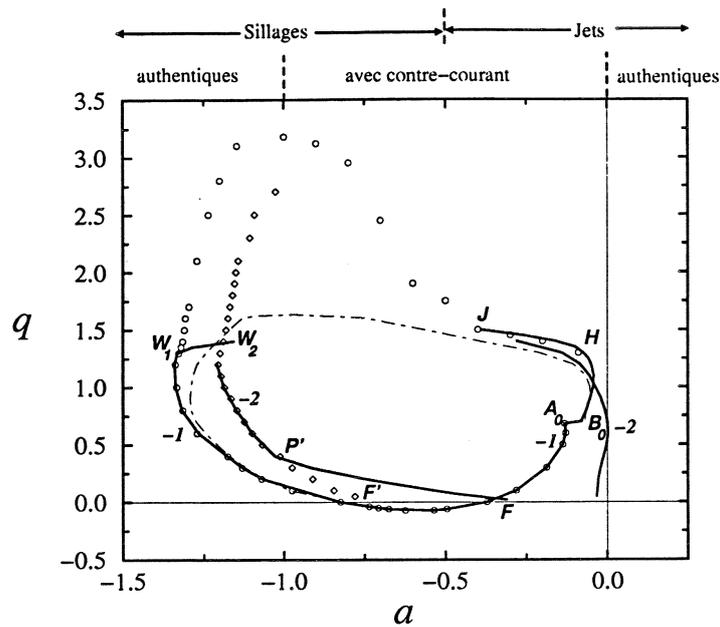


Figure 3.20: Les courbes de transition instable convectif-instable absolu des modes azimutaux $m = -1$ et $m = -2$. Ligne continue: approche fluide parfait. Symboles: approche fluide visqueux à $Re = 10000$. Ligne pointillée: approche fluide visqueux à $Re = 667$.

les fonctions propres sont concentrées près de l'axe du tourbillon) faiblement amplifiés avec un nombre d'onde axial k_r petit et qui apparaissent pour certains intervalles de rotation q . Ainsi, pour le mode $m = -1$, le mode centré apparaît neuf fois, des fois ponctuellement et d'autres fois sur des intervalles plus importantes. Le dernier intervalle d'apparition de ce mode est aussi le plus important: $3.15 \leq q^2 \leq 5.33$. Notre étude met en évidence l'existence de modes spatialement instables dont la structure est identique à celle décrite par Stewartson et Brown [77] (un k_r de plus en plus petit quand la rotation augmente, voir la figure 3.22 et des fonctions propres centrées; voir la rubrique suivante consacrée aux fonctions propres). Par contre, notre étude indique que ces modes existent toujours et non pas d'une façon intermittente. La forme de mode centré s'obtient progressivement lorsque la rotation augmente à partir de modes ayant une structure étalée (voir la figure 3.21). La même tendance à la stabilisation aux grandes rotations par des modes centrés est également observée pour le mode $m = -2$ (voir la figure 3.23d).

En ce qui concerne la transition instable convectif-instable absolu aux grandes rotations et grands nombres de Reynolds le comportement du tourbillon de Batchelor rappelle le comportement du tourbillon de Rankine en fluide parfait (le tourbillon de Rankine est donné par les profils de vitesse suivants: $U(r) = U_0 + \Delta U$, $V(r) = 0$, $W(r) = \Omega r$ pour $r < R$ et $U(r) = U_0$, $V(r) = 0$, $W(r) = \Omega R^2/r$ pour $r > R$ où Ω est le taux de rotation solide). Loiseleux *et al.* [60] présentent les courbes marginales de ce tourbillon qui ne se déstabilise pas quand $q \rightarrow \infty$. Dans cette limite, le tourbillon de Batchelor se comporte comme un écoulement rotationnel sans composante axiale de vitesse avec un gradient moyen de vortacité positif. Ainsi, Ash et Khorrami [2] montrent que ce tourbillon se stabilise temporellement pour $Re = \infty$ et $q \rightarrow \infty$ et nous nous attendons à ce qu'il se stabilise aussi spatialement. Il faut remarquer que nous nous attendons à des grandes variations en q pour la fermeture des poches d'instabilité absolues quand $Re \rightarrow \infty$ vu la différence entre les courbes de transition $m = -1$ à $Re = 667$ et à $Re = 10000$ (voir la

figure 3.20) dans cette région.

3.4 Les fonctions propres

Les fonctions propres dans le cas du fluide visqueux sont calculées à l'aide du sous-programme CGEVS en même temps que les valeurs propres correspondantes. Nous avons vu dans la rubrique des tests que l'accord entre les fonctions propres en fluide visqueux et les fonctions propres en fluide parfait est excellent. La condition de normalisation demande que le maximum sur tout le domaine, $[0, r_{max}]$, de tous les modules des fonction propres $|F|$, $|G|$, $|H|$ et $|P|$ soit égal à l'unité. Pour de raisons physiques, toutes les fonctions propres présentées sont tracées dans le cas d'un écoulement instable convectif.

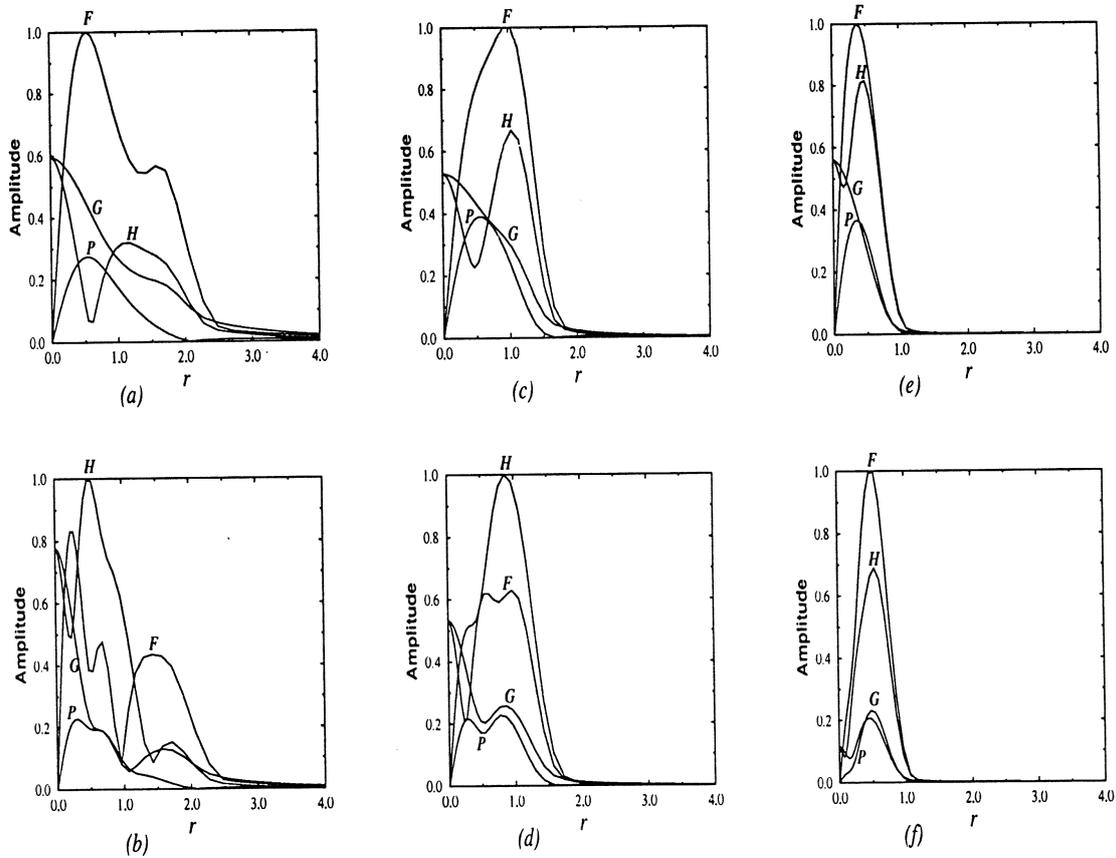


Figure 3.21: Les modules des fonctions propres des branches spatiales k_{2-1}^+ ((a), (c) et (e)) et k_{3-1}^+ ((b), (d) et (f)) du mode azimutal $m = -1$ dans le cas d'un jet authentique $a = 0$ à $Re = 2000$. (a) $q = 0.8$, $\omega = -0.2$ et $k_{2-1}^+ = (0.387, -0.222)$. (b) $q = 0.8$, $\omega = -0.2$ et $k_{3-1}^+ = (0.655, -0.133)$. (c) $q = 1.2$, $\omega = -0.5$ et $k_{2-1}^+ = (0.565, -0.128)$. (d) $q = 1.2$, $\omega = -0.5$ et $k_{3-1}^+ = (0.634, -0.071)$. (e) $q = 1.6$, $\omega = -1.05$ et $k_{2-1}^+ = (0.361, 0.02)$. (f) $q = 1.6$, $\omega = -1.05$ et $k_{3-1}^+ = (0.352, -0.025)$.

Dans ce paragraphe, les fonctions propres choisies complètent les résultats présentés en fluide parfait. Tout d'abord, nous nous sommes intéressés à l'évolution des fonctions propres aux grands nombres de Reynolds et aux grandes rotations. Les figures 3.21a, 3.21c et 3.21e montrent l'évolution des fonctions propres de la branche k_{2-1}^+ pour les paramètres de contrôle $m = -1$, $a = 0$ et $Re = 2000$ à des valeurs successives de la rotations $q = 0.8$, $q = 1.2$ et respectivement $q = 1.6$. Pour comparer, les figures 3.21b, 3.21d et 3.21f montrent

l'évolutions des fonctions propres de la branche k_3^+ aux mêmes valeurs des paramètres de contrôle. Nous remarquons que les fonctions propres des deux branches k_{2-1}^+ et k_3^+ partent d'une structure étalée pour $q = 0.8$ (où le mode k_{2-1}^+ est dominant) pour atteindre une structure centrée pour $q = 1.6$ (où le mode k_3^+ est dominant, k_{2-1}^+ étant stable, voir figure 3.6). Nous remarquons aussi que la partie réelle du nombre d'onde axiale k_r devient de plus en plus petite quand la rotation augmente, particulièrement pour la branche k_3^+ (voir la figure 3.22). Pour $Re = 10000$, la figure 3.23 présente quatre ensembles de fonctions

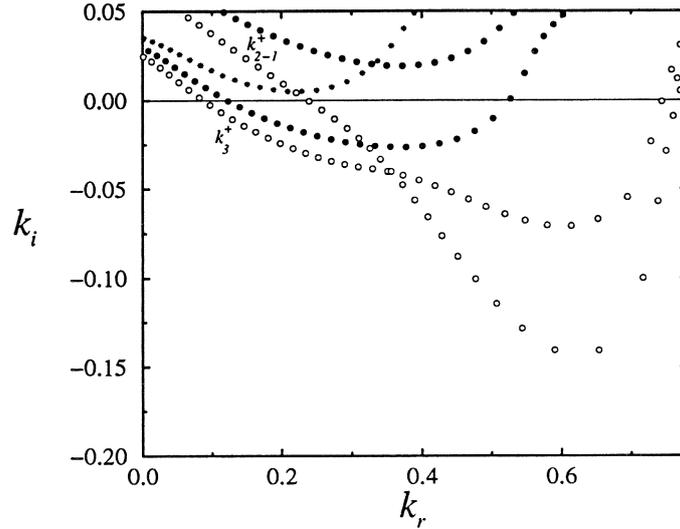


Figure 3.22: L'évolution des branches spatiales k_{2-1}^+ et k_3^+ du mode azimutal $m = -1$ dans le cas d'un jet authentique $a = 0$ aux grandes rotations quand $Re = 2000$. (o) $q = 1.2$. (●) $q = 1.6$. (★) $q = 2.2$.

propres en suivant, aux grandes rotations, les courbes marginales des modes azimutaux $m = -1$ et $m = -2$. Nous retrouvons la même évolution pour la branche k_{2-1}^+ (voir la figure 3.23(a-b)) et une forme très centrée des branches qui assurent la transition aux grandes rotations tant pour le mode $m = -1$ (voir la figure 3.23c) que pour le mode $m = -2$ (voir la figure 3.23d).

Enfin, nous présentons à la figure 3.24a la branche spatiale k_1^+ la plus amplifiée pour un jet authentique au voisinage du point selle k_0 avec $\omega_0 = -0.22$, $m = -3$, $a = 0.0021$, $q = 0.4$ et $Re = 667$ (voir la figure 3.9a). Pour rester dans le domaine d'instabilité convective nous considérons les fonctions propres d'une branche spatiale avec $a = 0.003$, $q = 0.4$, $m = -3$ et pour $Re = 667$. Nous trouvons un mode avec une structure étalée dans l'intervalle $r \in [0, 5]$. Finalement, la figure 3.24b, nous montre les fonctions propres du mode purement visqueux $m = 1$.

3.5 Conclusions

L'approche visqueuse de la stabilité linéaire d'un écoulement en rotation par une méthode de collocation spectrale développée dans ce chapitre nous fournit un outil très puissant pour étudier les branches spatiales et les transitions instable convectif-instable absolu du tourbillon de Batchelor aux différents nombres de Reynolds. Nous avons mis en évidence toutes les branches spatiales stables ou instables qui surgissent pour un jeu de paramètres (m, a, q, Re) fixé. En général, la viscosité a une influence stabilisatrice sur les branches

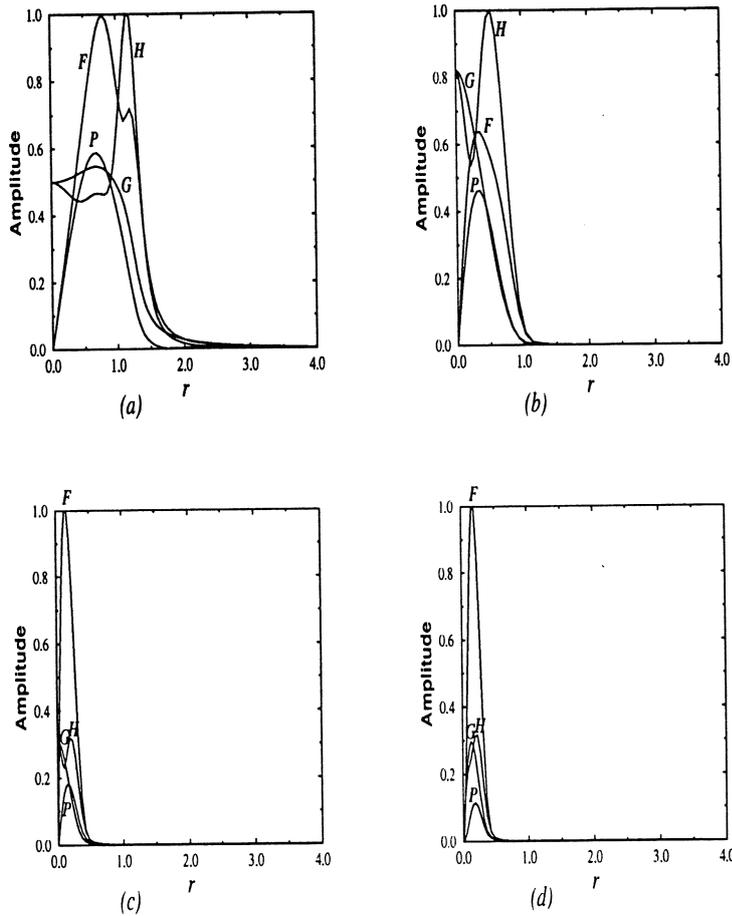


Figure 3.23: Les modules des fonctions propres au voisinage des courbes marginales aux grandes rotations et à $Re = 10000$. (a) $m = -1$, $a = -0.05$, $q = 1.2$, $\omega = -0.49$, $k_{2-1}^+ = (0.935, -0.177)$. (b) $m = -1$, $a = -0.2$, $q = 1.41$, $\omega = -0.84$, $k_{2-1}^+ = (0.687, -0.0283)$. (c) $m = -1$, $a = -1.17$, $q = 3.1$, $\omega = -3.05$, $k^- = (0.163, 0.0098)$. (d) $m = -2$, $a = -1.09$, $q = 2.5$, $\omega = -4.92$, $k^- = (0.488, 0.055)$.

spatiales de sorte que le nombre des branches instables diminue quand le nombre de Reynolds diminue. Les modes non-visqueux atteignent leur taux de croissance spatiale maximal dans la limite $Re \rightarrow \infty$. En pratique, une valeur de $Re = 10000$ est suffisante. De plus, notre étude a confirmé l'existence de modes asymétriques instables, de nature visqueuse, pour le nombre d'onde azimutal $m = \pm 1$. Dans notre approche, ces modes sont la contre-partie des modes temporellement amplifiés décrits par Khorrami *et al.* [45] et confirmés par Mayer et Powell [63]. Nous avons établi que ces modes deviennent instables dans un certain domaine des nombres de Reynolds Re modérés. Pour l'ensemble de ces modes non-visqueux ou purement visqueux, associés à $m = -1$ et à une valeur de nombre de Reynolds fixée, nous avons étudié l'influence de la rotation et de la viscosité sur le mode azimutal $m = -1$. Ainsi, nous avons observé que non seulement une branche mais plusieurs branches peuvent être successivement dominantes en fonction de l'intensité de la rotation du tourbillon. Le phénomène d'échange ("switching") des branches signalé en approche fluide parfait a été clairement visualisé par la méthode spectrale. Ensuite nous avons montré que le tourbillon de Batchelor demeure instable aux grandes rotations quand la viscosité diminue. L'instabilité du tourbillon de Batchelor au-delà de $q = 1.5$ (limite de l'instabilité fixée par Lessen *et al.* [58] et Mayer et Powell [63] en fluide parfait) est assurée

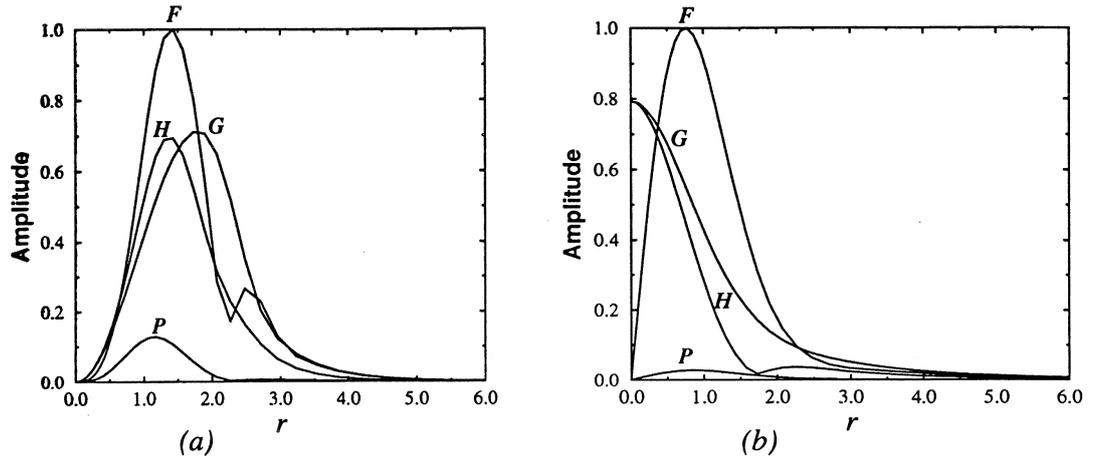


Figure 3.24: Les modules des fonction propres à $Re = 667$. (a) le mode azimutal $m = -3$ pour $a = 0.003$, $q = 0.4$, $\omega = -0.22$ et $k_1^+ = (1.443, -1.481)$. (b) le mode visqueux $m = 1$ pour $a = 0$, $q = 0.4$, $\omega = 0.035$, $k_1^+ = (0.371, -0.0078)$.

par des modes centrés, faiblement amplifiés dans le domaine des petits nombres d'onde axiaux ($k_r \rightarrow 0$). Ce résultat est la première confirmation numérique de l'instabilité du tourbillon de Batchelor aux grandes rotations prédite par l'étude asymptotique de Stewartson et Brown [77] (dans l'approche temporelle). Dans cette étude, la frontière de la stabilité temporelle du mode $m = -1$ est fixée à $q = 2.3$ alors que nous trouvons des branches spatialement amplifiées jusqu'à $q \simeq 3.2$.

Ensuite nous avons étudié l'influence de la viscosité sur les poches d'instabilité absolue des modes non visqueux et des modes visqueux. Pour des valeurs petites ou modérées du nombre de Reynolds, non seulement les modes non visqueux ($m = -1, -2, -3$ et -4) mais aussi le mode purement visqueux $m = 1$ sont critiques. Les résultats proposés montrent que pour des rotations petites et modérées ($q \leq 0.6$) il s'avère suffisant de considérer le domaine $Re \leq 1000$ car les courbes de transitions y diffèrent peu de celles obtenues en fluide parfait. Pour $Re = 667$ nos courbes confirment les résultats de Delbende *et al.* [22]. Pour les grands nombres de Reynolds, la transition instable convectif-instable absolu est donnée seulement par les modes non-visqueux (les modes purement visqueux se stabilisent) et les résultats trouvés montrent un très bon accord avec ceux obtenus en approche fluide parfait. Pour $Re = 10000$ et aux grandes rotations, la transition instable convectif-instable absolu est donnée par des modes centrés faiblement amplifiés qui deviennent dominants dans un domaine du paramètre de rotation q où les modes le plus amplifiés au valeurs intermédiaires de q sont déjà stables.

La résolution numérique de la relation de dispersion visqueuse (3.6) par une méthode spectrale nous donne donc une image globale de l'évolution de toutes les branches stables ou instables qui interviennent dans le mécanisme d'instabilité. Cette méthode fournit des résultats complets et précis dans un certain domaine du nombre de Reynolds ($Re < 5000$). Au-delà, le code peut rencontrer des problèmes de convergence dûs à la présence des points critiques au voisinage de l'axe réel. Pour surmonter cet inconvénient il faudrait discrétiser les équations (3.1)-(3.4) sur un contour complexe obtenu par déformation appropriée, dans le plan complexe du contour réel $[0, r_{max}]$.

Conclusions et perspectives

Cette thèse est une contribution à l'étude des instabilités spatio-temporelles des jets et sillages tournants modélisés par le tourbillon de Batchelor. En appliquant la méthode des modes normaux nous avons mis en évidence l'instabilité spatiale du tourbillon de Batchelor dans un premier temps pour un fluide parfait et ensuite pour un fluide visqueux. L'originalité de cette étude est l'approche spatiale de la relation de dispersion qui nous permet de détecter directement les transitions instable convectif-instable absolu en appliquant le critère de Briggs-Bers. Ainsi, nous avons tracé ces courbes de transition instable convectif-instable absolu dans l'espace de paramètres de contrôle (a, q) du tourbillon de Batchelor. L'influence de la viscosité sur ces courbes a ensuite été analysée. Pour résoudre l'équation de dispersion issue du problème aux valeurs et vecteurs propres, nous avons appliqué deux méthodes numériques différentes.

La méthode, dite de "shooting", utilisée dans l'approche fluide parfait est un outil simple et précis qui assure des résultats excellents tant qu'on arrive à maîtriser les problèmes de convergence posés par la présence de points critiques sur l'axe d'intégration. Notre travail a résolu une partie de ces problèmes et nous avons ainsi tracé pour la première fois les frontières (incomplètes) du domaine d'instabilité absolue du tourbillon de Batchelor.

Ces résultats ont été complétés et confirmés par ceux obtenus en fluide visqueux. Cette fois, la méthode de collocation spectrale développée nous a fourni un outil très puissant pour étudier les branches spatiales et les transitions instable convectif-instable absolu du tourbillon de Batchelor aux différents nombres de Reynolds. Par rapport aux autres études de stabilité du tourbillon de Batchelor (Lessen *et al.* [58], Lessen et Paillet [56], Mayer et Powell [63] et Delbende *et al.* [22]), qui s'intéressent seulement au mode temporellement le plus instable, nous avons fait une étude de toutes les branches spatiales stables ou instables qui surgissent pour un jeu de paramètres (m, a, q, Re) fixé. Les trois premiers nombres azimutaux $m = \pm 1$, $m = -2$ et $m = -3$ ont été considérés (et en partie les nombres azimutaux $m = -4$ et $m = -5$). Nous avons varié la viscosité en partant de $Re = 50$ et $Re = 100$ pour les petits nombres de Reynolds, $Re = 667$ pour les nombres moyens de Reynolds, jusqu'à $Re = 10000$ pour les grands nombres de Reynolds.

Les modes non-visqueux sont stabilisés par la viscosité et atteignent leur taux de croissance spatiale maximale à la limite $Re \rightarrow \infty$. Les modes visqueux mis en évidence (pour les nombres azimutaux $m = \pm 1$) sont instables dans une certaine gamme de Reynolds modérés. Pour les grands nombres de Reynolds, le tourbillon de Batchelor demeure instable quand $q > 1.5$. Notre étude déplace la frontière de stabilité de ce tourbillon jusqu'à $q = 3.2$ pour le nombre azimutal $m = -1$, supposé le mode le plus étendu. Nous avons mis

en évidence que l'instabilité du tourbillon de Batchelor aux grandes rotations est assurée par des modes (dominants seulement dans ce domaine de rotation) qui ne sont pas les modes temporellement le plus instable. Ces modes centrés sont faiblement amplifiés dans le domaine des petits nombres d'onde axial k_r . Ce résultat numérique confirme pour la première fois l'instabilité du tourbillon de Batchelor aux grandes rotations, prédite par l'étude asymptotique de Stewartson et Brown [77].

Pour $Re = 10000$, les courbes de transition instable convectif-instable absolu des modes azimutaux $m = -1$ et $m = -2$ montrent un accord parfait avec les courbes similaires obtenues en fluide parfait. Les poches d'instabilité absolue diminuent quand la viscosité augmente. Pour $Re = 667$, les courbes de transition instable convectif-instable absolu obtenues par notre étude montrent un très bon accord avec les résultats similaires obtenus par Delbende *et al.* [22] par simulation numérique directe. Non seulement les modes non-visqueux ($m = -1$, $m = -2$, $m = -3$ et $m = -4$) mais aussi les modes purement visqueux ($m = 1$) sont critiques. La variation de la viscosité produit des changements dans la hiérarchie de ces modes.

L'augmentation de la rotation provoque une extension du domaine du paramètre a où l'écoulement est instable absolu. Les sillages authentiques mais aussi les jets authentiques deviennent absolument instables par rotation. Ce résultat, mis en évidence pour le fluide parfait et confirmé par notre étude visqueuse pour $Re > 400$, pourrait interpréter l'éclatement tourbillonnaire comme une transition instable convectif-instable absolu. Pour $Re < 400$, les jets nécessitent un contre-courant ($a < 0$) pour devenir absolument instables. Une grande viscosité a un effet stabilisant d'autant plus important que la rotation du tourbillon augmente. Ainsi, les courbes de transition instable convectif-instable absolu aux différents nombres de Reynolds différent surtout dans le domaine des grandes rotations.

Dans un premier temps, notre étude doit être complétée par l'examen du comportement du tourbillon de Batchelor aux grands nombres de Reynolds. A part les modes azimutaux $m = -1$ et $m = -2$ (seulement du côté sillage) l'instabilité du tourbillon de Batchelor aux grandes rotations demeure inconnue quand le nombre de Reynolds devient important. Dès que $Re > 5000$, la méthode spectrale utilisée rencontre des problèmes de convergence dus à la présence des points critiques au voisinages de l'axe réel. Ainsi, il s'avère nécessaire de discrétiser le domaine d'intégration dans le plan complexe sur des contours appropriés.

La transition instable convectif-instable absolu subie par un jet authentique (pour les modes azimutaux $m = -2$ et $m = -3$) pourrait expliquer le phénomène d'éclatement tourbillonnaire. Les études expérimentales montrent aussi un éclatement en double hélice mais les formes principales d'éclatement sont axisymétriques et de forme spirale ce qui correspondrait dans notre étude au modes azimutaux $m = 0$ et $m = \pm 1$. De plus le domaine de rotations ($0.1 < q < 0.7$) dans lequel le jet pur est instable absolu est assez loin des rotations critiques observées expérimentalement ($q_c > 1.0$).

Le code spectral élaboré pour cette thèse ouvre toutefois la voie à d'autres investigations qui pourraient apporter des éléments nouveaux. Nous pensons modéliser les jets tourbillonnaires avec des profils de vitesse encore plus réalistes. Le tourbillon de Batchelor est une bonne modélisation des jets et sillages tournants, mais si on regarde les profils de vitesse mesurés dans les études expérimentales des différences existent. Notamment, la circulation $\Gamma(r)$ des profils de vitesse expérimentaux s'anule rapidement avec le rayon r du tourbillon (voir la figure 24 de l'article de Billant *et al.* [13]) alors que la circulation du tourbillon de Batchelor garde une valeur constante et non-nulle (voir la rubrique 2.1.1, la figure 2.3).

Pour surmonter cet inconvénient nous proposons dans un premier temps l'étude des transitions instable convectif-instable absolu pour d'autres profils de vitesses analytiques.

Pour la vitesse axiale, nous pouvons conserver la vitesse axiale du tourbillon de Batchelor alors que pour la vitesse azimutale nous proposons un profil du type $W(r) = (r/2) * e^{-r^\alpha}$ qui a une circulation $\Gamma(r) = (r^2) * e^{-r^\alpha}$ s'annulant quand $r \rightarrow \infty$ (le paramètre α agit sur la pente d'annulation de la circulation). Un tel profil devrait mettre en évidence des instabilités centrifuges de l'écoulement.

Enfin, il serait très intéressant d'étudier avec notre code spectral les transitions instable convectif-instable absolu des profils expérimentaux mesurés par Billant *et al.* [13]. Les profils de vitesses expérimentaux varient selon l'axe x et une étude détaillée de quelques "coupes" sur l'axe de rotation, avant et proche du lieu de l'éclatement, apporterait sans doute des éléments nouveaux pour l'explication de ce phénomène. Cela offrirait aussi l'occasion de confronter les résultats numériques aux résultats expérimentaux.

Bibliographie

- [1] Abramowitz, M. & Stegun, I. A. 1965 *Handbook of Mathematical functions*. Dover Publications, Inc., New-York.
- [2] Ash, R. L. & Khorrani, M. R. 1995 Vortex Stability in Fluid Vortices. In *Fluid Vortices*, Kluwer Academic Publishers.
- [3] Barcilon, A. I. 1967 Vortex breakdown above a stationary boundary. *J. Fluid Mech.* **27**, 155-175.
- [4] Batchelor, G. K. 1964 Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.* **20**, 645-658.
- [5] Batchelor, G. K. & Gill, A. E. 1962 Analysis of the stability of axisymmetric jets. *J. Fluid Mech.* **14**, 529-551.
- [6] Bender, C. M. & Orszag, S. A. 1978 *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill Book Company, New-York.
- [7] Benjamin, T. B. 1962 Theory of the vortex breakdown phenomenon. *J. Fluid Mech.* **14**, 593-629.
- [8] Benjamin, T. B. 1965 Significance of the vortex breakdown. *J. Basic Engng. trans. A.S.M.E., Series D.* **87**, 518-524, 1091-1092.
- [9] Benjamin, T. B. 1967 Some developments in the theory of vortex breakdown. *J. Fluid Mech.* **28**, 65-84.
- [10] Bergman, K. H. 1969 On the dynamic instability of convective atmospheric vortices. Ph.D. Thesis, Dept. of Atmospheric Sciences, University of Washington.
- [11] Bers, A. 1983 Space-time evolution of plasma instabilities-absolute and convective. In *Handbook of Plasma Physics*, Eds. M. N. Rosenbluth & R. Z. Sagdeev, Amsterdam, North-Holland, I 451-517.
- [12] Bilanin, A. J. & Widnall, S. E. 1973 Aircraft wake dissipation by sinusoidal instability and vortex breakdown. *AIAA Paper*, 73-107.
- [13] Billant, P., Chomaz, J. M. & Huerre, P. 1998 Experimental study of vortex breakdown in swirling jets. *J. Fluid Mech.* **376**, 183-219.
- [14] Bippes, H. 1972 *Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss. Math. Naturwiss. Kl.* **3**, 103-180.
- [15] Breuer, M. & Hänel, D. 1989 Solutions of the 3-D incompressible Navier-Stokes equations for the simulation of vortex breakdown. *Proc. of the 8th GAMMM-Conf. on Numerical Methods in Fluid Mechanics*.

- [16] Briggs, R. G. 1964 *Electron-Stream Interaction with Plasmas*. Cambridge, Mass. MIT Press.
- [17] Brucker, C. 1993 Study of vortex breakdown by particle tracking velocimetry (ptv). Part 2: spiral type. *Exp. in fluids* **14**, 133-139.
- [18] Brucker, C. Althaus, W. Study of vortex breakdown by particle tracking velocimetry (ptv). Part 1: bubble type vortex breakdown. *Exp. in fluids* **13**, 339-349.
- [19] Burgers, J. M. 1948 A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech.* **1**, 171-199.
- [20] Chevalier, H. 1973 Flight test studies of formation and dissipation of trailing vortices. *J. Aircraft* **10**, 14-18.
- [21] Cotton, F. W. & Samwen, H. 1981 Linear stability of rotating Hagen- Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **108**, 101-125.
- [22] Delbende, I., Chomaz, J. M. & Huerre, P. 1998 Absolute/Convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response. *J. Fluid Mech.* **355**, 229-254.
- [23] Delery, J. M. 1994 Aspects of vortex breakdown. *Prog. in Aerospace Sci.* **30**, 1-59.
- [24] Delery, J. M., Pagan, D. & Solignac, J. L. 1987 On the breakdown of the vortex induced by a delta wing. Vortex Control and Breakdown Behaviour, *Second International Colloquium on Vortical Flows*, Baden, Switzerland, 6-7 April.
- [25] Drazin, P. G. & Reid, W. 1981 *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
- [26] Duck, P. W. & Foster, M. R. 1980 The inviscid stability of a trailing line vortex. *Angew. Math. Phys.* **31**, 524-532.
- [27] Duck, P. W. & Khorrami, M. R. 1992 A note on the effects of viscosity on the stability of a trailing-line vortex. *J. Fluid Mech.* **245**, 175-189.
- [28] Elle, B. J. 1958 On the breakdown at high incidence of the leading edge vortices on delta wing, *ARC, R&M 3176*.
- [29] Escudier, M. 1988 Vortex breakdown: observations and explanations. *Prog. in Aerospace Sci.* **25**, 189-229.
- [30] Faler, J. H. & Leibovich, S. 1977 Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown. *Phys. Fluids* **20**, 1385-1400.
- [31] Faler, J. H. & Leibovich, S. 1978 An experimental map of the internal structure of the vortex breakdown. *J. Fluid Mech.* **86**, 313-335.
- [32] Garg, A. K. & Leibovich, S. 1979 Spectral characteristics of vortex breakdown flow-fields. *Phys. Fluids* **22**, 2053-2064.
- [33] Fiechter, M. 1969 *Jahrb. 1969 DGLR*, 77-85.
- [34] Gatski, T. B. & Spall, R. E. 1991 Numerical studies of vortex breakdown: from helices to bubbles. *Fourth Int. Symposium on Comp. Fluid Dynamics. I*, 418-423.

- [35] Hall, M. G. 1967 A new approach to vortex breakdown. *Proc. Heat Transfer Fluid Mech.* Stanford Univ. Press, 319-340.
- [36] Gotlieb, D. & Orszag, S. A. 1977 *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. Soc. Indus & Appl. Math., Philadelphie.
- [37] Hall, M. G. 1972 Vortex breakdown. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **4**, 195-218.
- [38] Head, M. R. 1982 In *Flow Visualisation II*, ed. W. Merzkirch, Washington: Hemisphere, 399-403.
- [39] Howard, L. N. & Gupta, A. S. 1962 On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows. *J. Fluid Mech.* **14**, 463-476.
- [40] Huerre, P. & Monkewitz, P. A. 1985 Absolute and convective instabilities in free shear layers, *J. Fluid Mech.* **159**, 151-168.
- [41] Huerre, P. & Monkewitz, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473-537.
- [42] Huerre, P. 1987 Spatio-temporel instabilities in closed and open flows. In *Instabilities and Nonequilibrium Structures*, ed. Tirapegui, D. Villaroel.
- [43] Huerre, P. & Rossi, M. 1998 Hydrodynamic instabilities in open flows. In *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*, edited by C. Godrèche and P. Manneville, Cambridge University Press, 81-294.
- [44] Lord Kelvin, 1880 Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag.* **X**, 155-168.
- [45] Khorrami, M. R. 1991 On the viscous modes of instability of a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.* **255**, 197-212.
- [46] Khorrami, M. R. 1992 Behavior of asymmetric unstable modes of a trailing line vortex near the upper neutral curve. *Phys. Fluids A.* **4**, 1310-1313.
- [47] Khorrami, M. R. , Malik, M. R. & Ash, R. L. 1989 Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows. *J. Comput. Phys.*, **81**, 206-229.
- [48] Krause, E. 1985 A contribution to the problem of vortex breakdown. *Comp. Fluids* **13**(3), 375-381.
- [49] Krause, E. & Menne, S. 1987 Investigation of vortex breakdown by numerical solution of the Navier-Sokes equations. Vortex Control and Breakdown Behaviour, *Second International Colloquim on Vortical Flows*, Baden, Switzerland, April 6-7.
- [50] Krause, E. & Althaus, W. 1992 Vortex breakdown: mechanism of initiation and change of mode. *Workshop on Analysis and Testing of High Angle of Attack Aerodynamics*, Tokyo, Japan.
- [51] Lambourne, N. C. & Bryer, D. W. 1961 The bursting of leading-edge vortices - some observations and discussion of the phenomenon. Aeronautical Research Council, Reports & Memoranda R. & M. No. 3282, 1-36.
- [52] Le Dizès, S., Monkewitz, P.A. & Huerre, P. 1995 Viscous structure of plane waves in spatially developing shear flows. *Phys. Fluids* **7**, 1337-1347.

- [53] Leibovich, S. 1978 The structure of vortex breakdown. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **10**, 221-246.
- [54] Leibovich, S. 1984 Vortex stability and breakdown: Survey and extension. *AIAA J.* **22**, 1192-1206.
- [55] Leibovich, S. & Stewartson, K. 1983 A sufficient condition for the instability of columnar vortices. *J. Fluid Mech.* **126**, 335-356.
- [56] Lessen, M. & Paillet, F. 1974 The stability of a trailing line vortex. Part 2. Viscous theory. *J. Fluid Mech.* **65**, 769-779.
- [57] Lessen, M. & Singh, P. J. 1974 The stability of axisymmetric free shear layers. *J. Fluid Mech.* **60**, 433-457.
- [58] Lessen, M., Singh, P. J., & Paillet, F., 1974 The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory. *J. Fluid Mech.* **63**, 753-763.
- [59] Lin, C.C. 1955 *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Pres.
- [60] Loiseleux, T., Chomaz, J. M. & Huerre, P. 1998 The effect of swirl on jets and wakes: Linear instability of the Rankine vortex with axial flow. *Phys. Fluids* **10**, 1120-1134.
- [61] Malik, M. R., Zang, T. A. & Hussaini, M. Y. 1985 A spectral Collocation Method for the Navier-Stokes Equations. *J. Comput. Phys.* **61**, 64-88.
- [62] Martin, J. E. & Meiburg, E. 1996 Nonlinear axisymmetric and three-dimensional vorticity dynamics in a swirling jet model. *Phys. Fluids* **8**, 1917-1928.
- [63] Mayer, E. W. & Powell, K. G. 1992 Viscous and inviscid instabilities of a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.* **245**, 91-114.
- [64] Olendraru, C., Sellier, A., Rossi, M. & Huerre, P. 1996 Absolute/convective instability of the Batchelor vortex. *C. R. Acad. Sci. Paris* **323**, Iib, 153-159.
- [65] Orszag, S. A. 1971 *J. Fluid Mech.*, **50**, 689.
- [66] Orszag, S. A. & Israeli M. 1974 Numerical Simulation of Viscous Incompressible Flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **6**, 281-317.
- [67] Pagan, D. & Benay, R. 1988 Etude numérique de l'éclatement des tourbillons soumis à des gradients de pression. *La Recherche Aerostatiiale* **1**, 251-263.
- [68] Pagan, D. & Solognac, J. L. 1986 Etude expérimentale de l'éclatement tourbillonnaire en air incompressible. Ph. D. Thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [69] Peake, D. J. & Tobak, M. 1983 On issues concerning flow separation and vortical flows in three dimensions. *AGARD CP* **342**.
- [70] Peckham, D. H. & Atkinson, S. A. 1957 Preliminary results of low speed wind tunnel tests on a gothic wing of aspect ratio 1.0. A.R. C. Technical report C. P. No. 508. TN No. Aero. 2504.
- [71] Lord Rayleigh 1916 On the dynamics of revolving fluids. *Proc. R. Soc. Lond. A* **93**, 148-154.

- [72] Sarpkaya T. 1971 On stationary and traveling vortex breakdown. *J. Fluid Mech.* **45**, 545-559.
- [73] Sarpkaya, T. 1995 Turbulent vortex breakdown. *Phys. Fluids* **7**(10), 2301-2303.
- [74] Solignac, J. L. & Pagan, D. 1985 Etude expérimentale des conditions d'éclatement d'un tourbillon d'aile delta. *Proceedings of the 10th Canadian Congress of Applied Mechanics* **2**, London, Ontario, June 2-7.
- [75] Spall, R. E., Gatki, T. B. & Ash, R. L. 1990 The structure and dynamics of bubble-type vortex breakdown. *Proc. R. Soc. London A* **429**, 613-637.
- [76] Squire, H. B. 1960 Analysis of "vortex breakdown" phenomenon. Technical report 102, Aeronautics Department, Imperial College, London.
- [77] Stewartson, K. & Brown, S. 1985 Near-neutral centre-modes as inviscid perturbations to a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.* **156**, 387- 399.
- [78] Stewartson, K. & Capell, K. 1985 On the stability of ring modes in a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.* **156**, 369-386.
- [79] Stewartson, K. & Leibovich, S. 1987 On the stability of a columnar vortex to disturbance with large azimuthal wavenumber: the lower neutral points. *J. Fluid Mech.* **178**, 549-566.
- [80] Stuart, J. T. 1987 A critical review of vortex-breakdown theory. Vortex Control and Breakdown Behaviour, *Second International Colloquium on Vortical Flows*, Baden, Switzerland, April 6-7.
- [81] Swithenbank, J. & Chigier, N. 1969 Vortex mixing for supersonic combustion. *12th Symp. Combust. Inst.*, 1153-1162.
- [82] Synge, J. L. 1933 The stability of heterogenous liquids. *Trans. Roy. Soc. Canada* **27**, 1-18.
- [83] Tardiff, C. 1997 Les tourbillons de sillage sous surveillance. *Air & Cosmos*, **1637**, 19.
- [84] Tsai, C. Y. & Widnall, S. E. 1980 Examination of a group-velocity criterion for breakdown of vortex flow in a divergent duct. *Phys. Fluids* **23**, 864-870.
- [85] Wang, S. & Ruzak, Z. 1995 On the stability of an axisymmetric rotating flow in a pipe. *Phys. Fluids* **8**, 1007-1016.
- [86] Wasow, W. 1948 The complex asymptotic theory of a fourth-order differential equation of hydrodynamics. *Ann. Math.* **49**, 852.

Annexe A

L'objectif de cette annexe est de prouver que l'équation qui fournit les points critiques, $\gamma(r) = 0$, admet au maximum deux solutions avec $Re(r) \geq 0$ quand $mq \neq 0$. La démonstration demeure valable dans le cas où $mq = 0$ si $(k, \omega) \neq (0, 0)$.

En faisant le changement de variable $u = r^2$, l'équation (2.23) s'écrit sous la forme

$$\Gamma(u) \equiv -\omega + k[a + e^{-u}] + \frac{mq}{u}(1 - e^{-u}) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Supposons que pour un couple $(k, \omega) \neq (0, 0)$ donné trois racines différentes et non nulles u_1, u_2, u_3 existent pour l'équation (A.1). Dans ce cas, le couple (k, ω) satisfait les équations linéaires suivantes

$$\omega - k[a + e^{-u_1}] = \frac{mq}{u_1}(1 - e^{-u_1}), \quad (\text{A.2})$$

$$\omega - k[a + e^{-u_2}] = \frac{mq}{u_2}(1 - e^{-u_2}), \quad (\text{A.3})$$

$$\omega - k[a + e^{-u_3}] = \frac{mq}{u_3}(1 - e^{-u_3}). \quad (\text{A.4})$$

En sachant que $u_1 \neq u_2$, les équations (A.2)-(A.3) peuvent être résolues pour k et ω tel que

$$k = k(u_1, u_2) = \frac{mq[(1 - e^{-u_2})u_2^{-1} - (1 - e^{-u_1})u_1^{-1}]}{e^{-u_2} - e^{-u_1}}, \quad (\text{A.5})$$

$$\omega = \omega(u_1, u_2) = k(u_1, u_2)(a + e^{-u_1}) + \frac{mq}{u_1}(1 - e^{-u_1}). \quad (\text{A.6})$$

Dans le cas où $mq \neq 0$ alors, conformément à (A.5), $k \neq 0$. L'ensemble (k, ω) donné par (A.5) et (A.6) satisfait aussi la troisième équation (A.4) telle que

$$a + e^{-u_3} = a + e^{-u_1}; (1 - e^{-u_3})u_1 = (1 - e^{-u_1})u_3. \quad (\text{A.7})$$

Ces conditions imposent $u_1 = u_3$. Ainsi, nous avons démontré que l'équation $\Gamma(u) = 0$ admet au maximum deux solutions distinctes u_1 et u_2 . En sachant que $u = r^2$, l'équation $\gamma(r) = 0$ admet ainsi au maximum deux solutions distinctes $r_{c,1}$ et $r_{c,2}$ telles $Re[r] \geq 0$.

Dans le cas où $mq = 0$, conformément à (A.5)-(A.6), il est nécessaire que $(k, \omega) = (0, 0)$ pour que le système (A.2)-(A.4) soit identiquement satisfait. Si $(k, \omega) \neq (0, 0)$, alors l'équation (A.1) admet au maximum une solution.

Annexe B

Absolute/convective instability of the Batchelor vortex

Cornel OLENDRARU, Antoine SELLIER, Maurice ROSSI and Patrick
HUERRE

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 323, Série IIb, p. 153-159, 1996.

Absolute/convective instability of the Batchelor vortex

Cornel OLENDRARU, Antoine SELLIER, Maurice ROSSI and Patrick HUERRE

C. O., A. S. and P. H. : Laboratoire d'Hydrodynamique (LadHyX),
École Polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX, France ;

M. R. : Laboratoire de Modélisation en Mécanique (LMM),
Université Paris-VI, Tour 66, 4, place Jussieu, 75252 Paris CEDEX 05, France.

Abstract. The absolute/convective nature of the instability sustained by the Batchelor vortex is determined in the plane of swirl and co-flow parameters for different azimuthal wavenumbers. Swirl is shown to induce a transition to absolute instability for jets and wakes without requiring any counter-flow. The transitional helical mode is $n = -1$ for wakes and $n = -2$ or $n = -3$ for co-flowing jets.

Transition instable absolu/instable convectif pour le tourbillon de Batchelor

Résumé. La nature convective ou absolue de l'instabilité du tourbillon de Batchelor est déterminée dans le plan des paramètres de contrôle (vitesse axiale à l'infini-taux de rotation) pour différentes valeurs du nombre d'onde azimuthal. La rotation provoque une transition convectif/absolu dans les jets et les sillages, même en absence de contre-courant. Le mode azimuthal de transition est $n = -1$ pour les sillages et $n = -2$ ou $n = -3$ pour les jets sans contre-courant.

Version française abrégée

Cette Note propose une étude spatio-temporelle, au sens de la stabilité linéaire, d'un écoulement de base de type tourbillon de Batchelor. En coordonnées cylindriques les vitesses axiale et orthoradiale associées U, W obéissent aux relations (1). Notons que ces vitesses et la variable radiale r sont adimensionnées respectivement par la différence entre la vitesse axiale sur l'axe et à l'infini et par la taille typique du cœur visqueux (Batchelor, 1964). Cette distribution de vitesses comporte deux

Note présentée par Pierre PERRIER.

paramètres de contrôle : le paramètre a de vitesse axiale en $r = \infty$ et le paramètre q de rotation (qui compare les vitesses orthoradiale et axiale). Ceci permet de traiter plusieurs situations pratiques : le jet avec éventuellement un écoulement à l'infini ($a \geq 0$) ; le jet avec contre-courant ($-1 < a < 0$) et le sillage avec éventuellement un écoulement à l'infini ($a \leq -1$). Selon les études théoriques et expérimentales (Batchelor, 1964 ; Faler et Leibovich, 1977) l'écoulement (1) reproduit correctement la configuration de base intervenant dans le problème de l'éclatement tourbillonnaire.

En recherchant des perturbations à l'écoulement de base sous la forme de l'onde (2) de pulsation complexe ω , de nombres d'onde axial complexe k et azimuthal n , entier relatif, le problème se ramène (Lessen et al., 1974), grâce aux fonctions auxiliaires γ et Z définies par (3), au problème aux valeurs propres (4), (5) pour l'inconnue Z . Pour (n, a, q) donné, il existe en effet une solution non nulle si et seulement si le couple (k, ω) satisfait la relation de dispersion (6). On appelle alors branche spatiale $k = k(\omega; n, a, q)$ toute solution de l'équation de dispersion obtenue avec ω réelle. Seule une résolution numérique s'avère possible. Dans ce but, (4) est réécrite sous la forme d'un système différentiel du premier ordre et d'inconnue (Z, Z') . Ce système est alors intégré, dans le plan complexe r , le long de deux contours ayant pour extrémité commune un complexe r_A et issus d'un voisinage de l'origine ou de l'infini dans lequel le comportement asymptotique de la solution est exploité. La relation de dispersion s'écrit en fait $W(k, \omega; n, a, q) \equiv Z_1 Z_2' - Z_2 Z_1' = 0$, où W est le Wronskien associé aux solutions (Z_1, Z_1') et (Z_2, Z_2') prédites en r_A par l'intégration le long de chacun des deux contours. En pratique, cette égalité est numériquement assurée à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson, à condition de disposer d'une solution approchée (k, ω) .

Dans le cas le plus favorable (Huerre et Monkewitz, 1990) les branches $k = k(\omega; n, a, q)$ solutions de l'équation de dispersion présentent le comportement suivant : pour $\omega_i = 0$ on trouve deux branches spatiales k^\pm associées aux domaines $\pm x > 0$ situées entièrement dans le demi-plan $\pm k_i > 0$ pour ω_i assez grand et se rencontrant, lorsque ω_i décroît, en un point $k_0(\omega; n, a, q)$ tel que $\partial\omega/\partial k(k_0) = 0$ avec $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$ et $\omega_{0,i} = \text{Im}(\omega_0)$. Dans un tel cas si $\omega_{0,i} > 0$ ($\omega_{0,i} < 0$) l'écoulement est absolument (convectivement) instable. Selon ce critère la transition instable absolu/instable convectif peut s'observer pour $\omega_{0,i} = 0$, c'est-à-dire dans le cadre d'une étude spatiale de stabilité : il suffit donc de se donner ω réel et d'étudier les branches spatiales $k = k(\omega; n, a, q)$.

Trois figures illustrent nos résultats. La figure 1 représente, pour $n = -1$, le taux de croissance spatiale $-k_i^+$ de la branche spatiale k^+ en fonction de ω réel et du paramètre de rotation q . Ce dernier a un effet déstabilisant pour des valeurs $q < 0,5$ et un effet stabilisant au-delà. Il faut en outre vérifier le bon comportement, en fonction de ω_i croissant, des branches k^+ et k^- au voisinage du point selle k_0 . La figure 2 illustre pour le mode $n = -2$, $a = 0,0022$, c'est-à-dire pour un jet avec un léger courant à l'infini, et $q = 0,6$ un tel exemple de point selle k_0 de transition instable absolu/instable convectif, dans le plan complexe k . En appliquant le critère portant sur le signe de $\omega_{0,i}$ nous avons déterminé pour les modes $n = \pm 1, -2, -3$ (en partie pour $n = -3$), dans le plan (a, q) des paramètres de contrôle, les régions d'instabilité absolue et convective et les courbes de transition associées (fig. 3). Ainsi, pour $q = 0$ le tourbillon de Batchelor en jet ou à un sillage pur sans rotation qui s'avèrent absolument instables, en présence de contre-courant suffisamment intense, pour les modes $n = \pm 1$ dans la gamme $-0,8 \leq a \leq -0,4$. Lorsque le taux de rotation q augmente, le domaine instable absolu s'étend de façon très significative (fig. 3) pour contaminer des régimes sans contre-courant. La transition convectif/absolu met en jeu des nombres d'ondes azimuthaux différents pour le cas d'un jet ou d'un sillage. Ainsi, du « côté » sillage ($a < -1$), le mode hélicoïdal critique est $n = -1$ et il apparaît pour des valeurs modérées de q sans qu'il y ait contre-courant. Du « côté » jet sans contre-courant ($a \geq 0$), le mode hélicoïdal critique est soit $n = -3$ pour $0,1 < q < 0,5$, soit $n = -2$ pour $0,5 < q < 0,7$. Enfin, les jets avec léger contre-courant deviennent instables absolus pour $n = -1$ aux valeurs élevées de q .

En conclusion, ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus par simulation numérique directe de la réponse impulsionnelle du tourbillon de Batchelor (Delbende *et al.*, 1996). La présence d'une transition instable convectif/instable absolu pour les modes $n = -2$ et $n = -3$ au voisinage de $a = 0$, pourrait expliquer certains phénomènes instationnaires observés dans les jets tournants en présence d'éclatement.

1. Introduction

Over the past few decades, numerous hydrodynamic stability studies of vortices with axial flow have been carried out in order to arrive at a satisfactory description of the vortex breakdown phenomenon. Early on, Benjamin (1962) put forward the idea that vortex breakdown is somewhat akin to a hydraulic jump: it can be viewed as a sudden transition from a supercritical flow that can only sustain downstream-travelling waves to a subcritical flow that can sustain both upstream and downstream travelling waves. These notions, which were initially restricted to low-wavenumber non-dispersive waves, were subsequently extended, in a somewhat ad-hoc fashion, to the case of dispersive temporal instability waves of arbitrary wavenumber (Tsai and Widnall, 1980).

The purpose of the present Note is to reexamine these ideas in the context of a consistent spatio-temporal instability analysis: supercritical/subcritical flows should more generally be viewed as basic states that are convectively/absolutely unstable, in the same spirit as for other shear flows (*see* Bers, 1983; Huerre and Monkewitz, 1990, among others, for thorough reviews of these concepts). The Batchelor $a - q$ vortex is selected here as an appropriate basic state. Previous strictly temporal instability analyses of the same flow have been performed in the inviscid case (Lessen *et al.*, 1974; Leibovich, 1983), and in the fully viscous case (Lessen and Paillet, 1974; Khorrami, 1991). The main result of our spatio-temporal investigation is the determination of the absolute/convective instability transition curves in the space of control parameters pertaining to the Batchelor vortex.

2. Eigenvalue problem

Slowly evolving trailing vortices are satisfactorily approximated (Batchelor, 1964; Faler and Leibovich, 1977) in the axial x, r, θ cylindrical coordinate system, by the axial and azimuthal velocity distributions

$$(1) \quad u = U(r) \equiv a + e^{-r^2}, \quad v \equiv 0, \quad w = W(r) \equiv q[1 - e^{-r^2}]/r.$$

The above profiles have been non-dimensionalized by selecting as length scale the typical size of the vortex core and as velocity scale the difference between the centreline axial velocity and the free-stream axial velocity at $r = \infty$. The Batchelor vortex solution (1) defines a two-parameter family of basic flows: the swirl parameter q is a non-dimensional measure of the maximum azimuthal velocity while the co-flow parameter a is a measure of the free-stream axial velocity far from the axis. Co-flowing jets correspond to $a > 0$, counter-flowing jets or wakes to $-1 < a < 0$, co-flowing wakes to $a < -1$.

In standard fashion, the inviscid Euler equations are linearized around the basic flow (1) and perturbations are decomposed into normal modes. For instance, the fluctuating radial velocity component v' is taken to be of the form

$$(2) \quad v'(x, r, \theta, t) = \text{Re}\{iG(r)e^{i(kx+n\theta-\omega t)}\},$$

where k, n , and ω respectively denote the axial wavenumber, azimuthal wavenumber and frequency, and $G(r)$ is the unknown radial distribution. Upon introducing the auxiliary functions

$$(3) \quad \gamma(r) \equiv kU(r) - \omega + nW(r)/r; \quad Z(r) \equiv rG(r)/\gamma(r),$$

one is led (Lessen *et al.*, 1964) to the following two-point boundary-value problem for $Z(r)$:

$$(4) \quad Z'' + \left[\frac{1}{r} + 2\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{2k^2r}{n^2 + k^2r^2} \right] Z' - \left[\frac{n^2 + k^2r^2}{r^2} + \frac{2n}{\gamma r} \left(\frac{W}{r} \right)' - \frac{4nk^2W}{\gamma r(n^2 + k^2r^2)} - 2\frac{kW}{\gamma^2r^2} (k(rW)' - nU') \right] Z = 0,$$

$$(5) \quad Z(0) = Z(\infty) = 0.$$

The above system defines an eigenvalue problem: for given parameter values (n, a, q) non-zero solutions exist if and only if the complex wavenumber k and frequency ω obey a dispersion relation of the form

$$(6) \quad D[k, \omega; n, a, q] = 0.$$

Previous studies have dealt with the temporal stability analysis (k real, ω complex). Spatial results (k complex, ω real) are succinctly presented here. The calculation of the complex absolute wavenumber k_0 and frequency ω_0 of zero group velocity $\partial\omega/\partial k = 0$ is then shown to lead to the determination of the absolute/convective instability transition curves.

3. Numerical method

For given values of the parameters n, a , and q , the spatial branches $k = k(\omega; n, a, q)$ are numerically determined as a function of the complex frequency ω by making use of a shooting algorithm. The second-order differential equation (4) is first written as a first-order system for Z and $Z' = dZ/dr$. The required asymptotic behaviour near $r = 0$ and $r = \infty$ is calculated analytically from (4), (5). The system is then integrated numerically step by step in the complex r -plane, along two paths originating from $r = 0$ and $r = \infty$ respectively and joining at a specific complex value r_A . In order to avoid critical points associated with zeroes of the denominator $r\gamma(r)[n^2 + k^2r^2]$ in (4), the two complex paths have to lie above or below such zeroes, in order to comply with Lin's (1955) criterion. In such a fashion, the computed inviscid eigenfunctions are ensured to be limits of their viscous counterparts as viscosity becomes vanishingly small. If (Z_1, Z'_1) and (Z_2, Z'_2) denote the values of (Z, Z') on either side of r_A , a complex eigenvalue k satisfying the dispersion relation (6) is then obtained when the Wronskian $W(k, \omega; n, a, q) \equiv Z_1Z'_2 - Z_2Z'_1$ vanishes. This condition is numerically enforced by choosing an appropriate guess value for k and converging to a zero of W via a Newton-Raphson procedure. Realistic guess values are inferred either by exploiting the temporal results (Lessen *et al.*, 1974) or by preliminary calculation of W on a coarse grid in the complex k -plane. The numerical scheme is implemented by making use of IMSL routines.

4. Results

Sample results pertaining to the spatially amplified downstream branch $k^+(\omega; n, a, q)$ are displayed on figure 1 as a function of real frequency ω for the helical mode $n = -1$ of a swirling jet with

zero external flow ($a = 0$). Only the spatial growth rate $-k_i^+$ is represented for increasing values of the swirl parameter q . Note that for zero swirl $q = 0$, the only unstable modes are $n = \pm 1$. As q increases from zero to 0.5, the instability of the helical mode $n = -1$ is seen to be enhanced while further increases in q beyond 0.5 have a stabilizing effect.

In order to determine the absolute/convective nature of the instability, saddle points k_0 such that $\partial\omega/\partial k(k_0) = 0$ have to be located in the complex k -plane. Furthermore, it should be checked that such saddle points correspond to pinching points of distinct $k^+(\omega)$ and $k^-(\omega)$ branches which, for sufficiently large $\omega_i > 0$, lie in the upper and lower half k -plane respectively (see Bers, 1983; Huerre and Monkewitz, 1990). If $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$ denotes the corresponding absolute frequency, the basic flow is then said to be absolutely (resp. convectively) unstable when $\omega_{0,i} > 0$ (resp. $\omega_{0,i} < 0$). The absolute/convective instability transition boundary in the space of control parameters is given by the condition $\omega_{0,i} = 0$. Thus, the strictly spatial approach (ω real, k complex) described above is sufficient to determine the transition curve. In practice, for given parameter values (n, q) and real frequency ω , the saddle point k_0 is located by detecting a pinching point k_0 of the spatial branches k^+ and k^- , as the co-flow parameter a is being varied. It is *a posteriori* checked that for the transition value (n, a, q), spatial branches k^\pm indeed move away into their respective upper and lower half k -plane as ω_i increases from zero. A sample result of such a procedure is shown on figure 2 for $n = -2$, $a = 0.0022$ (slightly co-flowing jet), $q = 0.6$.

Absolute/convective instability transition curves in the $a - q$ plane are displayed on figure 3 for helical modes $n = \pm 1$, $n = -2$ and $n = -3$. The absolutely unstable (AI) and convectively unstable (CI) regions correspond to $\omega_{0,i} > 0$ and $\omega_{0,i} < 0$ respectively. When $q = 0$ (zero swirl), the Batchelor vortex reduces to a jet or a wake and it is absolutely unstable to the helical modes $n = \pm 1$ in the range $-0.8 \leq a \leq -0.4$, i.e. only when a sufficiently strong counter-flow is present. As the swirl q

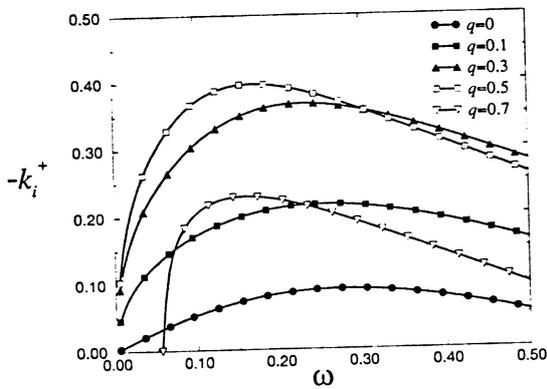


Fig. 1

Fig. 1. - Spatial growth rate $-k_i^+$ of helical mode $n = -1$ versus frequency ω for increasing swirl q . Swirling jet case with zero external flow $a = 0$.

Fig. 1. - Taux de croissance spatiale $-k_i^+$ du mode hélicoïdal $n = -1$ en fonction de la pulsation ω pour un paramètre de rotation q croissant et un jet sans courant à l'infini ($a = 0$).

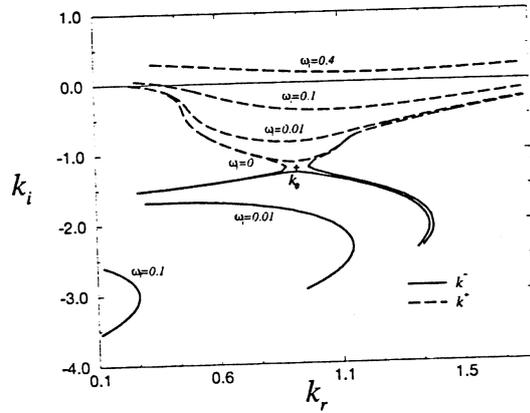


Fig. 2

Fig. 2. - Constant ω_i contours in complex k -plane in vicinity of saddle point k_0 .
—: k^- ; - - : k^+ , $n = -2$, $a = 0.0022$, $q = 0.6$.

Fig. 2. - Contours $\omega_i = \text{constante}$ au voisinage du point selle k_0 dans le plan complexe (k_r, k_i) .
—: k^- ; - - : k^+ , $n = -2$, $a = 0.0022$, $q = 0.6$.

is increased, the region of absolute instability is seen to widen considerably and to be triggered by distinct helical modes on the jet "side" ($a > 0$) and the wake "side" ($a < -1$). On the wake "side" ($a < -1$), moderate values of swirl q lead to absolute instability of the $n = -1$ mode *in the absence of any counter-flow*. On the jet "side" and *without counter-flow* ($a \geq 0$) the critical helical mode leading to absolute instability varies with q : for low q , in the range $0.1 < q < 0.5$, the $n = -3$ mode is critical, while for moderate q in the range $0.5 < q < 0.7$, the mode $n = -2$ becomes critical. Finally, for jets with slight counter-flow ($a \leq 0$) at high q , the $n = -1$ mode is critical. Note that above $q = 1.5$, the Batchelor vortex is stable for all a .

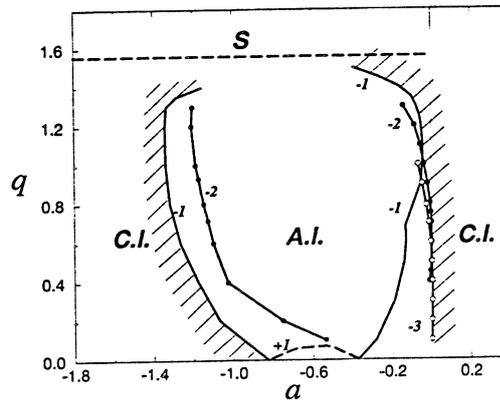


Fig. 3. – Absolute (AI)/convective (CI) instability transition curves in $a - q$ parameter space for helical modes $n = \pm 1$, $n = -2$, $n = -3$. Outer transition boundary is hatched. Basic flow is stable (S) above $q \sim 1.5$.

Fig. 3. – Courbes de transition instable absolu (AI)/instable convectif (CI) dans le plan des paramètres de contrôle (a, q) pour les modes hélicoïdaux $n = \pm 1$, $n = -2$, $n = -3$. La frontière extérieure est hachurée. L'écoulement de base est stable (S) pour $q \sim 1,5$.

5. Concluding remarks

Swirl has been demonstrated to promote absolute instability in jets and wakes, without requiring the presence of a finite counter-flow. The favoured transitional helical mode has been shown to depend on the wake-like or jet-like nature of the flow, as well as on the intensity of the swirl. These results are fully consistent with the alternate approach of Delbende *et al.* (1996) which relies on direct numerical simulations of the impulse response of the Batchelor vortex. The onset of absolute instability for the modes $n = -2$ and $n = -3$ in the vicinity of $a = 0$ may explain some of the unsteady features observed in the breakdown of swirling jets with no external stream. Such questions are currently under investigation.

Acknowledgements. This work was supported by the Direction des Recherches, Études et Techniques (DRET) of the French Ministry of Defense under Grant #92-098. The authors wish to warmly thank I. Delbende and T. Loiseleux for very helpful and stimulating discussions.

Note remise le 3 juin 1996, acceptée le 5 juin 1996.

References

- Batchelor G. K., 1964. Axial flow in trailing line vortices, *J. Fluid Mech.*, 20, pp. 645-658.
- Bers A., 1983. Space-time evolution of plasma instabilities - absolute and convective. In *Handbook of Plasma Physics*, Rosenbluth M. N. and Sagdeev R. Z. Eds., 1, pp. 451-517, Amsterdam, North-Holland.
- Benjamin T. B., 1962. Theory of the vortex breakdown phenomenon, *J. Fluid Mech.*, 14, pp. 593-629.
- Delbende I., Chomaz J. M. and Huerre P., 1996. Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the impulse response (in preparation).
- Faler J. H. and Leibovich S., 1977. Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown, *Phys. Fluids*, 20, pp. 1385-1400.
- Huerre P. and Monkewitz P. A., 1990. Local and global instabilities in spatially developing flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 22, pp. 473-537.
- Khorrami M. R., 1991. On the viscous modes of instability of a trailing line vortex, *J. Fluid Mech.*, 225, pp. 197-212.
- Leibovich S. and Stewartson K., 1983. A sufficient condition for the instability of columnar vortices, *J. Fluid Mech.*, 126, pp. 335-356.
- Lessen M., Singh P. J. and Paillet F., 1974. The stability of a trailing line vortex. Part 1: Inviscid theory, *J. Fluid Mech.*, 63, pp. 753-763.
- Lessen M. and Paillet F., 1974. The stability of a trailing line vortex. Part 2: viscous theory, *J. Fluid Mech.*, 65, pp. 769-779.
- Lin C. C., 1955. *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press.
- Tsai C. Y. and Widnall S. E., 1980. Examination of group-velocity criterion for breakdown of vortex flow in a divergent duct. *Phys. Fluids*, 23, pp. 864-870.

Annexe C

Inviscid instability of the Batchelor vortex:
absolute-convective transition and spatial branches

Cornel OLENDRARU, Antoine SELLIER, Maurice ROSSI and Patrick
HUERRE

Soumis à *Physics of Fluids*, Mai 1998

Inviscid instability of the Batchelor vortex: absolute-convective transition and spatial branches

Cornel Olendraru and Antoine Sellier

LadHyX, CNRS-UMR 7646, École Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France

Maurice Rossi

Laboratoire de Modélisation en Mécanique (LMM), Université Paris VI, Tour 66, 4, place Jussieu, F-75252 Paris cedex 05, France

Patrick Huerre

LadHyX, CNRS-UMR 7646, École Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France
(December 13, 1998)

The main objective of the study is to examine the spatio-temporal instability properties of the Batchelor q -vortex, as a function of swirl ratio q and external axial flow parameter a . The inviscid dispersion relation between complex axial wavenumber and frequency is determined by numerical integration of the Howard-Gupta ordinary differential equation. The absolute-convective nature of the instability is then ascertained by application of the Briggs-Bers zero-group-velocity criterion. A moderate amount of swirl is found to promote the onset of absolute instability. In the case of *wakes*, transition from convective to absolute instability always takes place *via* the helical mode of azimuthal wavenumber $m = -1$. For sufficiently large swirl, co-flowing wakes become absolutely unstable. In the case of *jets*, transition from absolute to convective instability occurs through various helical modes, the transitional azimuthal wavenumber m being negative but sensitive to increasing swirl. For sufficiently large swirl, weakly co-flowing jets become absolutely unstable. These results are in good qualitative and quantitative agreement with those obtained by Delbende *et al.*¹ through a direct numerical simulation of the linear response. Finally, the spatial (complex axial wavenumber, real frequency) instability characteristics are illustrated for the case of zero-external flow swirling jets.

I. INTRODUCTION

Swirling jets and wakes are encountered in many situations of current engineering interest. An understanding of their dynamics is for instance essential in the design of efficient combustors and in the control of trailing line vortices behind airplanes. Swirling jets and wakes are also ubiquitous in numerous atmospheric phenomena such as tornadoes, dust devils, From a more fundamental standpoint, the evolution of swirling jets and wakes involves strong coupling between centrifugal forces associated with swirl, and Kelvin-Helmholtz instabilities associated with axial shear. Thus the dynamics of circular jets is profoundly altered by moderate levels of swirl: helical instability modes of positive azimuthal wavenumber with respect to the applied swirl are very effectively quenched²⁻⁶. A contrario, the centrifugally stable inertial modes of a pure vortex may be destabilized by axial shear, as demonstrated numerically by Martin and Meiburg⁷.

The goal of the present investigation is to examine the properties of the spatio-temporal instability waves supported by the Batchelor⁸ or q -vortex. We seek to determine the domains of absolute^{9,10}, respectively convective, instability in parameter space by directly applying the Briggs¹¹-Bers¹² zero-group-velocity criterion to the inviscid dispersion relation. The characteristics of spatial waves (complex wavenumber, real frequency) are illustrated in a few typical instances. Preliminary results have been reported in Olendraru *et al.*¹³. The study should be viewed as the analytical inviscid counterpart of the direct numerical simulation of the impulse response recently completed by Delbende *et al.*¹ for the same family of Batchelor velocity profiles.

The vortex breakdown phenomenon^{14,15} exemplifies many of the subtleties involved in the dynamics of spatially developing swirling jets and wakes. The unsteady evolution is controlled simultaneously by the *local* instability properties of the underlying axial and azimuthal velocity profiles at each axial station, and by *global* constraints imposed on a large scale through upstream

- downstream boundary conditions and the applied axial pressure gradient. Previous temporal instability analyses (real wavenumber, complex frequency) of parallel columnar vortices have sought to address the first issue. The second issue, namely global constraints in a finite-length pipe, has recently been considered by Wang and Rusak¹⁶.

It should be emphasized that local and global analyses are in fact strongly intertwined if one is willing to extend the local framework to spatio-temporal waves (complex wavenumber and frequency) and convective-absolute instability considerations. More specifically it has been demonstrated^{17,9,18} that the existence of a finite region of local absolute instability promotes the onset of a global mode over an extended axial region. Furthermore, local spatio-temporal waves constitute the building blocks of the linear global mode structure for slow variations of the vortex core along its axis, as in a tapered divergent duct configuration. In this context, Wang and Rusak¹⁶'s instability calculations can be reduced to a combination of spatial waves and, as such, they provide an example of a linear global mode. In the absence of a region of local absolute instability, spatially developing flows act as a spatial amplifier of external noise. In such cases, the study of spatial waves is far more informative than a purely temporal analysis, since it fully documents the response of the flow to external forcing. To the authors' knowledge, all previous instability analyses of columnar vortices have been restricted to the temporal framework, with the exception of the recent papers by Delbende *et al.*¹ and Loiseleux *et al.*⁶. It is our purpose here to examine spatio-temporal waves, as a first step towards a more comprehensive global mode formulation.

The Batchelor or q -vortex which is selected as basic flow is characterized by two non-dimensional parameters: the swirl q associated with the azimuthal velocity distribution and the external flow a which controls the free-stream axial velocity (see Sec. IIA). The Batchelor vortex is known to provide a satisfactory representation of slowly evolving trailing vortices as discussed by Batchelor⁸, Faler and Leibovich¹⁹ and Garg and Leibovich²⁰. It is also a good approximation of the velocity field prevailing upstream of vortex breakdown as emphasized by Sarpkaya²¹. As the a -parameter is varied, the axial velocity profile evolves continuously from "jet-like" to "wake-like". In the vortex breakdown context, local axial velocity radial distributions are typically jet-like upstream of breakdown and wake-like downstream of breakdown. For temporal waves, the external flow parameter a may simply be removed by a Galilean transformation, i.e. by applying a trivial Doppler shift to the frequency. By contrast, a has a non-trivial effect on the absolute-convective nature of the instability as well as on the properties of spatial waves, and calculations have to be performed for all values of interest. As discussed in e.g. Huerre and Monkewitz⁹, it is precisely in situations where Galilean invariance is broken that absolute-convective instability issues acquire physical significance. This happens to be the case, either when the flow is continuously forced at a specific axial location, or when it is spatially developing, as for the slow vortex evolution in a divergent duct¹⁶, or else when the no-slip boundary condition is enforced at the walls. In such instances, the pertinent reference frame is unambiguously defined. In the present analysis, it is therefore crucial to keep as independent parameters both the swirl q and the external axial flow a .

The inviscid temporal instability of swirling jets and wakes typically reduces to a classical eigenvalue problem expressed in terms of the second-order Howard-Gupta²² ordinary differential equation. The main results for the Batchelor vortex^{5,23} may be summarized as follows. For zero swirl, the q -vortex is in effect a fully developed Gaussian jet and only the bending modes of azimuthal wavenumber $m = \pm 1$ are unstable. When q exceeds 0.08, all positive helical modes ($m > 0$) become stable. For moderate swirl values, negative helical modes ($m < 0$) are however strongly destabilised, with growth rates typically an order of magnitude larger than for a non-rotating jet. In Delbende *et al.*¹ and Loiseleux *et al.*⁶ it was erroneously stated that the Batchelor vortex becomes linearly stable above $q \sim 1.5$. This is only valid for a particular subclass of inviscid modes. According to Stewartson and Brown²⁴'s asymptotic study, some inviscid modes remain unstable at high q within specific ranges of swirl. To the present day, these findings have not been confirmed numerically. The precise neutral boundary is difficult to determine accurately: according to Leibovich and Stewartson²⁵, inviscid instability modes with identical axial and azimuthal wavenumbers coalesce near neutrality, which impedes the convergence of numerical algorithms. In the unstable swirl range, the maximum growth rate monotonically increases with $|m|$ and reaches a finite value for $m = -\infty$. The maximum growth rate over all axial and azimuthal wavenumbers is reached at $q = 0.87$. The effect of viscosity has been examined by Lessen and Paillet³, Khorrami²⁶ and Mayer and Powell²³. These investigations have demonstrated the existence of distinct unstable viscous modes, with growth rates several orders of magnitude lower than their inviscid counterparts. In the present investigation, such modes are *de facto* not considered since

the analysis is purely inviscid.

The absolute-convective instability of swirling jets and wakes has only recently been examined^{1,6}. In the numerical study of Delbende *et al.*¹, the linear impulse response of the Batchelor vortex is simulated at the particular Reynolds number $Re = 667$ in order to determine whether it grows *in situ* (absolute instability) or is convected downstream (convective instability). The introduction of a moderate amount of swirl is found to strongly promote absolute instability without necessarily requiring the presence of a finite counterflow. The present study examines the same questions from an alternative point of view, by directly solving the inviscid dispersion relation and applying the Briggs¹¹-Bers¹² zero-group-velocity criterion. Since both methods lead to very similar conclusions, the discussion of the results is postponed to Sec. VI. The Briggs-Bers criterion has also been applied by Loiseleux *et al.*⁶ to the analytically derived inviscid dispersion relation of the Rankine vortex with superimposed axial plug flow. Here again, the results indicate that absolute instability is strongly enhanced by swirl: co-flowing jets and wakes may become absolutely unstable for moderate amounts of swirl.

The application of the absolute-convective instability formulation to swirling flows may be regarded as the logical extension of the group velocity concept first introduced by Benjamin²⁷ and Tsai and Widnall²⁸ in the context of vortex breakdown. Benjamin²⁷'s criterion is based on the computation of the phase velocity pertaining to long-wavelength axisymmetric neutral disturbances. In this limit, waves are non-dispersive so that phase and group velocities coincide. As the ratio of basic azimuthal to axial velocities is varied, such disturbances are determined to propagate either solely in the downstream direction (supercritical flow) or both upstream and downstream (subcritical flow). Vortex breakdown is then viewed as a transition between a supercritical state and a downstream subcritical state. However pertinent it may be for vortex breakdown, this analysis is incomplete: a) it does not consider *dispersive* and *unstable helical* waves such as bending ($m = \pm 1$) or higher-order azimuthal modes; b) it does not examine arbitrary wavelengths. These restrictions were partly removed by Tsai and Widnall²⁸ for the vortex flow in a divergent duct undergoing breakdown. The notions of supercritical and subcritical flow states were redefined with respect to the group velocity of neutral dispersive waves of finite wavelength. An absolute-convective instability analysis precisely provides the logical framework to extend these notions of supercritical (i.e. convectively unstable) and subcritical (i.e. absolutely unstable) flow states by examining the propagation of unstable disturbances of arbitrary axial and azimuthal wavenumbers.

The paper is organised as follows. The basic flow and the eigenvalue problem to be solved are defined in Sec. IIA and B respectively. Sec. IIC considers the asymptotic behavior of disturbances near the axis and near infinity, and the required contour deformation rule around critical points of the Howard-Gupta equation. The numerical procedure leading to the dispersion relation between wavenumber and frequency is outlined in Sec. IID. In Sec. III, we discuss the absolute-convective nature of the instability in the plane of control parameters a and q . The characteristics of spatial waves are illustrated in Sec. IV for the case of zero external flow swirling jets. Typical spatial eigenfunctions in the convectively unstable range are presented in Sec. V. The main results are summarized and compared with related studies in Sec. VI.

II. LINEAR INVISCID INSTABILITY FORMULATION

A. Basic flow

As in Olendraru *et al.*¹³ and Delbende *et al.*¹, the basic swirling flow under consideration is taken to be the Batchelor⁸ or q -vortex. Let x, r and θ denote the usual axial, radial and azimuthal coordinates, and U, V, W the corresponding basic velocity components. The Batchelor vortex flow is then given by the two-parameter family

$$U(r) \equiv a + e^{-r^2}, \quad V(r) \equiv 0, \quad W(r) \equiv q[1 - e^{-r^2}]/r. \quad (1)$$

The above relations have been made nondimensional by selecting as length scale the vortex core size R , and as velocity scale the difference $\Delta U \equiv U_c - U_\infty$ between the centerline axial velocity U_c on the $r = 0$ axis and the free-stream velocity U_∞ at $r = \infty$. If Ω_c denotes the core rotation rate, the non-dimensional external flow parameter a and swirl parameter q are defined as

$$a \equiv \frac{U_\infty}{\Delta U}, \quad q \equiv \frac{\Omega_c R}{\Delta U}. \quad (2)$$

In other words, a and q respectively provide a measure of free-stream axial velocity and maximum core swirl velocity. Typical azimuthal and axial velocity profiles are represented in Fig. 1 for increasing values of q and a . By increasing a , one may successively study co-flowing wakes ($a < -1$, Fig. 1b), counter-flowing jets or wakes ($-1 < a < 0$, Fig. 1c), and co-flowing jets ($a > 0$, Fig. 1d). The zero-external flow jet is recovered for $a = 0$, and the zero center line velocity wake is obtained for $a = -1$. In the $a - q$ parameter plane, the half planes $a > -0.5$ and $a < -0.5$ will be referred to as the “jet” side and “wake” side respectively. Note that in the context of the present inviscid analysis, (1) is an admissible basic flow since it is a solution of the Euler equations.

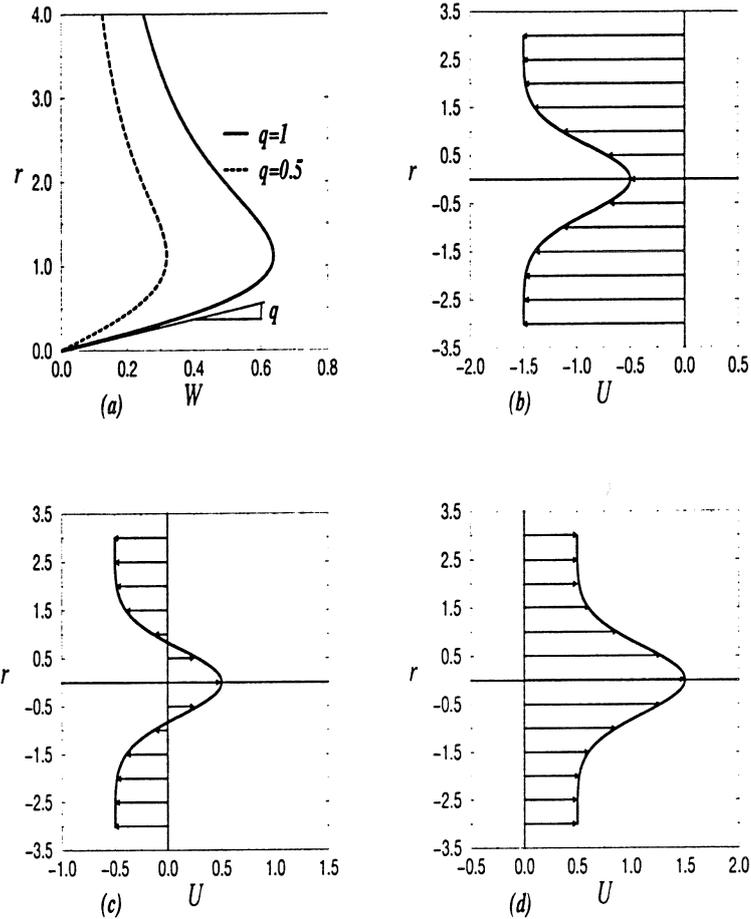


FIG. 1. Batchelor vortex velocity field. (a): Azimuthal velocity profile $W(r)$ for $q = 0.5$ and $q = 1.0$. Axial velocity profile $U(r)$ for (b): co-flowing wakes if $a < -1$; (c): counter-flowing wakes/jets if $-1 < a < 0$; (d): co-flowing jets if $a > 0$.

B. Eigenvalue problem

The analysis is restricted to the evolution of infinitesimal disturbances superimposed on the basic flow field (1). The flow is assumed to be inviscid and incompressible of constant density. Since the basic flow is parallel and steady, nondimensional velocity and pressure fluctuations may be decomposed into normal modes of the form

$$(u, v, w, p) = \text{Re}\{[F(r), iG(r), H(r), P(r)]e^{i(kx+m\theta-\omega t)}\}, \quad (3)$$

where the azimuthal wavenumber m is an integer, and the axial wavenumber k and frequency ω may be complex. As shown by Batchelor and Gill²⁹ for the pure jet case ($q=0$) and Lessen *et al.*⁵ for swirling jets, substitution of (3) into the Euler equations linearised around the basic state (1), leads to the first-order system

$$krF + (rG)' + mH = 0, \quad (4a)$$

$$\gamma G + 2WH/r - P' = 0, \quad (4b)$$

$$\gamma r H + (rW)'G + mP = 0, \quad (4c)$$

$$\gamma F + U'G + kP = 0. \quad (4d)$$

In the above relations a prime denotes differentiation with respect to r and

$$\gamma(r) \equiv kU(r) - \omega + mW(r)/r. \quad (5)$$

To this system, one must add the usual exponential decay boundary conditions at $r = \infty$ and require that physical quantities remain smooth, bounded and single-valued on the $r = 0$ axis. As discussed in detail in Batchelor and Gill²⁹, Khorrami *et al.*³⁰ and Ash and Khorrami², the boundary conditions appropriate to system (4) take the form:

$$F(\infty) = G(\infty) = H(\infty) = P(\infty) = 0 \text{ for all } m, \quad (6a)$$

$$F(0) = G(0) = H(0) = P(0) = 0 \text{ if } m^2 > 1, \quad (6b)$$

$$G(0) = H(0) = 0, \quad F(0) \text{ and } P(0) \text{ finite if } m = 0, \quad (6c)$$

$$H(0) \pm G(0) = 0, \quad F(0) = P(0) = 0 \text{ if } m = \pm 1. \quad (6d)$$

As noticed by Howard and Gupta²² and Lessen *et al.*⁵, it is actually possible to recast system (6) into a single second-order boundary-value problem for the function $Z(r) \equiv rG(r)/\gamma(r)$. After elementary manipulations, one is led to the system derived by Howard and Gupta²²:

$$\begin{aligned} & r^2 \gamma^2 (m^2 + k^2 r^2) Z'' + [(m^2 - k^2 r^2) r \gamma^2 + 2(m^2 + k^2 r^2) r^2 \gamma \gamma'] Z' \\ & - [\gamma^2 (m^2 + k^2 r^2)^2 + 2(m^2 + k^2 r^2) m r \gamma (W/r)' - 4m k^2 r \gamma W \\ & - 2k W (m^2 + k^2 r^2) (k(rW)' - mU')] Z = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$Z(0) = Z(\infty) = 0. \quad (8)$$

The two-point boundary value problem (7), (8) is in effect an eigenvalue problem: for given control parameter settings (m, a, q) , non-trivial solutions Z exist if and only if the complex frequency ω and the axial wavenumber k are linked by a dispersion relation of the form

$$D[k, \omega; m, a, q] = 0. \quad (9)$$

Note that the eigenvalue problem (7), (8) being invariant under the transformation $q \rightarrow -q$, $m \rightarrow -m$, the same property holds for the dispersion relation (9). Unless otherwise stated, we restrict the study to $q \geq 0$ with m a positive or negative integer. Corresponding results for $q \leq 0$ may readily be obtained by changing q into $-q$ and m into $-m$.

C. Asymptotic behavior near $r = 0$ and $r = \infty$ and critical point singularity

In order to solve numerically system (7), (8) by a shooting method, it is essential to examine the asymptotic behavior of the solutions near the axis $r = 0$ and at $r = \infty$, and to properly account for the critical point singularity r_c defined by $\gamma(r_c) = 0$.

To investigate the *behavior of $Z(r)$ near $r = 0$* , it is assumed that $\gamma(0) = k(a+1) - \omega + mq \neq 0$, i.e. that $r = 0$ is not a critical point of the ordinary differential equation (7). In the present spatio-temporal study, k or/and ω are complex and this assumption has been found to always hold. Under this condition, it is straightforward to apply the method of Frobenius (Bender and Orszag³¹) to ordinary differential equation (7) near $r = 0$ and to enforce boundary condition (8). The following results are then obtained:

When $m = 0$,

$$Z(r) = r^2[1 + br^2 + O(r^3)]; \quad \frac{Z'}{Z} = \frac{1}{r}[2 + 3br^2 + O(r^3)], \quad (10)$$

where

$$b \equiv \frac{k^2}{8}\left[1 - \frac{4q^2}{\gamma^2(0)}\right] + \frac{k}{\gamma(0)}. \quad (11)$$

When $|m| \geq 1$

$$Z(r) = r^{|m|}[1 + dr^2 + O(r^3)], \quad \frac{Z'}{Z} = \frac{1}{r}[|m| + (|m| + 1)dr^2 + O(r^3)], \quad (12)$$

where

$$4(|m| + 1)d \equiv k^2\left[1 + \frac{2}{|m|} - \frac{4q}{m\gamma(0)} - \frac{4q^2}{\gamma^2(0)}\right] + \frac{4k}{\gamma(0)}\left[|m| - \frac{mq}{\gamma(0)}\right] + \frac{2m(|m| - 1)q}{\gamma(0)}. \quad (13)$$

The behavior of $Z(r) = rG(r)/\gamma(r)$ near $r = \infty$ may be inferred by first noticing that

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{G'}{G} + \frac{1}{r} - \frac{\gamma'}{\gamma}. \quad (14)$$

According to Lessen *et al.*⁵ and Ash and Khorrami², for large r

$$G \sim -\frac{F'}{k}, \quad (15)$$

whence

$$\frac{Z'}{Z} \sim \frac{F''}{F} + \frac{1}{r} - \frac{\gamma'}{\gamma}. \quad (16)$$

The asymptotic behavior of $\frac{Z'}{Z}$ may therefore be deduced from that of F . In the free stream, for large r , $F(r)$ satisfies the modified Bessel equation

$$F'' + \frac{F'}{r} - \frac{k^2r^2 + m^2}{r^2}F = 0. \quad (17)$$

Assume, without loss of generality (Huerre and Monkewitz³²), that the wavenumber is restricted to the right-hand complex k -plane $k_r = Re k > 0$. The only solution of (16) that vanishes at $r = \infty$ to comply with (6a) is then of the form $F(r) = K_{|m|}(kr)$, where $K_\nu(u)$ is the modified Bessel function of the second kind (Abramovitz and Stegun³³). Upon substituting this solution into (16), invoking (17) and making use of standard recursive relations pertaining to K_ν and its derivative, one is led to the following asymptotic results for large r :

When $m = 0$,

$$\frac{Z'}{Z} \sim -k \frac{K_0(kr)}{K_1(kr)}. \quad (18)$$

When $|m| \geq 1$,

$$\frac{Z'}{Z} \sim \frac{2mq}{mqr + (ka - \omega)r^3} - \frac{k[1 + m^2/(k^2r^2)]K_{|m|}(kr)}{\frac{m}{kr}K_{|m|}(kr) + K_{|m|-1}(kr)}. \quad (19)$$

The second-order differential equation (7) displays regular singular points (Bender and Orszag³¹) or so-called critical points r_c at complex r locations such that $\gamma(r_c) = 0$. The present inviscid analysis breaks down in the vicinity of critical points. Furthermore, by analogy with the large Reynolds number asymptotic theory of the Orr-Sommerfeld equation (Lin³⁴, Wasow³⁵, Drazin and Reid³⁶), the inviscid solutions of (7) are expected, in the limit of vanishing viscosity, to become invalid approximations to their viscous counterparts in specific "viscous" sectors emerging from r_c in the complex r -plane. In the process of solving (7), one must therefore select an integration path in the complex r -plane that scrupulously avoids the "viscous" sectors emerging from r_c , so

as to preserve the validity of the inviscid approach. A contour deformation rule analogous to the Rayleigh/Orr-Sommerfeld equation case has been proposed by Lessen *et al.*⁵ in the strictly temporal (k real, ω complex) framework: *if there exist a complex critical point r_c such that $\gamma(r_c) = 0$ with $\gamma'(r_c) \neq 0$, the original integration path along the real r -axis may have to be deformed in order to lie below r_c when $\text{Re } \gamma'(r_c) > 0$ and above r_c when $\text{Re } \gamma'(r_c) < 0$.* Under this condition, the integration path does not cross the viscous sector located in the upper half-plane $\text{Im } r \geq \text{Im } r_c$ (respectively lower half-plane $\text{Im } r \leq \text{Im } r_c$). The inviscid eigenvalues thus obtained are then ensured to be the limits of their viscous counterparts as the viscosity tends to zero. The generalisation of the contour deformation rule to arbitrary complex values of k and ω of interest here is highly non-trivial, even in the Rayleigh Orr-Sommerfeld case recently examined by Le Dizès *et al.*³⁷. According to Fig. 1 of Le Dizès *et al.*³⁷, the critical point y_c of the Rayleigh equation, which lies on the real y -axis for neutral waves (k and ω real) gradually moves into the complex y -plane as k and ω become complex. Concurrently, the “viscous” sector of angle $2\pi/3$ issuing from y_c , which for neutral waves is located entirely in the upper or lower half y -plane, experiences a rotation of angle $\arg k/3$. Thus, for sufficiently moderate values of $k_i \equiv \text{Im } k$ and $\omega_i \equiv \text{Im } \omega$, the viscous sector safely remains in the same half-plane above or below y_c and it is legitimate to use the *same* contour deformation rule as for temporal waves (k real, ω complex). We assume that a similar reasoning remains valid for instability waves in swirling flows: *the contour deformation rule of Lessen *et al.*⁵ is presumed to hold for k and ω complex.*

As shown in Appendix A, the equation $\gamma(r) = 0$ gives rise, for the Batchelor velocity profiles (1), to zero, one or two non-zero complex critical points $r_{c,1}$ and $r_{c,2}$ with $\text{Re } r_c \geq 0$.

This completes the examination of the properties of system (7), (8) necessary to numerically determine the complex solutions of dispersion relation (9).

D. Numerical procedure

Equation (7) may be rewritten as the following first-order system for $Z(r)$ and $Y(r) = dZ/dr$:

$$Z' = Y, \tag{20a}$$

$$Y' = -\left[\frac{1}{r} + \frac{2\gamma'}{\gamma} - \frac{2k^2r}{m^2 + k^2r^2}\right]Y + \left[\frac{m^2 + k^2r^2}{r^2} + \frac{2m}{\gamma r} \left(\frac{W}{r}\right)' - \frac{4mk^2W}{\gamma r(m^2 + k^2r^2)} - \frac{2kW}{\gamma^2 r^2} (k(rW)' - mU')\right]Z. \tag{20b}$$

Such a system is to be solved for given parameter settings (m, a, q), subject to the conditions that $Y/Z = Z'/Z$ behaves as (10) or (12) for small r , and as (18) or (19) for large r . Consider two real numbers $\epsilon \ll 1$ and $R \gg 1$, respectively small and large enough to apply the near-axis approximation formulas (10) or (12) for $Z'(\epsilon)/Z(\epsilon)$, and the far-field approximation formulas (18) or (19) for $Z'(R)/Z(R)$. A natural procedure then consists in integrating system (20) on the real r -axis, from $r = \epsilon$ and $r = R$ toward a common real matching point $r = h$ with $\epsilon < h < R$. As sketched in Fig. 2a, this approach amounts to matching in the complex r -plane along two straight line segments C_- and C_+ that lie on the real r -axis and meet at $r = h$. For arbitrary values of k and ω , two distinct values of $Z'(h^-)/Z(h^-)$ and $Z'(h^+)/Z(h^+)$ are thereby generated on either side of the matching point $r = h$. In order for a complex pair (k, ω) to be a solution of the dispersion relation (9), the associated Wronskian

$$W(k, \omega; m, a, q) \equiv Z'(h^+)Z(h^-) - Z(h^+)Z'(h^-). \tag{21}$$

must vanish. In practice, a realistic guess value (k_G, ω_G) is specified and the Wronskian W is numerically brought to zero by changing one of the elements in the complex pair (k, ω) via a Newton-Raphson algorithm.

From the discussion of Sec. IIC, integration along the real r -axis, as described above, is legitimate only when there are no critical points, or the viscous sectors issuing from the critical points $r_{c,1}$ and $r_{c,2}$, remain entirely within the same half r -plane as $r_{c,1}$ and $r_{c,2}$ without ever being crossed by the real r -axis, as in Fig. 2a. According to the contour deformation rule of Lessen *et al.*⁵, such a real integration path holds either when $\text{Re } r_{c,j} \gg R$, $j = 1, 2$ (critical points lying outside the integration domain), or when $\text{Im } r_{c,j} \text{Re } \gamma'(r_{c,j}) > 0$ for both $j = 1$ and $j = 2$ (viscous sectors located in same upper or lower half r -plane as $r_{c,j}$, Fig. 2a). In all other cases, integration

must proceed along a rectangular path in the complex r -plane that complies with the contour deformation rule in order to avoid the viscous sectors. Typical situations are illustrated in Fig. 2b and Fig. 2c. If $Im r_{c,1} < 0$, $Re \gamma'(r_{c,1}) > 0$ and $Im r_{c,2} > 0$, $Re \gamma'(r_{c,2}) > 0$, the configuration shown in Fig. 2b holds: the contours C_+ and C_- are then chosen to lie in the lower half r -plane at an elevation $Im r = -\delta$ and the matching point M where the Wronskian (21) has to be brought to zero, is taken to be at $r = h - i\delta$, $\delta > 0$. If $Im r_{c,1} < 0$, $Re \gamma'(r_{c,1}) > 0$ and $Im r_{c,2} > 0$, $Re \gamma'(r_{c,2}) < 0$, the configuration shown in Fig. 2c holds: the contours C_+ and C_- are chosen to lie in the lower and upper half r -plane, at elevations $Im r = -\delta$ and $Im r = \delta$ respectively, and the matching point M remains on the real r -axis at $r = h$.

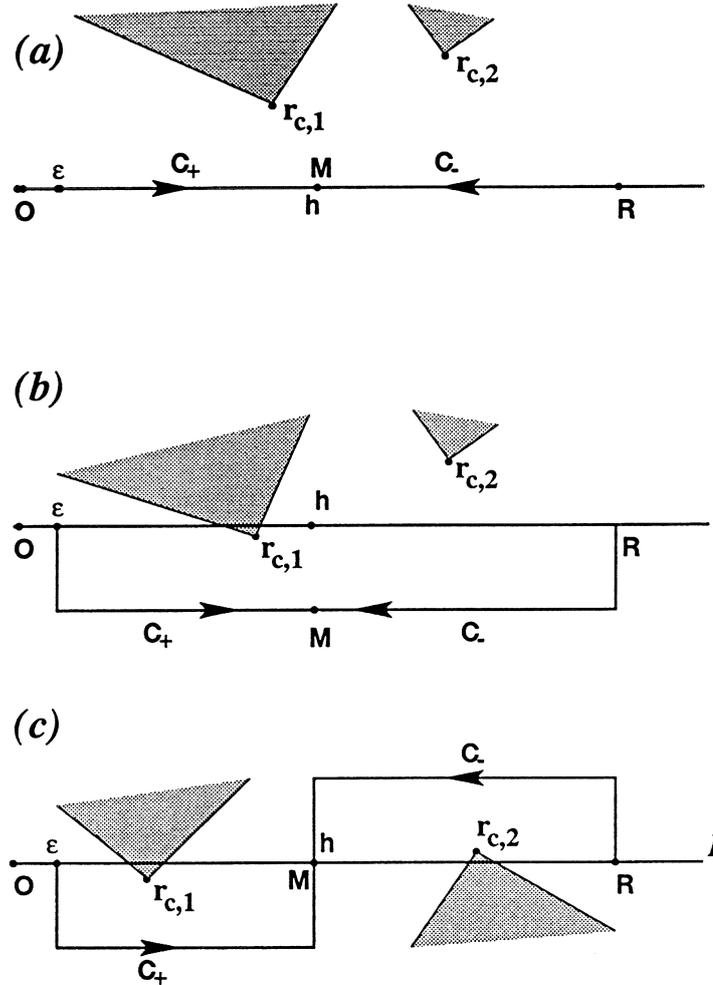


FIG. 2. Contour deformation rule in complex r -plane; viscous sectors are indicated in grey. (a): $Im r_{c,j} Re[\gamma'(r_{c,j})] > 0$, $j = 1, 2$, purely real integration paths C_- and C_+ . (b): $Im r_{c,1} < 0$, $Re[\gamma'(r_{c,1})] > 0$; $Im r_{c,2} > 0$, $Re[\gamma'(r_{c,2})] > 0$, integration paths C_- and C_+ located in same lower half r -plane. (c): $Im r_{c,1} < 0$, $Re[\gamma'(r_{c,1})] > 0$; $Im r_{c,2} > 0$, $Re[\gamma'(r_{c,2})] < 0$, integrations paths C_- and C_+ located in lower and upper half r -planes respectively.

The above numerical procedure is practically implemented by resorting to readily available IMSL routines, as in Pavithran and Redekopp³⁸. If the integration is to be performed along complex contours such as those in Fig. 2b,c, an appropriate change of variable r is applied to system (20). The IMSL routine DIVPAG is then used to integrate the 1st-order system from $r = \epsilon$ and $r = R$ to the matching point M located at $r = h$ (Fig. 2a,c) or $r = h - i\delta$ (Fig. 2b). A value of the Wronskian (21) is thereby generated for a given complex pair (k, ω) . The IMSL routine DNEQNF is then used to bring the Wronskian W to zero via a Newton-Raphson algorithm. Realistic guess values (k_G, ω_G) are inferred by exploiting the temporal results of Lessen *et al.*⁵ as described at the end of this section. The location of potential critical points $r_{c,j}$ such that $Re r_{c,j} \geq 0$ and $\gamma(r_{c,j}) = 0$ is estimated by applying the Newton-Raphson DNEQNF routine to the complex function γ . Critical points for the bending modes $m = \pm 1$ are readily deduced by continuation

from the zero-swirl case $q = 0$. The guess value $r_{G,c} = 1$ is chosen as input for all higher-order helical modes $|m| > 1$. In a few instances, convergence failed, which indicated the presence of another critical point, as discussed in Sec. IV.

Numerical calculations were performed with $\epsilon = 10^{-3}$ and $R = 15$. Khorrami *et al.*³⁰ note that the value $R = 3$ selected by Lessen *et al.*⁵ is somewhat low. The present value $R = 15$ was deemed to be sufficiently large for the asymptotic estimates (18), (19) of Z'/Z to remain valid over a wide range of the complex argument kR . Finally, for most runs, the elevation of the deformed contours was chosen to be $\delta = 10^{-1}$.

When a converged eigenvalue pair has been obtained, the corresponding eigenfunction is easily retrieved by performing one last integration run of the system (20) for $Z(r)$ and $Z'(r)$, along the real r -axis from $r = \epsilon$ to $r = R$. According to the original 1st-order system (4), the eigenfunctions F, G, H and P for all physical quantities are then calculated from the following relations:

$$F = \frac{\left\{ \frac{m}{r} [k(rW)' - mU'] - kr\gamma' \right\} Z - \gamma kr Z'}{m^2 + k^2 r^2}, \quad (22)$$

$$G = \frac{\gamma}{r} Z, \quad (23)$$

$$H = \frac{\left\{ k[mU' - k(rW)'] - m\gamma' \right\} Z - \gamma m Z'}{m^2 + k^2 r^2}, \quad (24)$$

$$P = \frac{\gamma}{m^2 + k^2 r^2} \left[\left\{ r\gamma' - \frac{1}{r} [kr^2 U' + m(rW)'] \right\} Z + r\gamma Z' \right]. \quad (25)$$

The radial distribution of F, G, H and P computed in this manner remain uniform approximations of the true eigenfunctions as long as there is no critical point on the real r -axis and the viscous sectors of Fig. 2 do not contaminate part of the real r -axis. If this is not the case, the computed eigenfunctions are only valid large-Reynolds-number approximations outside the viscous sectors.

The present investigation relies in large measure on the effective calculation of generalised spatial branches whereby ω is assigned a given real or complex value and $k(\omega)$ is a complex unknown. Spatial branches in the strict sense then correspond to ω real and k complex. In all cases, a realistic guess value (k_G, ω) is needed in order to initiate the Newton-Raphson algorithm and to ensure successful convergence to an eigenvalue pair (k, ω) . Such guess values are inferred from the temporal results of Lessen *et al.*⁵: A known temporally growing mode (k real, ω complex) with $\omega_i > 0$ is used as a starting point to generate by continuation a spatial branch $k(\omega)$ for the same value of ω_i and varying values of ω_r . In other words, the locus of the spatial branch $k(\omega)$ is effectively represented in the complex k -plane as a level curve $\omega_i = \text{const}$. Level curves for successively increasing and decreasing values of ω_i are also obtained by continuation. The particular level curve $\omega_i = 0$ then corresponds to the conventional spatial branch k complex, ω real. The numerical code is found to experience convergence difficulties in the vicinity of neutral conditions (k real, ω real) as expected from the analyses of Leibovich and Stewartson²⁵ and Mayer and Powell²³ (see Sec. I). The Newton-Raphson algorithm is then prone to skipping from one mode to another.

III. ABSOLUTE-CONVECTIVE NATURE OF THE INSTABILITY

The absolute-convective nature of each azimuthal wavenumber m is ascertained by analysing the behavior of spatial branches $k(\omega; m, a, q)$ in the vicinity of saddle points (k_0, ω_0) of the dispersion relation (9) for given settings of the swirl q and external flow parameter a . The reader is referred to Huerre and Monkewitz⁹ for a survey of these concepts and to Huerre and Rossi¹⁰ for a detailed presentation. According to the criterion established by Briggs¹¹ and Bers¹², saddle points $[k_0(m, a, q), \omega_0(m, a, q)]$ of the dispersion relation (9) are formally defined by imposing the zero-group-velocity condition

$$\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0; m, a, q) = 0, \quad \omega_0 = \omega(k_0; m, a, q). \quad (26)$$

Pertinent saddle points necessarily involve pinching of two distinct spatial branches $k^+(\omega; m, a, q)$ and $k^-(\omega; m, a, q)$ which, for large enough $\omega_i > 0$, are entirely located in the distinct half k -planes $k_i > 0$ and $k_i < 0$ respectively. If this essential pinching condition is satisfied, k_0 , and ω_0 qualify as the complex absolute wavenumber and frequency respectively, the quantity $\omega_{0,i} \equiv \text{Im } \omega_0$ denoting the absolute growth rate. When $\omega_{0,i} > 0$, the basic flow is said to be absolutely unstable (AI) for the particular m under consideration. When $\omega_{0,i} < 0$, it is convectively unstable (CI) for azimuthal wavenumber m . For given m , the AI-CI transition curve in $a - q$ space is formally given by $\omega_{0,i}(m, a, q) = 0$. In order to determine the overall AI-CI transition curve, the above reasoning must be repeated for different values of m . The strictly spatial approach (k complex, ω real) is known to be pertinent only when the flow is CI: the spatial branches $k^+(\omega; m, a, q)$ and $k^-(\omega; m, a, q)$ are then associated with the “right-hand side” ($x > 0$) and “left-hand side” ($x < 0$) response to a time-harmonic excitation of frequency ω located at $x = 0$ (signalling problem). More specifically, in the case of *jets* ($a > -0.5$, Fig. 1d), the flow is predominantly directed to the right: k^+ and k^- are then conveniently referred to as the “downstream” ($x > 0$) and “upstream” branch ($x < 0$) respectively. A contrario, in the case of *wakes* ($a < -0.5$, Fig. 1b), the flow is predominantly directed to the left: k^+ and k^- then switch denominations and become the “upstream” ($x > 0$) and “downstream” ($x < 0$) branch respectively.

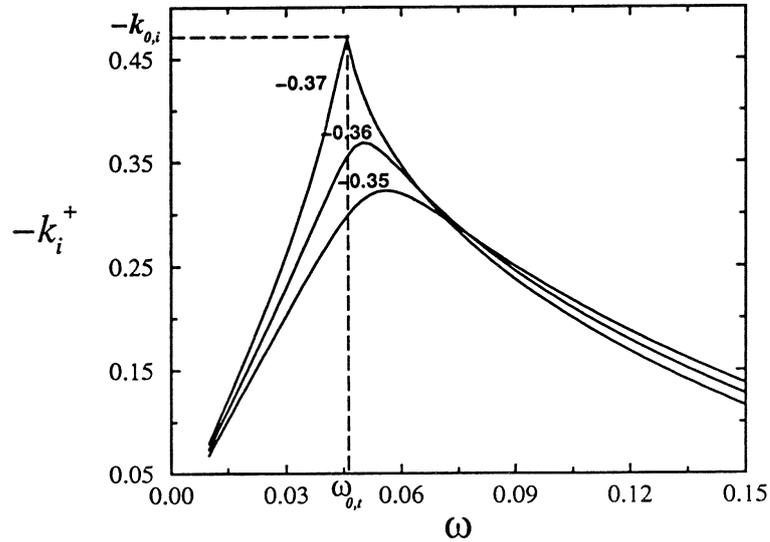


FIG. 3. Effect of increasing external counterflow $|a|$ on the spatial instability characteristics of zero-swirl ($q = 0$) jets: spatial growth rate $-k_i^+$ of helical modes $m = \pm 1$ versus real frequency ω , as external flow parameter decreases from $a = -0.35$ to $a = -0.37$. Note appearance of cusp for $a = -0.37$ at $\omega_{0,t} \sim 0.04$, $-k_{0,i} \sim 0.5$.

Since the AI-CI transition curve is defined by the real absolute frequency condition $\omega_{0,i}(m, a, q) = 0$, it is natural to seek its determination by resorting to a straightforward spatial approach (k complex, ω real). As discussed for instance in Huerre and Rossi¹⁰, in the purely spatial instability context, an AI-CI transition point is signalled by the appearance of a cusp singularity in the curves of spatial growth rate $-k_i^+(\omega; m, a, q)$ and wavenumber $k_r^+(\omega; m, a, q)$ versus real frequency ω . For given settings of q and m , we therefore choose to detect the presence of a cusp singularity in the spatial instability characteristics as the external flow parameter a is varied.

A typical example is illustrated in Fig. 3 for the $m = \pm 1$ modes in the case of a zero-swirl ($q = 0$) jet: As a decreases from $a = -0.35$ to $a = -0.37$ (increasing external counterflow $|a|$), the spatial growth rate curve $-k_i^+(\omega; m, a, q)$ gradually exhibits a cusp singularity at the real absolute frequency $\omega_{0,t} \sim 0.04$. A more accurate evaluation yields $a_t^j = -0.371$, when the j superscript stands for the “jet side” AI-CI transition point. It can subsequently be checked that at the parameter values $m = \pm 1$, $a_t^j = -0.371$, $q = 0$, the real frequency $\omega_{0,t}$ giving rise to the cusp is indeed associated with pinching of distinct spatial branches k^+ and k^- at the saddle point k_0 : isocontour levels $\omega_i = \text{const.}$ corresponding to the k^+ and k^- branches are displayed in Fig.

4. As ω_i decreases to zero, both sets of curves pinch at the saddle point k_0 . As ω_i increases above zero, they gradually recede into their respective half-planes $k_i > 0$ and $k_i < 0$, thereby satisfying the Briggs-Bers criterion. A genuine pinching point has therefore been found for a real absolute frequency ($\omega_{0,i} = 0$). Thus, for zero swirl $q = 0$, $a_t^j = -0.371$ is indeed an AI-CI transition point of helical modes $m = \pm 1$. A similar procedure may be used to determine the AI-CI nature of the same helical modes $m = \pm 1$, for other values of the external flow parameter a on the line $q = 0$ (see Fig. 5). By drawing contour maps similar to those of Fig. 4, one may establish the following results: When $a > a_t^j$, the pinching point k_0 ($m = \pm 1, a, q = 0$) persists, but it is now obtained for a negative absolute growth rate $\omega_{0,i}$ ($m = \pm 1, a, q = 0$) < 0 , thereby indicating that the flow is CI. Conversely, in the range $a_t^w < a < a_t^j$, where $a_t^w \equiv -0.825$ refers to a second AI-CI transition value on the wake side, $\omega_{0,i}$ ($m = \pm 1, a, q = 0$) > 0 and the flow is AI. Finally, when $a < a_t^w$, $\omega_{0,i}$ ($m = \pm 1, a, q = 0$) < 0 and the flow returns to CI.

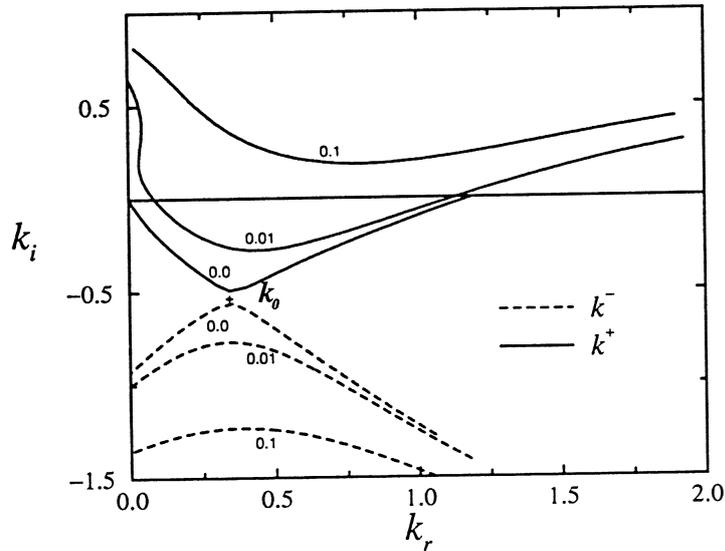


FIG. 4. Illustrative loci of spatial branches $k(\omega)$ in complex k -plane for $m = \pm 1$, $a = a_t^j = -0.371$, $q = 0$. Level curves $\omega_i = 0.1$, $\omega_i = 0.01$, $\omega_i = 0.00$. Solid lines: $k^+(\omega)$; dashed lines $k^-(\omega)$. Note pinching of k^+ and k^- branches at k_0 as ω_i decreases to zero.

The same methodology may be applied for successively increasing values of the swirl q to generate the entire AI-CI transition boundary of helical modes $m = \pm 1$ in the $a - q$ plane, as shown in Fig. 5. Moderate amounts of swirl are seen to increase the a -interval leading to AI. As the swirl approaches the stability boundary $q \sim 1.5$ for this particular mode, the range of a -values where AI prevails gradually shrinks, presumably to a point. The present shooting method, however, is unable to track the AI-CI boundary beyond the nearly neutral points marked J and W in Fig. 5 for reasons previously alluded to.

The AI-CI transition curves pertaining to higher-order helical modes $m = -2$ and $m = -3$ may be determined by following the same steps as for $m = \pm 1$. Typical isocontour levels $\omega_i = \text{const.}$ near a pinching point are displayed in Fig. 6 for $m = -2$, $a_t^j = 0.0022$ and $q = 0.6$. As in Fig. 4, the Briggs-Bers criterion is clearly satisfied. Computed AI-CI transition boundaries for $m = \pm 1$, $m = -2$ and $m = -3$ have been overlaid in the $a - q$ plane in Fig. 7. This plane may be divided into 3 distinct regions: a stable (S) domain (with respect to *these modes only* for swirl values above the horizontal line $q \sim 1.5$), an absolutely unstable (AI) bubble, and two convectively unstable (CI) outer-domains located on the “jet” side and “wake” side respectively. The AI-CI transition boundary for each m is composed of “jet” side and “wake” side curves. The overall AI-CI transition boundary for the Batchelor vortex flow then consists of the “outermost” transition curves pertaining to individual helical modes.

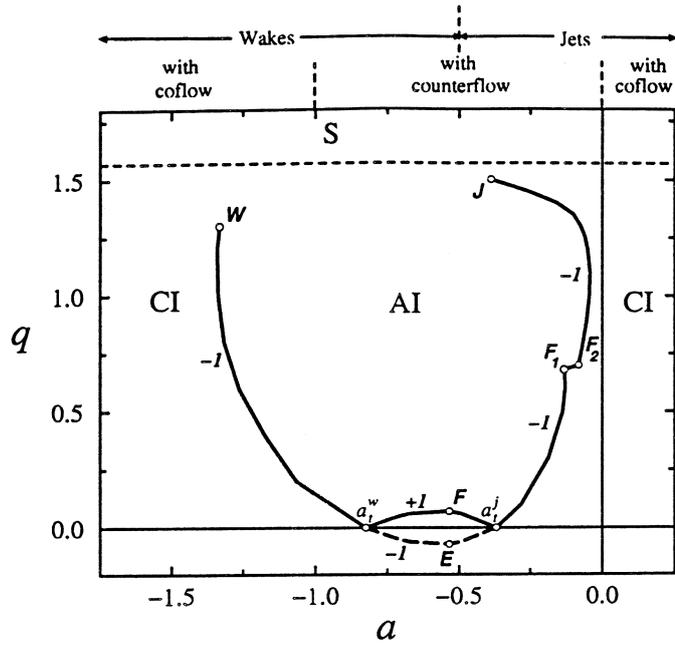


FIG. 5. AI-CI nature of helical mode $m = -1$. Domains of stability (S), convective instability (CI) and absolute instability (AI) in $a - q$ parameter plane. Curve $W E F_1 F_2 J$ indicates AI-CI transition curve of mode $m = -1$. Curve $a_i^w F a_i^j$ indicates AI-CI transition curve of mode $m = 1$.

The “state” diagram of Fig. 7 sums up the main results and, as such, deserves to be commented on in detail. In the absence of swirl ($q = 0$), the fully developed Gaussian axial velocity profile (1) undergoes a transition to AI with respect to $m = \pm 1$ for a sufficiently strong counterflow $-0.825 < a < -0.371$. The application of a moderate amount of swirl $0 < q < 0.7$ is seen to promote absolute instability by significantly increasing the a -interval over which AI takes place. For higher swirl levels $q > 0.7$, the AI domain gradually shrinks as q exceeds about 1.5. The mode of transition to AI is significantly different on the “wake” and “jet” sides.

On the “wake” side ($a < -0.5$), the critical transitional mode is always $m = -1$. As soon as the swirl exceeds $q = 0.135$, AI may take place *even for co-flowing wakes* $a < -1$.

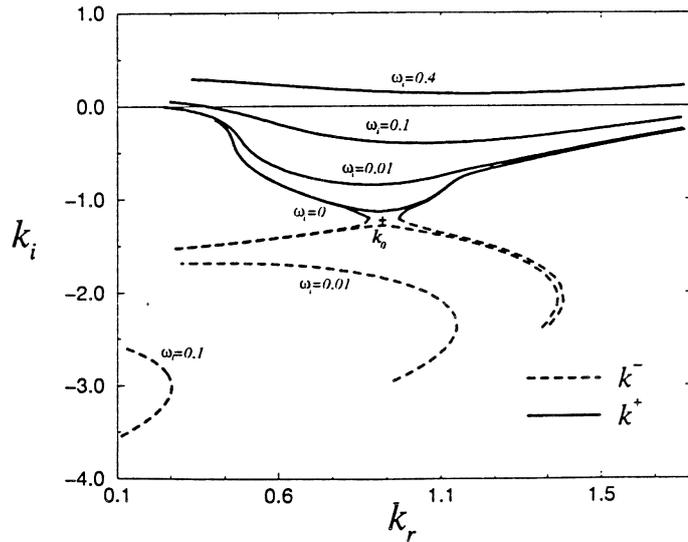


FIG. 6. Illustrative loci of spatial branches $k(\omega)$ in complex k - plane for $m = -2$, $a = a_i^j = 0.0022$, $q = 0.6$. Level curves $\omega_i = 0.4$, $\omega_i = 0.1$, $\omega_i = 0.01$, $\omega_i = 0.0$. Solid lines: $k^+(\omega)$; dashed lines $k^-(\omega)$. Note pinching of k^+ and k^- branches at k_0 as ω_i decreases to zero.

On the “jet” side ($a > -0.5$), the critical transitional mode is quite sensitive to swirl and it may have different azimuthal wavenumbers $m = -1, -2, -3$. When $q \rightarrow 0$, AI takes place *via* the $m = -1$ mode, as in the zero-swirl case. When $0 < q < 0.5$, the mode $m = -3$ becomes critical, whereas, for $0.5 < q < 0.7$, it is replaced by $m = -2$. When $q > 0.7$, the mode $m = -1$ is again critical. Note that, in the range $0.134 < q < 0.704$, the Batchelor vortex jet may be AI even when $a \geq 0$, i.e. *for co-flowing jets*.

According to Fig. 7, AI is, for the most part, circumscribed to negative helical modes. When $q = 0$, positive and negative helical modes cannot be differentiated: they exhibit identical instability characteristics as a result of the reflectional symmetry $\theta \rightarrow -\theta$. When $q \neq 0$, the reflectional symmetry is broken and AI preferentially occurs for $m < 0$. This feature is fully consistent with the temporal instability results of Lessen *et al.*⁵ and Mayer and Powell²³: according to these studies, only negative helical modes remain unstable at moderate values of q . As seen from Fig. 7, the only positive helical mode undergoing AI in the presence of a small but finite positive swirl is $m = +1$. As q increases above 0.08, the pocket of AI for $m = +1$ disappears and this mode is never critical in triggering CI/AI transition except for $q = 0$.

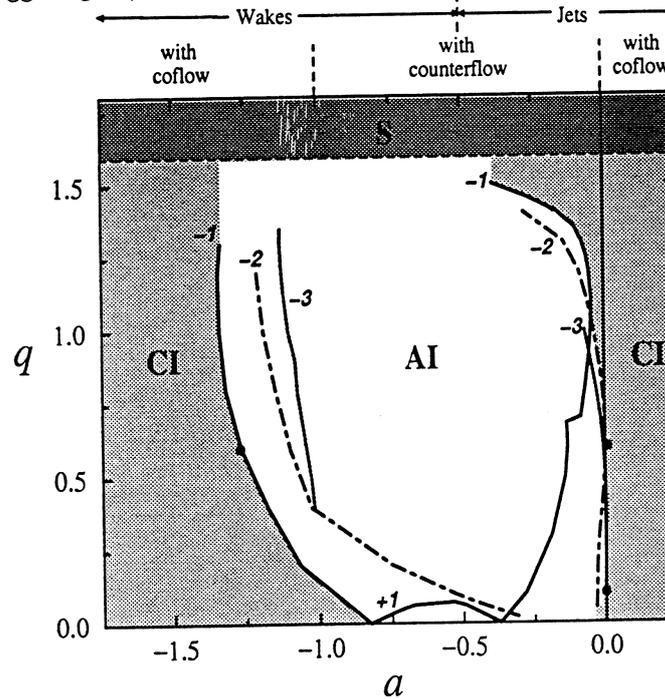


FIG. 7. AI-CI nature of the instability for the Batchelor vortex. Domains of stability (S), convective instability (CI) and absolute instability (AI) in $a - q$ parameter plane. AI-CI transition curves for helical modes $m = \pm 1$, $m = -2$ and $m = -3$ are labelled on the figure. Shaded region indicates outermost boundary of AI region.

Finally, note that the AI-CI transition curve for $m = 1$ and $q > 0$ (solid line labelled $a_i^w F a_i^j$ in Fig. 5) is the mere reflection with respect to the a -axis, of its counterpart for $m = -1$ and $q < 0$ (dashed line labelled $a_i^w E a_i^j$ in Fig. 5). This property follows from the invariance of the dispersion relation under the transformation $q \rightarrow -q$ and $m \rightarrow -m$.

The loci of the complex absolute wavenumber k_0 and associated critical point(s) r_c , as q and a vary along the AI-CI transition curves, are displayed in Fig. 8ab, 9ab, 10ab for helical modes $m = -1, -2$ and -3 respectively. The swirl q has been selected as the parameter along each AI-CI transition curve and its value appears next to each point of the plots.

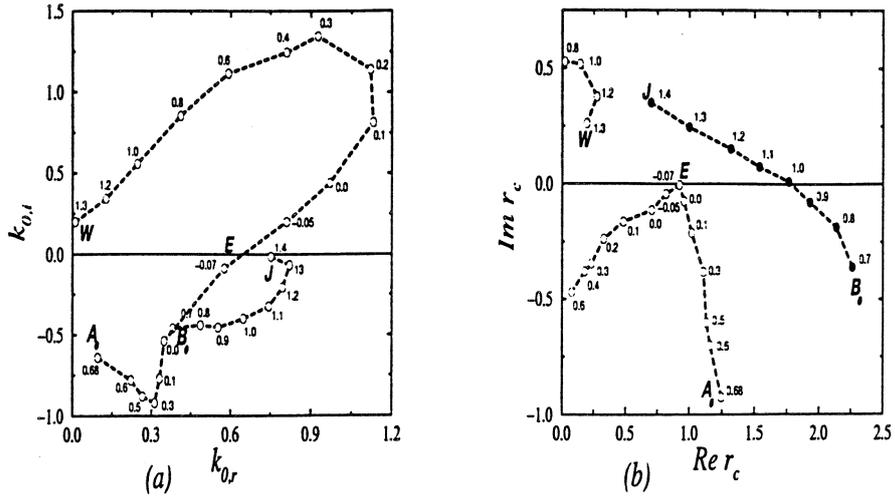


FIG. 8. Helical mode $m = -1$. (a): Locus of absolute wavenumber k_0 as q and a travel along AI-CI transition curve of Fig. 5. (b): Locus of critical point r_c as q and a travel along AI-CI transition curve of Fig. 5. WEF_1 (\circ) and F_2J (\bullet) portions of trajectory. Number next to each point refers to corresponding value of swirl q .

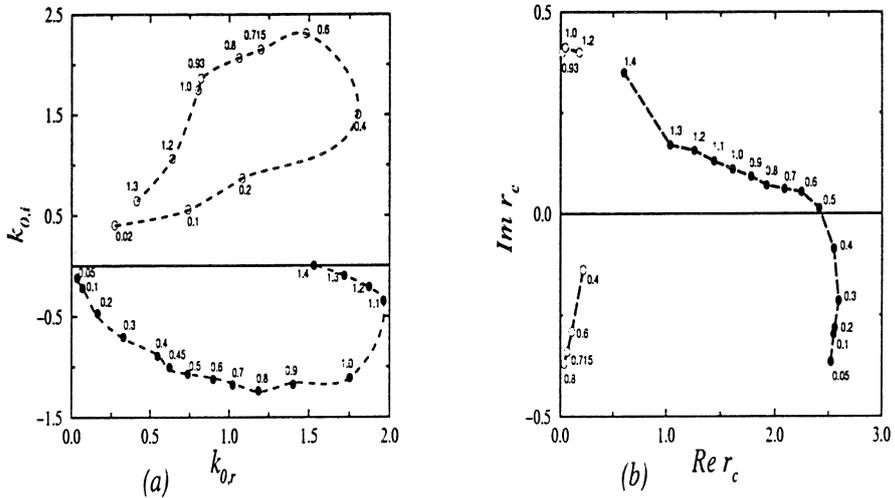


FIG. 9. Helical mode $m = -2$. (a): Locus of absolute wavenumber k_0 as q and a travel along AI-CI transition curve of Fig. 7. (b): Locus of critical point r_c as q and a travel along AI-CI transition curve $m = -2$ of Fig. 7. “Wake” side (\circ) and “jet” side (\bullet) portions of trajectory. Number next to each point refers to corresponding value of swirl q .

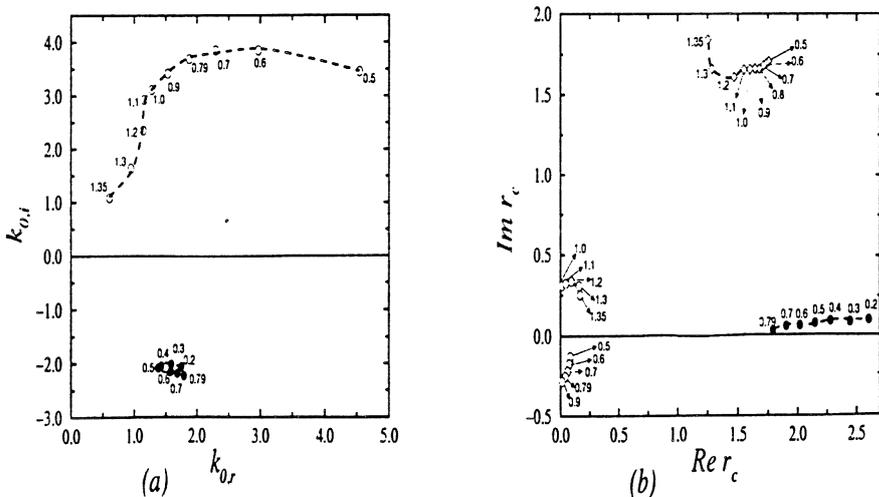


FIG. 10. Helical mode $m = -3$. (a): Locus of absolute wavenumber k_0 as q and a travel along AI-CI transition curve of Fig. 7. (b): Locus of critical point r_c as q and a travel along AI-CI transition curve $m = -3$ of Fig. 7. “Wake” side (\circ) and “jet” side (\bullet) portions of trajectory. Number next to each point refers to corresponding value of swirl q .

Consider first the case of the $m = -1$ mode. As (a, q) moves along the $m = -1$ AI-CI transition curve WEF_1F_2J of Fig. 5, the complex absolute wavenumber k_0 follows the paths that are similarly labelled in Fig. 8a. Empty circles refer to the portion WEF_1 and full circles to the portion F_2J . The trajectory of k_0 remains smooth over the part WEF_1 , but as (a, q) changes from F_1 to F_2 in Fig. 5, the pinching point k_0 of Fig. 8a, is seen to experience a sharp jump in location. This unusual feature has been explored in detail and it is further documented in Sec. IV, in connection with the spatial instability characteristics. When the (a, q) setting changes from F_1 to F_2 in Fig. 5, i.e. as the swirl varies from $q = 0.68$ to $q = 0.70$, it is observed that two neighboring k^+ -branches meet at a resonance point and subsequently switch to become two new hybrid k^+ -branches. One of the hybrid k^+ -branches then pinches at F_2 ($q = 0.70$) with a k^- -branch. This pinching point labelled F_2 in Fig. 8a qualifies as an absolute wavenumber and it is located a finite distance away from its counterpart at F_1 . As (a, q) travels from F_2 to J , the absolute wavenumber follows again a smooth trajectory, as indicated by the full circles in Fig. 8a. Finally, note that the three points W, E and J give rise to nearly neutral modes with $k_{0,i} \ll 1$. There is always a single critical point for the $m = -1$ mode, as represented in Fig. 8b. The discontinuity in the r_c -trajectory as the swirl crosses the value $q=0.8$ is only apparent. As shown in the Appendix, the critical point equation $\gamma(r) = 0$ may be written in the form $\Gamma(r^2) = 0$. Thus roots come into pairs $(r_c, -r_c)$. Since we have assumed $Re r_c \geq 0$, one must switch from r_c to $-r_c$, as r_c approaches the vertical axis $Re r_c = 0$. This feature accounts for the jump along the path WEF_1 in Fig. 8b.

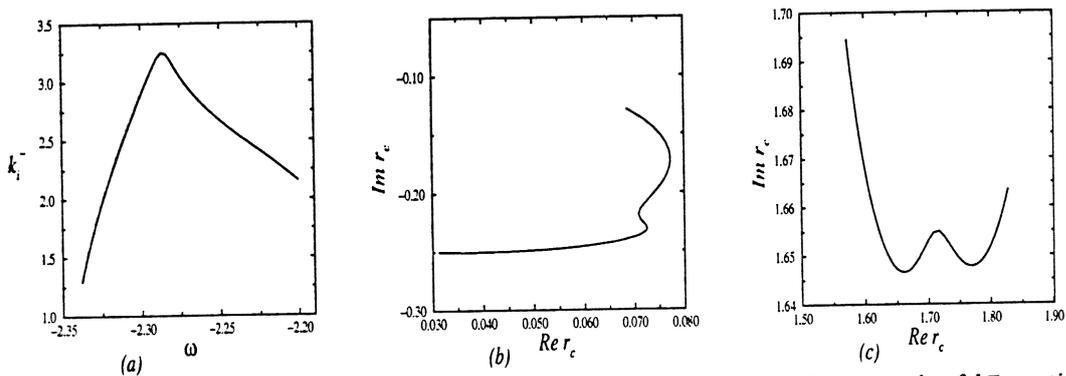


FIG. 11. Helical mode $m = -3$, co-flowing wake at $a = -1.058$, $q = 0.7$. Example of k^- -spatial branch with two distinct critical points $r_{c,1}$ and $r_{c,2}$. (a): Spatial growth rate k_i^- versus real frequency ω ; (b): locus of critical point $r_{c,1}$ with varying ω ; (c): locus of critical point $r_{c,2}$ with varying ω .

The k_0 and r_c -trajectories pertaining to the $m = -2$ and $m = -3$ modes are represented in Fig. 9ab and 10ab. Empty circles refer to the “wake” side and full circles to the “jet” side of the AI-CI transition curves in Fig. 7. The loci of k_0 do not display any particular feature. The $m = -2$ helical mode always admits a single critical point as shown in Fig. 9b. For $m = -3$, a single critical point is present on the “jet” side but two distinct critical points $r_{c,1}$ and $r_{c,2}$ coexist on the “wake” side of the AI-CI transition curve, as seen in Fig. 10b.

The existence of two critical points for the $m = -3$ mode on the “wake” side is further illustrated by the spatial instability results presented in Fig. 11. The flow is taken to be a co-flowing wake at $a = -1.05$ and $q = 0.7$, which is located on the CI side of the transition curve for $m = -3$ in Fig. 7. The spatial amplification rate k_i^- of the “downstream” branch ($x < 0$) is plotted as a function of real frequency ω in Fig. 11a. The loci of the associated critical points $r_{c,1}$ and $r_{c,2}$, as ω varies, are displayed in Fig. 11b and Fig. 11c respectively.

In all cases, the contour deformation rule was systematically enforced, according to the prescription stated in Sec. IIC.

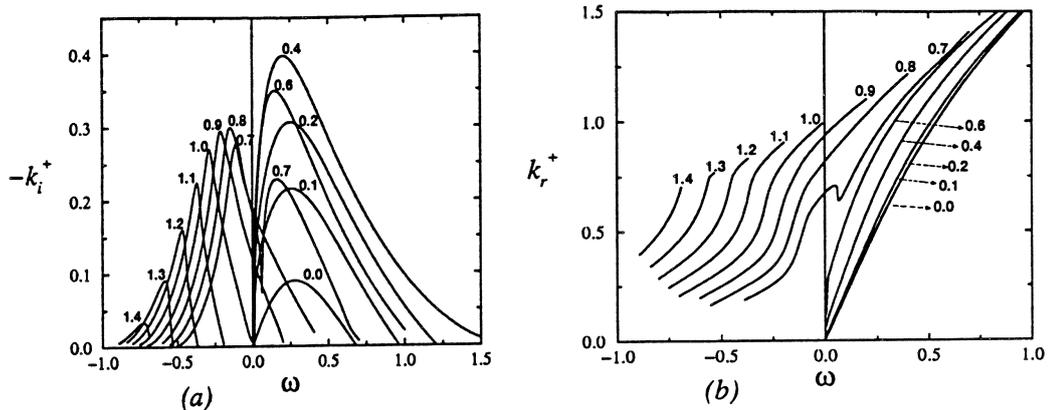


FIG. 12. Helical mode $m = -1$, zero-external-flow swirling jet $a = 0$. Evolution of spatial instability characteristics with increasing swirl q . (a): spatial growth rate $-k_i^+$ versus real frequency ω ; (b): real part of wavenumber k_r^+ versus ω . Swirl value q is indicated next to each curve.

IV. SPATIAL INSTABILITY OF ZERO EXTERNAL FLOW SWIRLING JETS

In this section, we choose to illustrate the spatial instability characteristics (k complex, ω real) by examining the case of zero-external-flow ($a = 0$) swirling jets. Attention is restricted to downstream k^+ -branches which are the only ones to become spatially amplified ($-k_i^+ > 0$) in a finite frequency range. As discussed in the introduction, the axisymmetric mode $m = 0$ is known to be always stable whatever the value of q , and only negative helical modes remain unstable at moderate values of q . In the following, we determine the effect of increasing swirl q on the first three negative helical modes $m = -1, -2, -3$. Please note that for given swirl settings higher-order negative helical modes may reach larger amplification rates than the first three modes, as shown by Lessen *et al.*⁵, Mayer and Powell²³ and Delbende *et al.*¹. Growth rate trends with increasing swirl q are however qualitatively similar for all $m < 0$.

The evolution with increasing swirl q , of the spatial amplification rate $-k_i^+$ and real part of the wavenumber k_r^+ , has been documented for helical modes $m = -1$ (Fig. 12 and Fig. 13), $m = -2$ (Fig. 14) and $m = -3$ (Fig. 15).

As seen from Fig. 12a, the helical mode $m = -1$ is unstable for zero swirl and so is $m = 1$. These are the only unstable modes for $q = 0$. As swirl increases to $q = 0.4$, $m = -1$ becomes further destabilized, while increasing swirl beyond $q = 0.4$ leads to an overall decrease in spatial amplification rates. The bending mode $m = +1$ (not shown) is stabilized by minute amounts of swirl $q \sim 0.08$. Recall that, for each m , there are infinitely many spatial branches. The spatial branch displayed in Fig. 12 has been obtained by continuation from the temporal mode $m = -1$ identified by Lessen *et al.*⁵, and it is the most amplified for moderate amounts of swirl. However, as q increases from 0.6 to 0.8, this spatial branch experiences a sudden metamorphosis: note in particular that at $q = 0.7$, according to Fig. 12a,b, $-k_i^+$ and k_r^+ no longer vanish at the origin as ω tends to zero. In order to understand this feature, let us follow the fate of the spatial branches k_1^+ and k_2^+ , indicated by a solid and dashed line respectively in Fig. 13. As q reaches 0.7, k_1^+ and k_2^+ actually switch to become two new hybrid k^+ -branches which persists for higher q . Only the most amplified hybrid mode at $q = 0.8$ has been represented in Fig. 13. This event persists for non-zero a as discussed in the determination of the AI-CI transition curve of the $m = -1$ mode in Sec. IV. Finally, it should be emphasized that, according to Fig. 5, the $m = -1$ mode remains CI on the $a = 0$ axis for arbitrarily large swirl levels q : the k^+ spatial instability properties documented in Fig. 12 and Fig. 13 effectively characterize the downstream response ($x > 0$) of the Batchelor vortex to a time-harmonic excitation of frequency ω .

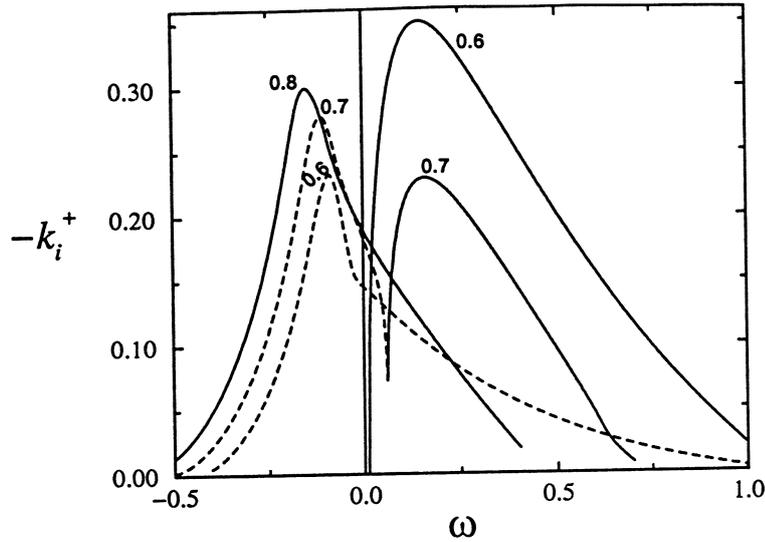


FIG. 13. Helical mode $m = -1$, zero-external-flow swirling jet $a = 0$. Spatial growth rate $-k_i^+$ versus frequency ω . Interaction of two spatial branches $k_1^+(\omega)$ (solid line) and $k_2^+(\omega)$ (dashed line) as q increases through 0.7. Swirl value q is indicated next to each curve.

Corresponding results are shown in Fig. 14 and Fig. 15 for the $m = -2$ and $m = -3$ mode respectively. The helical mode $m = -2$, which is stable for zero swirl $q = 0$, experiences a drastic increase in spatial growth rate as q approaches 0.5. The cusp appearing at $q = 0.5$ indicates a transition from CI to AI which is consistent with the results of Sec. III: As seen from the state diagram of Fig. 7, the Batchelor vortex with zero external flow $a = 0$ becomes AI to the $m = -2$ mode in the range $0.5 \leq q \leq 0.7$. The signalling problem is then ill-posed: spatial instability branches (dashed lines in Fig. 14) lose their physical significance in the sense that they do not describe the response of the flow to a time-harmonic localized excitation. As q exceeds 0.7, the mode $m = -2$ returns to CI and increasing swirl has a stabilizing influence. Similar features prevail for $m = -3$, as indicated in Fig. 15. The helical mode $m = -3$, which is stable for $q = 0$, is destabilized by swirl as q increases to 0.2. In the range $0.2 \leq q \leq 0.5$ (see Fig. 7), the flow is AI to $m = -3$ and spatial branches (dashed lines in Fig. 15) are meaningless. Finally, as q increases above 0.5, the flow returns to CI and the $m = -3$ mode becomes gradually less unstable.

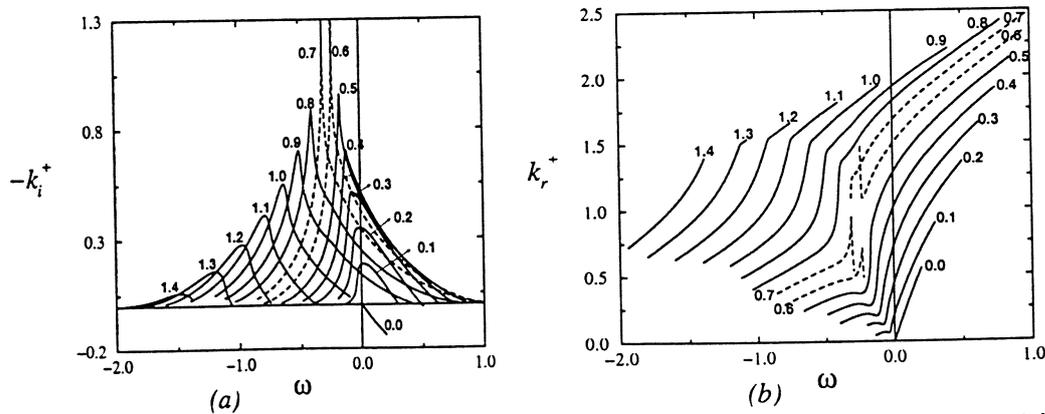


FIG. 14. Helical mode $m = -2$, zero-external-flow swirling jet $a = 0$. Evolution of spatial instability characteristics with increasing swirl q . (a): spatial growth rate $-k_i^+$ versus real frequency ω ; (b): real part of wavenumber k_r^+ versus ω . Swirl value q is indicated next to each curve. Dashed lines correspond to AI range of q .

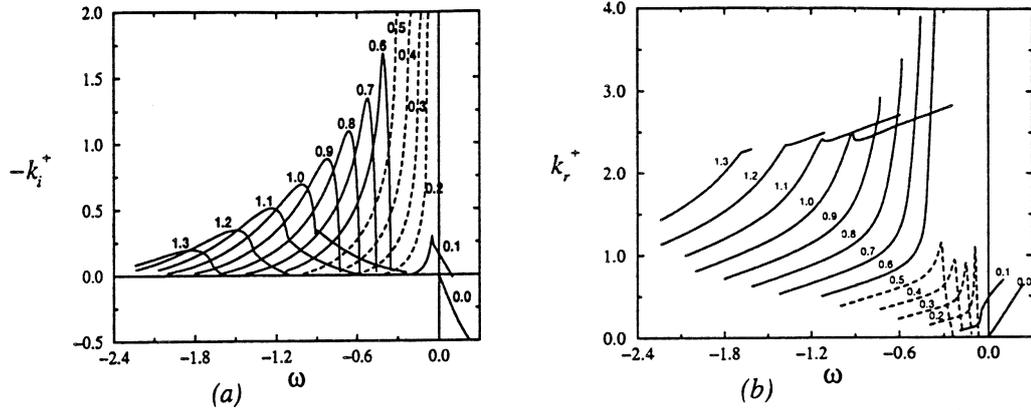


FIG. 15. Helical mode $m = -3$, zero-external-flow swirling jet $a = 0$. Evolution of spatial instability characteristics with increasing swirl q . (a): spatial growth rate $-k_i^+$ versus real frequency ω ; (b): real part of wavenumber k_r^+ versus ω . Swirl value q is indicated next to each curve. Dashed lines correspond to AI range of q .

V. SPATIAL EIGENFUNCTIONS

In order to confirm the validity and accuracy of the present numerical method, the computed eigenfunctions have been compared in Fig. 16 with those calculated by Duck and Khorrami³⁹ for a neutral mode at $m = 1$, $a = 0$, $q = 0.7$, $\omega = 0.0425$ and $k = 0.6$. In both instances the normalisation condition $G(0) = 1$ has been selected. Excellent agreement is obtained. One should mention however the presence of a critical point at $r_c = 4.058$, outside the range represented in Fig. 16, which induces in its vicinity large variations in the eigenfunction derivatives. Note that $P(r)$ is nearly zero over all radial distances.

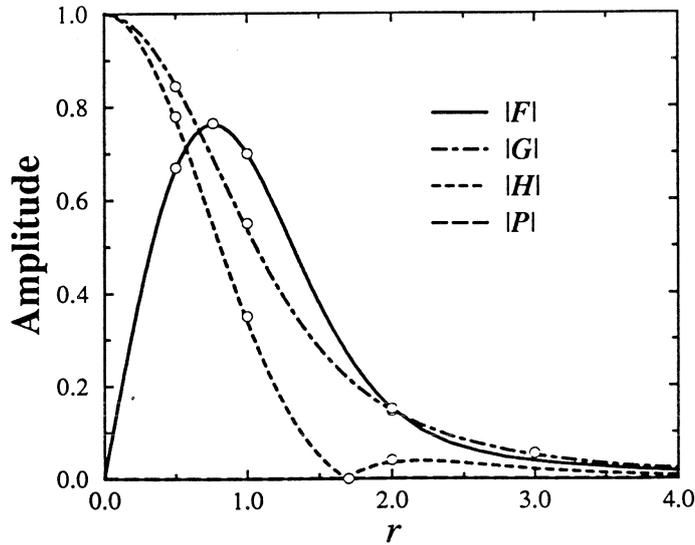


FIG. 16. Eigenfunction amplitudes $|F(r)|$, $|G(r)|$, $|H(r)|$ and $|P(r)|$ for neutral mode at $m = 1$, $a = 0$, $q = 0.7$, $\omega = 0.0425$ and $k = 0.6$, with normalisation condition $\max[|F(r)|, |G(r)|, |H(r)|, |P(r)|] = 1$. Continuous or dashed lines: present approach; (o) inviscid results obtained by Duck and Khorrami³⁹.

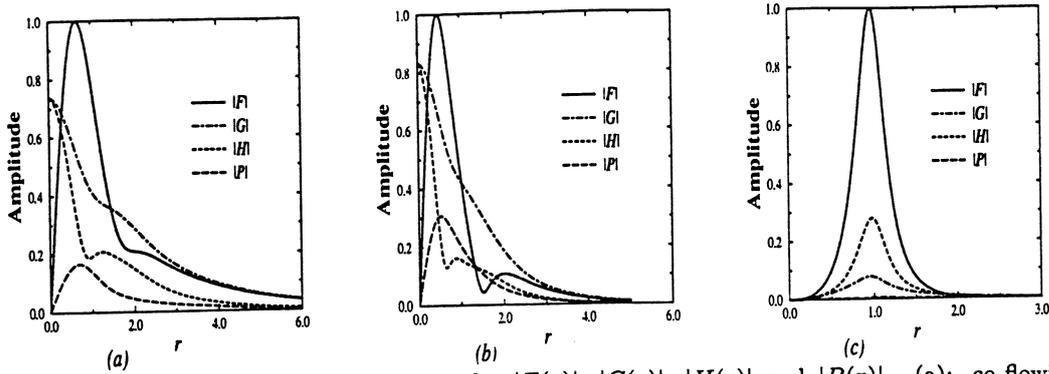


FIG. 17. Spatial eigenfunction amplitudes $|F(r)|$, $|G(r)|$, $|H(r)|$ and $|P(r)|$. (a): co-flowing wake, $m = -1$, $a = -1.268$, $q = 0.6$, most amplified downstream k^- -spatial wave at $\omega = -0.78$, $k = (0.454, 1.276)$, $r_c = (0.065, -0.485)$. (b): co-flowing jet $m = -1$, $a = 0.01$, $q = 0.6$, most amplified downstream k^+ -spatial wave at $\omega = 0.2$, $k = (0.761, -0.336)$, $r_c = (0.622, -0.528)$. (c): zero-external flow jet $m = -3$, $a = 0$, $q = 0.1$, most amplified downstream k^+ -spatial wave at $\omega = 0.01$, $k = (0.506, -0.139)$, $r_c = (1.005, -0.283)$.

Four typical sets of spatial eigenfunctions amplitudes are represented in Fig. 17. The normalisation condition has been specified by requiring that the maximum-maximum over all radial distances and for all $|F|$, $|G|$, $|H|$ and $|P|$ be unity. The selected eigenfunctions are associated with convectively unstable flow conditions indicated by the four full circles in Fig. 7. Fig. 17a refers to the most amplified downstream k^- -wave for the $m = -1$ mode of a *co-flowing wake* ($a = -1.268$), just outside the corresponding CI/AI transition curve of Fig. 7. Fig. 17b pertains to the most amplified downstream k^+ -wave for the $m = -1$ mode of a *co-flowing jet* ($a = 0.01$), just outside the corresponding CI/AI transition curve of Fig. 7. Finally, Fig. 17c is associated with the most amplified downstream k^+ -wave, for the $m = -3$ helical mode of a *zero external flow swirling jet* on the vertical axis of Fig. 7. For all three selected eigenfunctions, the critical point is located well into the lower half r -plane, as indicated in the figure caption and the real r -axis was chosen as integration path, as sketched in Fig. 2a.

VI. CONCLUDING REMARKS

The main results of the inviscid instability analysis are summarized in Fig. 7. Swirl is seen to promote absolute instability by greatly extending the range of external flow parameters over which AI prevails. The transitional helical mode is very sensitive to the wake-like or jet-like nature of the flow as well as to the level of swirl. On the “wake” side ($a < -0.5$), the transitional mode is always $m = -1$, which is fully consistent with the results of Monkewitz⁴⁰ for bluff body wakes, whereas on the “jet” side ($a > -0.5$), it successively takes the values $m = -1, -3, -2, -1$ as q is gradually increased. Note that higher-order helical modes ($|m| > 3$) may slightly shift the AI-CI outer boundary, as documented by Delbende *et al.*¹. Co-flowing wakes $a < -1$ may become AI as soon as the swirl exceeds $q = 0.135$. Similarly, co-flowing jets ($a > 0$) may become AI for swirl levels in the range $0.134 < q < 0.704$.

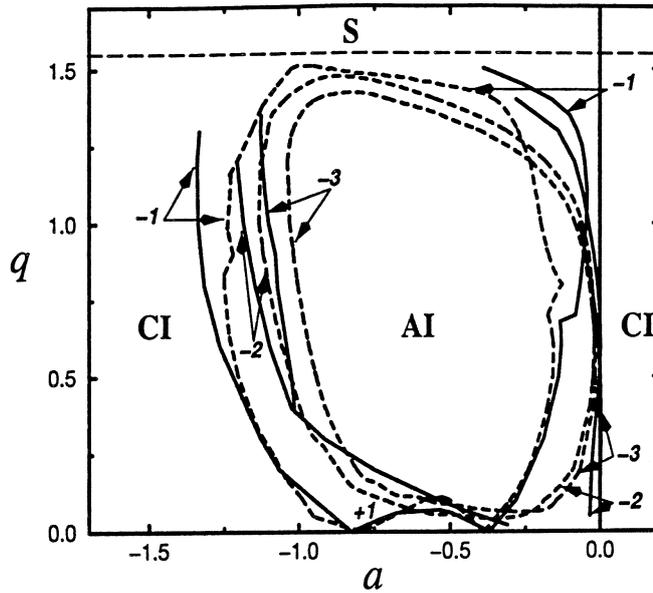


FIG. 18. AI-CI transition curves for azimuthal wavenumbers $m = \pm 1$, $m = -2$ and $m = -3$. Dashed lines: results of Delbende *et al.*¹ for $Re = 667$. Solide lines: present inviscid investigation. Number next to curves refers to the azimuthal wavenumber.

The AI-CI transition curves of this study have been derived by applying the zero-group velocity criterion of Briggs¹¹ and Bers¹², directly to the *inviscid* dispersion relation (9). In Fig. 18, these results have been compared with those obtained in Delbende *et al.*¹ by applying a suitable decomposition procedure to the computed viscous linear impulse response at the finite Reynolds number $Re = \frac{\Delta UR}{\nu} = 667$. A blow-up of the transition curves in the vicinity of zero- external flow jet axis $a = 0$ is presented in Fig. 19. Both sets of curves are in good qualitative and quantitative agreement. Finite viscous effects are seen to lead to a slight contraction of the bubble of absolute instability, especially near the upper stability boundary where viscous diffusion is likely to stabilise modes that are only weakly unstable on an inviscid basis.

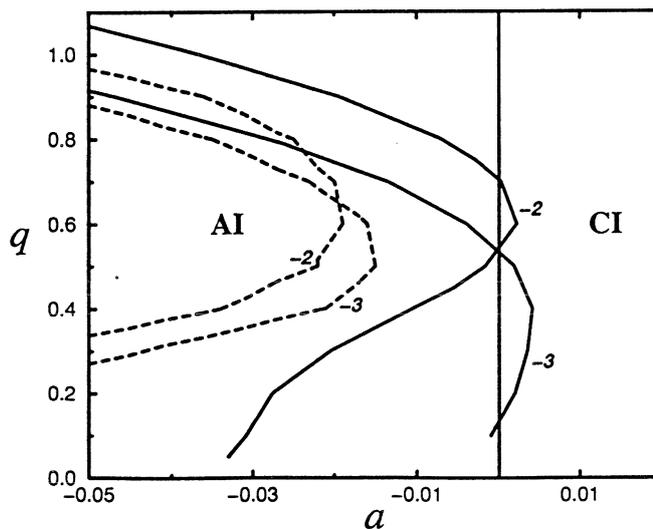


FIG. 19. Magnification near $a = 0$ of the transition curves for $m = -2$ and $m = -3$ displayed in Fig. 18. Dashed lines: results of Delbende *et al.*¹ for $Re = 667$. Solide lines: present inviscid investigation. Number next to curves refers to the azimuthal wavenumber.

In particular, viscosity at $Re = 667$ is seen to be sufficient to push the inviscid AI-CI transition curves on the “jet” side ($a > 0$) slightly to the left, into the half-plane $a < 0$. As a consequence, co-flowing jets ($a > 0$) are no-longer capable of sustaining an absolute instability at Reynolds numbers of the order of 667. By contrast, co-flowing wakes ($a < -1$) remain absolutely unstable for sufficiently large swirl at $Re = 667$. The numerical method used in the present work presents both advantages and disadvantages when compared with the impulse response decomposition procedure of Delbende *et al.*¹. The shooting method leads to very accurate results which are in excellent agreement with those of Duck and Khorrami³⁹, but convergence relies heavily on the availability of realistic guess values, such as those generated by the impulse response calculations of Delbende *et al.*¹! In near-neutral situations, where many modes are expected to coalesce, the shooting method experiences convergence difficulties.

The results of the present investigation may also be compared with the inviscid instability analysis of the Rankine vortex with axial flow recently performed by Loiseleux *et al.*⁶. As readily seen by comparing Fig. 7 with Fig. 20 of Loiseleux *et al.*⁶, the overall shapes of the AI regions in the $a - q$ plane are qualitatively similar. In both instances, counterflow does not remain a prerequisite for AI at sufficiently high swirl levels. For moderate swirl, the transitional mode on the “wake” side ($a < -0.5$) is $m = -1$ for both basic flows. On the “jet” side ($a > -0.5$), AI of the Rankine vortex may be induced through various negative helical modes, as for the Batchelor vortex. The AI region for the Rankine vortex remains open on the high q -side. According to the *viscous* calculations of Delbende *et al.*¹, the AI region for the Batchelor vortex is closed above $q \sim 1.5$. There remains to establish whether this feature persists in the inviscid limit. The present study has not conclusively settled this question. Finally, the Rankine vortex undergoes AI on the “jet” side at very low q through the axisymmetric mode $m = 0$. This possibility is obviously ruled out in the case of the Batchelor vortex, since it remains stable to axisymmetric disturbances.

According to several theoretical investigations (Chomaz *et al.*¹⁷, Monkewitz *et al.*⁴¹, LeDizès *et al.*¹⁸), the existence of a finite pocket of absolute instability in spatially developing shear-flows is known to favor the onset of self-sustained oscillations or so-called global modes. In this regard, the present work provides further support for the conjecture made by Delbende *et al.*¹: the application of swirl provides an efficient means of promoting global mode onset in wakes and jets. In jets, swirl is likely to lead to preferential selection of a variety of helical patterns $m = -1, -2, -3$. In wakes, the bending mode $m = -1$ should be singled out.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are very grateful to Ivan Delbende and Thomas Loiseleux for many fruitful and helpful discussions. Financial support was provided by Grant # 92-098 of the Direction des Recherches, Études et Techniques (DRET) of the French Ministry of Defense.

APPENDIX A

The objective of this appendix is to prove that the critical point equation $\gamma(r) = 0$ given by (1) and (5) admits at most two non-zero complex roots with $Re r \geq 0$ as soon as $mq \neq 0$. The same statement is true when $mq = 0$, provided that $(k, \omega) \neq (0, 0)$.

Upon making the change of variable $u = r^2$, equation (5) may be written as

$$\Gamma(u) \equiv -\omega + k[a + e^{-u}] + \frac{mq}{u}(1 - e^{-u}) = 0. \quad (A1)$$

Assume that, for a given pair (k, ω) , there exist three distinct non-zero complex roots u_1, u_2, u_3 of equation (A1). In such a case, the complex pair (k, ω) satisfies the set of linear equations

$$\omega - k[a + e^{-u_1}] = \frac{mq}{u_1}(1 - e^{-u_1}), \quad (A2)$$

$$\omega - k[a + e^{-u_2}] = \frac{mq}{u_2}(1 - e^{-u_2}), \quad (A3)$$

$$\omega - k[a + e^{-u_3}] = \frac{mq}{u_3}(1 - e^{-u_3}). \quad (A4)$$

Since $u_1 \neq u_2$, equations (A2), (A3) may readily be solved for k and ω to yield

$$k = k(u_1, u_2) = \frac{mq[(1 - e^{-u_2})u_2^{-1} - (1 - e^{-u_1})u_1^{-1}]}{e^{-u_2} - e^{-u_1}}, \quad (A5)$$

$$\omega = \omega(u_1, u_2) = k(u_1, u_2)(a + e^{-u_1}) + \frac{mq}{u_1}(1 - e^{-u_1}). \quad (A6)$$

If $mq \neq 0$, then, according to (A5), $k \neq 0$. The pair (k, ω) specified in (A5), (A6) also satisfies the 3rd equation (A4) provided that

$$a + e^{-u_3} = a + e^{-u_1}; (1 - e^{-u_3})u_1 = (1 - e^{-u_1})u_3. \quad (A7)$$

These conditions necessarily imply that $u_1 = u_3$. Thus, the equation $\Gamma(u) = 0$ admits at most two distinct roots u_1 and u_2 . Since $u = r^2$, the original critical point equation $\gamma(r) = 0$ also admits at most two distinct roots $r_{c,1}$ and $r_{c,2}$ with $Re r \geq 0$.

Consider now the case $mq = 0$. According to (A5)-(A6), one necessarily has $(k, \omega) = (0, 0)$ and the system (A2)-(A4) is then identically satisfied. If one insists that $(k, \omega) \neq (0, 0)$, equation (A1) has at most one root, which concludes the proof.

- ¹ I. Delbende, J. M. Chomaz, and P. Huerre, Absolute/Convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response, *J. Fluid Mech.* **355**, 229 (1998).
- ² R. L. Ash and M. R. Khorrami, *Vortex Stability in Fluid Vortices* (Kluwer Academic Publishers, 1995).
- ³ M. Lessen and F. Paillet, "The stability of a trailing line vortex. Part 2. Viscous theory," *J. Fluid Mech.* **65**, 769 (1974).
- ⁴ M. Lessen and P. J. Singh, "The stability of axisymmetric free shear layers," *J. Fluid Mech.* **60**, 433 (1974).
- ⁵ M. Lessen, P. J. Singh, and F. Paillet, "The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory," *J. Fluid Mech.* **63**, 753 (1974).
- ⁶ T. Loiseleux, J. M. Chomaz, and P. Huerre "The effect of swirl on jets and wakes: Linear instability of the Rankine vortex with axial flow" *Phys. Fluids* **10**, 1120 (1998).
- ⁷ J. E. Martin and E. Meiburg, "Nonlinear axisymmetric and three-dimensional vorticity dynamics in a swirling jet model," *Phys. Fluids* **8**, 1917 (1996).
- ⁸ G. K. Batchelor, "Axial flow in trailing line vortices," *J. Fluid Mech.* **20**, 645 (1964).

- ⁹ P. Huerre and P. A. Monkewitz, Local and global instabilities in spatially developing flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473 (1990).
- ¹⁰ P. Huerre and M. Rossi, "Hydrodynamic instabilities in open flows" (In *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities* edited by C. Godrèche and P. Manneville, Cambridge University Press, pp. 81-294, 1998).
- ¹¹ R. G. Briggs, *Electron-Stream Interaction with Plasmas* (Cambridge University Press, 1964).
- ¹² A. Bers, Space-time evolution of plasma instabilities - absolute and convective," (In *Handbook of Plasma Physics*, M. N. Rosenbluth & R. Z. Sagdeev, North-Holland), I, 451 (1983).
- ¹³ C. Olendraru, A. Sellier, M. Rossi, and P. Huerre, "Absolute/convective instability of the Batchelor vortex," *C. R. Acad. Sci. Paris* **323**, Iib, 153 (1996) .
- ¹⁴ S. Leibovich, "The structure of vortex breakdown," *Ann. Rev. Fluid Mech.* **10**, 221 (1978).
- ¹⁵ S. Leibovich, "Vortex stability and breakdown: Survey and extension," *AIAA J.* **22**, 1192 (1983).
- ¹⁶ S. Wang and Z. Ruzak, "On the stability of an axisymmetric rotating flow in a pipe," *Phys. Fluids* **8**, 1007 (1995).
- ¹⁷ J. M. Chomaz, P. Huerre, and L. G. Redekopp, "A frequency selection criterion in spatially developing flows", *Stud. Applied Math.* **84**, 119 (1991)
- ¹⁸ S. Le Dizès, P. Huerre, J. M. Chomaz, and P.A. Monkewitz, "Linear global modes in spatially developing media" *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **A354**, 169 (1996).
- ¹⁹ J. H. Faler and S. Leibovich, "Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown, *Phys. Fluids* **20**, 1385 (1977).
- ²⁰ A. K. Garg and S. Leibovich, "Spectral characteristics of vortex breakdown flowfields, *Phys. Fluids* **22**, 2053 (1979).
- ²¹ P. G. Sarpkaya, "On stationary and traveling vortex breakdown," *J. Fluid Mech.* **45**, 545 (1971).
- ²² L. N. Howard and A. S. Gupta, On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows, *J. Fluid Mech.* **14**, 463 (1962).
- ²³ E. W. Mayer and K. G. Powell, "Viscous and inviscid instabilities of a trailing line vortex," *J. Fluid Mech.* **245**, 91 (1992).
- ²⁴ K. Stewartson and S. N. Brown, "Near-neutral centre-modes as inviscid perturbations to a trailing line vortex," *J. Fluid Mech.* **156**, 387 (1985).
- ²⁵ S. Leibovich and K. Stewartson, "A sufficient condition for the instability of columnar vortices," *J. Fluid Mech.* **126**, 335 (1983).
- ²⁶ M. R. Khorrami, "On the viscous modes of instability of a trailing line vortex," *J. Fluid Mech.* **255**, 197 (1991).
- ²⁷ T. B. Benjamin, "Theory of the vortex breakdown phenomenon", *J. Fluid Mech.* **14**, 593 (1962).
- ²⁸ C.-Y. Tsai and S. E. Widnall, "Examination of a group-velocity criterion for breakdown of vortex flow in a divergent duct," *Phys. Fluids* **23**, 864 (1980).
- ²⁹ G. K. Batchelor and A. E. Gill, "Analysis of the stability of axisymmetric jets," *J. Fluid Mech.* **14**, 529 (1962).
- ³⁰ M. R. Khorrami, M. R. Malik, and R. L. Ash, "Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows," *J. Comput. Phys.* **81**, 206 (1989).
- ³¹ C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill Book Company, New-York, 1978).
- ³² P. Huerre and P. A. Monkewitz, Absolute and convective instabilities in free shear layers, *J. Fluid Mech.* **159**, 151 (1985).
- ³³ M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical functions* (Dover Publications, Inc., New-York, 1965).
- ³⁴ C.C. Lin, *Hydrodynamic Stability* (Cambridge University Press, 1955).
- ³⁵ W. Wasow, "The complex asymptotic theory of a fourth-order differential equation of hydrodynamics," *Ann. Math.* **49**, 852 (1948).
- ³⁶ P. G. Drazin and W. Reid, *Hydrodynamic Stability* (Cambridge University Press, 1981)
- ³⁷ S. Le Dizès, P.A. Monkewitz, and P. Huerre, "Viscous structure of plane waves in spatially developing shear flows," *Phys. Fluids* **7**, 1337 (1995).
- ³⁸ S. Pavithran and L. G. Redekopp, "The absolute-convective transition in the subsonic mixing layers," *Phys. Fluids* **A1**, 1736 (1989).
- ³⁹ P. W. Duck and M. R. Khorrami, "A note on the effects of viscosity on the stability of a trailing-line vortex, *J. Fluid Mech.* **245**, 175 (1992).
- ⁴⁰ P. A. Monkewitz, "A note on vortex shedding from axisymmetric bluff bodies," *J. Fluid Mech.* **192**, 561 (1988).
- ⁴¹ P. A. Monkewitz, P. Huerre, and J. M. Chomaz, "Global linear stability analysis of weakly non-parallel shear flows," *J. Fluid Mech.* **251**, 1 (1993).

Annexe D

Absolute-convective instability of the Batchelor vortex in
the viscous cas

Cornel OLENDRARU and Antoine SELLIER

Soumis au *Journal of Fluid Mechanics*, Décembre 1998

Absolute-convective instability of the Batchelor vortex in the viscous case

C. Olendraru and A. Sellier

Laboratoire d'Hydrodynamique, CNRS-UMR 156, Ecole Polytechnique F-91128 Palaiseau, France

A numerical procedure is employed to investigate the spatial instability of the familiar two-parameters Batchelor vortex (see (2.1)). As a consequence one locates for different Reynolds and azimuthal wavenumbers the Absolute-Convective transition curves in the $a-q$ plane of swirl and co-flow parameters. The critical modes which define this outer curve are found to deeply depend both on the nature of the vortex (jet for $a > -0.5$ or wake for $a < -0.5$), the swirl magnitude q and the Reynolds number Re . For $Re = 667$, the zero-coflow vortex ($a = 0$) is seen to be absolutely unstable with respect to azimuthal modes $m = -2$ or $m = -3$ on the "jet" side ($a > -0.5$) and within a moderate range of swirl. This is not true any more for $Re = 100$. The pocket of absolute instability pertaining to viscous bending modes $m = \pm 1$ (which are the spatial counterparts of the asymmetric viscous modes first reported by Khorrami (1991) and further confirmed by Mayer & Powell (1992)) is also determined for different Reynolds numbers. These basic modes are found to be critical on the "jet" side ($a > 0.5$) and for very small swirls only. For large Reynolds numbers and swirls near-neutral centre-modes are found to define the transition curves. Such modes were predicted, at moderate values of the azimuthal wavenumber, by Stewartson & Brown (1985) in their temporal analysis of the inviscid limit.

1. Introduction

For many decades considerable efforts have been directed toward understanding the stability characteristics of vortices with axial flow. Depending both on the amount of swirl and on the outer uniform axial velocity such kind of flows may indeed be highly sensitive to perturbations. In many technical applications it can even result in breakdown, i. e. in sudden changes in the structure of the vortex core. Among others examples one should cite the slowly evolving trailing line vortices on a delta wing and confined vortices such as swirling flows through pipes. To the present day, the instability properties have been mainly investigated by applying a linear instability analysis (for a complete review see Ash & Khorrami 1995).

The present study takes as mean-velocity profile the familiar Batchelor vortex (Batchelor (1964)) since it both satisfactory approximates slowly evolving trailing vortices (Fahler & Leibovich 1977; Garg & Leibovich 1979) and also (Leibovich 1983) experimental velocity profiles for vane-guide-generated pipe vortices (except at very low Reynolds numbers where wall effects become important). Only two nondimensional control parameters describe this axisymmetric and parallel rotating flow (see (2.1)): the swirl ratio q and the external axial flow parameter a .

The strictly temporal (for given real axial wavenumber k and unknown complex frequency ω) instability analysis of the Batchelor $a-q$ vortex has been extensively addressed both in the inviscid and in the fully viscous cases. For those investigations one actually sets $a = 0$ (by invoking a Galilean shift which only affects ω_r) and, for different azimuthal wavenumbers m (see the normal modes decomposition (2.2)) and Reynolds numbers Re , looks for the temporal modes $\omega(k, m, q, Re)$ solutions to the associated dispersion relation. For each given data $(k; m, q, Re)$ several modes may arise: the 'primary' mode (i.e. the most unstable eigenvalue ω) and the higher modes. Since $\omega(k; m, q, Re) = \omega(k; -m, -q, Re)$ with certain associated eigenfunctions which are opposite (see Mayer & Powell 1992, equations (8a)-(8b)), one actually considers positive swirl parameters only. In the inviscid case and for $q = 0$ only the bending modes $m = \pm 1$ are unstable, i.e. with positive growth rate ω_i (see Lessen & Singh 1974). The influence of strictly positive swirl on each inviscid mode, denoted by $\omega(k; m, q)$, was found to deeply depend on its azimuthal wavenumber (see Lessen *et al.* 1974 for 'primary' modes and Duke & Foster 1980, Mayer & Powell 1992 for higher modes) in the following manner (possibly except for certain near-neutral centre-modes exhibited by Stewartson & Brown (1985) for moderate values of m and remaining unstable at high q within specific ranges of swirl, even for $q \geq 1.5$): inviscid modes are stable as soon as $m = 0$ or $m \geq 2$; unstable only within the range $0 \leq q \leq q_1 \sim 0.0739$ if $m = +1$ and both highly unstable for moderate values of q and gradually damped for q slightly approaching 1.5 if $m \leq -1$ (with growth rate ω_i increasing as $-m$ increases). As established by Leibovich & Stewartson (1983) (and later numerically confirmed by Mayer & Powell 1992) as $-m \rightarrow \infty$ the maximum growth rate admits a finite limit and the associated eigenfunctions become strongly localized (one even speaks of 'ring' modes). Moreover, Stewartson & Capell (1985) but also Leibovich & Stewartson (1983) showed that, for large values of $-m$, the 'primary' and higher inviscid modes tend to coalesce near the neutrality. This behavior results in numerical troubles when computing marginally unstable modes. The addition of viscosity

is generally believed to have, for unconfined flows, a stabilizing influence on the inviscid modes. For fine scale perturbations such as modes of large values of $-m$ this is indeed the case (see Mayer & Powell 1992): those modes $\omega(k; m, q, Re)$ are stable under a critical Reynolds number $Re_c(m) = O(m^2)$ and quickly asymptote, for $Re \gg Re_c(m)$, to the inviscid mode $w(k, m, q)$. For disturbances of low to medium azimuthal wavenumber the role played by the viscosity becomes rather complicated: Lessen & Paillet (1974) found a critical Reynolds number for the 'primary' modes $m = -1, m = -2$ and $m = -3$ but Khorrami (1992) reports that, for a certain range of Reynolds number, the viscosity destabilizes the bending mode $m = -1$ (with mode switching and mode crossing phenomena between 'primary' and higher asymmetric modes $m = -1$). Moreover, Khorrami (1991) found an axisymmetric ($m = 0$) and a bending ($m = 1$) center viscous modes with growth rates several orders of magnitude smaller than those of highly unstable inviscid modes and without any associated higher mode. These viscous modes only exist within a domain of the $q - k$ space where no inviscid instability has been found. For $Re < 100$, Mayer & Powell (1992) also discovered higher and near-neutral viscous helical modes with $m = 1$ and small axial wavenumbers. For large Reynolds numbers, Duck & Khorrami (1992) developed an asymptotic analysis to study the viscous modes which become neutrally stable with $w_i = O(Re^{-1})$.

The purely temporal analysis brings some lights on the vortex breakdown phenomenon which may be seen as a sudden transition between a jetlike and a wakelike rotating flow associated with an expansion of the vortex core (for a thorough review consult Leibovich 1978, 1983 and Delery 1990). Before bursting the vortex exhibits within its viscous core a stagnation point which is followed by an axial interval of intricated nature (presenting one or several regions of reverse axial flow). Garg & Leibovich (1979) experimental investigations showed that time-average velocity profiles at different stations both upstream or downstream this stagnation point were similar to Batchelor profiles respectively with $q > 1.5$ (i.e. temporally stable) and $q < 1.5$ (i.e. temporally unstable). They also found the downstream flow to promote only bending disturbances $m = \pm 1$. However, the strictly temporal analysis fails to predict the whole bursting characteristics. Imitating Benjamin (1962) one may also try to explain the vortex breakdown as a transition this time between an incoming supercritical flow (i.e. which propagates perturbations downstream only) and a subcritical outgoing flow (i.e. which authorizes both upstream and downstream disturbances). Originally developed for axisymmetric, non-dispersive and low-wavenumber waves by Benjamin this idea has been further applied to the case of arbitrary temporal perturbations by Tsai & Widnall (1980). The previous supercritical or subcritical nature of an open flow somewhat appears analogous to the extended concept of respectively convectively or absolutely unstable nature of this flow. These latter notions, which actually require a fully spatio-temporal analysis, have been pioneered in spatio-temporal plasma instabilities (Briggs 1964; Bers 1975, 1983) and recently applied to fluid-dynamical instabilities both in parallel and weakly spatially developing open flows (see for instance Huerre & Monkewitz 1990). The nature of a given flow depends on the large time asymptotic behavior of the linear impulse response it develops when forced by a localized source: the flow is convectively unstable if the amplified disturbances move away from the source and absolutely unstable when amplified perturbations invade the entire flow.

For a linear instability analysis the absolute-convective nature is obtained by applying the Briggs-Bers criterion to the secular relation for fully complex couple (ω, k) . Fortunately, one may content oneself (see §4.2) with somewhat 'spatial' investigations (given complex frequency ω and unknown complex axial wavenumber k) in determining the absolute-convective nature of the instability together with the associated transition curves in the space of control parameters. This pleasant feature motivates the present spatial instability analysis of the Batchelor $a - q$ vortex. Contrary to the temporal case it is not possible to restrict those spatial investigations to the case $a = 0$. In the inviscid case, Olendraru *et al.* (1996; 1998) recently employed a shooting method to study the spatial growth rate of the 'primary' helical spatial modes $m = \pm 1, m = -2$ and $m = -3$ versus the swirl and co-flow parameters q and a . They also located the pertaining absolute-convective instability transition curves in the $a - q$ parameter plane by numerically applying the Briggs-Bers criterion to the inviscid dispersion relation. For $Re = 667$, Delbende *et al.* (1998) also determine those transition curves by a numerical study of the linear impulse response. In both works and for a moderate swirl value, an amount of swirl is found to enlarge the region of absolute instability. Moreover, on the "jet" side ($a > -0.5$) as the co-flow parameter a drops from zero the first transition takes place for an helical mode depending on the swirl value. This is not the case on the "wake" side ($a < -0.5$) where the helical modes $m = \pm 1$ always give the first detected transition as a increases from -1.5 . Contrary to the viscous case ($Re = 667$), in the inviscid study transitions even occur for $a = 0$ on the "jet" side (for azimuthal wavenumbers $m = -2$ or $m = -3$ and moderate values of q). Unfortunately, both Olendraru *et al.* (1998) and Delbende *et al.* (1998) only dealt with the most spatially amplified modes despite other favoured transitions might concern higher modes. How both the 'primary' and higher spatial modes depend on the viscosity is thereafter a basic open question. As in temporal analyses important mode crossing and mode switching phenomena are likely to happen. How the viscosity affects the absolute-convective transition curves location in the $a - q$ parameter plane is also of primary interest. The present work addresses such questions by employing a Chebyshev spectral collocation method.

The paper is organized as follows. The next section presents the well-known governing eigenvalue problem of interest for this study. The employed spectral method is briefly accounted for in §3. The whole §4 reports and

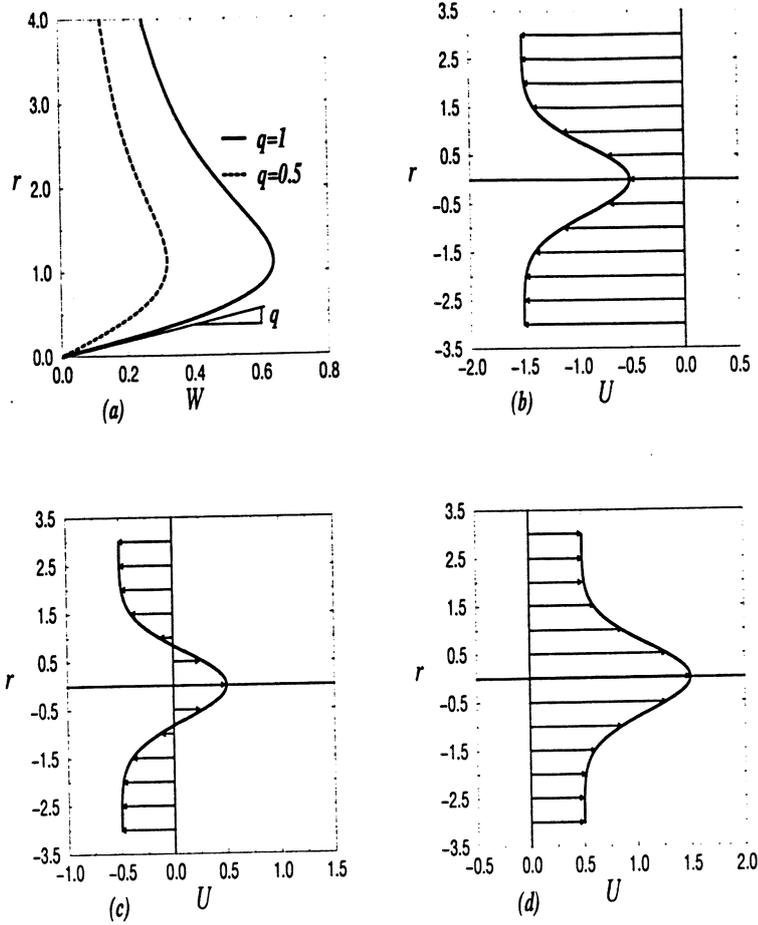


Figure 1: Velocity profiles as a function of the swirl and co-flow parameters q and a . (a): Azimuthal velocity profiles for $q = 0.5$ and $q = 1.0$. Axial velocity profiles for a co-flowing wake (b); counter-flowing wakes/jets (c) and a co-flowing jet (d).

comments numerical results. For a few azimuthal wavenumbers ($m = -1, m = -2$ and $m = -3$) it deals with inviscid or viscous amplified spatial modes. Some of those spatial modes exhibit crossing or switching phenomena. The absolute-convective instability transition branches are drawn in the $a - q$ plane of control parameters for different Reynolds numbers. This task is achieved by carefully applying the Briggs-Bers criterion to the spatial branches.

2. Eigenvalue problem

If one selects as length scale the typical vortex core size R , the Batchelor $a - q$ profile admits, in non-dimensional cylindrical coordinates (r, θ, x) , the well-known form

$$V = 0; \quad W(r) := q[1 - e^{-r^2}]/r; \quad U(r) := a + e^{-r^2} \quad (2.1)$$

where (V, W, U) designate the (r, θ, x) non-dimensional velocity components. From (2.1) it follows that the velocity scale, ΔU , is the difference between the centreline and outer axial velocities whilst the co-flow parameter a indicates the outer axial velocity. As illustrated in figure 1(a-d), different values of a result in different profiles: co-flowing wakes if $a < -1$, counter-flowing jets or wakes for $-1 < a < 0$ and also co-flowing jets if $a > 0$. Henceforth, the $a - q$ plane is split into two regions: the "jet" side for $a > -0.5$ and the "wake" side for $a < -0.5$. Clearly, the swirl parameter q is proportional to the maximum swirling velocity. Finally, if ν denotes the kinematic viscosity of the incompressible fluid, the Reynolds number Re , based on the core size and the axial velocity excess (or defect) ΔU , reads $Re = \Delta UR/\nu$.

By invoking the modal decomposition the linear stability analysis of the parallel profile (2.1) consists in superimposing to the base flow velocity disturbances (v', w', u') and pressure disturbance p' of the following form

$$(v', w', u', p') = Re\{[iF(r), G(r), H(r), P(r)]e^{i(kx+m\theta-\omega t)}\} \quad (2.2)$$

where F, G, H and P are the eigenfunctions, k the complex axial wavenumber, m the entire azimuthal wavenumber

and ω the complex frequency. Upon substitution into the linearized Navier-Stokes equations (around the basic flow (2.1)) one deduces (see Ash & Khorrami 1995) the well-known equations

$$F' + \frac{F}{r} + \frac{mG}{r} + kH = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{iF''}{Re} + \frac{iF'}{rRe} - \left[\omega - \frac{mW}{r} - kU + \frac{i(m^2 + 1)}{r^2 Re} \right] F - 2 \left[\frac{im}{r^2 Re} - \frac{W}{r} \right] G - P' = \frac{ik^2 F}{Re}, \quad (2.4)$$

$$\frac{G''}{Re} + \frac{G'}{rRe} + \left[i\omega - \frac{imW}{r} - ikU - \frac{m^2 + 1}{r^2 Re} \right] G - \left[iW' + \frac{2m}{r^2 Re} + \frac{iW}{r} \right] F - \frac{imP}{r} = \frac{k^2 G}{Re}, \quad (2.5)$$

$$\frac{H''}{Re} + \frac{H'}{rRe} + \left[i\omega - \frac{imW}{r} - ikU - \frac{m^2}{r^2 Re} \right] H - iU'F - ikP = \frac{k^2 H}{Re}, \quad (2.6)$$

where a prime denotes d/dr . For our unconfined flow, additional far-field conditions read

$$F(\infty) = G(\infty) = H(\infty) = P(\infty) = 0 \quad (2.7)$$

whilst the requirement that all perturbations remain both bounded and single valued on the centreline write (see Batchelor & Gill 1962; Mayer & Powell 1992)

$$F(0) = G(0) = H(0) = P(0) = 0 \quad \text{if } m^2 > 1, \quad (2.8)$$

$$H(0) = P(0) = 0 \quad \text{and} \quad F'(0) = G'(0) = 0 \quad \text{if } m^2 = 1, \quad (2.9)$$

$$F(0) = G(0) = 0; H(0) \quad \text{and} \quad P(0) \quad \text{finite if } m^2 = 0. \quad (2.10)$$

For given control parameters (a, q, Re) and azimuthal wavenumber m the equations (2.3)-(2.10) constitute an eigenvalue problem since a non-zero solution (F, G, H, P) exists if and only if the complex couple (k, ω) fulfills a secular relation $\mathcal{D}(k, \omega; m, a, q, Re) = 0$. The present work focuses on spatial investigations: for a given and complex frequency ω we seek the branches $k(\omega; m, a, q, Re)$ solutions to the previous secular equation (and, if necessary, the associated eigenfunctions). Contrary to temporal investigations, it is not possible any more to restrict this study to the case $a = 0$. However, if (a, m, q) is replaced by $(a, -m, -q)$ the solution (F, G, H, P) to (2.3)-(2.10) is readily replaced by $(F, -G, H, P)$ for the same complex numbers k and ω . Thus, we only pay attention to negative azimuthal wavenumbers m and allow both negative and positive swirl values.

3. Numerical Procedure

As clearly highlighted by Khorrami *et al.* (1989) the Chebyshev spectral method (see Gottlieb & Orszag 1989) provides an accurate and powerful tool when numerically solving eigenvalue problems. This approach was successively applied by Khorrami (1991) or Mayer & Powell (1992) to the temporal stability analysis of the Batchelor vortex. Here we employ the collocation method for our 'spatial' investigations. Only the main steps of the numerical procedure are briefly reported and for additional details the reader is directed to Khorrami *et al.* (1989).

We introduce a generalized eigenvector $X = (F, G, H, kF, kG, kH, P)$ and impose the far-field boundary conditions (2.7) at a large but finite value $r_{max} \gg 1$. The basic flow (2.1) quickly decays to zero as r increases. Instead of clustering Chebyshev collocation points near $r = r_{max}$ we thereafter concentrate about half of these points between the centreline $r = 0$ and $r_c \ll r_{max}$. As achieved by Malik *et al.* (1985), this may be obtained by employing the following two-parameter algebraic transformation

$$\frac{r}{r_c} = [1 + \eta] / [1 - \eta + \frac{2r_c}{r_{max}}] \quad (3.1)$$

that introduces the Chebyshev variable η and maps the Chebyshev space $[-1, 1]$ onto the physical domain $[0, r_{max}]$. When rewritten and further discretized in terms of this new variable η , the original problem (2.3)-(2.10) yields, for the discretized vector $X = X(\eta)$, the generalized eigenvalue problem

$$AX = kBX \quad (3.2)$$

with space matrices A, B of dimension $7N \times 7N$ where N is the number of Chebyshev polynomials. Actually, since k^2 only arises in the equations (2.4)-(2.6) the matrix B is singular. The discretized problem (3.2) is thereafter solved by using the SCILIB routines called CGEGS and CGEVS. Through a Schurr decomposition algorithm these routines respectively provide the spectrum \mathcal{S}_N of eigenvalues k pertaining to the discretized problem (3.2) and, if necessary, the generalized eigenfunctions X . However, many elements of \mathcal{S}_N are spurious eigenvalues due to the discretization. As for temporal investigations (see Mayer & Powell 1992) and contrary to the physical modes, the location of those spurious modes in the complex plane is very sensitive to N . Hence, we only retrieve a few physical modes by comparing the set \mathcal{S}_N and $\mathcal{S}_{N'}$ for $N' > N$. Moreover, as explained by Huerre & Monkewitz

N	mode 1: $\omega = 0.1$	mode 2: $\omega = -0.15$
60	0.669 367 151 -0.181 999 974i	0.367 202 058 -0.220 458 484i
70	0.669 365 472 -0.181 997 057i	0.367 202 508 -0.220 457 875i
80	0.669 363 836 -0.181 994 107i	0.367 202 981 -0.220 457 371i
100	0.669 360 884 -0.181 988 583i	0.367 203 916 -0.220 456 594i

Table 1: Convergence behavior of the two 'primary' bending modes $m = -1$ versus number N of Chebyshev polynomials and for $a = 0, q = 0.7, Re = 667, r_c = 3, r_{max} = 100$.

r_{max}	mode 1: $\omega = 0.1$	mode 2: $\omega = -0.15$
80	0.669 361 381 -0.181 989 583i	0.367 203 729 -0.220 456 678i
100	0.669 363 836 -0.181 994 107i	0.367 202 981 -0.220 457 371i
120	0.669 365 149 -0.181 996 458i	0.367 202 602 -0.220 457 782i

Table 2: Convergence behavior of the two 'primary' bending modes $m = -1$ versus position r_{max} where far-field conditions are enforced and for $a = 0, q = 0.7, Re = 667, r_c = 3, N = 80$.

(1985), it is actually possible to restrict our attention to the half complex plane $Re(k) > 0$. Hence, we select k' of S_N if and only if $Re(k') > 0$ and $Min|k - k'| \leq \epsilon$ for $k \in S_N$. All computations were performed on CRAY C90 computer using 64-bit precision real and 128-bit complex arithmetic with $\epsilon = 10^{-3}, r_{max} = 100, N = 70, N' = 80$ and $r_c = 3$. Our numerical experiments suggested those choices.

As an illustration, Tables 1 and 2 above indicate for $a = 0, m = -1, Re = 667$ and $q = 0.7$ the sensitivity of the two computed 'primary' spatial modes (mode 1 for $\omega = 0.1$ and mode 2 for $\omega = -0.15$) to parameters N and r_{max} . These modes 1 and 2 are defined in §4.1. For $N = 80$ and $r_{max} = 100$ a sufficient five significant figure accuracy of the eigenvalues is obtained.

4. Numerical results

This section presents the main numerical results we obtained by our spatial analysis. According to the Briggs-Bers zero-group-velocity criterion (see Huerre & Rossi 1998) we determine the absolute-convective nature of the instability by locating, in the complex k -plane, saddle points k_0 of the secular equation which not only obey $\partial\omega/\partial k(k_0) = 0$ but are also the pinching point of distinct $k^+(\omega)$ and $k^-(\omega)$ branches entirely lying for sufficiently large $\omega_i > 0$ respectively in the upper and lower half k -planes. If $\omega_0 := \omega(k_0)$, one speaks of absolutely or convectively unstable basic flow respectively for $\omega_{0,i} > 0$ and $\omega_{0,i} < 0$. Note that the absolute-convective transitions may only take place at $\omega_{0,i} = 0$. A strictly spatial study is thereafter sufficient to locate the transition curves in the $a - q$ plane of control parameters. However, one also needs fully spatial calculations to check the good behavior of pinching branches k^+ and k^- in vicinity of k_0 as ω_i exceeds zero. For ω , the amplified solutions $k^+(\omega)$ and $k^-(\omega)$ admit a physical sense only for a convectively unstable basic flow (see Huerre & Monkewitz 1990). In such circumstances, the $k^+(\omega)$ and $k^-(\omega)$ branches are respectively associated with the 'right-hand side' ($x > 0$) and the 'left-hand side' ($x < 0$) large-time responses developed by the basic flow when periodically forced at real frequency ω at point $x = 0$. Thus, for a convectively unstable flow the strictly spatial branches $k^+(\omega)$ or $k^-(\omega)$ are amplified respectively if $-k_i^+ > 0$ and $k_i^- > 0$. Moreover, as long as the flow remains convectively unstable $k_i^+(\omega) \geq k_i^-(\omega)$ for ω real. On the "jet" side ($a > -0.5$), since the fluid mainly flows to the right ($x > 0$) the modes k^- and k^+ are respectively the "upstream" and "downstream" branches. On the "wake" side ($a < -0.5$), the solution k^- becomes the "downstream" branch and k^+ is the "upstream" branch.

4.1 Purely spatial modes

First we report numerical results for amplified and purely spatial branches $k^+(\omega; m, a, q, Re)$. As previously noticed, we may only consider $m \leq 0$ with either positive or negative swirl values. On the basis of the conclusions of the next subsection, the reader may check that we only propose results for a convectively unstable Batchelor vortex, i.e. that the branches k^+ under consideration indeed admit a physical meaning. The figure 2 displays the spatial growth rate, $-k_i^+$, versus the real frequency ω for the amplified bending modes $m = -1$ of a swirling jet ($q = 0.6$) with zero external flow ($a = 0$) and for $Re = 2000$. The associated branches k^- actually lie in the region $-k_i^- > 0.36$ and thereby are damped. For $Re = 2000$, seven amplified modes k^+ exist with mode 2 crossing modes 1 and 3. Thus, the 'primary' mode, i.e. the most amplified one, depends on the frequency range. Only modes 1 to 3 are amplified for a positive frequency. The modes 1 and 2 have been previously alluded to in Tables 1, 2 and 3 but for $q = 0.7$ and $Re = 667$.

The viscosity stabilizes the previous modes. For instance, see figure 3, only modes 1 and 2 are still amplified for $Re = 50$. As the Reynolds number increases from 50 the other amplified modes arise for different Reynolds

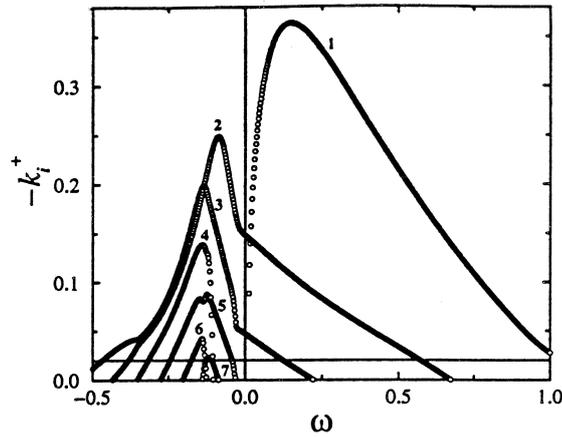


Figure 2: Spatial growth rate curves $-k_i^+$ of helical modes $m = -1$ versus real frequency ω for $a = 0, q = 0.6$ and $Re = 2000$.

branche	1	2	3	4	5	6	7
Re_e	20.9	47.6	167.4	428	861.2	1521	1931

Table 3: Reynolds number of emergence, Re_e , pertaining to different spatially amplified and inviscid k^+ branches of azimuthal wavenumber $m = -1$ and for $a = 0, q = 0.6$. Mode number is indicated next to each curve.

numbers of emergence Re_e reported, for $q = 0.6$, in Table 3.

Note that $Re_e > Re_c$ where the critical Reynolds number Re_c (obtained by changing the swirl parameter q) would be also obtained by a temporal study since, as noted by Gaster (1962), both temporal and spatial investigations join at the neutrality. For Re between 50 and 2000 the mode hierarchy remains described by figure 2 (except the crossing of modes 2 and 3 taking place near $Re = 1580$). The figure 3 only indicates the behavior of the 'primary' modes 1 and 2 versus Re . For mode 2 the unstable region expands very rapidly as Re increases whilst it is slightly modified for mode 1. For the moderate swirl value $q = 0.6$, each curve quickly asymptotes to its inviscid limit which is obtained by a shooting method (see Olendraru *et al.* 1996). This latter remark also holds for other modes 3 to 7. Thus, the seven modes exhibited by figure 2 are inviscid modes. Beyond $Re = 2000$, additional amplified inviscid modes may occur together with numerical difficulties due to the critical layers of the different inviscid modes. For a large Reynolds number there may indeed exist for each inviscid mode k of the Batchelor profile (see Olendraru *et al.* 1998) zero, one or two non-zero associated complex critical point z such that $Re(z) \geq 0$ and

$$kU(z) - \omega + mW(z)/z = 0. \quad (4.1)$$

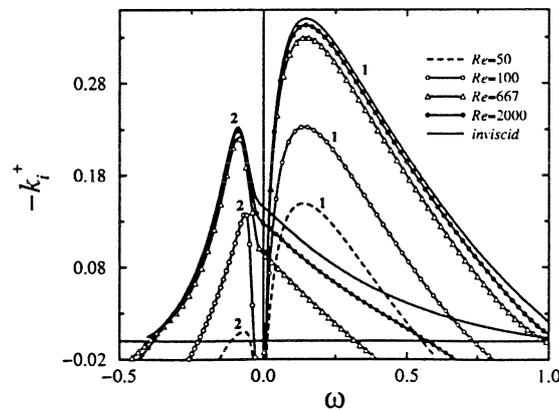


Figure 3: Spatial growth rate curves $-k_i^+$ of 'primary' modes 1 and 2 for different Reynolds numbers and $a = 0, q = 0.6, m = -1$. Mode number is indicated next to each curve.

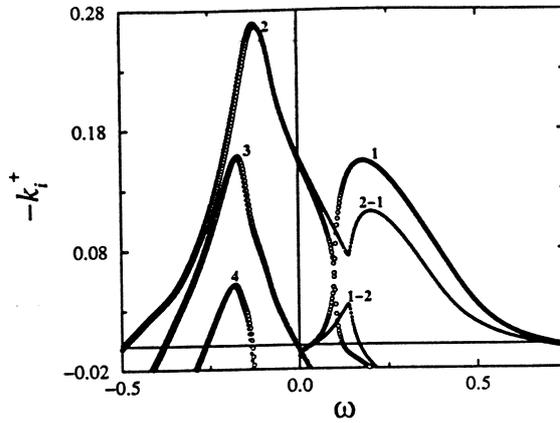


Figure 4: Mode switching for $a = 0, Re = 667$ and $m = -1$ (○) $q = 0.725$ and (●) $q = 0.74$. Mode number is indicated next to each curve.

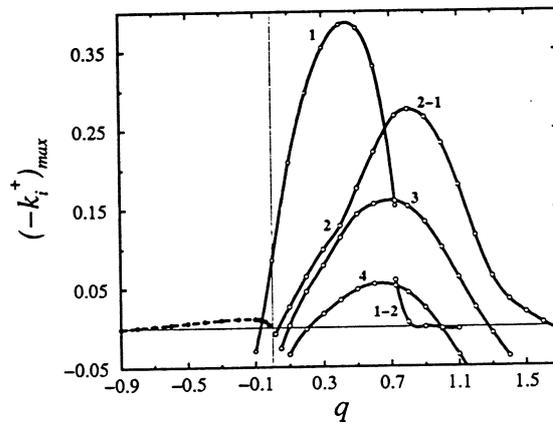


Figure 5: Maximum growth rates $(-k_i^+)_{max}$ of helical modes $m = -1$ versus swirl parameter for $a = 0$ and $Re = 667$. Inviscid mode number is indicated next to each solid line. The dashed line pertains to the viscous mode appearing for negative swirl values.

It may happen that at least one viscous sector pertaining to those critical points intersects the vortex centreline. In the region of intersection this results in large derivatives of the associated eigenfunctions and this feature might prevent the spectral method from catching the involved inviscid mode k with a reasonable number of Chebyshev polynomials (if a critical point lies near the domain $[0, r_{max}]$). In such instances, only a complex deformation of the real contour $[0, r_{max}]$ (in accordance with Lin's criterion) is able to give the solution k at a moderate CPU cost. Such a procedure was implemented by Olendraru *et al.* (1998) for the strictly inviscid case and Mayer & Powell (1992) for temporal investigations in the viscous case.

Swirl has been found to affect the previous spatial modes. For $Re = 667$, one actually observes that, as q increases from 0.6, the previous mode 2 becomes more amplified than mode 1 (see figure 4. for $q = 0.725$). Moreover, a mode switching phenomenon, involving 'primary' modes 1 and 2, takes place between $q = 0.725$ and $q = 0.74$. The figure 4 shows the occurrence of hybrid modes 2-1 and 1-2 that replace the original modes 1 and 2 for q large enough. For temporal investigations mode switching was also encountered by Khorrami (1992) for the Batchelor vortex and Cotton & Salven (1981) for the Hagen-Poiseuille flow. Observe that the hybrid mode 2-1 is amplified in a large range of frequencies. This is not the case of the hybrid mode 1-2.

The figure 5 displays, for the bending modes $m = -1$ and $Re = 667$, the maximum growth rates $(-k_i^+)_{max}$ of each amplified mode as the swirl parameter q changes and is either positive or negative. As suggested by Table 4, previous inviscid modes 5, 6 and 7 remain stable for all values of q . Note that each other inviscid mode 1 to 4 or hybrid modes 2-1 and 1-2 are amplified only within a specific range of swirl parameter.

Moreover, as q decreases from zero another weakly amplified mode is found to exist within a large range of negative swirl. As detailed by figure 6, this new mode exhibits growth rates an order of magnitude smaller than those of previous inviscid modes. Such a mode is indeed a viscous mode which joins at the neutrality the

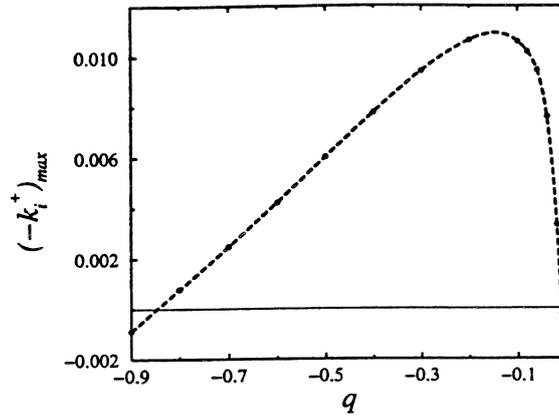


Figure 6: Maximum growth rate $(-k_i^+)_{max}$ of the viscous bending mode $m = -1$ versus swirl parameter for $a = 0$ and $Re = 667$.

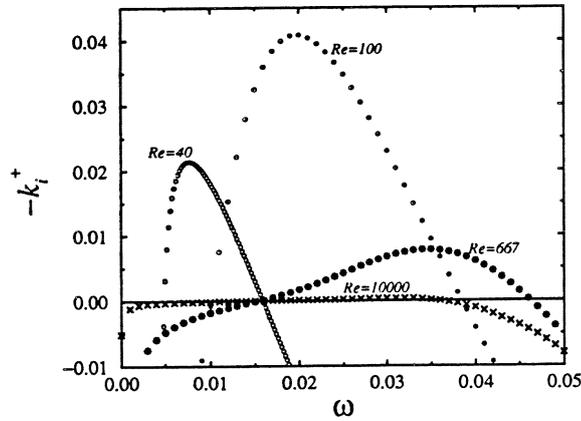


Figure 7: Growth rate curves of the viscous mode $m = -1$ versus Reynolds number for $a = 0, q = -0.4$. (o) for $Re = 40$; (•) for $Re = 667$; (◊) for ($Re = 667$ and \times for $Re = 10000$.)

temporal viscous mode first alluded to by Khorrami (1991) and further confirmed by Mayer & Powell (1992). By displaying its growth rate curves for different Reynolds numbers, the figure 7 indeed highlights the viscous nature of this mode: the mode is amplified only within a certain range of moderate Reynolds numbers.

As clearly reported by the figure 5 all the inviscid modes are damped as q roughly exceeds 1.6 for $Re = 667$. As the Reynolds number increases the swirl threshold increases too. For instance, if $Re = 2000$ the figure 8 shows that, at high swirls, the mode 3 is still (weakly) amplified up to the threshold value $q \sim 2.1$ whilst the mode 2 - 1 is damped. The figure 9 details in the complex k -plane the behavior of these modes 2 - 1 and 3 as q increases from 1.2 to 2.2. Note that the growth rate of these modes decreases for an addition of swirl.

Since $k(\omega; m, a, q, Re) = k(\omega; -m, a, -q, Re)$ the previous results pertaining to the helical mode $m = -1$ also apply to the bending modes $m = 1$ (by replacing q by $-q$).

4.2 Absolute-convective transitions in the $a - q$ plane

Each of the previous results pertains to the case $a = 0$. When the co-flow parameter changes new phenomena may occur such as absolute-convective transitions. For given parameters (m, q, Re) we first detect saddle points k_0 in the complex k -plane by changing, for real frequency, the co-flow parameter a . By authorizing complex frequencies, the present spatial study further allows us to examine the behavior of the pinching spatial modes near each detected saddle point k_0 . According to the Briggs-Bers criterion this behavior confirms or not the occurrence of a transition, i.e. that those modes are indeed k^+ and k^- branches. If there is a transition we speak of a "good" saddle point k_0 . On the "jet" side ($a > -0.5$) we actually decrease the co-flow parameter a from a positive value until we discover such a transition whereas on the "wake" side the co-flow parameter is this time increased from a negative value. As an illustration, the figure 10 exhibits such a "good" saddle point k_0 for

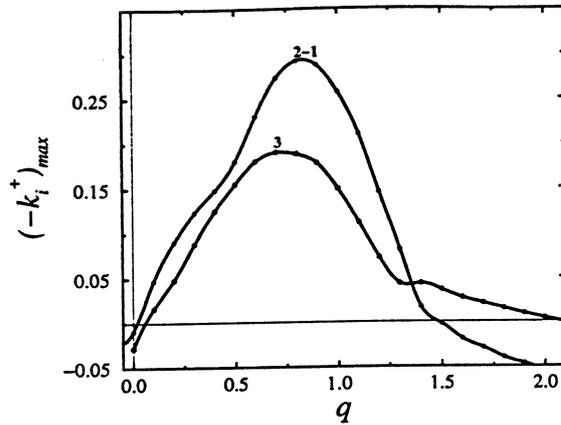


Figure 8: Maximum growth rates $(-k_i^+)_{max}$ of helical modes $m = -1$ (modes 2, 3 and hybrid mode 2-1) versus swirl parameter for $a = 0$ and $Re = 200$. Inviscid mode number is indicated next to each solid line.

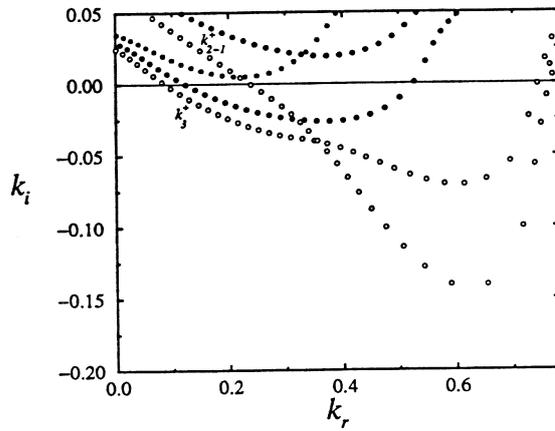


Figure 9: The inviscid modes 2-1 and 3 in the complex k -plane versus q for $m = -1$, $a = 0$ and $Re = 2000$. (\bullet) for $q = 1.2$; (\circ) for $q = 1.6$ and (\diamond) for $q = 2.2$.

azimuthal wavenumber $m = -3$ and $Re = 667$. Here, four amplified modes k^+ exist but the saddle point k_0 is the pinching point of the primary mode k^+ and its associated branch k^- . As depicted in figure 11, the constant ω_i contours indeed satisfy the previous criterion. For a sake of clarity only the k^+ and k^- branches pertaining to the primary mode have been drawn for different positive values of ω_i . As ω_i increases from zero the branch k^- actually moves in the region $Im(k) < 0$ and $Re(k) < 0$ whilst the k^+ branch lies in the upper half complex k -plane for $\omega_i = 0.3$.

The previous procedure has been carefully carried on to obtain the absolute-convective instability (AC-AI) transition curves in the $a-q$ plane both for different Reynolds numbers and azimuthal wavenumbers. For instance, the figure 12 displays such a transition curve for $m = -1$ and $Re = 100$. This closed path defines a pocket of absolute instability (AI) where spatial investigations become meaningless. Outside this domain, the flow is either stable (S) or convectively unstable (CI) within a specific range of swirl (see the boundary points F and C). Each empty circle reports a numerical result, i.e. the first occurrence of a good saddle point k_0 as q decreases on the "jet" side or increases on the "wake" side. This saddle point k_0 involves one of the amplified and inviscid k^+ or k^- branches for $m = -1$. Note that the selected inviscid mode may change along the overall transition curve. For any point of this curve and contrary to Delbende *et al.* (1998), the present method indicates which inviscid mode is selected. This is one advantage of our spectral approach. For the present curve, on the path FA the saddle point k_0 is actually the pinching point of the 'main' inviscid mode k^+ (i.e. the most amplified mode for small positive swirl as described by figure 3) and its associated branch k^- . Between A and B a mode switching phenomenon occurs (as described by figure 4) and from B to D the saddle point k_0 is this time obtained from k^+ and k^- branches from the hybrid mode 2-1 with k^+ amplified downstream ($-k_i^+ > 0$) from B to C and k^- amplified upstream ($k_i^- > 0$) from C to D . At point C , these k^+ and k^- branches of the hybrid mode 2-1

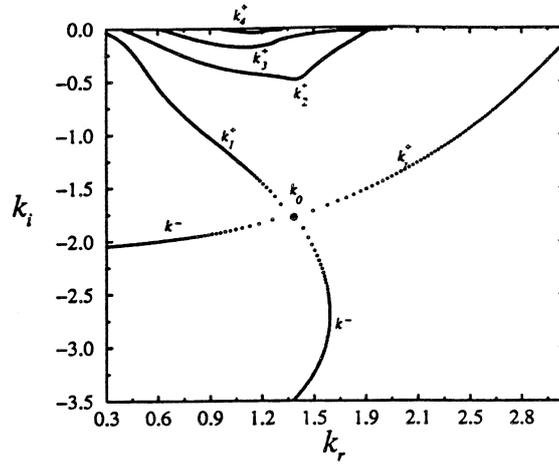


Figure 10: Saddle point k_0 in the complex k -plane for $a = 0.0021$, $q = 0.4$, $Re = 667$ and $m = -3$. In addition to the pinching branches, three other inviscid and amplified modes are reported.

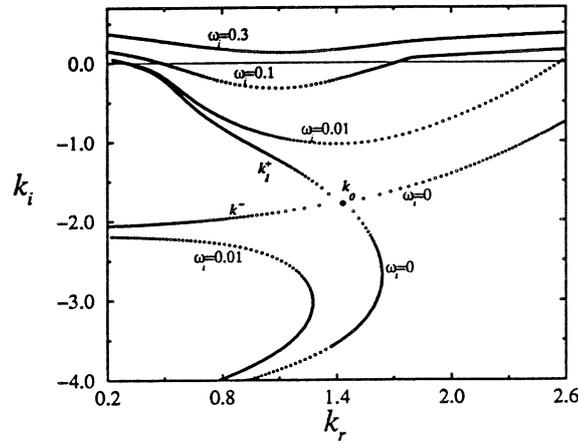


Figure 11: Isocontour level curves $\omega_i = 0.01$, $\omega_i = 0.1$ and $\omega_i = 0.3$ of the 'primary' inviscid k^+ and k^- branches of helical mode $m = -3$ and in vicinity of saddle point k_0 depicted in figure 9 for $a = 0.0021$, $q = 0.4$ and $Re = 667$.

satisfy $Im(k^+) = Im(k^-) = 0$ for $\omega = \omega(k_0)$. Another mode switching phenomenon takes place, on the "wake" side ($a < -0.5$), between points D and E . This time it involves branches k^- pertaining to the hybrid mode 2-1 and the 'main' mode. On the path EF the 'main' mode has a k^- amplified upstream. At point F , the k^+ and k^- branches of the 'main' mode satisfy $Im(k^+) = Im(k^-) = 0$ for $\omega = \omega(k_0)$. In vicinity of the basic point E several numerical results are reported. Due to the mentioned mode switching phenomena, the slope of the transition curve clearly exhibits discontinuities near points A and E .

As highlighted by figure 13 the previous bubble of absolute instability considerably widens as Re increases. At low Reynolds numbers the assumptions of self-similarity and parallel steady flow approximation used in deriving the profile (2.1) are likely to break down. Accordingly, we only report results for $Re \geq 50$. The transition curves remain defined by the inviscid modes previously mentioned for $Re = 100$. Mode switching phenomena still arise. For moderate swirl values ($0 \leq q \leq 0.7$) the sensitivity to Re is weak on the "jet" side ($a > -0.5$) and strong on the "wake" side. For q exceeding 0.7, the region of absolute instability highly depends on Re both on the "jet" and the "wake" sides. The dashed line reports the results previously obtained by Delbende *et al.* (1998) for $Re = 667$. If our work perfectly agrees with those results for moderate swirl parameters, note that discrepancies appear near the neutrality or for large swirl values. First, a numerical amount of viscosity possibly induced by the method of Delbende *et al.* (1998) might explain these differences for near-neutral modes. Secondly, Delbende *et al.* (1998) numerically calculate, for each azimuthal wavenumber m , the temporal growth rate $\sigma_m(v_g)$ 'observed' along a particular spatio-temporal ray $x/t = v_g = cste$ for the linear response of the Batchelor vortex and in the

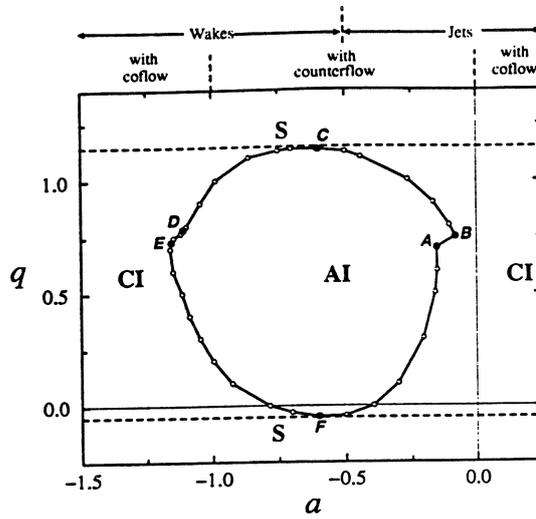


Figure 12: Overall transition curve in the $a - q$ plane of inviscid bending modes $m = -1$ for $Re = 100$. Domains of stability (S), convective instability (CI) and absolute instability (AI) are reported. Each symbol \circ indicates the numerical first occurrence of a “good” saddle point k_0 .

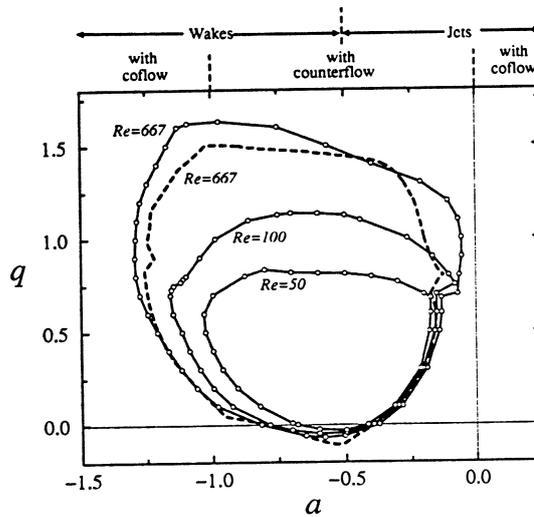


Figure 13: Overall transition curves of inviscid bending modes $m = -1$ versus Re . Number next to each solid curve refers to the corresponding value of Reynolds number. The dashed curve indicates the transition boundary obtained by Delbende *et al.* (1998) for $Re = 667$.

asymptotic régime $t \rightarrow \infty$. For large time, one actually obtains (see Huerre & Monkewitz 1990)

$$\sigma_m(v_g) = \sigma_m^d(v_g) + \frac{d}{dt}[\log \sqrt{t}], \quad (4.2)$$

where $\sigma_m^d(v_g)$ denotes the asymptotic behavior implemented by Delbende *et al.* (1998). The numerical evaluation by Delbende *et al.* (1998), $\sigma_m^{dn}(v_g)$, actually yields $0 < \sigma_m(v_g) - \sigma_m^{dn}(v_g) = O(10^{-2})$. Near the neutrality, this small shift for the temporal growth rate might also partly account for the differences observed for the transitions curves. Thirdly, as outlined in their conclusions, the finite time integration worked out by Delbende *et al.* (1998) slightly underestimates the extent of the absolutely unstable region. This third possible source of discrepancy may explain the differences far from the stability. It also agrees with the fact that our bubble of absolute instability contains the one of Delbende *et al.* (1998).

The location of transition curves has been also documented for other negative azimuthal wavenumbers m . The outlined property $k(\omega; m, a, q, Re) = k(\omega; -m, a, -q, Re)$ clearly shows that the transition curve for $-m$ is the reflection with respect to the a -axis of the one obtained for m . The figures 14 and 15 display, versus the Reynolds number, the transition boundaries pertaining to inviscid azimuthal modes, respectively for $m = -2$ and $m = -3$. Those overall curves are once more defined by the ‘main’ inviscid mode (i.e. the ‘primary’ one for small positive swirl) but without any mode switching phenomenon: only branches k^+ and k^- of the ‘main’ inviscid mode give birth to the first “good” saddle points k_0 . The dashed lines report the results of Delbende *et al.* (1998) for $Re = 667$. The viscosity is seen to play the same role as for $m = -1$: the absolutely unstable region quickly

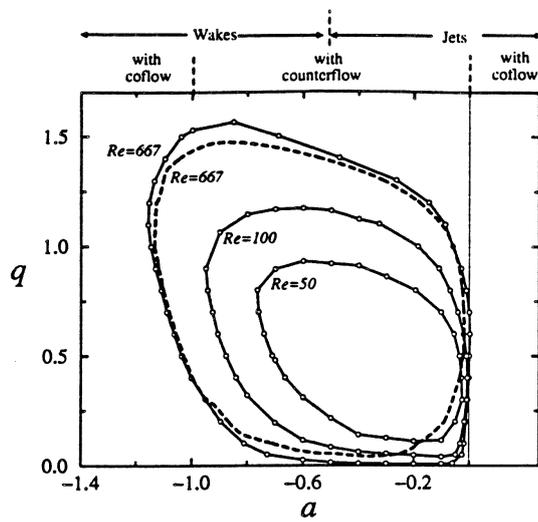


Figure 14: Overall transition curves of inviscid bending modes $m = -2$ versus Re . Number next to each solid curve refers to the corresponding value of Reynolds number. The dashed curve indicates the transition boundary obtained by Delbende *et al.* (1998) for $Re = 667$.

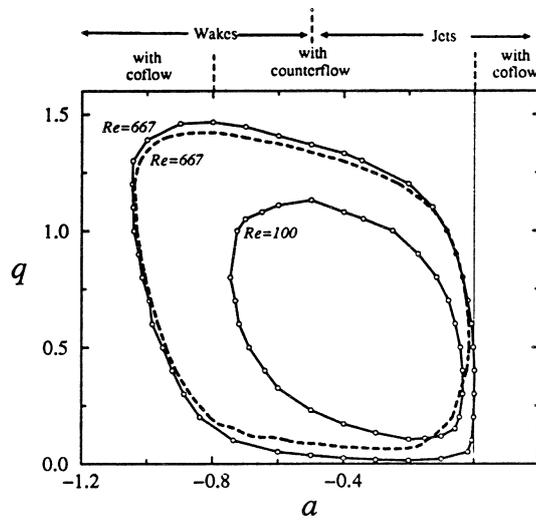


Figure 15: Overall transition curves of inviscid bending modes $m = -3$ versus Re . Number next to each solid curve refers to the corresponding value of Reynolds number. The dashed curve indicates the transition boundary obtained by Delbende *et al.* (1998) for $Re = 667$.

widens as Re increases, especially on the "wake" side or for large values of swirl. However and contrary to the conclusions of Delbende *et al.* (1998), it may promote this time absolute-convective transitions on the "jet" side at zero or slightly positive co-flow parameters a for $Re = 667$ if $m = -2$ and $m = -3$ (remind also the example previously addressed by figures 10 and 11). For magnified transition curves of these modes on the "jet" side the reader is directed to the figure 19. Our bubbles of absolute instability still contain those gained by Delbende *et al.* (1998). Differences exist, especially near the neutrality. These features again plead for the possible explanations we proposed for $m = -1$. Far from the stability, the differences mainly concern the "jet" side.

It is also worth drawing the transition curve pertaining to the viscous bending mode $m = -1$. This basic mode is amplified only for negative swirl values and within a specific range of Reynolds numbers. To keep positive swirl parameters we rather study the viscous bending mode $m = +1$. The figure 16 sketches its transition curve for $Re = 667$. Contrary to the case of inviscid modes, the viscous bubble of absolute instability entirely lies in the "jet" side ($a > -0.5$). The same viscous k^+ branch, mentioned in the previous subsection, gives rise to the first encountered "good" saddle point k_0 on the whole transition curve. However, the pinching point k_0 involves one viscous k^- branch on the path E_1E_2 and another one on the path E_2E_3 . The viscous mode is weakly amplified and not the most amplified mode. This explains why Delbende *et al.* (1998) didn't find this viscous transition curve. As the Reynolds number increases, the viscous mode is damped (see figure 7) and, contrary to the previous cases, the viscous pocket vanishes as highlighted by figure 17.

Clearly, the absolute or convective nature of the Batchelor vortex depends on the selected azimuthal wavenumber m . In fact, for given (a, q, Re) , the flow is convectively unstable if and only if it is convectively unstable with respect to any unstable azimuthal wavenumber. Despite we restrict our investigations to the cases $m = \pm 1, m = \pm 2$

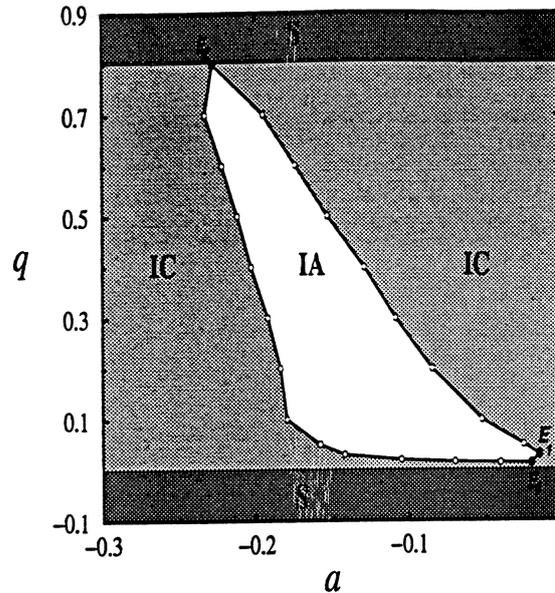


Figure 16: Overall transition curve (dashed line) pertaining to the viscous bending mode $m = +1$ alluded to in figure 5 and for $Re = 667$.

and $m = \pm 3$ it is thereafter worth overlaying the previous transition curves in the half plane $q \geq 0$. As depicted in figure 18, for $Re = 667$, this authorizes us to draw the outer transition path by using the different transition boundaries. The shaded and hatched domains displayed in figure 18 respectively indicate the domains where the Batchelor vortex is respectively convectively unstable and stable (with respect to the addressed azimuthal wavenumbers and for $q \geq 0$). The domain of absolute instability is seen to widen as q increases from zero to moderate values and to shrink for large swirl values. Furthermore, the outer transition curve is triggered by distinct inviscid or viscous azimuthal modes. More precisely, on the "wake" side only the bending mode $m = -1$ is critical whilst, on the "jet" side, the critical mode deeply depends on the swirl value. The figure 19 magnifies, on the "jet" side and for small swirl values, the transition curves for inviscid modes $m = -2, -3, -4, -5$ and viscous mode $m = -1$. More precisely, we found that the critical mode on the "jet" side is successively the bending mode $m = -1$ for $q \geq 0.983$; the helical mode $m = -2$ for $0.47 \leq q \leq 0.983$ and $q \leq 0.015$; the helical mode $m = -3$ for $0.078 \leq q \leq 0.474$; the helical mode $m = -4$ for $0.044 \leq q \leq 0.078$ and the viscous bending mode $m = 1$ for $0.015 \leq q \leq 0.044$. A rigorous analysis should also take into account the higher azimuthal modes $|m| \geq 4$. Actually, Delbende *et al.* (1998) found that the outer transition boundary is also triggered by higher modes $m = -4, -5$ on the "jet" side. As clearly shown in figure 19, our calculations did not confirm this point. Our

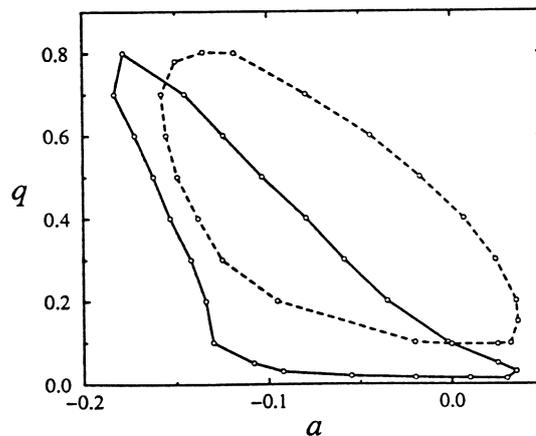


Figure 17: Overall transition curves pertaining to the viscous bending mode $m = +1$ for $Re = 667$ (solid line) and $Re = 100$ (dashed line).

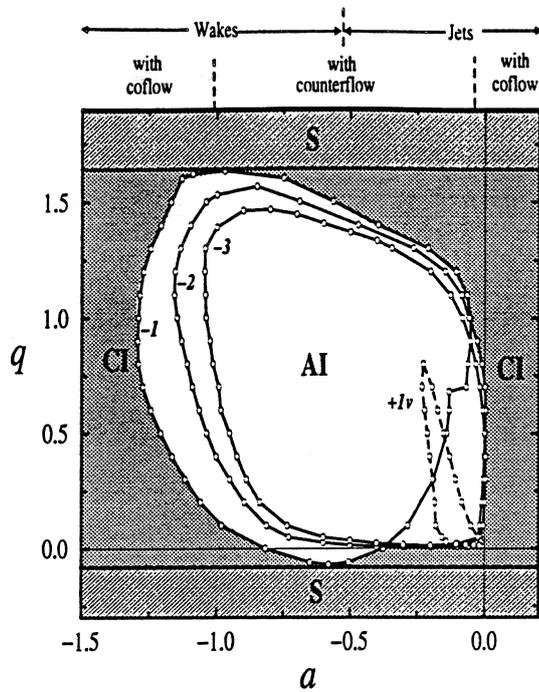


Figure 18: Outer transition boundary of the Batchelor vortex in upper half q -plane and for $Re = 667$. Solid lines, labelled by the associated azimuthal wavenumber m , indicate both inviscid and viscous pockets of absolute instability pertaining to helical modes $m = \pm 1, m = \pm 2$ and $m = \pm 3$. The shaded and hatched domains indicate where the Batchelor vortex is respectively convectively unstable and stable.

bubble of absolute instability for $m = -3$ contains those pertaining to inviscid modes $m \leq -4$ (possibly except on the "jet" side for very small values of swirl).

As a conclusion the figure 19 also indicates that the Batchelor vortex is absolutely unstable for $a = 0$ within the range $0.225 \leq q \leq 0.7$ and the viscous mode $m = +1$ partly defines its outer transition boundary on the "jet" side.

We should also mention that we found the spatial counter-part of the axisymmetric viscous mode ($m = 0$) discovered by Khorrani (1991) and also confirmed by Mayer & Powell (1992) in temporal calculations. This viscous mode is weakly amplified within a specific range of Reynolds numbers whilst the inviscid modes pertaining to the zero wavenumber are spatially damped. Unfortunately, we failed in determining the transition curve associated to the viscous mode (the branches k^+ or k^- exhibit an amazing behavior when the co-flow parameter changes). Whether or not this axisymmetric viscous mode becomes critical remains an unsolved question.

As depicted in figure 20 for $Re = 100$, the viscosity drastically affects the previous conclusions, at least on the "jet" side. This time the critical mode is successively the bending mode $m = -1$ and the helical mode $m = -2$ on the "wake" side whilst, on the "jet" side" it is the mode $m = -2$ except within the range $0.095 \leq q \leq 0.215$

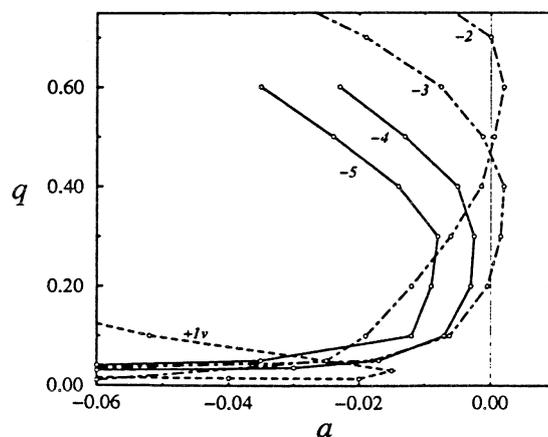


Figure 19: Magnification, on the "jet" side and for small swirl values, of the transition curves pertaining to inviscid modes $m = -2, -3, -4, -5$ and viscous mode $m = -1$ for $Re = 667$. The azimuthal wavenumber is indicated next to each curve.

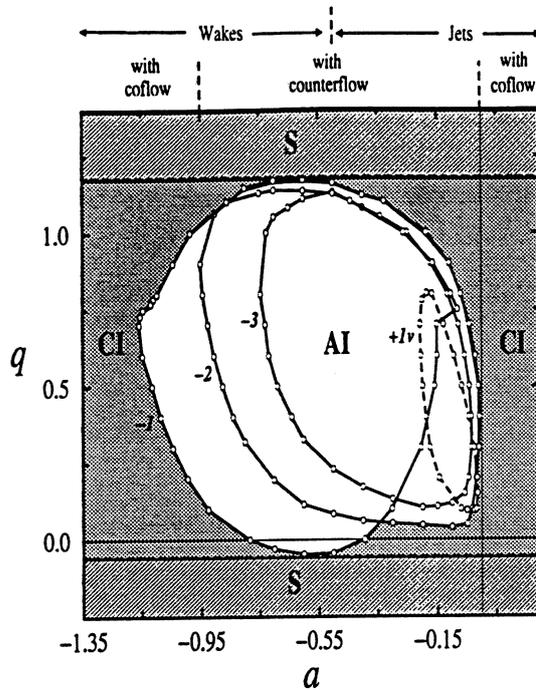


Figure 20: The counterpart of figure 18 for $Re = 100$.

where it becomes the viscous bending mode $m = 1$. Moreover, this time a Batchelor vortex with a zero co-flow is convectively unstable. Hence, the bubble of absolute instability is very sensitive to the viscosity.

The figure 21 compares our numerical results for $Re = 10000$ with the inviscid transition curves obtained by Olendraru *et al.* (1998) by means of a shooting method.

The complex critical points, previously alluded to and associated to the inviscid modes, prevent the present approach to converge with respect to the number of Chebyshev polynomials on the "jet" side both for $m = -2$ and if $q > 0.7$ for $m = -1$. More precisely, along the path B_0H the shooting method uses an integration in the complex plane and the integration on the real axis is forbidden. This problem also arises at point L on the "wake" side. Along the paths A_0W_1 for $m = -1$ or KW_2 for $m = -2$ the numerical results for $Re = 10000$ lie very closely to the inviscid transition curves. As illustrated by figure 3, each azimuthal mode indeed quickly asymptotes its inviscid limit at large Reynolds numbers. Near the point J the shooting method experiences troubles since the k^+ branch becomes near-neutral and the shooting algorithm skips from one weakly amplified mode to another one and this prevents the shooting method to converge. Note that differences appear near points W_1 and K . Contrary to the case of $Re = 10000$, the slope of the inviscid transition curves exhibits a jump at those points. We found that the "good" saddle points k_0 that determines the transition curves for $Re = 10000$ on the "wake" side always involves the most amplified k^- branch. However, this most amplified branch depends on the swirl parameter (as noticed, remind the figure 8, on the "jet" side for $m = -1, a = 0$ and $Re = 2000$). The shooting algorithm follows the same k^- branch which is not any more the most amplified one beyond the point W_1 . This explains why the transition curves begin to differ at this point W_1 . At point K the shooting algorithm skipped this time from the most amplified mode to another less amplified mode.

The figure 21 suggests that spatially amplified modes still exist beyond $q = 1.5$ for high Reynolds numbers. This striking trend was also observed by Loiseleux *et al.* (1998) for the inviscid Rankine vortex with axial flow. As $q \rightarrow \infty$, the Batchelor vortex behaves like a rotating flow without axial velocity and with a strictly positive mean vorticity gradient. Hence (see Ash and Khorrami 1995), it is temporally stable for $Re = \infty$ and $q \rightarrow \infty$. This suggests it is also spatially stabilized for large values of Re and q . We indeed obtain closed transitions paths for $Re = 10000$. More precisely, on the path W_1J the pinching branch (k^+ or k^-) is near-neutral. As the behavior of the eigenfunctions confirms these near-neutral modes are centre-modes. The inviscid temporal counterpart of such modes have been predicted by Stewartson & Brown (1985) for moderate azimuthal wavenumbers and within certain regions of the swirl parameters. To our knowledge it is the first numerical (spatial) confirmation of those modes.

It is worth noting that for high swirls the transition curves obtained for $Re = 667$ and $Re = 10000$ notably differ.

Finally, we report numerical calculations of the spatial eigenfunction amplitudes when the flow is convectively unstable and for different Reynolds numbers. For $Re = 667$, the figure 22 displays the amplitudes for the azimuthal mode $m = -3$ and the viscous mode $m = +1$. The eigenfunctions roughly extend to $r \sim 5$. The figure 23 shows,

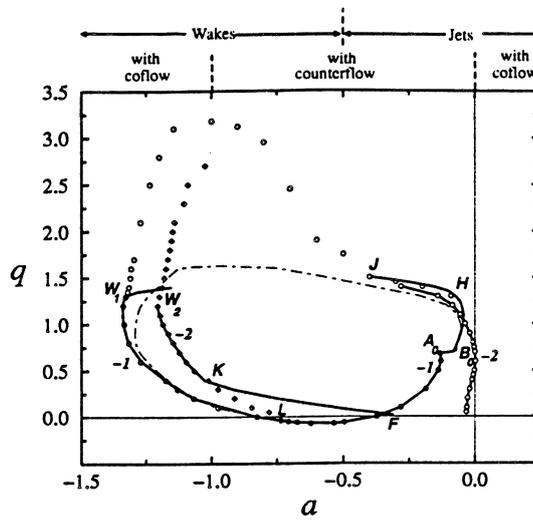


Figure 21: Overall inviscid transition curves in the $a - q$ plane for $Re = 10000$ by the present method (\circ : $m = -1$; \diamond : $m = -2$) and, in solid lines, for the inviscid case by Olendraru *et al.* (1996; 1998). The dashed line indicates our results for $m = -1$ and $Re = 667$.

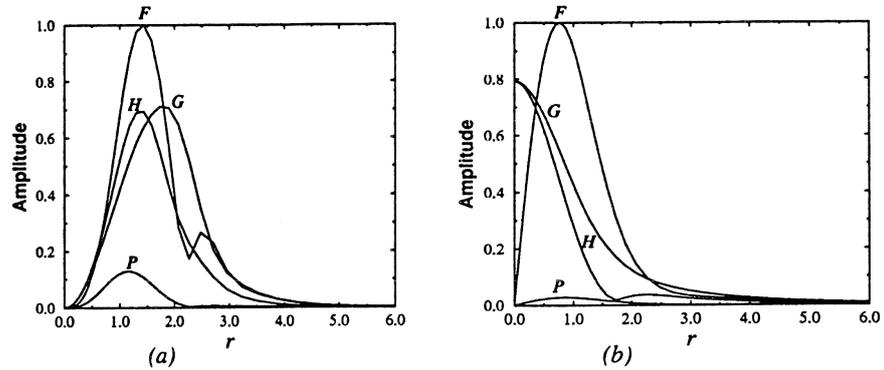


Figure 22: Spatial eigenfunction amplitudes $|F(r)|$, $|G(r)|$, $|H(r)|$ and $|P(r)|$ for $Re = 667$. (a): Case $m = -3$, $a = 0.002$, $q = 0.4$, $\omega = -0.22$ and $k_1^+ = (1.443; -1.481)$. (b): The viscous mode $m = +1$ for $a = 0$, $q = 0.4$, $\omega = 0.035$ and $k^+ = (0.371; -0.078)$.

for $Re = 2000$, $a = 0$ and $m = -1$ the eigenfunctions pertaining to the branches k_{2-1}^+ and k_3^+ (previously alluded to by figure 9). As q increases these modes clearly become (near- neutral, see figure 9) centre-modes. Note that the case of figure 23b addresses a weakly damped mode. The figure 24 gives the eigenfunctions for $Re = 10000$ near the transition curves (see the figure 21) for modes $m = -1$ and $m = -2$. For high values of swirl we again obtain centre-modes.

5. Concluding remarks

The present spectral method provides, for moderate Reynolds numbers, a powerful tool in investigating the spatial modes and related transition curves pertaining to the Batchelor vortex. For instance, it was able to catch asymmetric ($m = \pm 1$) viscous modes which are the spatial counterparts of the temporally viscous solutions first reported by Khorrami (1991) and later confirmed by Mayer & Powell (1992). The pertaining transition curve has been seen to be critical on the "jet" side if the swirl is very small.

Contrary to Delbende *et al.* (1998) or Olendraru *et al.* (1998), this approach supplies, if necessary, all the amplified modes (not only the 'primary' one). As consequences, basic mode switching phenomena were discovered and, for azimuthal wavenumbers $m = \pm 1$, $m = \pm 2$ and $m = \pm 3$, the critical mode defining the transition curve was clearly identified. For $Re = 667$ our results roughly confirm the conclusions of Delbende *et al.* (1998). The sensitivity to viscosity of both inviscid and viscous bubbles of absolute instability is also discussed for moderate Reynolds numbers since at large Reynolds the viscous modes stabilize and only the amplified inviscid modes (which quickly asymptote to their inviscid limits) determine the absolute-convective nature of the vortex. The proposed results show that for moderate swirls ($q \leq 0.6$) it is sufficient to consider the domain $Re \leq 1000$. However, a strong deformation of the outer transition boundary in the high swirl domain is observed as the Reynolds number increases and this suggests that the inviscid modes do not any more converge very quickly to their inviscid limits in this domain. Unfortunately, the present Code may experience convergence troubles in tracking the inviscid pockets of absolute instability as the viscosity decreases. As previously explained, this may

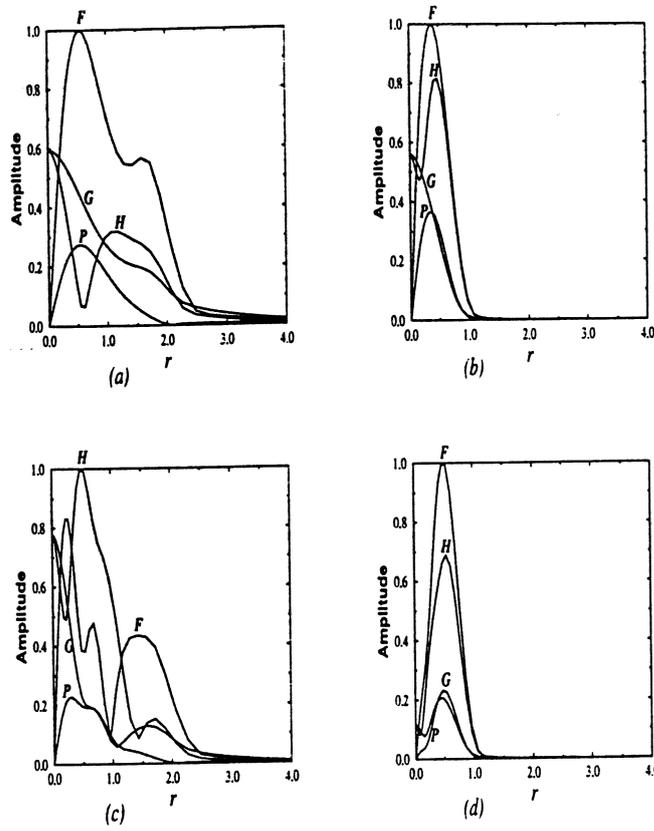


Figure 23: Spatial eigenfunction amplitudes $|F(r)|$, $|G(r)|$, $|H(r)|$ and $|P(r)|$ for $Re = 2000$, $a = 0$ and $m = -1$. (a) Case $q = 0.8$, $\omega = -0.2$ and $k_{2-1}^+ = (0.387, -0.222)$. (b) Case $q = 1.6$, $\omega = -1.05$ and $k_{2-1}^+ = (0.361, 0.02)$. (c) Case $q = 0.8$, $\omega = -0.2$ and $k_3^+ = (0.665, -0.133)$. (d) Case $q = 1.6$, $\omega = -1.05$ and $k_3^+ = (0.352, -0.025)$.

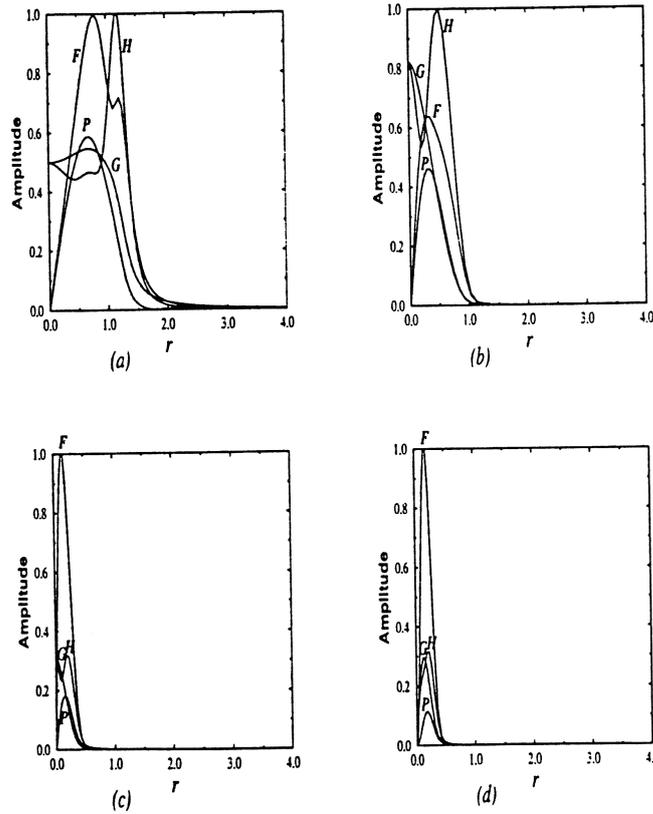


Figure 24: Spatial eigenfunction amplitudes $|F(r)|$, $|G(r)|$, $|H(r)|$ and $|P(r)|$ for $Re = 10000$. (a) Case $m = -1$, $a = -0.05$, $q = 1.2$, $\omega = -0.49$ and $k_{2-1}^+ = (0.935, -0.177)$. (b) Case $m = -1$, $a = -0.2$, $q = 1.41$, $\omega = -0.84$ and $k_{2-1}^+ = (0.687, -0.0283)$. (c) Case $m = -1$, $a = -1.17$, $q = 3.1$, $\omega = -3.05$ and $k^- = (0.163, 0.0098)$. (d) Case $m = -2$, $a = -1.09$, $q = 2.5$, $\omega = -4.92$ and $k^- = (0.488, 0.055)$.

occur when the viscous sector of a complex critical point associated with an inviscid mode intersects the real domain $[0, r_{max}]$ of the radial variable. To circumvent this drawback one should actually discretize the governing problem (2.3)-(2.10) on an adequate complex contour.

In addition, a complete and viscous analysis should also consider the properties of higher azimuthal wavenumbers $|m| \geq 4$. As achieved for temporal analysis by Mayer & Powell (1992), it seems possible to find the spatially amplified modes, at least as $m \rightarrow \infty$. However, as mentioned, remind that purely spatial investigations are meaningless for an absolutely unstable flow and the essential numerical determination of pertaining outer transition curves would require a great deal of calculations.

The authors acknowledge financial support by the Direction des Recherches, Etudes et Techniques (DRET) of the French Ministry of Defense under grant #92-098. Computational facilities have been provided by the Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS/CNRS). The authors are also indebted to Professor P. Huerre, Dr. I. Delbende and T. Loiseleux for fruitful discussions.

REFERENCES

- R.L. Ash, R. L. & Khorrami, M. R. 1995 Vortex Stability in *Fluid Vortices*, edited by S. I. Green (Kluwer, New York).
- Batchelor, G. K. & Gill, A. E. 1962 Analysis of the stability of axisymmetric jets. *J. Fluid Mech.* **14**, 529-551.
- Batchelor, G. K. 1964 Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.* **20**, 645-658.
- Benjamin, T. B. 1962 Theory of the vortex breakdown. *J. Fluid Mech.* **14**, 593-629.
- Bers, A. 1983 Space-time evolution of plasma instabilities - absolute and convective In *Handbook of Plasma Physics*, edited by M. N. Rosenbluth and R. Z. Sagdeev. Amsterdam, North-Holland.
- Briggs, R. J. 1964 *Electron-stream interaction with plasmas*. Cambridge, Mass: MIT Press.
- Cotton, F. W. & Salwen, H. 1981 Linear stability of rotating Hagen-Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **108**, 101-125.
- Delbende, I., Chomaz, J. M. & Huerre, P. 1998 Numerical study of the impulse reponse of the Batchelor vortex. *J. Fluid Mech.* **355**, 229-254.
- Duck, P. W. & Foster, M. R. 1980 The inviscid stability of a trailing line vortex. *ZAMP* **31**, 523-530.
- Delery, J. M. 1990 Aspects of vortex breakdown. *Prog. Aerospace Sci.* **30**, 1-59.
- Duck, P. W. & Khorrami, M.R. 1992 A note on the effects of viscosity on the stability of a trailing-line vortex. *J. Fluid Mech.* **245**, 175-189.
- Faler, J. H. & Leibovich, S. 1977 Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown. *Phys. Fluids A* **20**, 1385-1400.
- Garg, A. K. & Leibovich, S. 1979 Spectral characteristics of vortex breakdown flowfields. *Phys. Fluids A* **22**, 2053-2064.
- Gaster, M. 1962 A note on the relation between temporally-increasing and spatially- increasing disturbances in hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.* **14**, 222-224.
- Gottlieb, D. & Orszag, A. 1977 *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. Soc. Indus & Appl. Math., Philadelphia.
- Huerre, P. & Monkewitz, P. A. 1985 Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.* **145**, 151-168.
- Huerre, P. & Monkewitz, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473-537.
- Huerre, P. & Rossi, M. 1989 *Hydrodynamic instabilities in open flows*. Cambridge University Press.
- Khorrami, M. R., Malik, M. R. & Ash., R. L. 1989 Applications of Spectral Collocations Techniques to the Stability of Swirling Flows. *J. Comput. Phys.* **81**, 206-229.
- Khorrami, M. R. 1991 On the viscous modes of instability of a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.* **255**, 197-212.
- Khorrami, M. R. 1992 Behaviour of asymmetric unstable modes of a trailing line vortex near the upper neutral curve. *Phys. Fluids A* **4**, 1310-1313.
- Leibovich, S. 1978 The structure of vortex breakdown. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **10**, 221-246.
- Leibovich, S. 1983 Vortex stability and breakdown: Survey and extension, *AIAA J.* **22**, 1192-1206.
- Leibovich, S. & Stewartson, K. 1983 A sufficient condition for the instability of columnar vortices. *J. Fluid Mech.* **126**, 335-356.
- Lessen, M. & Paillet, F. 1974 The stability of a trailing line vortex. Part 2: Viscous theory. *J. Fluid Mech.* **65**, 769-779.
- Lessen, M. & Singh, P. J. 1974 The stability of axisymmetric free shear layers. *J. Fluid Mech.* **60**, 433-457.
- Lessen, M., Singh, P. & Paillet, J. F. 1974 The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory *J. Fluid Mech.* **63**, 753-763.
- Loiseleux, T., Chomaz, J. M. & Huerre, P. 1998 The effect of swirl on jets and wakes: Linear instability of the Rankine vortex with axial flow. *Phys. Fluids* **10(3)**, 1120-1134.
- Malik, M. R, Zang, T. A. & Hussaini, M. Y. 1985 A Spectral Collocation Method for the Navier-Stokes Equations. *J. Comput. Phys.* **61**, 64-88.

- Mayer, E. W. & Powell, K. G. 1992 Viscous and inviscid instabilities of a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.* **245**, 91-114.
- Olendraru, C., Sellier, A., Rossi, M. & Huerre, P. 1996 Absolute/convective instability of the Batchelor vortex. *C. R. Acad. Sci. Paris* **323**, Série II b, 153-159.
- Olendraru, C., Sellier A., Rossi, M. & Huerre, P. 1998 Inviscid instability of the Batchelor vortex: absolute-convective transition and spatial branches. *submitted to Phys. Fluids*.
- Stewartson, K. & Capell, K. 1985 On the stability of ring modes in a trailing vortex: the upper neutral points. *J. Fluid Mech.* **156**, 369-386.
- Stewartson, K. & Brown, S. N. 1985 Near-neutral centre-modes as inviscid perturbations to a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.* **156**, 387-399.
- Tsai, C.-Y. & Widnall, S. E. 1980 Examination of a group-velocity criterion for breakdown of vortex flow in a divergent duct. *Phys. Fluids A* **23**, 864-870.

