HAL
archives-ouvertes.fr

Récupération d'énergie et vibrations induites par vortex de structures flexibles

Clément Grouthier

▶ **To cite this version:**

Clément Grouthier. Récupération d'énergie et vibrations induites par vortex de structures flexibles. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2013. Français. <pastel-00875763>

HAL Id: pastel-00875763

https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00875763

Submitted on 22 Oct 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Polytechnique
Laboratoire d'Hydrodynamique

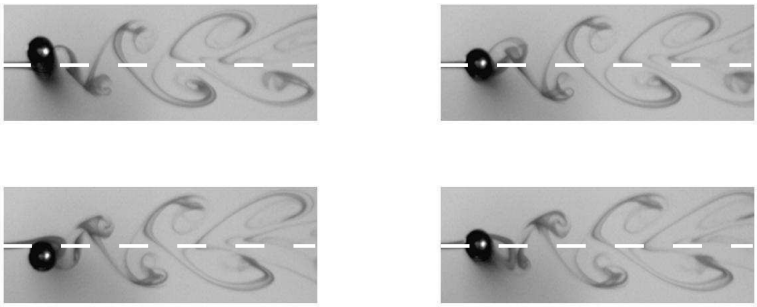
Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Spécialité : Mécanique

par

Clément Grouthier

Récupération d'énergie et vibrations induites par vortex de structures flexibles



Thèse soutenue le 14 octobre 2013 devant le jury composé de :

M. Bernard MOLIN	Rapporteur	IRPHE, Marseille
M. Ioannis POLITOPOULOS	Rapporteur	CEA Saclay, Gif-sur-Yvette
M. Thomas LEWEKE	Président	IRPHE, Marseille
M. Richard WILLDEN	Examinateur	University of Oxford, Oxford
M. Emmanuel de LANGRE	Directeur de thèse	LADHYX, Ecole Polytechnique, Paris
M. Sébastien MICHELIN	Directeur de thèse	LADHYX, Ecole Polytechnique, Paris

Résumé

Récupération d'énergie et vibrations induites par vortex de structures flexibles

Les vibrations induites par vortex (VIV) d'un solide immergé interagissant fortement avec son sillage sont des oscillations auto-entretenues. Les VIV peuvent atteindre des amplitudes significatives lorsque la fréquence du détachement tourbillonnaire est proche d'une des fréquences propres de la dynamique du solide, et constituent donc un mécanisme d'interactions fluide/structure intéressant pour extraire de l'énergie d'un écoulement. Les VIV de structures flexibles sont par conséquent analysées dans cette thèse à la fois numériquement, grâce au concept d'oscillateur de sillage, et expérimentalement. Nous démontrons ainsi qu'il est possible d'extraire efficacement de l'énergie d'un écoulement grâce aux VIV d'un câble. Nous prouvons également que la flexibilité de la structure lui permet d'adapter sa dynamique aux sollicitations fluctuantes du sillage pour extraire efficacement de l'énergie de l'écoulement, grâce à (i) l'excitation de ses différents modes de vibrations, dans le cas d'un câble tendu équipé de récupérateurs d'énergie périodiquement distribués, chapitre 2, ou (ii) l'apparition d'ondes progressives de VIV transportant l'énergie lorsque l'on considère un câble suspendu par un unique récupérateur d'énergie, chapitre 3.

Mots clefs : **Vibrations induites par vortex, récupération d'énergie, structure flexible, oscillateur de sillage.**

Energy harvesting and vortex-induced vibrations of flexible structures

Vortex-induced vibrations (VIV) are self-sustained oscillations of an immersed body strongly interacting with its fluctuating wake. These oscillations may reach significant amplitudes when the vortex shedding frequency is close to one of the solid's natural frequencies. VIV consequently appear as an interesting fluid/structure interaction mechanism for energy harvesting. They are here studied both numerically, using a wake-oscillator model, and experimentally. We first prove that it is actually possible to effectively extract energy out of a flow thanks to the VIV of flexible structures, such as cables. We also prove that the structure's flexibility allows it to adapt its dynamics to the fluctuating forcing of the wake, leading to efficient energy harvesting, thanks to (i) the successive excitations of its different vibrations modes, in the case of a tensioned cable with periodically-distributed energy harvesters, chapter 2, or (ii) the development of traveling vortex-induced waves that can transport energy when a hanging cable with a top harvester is considered, chapter 3.

Keywords : **Vortex-induced vibrations, energy harvesting, flexible structure, wake-oscillator.**

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier mes directeurs de thèse Sébastien Michelin et Emmanuel de Langre. Si ces trois dernières années furent pour moi si enrichissantes et passionantes, l'essentiel du mérite leur en revient. J'ai toujours eu la liberté d'explorer les plus ou moins bonnes idées qui me venaient à l'esprit, leurs conseils avisés me ramenant parfois in extremis à la raison lorsque je m'égarais sur une fausse piste. Leur confiance en moi, leur enthousiasme et leurs idées foisonnantes ont aussi permis à ma thèse de vivre lorsque ma motivation a pu baisser. Je profite enfin de ces quelques lignes pour remercier Emmanuel, dont les amphis captivants ont fait naître chez moi le goût des interactions fluide/structure. Ce n'est pas un hasard si j'ai pensé à le recontacter lorsque je cherchais à me lancer dans l'aventure d'une thèse. Pour tout cela, un grand merci aux chefs !

Je remercie également Bernard Molin et Ioannis Politopoulos, qui ont accepté d'évaluer mon travail en tant que rapporteurs de cette thèse, ainsi que Thomas Leweke et Richard Willden pour leur participation à mon jury.

Outre les réceptions qui y sont données, le principal intérêt des conférences réside dans les rencontres que l'on peut y faire. Entre APS DFD 2011 et FIV 2012, j'ai ainsi pu nouer des liens professionnels et amicaux avec Yahya Modarres-Sadeghi et Rémi Bourguet. Un grand merci à Yahya pour sa disponibilité et sa gentillesse lors de mes six semaines passées à Amherst, durant lesquels mon niveau en escalade a progressé presque aussi vite que ma compréhension des VIV de câble suspendus (Yahya, this is written in french on purpose. One day you will speak french...). Merci aussi à Rémi pour son accueil à l'IMFT et pour notre collaboration fructueuse, notamment aux pieds des blocs nord-américains et toulousains.

Je tiens aussi à remercier Pascal Hémon et Xavier Amandolèse pour leur aide déterminante lors de l'étude expérimentale préliminaire des VIV de chaînettes au LadHyX. Si j'ai pu arriver chez Yahya avec un montage expérimental simple, efficace et rôdé, c'est essentiellement grâce à eux.

Il y a du monde au LadHyX, donc du monde à remercier ! Un merci particulier à Thérèse, Sandrine et Delphine, qui gèrent pour nous l'essentiel de l'aspect administratif de la vie des thésards. Je remercie aussi Antoine, Caroline, Dany et Toai pour m'avoir plusieurs fois sauvé la vie, notamment lorsque mon disque dur s'est auto-détruit...

Si le LadHyX n'a pas gagné le tournoi de foot durant ces trois années, ce n'est pas faute d'avoir essayé ! Un grand merci aux partenaires de jeu : Caro, Baptiste, Guillaume, Pierre-Brice, Loïc, Thomas, Etienne, Rémi, Jon, Pierre, Cristobal, Junho, Christophe etc... Bonne chance pour les prochains tournois à ceux qui restent ! Quand il ne fait pas

beau, on peut se dépenser au pan d'escalade. Merci aussi aux compagnons d'épuisement, Xavier, Nicolas, Dimitri et Diego notamment. Merci aussi à Fabien, mon co-docteur et co-organiseur de pot de thèse, ainsi qu'à Kiran, Chakri et Gordon, mes co-bureaux. Je profite aussi de ce paragraphe pour remercier mes illustres prédécesseurs Matteo Facchinetti et Rémi Violette, sur lesquels je me suis copieusement appuyé durant ma thèse.

Les amis que j'ai la chance d'avoir ont parfaitement rempli leur rôle de « douzième homme », m'apportant un soutien déterminant et une vie joyeuse. Un grand merci à Sylvain, Mélanie, Nicolas, Guillain, Julien LC, Pierre-Emmanuel, Thibaut, Gregoire, Vianney, Michou, Sixte, Arthur, Léo, Tristan, Manue, Philippe, Mat & Mu, et tous les autres !

Je remercie chaleureusement ma famille, mes parents, Pierre-Etienne, Tatiana, Virginie, Geoffroy et Thibaut, pour leur soutien indéfectible, et ce, depuis beaucoup plus que 3 ans ! Un petit mot pour les nouveaux arrivés, Stéphane et Jocelyn : qu'ils apprennent vite à lire et à compter pour avoir la chance d'aborder des sujets aussi passionnants que les interactions fluide/structure ! Je remercie aussi Danièle et Michel Parusso, ainsi que Jean-Michel Hyboux, pour leur présence à ma soutenance et leur intérêt toujours renouvelé pour ma thèse.

Je remercie enfin Anne, que j'aime et qui partage ma vie. Pendant trois ans, ton indéfectible soutien fut indispensable à ma réussite et ta présence à mes côtés essentielle à mon bonheur.

Merci !

Réfléchissez au mouvement des vagues,
au flux et reflux, au va-et-vient des marées.
Qu'est-ce que l'océan ? une énorme force perdue.
Comme la terre est bête ! ne pas employer l'océan !

Victor Hugo, Quatrevingt-treize, 1874.

Table des matières

1 Introduction **1**
1.1 Extraction d'énergie des écoulements . . . 2
1.2 Efficacité . . . 4
1.3 Vibrations induites par vortex . . . 4
1.3.1 Oscillateur de sillage . . . 4
1.3.2 Cylindre rigide . . . 5
1.3.3 Récupération d'énergie par VIV de cylindres rigides . . . 10
1.4 Structures flexibles . . . 15
1.4.1 VIV de structures flexibles . . . 16
1.4.2 Modes de vibrations . . . 17
1.4.3 Ondes stationnaires/Ondes progressives . . . 18
1.5 Récupération d'énergie par VIV de structures flexibles . . . 18
1.6 Propositions . . . 19

2 Structures flexibles et récupération d'énergie distribuée **21**
2.1 Configuration et modèle . . . 21
2.1.1 Configuration . . . 21
2.1.2 Modèle de VIV de câble . . . 21
2.2 Calculs DNS . . . 24
2.2.1 Dynamique du câble . . . 25
2.2.2 Efficacité . . . 27
2.3 Récupération d'énergie . . . 28
2.3.1 Efficacité de la récupération . . . 28
2.3.2 Modes de vibrations . . . 31
2.4 Modèle linéaire . . . 33
2.4.1 Analyse linéaire . . . 34
2.4.2 Accrochage des modes successifs . . . 35
2.5 Discussion et conclusion . . . 38
2.5.1 Importance de la flexibilité . . . 38
2.5.2 Sensibilité à la vitesse de l'écoulement . . . 39
2.5.3 Dimensionnement optimal . . . 41

3 Cordes suspendues et récupération d'énergie **43**
3.1 Câble semi-infini . . . 43
3.2 Caractérisation expérimentale des VIV d'une corde suspendue . . . 46
3.2.1 Montage . . . 46
3.2.2 Détachement tourbillonnaire . . . 48
3.2.3 Déplacement de la corde . . . 49
3.2.4 Fréquence des oscillations . . . 50
3.2.5 Déformées modales . . . 52
3.2.6 Modèle linéaire pour les VIV de corde suspendue . . . 54
3.2.7 Amplitude des VIV . . . 57
3.3 Étude expérimentale de l'extraction d'énergie . . . 59
3.3.1 Caractérisation de l'amortissement . . . 59
3.3.2 Montage complet . . . 62
3.3.3 Efficacité de la récupération . . . 63
3.3.4 Comparaison avec un modèle de VIV adapté . . . 64
3.4 Étude paramétrique de la récupération . . . 68
3.4.1 Efficacité de la récupération . . . 68
3.4.2 Ondes progressives/ondes stationnaires . . . 70
3.4.3 Modèle linéaire . . . 72
3.5 Discussion et conclusion . . . 74
3.5.1 Importance de la flexibilité . . . 74
3.5.2 Tension induite par la gravité . . . 75
3.5.3 Sensibilité à la vitesse de l'écoulement . . . 75
3.5.4 Longueur de la structure . . . 76
3.5.5 Dimensionnement optimal . . . 77

4 Conclusion **79**
4.1 Conclusion . . . 79
4.2 Perspectives . . . 81
4.2.1 Oscillateur de sillage . . . 82
4.2.2 Ecoulements cisaillés . . . 82
4.2.3 VIV dans le sens de l'écoulement . . . 82
4.2.4 Technologies de la récupération d'énergie . . . 83

A Résultats expérimentaux **85**
A.1 Traitement des données brutes . . . 85
A.2 Amplitudes de l'extrémité amortie . . . 85
A.3 Fréquence des VIV . . . 86

B Cas d'une poutre : calculs avec rigidité de flexion **91**
B.1 Analyse linéaire du modèle de VIV de câble . . . 93
B.2 Poutre faiblement rigide . . . 93

C Différences finies **97**
C.1 Principes 97
C.2 Oscillateur de sillage 98
C.3 Cylindre rigide 98
C.4 Câble périodique 99
C.5 Poutre périodique 100
C.6 Corde suspendue 102
C.6.1 Changement de variables 102
C.6.2 Différences finies 103

D Publications **105**

Chapitre 1

Introduction

Alors que les besoins énergétiques augmentent, les méthodes traditionnelles de production d'énergie sont remises en question. Les énergies fossiles sont fortement émettrices de gaz à effet de serre et contribuent au changement climatique. Bien qu'encore majoritaire, la part de ces énergies dans le mix énergétique mondial est appelée à diminuer, d'autant plus que leur stock est limité. Par ailleurs, la gestion des déchets radioactifs et la sécurité des centrales handicapent l'énergie nucléaire. Pour des raisons environnementales, économiques et politiques, les gouvernements encouragent la nécessaire évolution des modes de production d'énergie.

De nombreuses pistes sont explorées pour développer des technologies de récupération d'énergie d'origine renouvelable efficaces, sûres et ayant un faible impact environnemental. L'utilisation de l'énergie solaire ou la géothermie font par l'objet de nombreuses études. Une autre possibilité consiste en l'exploitation des écoulements géophysiques comme le vent ou les courants marins. C'est cette voie que nous explorons dans cette thèse en étudiant la récupération d'énergie grâce aux vibrations induites par vortex (VIV) de structures flexibles.

Après avoir présenté à la section 1.1 certaines des solutions les plus classiquement envisagées pour extraire de l'énergie des écoulements géophysiques, nous explicitons la définition de l'efficacité d'une technologie de récupération à la section 1.2. Nous introduisons les VIV à la section 1.3, ainsi que le modèle choisi pour la dynamique couplée du système fluide/solide en VIV. Nous y montrons qu'il est possible de tirer profit de ce mécanisme d'interaction fluide/structure pour récupérer de l'énergie. Nous caractérisons ensuite l'impact de la flexibilité d'une structure sur sa dynamique de VIV à la section 1.4 avant de voir pourquoi cette flexibilité peut se révéler intéressante pour la récupération d'énergie par VIV, section 1.5. Enfin, nous énonçons à la section 1.6 les propositions que nous chercherons à démontrer au long de cette thèse.



FIGURE 1.1 – Gauche : Tableau *Le moulin à vent de Wijk près de Duurstede (1668-1672)* de Jacob van Ruisdael. Droite : Vue d'artiste d'une hydrolienne du parc hydrolien Paimpol-Bréhat de EDF, en phase de test. [WEB01]

1.1 Extraction d'énergie des écoulements

Le vent et les courants marins sont répartis sur l'ensemble du globe. Ces écoulements géophysiques constituent une gigantesque source d'énergie renouvelable. Différentes technologies de récupération d'énergie à partir de ces écoulements existent, ou sont en développement.

Éoliennes et hydroliennes

La méthode la plus ancienne pour extraire de l'énergie d'un écoulement utilise la rotation d'une structure due aux forces de traînée et de portance. Les moulins à eau et à vent du Moyen-Âge exploitaient déjà ce mécanisme d'interaction fluide/structure, au même titre que les éoliennes et hydroliennes d'aujourd'hui, figure 1.1. En air, de nombreuses éoliennes sont déjà installées et raccordées au réseau électrique. Les hydroliennes en sont quant à elles toujours au stade du développement (Nishino & Willden 2012, Bahaj 2013, Batten *et al.* 2013). L'environnement marin pose notamment d'importantes difficultés de maintenance (Davies *et al.* 2013).

Énergie houlomotrice

La houle permet aussi de récupérer de l'énergie. Différentes technologies exploitent ainsi les oscillations de structure flottantes (Clément *et al.* 2002). C'est le cas par exemple du système Pelamis, une très longue structure flottante constituée de différents segments rigides articulés entre eux (Yemm *et al.* 2012). Cette structure se déforme sous l'effet de la houle, et produit de l'énergie grâce aux déplacements relatifs des différents segments les uns par rapport aux autres, figure 1.2. D'autres systèmes sont à l'étude, comme la



FIGURE 1.2 – Gauche : Système houlomoteur Pelamis en fonctionnement au large de l'Ecosse, [WEB02]. Droite : Schéma du système houlomoteur Oyster (Whittaker & Folley 2012).

technologie Searev (Babarit & Clément 2006), qui exploite les oscillations pendulaires d'une bouée. Le système Oyster, développé par Whittaker & Folley (2012), comprime de l'eau pour alimenter une usine hydroélectrique située sur le rivage, grâce aux oscillations d'un clapet affleurant à la surface, figure 1.2.

Vibrations induites par écoulement

D'autres études suggèrent de tirer profit des vibrations induites par écoulement d'un solide immergé.

Il est par exemple montré dans l'article de Barrero-Gil *et al.* (2010) que les oscillations auto-entretenues et de grands amplitudes d'une structure dues au phénomène du galop permettent de récupérer efficacement de l'énergie. Les vibrations induites par écoulement d'une aile, et notamment le flottement de modes couplés, sont aussi utilisées pour extraire de l'énergie d'un écoulement (Peng & Zhu 2009, Boragno *et al.* 2012).

Les oscillations d'une membrane flexible dans un écoulement permettent également d'en extraire de l'énergie, en plaçant par exemple celle-ci dans le sillage tourbillonnaire engendré par un obstacle en amont (Allen & Smits 2001). L'instabilité aéro-élastique de flottement de drapeaux permet aussi de récupérer de l'énergie grâce aux vibrations d'une membrane flexible (Tang *et al.* 2009). L'énergie de déformation du drapeau peut par exemple être convertie en électricité à l'aide de matériaux piézo-électriques, comme dans les articles de Dunnmon *et al.* (2011), Doaré & Michelin (2011), Michelin & Doaré (2013) ou Li *et al.* (2011). Le même type d'instabilité peut également être exploitée par les oscillations d'une structure élancée en écoulement axial (Singh *et al.* 2012*b*;*a*).

Enfin, les vibrations induites par vortex (VIV) d'une structure sont un autre mécanisme d'instabilité fluide/solide dont il est possible d'extraire de l'énergie (Bernitsas *et al.* 2008, Meliga *et al.* 2011, Hobbs & Hu 2012, Barrero-Gil *et al.* 2012, Mehmood *et al.* 2013). Nous présentons en détails les VIV, ainsi que le principe de leur utilisation

pour extraire de l'énergie d'un écoulement, à la section 1.3.

1.2 Efficacité

Pour pouvoir comparer différentes technologies de récupération d'énergie, il est nécessaire de définir une efficacité. L'efficacité théorique mesure la capacité d'un système à extraire une partie de l'énergie disponible dans l'écoulement. Il existe de nombreux moyens de définir l'efficacité d'un système de récupération d'énergie. Comme dans les articles de Barrero-Gil *et al.* (2010), Bernitsas *et al.* (2008), Hobbs & Hu (2012) et Nishino & Willden (2012), l'efficacité η est ici définie comme le rapport entre la moyenne temporelle de la puissance récupérée $\mathcal{P}$ et la puissance disponible à travers la section du solide immergé $\mathcal{P}_0$

$$\eta = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\mathcal{P}_0} = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\frac{1}{2}\rho \mathcal{A} U^3}, \tag{1.1}$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire de la section du solide transverse à l'écoulement, ρ et U correspondant à la masse volumique et à la vitesse du fluide. Cette définition de l'efficacité est utilisée dans l'ensemble du manuscrit.

1.3 Vibrations induites par vortex

Les vibrations induites par vortex sont des oscillations auto-entretenues d'un solide interagissant avec son sillage (Blevins 1990). Pour des nombre de Reynolds suffisamment élevés, un sillage fluctuant apparaît en aval d'un obstacle. Ce sillage est caractérisé par sa fréquence propre f_f, qui définit le nombre de Strouhal St comme le rapport entre le temps d'advection du fluide le long du solide D/U et le temps caractéristique des fluctuations du sillage $1/f_f$,

$$f_f = St \frac{U}{D}, \tag{1.2}$$

où U est la vitesse de l'écoulement et D une longueur caractéristique du solide. Le sillage exerce donc un forçage fluctuant sur le solide, à la fréquence f_f. Si le solide est libre d'osciller, il vibre sous l'effet de ce forçage. Les déplacements du solide impactent en retour le sillage. Nous sommes bien en présence d'un mécanisme de couplage entre les dynamiques solides et fluides, qui engendre les vibrations induites par vortex.

1.3.1 Oscillateur de sillage

Il existe différents modèles pour rendre compte de la portance fluctuante qui engendre les VIV d'un cylindre (Gabbai & Benaroya 2005), notamment les modèles de type oscillateur de sillage (Hartlen & Currie 1970, Skop & Griffin 1973, Iwan & Blevins 1974, Skop & Balasubramanian 1997). Un oscillateur de sillage modélise la force de portance par un coefficient de portance fluctuante $q = 2C_L/C_{L0}$ où C_{L0} correspond au coefficient

de portance exercée par l'écoulement dans le cas du solide fixe. L'évolution de cette portance fluctuante q en fonction du temps T est régie par une équation d'oscillateur non-linéaire de Van der Pol, couplée à l'équation gouvernant la dynamique du solide par un terme F_s,

$$\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + \varepsilon\omega_f \left(q^2 - 1\right) \frac{\partial q}{\partial T} + \omega_f^2 q = F_s \tag{1.3}$$

avec $\omega_f = 2\pi f_f$ et ε étant un paramètre de non-linéarité. Facchinetti *et al.* (2004*a*) a démontré que dans le cas d'un cylindre rigide, un terme de couplage inertiel permet de rendre compte précisément des VIV d'une telle structure,

$$F_s = \frac{A}{D} \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2}, \tag{1.4}$$

où Y est le déplacement transverse du solide et A un coefficient empirique de couplage qui est déterminé expérimentalement. Sauf précision contraire, les paramètres utilisés dans cette thèse valent $\varepsilon = 0.3$ et $A = 12$ (Facchinetti *et al.* 2004*a*).

1.3.2 Cylindre rigide

Le problème canonique pour la compréhension des VIV est celui d'un cylindre rigide supporté élastiquement et placé transversalement à un écoulement, figure 1.3 (Williamson & Govardhan 2004). Le cylindre est soumis à des VIV transverses, c'est à dire dans la direction Y.

Accrochage *(Lock-in)*

Le support élastique du cylindre introduit une deuxième fréquence propre au système,

$$f_s = \sqrt{\frac{k}{m_t}}, \tag{1.5}$$

où k est la raideur du support, et m_t la masse linéique totale du cylindre, prenant en compte la masse ajoutée. Nous définissons alors la vitesse réduite de l'écoulement u comme le rapport entre les fréquences propres fluide et solide,

$$u = \frac{f_f}{f_s} = St \frac{U}{f_s D}. \tag{1.6}$$

La figure 1.4 présente l'évolution de l'amplitude normalisée Y/D et de la fréquence normalisée f/f_s des VIV en fonction de la vitesse réduite (Khalak & Williamson 1997). Il y a différents régimes de réponse. Lorsque les deux fréquences naturelles du système couplé sont éloignées l'une de l'autre, le sillage force le cylindre à sa fréquence propre f_f. Le sillage n'est alors que très peu perturbé par le mouvement du solide, dont l'amplitude est faible. En revanche, lorsque les fréquences sont proches, soit $u \approx 1$, l'amplitude des VIV augmente très fortement et atteint une valeur proche du diamètre du cylindre. On remarque également que la fréquence des oscillations dévie alors de la loi de Strouhal,

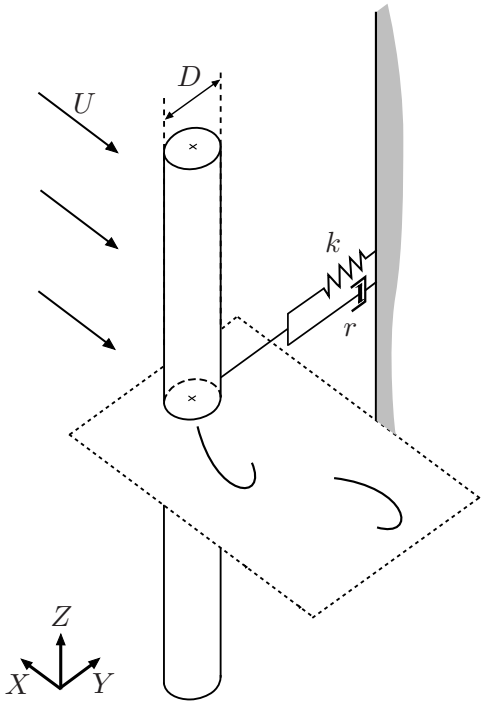


FIGURE 1.3 – Schéma d'un cylindre rigide supporté élastiquement et placé dans un écoulement de vitesse U. Le diamètre du cylindre est noté D, tandis que k et r sont respectivement la raideur et le coefficient d'amortissement du support.

équation (1.2), pour se fixer à une valeur distincte de chacune des deux fréquences naturelles du système, f_f et f_s. On ne peut plus considérer les VIV comme des oscillations du cylindre forcé par son sillage fluctuant. Celles-ci sont bien dues à un couplage fort entre le solide et son sillage, on parle alors d'accrochage, ou lock-in, (Williamson & Govardhan 2004).

Modèle de VIV

On considère un cylindre de diamètre D, supporté élastiquement et placé dans un écoulement de vitesse U. La raideur et le coefficient d'amortissement du support élastique sont respectivement notés k et r, tandis que la masse linéique est notée m_s, figure 1.3. L'équation régissant la dynamique du solide peut donc s'écrire,

$$m_s \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + r \frac{\partial Y}{\partial T} + kY = F_f. \tag{1.7}$$

Le forçage F_f se décompose en un terme de portance, un terme de masse ajoutée et un terme d'amortissement ajouté (Blevins 1990),

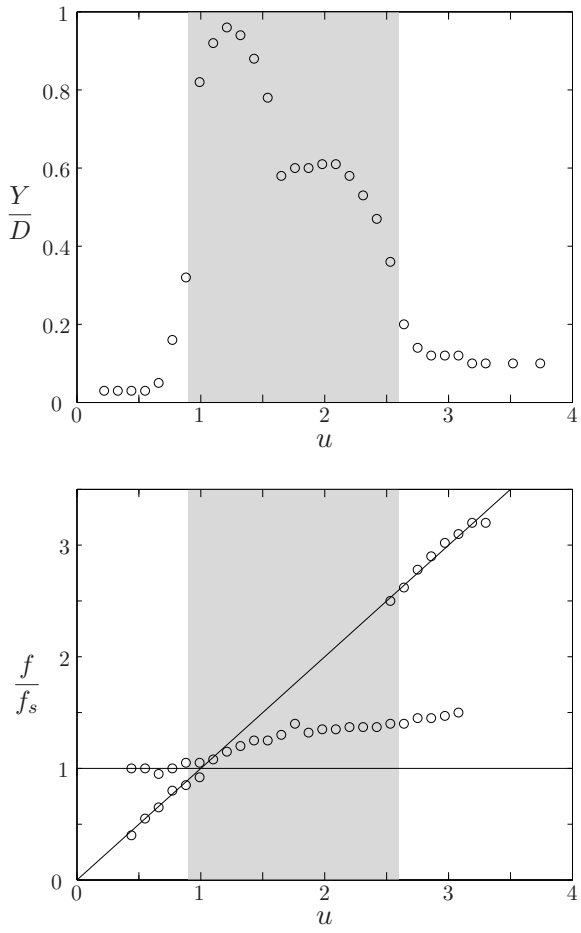


FIGURE 1.4 – Évolution avec u de l'amplitude et de la fréquence des VIV d'un cylindre rigide supporté élastiquement, données expérimentales tirées de l'article de Khalak & Williamson (1997). La zone grisée représente la gamme de vitesses pour lesquelles les VIV sont à l'accrochage.

$$F_f = \frac{1}{2}\rho U^2 D C_L(T) - \frac{\pi}{4}\rho D^2 C_{M0}\frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} - \frac{1}{2}\rho D U C_D \frac{\partial Y}{\partial T}, \tag{1.8}$$

avec ρ la masse volumique du fluide, C_{M0} le coefficient de masse ajoutée, C_D le coefficient de traînée et C_L le coefficient de portance. En notant $m_t = m_s + \rho\pi D^2 C_{M0}/4$ la masse linéique totale du cylindre, l'équation (1.7) se réduit donc à

$$m_t \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + \left(r + \frac{1}{2}\rho D U C_D\right)\frac{\partial Y}{\partial T} + kY = \frac{1}{4}\rho U^2 D C_{L0} q(T), \tag{1.9}$$

où la portance fluctuante q est donnée par l'oscillateur de sillage, section 1.3.1. Si l'on

définit un déplacement et un temps adimensionnels comme

$$y = \frac{Y}{D} \quad \text{et} \quad t = \omega_f T, \tag{1.10}$$

on obtient le système adimensionnel couplé

$$\ddot{y} + \left(\xi + \frac{\gamma}{\mu}\right)\dot{y} + \delta^2 y = Mq, \tag{1.11a}$$

$$\ddot{q} + \varepsilon\left(q^2 - 1\right)\dot{q} + q = A\ddot{y}, \tag{1.11b}$$

où la dérivation par rapport à t est notée $\dot{(.)}$. Les paramètres sans dimensions du modèle sont définis comme

$$\xi = \frac{r}{m_t \omega_f}, \quad \delta = \frac{f_s}{f_f}, \quad \gamma = \frac{C_D}{4\pi St}, \quad \mu = \frac{m_t}{\rho D^2}, \quad M = \frac{C_{L0}}{16\mu\pi^2 St^2}. \tag{1.12}$$

Le paramètre ξ correspond à l'amortissement structurel sans dimension. L'amortissement fluide s'exprime lui comme γ/μ, où γ est un paramètre (Triantafyllou *et al.* 1994, Skop & Balasubramanian 1997) et μ le nombre de masse, rapport entre la masse linéique du solide et la masse du fluide correspondante. Le paramètre sans dimension M correspond au coefficient de couplage solide. Enfin δ est le rapport entre la fréquence propre du solide et celle du sillage. L'accrochage survenant lorsque ces fréquences sont proches, voir section 1.3.2, on peut dès lors penser que le coefficient δ influence fortement les VIV du cylindre. Les deux paramètres empiriques du modèle sont le coefficient de non-linéarité $\varepsilon = 0.3$ et le coefficient de couplage inertiel $A = 12$, introduits à la section 1.3.1. On dispose dorénavant d'un modèle complet pour représenter les VIV d'un cylindre rigide.

Oscillateur de sillage linéaire

Par ailleurs, de Langre (2006) a montré qu'une analyse linéaire de stabilité du système couplé permet d'interpréter l'accrochage comme une instabilité par confusion de fréquence. On considère une version linéarisée et simplifiée du modèle, où aucun terme d'amortissement n'est pris en compte,

$$\ddot{y} + \delta^2 y = Mq, \tag{1.13a}$$

$$\ddot{q} + q = A\ddot{y}, \tag{1.13b}$$

En cherchant des solutions du type $(y, q) = \mathrm{Re}\left[(y_0, q_0)\, e^{i\omega t}\right]$, on obtient la relation de dispersion

$$\omega^4 + \omega^2\left(AM - \delta^2 - 1\right) + \delta^2 = 0, \tag{1.14}$$

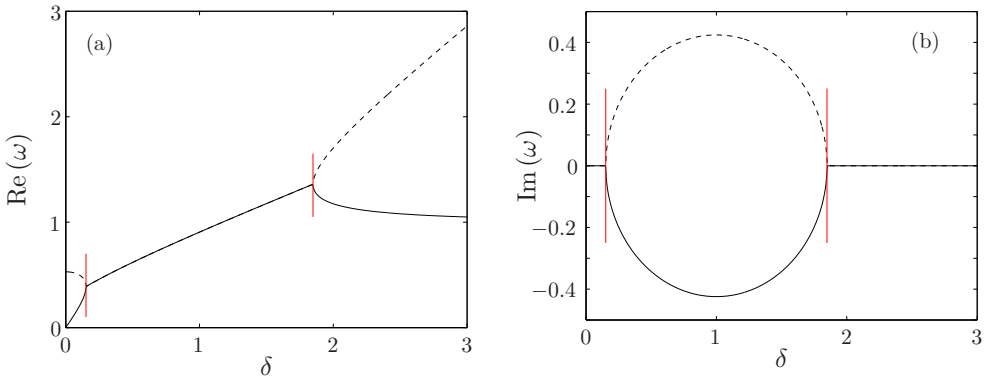


FIGURE 1.5 – (a) Partie réelle et (b) partie imaginaire de la pulsation linéaire ω, obtenue par l'équation (1.15) pour $AM = 0.72$. Pour des raisons de simplicité, on ne montre ici que les solutions de partie réelle positives.

qui admet quatre solutions,

$$\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\delta^2 + (1 - AM) \pm \sqrt{(\delta^2 + (1 - AM))^2 - 4\delta^2}\right]^{1/2}. \tag{1.15}$$

On trace sur la figure 1.5 l'évolution de la pulsation linéaire ω en fonction du paramètre δ, équation (1.15). Il existe une gamme de rapport de fréquence centrée autour de la condition idéale d'accrochage $\delta = 1$ pour laquelle la pulsation devient complexe. L'accrochage peut s'interpréter comme une instabilité par confusion de fréquence des deux modes liées aux composantes solides, y, et sillage, q, du système (1.13a) et (1.13b) (de Langre 2006).

Les conclusions restent par ailleurs valables si l'on considère le système linéaire complet, c'est à dire sans retirer l'ensemble des termes d'amortissement (de Langre 2006, Violette 2009). Il existe alors un mode instable pour toute valeur de δ, contrairement au modèle linéaire sans amortissement, mais on observe une amplification du taux de croissance autour de la condition idéale d'accrochage $\delta = 1$. Le modèle linéaire complet permet donc toujours de localiser l'accrochage en l'interprétant comme une amplification de l'instabilité du système linéaire.

Nous disposons du modèle d'oscillateur de sillage de Facchinetti, qui permet de rendre compte de la dynamique couplée du système cylindre/sillage en VIV. Par ailleurs, la version linéarisée du modèle donne rapidement accès à la gamme de paramètres entraînant l'accrochage.

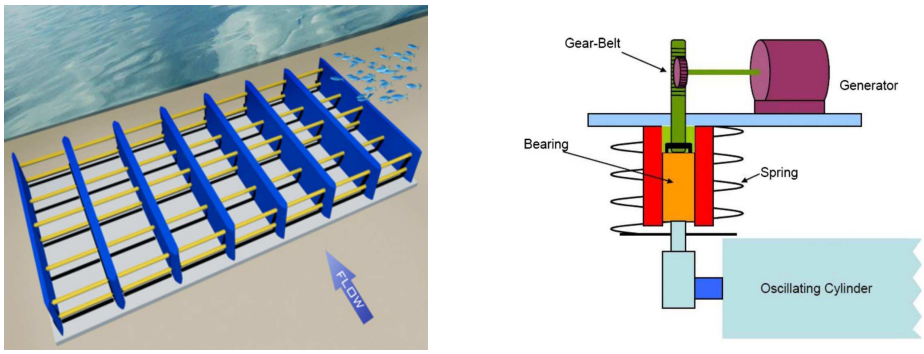


FIGURE 1.6 – Système VIVACE, développé par Bernitsas *et al.* (2008) et commercialisé par Vortex Hydro Energy. [WEB03]

1.3.3 Récupération d'énergie par VIV de cylindres rigides

Système VIVACE

Les VIV sont des oscillations auto-entretenues d'un solide interagissant avec son sillage fluctuant, qui atteignent de grandes amplitudes dans la gamme d'accrochage, figure 1.4. Il est donc possible de récupérer de l'énergie grâce aux VIV d'un solide immergé. Bernitsas *et al.* (2008) présente ainsi le système VIVACE, qui extrait de l'énergie à partir de courants fluviaux ou maritimes à l'aide des VIV de cylindres rigides, figure 1.6. Il démontre à cette occasion que l'efficacité d'un tel système, définie comme à la section 1.2, peut atteindre $\eta_{\text{VIVACE}} = 0.22$. Ce système simple permet de récupérer efficacement de l'énergie d'un écoulement de vitesse moyenne connue, à condition d'ajuster les propriétés mécaniques du système pour qu'il soit à l'accrochage. Il est à noter que le projet VIVACE a aujourd'hui atteint le stade de prototype et a donné lieu à la création d'une entreprise, Vortex Hydro Energy [WEB03].

Modèle de VIV et efficacité

Nous cherchons dans cette section à analyser la récupération d'énergie par VIV d'un cylindre rigide grâce au modèle introduit aux sections précédentes. Il faut pour cela lui associer un modèle d'extraction d'énergie. Du point de vue de la structure (ici le cylindre), l'extraction d'énergie revient à une perte d'énergie. Le choix est donc fait de modéliser simplement la récupération d'énergie par un terme de dissipation visqueuse. L'énergie dissipée est alors récupérée. Cette approche relativement courante, est utilisée par exemple dans l'article de (Bernitsas *et al.* 2008) ou de Meliga *et al.* (2011). Il est important de souligner ici que cette modélisation de la récupération d'énergie par un terme d'amortissement sera utilisée tout au long de la thèse. Dans le cas précis du cylindre rigide, on suppose que l'amortissement structurel, $\xi\dot{y}$ dans l'équation (1.11a), est entièrement dû à la récupération d'énergie. On accède alors rapidement à la puissance récupérée instantanée,

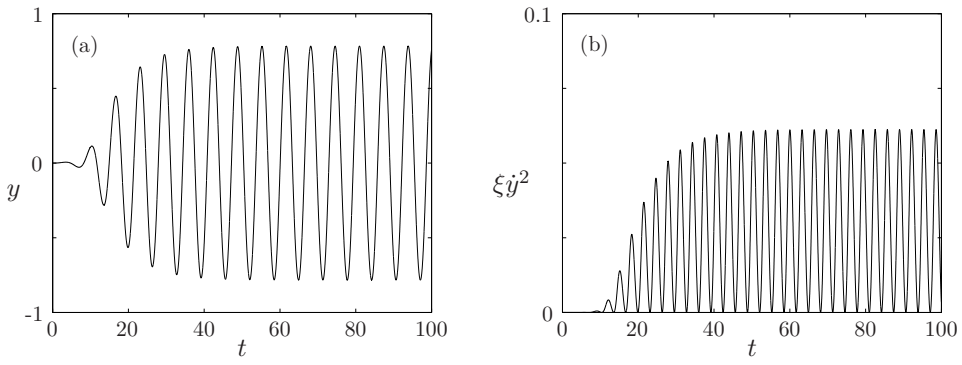


FIGURE 1.7 – VIV d'un cylindre rigide : (a) déplacement $y\,(t)$ et (b) puissance dissipée $\xi\dot{y}^2$, pour les valeurs de paramètres $\delta = 1$ et $\xi = 0.1$.

$$\mathcal{P} = r\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)^2, \tag{1.16}$$

donc à l'efficacité de la récupération, équation (1.1). Etant donné les adimensionnements, l'efficacité s'exprime en fonction des variables et paramètres sans dimension sous la forme

$$\eta = 16\mu\pi^3 St^3 \left\langle \xi\dot{y}^2 \right\rangle. \tag{1.17}$$

Le modèle permet d'étudier l'efficacité d'un récupérateur d'énergie du type VIVACE, qui extrait de l'énergie d'un écoulement grâce aux VIV d'un cylindre rigide supporté élastiquement. Les paramètres influençant la récupération sont ceux du support élastique : le rapport de fréquence δ et le coefficient d'amortissement ξ. Les autres paramètres sont fixés grâce aux études précédentes (Norberg 2003, Facchinetti *et al.* 2004*a*, Violette *et al.* 2010) : $C_D = 2$, $C_{L0} = 0.8$, $St = 0.17$, $\mu = 2.79$, $C_{M0} = 1$, d'où $M = 0.06$ et $\gamma/\mu = 0.34$ dans l'équation (1.11a).

On résout le système par différences finies avec un schéma explicite centré, Annexe C. Dans l'ensemble du manuscrit, le solide est initialement au repos, $y = 0$, et une petite perturbation aléatoire est appliquée à la portance fluctuante q. On présente sur la figure 1.7 le déplacement du cylindre en VIV, ainsi que la puissance dissipée, pour des valeurs typiques du rapport de fréquence δ et du coefficient d'amortissement ξ. Les VIV atteignent rapidement un cycle limite, auquel nous nous intéressons par la suite pour obtenir l'efficacité de la récupération.

Une étude paramétrique complète des performances du système en fonction des deux paramètres de récupération est alors effectuée. L'évolution de l'efficacité η avec les paramètres ξ et δ est montrée sur la figure 1.8.

L'efficacité varie fortement avec les paramètres de récupération, surtout avec le rapport de fréquence δ. On observe un très net pic d'efficacité sur cette carte, correspondant à une configuration optimale du récupérateur d'énergie. Cet optimal est atteint pour $\delta_{opt} = 0.90$ et $\xi_{opt} = 0.16$, l'efficacité obtenue étant de $\eta_{opt} = 0.23$.

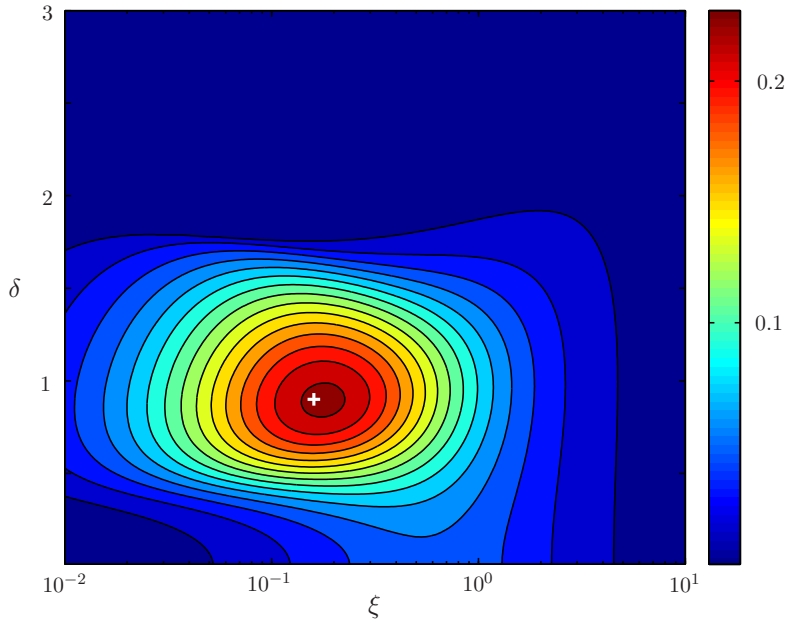


FIGURE 1.8 – Effet des paramètres de récupération ξ et δ sur l'efficacité de la récupération d'énergie, la croix blanche localise la configuration optimale $\delta_{opt} = 0.90$ et $\xi_{opt} = 0.16$.

Accrochage et récupération optimale Les fortes valeurs de l'efficacité sont localisées autour de la valeur $\delta = 1$. L'efficacité maximale est notamment obtenue pour $\delta = 0.90$. Or, $\delta = f_s/f_f$ est le rapport des fréquences propres du solide et du sillage, la condition de haute efficacité $\delta \approx 1$ correspond donc à une condition d'accrochage des VIV. L'accrochage entraîne en effet des oscillations de fortes amplitudes du cylindre, figure 1.4.

Par ailleurs, nous avons vu à la section 1.3.2 qu'une analyse linéaire de stabilité du système couplé permet de localiser cet accrochage. Le taux de croissance de la pulsation linéaire est tracé sur la figure 1.9. Il est amplifié autour de la condition classique d'accrochage $\delta = 1$. Les fortes efficacités sont donc bien obtenues lorsque le rapport de fréquence est tel que le système soit à l'accrochage, c'est à dire $\delta \approx 1$.

Amortissement : récupération ou atténuation ? L'efficacité tend vers zéro à la fois aux faibles et forts amortissements pour toutes les valeurs du rapport de fréquence.

On sait que l'amplitude des VIV sature à une valeur proche du diamètre de la structure lorsque l'amortissement tend vers zéro, d'après le diagramme de Skop-Griffin, que l'on trouve par exemple dans les articles de Skop & Balasubramanian (1997) ou Khalak & Williamson (1999). L'efficacité tend ainsi vers zéro aux petits amortissements, équation (1.17). Le coefficient d'amortissement ξ doit donc être suffisamment grand pour qu'il y ait récupération d'énergie. A l'inverse, l'amplitude décroît pour les fortes valeurs

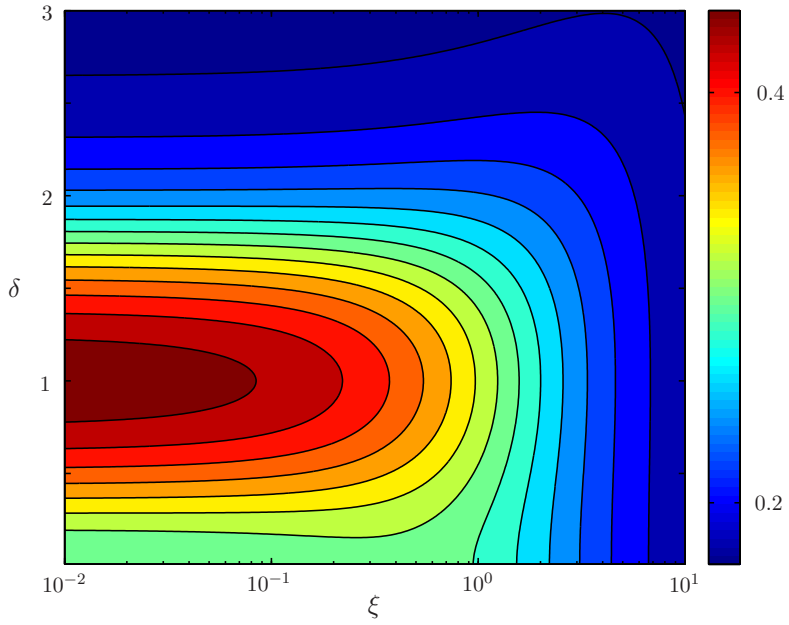


FIGURE 1.9 – Évolution du taux de croissance $-\mathrm{Im}(\omega)$ de la pulsation du système linéarisé en fonction des paramètres ξ et δ.

de ξ. On remarque aussi à la figure 1.9 que le taux de croissance décroît avec les forts amortissements, qui tendent à restabiliser le système. L'amplitude des VIV varie en réalité comme $1/\xi$ aux forts amortissements. L'efficacité, proportionnelle à $\xi \dot{y}^2$, tendra donc elle aussi vers zéro comme $1/\xi$. L'amortissement ne doit pas être trop élevé non plus afin de ne pas trop atténuer les VIV. Le paramètre ξ doit par conséquent être choisi comme un compromis entre la récupération d'énergie et l'atténuation des VIV.

Il est possible de quantifier cette influence de ξ sur η en revenant à la définition de l'efficacité, équation (1.17). En faisant l'hypothèse d'oscillations périodiques du cylindre de pulsation ω et d'amplitude y_0, il vient

$$\eta = 8\mu\pi^3 St^3 \xi \omega^2 y_0^2. \tag{1.18}$$

Les fortes efficacités sont obtenues lorsque les VIV sont à l'accrochage. On utilise alors l'expression donnée par Facchinetti *et al.* (2004*a*) pour décrire l'évolution de y_0 avec un paramètre d'amortissement quand $\delta = 1$,

$$y_0 = \frac{2M}{\left(\xi + \frac{\gamma}{\mu}\right)} \sqrt{1 + \frac{AM}{\varepsilon} \frac{1}{\left(\xi + \frac{\gamma}{\mu}\right)}}. \tag{1.19}$$

On remarque tout d'abord que l'amplitude des VIV sature aux faibles amortissements et qu'elle varie bien comme l'inverse de ξ aux grands amortissements. On déduit alors

de l'équation (1.18) que l'efficacité $\eta \propto \xi y_0^2$ varie comme ξ aux faibles amortissements et comme $1/\xi$ aux forts amortissements. Il existe donc un amortissement ξ_0 pour lequel l'efficacité est maximale,

$$\xi_0 = -\frac{AM}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{AM}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{AM}{\varepsilon}\frac{\gamma}{\mu} + \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2} = 0.18, \tag{1.20}$$

très proche de la valeur optimale effectivement déterminée par l'étude paramétrique, $\xi_{opt} = 0.16$. En combinant les équations (1.18), (1.19) et (1.20), on trouve que l'efficacité correspondante vaut $\eta_0 = 0.21$ tandis que l'efficacité optimale obtenue par l'analyse paramétrique vaut $\eta_{opt} = 0.23$. Nous avons donc obtenu analytiquement une très bonne approximation des paramètres optimaux δ et ξ ainsi que de l'efficacité maximale atteinte.

En conclusion, nous avons analysé la récupération d'énergie par VIV de cylindres rigides à l'aide du modèle introduit à la section 1.3.2. Nous avons localisé le couple de paramètres optimaux $(\xi_{opt}, \delta_{opt})$ pour lesquels la valeur optimale de l'efficacité est atteinte, $\eta_{opt} = 0.23$, valeur très proche des résultats présentés par Bernitsas *et al.* (2008). Le rapport de fréquence optimal correspond à une condition d'accrochage, ce qui est confirmé par l'analyse linéaire de stabilité du système couplé. L'amortissement optimal correspond lui à un compromis entre extraction d'énergie et atténuation des VIV.

Vitesse d'écoulement Finalement, nous étudions la sensibilité à la vitesse de l'écoulement d'un système de type VIVACE. Dans des conditions réelles de fonctionnement, la vitesse U varie autour d'une valeur moyenne U_m. La récupération est logiquement dimensionnée afin d'optimiser l'extraction d'énergie pour cette vitesse moyenne. Or les deux paramètres ξ et δ varient comme l'inverse de la vitesse, équations (1.12). L'évolution de l'efficacité avec U correspond donc à une courbe $\delta \propto \xi$ passant par l'optimal $(\xi_{opt}, \delta_{opt}) = (0.16, 0.90)$. La figure 1.10 présente la dépendance de l'efficacité avec la vitesse de l'écoulement. L'efficacité optimale $\eta_{opt} = 0.23$ est bien obtenue pour la vitesse moyenne de l'écoulement, mais η varie fortement avec la vitesse. L'efficacité chute rapidement lorsque la vitesse de l'écoulement s'éloigne de sa valeur moyenne, ce qui est relativement fréquent dans des conditions réalistes de fonctionnement. On définit la largeur de pic Δ comme la largeur de l'intervalle de vitesse autour de $U = U_m$ pour lequel $\eta > 0.75\eta_{opt}$. La largeur de pic vaut $\Delta = 0.78$ pour un système de type VIVACE. Cette étroitesse du pic d'efficacité autour de sa vitesse nominale de fonctionnement constitue une première limitation à la récupération d'énergie par VIV de cylindres rigides.

Par ailleurs, la densité d'énergie dans un écoulement géophysique est particulièrement faible. Pour un courant de vitesse moyenne $U_m = 1.5$ m.s^{-1} (correspondant à 3 noeuds, vitesse réaliste pour un courant de marée sur les côtes françaises), elle est par exemple de 1.8 kW.m^{-2}. Il faut donc une très grande structure pour obtenir des puissances significatives. On définit $\Lambda = L/D$ le rapport d'aspect du cylindre considéré. Le cylindre interagit avec l'écoulement sur une aire $\mathcal{A} = \Lambda D^2$. Le volume du cylindre, donc sa masse, varie lui comme ΛD^3. Pour agrandir la surface d'interaction $\mathcal{A}$ tout en limitant l'augmentation de la masse de la structure, il apparaît donc plus judicieux d'augmenter

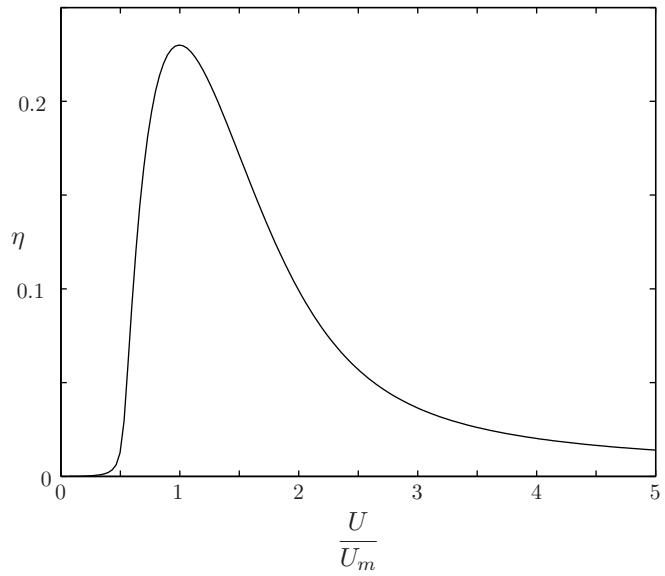


FIGURE 1.10 – Efficacité de la récupération d'énergie par VIV d'un cylindre rigide en fonction de la vitesse de l'écoulement U. Le système est dimensionné de manière à ce que l'optimal de récupération soit atteint pour $U = U_m$.

le rapport d'aspect Λ que le diamètre D. Les structures à grand rapport d'aspect apparaissent donc comme plus à même d'extraire une quantité significative d'énergie à partir d'un écoulement géophysique. Nous introduisons par conséquent les VIV de structures flexibles à la section 1.4.

1.4 Structures flexibles

Nous considérons des structures ayant les propriétés suivantes :

- la structure est élancée : $\Lambda >> 1$,
- les déplacements se font uniquement en flexion (pas de torsion ni de compression),
- la raideur de la structure est dominée par le terme de tension : la longueur caractéristique $L_c = \sqrt{EI/\Theta}$ est petite devant la longueur d'onde des vibrations, où EI est la rigidité de flexion de la structure et Θ sa tension.

Dans la suite du manuscrit, nous appelons structure flexible une structure dont les propriétés et la dynamique répondent à ces critères.

Les vibrations induites par vortex de structures flexibles ont été largement étudiées, notamment par l'industrie offshore (Baarholm *et al.* 2006, Tognarelli *et al.* 2008, Mukundan *et al.* 2009, Modarres-Sadeghi *et al.* 2010). Il est par exemple primordial de

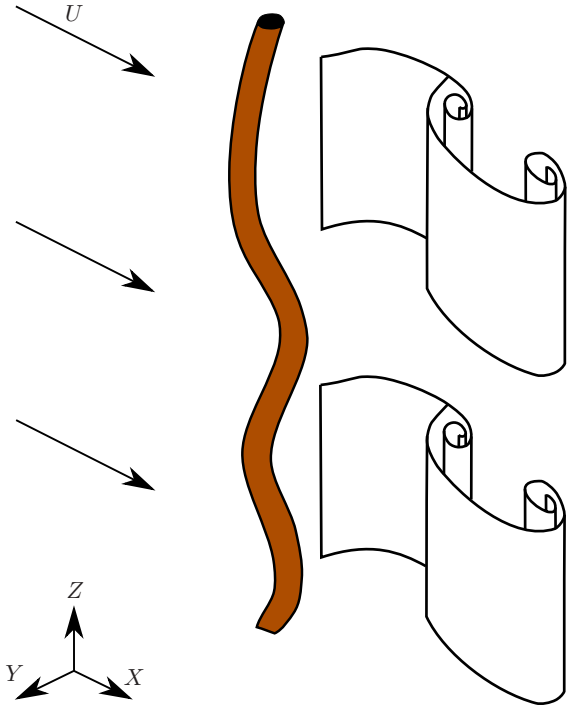


FIGURE 1.11 – VIV transverses d'une structure flexible dans un écoulement uniforme.

comprendre les efforts auxquels sont soumis les câbles d'ancrage ou risers de plateformes pétrolières pour éviter toute rupture par fatigue, dont les conséquences seraient dramatiques.

1.4.1 VIV de structures flexibles

Les mécanismes locaux d'interaction entre une structure flexible et son sillage sont identiques au cas rigide présenté à la section 1.3.2. Néanmoins, une nouvelle dimension est introduite dans le système lorsque l'on considère une structure flexible : la variable Z a un impact sur la dynamique couplée solide/sillage, figure 1.11. Les VIV d'une structure flexible sont plus complexes que celles d'un cylindre rigide, avec notamment l'apparition d'ondes induites par vortex (Wu *et al.* 2012). Elles ont ainsi fait l'objet de nombreuses études expérimentales (Alexander 1981, Vandiver *et al.* 2009, Modarres-Sadeghi *et al.* 2011), numériques (Newman & Karniadakis 1997, Lucor *et al.* 2006, Willden & Graham 2004, Bourguet *et al.* 2011*b*) et analytiques, à l'aide de modèles d'oscillateur de sillage (Facchinetti *et al.* 2004*b*, Xu *et al.* 2008, Srinil 2010).

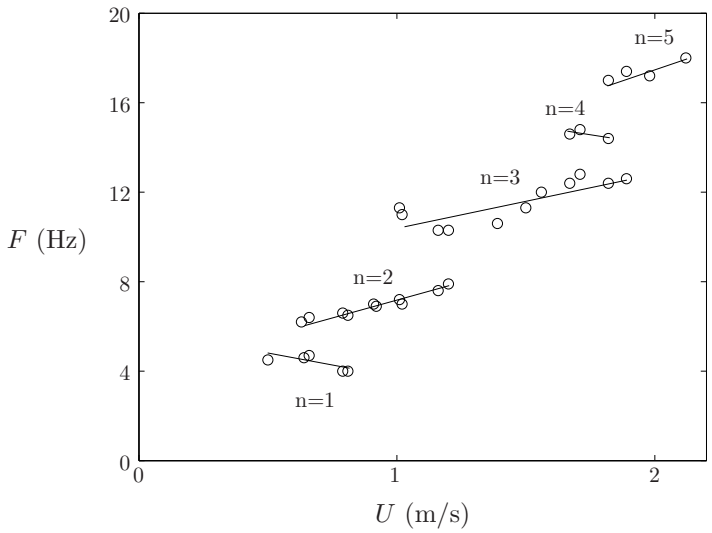


FIGURE 1.12 – Évolution de la fréquence des VIV d'un câble fixé à ses deux extrémités en fonction de la vitesse de l'écoulement (King 1995).

1.4.2 Modes de vibrations

Dans le cas d'un cylindre rigide supporté élastiquement, l'accrochage intervient quand la fréquence propre du sillage, la fréquence de Strouhal f_f, et la fréquence propre structurelle, f_s, sont proches, figure 1.4. Lorsque l'on considère une structure flexible, il existe une infinité de fréquences propres dues aux différents modes de vibrations du système. Pour un câble à tension constante Θ, de masse linéique m, de longueur L et fixé à ses deux extrémités, on sait ainsi que le système admet comme fréquence propre tout f_n défini par

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{\Theta}{m}}. \tag{1.21}$$

King (1995) présente par exemple une étude expérimentale des VIV d'un câble fixé à ses deux extrémités et soumis à un écoulement uniforme. L'évolution de la fréquence des oscillations avec la vitesse de l'écoulement est montrée sur la figure 1.12. La fréquence des VIV évolue par paliers, chaque palier correspondant à un mode de vibrations du câble. Lorsque la vitesse évolue, la fréquence de Strouhal est successivement égale à la fréquence des différents modes propres de la structure : il y a accrochage pour chacun des modes de vibrations (Chaplin *et al.* 2005, Trim *et al.* 2005). L'existence de plusieurs plages d'accrochage constitue une différence fondamentale entre les VIV d'une structure flexible et ceux d'un cylindre rigide. On peut ainsi s'attendre à ce que les amplitudes soient toujours significatives, ce qui justifie a posteriori l'importance d'une bonne connaissance des VIV de risers et de câbles pour l'industrie offshore.

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que certains paliers de fréquence correspondant à des modes successifs du câble se chevauchent sur la figure 1.12. Pour une même vitesse, plusieurs modes peuvent être excités, modulant ainsi fortement les VIV de la structure. Cela explique le phénomène de partage en temps des VIV d'une structure flexible, où de petites perturbations peuvent faire basculer la dynamique de la structure d'un mode à l'autre (Chaplin *et al.* 2005, Violette *et al.* 2010).

1.4.3 Ondes stationnaires/Ondes progressives

Les VIV de structures flexibles se traduisent par l'apparition d'ondes induites par vortex. Suivant les caractéristiques de la structure et de l'écoulement, ces ondes peuvent être stationnaires ou progressives. Si la structure est suffisamment « longue », des ondes progressives vont pouvoir s'installer tandis que si le système ne l'est pas assez, les ondes sont réfléchies aux extrémités et sont alors stationnaires. En notant λ la longueur d'onde du mode excité et ζ l'amortissement modal correspondant, supposé linéaire, on sait que l'onde est atténué par un facteur $\exp(2\pi\zeta L/\lambda)$ sur une longueur de câble. Or, le numéro du mode n est défini par $n = 2L/\lambda$, on a donc une atténuation par un facteur $\exp(\pi\zeta n)$ sur la longueur de la structure. On retrouve le critère donné par Vandiver (1993) selon lequel, des ondes progressives vont se développer si ζn est grand (typiquement $\zeta n > 2$), tandis que des ondes stationnaires vont se développer pour ζn petit ($\zeta n < 0.2$). Cette propagation des ondes de VIV a par exemple été observée expérimentalement par Vandiver *et al.* (2009) et Marcollo *et al.* (2011), mais aussi numériquement dans les simulations numériques directes (DNS) de Newman & Karniadakis (1997) ou Bourguet *et al.* (2011*a*) pour des écoulements uniformes ou cisaillés. Le modèle d'oscillateur de sillage permet également d'observer l'apparition d'ondes progressives de VIV (Facchinetti *et al.* 2004*b*, Violette *et al.* 2007, Srinil 2011).

1.5 Récupération d'énergie par VIV de structures flexibles

Pour que les VIV constituent un mécanisme de récupération d'énergie intéressant, nous avons vu à la fin de la section 1.3.3 qu'il fallait que le système remplisse deux conditions :

- Le système doit être étendu de manière à interagir avec l'écoulement sur la plus grande surface possible (rapport d'aspect $\Lambda >> 1$),

- Le système couplé solide/sillage doit être à l'accrochage afin d'optimiser le transfert d'énergie du fluide vers le solide.

Or, nous venons de voir que si nous répondions au premier critère en considérant une structure flexible, celle-ci aura de nombreuses plages d'accrochage. Ces plages d'accrochage peuvent être contiguës, la structure ayant alors en permanence un mode à l'accrochage, répondant de facto au deuxième critère. La flexibilité d'une structure lui

permet d'adapter sa dynamique grâce à ses différents modes de vibrations afin d'être à l'accrochage, quelle que soit la vitesse de l'écoulement. Il apparaît finalement opportun d'analyser la possibilité d'extraire de l'énergie d'un écoulement grâce aux vibrations induites par vortex d'une structure flexible.

1.6 Propositions

Après avoir rappelé le contexte actuel propice à l'innovation dans le domaine de la récupération d'énergie, nous avons vu à la section 1.3 que les vibrations induites par vortex constituent un mécanisme d'interaction fluide/solide intéressant dans l'optique d'extraire de l'énergie d'un écoulement. Les versions linéaires et non-linéaires du modèle d'oscillateur de sillage de Facchinetti ont été présentées et nous ont permis d'effectuer une étude paramétrique complète de l'efficacité d'un système du type VIVACE. L'efficacité maximale obtenue est de l'ordre de 20 %. Le récupérateur d'énergie doit être dimensionné pour que le système couplé fluide/solide soit à l'accrochage, afin de maximiser le transfert d'énergie entre le sillage et le cylindre.

Cependant, de grandes structures sont nécessaires pour extraire une puissance significative. Les structures flexibles constituent de grands systèmes dont les VIV sont bien connues. Par ailleurs, ces systèmes sont caractérisés par une infinité de fréquences propres qui leur permettent d'avoir un mode de vibrations à l'accrochage pour toute vitesse de l'écoulement. Les VIV de structures flexibles semblent par conséquent idéales pour extraire de l'énergie à partir d'un écoulement.

Dans ce manuscrit, nous nous proposons donc d'étudier la possibilité de récupérer localement de l'énergie par les VIV d'une structure flexible dans un écoulement uniforme. Cette analyse fondamentale est menée à l'aide d'un modèle d'oscillateur de sillage qui aura au préalable été confronté à des simulations numériques ou à des résultats expérimentaux. L'influence des paramètres du système sur l'efficacité de la récupération est étudiée, afin de comprendre l'apport de la flexibilité de la structure sur les performances du système.

Les questions principales qui se posent désormais sont :

1. Les VIV de structures flexibles permettent-elles d'extraire efficacement de l'énergie d'un écoulement ? En particulier, quelle est la sensibilité des performances du système proposé aux propriétés du milieu, comme la vitesse de l'écoulement ?

2. La flexibilité de la structure joue-t-elle un rôle fondamental dans la récupération d'énergie ? Une structure flexible a-t-elle un avantage intrinsèque dû à sa flexibilité sur un cylindre rigide ou bien ses performances sont-elles proches de celles d'une structure rigide « allongée » ?

En répondant à ces questions, nous nous proposons de démontrer dans cette thèse la proposition suivante :

Les VIV de structures flexibles permettent d'extraire efficacement de l'énergie d'un écoulement grâce à l'adaptabilité de la dynamique de la structure due à sa flexibilité.

Au chapitre 2, les VIV d'un câble tendu infini équipé de récupérateurs d'énergie périodiquement distribués le long de la structure sont étudiées, après validation du modèle de VIV correspondant. Nous verrons comment l'introduction d'un amortissement localisé modifie la dynamique de VIV d'un câble tendu et comment la flexibilité de la structure influence l'efficacité de la récupération. Enfin, nous étudierons expérimentalement et numériquement un système de récupération d'énergie plus réaliste : une corde suspendue dans un écoulement avec un récupérateur d'énergie unique situé à son extrémité supérieure, chapitre 3.

Chapitre 2

Structures flexibles et récupération d'énergie distribuée

Dans ce chapitre, nous étudions les vibrations induites par vortex d'une structure flexible idéalisée. L'objectif est double : il s'agit en effet de valider le principe de la récupération d'énergie par VIV d'une structure flexible et de comprendre l'influence des différents paramètres sur l'efficacité d'un tel système, à l'aide du modèle d'oscillateur de sillage proposé à la section 1.3.1.

La configuration étudiée est présentée à la section 2.1. Les résultats du modèle sont ensuite comparés pour validation à des calculs DNS à la section 2.2. Dans un second temps, section 2.3, nous analysons la dépendance de l'efficacité avec les différents paramètres du système grâce au modèle d'oscillateur de sillage, puis à sa version linéarisée, section 2.4. Nous verrons enfin à la section 2.5 comment la flexibilité du système influence l'efficacité du système de récupération d'énergie présenté ici.

2.1 Configuration et modèle

2.1.1 Configuration

La configuration étudiée dans ce chapitre est un câble infiniment long et uniformément tendu. Des systèmes d'extraction d'énergie sont distribués périodiquement le long de la structure, soumise à un écoulement uniforme, figure 2.1.

2.1.2 Modèle de VIV de câble

Dynamique du câble

Le modèle d'oscillateur de sillage présenté en section 1.3.1 introduit une modélisation du forçage fluide par une portance fluctuante, équation (1.3). Cette équation est couplée à l'équation de la dynamique de câble

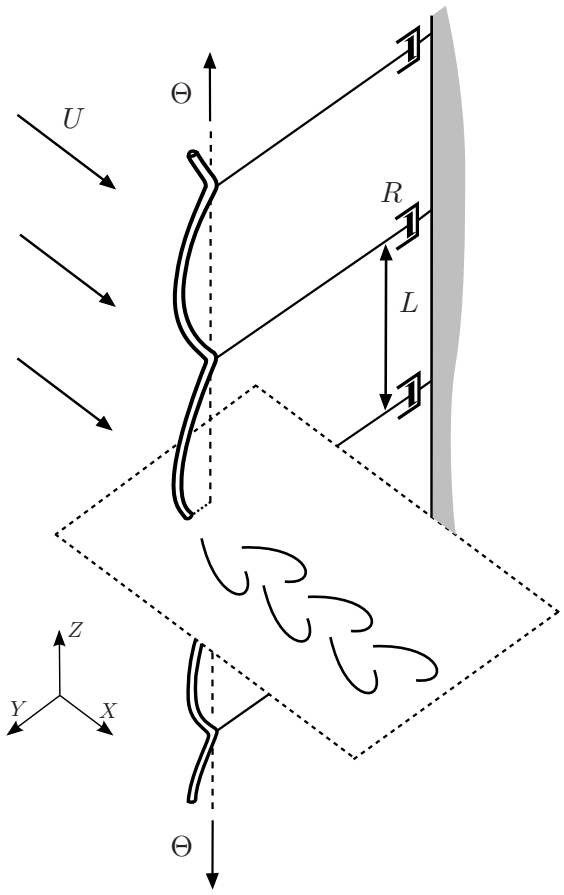


FIGURE 2.1 – VIV transverse de câble tendu placé dans un écoulement uniforme et équipé de systèmes de récupération d'énergie distribués périodiquement.

$$m_s \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} - \Theta \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} = F_f, \tag{2.1}$$

où m_s est la masse linéique du câble, Θ sa tension et F_f le forçage exercé par le fluide sur le câble, équation (1.8). Ce forçage est toujours constitué d'un effet inertiel de masse ajoutée, d'un effet d'amortissement ajouté et d'une portance fluctuante. L'équation de la dynamique du câble s'écrit

$$m_t \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + \frac{1}{2}\rho D U C_D \frac{\partial Y}{\partial T} - \Theta \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} = \frac{1}{4}\rho U^2 D C_{L0} q\left(T\right), \tag{2.2}$$

où les différents paramètres sont définis de la même façon que pour le cylindre rigide, section 1.3.2. En particulier, $m_t = m_s + \rho\pi D^2 C_{M0}/4$ correspond à la masse linéique totale du câble.

Conditions aux limites périodiques

Le câble est équipé de récupérateurs d'énergie distribués périodiquement. Comme à la section 1.3.3, la récupération est modélisée par une dissipation visqueuse. Nous notons L la distance entre deux récupérateurs successifs et R leur coefficient d'amortissement, figure 2.1. Il y a équilibre entre la force d'amortissement et la tension de chacun des brins situés de part et d'autre des récupérateurs. La récupération d'énergie se traduit donc par la condition aux limites périodique

$$\Theta \left[\left.\frac{\partial Y}{\partial Z}\right|_{Z=0} - \left.\frac{\partial Y}{\partial Z}\right|_{Z=L} \right] = R \left.\frac{\partial Y}{\partial T}\right|_{Z=0}. \tag{2.3}$$

Grandeurs caractéristiques

La vitesse de phase des ondes se propageant le long du câble s'écrit $c = \sqrt{\Theta/m_t}$. On définit alors la longueur caractéristique Z_c comme la longueur d'onde des ondes se propageant à la vitesse de phase c, avec une pulsation égale à la pulsation de Strouhal ω_f,

$$Z_c = \frac{2\pi}{\omega_f}\sqrt{\frac{\Theta}{m_t}}. \tag{2.4}$$

Comme à la section précédente, nous utilisons la pulsation de Strouhal comme fréquence caractéristique et le diamètre D comme échelle caractéristique du déplacement transverse. Nous obtenons donc le jeu de variables sans dimension

$$t = \omega_f T, \quad y = \frac{Y}{D} \quad \text{et} \quad z = \frac{Z}{Z_c}. \tag{2.5}$$

Ces adimensionnements définissent le paramètre de longueur réduite ℓ, correspondant au rapport entre la distance séparant deux récupérateurs successifs et la longueur d'onde caractéristique Z_c,

$$\ell = \frac{L}{Z_c}. \tag{2.6}$$

Système couplé

Le modèle de VIV de câble s'obtient en couplant l'équation de la dynamique du câble, l'oscillateur de sillage et la condition aux limites. Il s'écrit sous sa forme adimensionnelle

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - \frac{1}{4\pi^2}y'' = Mq, \tag{2.7a}$$

$$\ddot{q} + \varepsilon\left(q^2 - 1\right)\dot{q} + q = A\ddot{y}, \tag{2.7b}$$

$$y(0,t) - y(\ell,t) = 0, \tag{2.7c}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\left[y'(0,t) - y'(\ell,t)\right] = \xi\ell\dot{y}(0,t), \tag{2.7d}$$

où la dérivation par rapport à la variable sans dimension z est notée $(.)'$. Grâce aux adimensionnements choisis, les paramètres γ, μ et M ont la même définition que dans la cas rigide, section 1.3.2. La récupération d'énergie se traduit par la condition aux limites, équation (2.7d), et fait intervenir deux paramètres : la longueur réduite ℓ et le coefficient d'amortissement ξ,

$$\xi = \frac{R}{Lm_t\omega_f}, \tag{2.8}$$

qui correspond à l'intensité de l'extraction d'énergie d'un des récupérateurs. L'efficacité η de la récupération est toujours définie comme à la section 1.2 et s'exprime dans ce cas sous la forme

$$\eta = \frac{\left\langle R\left(\left.\frac{\partial Y}{\partial T}\right|_{Z=0}\right)^2\right\rangle}{\frac{1}{2}\rho DLU^3} = 16\mu\pi^3 St^3\left\langle \xi\ \dot{y}|_{z=0}^2\right\rangle. \tag{2.9}$$

Nous disposons d'un modèle pour les VIV de câble tendu, complété par des conditions aux limites périodiques modélisant l'extraction d'énergie. Les performances de ce système de récupération d'énergie sont mesurées par l'efficacité η.

Résolution numérique

Le système couplé est résolu par différences finies. Le schéma utilisé est un schéma centré en temps et de Crank-Nicolson centré en espace, Annexe C. Les pas de discrétisation en temps et en espace sont constants et suffisamment petits pour garantir la convergence du schéma, qui a été vérifiée numériquement. Nous avons ainsi accès au cycle limite atteint par la dynamique du câble ainsi qu'à l'efficacité de la récupération d'énergie.

2.2 Calculs DNS

Dans un premier temps, nous nous assurons de la capacité du modèle à représenter fidèlement les VIV d'un câble tendu avec des conditions aux limites périodiques de dissipation. Des modèles de VIV basés sur un oscillateur de sillage sont déjà utilisés pour les câbles tendus (Facchinetti *et al.* 2004*b*, Violette *et al.* 2007, Xu *et al.* 2008, Srinil 2010).

Néanmoins, l'introduction de conditions aux limites dissipatives va impacter la dynamique du câble, notamment via la sélection des modes de vibrations. Nous comparons donc les prédictions du modèle avec des résultats de calcul DNS de Bourguet (2013). Pour pouvoir généraliser les comparaisons à une large gamme de nombre de Reynolds Re, celui-ci doit être suffisamment élevé pour que le sillage soit turbulent et non constitué d'une allée tourbillonnaire de Von Karman bien définie. Par ailleurs, le choix de Re est limité par le temps de calcul. Les simulations DNS sont finalement effectuées pour un nombre de Reynolds $Re = 300$. L'évolution du coefficient C_{L0} avec Re doit être prise en compte. Un calcul DNS avec un câble fixe est effectué, de manière à en extraire la valeur $C_{L0} = 0.61$, cohérente avec celles de Norberg (2003). Tous les autres paramètres restent inchangés, c'est à dire $C_D = 2$, $St = 0.17$, $\mu = 2.79$, $A = 12$ et $\varepsilon = 0.3$, le coefficient de couplage M prend lui la valeur $M = 0.03$.

2.2.1 Dynamique du câble

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux dynamiques globales du câble pour trois jeux de paramètres ℓ et ξ. Les résultats du modèle et des DNS sont comparés à la figure 2.2.

Les dynamiques de VIV de câble données par les calculs DNS et le modèle sont très proches. Pour les deux premiers jeux de paramètres, les DNS et le modèle prédisent des oscillations stationnaires, figures 2.2 (a)-(d), tandis que des ondes progressives sont visibles dans le troisième cas, figures 2.2 (e) et (f). Le modèle de VIV est bien capable de rendre compte du caractère propagatif ou stationnaire des VIV de câble.

Par ailleurs, les modes de vibrations sont identiques pour les deux méthodes dans chacun des trois cas considérés. Les amplitudes des VIV sont également comparables. Les fréquences d'oscillations déterminées par les calculs DNS et par le modèle sont elles aussi proches, même si l'on peut déceler un léger décalage. Cet écart vient du fait que la fréquence d'accrochage dépend du nombre de Strouhal et du coefficient de masse ajoutée, qui sont fixés dans le modèle, contrairement aux calculs DNS. Les deux paramètres de récupération ℓ et ξ ont par ailleurs une grande influence sur les VIV du câble, à la fois sur le mode excité et sur leur caractère stationnaire ou propagatif.

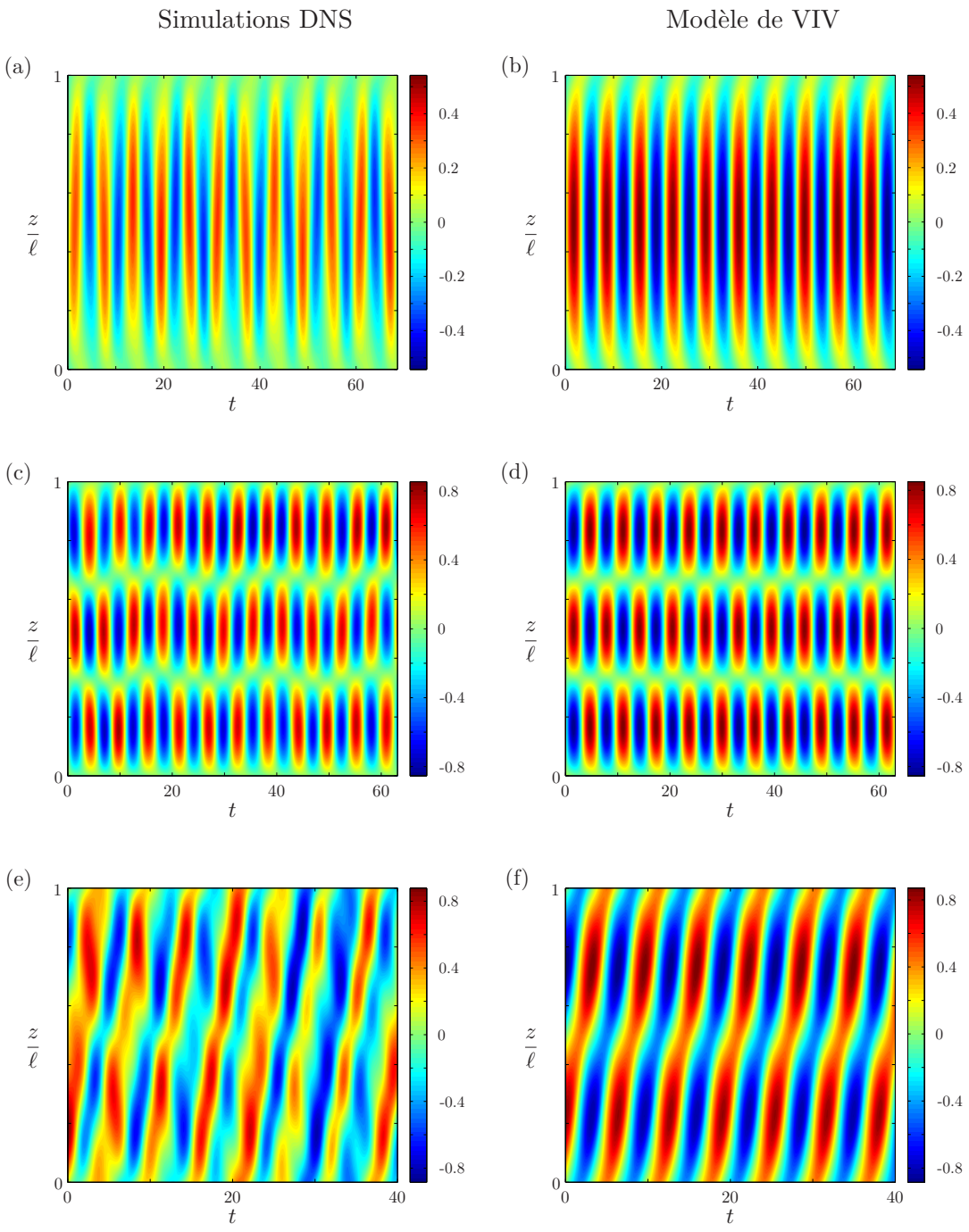


FIGURE 2.2 – Comparaison des déplacements du câble donnés par les simulations DNS de Bourguet (2013) (gauche) et le modèle d'oscillateur de sillage (droite) pour différents paramètres de récupération d'énergie : $\ell = 0.55$ et $\xi = 3.65$ pour les figures (a) et (b), $\ell = 1.50$ et $\xi = 3.65$ pour les figures (c) et (d), $\ell = 1.00$ et $\xi = 0.04$ pour les figures (e) et (f).

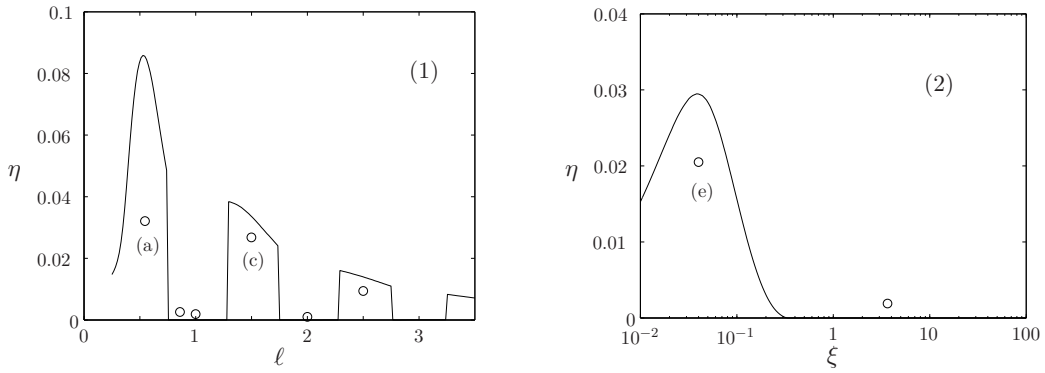


FIGURE 2.3 – (1) Évolution de l'efficacité de la récupération d'énergie en fonction de ℓ pour $\xi = 3.65$, (2) Évolution de l'efficacité de la récupération d'énergie en fonction de ξ pour $\ell = 1$. Les courbes pleines montrent les résultats du modèle tandis que les symboles correspondent aux calculs DNS, les symboles notés (a), (c) et (e) correspondent à la figure 2.2.

2.2.2 Efficacité

Nous comparons l'efficacité de la récupération d'énergie déterminées par le modèle ou par les calculs DNS. L'évolution de l'efficacité avec les deux paramètres ξ et ℓ est montrée à la figure 2.3.

L'accord entre les résultats des calculs DNS et ceux de l'oscillateur de sillage est là aussi très bon. Les variations de l'efficacité avec ℓ et ξ sont semblables pour le modèle d'oscillateur de sillage et pour les DNS. On observe ainsi une très forte dépendance de l'efficacité avec la longueur réduite, qui varie de manière discontinue avec ℓ, figure 2.3 (1). Pour certaines valeurs de ℓ, le point de récupération correspond à un noeud des VIV du câble, l'efficacité η de la récupération est alors très petite. En revanche, l'efficacité est significative pour d'autres valeurs de ℓ, par exemple autour de $\ell = 0.50$ ou $\ell = 1.50$. L'accord quantitatif entre le modèle et les DNS est aussi satisfaisant. Les valeurs d'efficacité sont proches sur la figure 2.3 (1), même si les variations de η obtenue par DNS semblent moins brutales que celles des prédictions du modèle. Le modèle de VIV surestime aussi légèrement l'efficacité de la récupération. Il est intéressant de noter dès à présent les très fortes variations de l'efficacité du système avec ℓ : les discontinuités visibles sur la figure 2.2 (1) doivent être comprises afin de pouvoir statuer sur les performances de ce système de récupération d'énergie.

L'évolution de l'efficacité avec le paramètre d'amortissement ξ est montrée à la figure 2.3 (2) pour une valeur de ℓ fixée. L'accord entre les DNS et le modèle est à nouveau bon, à la fois qualitativement et quantitativement. L'amortissement semble avoir moins d'effet sur l'efficacité du système que la longueur réduite ℓ. Il faut que ξ varie sur plusieurs ordres de grandeur pour observer un effet significatif sur η. L'évolution de l'efficacité avec ξ est également beaucoup plus régulière, jusqu'à atteindre des valeurs nulles pour

les forts amortissements, typiquement $\xi > 0.3$ pour $\ell = 1$, figure 2.3 (2). Enfin, l'accord quantitatif entre les prédictions des DNS et celles du modèle est aussi suffisamment bon pour confirmer la capacité du modèle de VIV à analyser la récupération d'énergie par VIV de câbles tendus avec des récupérateurs distribués périodiquement.

Nous avons donc vu à l'issue de cette section 2.2 que :

- L'accord entre les résultats du modèle d'oscillateur de sillage et ceux donnés par les simulations DNS est qualitativement très bon. Le modèle permet de représenter fidèlement la dynamique globale du câble en VIV. Quantitativement, l'accord est aussi satisfaisant, en dépit du léger décalage des fréquences observé à la figure 2.2. La dynamique locale au voisinage des récupérateurs est enfin bien modélisée, même si le modèle de VIV surestime légèrement les efficacités, figure 2.3. Les fortes dépendances de η avec les paramètres sont très bien représentées par le modèle de VIV, qui permet donc d'étudier l'efficacité de la récupération en fonction des paramètres ℓ et ξ.

- Les deux paramètres influencent l'efficacité η, particulièrement le paramètre ℓ. L'évolution de η avec la longueur réduite présente notamment des discontinuités qui restent à expliquer.

2.3 Récupération d'énergie

Le modèle de VIV introduit à la section 2.1.2 permet d'étudier l'efficacité de l'extraction d'énergie d'un écoulement par VIV de câbles tendus équipés de récupérateurs distribués périodiquement. Une analyse paramétrique de l'efficacité η du système proposé est présentée dans cette section.

2.3.1 Efficacité de la récupération

Les deux paramètres caractérisant l'extraction d'énergie sont la longueur réduite ℓ, qui mesure la distance entre deux récupérateurs successifs et le coefficient d'amortissement ξ, qui quantifie l'intensité de la récupération d'un des récupérateurs distribués le long du câble. Ces deux paramètres influencent fortement l'efficacité du système, particulièrement la longueur réduite ℓ, figure 2.3. Les autres paramètres sont fixés de la même manière que pour l'étude du système de type VIVACE, section 1.3.3. En particulier, le coefficient C_{L0} est fixé à 0.8, valeurs correspondant aux nombre de Reynolds typiques de la configuration étudiée (de l'ordre de 10^5), contrairement à la section 2.2 où ce coefficient avait été ajusté aux valeur du Re des DNS. La figure 2.4 présente la carte de l'efficacité de la récupération d'énergie en fonction de ξ et ℓ.

Récupération optimale

Il existe une configuration optimale pour la distribution des récupérateurs d'énergie le long de la structure. Cette configuration optimale correspond à un coefficient d'amor-

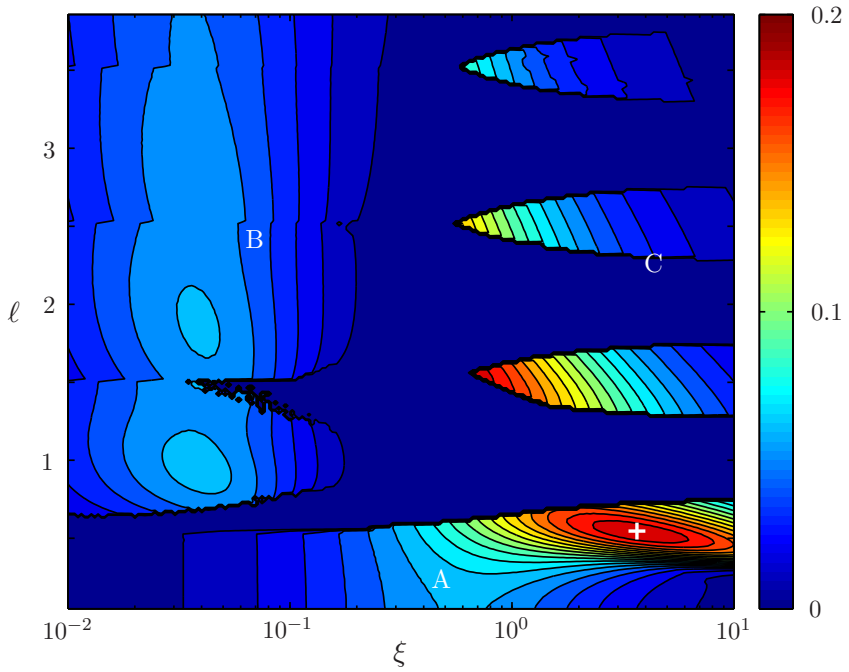


FIGURE 2.4 – Efficacité de la récupération d'énergie par VIV de câbles tendus avec récupérateurs périodiquement distribués. Les paramètres d'extraction sont le coefficient d'amortissement ξ et la longueur réduite ℓ. La croix blanche localise la configuration optimale : $\xi_{opt} = 3.65$ et $\ell_{opt} = 0.55$, pour laquelle l'efficacité vaut $\eta_{opt} = 0.19$.

tissement $\xi_{opt} = 3.65$ et à une longueur réduite $\ell_{opt} = 0.55$, l'efficacité maximale atteinte étant de $\eta = 0.19$. Bien que cette efficacité maximale soit légèrement inférieure à l'optimal trouvé pour le cas du cylindre rigide, section 1.3.3, η_{opt} est suffisamment élevée pour justifier l'intérêt porté à un système de récupération d'énergie par VIV de câbles.

La dynamique du câble correspondant à la récupération optimale de paramètre est visible sur la figure 2.5, ainsi que sur la figure 2.2 (b). Pour ce jeu de paramètre, le mouvement du câble est très proche d'un mode 1 de vibration. Les extrémités amorties oscillent légèrement, l'amplitude est de l'ordre du dixième de diamètre. Ce déplacement est suffisant pour extraire efficacement de l'énergie par la condition aux limites de récupération.

Carte d'efficacité

Après avoir mis en lumière le jeu de paramètres de récupération menant à une efficacité optimale, il est nécessaire d'expliquer la structure complexe de la carte d'efficacité. La figure 2.4 est divisée en trois zones distinctes A, B et C, pour lesquelles le comporte-

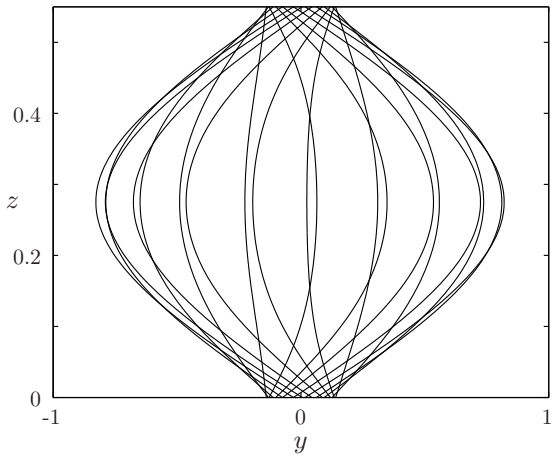


FIGURE 2.5 – VIV du câble pour le jeu optimal de paramètres : $\ell_{opt} = 0.55$ et $\xi_{opt} = 3.65$, l'efficacité correspondante vaut $\eta_{opt} = 0.19$.

ment du système est différent et qui sont détaillées maintenant.

Zone A La zone A de l'espace des paramètres correspond aux petites valeurs de la longueur réduite ℓ, figure 2.4. La configuration optimale appartient à cette région. Les variations de l'efficacité avec ℓ sont relativement faibles dans la zone A, excepté aux alentours de l'optimal. Les fortes efficacités sont en effet concentrées en un pic relativement étroit autour de la configuration optimale $(\xi_{opt}, \ell_{opt}) = (3.65, 0.55)$. A longueur réduite fixée, l'efficacité croît avec ξ pour les faibles coefficients d'amortissement, puis décroît aux grandes valeurs de ξ. Comme dans le cas d'un système rigide de type VIVACE, un amortissement trop faible ne permettra pas d'extraire de l'énergie de l'écoulement tandis qu'un amortissement trop fort limitera drastiquement l'amplitude locale des VIV, donc la récupération d'énergie. La dynamique du câble en VIV est proche de la dynamique optimale présentée à la figure 2.5 dans l'ensemble de la zone A.

Zone B La zone B correspond aux faibles amortissements, typiquement $\xi < 0.3$, pour des valeurs de $\ell > 0.5$, figure 2.4. L'efficacité varie assez peu dans cette gamme de paramètres, même si l'on peut identifier quelques maximas locaux, pour $\ell \approx 1$ ou $\ell \approx 2$ par exemple. L'efficacité reste néanmoins faible dans l'ensemble de cette zone, $\eta < 0.07$, et évolue régulièrement avec ξ pour être quasi-nulle aux alentours de $\xi = 0.3$. Au sein de la région B, les VIV de câbles se traduisent par des ondes progressives, figure 2.6 ou figure 2.2 (f). L'amplitude est constante et relativement élevée le long de la structure, notamment au niveau des extrémités amorties. La faible efficacité de la récupération est due aux très faibles amortissements, qui n'extraient que très peu d'énergie de la dynamique de la structure. La condition aux limites d'amortissement, équation (2.7d), n'influe pas sur les VIV du câble qui sont très proches de ceux d'une structure infinie (Facchinetti *et al.* 2004*b*).

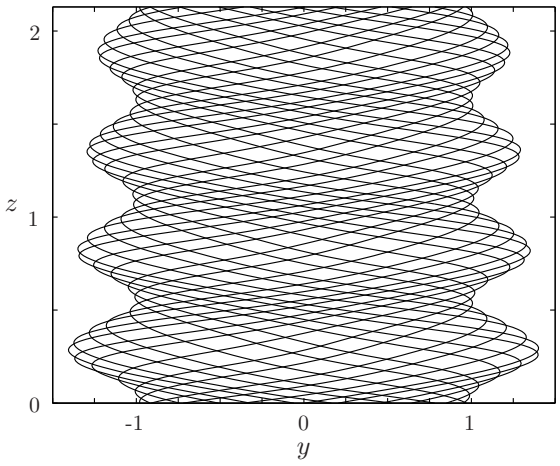


FIGURE 2.6 – VIV du câble dans la zone B : $\ell = 2.13$ et $\xi = 0.02$, l'efficacité correspondante vaut $\eta = 0.05$

Zone C La zone C, correspondant aux forts coefficients d'amortissement $\xi > 0.3$, est la région de l'espace des paramètres pour laquelle la dépendance de l'efficacité η avec ℓ et ξ est la plus forte et la plus complexe, figure 2.4. A la section 2.2.2, la figure 2.3 (1) laissait déjà entrevoir les fortes variations de η avec ℓ dans cette zone. Il existe ainsi plusieurs régions de haute efficacité qui sont entourées de configurations pour lesquelles l'efficacité est nulle. Ces régions de haute efficacité sont cantonnées aux forts amortissements, et semblent réparties de manière régulière le long de l'axe ℓ. Or, on sait que les paramètres sans dimension ℓ et ξ dépendent de la vitesse de l'écoulement, équations (2.6) et (2.8). Des variations de la vitesse modifient donc ℓ et ξ et peuvent annuler l'efficacité de l'extraction, même si le système a au préalable été dimensionné pour correspondre à l'une des régions de haute efficacité de la zone C. Cette influence de la vitesse de l'écoulement sur l'efficacité est étudiée plus en détail à la section 2.5.2. Elle justifie néanmoins dès à présent la nécessité de comprendre l'origine de ces discontinuités et de la structure générale de la zone C.

2.3.2 Modes de vibrations

Le coefficient d'amortissement est fixé à sa valeur optimale $\xi = 3.65$. A la figure 2.7, nous comparons les VIV du câble tendu pour trois valeurs de ℓ : $\ell = \ell_{opt} = 0.55$, puis $\ell = 1$ dans la première zone de récupération inefficace et $\ell = 1.50$ dans la première région de haute efficacité.

Pour les trois longueurs considérées, les VIV sont stationnaires et très proches des harmoniques d'un câble tendu à extrémités fixes. Nous nous intéressons ici à la dynamique globale du câble en VIV et à la manière dont elle influence l'efficacité de la récupération. Pour caractériser cette dynamique globale, nous définissons le numéro de mode n par

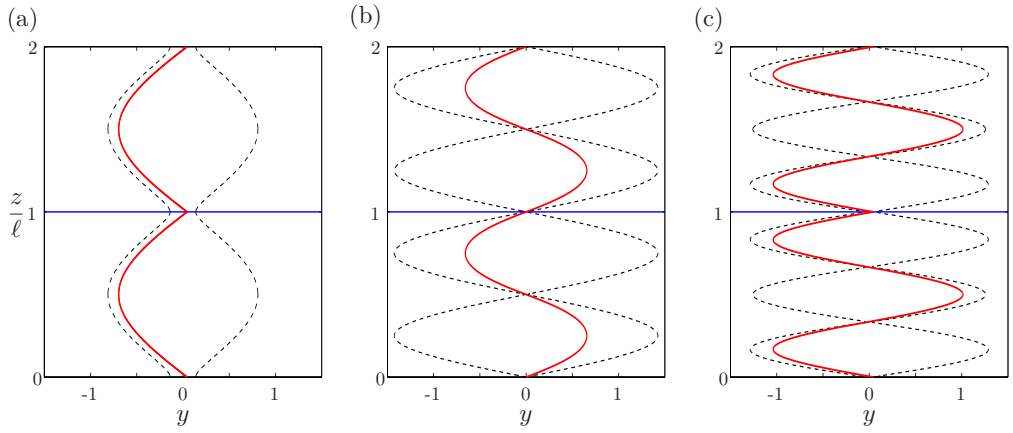


FIGURE 2.7 – Déplacement (rouge) et enveloppe (pointillés noirs) des VIV du câble tendu pour $\xi = 3.65$ et trois longueurs réduites différentes : (a) $\ell = 0.55$ qui correspond au cas optimal (zone A) donc à $\eta = 0.19$, (b) $\ell = 1.00$ qui correspond à la première zone d'efficacité nulle (zone C) $\eta = 0$ et (c) $\ell = 1.50$ qui correspond à la première langue de haute efficacité (zone C), $\eta = 0.07$. Sur chacune des figures, l'enveloppe correspond aux minima et maxima du déplacement du câble tandis que la ligne horizontale bleue indique la localisation d'un récupérateur d'énergie.

$$n = \frac{2\ell}{\lambda}, \tag{2.10}$$

où λ est la longueur d'onde des VIV. Les extrémités ne sont pas fixes mais amorties, le numéro de mode n'est donc pas toujours exactement entier. Dans ce cas, nous le définissons comme l'entier le plus proche de n. Lorsque le déplacement du câble est tel que n est pair, respectivement impair, nous parlerons de mode pair de vibrations, respectivement mode impair de vibrations.

Dans le cas optimal, figure 2.7 (a), le déplacement du câble en VIV correspond à un mode 1 de vibrations. Pour $\ell = 1$, figure 2.7 (b), les VIV du câble ont un numéro de mode $n = 2$. On considère enfin la cas $\ell = 1.50$, dans la première région de haute efficacité de la zone C, figure 2.7 (c). Les VIV sont là encore stationnaires, mais correspondent cette fois à un mode 3 de vibrations de câble tendu.

Le mode excité par les VIV du câble constitue ainsi un paramètre crucial de la récupération. Plus précisément, la parité du numéro du mode à l'accrochage constitue un facteur déterminant de l'extraction d'énergie. Cette importance du mode de vibrations s'explique par l'expression de la condition aux limites dissipatives, équation (2.7d). Celle-ci traduit l'équilibre des efforts s'exerçant sur les extrémités, où la force de dissipation visqueuse est compensée par la tension exercée par les brins du câble situés de part et d'autre des amortisseurs. La résultante de ces forces de tension s'exprime comme le saut des pentes y' de part et d'autre de l'ordonnée $z = \ell$, $y'(0,t) - y'(\ell,t)$. Ce saut est supérieur dans le cas où le mode est impair que dans le cas où celui-ci est pair, comme illustré par la figure 2.8. En effet, lorsque les VIV de câble excitent un mode

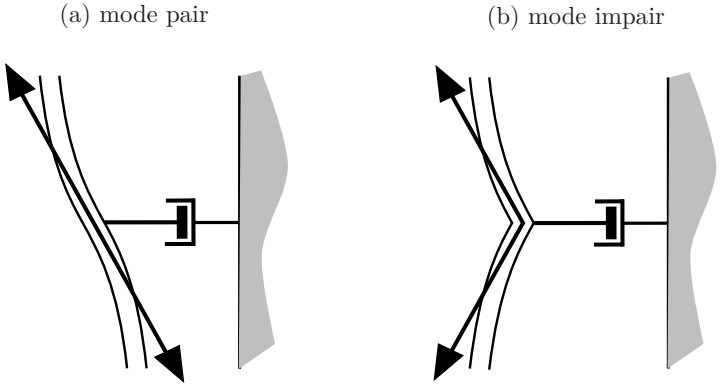


FIGURE 2.8 – Schéma des efforts résultants de la tension du câble sur les récupérateurs d'énergie dans le cas d'un mode pair (a) et d'un mode impair (b).

de vibrations pair, les deux brins de câble de part et d'autre de l'amortisseur tirent dans des directions opposées, figure 2.8 (a). Leurs efforts respectifs sont en compétition et s'annulent, le forçage résultant est donc très faible. L'amortisseur est alors immobile et l'efficacité de l'extraction d'énergie est nulle. En revanche, lorsque le mode excité est impair, les deux brins du câble tirent dans la même direction et leurs effets s'additionnent pour mettre en mouvement l'amortisseur, qui dissipe alors de l'énergie, figure 2.8(b).

En conclusion, si le mode de vibrations excité par les VIV est pair, la récupération d'énergie est inefficace, tandis que s'il est impair, l'efficacité est bien meilleure. Les paramètres d'amortissement ℓ et ξ ont un impact sur cette sélection du mode de vibrations, qui module très fortement les performances du système.

Nous avons vu en introduction que l'existence de multiples modes propres de vibrations, donc de fréquences propres, constituait l'une des différences fondamentales entre un câble et une structure rigide. La possibilité d'exciter successivement différents modes de vibrations joue un rôle primordial dans l'efficacité d'un système de récupération d'énergie par VIV. Pour un système de type VIVACE, il a été démontré qu'il existait une unique plage de haute efficacité correspondant à la plage d'accrochage, section 1.3.3. Lorsqu'au contraire, le système est flexible, il existe plusieurs plages de haute efficacité correspondant aux différentes régions de l'espace des paramètres pour lesquelles un mode impair de vibrations est excité par les VIV.

2.4 Modèle linéaire

Le mode de vibration excité par les VIV du câble influence fortement l'efficacité de la récupération. Or, Violette *et al.* (2010) a montré qu'une analyse linéaire de stabilité du modèle d'oscillateur de sillage permet de rendre compte précisément de la fréquence et de la longueur d'onde des VIV d'un câble tendu. Comme dans le cas du cylindre rigide supporté élastiquement, section 1.3.1, l'accrochage peut en effet être localisé par l'amplification d'une instabilité linéaire.

2.4.1 Analyse linéaire

Nous considérons donc la version linéarisée du modèle de VIV, auquel il est toujours nécessaire d'adjoindre la condition aux limites de récupération d'énergie,

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - \frac{1}{4\pi^2}y'' = Mq, \tag{2.11a}$$

$$\ddot{q} - \varepsilon\dot{q} + q = A\ddot{y}, \tag{2.11b}$$

$$y(0,t) - y(\ell,t) = 0, \tag{2.11c}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\left[y'(0,t) - y'(\ell,t)\right] = \xi\ell\dot{y}(0,t). \tag{2.11d}$$

En cherchant des solutions sous la forme

$$(y,q) = \mathrm{Re}\left[(\varphi,\psi)\, e^{i\omega t}\right], \tag{2.12}$$

Le système devient

$$\left(-\omega^2 + i\frac{\gamma}{\mu}\omega\right)\varphi - \frac{1}{4\pi^2}\varphi'' - M\psi = 0, \tag{2.13a}$$

$$A\omega^2\varphi + \left(1 - \omega^2 - i\varepsilon\omega\right)\psi = 0, \tag{2.13b}$$

$$i\xi\ell\omega\varphi(0) - \frac{1}{4\pi^2}\left[\varphi'(0) - \varphi'(\ell)\right] = 0. \tag{2.13c}$$

En combinant les équations (2.13a) et (2.13b), le système se simplifie en

$$\varphi'' + 4\pi^2\left[\frac{AM\omega^2}{\omega^2 - 1 + i\varepsilon\omega} + \omega^2 - i\frac{\gamma}{\mu}\omega\right]\varphi = 0, \tag{2.14a}$$

$$i\xi\ell\omega\varphi(0) - \frac{1}{4\pi^2}\left[\varphi'(0) - \varphi'(\ell)\right] = 0. \tag{2.14b}$$

Le système linéaire s'exprime alors de manière formelle comme

$$-\omega^2\mathbf{M_2}\Phi + i\omega\mathbf{M_1}\Phi + \mathbf{M_0}\Phi = 0, \tag{2.15}$$

où $\Phi = {}^t[\varphi_1 \cdots \varphi_N]$ est la déformée modale solide discrétisée, avec N le nombre de points de la discrétisation. Cette écriture compacte tient compte des conditions aux limites périodiques de récupération d'énergie. Pour un jeu de paramètre (ξ, ℓ) donné, ce problème aux valeurs propres est alors résolu numériquement, les dérivées spatiales étant estimées par différences finies. La déformée solide du mode le plus instable est donnée à la figure 2.9 pour les mêmes valeurs de ℓ et ξ qu'à la figure 2.7.

Les modes linéaires les plus instables, figure 2.9, sont très similaires aux dynamiques obtenues par résolution numérique du modèle complet, figure 2.7. En particulier, on ob-

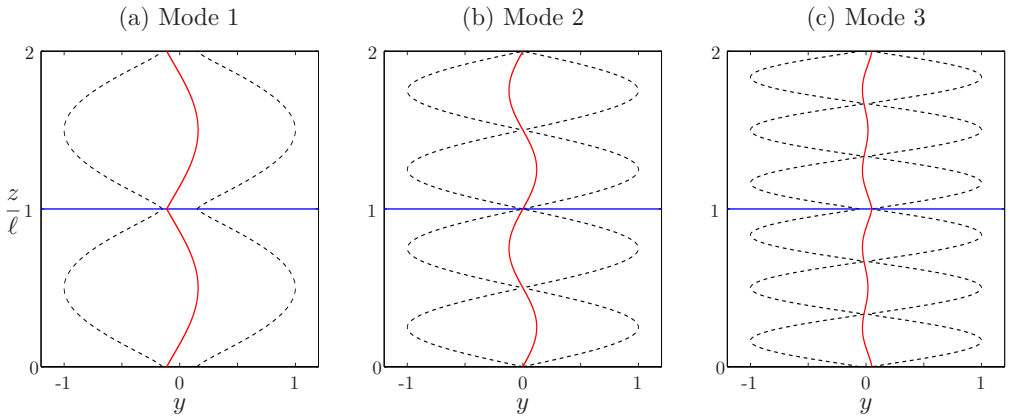


FIGURE 2.9 – Partie réelle (rouge) et enveloppe (pointillés noirs) des modes linéaires les plus instables pour $\xi = 3.65$, et trois longueurs réduites différentes : (a) $\ell = 0.55$, (b) $\ell = 1$ et (c) $\ell = 1.50$. Sur chacune des figures, la ligne horizontale bleue indique la localisation d'un récupérateur d'énergie.

serve bien que les déformées modales des modes 1 et 3 présentent de légers déplacements des extrémités amorties, ce qui n'est pas le cas pour le cas intermédiaire, $\ell = 1$. L'analyse linéaire est donc à même de prédire correctement le mode de vibrations à l'accrochage.

2.4.2 Accrochage des modes successifs

La parité du mode excité influence fortement l'efficacité de la récupération. Pour chaque couple de paramètres, nous calculons le numéro du mode le plus instable, équation (2.10). Nous déterminons ainsi les zones de l'espace des paramètres pour lesquelles chacun des modes est le plus instable. Les frontières entre ces différentes zones de prédominance sont tracées sur la carte d'efficacité, figure 2.10.

L'accord entre la structure de la carte d'efficacité et les zones d'accrochage des modes successifs est très bon. L'analyse linéaire de stabilité permet par conséquent d'expliquer la structure de la carte d'efficacité : les régions de haute efficacité correspondent aux régions pour lesquelles les modes impairs de vibrations du câble sont à l'accrochage.

Extension des zones d'accrochage des modes impairs Si l'on considère la limite des très petits amortissements, $\xi \to 0$, la condition aux limites de récupération, équation (2.14b), devient

$$\varphi'(0) = \varphi'(\ell), \tag{2.16}$$

indépendante de ω. L'équation (2.14a) se réduit par ailleurs à

$$\varphi'' + k^2\varphi = 0, \tag{2.17}$$

où le nombre d'onde k est relié à la pulsation ω par la relation de dispersion

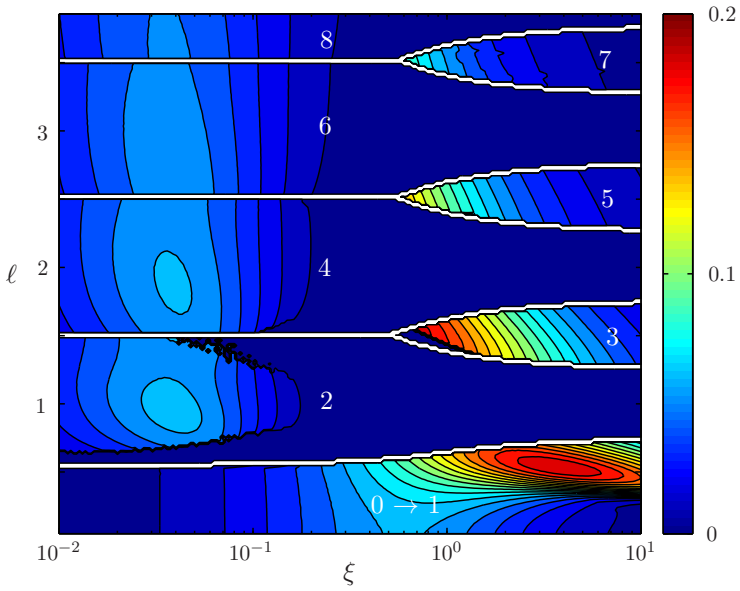


FIGURE 2.10 – Carte d'efficacité de la récupération d'énergie par VIV de câbles tendus, sur laquelle sont tracées les frontières délimitant les zones de prédominance de chacun des modes de vibrations du câble.

$$k^2 = 4\pi^2 \left[\frac{AM\omega^2}{\omega^2 - 1 + i\varepsilon\omega} + \omega^2 - i\frac{\gamma}{\mu}\omega \right]. \tag{2.18}$$

En résolvant le problème temporel, c'est à dire pour k réel, cette équation admet une solution de la forme $\varphi(z) = a_1 e^{ikz} + a_2 e^{-ikz}$. Les conditions aux limites de périodicité et de récupération d'énergie imposent aux coefficients a_1 et a_2 d'être solutions du système linéaire suivant,

$$\begin{aligned} a_1\left(1 - e^{ik\ell}\right) + a_2\left(1 - e^{-ik\ell}\right) &= 0, & \text{(2.19a)} \\ a_1\left(1 - e^{ik\ell}\right) - a_2\left(1 - e^{-ik\ell}\right) &= 0, & \text{(2.19b)} \end{aligned}$$

qui admet une solution non triviale à la condition $cos(k\ell) = 1$. Les nombres d'ondes admissibles sont par conséquent de la forme

$$k = \frac{2n\pi}{\ell}. \tag{2.20}$$

Pour les faibles valeurs du coefficient d'amortissement ξ, seuls les modes pairs sont admissibles.

A l'inverse, si l'on se place à la limite $\xi \to \infty$, la condition aux limites périodique de récupération devient

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0. \tag{2.21}$$

En faisant le même calcul que précédemment, nous obtenons une autre condition d'admissibilité sur le nombre d'onde : $sin(k\ell) = 0$. Sont alors admissibles tous les nombres d'ondes de la forme

$$k = \frac{n\pi}{\ell}. \tag{2.22}$$

Pour des valeurs de $\xi >> 1$, tous les modes sont admissibles, qu'ils soient pairs ou impairs. Les modes impairs ne sont ainsi admissibles que pour des coefficients d'amortissement suffisamment élevés. Les zones de prédominance des modes impairs sont donc limitées aux forts amortissements sur la figure 2.10, ce qui explique la structure de la carte d'efficacité, figure 2.10.

Efficacité et accrochage Nous avons vu à la section précédente que la structure de la carte d'efficacité est due aux différentes zones d'accrochage des modes de vibrations de la structure. La longueur réduite ℓ est définie par

$$\ell = \frac{L}{Z_c} = L\left(\frac{2\pi}{\omega_f}\sqrt{\frac{\Theta}{m_t}}\right)^{-1}, \tag{2.23}$$

ce qui peut se réécrire sous la forme

$$\ell = \frac{\omega_f}{\frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{\Theta}{m_t}}}. \tag{2.24}$$

Or, la pulsation propre correspondant au mode n du câble avec des conditions aux limites fixes s'écrit

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{\Theta}{m_t}}. \tag{2.25}$$

La longueur réduite peut alors être interprétée comme un rapport de fréquences,

$$\ell = \frac{n}{2}\left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{f_f}{f_n}\right). \tag{2.26}$$

Le paramètre ℓ correspond au rapport entre la fréquence propre du sillage f_f et les différentes fréquences propres de la structure flexible f_n. La condition idéale d'accrochage du mode n s'exprime donc simplement comme $\ell = n/2$. Sur la carte d'efficacité présentée à la figure 2.10, on remarque premièrement que les zones d'accrochage des différents modes sont effectivement centrées autour de ces conditions idéales d'accrochage. De plus, il est remarquable de noter qu'au sein même des zones de prédominance de chacun des modes, les maximas locaux d'efficacité sont localisés quasi exactement par ces conditions

d'accrochage. Cela est vrai pour l'ensemble des modes de vibrations quelle que soit leur parité : l'efficacité maximale atteinte au sein de la zone de prédominance du mode 2 l'est bien pour $\ell = 1$, celle du mode 3 pour $\ell = 1.50$.

Les maximas locaux d'efficacité sont atteints pour des longueurs réduites ℓ correspondant aux conditions d'accrochage idéales des modes successifs du câble.

2.5 Discussion et conclusion

La récupération d'énergie par VIV d'un câble tendu et équipé de récupérateurs d'énergie périodiquement distribués a été étudiée dans ce premier chapitre.

Dans un premier temps, le modèle de VIV, basé sur un oscillateur de sillage, a été validé par les simulations DNS de Bourguet (2013).

Les deux paramètres adimensionnels caractérisant l'extraction d'énergie sont la distance entre deux récupérateurs successifs ℓ et l'intensité de la récupération d'un amortisseur ξ. Ces deux paramètres, particulièrement la longueur ℓ, ont une forte influence sur l'efficacité du système considéré. L'évolution discontinue de l'efficacité η avec les paramètres ξ et ℓ est due aux zones d'accrochage des différents modes de vibrations de la structure, sections 2.3 et 2.4. L'accrochage d'un mode impair implique une récupération efficace tandis qu'un mode pair ne permet pas aux VIV de la structure d'extraire efficacement de l'énergie de l'écoulement. Plus précisément, les longueurs correspondant aux différents maximas locaux d'efficacité sont localisées par les conditions idéales d'accrochage des modes successifs du câble en VIV, équation (2.26).

Les VIV d'un câble tendu équipé de récupérateurs d'énergie distribués périodiquement permettent de récupérer efficacement de l'énergie d'un écoulement. Même si celle-ci dépend très fortement des différents paramètres de récupération, l'efficacité η peut atteindre des valeurs très significatives, de l'ordre de 20 %.

2.5.1 Importance de la flexibilité

La deuxième question posée à la section 1.6 est celle de l'existence d'une différence fondamentale entre la récupération d'énergie par VIV d'un système rigide, comme proposé par Bernitsas *et al.* (2008), et celle utilisant les VIV d'une structure flexible. Pour un système rigide, l'efficacité dépend d'un paramètre de fréquence δ et d'un coefficient d'amortissement ξ. Pour maximiser l'efficacité, il a été montré à la section 1.3.3 que δ doit être choisi de manière à ce que les VIV du cylindre soient à l'accrochage. Le coefficient d'amortissement ξ doit lui être choisi de manière à extraire de l'énergie sans trop atténuer les oscillations du solide. L'efficacité de la récupération d'énergie par VIV d'un câble équipé de récupérateurs distribués périodiquement dépend aussi d'un paramètre de fréquence, ℓ, et d'un coefficient d'amortissement ξ. Néanmoins, les structures des cartes d'efficacité, figures 1.8 et 2.4, sont très différentes : la flexibilité de la structure joue un rôle fondamental dans la détermination de l'efficacité de la récupération d'énergie par VIV.

L'existence de différents modes propres constitue effectivement une différence entre

le câble tendu et le cylindre rigide. La parité du mode de vibrations accroché constitue le facteur déterminant pour l'efficacité de la récupération. En fonction de la valeur des paramètres ℓ et ξ, le câble adapte sa dynamique via l'accrochage de ses différents modes de vibrations, impliquant une récupération d'énergie efficace ou non. Dans le cas du système rigide, les paramètres δ et ξ sont déterminés indépendamment l'un de l'autre. Pour un câble tendu, le numéro du mode à l'accrochage dépend à la fois de ℓ et ξ. Les paramètres de fréquence et d'amortissement doivent être déterminés simultanément, de manière à ce qu'un mode impair soit à l'accrochage. Plus précisément, l'amortissement doit être suffisamment élevé pour permettre l'accrochage d'un mode impair et la longueur réduite ℓ doit être choisie proche d'une condition idéale d'accrochage d'un mode impair, $\ell = n + 1/2$.

La possibilité d'accrocher successivement différents modes de vibrations constitue l'une des caractéristiques propres aux VIV de structures flexibles, section 1.4.1. C'est bien cette propriété fondamentale des VIV de câble qui est exploitée ici pour récupérer de l'énergie, apportant une réponse partielle à la deuxième question de la section 1.6.

En conclusion de cette analyse, nous pouvons donner le résultat partiel suivant :

Les VIV d'un câble tendu permettent de récupérer de l'énergie à l'aide de récupérateurs distribués périodiquement le long de la structure. Cette extraction est rendue efficace par la flexibilité de la structure lorsque les paramètres d'amortissement sont choisis de manière à ce que l'un des modes propres impairs du câble soit à l'accrochage.

2.5.2 Sensibilité à la vitesse de l'écoulement

L'analyse présentée dans ce chapitre a permis d'identifier la configuration optimale pour la récupération d'énergie par VIV de câbles tendus. Il est alors possible de dimensionner un tel système ayant une efficacité $\eta = 0.19$.

Cette étude a été menée pour un écoulement de vitesse constante. Dans la réalité, la vitesse de l'écoulement varie autour d'une vitesse moyenne U_m. Les paramètres adimensionnels ℓ et ξ dépendent de la vitesse instantanée U de l'écoulement. Il est donc important à la fois de dimensionner le système pour atteindre l'efficacité optimale pour la vitesse moyenne U_m, mais aussi de comprendre la sensibilité des performances du système avec les variations de la vitesse U. Cette section présente une analyse succincte de la dépendance de l'efficacité du système avec la vitesse de l'écoulement. Rappelons tout d'abord l'expression des paramètres adimensionnels ℓ et ξ,

$$\ell = StL\frac{U}{D}\sqrt{\frac{m_t}{\Theta}} \propto U \quad \text{et} \quad \xi = \frac{RD}{2\pi StLm_tU} \propto \frac{1}{U}. \tag{2.27}$$

Lorsque la vitesse de l'écoulement varie, les paramètres adimensionnels ℓ et ξ évoluent aussi, le long d'une hyperbole définie par

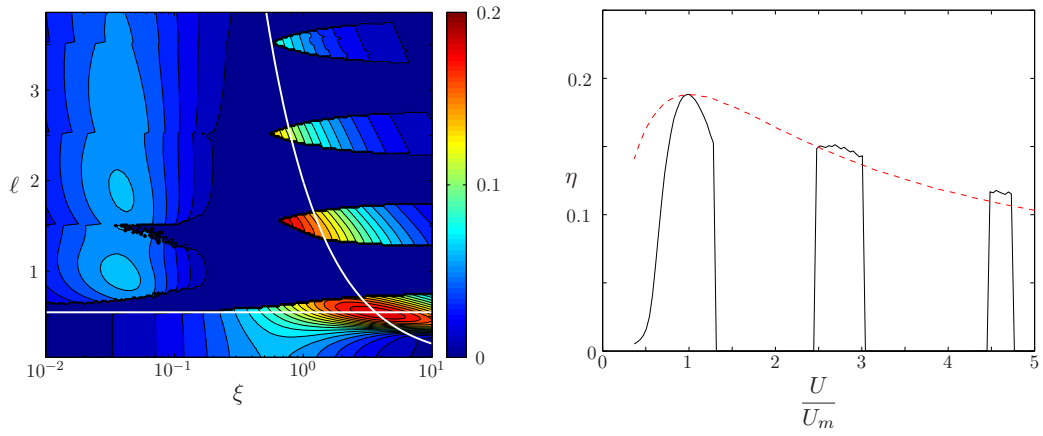


FIGURE 2.11 – Sensibilité aux variations de vitesse de l'écoulement de l'efficacité du système proposé : (Gauche) Carte d'efficacité avec les variations des valeurs des paramètres ℓ et ξ induites par des variations de vitesse de l'écoulement dans le cas d'une tension constante et d'une tension induite par la traînée et (Droite) Évolution de l'efficacité de la récupération avec U pour le cas à tension constante (ligne continue) et à tension induite par la traînée (pointillés).

$$\frac{\ell}{\ell_{opt}} = \frac{\xi_{opt}}{\xi}, \tag{2.28}$$

et visible sur la figure 2.11. On peut alors déterminer les variations de l'efficacité avec la vitesse de l'écoulement, figure 2.11. L'efficacité évolue de manière discontinue avec la vitesse de l'écoulement. Le pic d'efficacité correspondant est par ailleurs très étroit. De la même façon qu'à la section 1.3.3, nous calculons la largeur du pic d'efficacité, $\Delta = 0.54$, plus faible que pour un cylindre rigide. Même s'il existe d'autres plages de vitesse pour lesquelles l'efficacité est non nulle (correspondant aux modes impairs supérieurs), la variation discontinue de l'efficacité et l'étroitesse du pic d'efficacité sont deux limitations très fortes à la réalisation pratique d'un tel système.

Il existe néanmoins des pistes pour apporter des réponses à ce problème pratique. L'une d'entre elles consiste à imaginer un système dont les paramètres dimensionnels varient aussi avec la vitesse de l'écoulement, de manière à annuler la dépendance en U de la longueur réduite ℓ. Il est par exemple envisageable d'imaginer un câble dont la tension ne serait plus constante, mais induite par la force de traînée exercée par l'écoulement sur une surface A. Ce contrôle passif rend la tension Θ proportionnelle à U^2, ce qui annule la dépendance en U de ℓ, équation (2.27). Par conséquent, les variations de la vitesse impactent uniquement le coefficient d'amortissement ξ. Les paramètres adimensionnels évoluent alors le long d'une droite horizontale sur la carte d'efficacité lorsque U varie, figure 2.11. Ce contrôle passif permet d'éviter les variations brutales de η avec U. La largeur de pic $\Delta = 2.44$ est ainsi significativement plus élevée que lorsque la tension est constante. Il est donc possible de dépasser les limitations pratiques dues aux variations

D	0.04 m
m_s	3.20 kg.m^{-1}
m_t	4.46 kg.m^{-1}
Θ	10 kN

TABLE 2.1 – Caractéristiques du câble tendu pour lequel la distribution des récupérateurs d'énergie est proposée.

discontinues de l'efficacité avec la vitesse de l'écoulement U, même si une nouvelle étude paramétrique serait nécessaire pour déterminer précisément l'influence de la vitesse U sur η. En réalité, l'ensemble des paramètres du modèle varient en effet avec U, par exemple via le nombre de Strouhal St ou les coefficients de forces hydrodynamiques C_D et C_{L0}.

2.5.3 Dimensionnement optimal

Pour un câble donné, nous disposons dorénavant de l'ensemble des informations pour dimensionner efficacement la récupération d'énergie. Nous considérons un écoulement de vitesse moyenne $U_m = 1.5$ m.s^{-1} et de masse volumique $\rho = 1000$ kg.m-3. Nous prenons comme exemple le câble tendu dont les propriétés sont regroupés dans le tableau 2.1.

Dans un premier temps, nous estimons la puissance linéique optimale qu'il est possible de récupérer à partir des VIV du câble considéré, définie à partir de l'équation (2.9) comme

$$\langle P_h \rangle = \frac{1}{2}\eta_{opt}\rho D U_m^3 = 12.8 \text{ W.m}^{-1}. \tag{2.29}$$

Un câble d'une longueur totale de 100 m permet par exemple d'extraire un peu plus d'1 kW d'un écoulement. L'équation (2.27) donne la distance optimale entre deux récupérateurs d'énergie L_{opt}, ainsi que le coefficient d'amortissement correspondant R_{opt}. On obtient alors

$$L_{opt} = 4.05 \text{ m} \quad \text{et} \quad R_{opt} = 2645 \text{ kg.s}^{-1}. \tag{2.30}$$

L'optimal correspond à un mode 1 de vibrations de la structure, il était donc attendu qu'il faille positionner les systèmes de récupérations d'énergie proches les uns des autres. La relativement faible puissance linéique impose de considérer de très longs câbles pour pouvoir extraire une puissance significative. Au contraire, la distance optimale entre deux récupérateurs successifs est petite. Pour produire les 1.28 kW espérés à l'aide d'un câble de 100m, il est ainsi nécessaire de déployer 26 récupérateurs d'énergie le long de la structure immergée. Or, il est raisonnable de penser que ces récupérateurs constituent la partie la plus sophistiquée du système proposé, donc très probablement ses points faibles du point de vue de la maintenance. Le grand nombre de ces récupérateurs, ainsi que la grande profondeur à laquelle ils sont immergés, constituent une seconde limitation au

système proposé dans ce chapitre. Bien sûr, il est possible d'augmenter la tension du câble pour accroître L_{opt} mais cela n'aurait qu'un effet limité puisque $L_{opt} \propto \sqrt{\Theta}$. Maintenir une tension très élevée sur une structure aussi longue constitue par ailleurs aussi une difficulté à résoudre.

En conclusion, les VIV d'un câble tendu équipé de récupérateurs d'énergie périodiquement distribués le long de la structure permettent théoriquement d'extraire efficacement de l'énergie à partir d'un écoulement géophysique. Néanmoins, le dimensionnement optimal du système met en lumière des limitations à la réalisation pratique d'un tel système comme la très grande sensibilité avec la vitesse de l'écoulement et le grand nombre de récupérateurs d'énergie nécessaires. Si le principe de la récupération d'énergie par VIV de structures flexibles a donc été validé dans ce premier chapitre, il est néanmoins indispensable de partir à la recherche d'un nouveau système, plus simple et plus réaliste.

Chapitre 3

Cordes suspendues et récupération d'énergie

Les VIV d'une structure flexible sont un mécanisme d'interaction fluide/structure prometteur pour extraire de l'énergie d'un écoulement géophysique. Ce chapitre présente l'étude de la récupération d'énergie par VIV d'une structure flexible à l'aide d'un unique récupérateur.

Dans un premier temps, nous étudions analytiquement la récupération d'énergie par VIV d'une structure semi-infinie à l'aide d'un unique récupérateur, section 3.1. Les VIV d'une corde suspendue sont ensuite caractérisées expérimentalement, section 3.2. Cette section a fait l'objet d'une publication dans le *Journal of Fluid Mechanics* (Grouthier *et al.* 2013), que l'on trouvera en Annexe D. L'extraction d'énergie par les VIV d'une corde suspendue est analysée expérimentalement à la section 3.3. Enfin, comme au chapitre 2, une étude paramétrique de l'efficacité du système est présentée à la section 3.4, de manière à pouvoir conclure à la section 3.5.

3.1 Câble semi-infini

Pour étudier l'effet d'une condition aux limites amortie sur la dynamique d'une structure flexible et appréhender ainsi la récupération d'énergie par un unique récupérateur, nous considérons le système décrit à la figure 3.1.

Nous utilisons ici les paramètres et variables dimensionnels. Aucun écoulement n'est considéré dans cette section. La tension uniforme du câble est notée Θ et sa masse linéique, m_t. L'équation de la dynamique du câble s'écrit

$$m_t \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} - \Theta \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} = 0. \tag{3.1}$$

En définissant la vitesse de phase $C = \sqrt{\Theta/m_t}$, le déplacement du câble s'exprime sous la forme

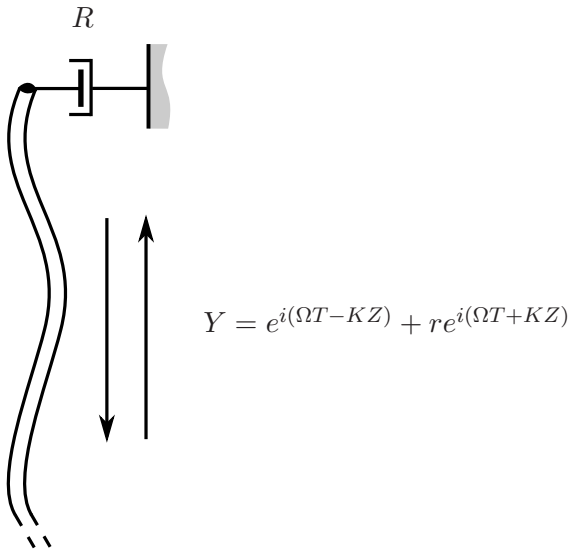


FIGURE 3.1 – Câble semi-infini avec condition aux limites amortie.

$$Y\left(Z,T\right) = e^{i(\Omega T - KZ)} + re^{i(\Omega T + KZ)}, \tag{3.2}$$

où Ω est la pulsation des oscillations et $K = \Omega/C$ le nombre d'onde associé. Le coefficient de réflexion des ondes sur l'extrémité amortie est notée r. Etant donné la condition aux limites de récupération

$$\Theta \left.\frac{\partial Y}{\partial Z}\right|_{Z=0} + R \left.\frac{\partial Y}{\partial T}\right|_{Z=0} = 0, \tag{3.3}$$

le coefficient de réflexion s'écrit

$$r = \frac{K\Theta - R\Omega}{K\Theta + R\Omega}. \tag{3.4}$$

Ce coefficient de réflexion s'annule pour une valeur de l'amortissement $R = K\Theta/\Omega = \Theta/C$. La condition aux limites est alors totalement absorbante et des ondes progressives se développent le long du câble, en direction de l'extrémité amortie.

Par ailleurs, la moyenne temporelle de la puissance dissipée s'exprime sous la forme

$$\langle \mathcal{P} \rangle = R \left\langle \left(\left.\frac{\partial Y}{\partial T}\right|_{Z=0} \right)^2 \right\rangle = R\Omega^2 \left\langle Y\left(0,T\right)^2 \right\rangle. \tag{3.5}$$

En combinant les équation (3.2), (3.4) et (3.5), la puissance s'écrit

$$\langle \mathcal{P} \rangle = R \left(\frac{2\Omega K\Theta}{K\Theta + R\Omega} \right)^2. \tag{3.6}$$

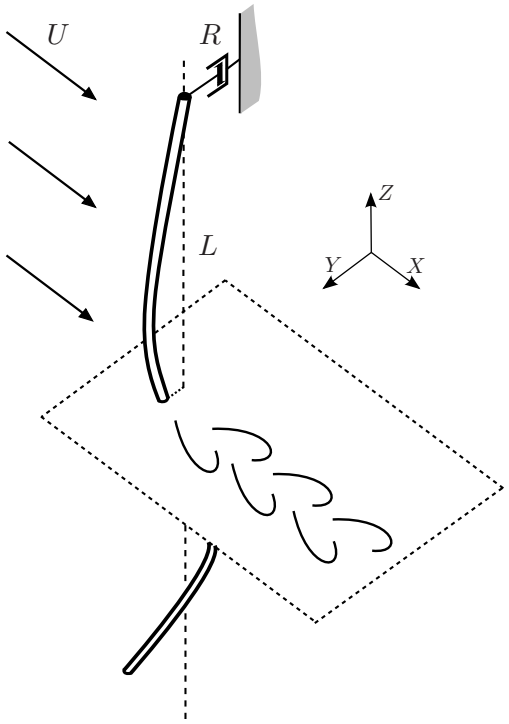


FIGURE 3.2 – VIV de corde suspendue par un récupérateur d'énergie et placée transversalement à un écoulement uniforme.

Le coefficient d'amortissement maximisant la puissance dissipée $\langle \mathcal{P} \rangle$ vaut alors à nouveau $R = K\Theta/\Omega = \Theta/C$, qui s'exprime aussi sous la forme

$$R = \sqrt{\Theta m_t}. \tag{3.7}$$

On retrouve la condition d'absorption des ondes. L'amortissement optimal entraîne l'apparition d'ondes progressives le long du câble semi-infini. Par ailleurs, cet amortissement optimal est indépendant de la pulsation Ω et du nombre d'ondes K des oscillations. Les vibrations d'un câble semi-infini permettent donc de récupérer localement de l'énergie, pourvu que le coefficient d'amortissement soit choisi de manière à ce que la condition aux limites soit pleinement absorbante. Les ondes progressives transportent alors l'énergie vers l'extrémité amortie, où elle est dissipée.

Dans les sections suivantes, nous nous proposons donc d'analyser la récupération d'énergie par VIV d'une structure flexible à l'aide d'un unique récupérateur d'énergie. Nous considérons une corde suspendue par un système de récupération d'énergie et placée dans un écoulement transverse, figure 3.2.

3.2 Caractérisation expérimentale des VIV d'une corde suspendue

Les VIV d'une structure flexible en écoulement cisaillé ont fait l'objet de nombreuses analyses (Mathelin & de Langre 2005, Bourguet *et al.* 2011*a*;*b*, Trim *et al.* 2005). Les variations spatiales de la vitesse modifient significativement la dynamique de VIV de la structure, qui peut par exemple être multi-modale. A l'inverse, l'effet d'une variation spatiale de la tension de la structure n'a reçu que très peu d'attention (Park *et al.* 2002, Srinil 2011). Cette configuration se retrouve pourtant lors de la phase d'installation d'un riser pour une plateforme pétrolière, au moment où l'extrémité inférieure du riser est libre. Il est probable que des variations de tension le long de la structure impactent fortement sa dynamique, en particulier en localisant les grandes amplitudes là où la tension est la plus faible. Avant de pouvoir étudier la récupération d'énergie par VIV d'une corde suspendue, il est ainsi nécessaire de caractériser précisément les VIV d'une telle structure.

Nous nous attacherons dans cette section à déterminer expérimentalement les propriétés des VIV d'une corde suspendue. L'étude expérimentale a été effectuée au sein du laboratoire d'interactions fluide/structure du Professeur Y. Modarres-Sadeghi de *University of Massachussets* à Amherst. Après avoir détaillé le montage expérimental à la section 3.2.1, nous nous attacherons à caractériser à la fois la dépendance temporelle des VIV de corde suspendue, section 3.2.4, et la distribution spatiale des amplitudes de vibrations aux sections 3.2.5 et 3.2.6. Enfin, l'évolution de l'amplitude des VIV est analysée à la section 3.2.7 ce qui nous permet de conclure sur la capacité du modèle à rendre compte des VIV du système considéré.

3.2.1 Montage

Le canal hydraulique dans lequel a été menée cette étude expérimentale a une section d'étude de dimension 38cm*50cm*150cm, figure 3.3.

Une chaînette est suspendue dans le canal hydraulique et soumise à un écoulement uniforme de vitesse U. L'extrémité supérieure de la chaînette est fixe, voir figure 3.4 (a). La chaînette est constituée de différentes sphères de diamètre D, reliées entre elles par de courtes baguettes métalliques, figure 3.4 (b). Trois différentes chaînettes ont été utilisées lors de cette étude, leurs propriétés géométriques sont regroupées dans le tableau 3.1. La longueur de la chaînette est notée L, son diamètre D, tandis que la distance entre deux sphères successives est notée d, h correspondant à la largeur des baguettes reliant les sphères entre elles. Enfin, m_s correspond à la masse linéique des chaînettes. Lors de chacune des expériences, le déplacement transverse de la chaînette, $Y(Z,T)$, est filmé par une caméra rapide Phantom Miro M110. La caméra est équipée d'un objectif de focale 50mm, dont l'ouverture est constante, $f/1.4$. Elle est située à l'extrémité avale du canal, d'où une fenêtre permet de visualiser les oscillations transverses de la structure, figure 3.4 (a). Pour chacune des images du film, dont un exemple est montré en figure 3.4 (c), la position instantanée de la chaînette est déterminée grâce au contraste entre



FIGURE 3.3 – Canal hydraulique utilisé pour mener l'étude expérimentale des VIV de corde suspendue.

	L (m)	D (mm)	d (mm)	h (mm)	m_s (g/m)
Chaînette 1	0.48	2.0	3.0	0.4	8
Chaînette 2	0.48	3.1	4.5	0.6	21
Chaînette 3	0.48	4.4	6.3	0.8	29

TABLE 3.1 – Caractéristiques des différentes chaînettes utilisées.

les sphères brillantes et l'arrière-plan noir. Le mouvement est ensuite filtré autour de sa fréquence dominante. Par ailleurs, quelques visualisations du sillage proche par injection de colorant dans l'écoulement ont aussi été effectuées.

Les chaînettes utilisées pour cette étude sont suffisamment lourdes pour ne pas flotter, tout en n'ayant qu'une très faible rigidité aux petites courbures. Bien sûr, si la courbure devient trop importante, une forte rigidité non-linéaire est probable, notamment à cause des contacts entre sphères. Néanmoins, tant que la courbure reste faible, c'est à dire tant que la longueur d'onde des oscillations de la chaînette est grande devant la distance entre les sphères d, une chaînette modélise correctement une corde idéale de diamètre équivalent $D_{eq} = \pi D/4$. Ce diamètre équivalent est déterminé de manière à ce que la section de la corde équivalente soit identique à celle de la chaînette, négligeant par la même la contribution au couplage fluide/structure des baguettes reliant les sphères entre elles. Le nombre de Reynolds est alors défini grâce à ce diamètre équivalent

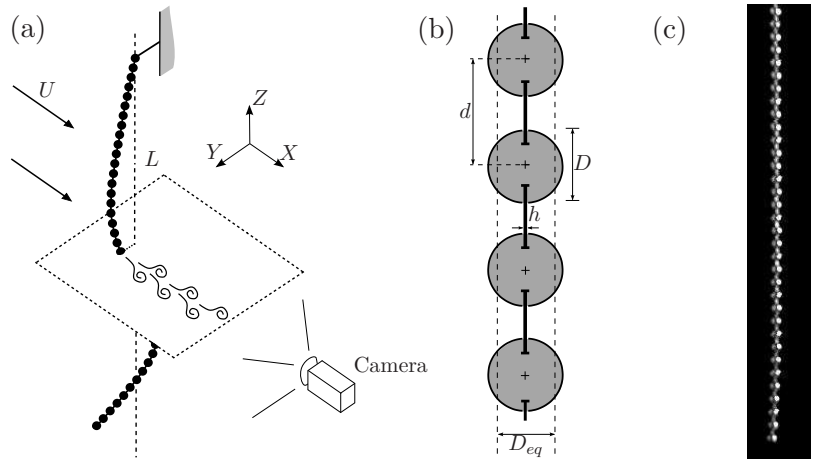


FIGURE 3.4 – (a) Montage expérimental d'une chaînette soumise à un écoulement uniforme. (b) Géométrie des chaînettes utilisées pour modéliser des cordes de diamètre équivalent D_{eq}. (c) Photo de VIV de la chaînette 3 durant une expérience.

$$Re = \frac{U D_{eq}}{\nu}, \tag{3.8}$$

où $\nu = 10^{-6}$ m^2.s^{-1} est la viscosité cinématique de l'eau à la température ambiante. Des expériences sont effectuées pour une gamme de nombre de Reynolds allant de 32 à 700. Par ailleurs, sur l'ensemble de la gamme de vitesse considérée, la déflection statique de la corde due à la traînée est suffisamment faible pour que l'écoulement puisse être considéré comme perpendiculaire à la structure. Les oscillations de la corde autour de cette déflection statique sont aussi trop faibles pour être mesurées avec le matériel disponible, bien que l'existence de VIV dans la direction de l'écoulement ait été établie par de précédentes études (Huera-Huarte & Bearman 2009). Nous nous intéressons donc uniquement aux VIV transverses dans la suite de cette étude. Enfin, il faut préciser ici qu'à cause de la taille de la fenêtre par laquelle les VIV sont filmées, seuls les 42 cms inférieurs de la corde sont visibles, sur une longueur totale de 48 cm. Cela explique pourquoi le déplacement de la partie supérieure de la corde n'est pas montrée dans la suite de l'étude, figure 3.6, sans que cela n'ait de conséquences sur les conclusions de l'analyse.

3.2.2 Détachement tourbillonnaire

Des visualisations du sillage sont effectuées pour certaines valeurs du nombre de Reynolds. Du colorant est injecté dans l'écoulement en amont de l'extrémité inférieure de la corde. La caméra est alors placée sous le canal hydraulique et permet d'observer simultanément les oscillations de la corde et le sillage fluctuant, figure 3.5. Le détachement tourbillonnaire derrière la structure est bien synchronisé avec ses vibrations. Un vortex est émis à chaque fois que l'extrémité inférieure de la corde atteint son déplacement maximal, figure 3.5 (a), ou minimal, figure 3.5 (c). La fréquence des oscillations de

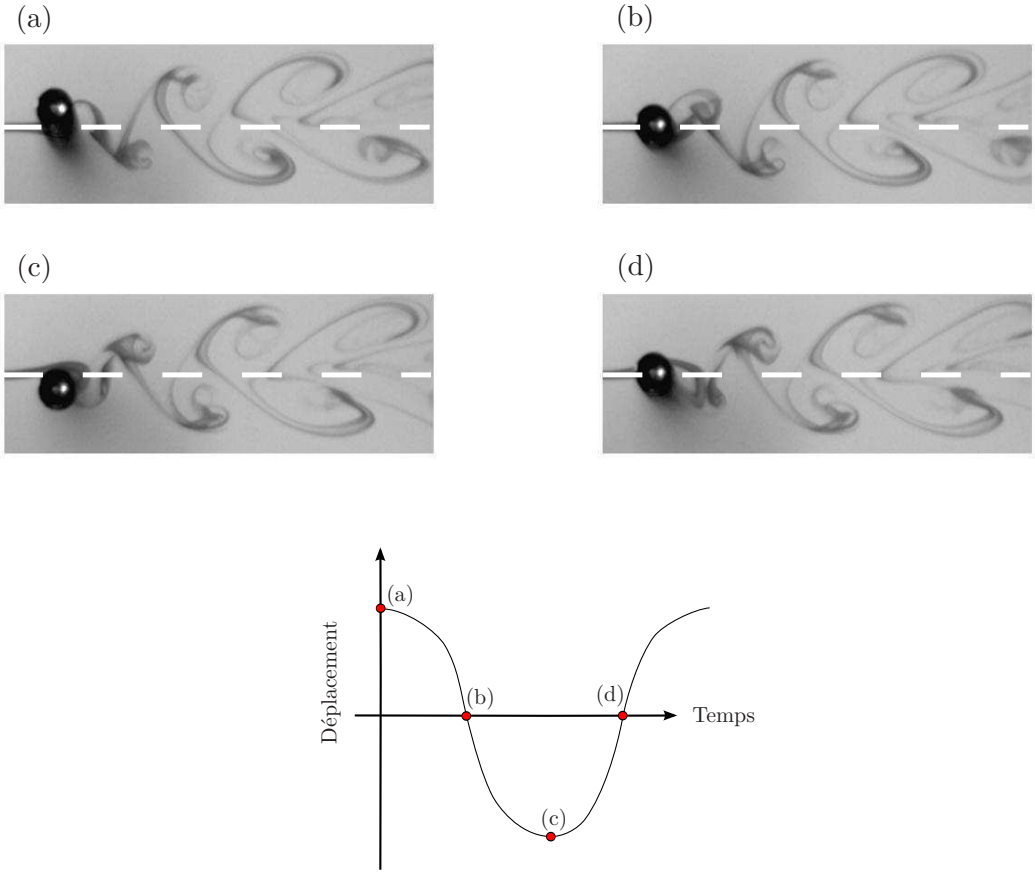


FIGURE 3.5 – Visualisations des oscillations de la structure et de son sillage proche pour $Re = 106$. La ligne blanche en pointillés montre la position de la corde au repos. Les instantanés (a) et (c) correspondent notamment aux déplacements maximum et minimum de l'extrémité de la corde.

la corde et la fréquence du détachement tourbillonnaire sont accrochées, les vibrations résultent du couplage entre la dynamique du solide et celle de son sillage fluctuant : ce sont bien des VIV.

3.2.3 Déplacement de la corde

Le déplacement transverse de la corde est obtenu pour chacune des expériences effectuées. Ce déplacement est tracé sur les figures 3.6 (a) et (b) pour des expériences réalisées avec la chaînette 3 et pour deux valeurs du nombre de Reynolds, $Re = 115$ et $Re = 221$. Les VIV se traduisent par l'apparition d'ondes stationnaires, dont l'amplitude est de l'ordre de la moitié du diamètre équivalent D_{eq}. Par ailleurs, les fortes amplitudes de vibrations sont concentrées au bas de la corde, là où la tension est la plus faible.

Pour pouvoir caractériser ces VIV stationnaires, le déplacement de la corde est décomposé en une composante temporelle, figure 3.6 (c) et (d), et en une déformée modale,

figure 3.6 (e) et (f). Ces deux composantes dépendent du nombre de Reynolds. Ainsi, la fréquence des oscillations est différente pour les deux expériences considérées, pour lesquelles le nombre de Reynolds vaut $Re = 115$ puis $Re = 221$. Les déformées modales diffèrent aussi d'une expérience à l'autre. En effet, lorsque la vitesse de l'écoulement varie, les VIV d'une structure flexible se caractérisent par l'excitation de modes différents de la structure. La sélection d'un mode de vibrations résulte de l'accrochage entre la fréquence de Strouhal et l'une des fréquences propres de la structure, voir section 1.4.2. Dans le cas considéré ici, un mode 2 de corde est accroché pour $Re = 115$ tandis que le mode 4 est excité pour $Re = 221$. Cette dépendance de la fréquence et de la déformée modale avec le nombre de Reynolds était attendue, et doit être caractérisée.

3.2.4 Fréquence des oscillations

Les VIV d'une structure flexible se caractérisent par l'accrochage du détachement tourbillonnaire avec l'un des modes propres de la structure (Chaplin *et al.* 2005, Wu *et al.* 2012). La fréquence de Strouhal F_f est la fréquence à laquelle se ferait le détachement tourbillonnaire derrière la corde si celle-ci était fixe et parfaitement rigide. Le nombre de Strouhal d'une corde suspendue est alors défini par

$$St = \frac{F_f D_{eq}}{U}. \tag{3.9}$$

Or, on sait que la fréquence mesurée des oscillations de la corde, F, est proche de cette fréquence naturelle du détachement tourbillonnaire F_f, même si elles ne sont pas rigoureusement égales. Nous obtenons ainsi une bonne estimation du nombre de Strouhal à partir de la mesure de cette fréquence,

$$St \approx \frac{F D_{eq}}{U}. \tag{3.10}$$

L'évolution du nombre de Strouhal ainsi déterminé est montrée à la figure 3.7.

Premièrement, le nombre de Strouhal est proche de la valeur 0.2, qui est la valeur généralement admise pour les cylindres sur une large gamme de nombre de Reynolds (Blevins 1990, Naudascher & Rockwell 1990). De plus, St augmente avec Re pour $Re < 200$ avant d'atteindre une valeur légèrement supérieure à 0.2 et quasi constante pour des Re supérieurs. Cette évolution du nombre de Strouhal avec le nombre de Reynolds est très similaire à celles que l'on peut trouver dans la littérature, par exemple dans le livre de Blevins (1990) ou l'article de Norberg (2003).

Deuxièmement, il a été montré par Fey *et al.* (1998) et Williamson & Brown (1998) qu'une régression en séries de $1/\sqrt{Re}$ permet d'interpoler précisément les variations du nombre de Strouhal sur la gamme de nombres de Reynolds considérée. Une telle régression est déterminée expérimentalement grâce à une méthode des moindres carrés, figure 3.7,

$$St = 0.25 - \frac{0.64}{\sqrt{Re}}. \tag{3.11}$$

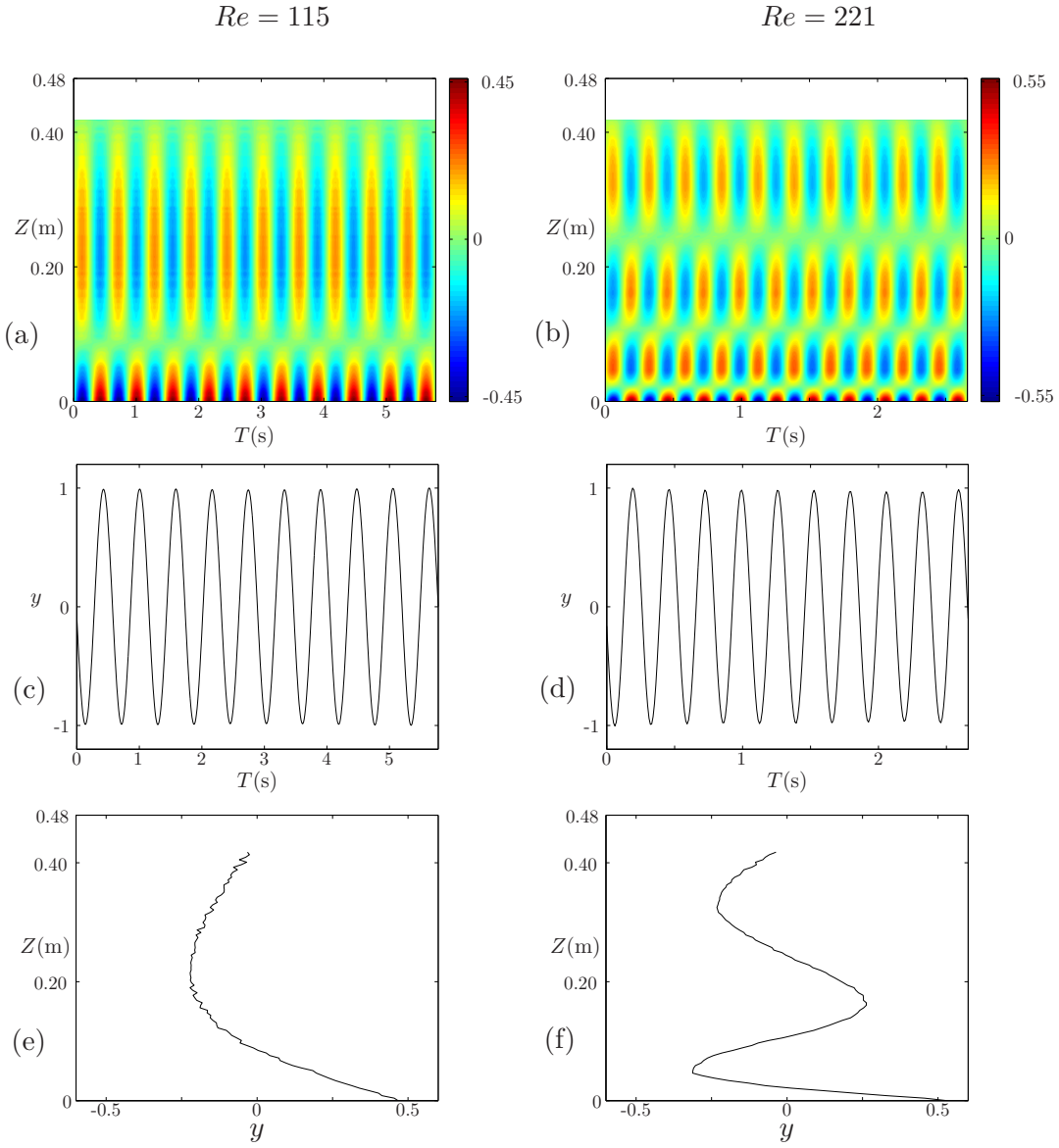


FIGURE 3.6 – VIV de la chaînette 3 pour deux expériences représentatives, $U = 0.033$ m.s^{-1} ($Re = 115$) (gauche) et $U = 0.064$ m.s^{-1} ($Re = 221$) (droite). (a),(b) Déplacement adimensionnel $y = Y/D_{eq}$ (pas : 0.015), (c),(d) Déplacement normalisé de l'extrémité inférieure de la corde, les amplitudes de la composante temporelle du déplacement ont été arbitrairement normalisée à 1, (e),(f) Composante spatiale des VIV de la corde. Cette composante est obtenue en faisant une moyenne de la position instantanée et normalisée de la corde.

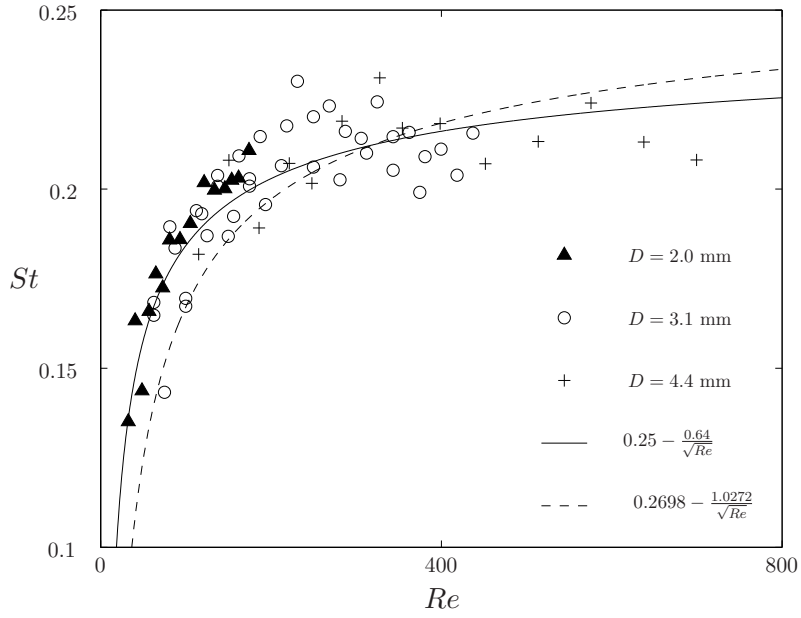


FIGURE 3.7 – Evolution du nombre de Strouhal St avec le nombre de Reynolds Re : points expérimentaux (symboles), régression en séries de $1/\sqrt{Re}$ (ligne continue) et régression obtenue par Williamson & Brown (1998) (ligne en tirets)

Pour comparaison, la régression obtenue par Williamson & Brown (1998) est également tracée sur la figure 3.7. Cette régression interpole également les données expérimentales de manière raisonnable. Cela valide à la fois la méthode utilisée dans cette étude pour estimer le nombre de Strouhal et la cohérence des variations déduites de St avec Re. Il est utile de rappeler ici que ces résultats dépendent évidemment de la définition du diamètre équivalent D_{eq}. Cela peut expliquer une partie de l'écart entre les mesures présentées et la régression de Williamson & Brown (1998). Une partie de la dispersion des points expérimentaux provient par ailleurs de l'estimation du St à partir de la fréquence des VIV de la corde, puisque l'on sait que cette fréquence évolue par paliers d'accrochage des différents modes de la structure.

Les expériences ont finalement permis de déterminer le nombre de Strouhal d'une corde suspendue pour des nombres de Reynolds allant de 32 à 700, équation (3.11), ce qui caractérise complètement la fréquences des VIV de corde suspendue.

3.2.5 Déformées modales

Grandeurs caractéristiques

Avant d'entamer l'étude des déformées modales, il est nécessaire d'identifier les différentes grandeurs caractéristiques du problème. Tout d'abord, il est attendu que les VIV transverses soient de l'ordre du diamètre de la structure, il est donc naturel de considérer le diamètre de la corde suspendue D_{eq} comme échelle caractéristique pour les

déplacements de celle-ci. De même, la pulsation de Strouhal $\omega_f = 2\pi StU/D_{eq}$, qui est la pulsation naturelle du détachement tourbillonnaire derrière le solide, permet de définir un temps caractéristique des VIV.

Dans le cas d'une corde suspendue, la tension est induite par la gravité et dépend donc de la coordonnée Z. Nous construisons une longueur caractéristique Z_c basée sur la vitesse de phase typique du problème. Tout d'abord, $\Theta = m_s g Z_c$ définit une tension caractéristique du problème, où m_s est la masse linéique de la corde et g l'accélération de la gravité. La corde étant immergée, sa masse linéique effective s'exprime $m_t = m_s + \rho\pi D_{eq}^2/4$, où $\rho = 1000\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ est la masse volumique de l'eau à température ambiante (on suppose un coefficient de masse ajoutée $C_{M0} = 1$). La vitesse de phase des ondes se propageant le long de cette corde suspendue peut s'écrire

$$c = \sqrt{\frac{m_s g Z_c}{m_t}} = \omega_f Z_c, \tag{3.12}$$

qui permet de définir la longueur caractéristique Z_c,

$$Z_c = \frac{m_s}{m_t}\frac{g}{\omega_f^2}. \tag{3.13}$$

Il est finalement possible de construire un jeu de variables adimensionnelles,

$$y = \frac{Y}{D_{eq}}, \quad t = \omega_f T, \quad z = \frac{Z}{Z_c}. \tag{3.14}$$

La composante spatiale des VIV d'une corde suspendue est caractérisée par une seule variable sans dimension, la longueur réduite $\ell = L/Z_c$. Il est à noter que ℓ dépend des caractéristiques du système et de l'écoulement, via ω_f notamment, et diffère donc d'une expérience à l'autre.

Auto-similarité des déformées

Nous avons vu à la section 3.2.3 que des ondes stationnaires de VIV se développent pour des valeurs modérées du nombre de Reynolds, $Re \leq Re_c$ avec $Re_c = 110$ pour la chaînette 1, $Re_c = 160$ pour la chaînette 2 et $Re_c = 250$ pour la chaînette 3. Pour des Re plus élevés, les ondes stationnaires disparaissent pour laisser place à des dynamiques de VIV beaucoup plus complexes, avec notamment des réponses multi-modales ou progressives. Une étude spécifique serait nécessaire pour déterminer si ce phénomène est inhérent aux VIV de cordes suspendues à hauts nombres de Reynolds ou bien si il découle des caractéristiques du montage expérimental choisi. On a notamment vu que l'utilisation de chaînettes pour modéliser une corde idéale n'est plus valable pour des Re trop élevés, pour lesquels les non-linéarités du système vont modifier considérablement ses propriétés. Nous nous restreignons donc dans cette étude à la caractérisation des VIV stationnaires, pour lesquelles les déformées modales sont extraites des mesures de déplacement. Ces déformées sont ensuite normalisées avec une norme L^2, de manière à donner le même poids aux mesures du déplacement de chacune des sphères de la chaînette. Cela

n'aurait par exemple pas été le cas si une norme L^∞ avait été utilisée, ce qui aurait conférer un poids déraisonnablement fort à la mesure du déplacement de l'extrémité libre.

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer la ressemblance des deux déformées modales montrées sur les figures 3.6 (e) et (f). En effet, la déformée modale extraite du déplacement de la corde pour $Re = 115$ est très proche de la partie inférieure, $Z \leq 0.10$ m de la déformée du cas $Re = 221$. Nous cherchons par conséquent un comportement auto-similaire des différentes déformées modales. Pour cela, nous définissons une déformée de référence, φ_{ref}, qui correspond à l'expérience pour laquelle la longueur réduite ℓ est la plus élevée. Pour chacune des déformées $\varphi(z)$, un coefficient d'auto-similarité κ est déterminé de manière à minimiser la norme L^2 de l'écart entre la déformée modale dilatée $\varphi(z/\kappa)$ et la déformée modale de référence φ_{ref},

$$E^2(\kappa) = \int_0^{\kappa\ell} \left[\varphi\left(\frac{z}{\kappa}\right) - \varphi_{ref}(z)\right]^2 dz. \tag{3.15}$$

Les déformées sont toutes représentées sur la figure 3.8 (a) en fonction de κz. Toutes les courbes se chevauchent et se confondent en une seule fonction de κz, ce qui prouve leur caractère auto-similaire. Il est important de rappeler ici que la longueur réduite ℓ augmente avec la vitesse de l'écoulement, donc avec Re. Toutes les expériences contribuent par conséquent au bas de la figure 3.8 (a). Cela explique la plus grande dispersion des points expérimentaux aux petits κz, même si celle-ci reste suffisamment faible pour prouver l'auto-similarité des déformées.

Pour caractériser la composante spatiale des VIV d'une corde suspendue, il faut désormais comprendre les variations de κ avec ℓ, figure 3.9. Cette évolution est discontinue et κ décroît sur chacune des branches continues de cette courbe, qui correspondent aux différents modes de vibrations de la corde suspendue. Par exemple, les deux déformées modales montrées en figure 3.6, pour lesquelles les modes 2 et 4 sont respectivement à l'accrochage, correspondent aux symboles A et B sur la figure 3.9, situés sur deux branches distinctes de la courbe $\kappa(\ell)$. Les discontinuités de l'évolution de κ avec ℓ sont probablement liées à des sauts de modes de vibrations, ce qui est étudié à la section 3.2.6 à l'aide d'un modèle linéaire pour les VIV d'une corde suspendue.

3.2.6 Modèle linéaire pour les VIV de corde suspendue

Nous avons vu à la section 2.4.1 qu'une version linéarisée du modèle d'oscillateur de sillage permet de localiser précisément les zones d'accrochage des différents modes de vibrations dans le cas d'un câble uniformément tendu. Nous suivons ici la même démarche, en négligeant de plus l'ensemble des termes d'amortissement (de Langre 2006, Violette *et al.* 2010). L'équation de la dynamique du solide est adaptée au cas d'une corde suspendue. La tension étant induite par la gravité, le terme de tension devient $-(zy')'$. Le système couplé s'écrit alors,

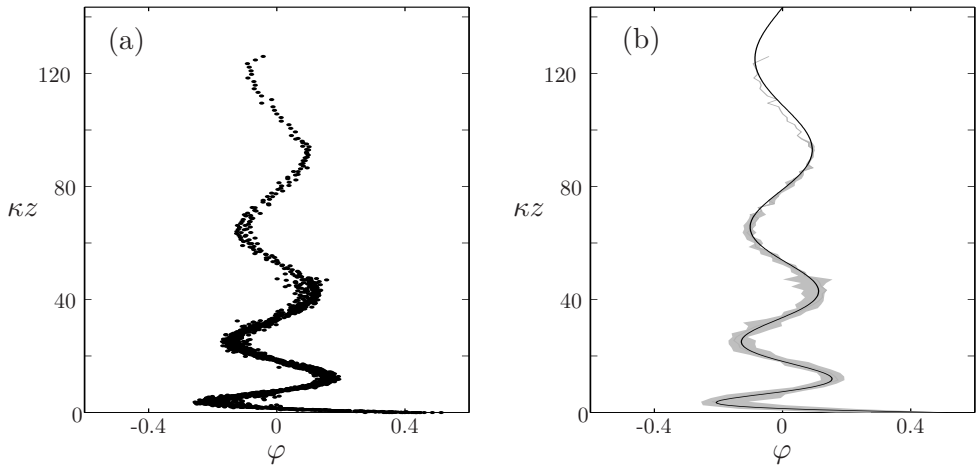


FIGURE 3.8 – Auto-similarité des déformées modales : (a) Superposition de toutes les déformées modales mesurées expérimentalement en fonction de l'ordonnée κz, (b) Comparaison entre les déformées expérimentales (zone grisée) et la prédiction du modèle d'oscillateur de sillage linéaire introduit à la section 3.2.6 (ligne continue)

$$\ddot{y} - (zy')' = Mq, \tag{3.16a}$$
$$\ddot{q} + q = A\ddot{y}, \tag{3.16b}$$

En cherchant à nouveau des solutions de la forme

$$(y, q) = \mathrm{Re}\left[(\varphi, \psi)\, e^{i\omega t}\right], \tag{3.17}$$

il vient rapidement $\psi = A\omega^2\varphi/\left(\omega^2 - 1\right)$. On obtient surtout l'équation différentielle

$$(z\varphi')' + k^2\varphi = 0, \tag{3.18}$$

où le nombre d'onde k et la pulsation ω sont reliés par la relation de dispersion polynomiale

$$\omega^4 + \omega^2\left(AM - 1 - k^2\right) + k^2 = 0. \tag{3.19}$$

Les solutions de l'équation (3.18) sont de la forme $\varphi(z) = aJ_0\left(2k\sqrt{z}\right) + bY_0\left(2k\sqrt{z}\right)$, où J_0 et Y_0 sont les fonctions de Bessel d'ordre zéro de première et deuxième espèce (Triantafyllou & Triantafyllou 1991, Park *et al.* 2002). Le déplacement de l'extrémité libre de la corde est finie, donc $b = 0$. Il vient finalement

$$\varphi(z) = J_0\left(2k\sqrt{z}\right). \tag{3.20}$$

La condition fixe à l'extrémité supérieure permet enfin de déterminer les valeurs admis-

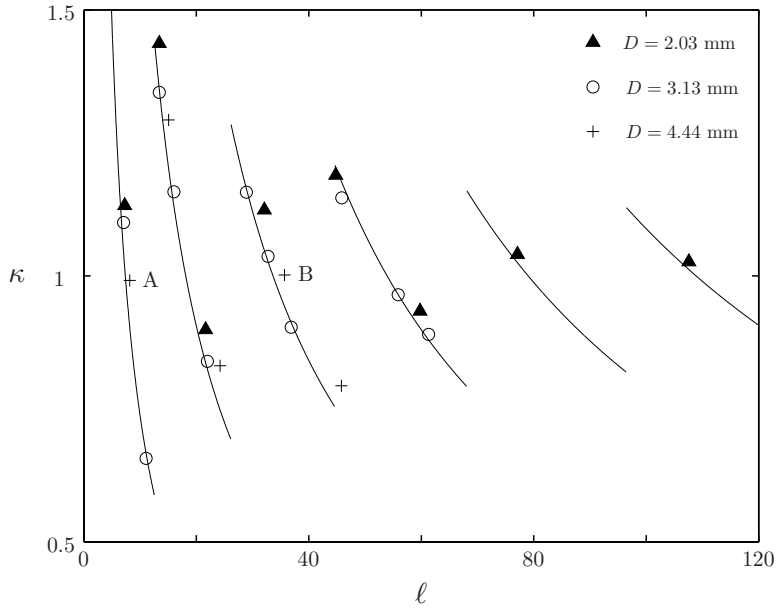


FIGURE 3.9 – Auto-similarité des déformées modales : Évolution du coefficient d'auto-similarité κ avec la longueur réduite ℓ, données expérimentales (symboles) et prédictions du modèle (ligne continue).

sibles discrètes du nombre d'onde,

$$k_n = \frac{\alpha_n}{2\sqrt{\ell}}, \tag{3.21}$$

où les α_n sont les zéros successifs de la fonction de Bessel J_0. Par ailleurs, pour un numéro de mode n et pour un ℓ donné, le taux de croissance du mode n s'exprime, dans sa zone d'instabilité (Violette *et al.* 2010), sous la forme

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\sqrt{-k_n^2 + 2k_n + AM - 1}. \tag{3.22}$$

Grâce aux équations (3.21) et (3.22), il est possible de déterminer les valeurs de ℓ pour lesquelles les taux de croissance de deux modes successifs se croisent. Le mode n est donc le mode le plus instable dans l'intervalle

$$\frac{1}{16}\left(\alpha_{n-1} + \alpha_n\right)^2 < \ell < \frac{1}{16}\left(\alpha_n + \alpha_{n+1}\right)^2. \tag{3.23}$$

La déformée modale du mode de VIV le plus instable est donnée par l'expression $\varphi(z) = J_0\left(2k_n\sqrt{z}\right)$, où le nombre d'onde est déterminé par l'équation (3.21), n étant sélectionné par la relation (3.23). Cette définition de la déformée modale est cohérente avec le caractère auto-similaire démontré expérimentalement. Les déformées sont des troncatures d'une unique fonction $J_0\left(2k_n\sqrt{z}\right)$. Ainsi, le coefficient d'auto-similarité κ

s'exprime comme

$$\kappa = \left(\frac{k_n}{k_{ref}} \right)^2 , \tag{3.24}$$

où le nombre d'onde le plus instable correspondant à l'expérience de référence est déterminé par l'équation (3.21) et vaut $k_{ref} = 1.017$.

Le mode linéaire le plus instable est tracé sur la figure 3.8 (b) et est en très bon accord avec les données expérimentales. Cela confirme l'auto-similarité et valide l'utilisation de l'oscillateur de sillage pour représenter les VIV d'une corde suspendue. Par ailleurs, l'équation (3.24) permet de tracer sur la figure 3.9 l'évolution théorique du coefficient d'auto-similarité avec la longueur réduite ℓ. Là aussi, l'accord entre données expérimentales et valeurs analytiques est excellent. L'analyse de stabilité du modèle linéaire de VIV permet d'expliquer rigoureusement la dépendance en ℓ de κ : les discontinuités correspondent bien à des sauts de modes tandis qu'à l'intérieur d'une zone d'accrochage, κ décroît comme $1/\ell$.

L'analyse des déformées modales obtenues expérimentalement et l'analyse linéaire du modèle ont permis d'identifier le caractère auto-similaire de la distribution des amplitudes le long d'une corde suspendue en VIV. Par ailleurs, la fonction support de cette auto-similarité a été déterminée, il s'agit d'une fonction de Bessel de première espèce et d'ordre zéro, J_0. L'évolution du coefficient d'auto-similarité κ avec les propriétés de l'écoulement a aussi été expliquée. Nous avons donc caractérisé complètement la composante spatiale des VIV d'une corde suspendue.

3.2.7 Amplitude des VIV

La version linéarisée du modèle d'oscillateur de sillage a permis de caractériser les déformées modales des VIV d'une corde suspendue. Le modèle est donc à même de représenter précisément les VIV d'une corde suspendue, à condition de prédire correctement l'amplitude des oscillations. Or, le coefficient de couplage A est déterminé dans Facchinetti *et al.* (2004*a*) à l'aide de données expérimentales de VIV de cylindres rigides. Nous nous proposons donc ici d'adapter la valeur de ce coefficient aux expériences de VIV de corde suspendue étudiées ici.

Le modèle de VIV pour une corde suspendue s'écrit

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - (zy')' = Mq, \tag{3.25a}$$

$$\ddot{q} + \varepsilon \left(q^2 - 1 \right) \dot{q} + q = A\ddot{y}, \tag{3.25b}$$

avec une condition fixe à l'extrémité supérieure, $y(\ell, t) = 0$. Les paramètres ont la même définition qu'à la section 2.1.2, le coefficient de portance étant simplement adapté aux Re expérimentaux de la même manière que dans l'article de Violette *et al.* (2007), $C_{L0} = 0.3$. Les définitions des autres paramètres restent inchangés, le nombre de Strouhal

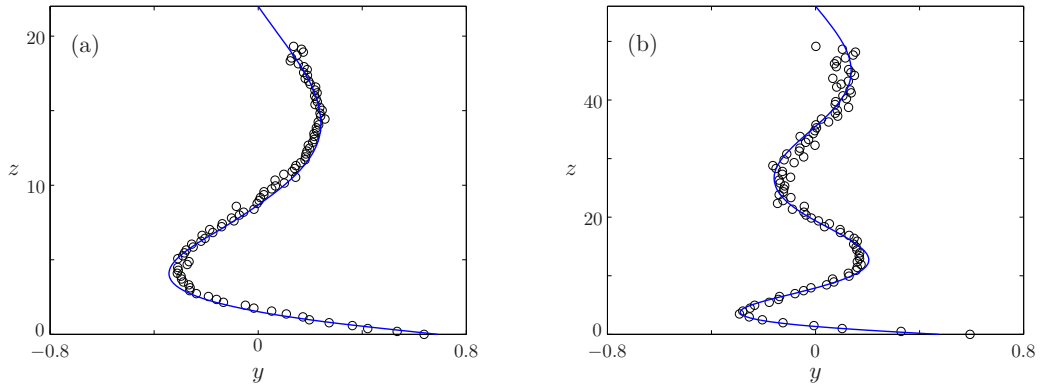


FIGURE 3.10 – Comparaison entre les déformées modales expérimentales (symboles) et celles obtenues par résolution du modèle de VIV complet (ligne continue) pour deux expériences représentatives : (a) $\ell = 22$ et (b) $\ell = 56$.

est notamment défini par la relation (3.11).

Pour résoudre ce système, il est nécessaire d'introduire une condition aux limites à l'extrémité inférieure. Nous considérons alors une petite masse m, attachée à l'extrémité de la corde, qui modifie légèrement la tension de la corde, $\Theta(Z) = mg + m_s g Z$. La projection en Y de l'équilibre des forces sur cette masse m s'exprime alors sous la forme dimensionnelle

$$m\frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} = \Theta\,(0)\,\frac{\partial Y}{\partial Z} = mg\frac{\partial Y}{\partial Z}. \tag{3.26}$$

Cette relation est indépendante du choix de m, nous introduisons donc une nouvelle condition aux limites en $z = 0$,

$$\ddot{y} = \sigma y', \tag{3.27}$$

où $\sigma = m_t/m_s$. Ce modèle est finalement résolu par différences finies, Annexe C. Les VIV sont stationnaires, nous en extrayons des déformées non-linéaires de la même manière qu'à la section 3.2.6. Ces déformées modales sont comparées aux déformées expérimentales pour deux expériences représentatives en figure 3.10. L'accord entre ces déformées modales est excellent. Cela confirme la capacité du modèle à rendre compte des VIV d'une corde suspendue avec extrémité supérieure fixe. Il reste donc à recaler le paramètre A de manière à ce que les amplitudes d'oscillations déterminées par le modèle correspondent aux données expérimentales. La comparaison entre les amplitudes expérimentales obtenues pour la chaînette 2 et celles obtenues avec le modèle de VIV pour une valeur du coefficient de couplage $A = 2.5$ sont montrés sur la figure 3.11. Même si l'accord n'est pas quantitativement exact, l'ordre de grandeur des amplitudes est retrouvé, ainsi que les variations induites par les sauts de modes. Nous pouvons ainsi conclure sur la bonne capacité du modèle d'oscillateur de sillage à prédire la dynamique de VIV d'une corde suspendue.

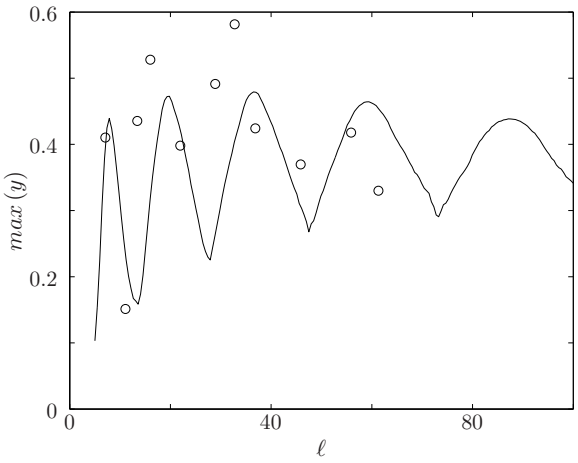


FIGURE 3.11 – Amplitude des VIV déterminées expérimentalement (symboles) et par l'oscillateur de sillage (ligne continue).

3.3 Étude expérimentale de l'extraction d'énergie

Les VIV d'une corde suspendue ont été caractérisées à la section 3.2. Il est désormais possible d'analyser la capacité d'un tel système à extraire de l'énergie d'un écoulement en introduisant une condition aux limites dissipative à l'extrémité supérieure de la structure. Cette analyse est conduite simultanément de manière expérimentale et analytique, grâce au modèle introduit à la section précédente. Dans un premier temps, l'amortissement visqueux introduit expérimentalement est présenté à la section 3.3.1. Le montage expérimental complet est détaillé à la section 3.3.2, avant d'étudier l'efficacité d'un tel système à la section 3.3.3. Les prédictions de l'oscillateur de sillage sont confrontées à ces résultats expérimentaux à la section 3.3.4.

3.3.1 Caractérisation de l'amortissement

Nous présentons ici l'amortissement qui sera installé à l'extrémité supérieure de la corde dans la suite. L'amortissement est engendré par une tige métallique légère, fixée à l'extrémité de la corde et baignant dans un fluide de viscosité contrôlée. Le fluide choisi est un mélange d'eau et de glycerol, dont la viscosité varie avec les proportions relatives des deux fluides.

Il est nécessaire de caractériser l'amortissement ainsi réalisé. Pour cela, nous montons dans un premier temps la tige métallique sur un pendule de masse connue M_p, figure 3.12 et 3.13. La tige est placée dans des solutions de proportions en glycerol différentes et le pendule est relâchée d'une position initiale, figure 3.12.

Le déplacement de la masse jusqu'à son retour à l'équilibre est mesuré grâce à la caméra décrite à la section précédente. Un exemple de retour à l'équilibre du pendule est montré à la figure 3.14. De ces déplacements, on extrait l'enveloppe qui sera de la forme

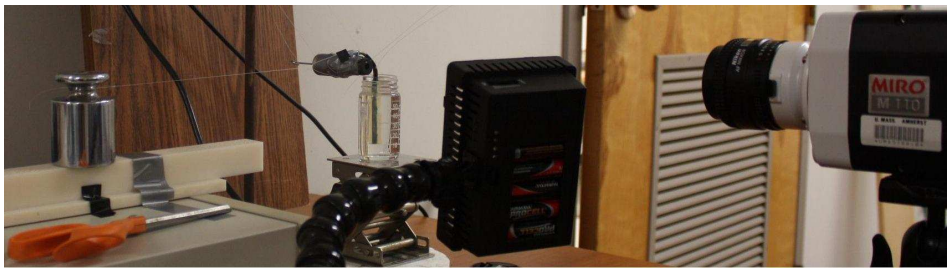


FIGURE 3.12 – Pendule utilisé pour la caractérisation de l'amortissement par un mélange eau/glycerol.

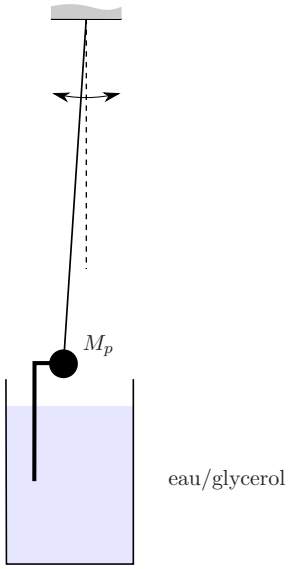


FIGURE 3.13 – Schéma du pendule utilisé pour la caractérisation de l'amortissement.

$$Y_{env}(T) \propto e^{-\frac{R}{2M_p}T}, \tag{3.28}$$

La valeur du coefficient d'amortissement R est déduite de l'enveloppe, figure 3.14. Nous répétons ces expériences pour des solutions comprenant entre 10% et 100% de glycérol et deux tiges différentes, dont les propriétés géométriques sont regroupées dans le tableau 3.2. La tendance est conforme aux attentes avec une très forte augmentation de l'amortissement aux grandes proportions en glycerol.

Pour des raisons pratiques liées au choix du montage, il n'a pas été possible de réaliser ces mesures d'amortissement avec la tige 2 pour des proportions en glycérol supérieures à 75%. Les amortissements correspondants sont déterminés à partir des données de la tige 1, en les supposant proportionnels à la section de tige immergée DL. Pour une même proportion en glycerol du mélange, l'amortissement obtenu avec la tige 2 est donc proportionnel à celui obtenu avec la tige 1. La constante de proportionnalité vaut

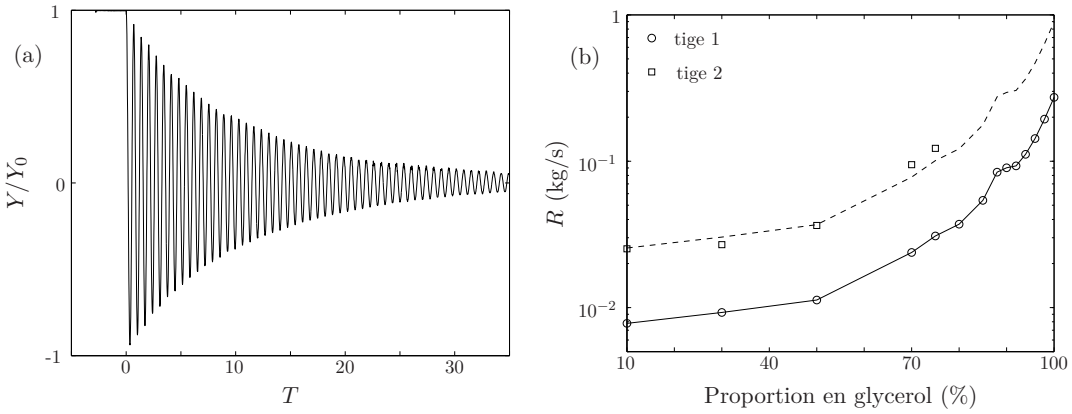


FIGURE 3.14 – (a) Dynamique de retour à l'équilibre du pendule pour la tige 1 et une proportion de 70 % en glycerol, (b) Évolution du coefficient d'amortissement avec la proportion en glycerol. Les symboles représentent les valeurs expérimentales pour chacune des deux tiges. La ligne continue relie les points expérimentaux correspondant à la tige 1, tandis que la ligne en pointillés correspond aux amortissements déduits pour la tige 2, équation (3.29).

	Tige 1	Tige 2
Diamètre (mm)	3.97	9.73
Longueur immergée (mm)	45.80	61.20

TABLE 3.2 – Géométries des deux tiges utilisées pour construire la condition aux limites dissipative.

$$\lambda = \frac{(DL)_{tige2}}{(DL)_{tige1}} = 3.27, \tag{3.29}$$

Pour une même proportion en glycérol, le coefficient d'amortissement obtenu avec la tige 2, R_2, se déduit ainsi de la valeur mesurée avec la tige 1, R_1,

$$R_2 = \lambda R_1. \tag{3.30}$$

L'accord avec les résultats expérimentaux aux faibles proportions en glycérol est bon, figure 3.14.

Pour chacune des proportions, plusieurs expériences ont été réalisées afin d'estimer l'incertitude des mesures. Les variations relatives de l'amortissement mesuré augmentent avec la proportion en glycérol, en même temps que le nombre de pseudo-périodes diminue lors de la relaxation du pendule. Cette variation est en moyenne de 7 % et ne dépasse jamais 19 % du coefficient d'amortissement trouvé. Pour des raisons de lisibilité, ces incertitudes ne sont pas reportées sur la figure 3.14.

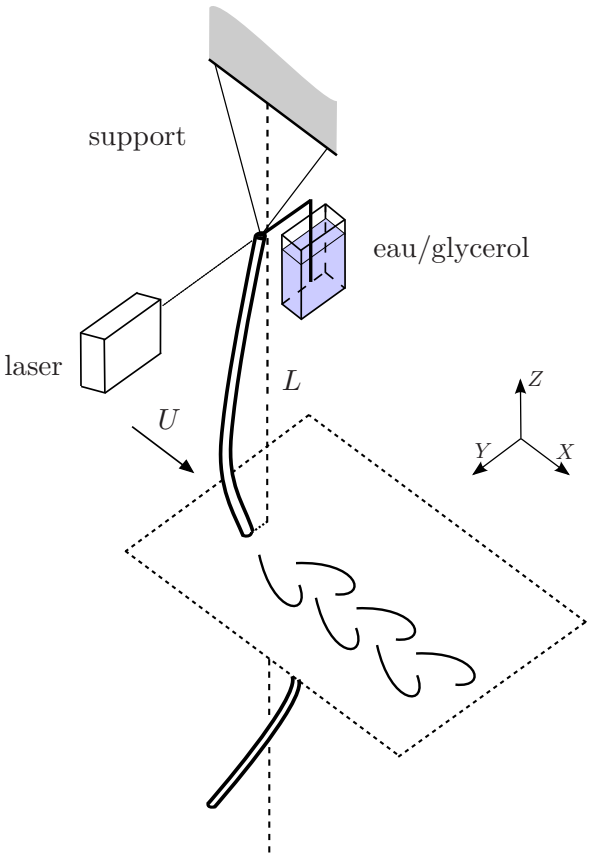


FIGURE 3.15 – Schéma du montage expérimental permettant d'étudier la récupération d'énergie par VIV transverses de corde suspendue.

Nous avons ainsi construit un système très simple permettant d'appliquer localement une force de dissipation visqueuse. Le coefficient d'amortissement peut varier sur deux ordres de grandeur, ce qui permet d'appliquer une condition aux limites dissipative contrôlable au sommet du montage expérimental.

3.3.2 Montage complet

Dans les sections précédentes, nous avons présenté indépendamment un montage expérimental de corde suspendue en VIV et un montage permettant d'appliquer localement une force d'amortissement visqueux. Nous associons à présent ces deux systèmes pour étudier la récupération d'énergie par un amortisseur situé à l'extrémité supérieure d'une corde suspendue en VIV. Le montage expérimental est schématisé à la figure 3.15. La figure 3.16 montre plus précisément la condition aux limites d'amortissement.

Il est également nécessaire de préciser que la corde est maintenant suspendue par des fils en nylon, de manière à empêcher localement les déplacements dans le sens de

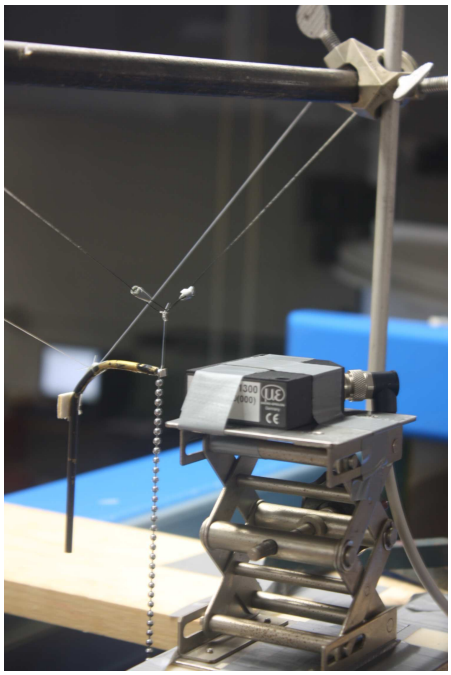


FIGURE 3.16 – Extrémité supérieure de la corde avec le support permettant aux VIV d'être uniquement transverses, la tige permettant l'amortissement (le bocal contenant le mélange eau/glycerol n'est pas installé ici pour pouvoir visualiser la tige) et le capteur laser de déplacement mesurant les oscillations de l'extrémité amortie sont également visibles.

l'écoulement, figure 3.15 et 3.16. Ce support introduit un point fixe 13 cm au-dessus du système amorti. L'objectif étant d'estimer la puissance dissipée par l'amortisseur, il est indispensable de connaître précisément les déplacements de l'extrémité supérieure, qui sont très faibles. Ceux-ci ne sont donc plus mesurés optiquement mais avec l'aide d'un capteur laser de déplacement Micro-epsilon OptoNCDT ILD1302-20. Nous mesurons le déplacement de l'extrémité amortie avec une fréquence d'échantillonnage de 256 Hz. Le signal est ensuite filtré autour de sa fréquence principale, après avoir vérifié que celle-ci est bien proche de la fréquence de Strouhal.

3.3.3 Efficacité de la récupération

La corde est soumise à trois vitesses différentes, correspondant à $\ell = 15.0$ ($Re = 75$), $\ell = 34.1$ ($Re = 106$) et $\ell = 50.0$ ($Re = 125$) pour la chaînette 2. Pour chacune de ces vitesses, 16 différents coefficients d'amortissement sont testés. Nous nous intéressons ici aux variations de l'efficacité avec le coefficient d'amortissement pour ces trois valeurs de ℓ, l'efficacité étant toujours définie comme

$$\eta = \frac{\left\langle R\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)^2\right\rangle}{\frac{1}{2}\rho D L U^3}, \tag{3.31}$$

où L est la longueur de la corde et D son diamètre. Nous avons accès à la fréquence des oscillations et à l'amplitude locale des VIV au niveau de l'amortisseur/récupérateur. Afin d'éviter l'amplification du bruit dû à la différentiation du signal, le numérateur de l'efficacité est estimé par $R\Omega^2 Y_L^2/2$, où Ω et Y_L sont respectivement la pulsation et l'amplitude du déplacement de l'amortisseur.

Enfin, nous disposons d'une estimation de l'incertitude sur le coefficient d'amortissement, qui atteint 19 % pour les plus forts amortissements. A chacune des seize mesures correspond donc un intervalle d'amortissement $[0.81R; 1.19R]$. Lorsque les intervalles d'amortissement de deux mesures successives se chevauchent, nous les regroupons au sein d'un même point. C'est pourquoi les figures 3.17 ne présentent chacune que cinq points, les barres d'erreur illustrant la variabilité de l'amortissement correspondant à chacun de ces cinq résultats finaux. Le traitement des données expérimentales est expliqué plus en détail dans l'annexe A.

Ces résultats expérimentaux confirment la possibilité d'extraire de l'énergie à partir des VIV transverses d'une corde suspendue, même si les efficacités sont faibles, figure 3.17. Les plus fortes efficacités sont localisées autour d'une même valeur du coefficient d'amortissement pour les trois vitesses d'écoulement considérées, $R \approx 0.1$ kg/s, même si les comportements diffèrent légèrement d'une vitesse à l'autre.

3.3.4 Comparaison avec un modèle de VIV adapté

Amortissement caractéristique

La longueur caractéristique Z_c a été introduite à la section 3.2.5 et définit le paramètre de longueur réduite ℓ. Nous introduisons ici R_c, l'amortissement caractéristique de l'influence de la condition aux limites sur la dynamique de la corde suspendue. Dans le cas d'une structure semi-infinie, nous avons déterminé la valeur du coefficient d'amortissement pour laquelle la condition aux limites est totalement absorbante, équation (3.7). Il a également été montré que cet amortissement optimise la récupération d'énergie dans le cas d'une structure semi-infinie. Nous définissons donc l'amortissement caractéristique

$$R_c = \sqrt{\Theta(L)\, m_t}, \tag{3.32}$$

où $\Theta(L) = m_s g L$ est la tension à l'extrémité supérieure de la corde suspendue. L'amortissement adimensionnel s'exprime par conséquent

$$\xi = \frac{R}{R_c} = \frac{R}{\sqrt{L m_s m_t g}}. \tag{3.33}$$

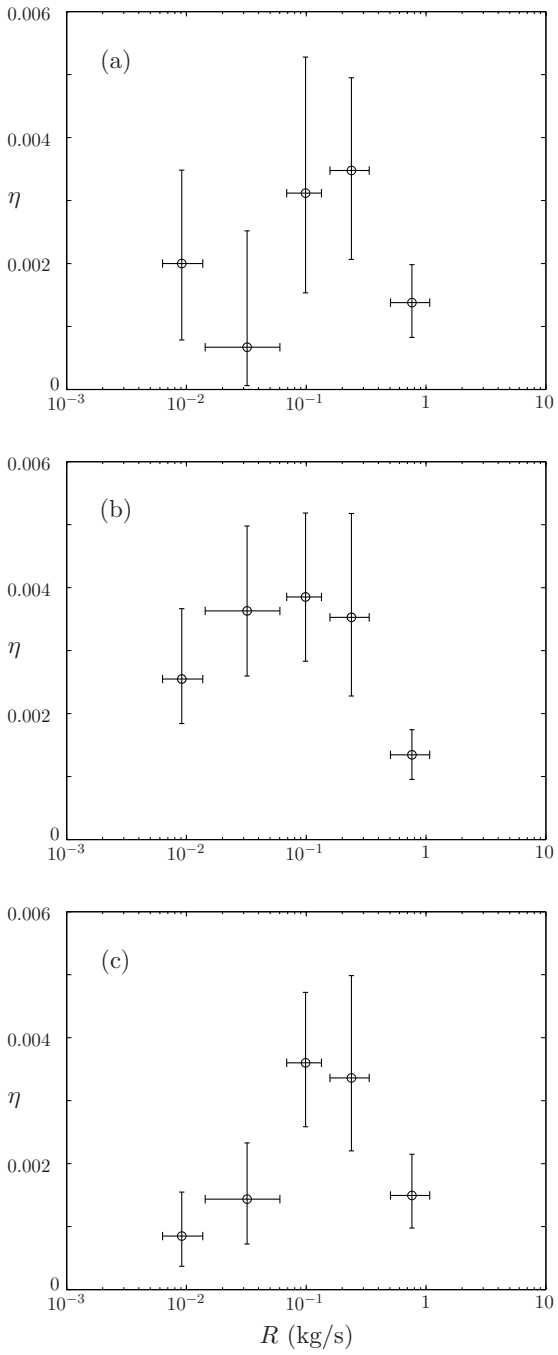


FIGURE 3.17 – Efficacité de la récupération en fonction du coefficient d'amortissement R pour (a) $\ell = 15.0$, (b) $\ell = 34.1$ et (c) $\ell = 50.0$.

Modèle de VIV

Le modèle d'oscillateur de sillage modélise correctement les VIV d'une corde suspendue, section 3.2.7. En introduisant les conditions aux limites correspondant au montage expérimental, le modèle s'écrit sous la forme

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - (zy')' = Mq, \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq \ell, \tag{3.34a}$$

$$\ddot{q} + \varepsilon\left(q^2 - 1\right)\dot{q} + q = A\ddot{y}, \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq \ell, \tag{3.34b}$$

$$\ddot{y} = \frac{m_t}{m_s}y', \quad \text{en} \quad z = 0, \tag{3.34c}$$

$$\sqrt{\ell}\left[\frac{y(\ell,t)}{h} - y'(\ell_-,t)\right] = \xi\dot{y}(\ell,t), \quad \text{en} \quad z = \ell, \tag{3.34d}$$

$$y(\ell + h, t) = 0, \quad \text{en} \quad z = \ell + h. \tag{3.34e}$$

La longueur réduite de la corde ℓ est définie comme à la section 3.2.5, tandis que h correspond à la longueur réduite des supports en nylon, figure 3.15. Les supports en nylon sont considérés comme rigides étant donnés leur très faible masse linéique devant celle de la corde. Ce modèle est résolu de la même façon qu'à la section 3.2.7, voir Annexe C.

Efficacité

Les prédictions d'efficacité du modèle sont confrontées aux résultats expérimentaux sur la figure 3.18. Les ordres de grandeur sont bons. Les variations de η avec le coefficient d'amortissement adimensionnel ξ sont régulières, sauf pour le cas $Re = 75$, pour lequel on observe une chute de l'efficacité pour $\xi \approx 0.5$, figure 3.18 (a). Il avait déjà été relevé à la section 3.3.3 que les fortes efficacités sont localisées autour d'une même valeur de l'amortissement. Le modèle de VIV confirme cette tendance en prévoyant un pic d'efficacité autour de $\xi = 1$ pour chacune des trois valeurs de ℓ considérées.

Nous avons présenté à la section 3.3 une étude expérimentale de la récupération d'énergie par VIV d'une corde suspendue. Cette analyse confirme la capacité d'un tel système à extraire de l'énergie d'un écoulement. L'efficacité η dépend dans ce cas plus de l'amortissement ξ que de la longueur réduite ℓ, contrairement au cas périodique introduit au chapitre 2. Par ailleurs, le modèle de VIV a démontré sa capacité à rendre compte de l'efficacité de la récupération.

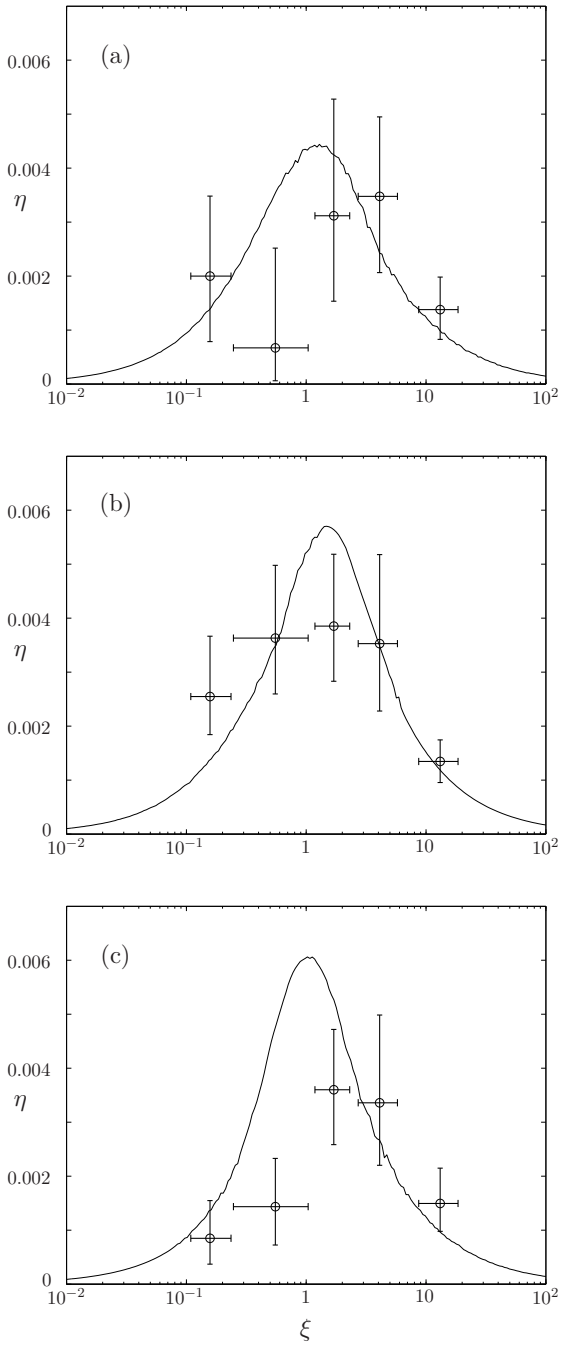


FIGURE 3.18 – Efficacité η de la récupération d'énergie déterminée expérimentalement (symboles) et par le modèle (ligne continue) pour (a) $\ell = 15.0$, (b) $\ell = 34.1$ et (c) $\ell = 50.0$.

3.4 Étude paramétrique de la récupération

Une analyse paramétrique complète de la récupération d'énergie par VIV d'une corde suspendue est présentée dans cette section. Le système considéré est représenté à la figure 3.2 et est constitué d'une corde suspendue dans un écoulement. L'extrémité inférieure de la corde est libre tandis que l'extrémité supérieure est équipée d'un système de récupération, qui extrait de l'énergie à partir du déplacement transverse de la structure. La récupération d'énergie est toujours modélisée par une dissipation visqueuse. Le modèle de VIV s'écrit

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - \left(zy'\right)' = Mq \tag{3.35a}$$

$$\ddot{q} + \varepsilon\left(q^2 - 1\right)\dot{q} + q = A\ddot{y} \tag{3.35b}$$

$$-\sqrt{\ell}y'\left(\ell, t\right) = \xi\dot{y}\left(\ell, t\right), \tag{3.35c}$$

où les paramètres γ, μ et M sont définis comme aux sections précédentes. Pour pouvoir comparer l'efficacité de ce système avec celui introduit au chapitre 2, les différents coefficients prennent les mêmes valeurs qu'à la section 2.3 : $C_D = 2$, $C_{L0} = 0.8$, $St = 0.17$, $\mu = 2.79$, $C_{M0} = 1$, $A = 12$ et $\varepsilon = 0.3$. On remarque notamment que le nombre de Strouhal St et le paramètre de couplage A différent de la section précédente, pour laquelle les nombres de Reynolds considérés sont faibles. Les paramètres de récupération sont la longueur réduite de la corde ℓ et l'amortissement ξ,

$$\ell = \frac{m_t}{m_s}\frac{L\omega_f^2}{g}, \quad \xi = \frac{R}{\sqrt{Lm_s m_t g}}. \tag{3.36}$$

L'efficacité de la récupération η est toujours donnée par l'équation (3.31), qui s'exprime en fonction des paramètres adimensionnels sous la forme,

$$\eta = 16\mu\pi^3 St^3 \frac{\langle \xi\dot{y}^2 \rangle}{\sqrt{\ell}}. \tag{3.37}$$

Le système non-linéaire est résolu par différence finie de la même manière que précédemment, voir Annexe C. L'extrémité libre est notamment traitée comme à la section 3.2.7. En particulier, le coefficient σ défini à l'équation (3.27), s'exprime avec les paramètres du modèle sous la forme

$$\sigma = \frac{1}{1 - \frac{\pi C_{M0}}{4\mu}}. \tag{3.38}$$

3.4.1 Efficacité de la récupération

La carte de l'efficacité est très différente de celle d'un câble tendu avec récupérateurs périodiquement distribués, figure 2.4.

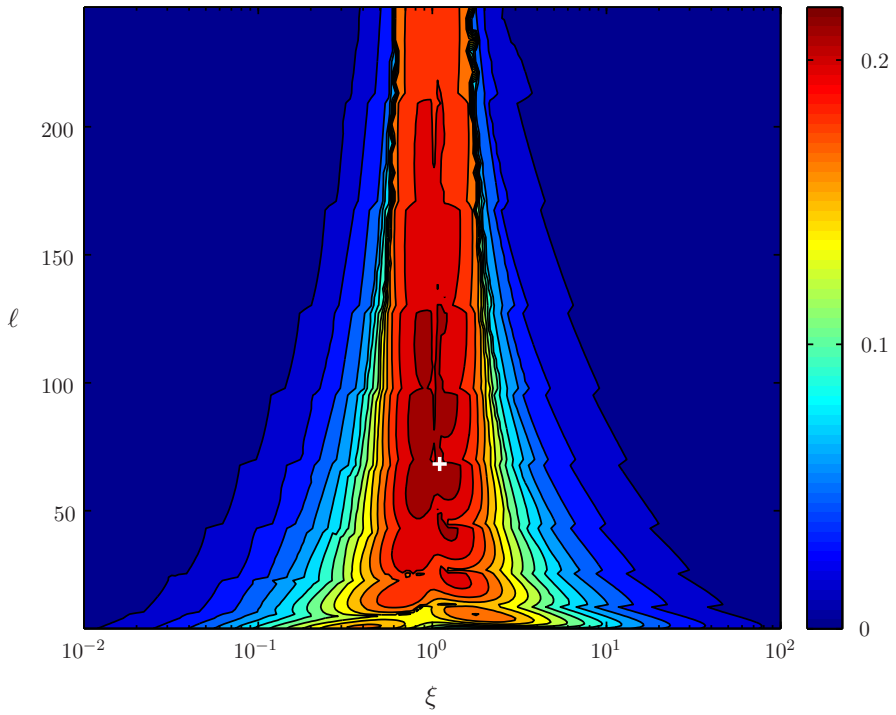


FIGURE 3.19 – Efficacité de la récupération d'énergie par VIV d'une corde suspendue avec un récupérateur localisé à son extrémité supérieure. Les paramètres d'extraction sont le coefficient d'amortissement ξ et la longueur réduite ℓ. La croix blanche localise la configuration optimale, $\xi_{opt} = 1.1$ et $\ell_{opt} = 68.3$, pour laquelle l'efficacité vaut $\eta_{opt} = 0.22$.

Premièrement, l'analyse paramétrique permet d'isoler une configuration optimale pour la récupération d'énergie, qui correspond à une longueur réduite $\ell_{opt} = 68.3$ et à un amortissement $\xi_{opt} = 1.1$. L'efficacité obtenue est de $\eta_{opt} = 0.22$. Les VIV de corde suspendue permettent donc d'extraire efficacement de l'énergie d'un écoulement. En particulier, l'efficacité optimale est légèrement meilleure que pour le système étudié au chapitre 2.

Deuxièmement, la dépendance de l'efficacité avec les paramètres de récupération est notablement plus simple qu'au chapitre précédent. Les fortes efficacités sont localisées autour de la condition $\xi = 1$, dans une bande dont la largeur décroît lentement avec ℓ. Cette évolution de l'efficacité avec l'amortissement a déjà été entrevue expérimentalement à la section 3.3.4. Or, l'amortissement adimensionnel ξ est défini grâce à l'amortissement caractéristique R_c, correspondant à une condition d'absorption des ondes. On s'attend donc à ce que la condition aux limites de récupération influence fortement la dynamique de la corde suspendue autour de $\xi = 1$. L'impact de cet amortissement sur la dynamique de la structure et son influence sur l'efficacité de la récupération sont étudiés

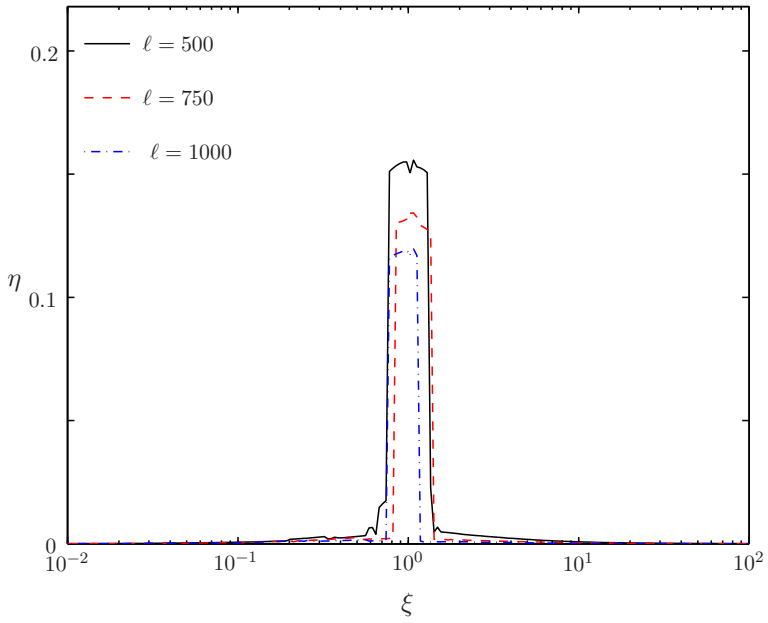


FIGURE 3.20 – Efficacité de la récupération d'énergie pour des grandes longueurs réduites : $\ell = 500$, $\ell = 750$ et $\ell = 1000$.

plus précisément à la section 3.4.2. En revanche, l'efficacité ne dépend que faiblement du paramètre de longueur réduite ℓ, l'effet le plus significatif étant que la zone de haute efficacité mincit aux forts ℓ. En particulier, la concentration des hautes efficacités autour de $\xi = 1$ est observée pour toutes les valeurs de ℓ, figure 3.20.

Troisièmement, la structure dentelée de la carte d'efficacité correspond à la répartition des zones d'accrochage de VIV des différents modes de corde. Or, cette structure ne semble pas jouer de rôle essentiel dans la répartition des hautes efficacités. La sélection des modes n'est pas le paramètre clé de la récupération d'énergie par VIV de corde suspendue, contrairement au cas du câble tendu, chapitre 2.

3.4.2 Ondes progressives/ondes stationnaires

Pour comprendre la structure de la carte d'efficacité, figure 3.19, et expliquer la dépendance en ξ de l'efficacité de la récupération, la dynamique de la corde est étudiée pour différents jeux de paramètres. Pour $\ell = \ell_{opt}$, nous comparons les VIV de la corde pour trois amortissements différents : ξ_{opt}, $\xi_{opt}/100$ et $100\xi_{opt}$, figure 3.21.

Pour les valeurs extrêmes de l'amortissement, $\xi = \xi_{opt}/100$ et $\xi = 100\xi_{opt}$, les dynamiques sont très proches, figure 3.21 (a) et (c), très proches également de celles observées à la section 3.2. On observe l'apparition d'une onde stationnaire de VIV. La déformée modale est proche d'une fonction de Bessel : le comportement de l'extrémité supérieure étant proche d'une condition idéale libre, $y'(\ell, t) = 0$, figure 3.21 (a), ou fixe, $y(\ell, t) = 0$,

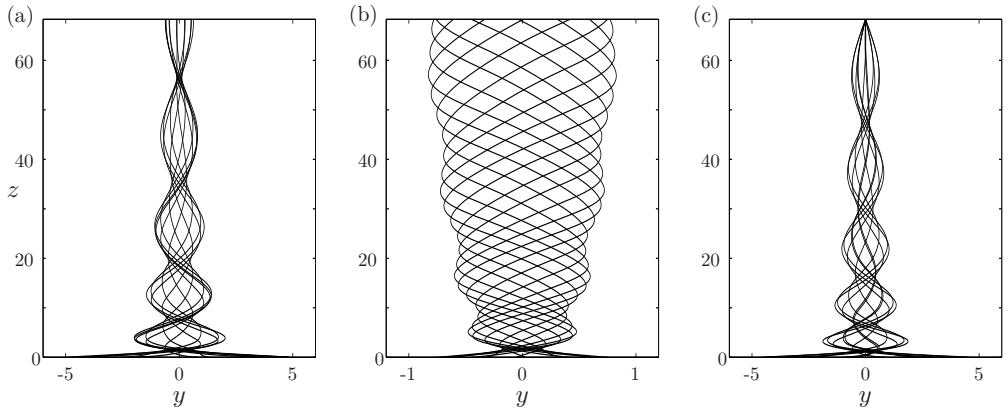


FIGURE 3.21 – VIV d'une corde suspendue avec extrémité supérieure amortie pour $\ell = \ell_{opt}$ et trois coefficients d'amortissements différents : (a) $\xi = \xi_{opt}/100$, (b) $\xi = \xi_{opt}$ et (c) $\xi = 100\xi_{opt}$.

figure 3.21 (c). La dissipation fluide ($\gamma\dot{y}^2/\mu$) et les fortes amplitudes localisées à l'extrémité inférieures de la corde expliquent le léger comportement propagatif vers les z inférieurs de ces ondes de VIV.

En revanche, le déplacement de la corde est très différent pour le cas $\xi = \xi_{opt}$, figure 3.21 (b). La condition aux limites influence fortement la dynamique de la structure. Les VIV se traduisent alors par l'apparition d'ondes progressives se propageant en direction de l'extrémité amortie, comme attendu d'après la définition de ξ, équation (3.33). Cette propagation s'accompagne d'une uniformisation de l'amplitude des vibrations le long de la structure. Le déplacement de l'extrémité libre est notamment beaucoup plus faible que pour les deux autres valeurs de ξ considérées. Cette propagation d'ondes vers le récupérateur d'énergie semble être la raison de la haute efficacité atteinte pour $\xi = \xi_{opt}$, et plus généralement pour $\xi \approx 1$.

Le bilan énergétique local pour la corde suspendue s'exprime sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}zy'^2\right] = Mq\dot{y} - \frac{\gamma}{\mu}\dot{y}^2 + \frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial y}{\partial z}\dot{y}\right). \tag{3.39}$$

Les variations temporelles de l'énergie d'une portion infinitésimale de corde située en z sont dues à trois termes : le transfert d'énergie du fluide vers le solide par la portance fluctuante $Mq\dot{y}$, la dissipation fluide $-\gamma\dot{y}^2/\mu$ et le bilan local du transport d'énergie $(zy'\dot{y})'$. Le troisième terme correspond au bilan entre l'énergie qui est transportée jusqu'en z par la partie inférieure de la corde et ce qui est transmis à sa partie supérieure. Le flux d'énergie ϕ traversant la section d'abscisse z en direction de l'extrémité supérieure s'écrit donc

$$\phi(z) = -\langle zy'\dot{y}\rangle. \tag{3.40}$$

La figure 3.22 présente le flux d'énergie $\phi(z)$ le long de la corde pour les trois cas

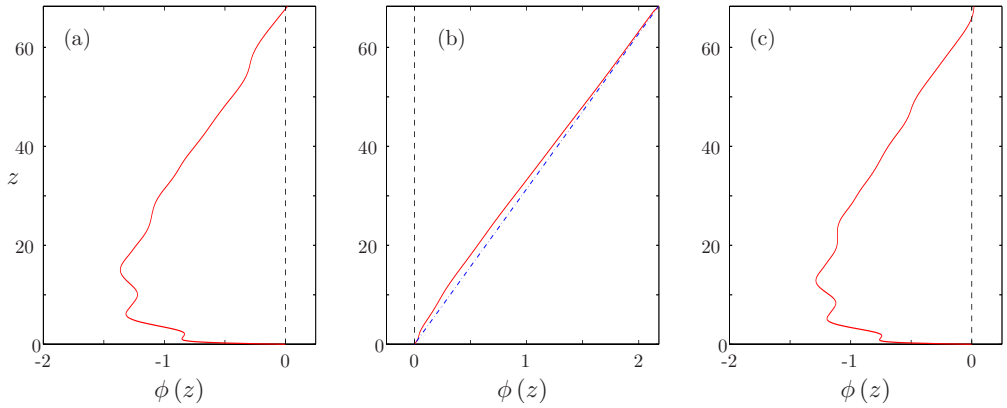


FIGURE 3.22 – Flux d'énergie $\phi(z)$ pour (a) $\xi = \xi_{opt}/100$, (b) $\xi = \xi_{opt}$ qui correspond à la configuration optimale et (c) $\xi = 100\xi_{opt}$. La ligne en pointillés alternés sur la figure (b) montre l'approximation du flux par l'équation (3.41).

introduits à la figure 3.21. Le flux d'énergie est toujours négatif pour $\xi = \xi_{opt}/100$ et pour $\xi = 100\xi_{opt}$, à l'exception d'une très petite zone à proximité de l'amortisseur. Cela confirme la très faible extraction d'énergie par l'amortisseur. Le transport d'énergie se fait vers le bas de la corde, où sont localisées les fortes amplitudes, donc la plus forte dissipation fluide. En revanche, le flux ϕ est toujours positif lorsque l'amortissement est optimal, et augmente linéairement lorsque l'on se rapproche de l'extrémité amortie. L'énergie est transportée en direction de l'amortisseur pour $\xi = \xi_{opt}$, le transport étant supporté par l'onde progressive observée sur la figure 3.21. Pour une onde progressive idéale d'amplitude y_0, de nombre d'onde k et de pulsation ω, le flux s'exprime

$$\phi(z) = \frac{k\omega}{2} y_0^2 z. \tag{3.41}$$

Cette approximation du flux d'énergie est représentée sur la figure 3.22 (b), où l'amplitude a été prise égale à 0.7, figure 3.21 (b), et est en bon accord avec la prédiction du modèle. C'est bien le développement d'ondes progressives pour $\xi \approx 1$ qui permet au système de transporter l'énergie extraite de l'écoulement vers le récupérateur d'énergie, induisant une récupération efficace. Nous avons vu en introduction que l'existence de différents modes de vibrations et l'apparition d'ondes sont deux caractéristiques intrinsèques d'une structure flexible. Dans le cas d'une corde suspendue, c'est la capacité des ondes de VIV du système flexible considéré à sélectionner un sens privilégié de propagation qui permet une extraction d'énergie efficace.

3.4.3 Modèle linéaire

Nous avons vu au chapitre 2 que l'analyse linéaire de stabilité du modèle permet de localiser rapidement les zones de l'espace des paramètres permettant une récupération efficace. Dans le cas d'une corde suspendue, le paramètre clé pour les performances

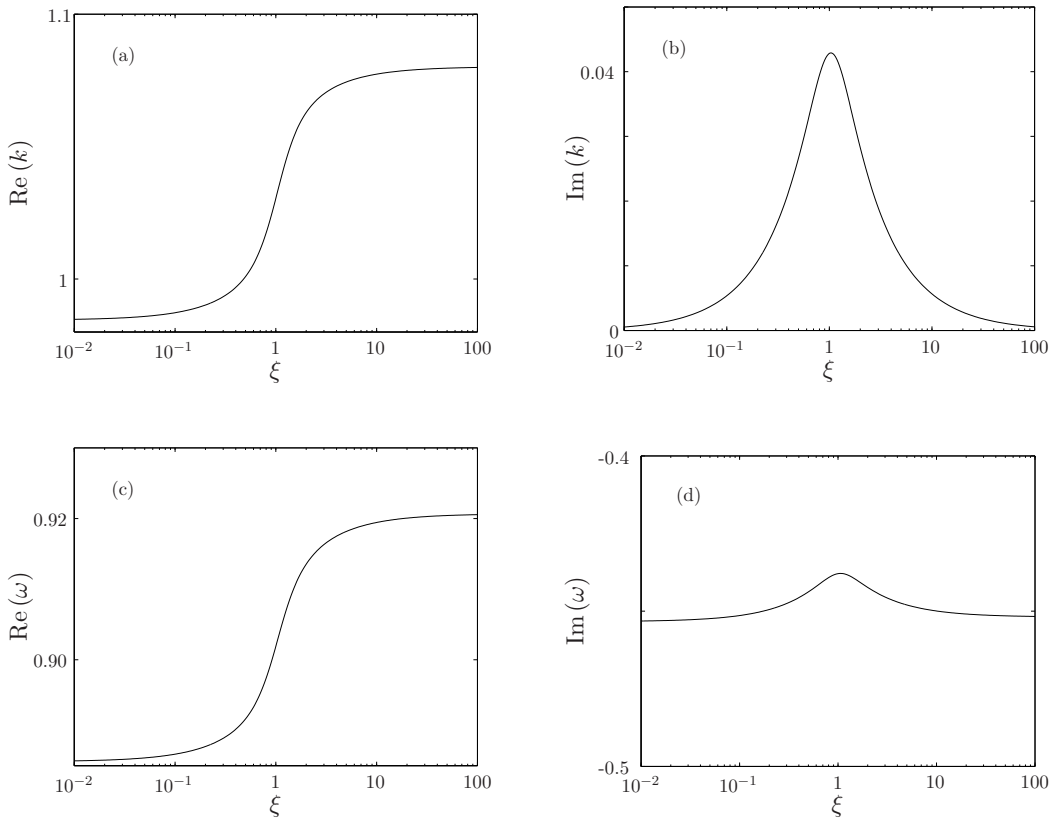


FIGURE 3.23 – Evolution avec ξ du nombre d'onde k, (a) et (b), et de la pulsation ω, (c) et (d), du mode linéaire le plus instable pour $\ell = \ell_{opt}$.

du système est la propagation des ondes de VIV et le transport d'énergie induit vers l'extrémité amortie. Dans le cas d'une corde suspendue, le modèle linéaire complet s'écrit simplement

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - (zy')' = Mq \tag{3.42a}$$

$$\ddot{q} - \varepsilon\dot{q} + q = A\ddot{y} \tag{3.42b}$$

$$-\sqrt{\ell}y'(\ell,t) = \xi\dot{y}(\ell,t)\,. \tag{3.42c}$$

En cherchant toujours des solutions sous la forme

$$(y,q) = \mathrm{Re}\left[(\varphi,\psi)\,e^{i\omega t}\right], \tag{3.43}$$

on aboutit à l'équation (3.18) pour la déformée φ, où le nombre d'onde k et la pulsation ω sont désormais reliés par la relation de dispersion

$$\omega^4 + i\omega^3\left(\varepsilon - \frac{\gamma}{\mu}\right) + \omega^2\left(\varepsilon\frac{\gamma}{\mu} + AM - 1 - k^2\right) + i\omega\left(\frac{\gamma}{\mu} - \varepsilon k^2\right) + k^2 = 0. \tag{3.44}$$

Par ailleurs, on sait depuis la section 3.2.6 que la déformée est donnée par l'équation (3.20). La condition aux limites de récupération est alors utilisée pour obtenir une deuxième relation entre le nombre d'onde k et la pulsation ω, qui s'écrit

$$kJ_1\left(2k\sqrt{\ell}\right) - i\xi\omega J_0\left(2k\sqrt{\ell}\right) = 0, \tag{3.45}$$

où J_1 est la fonction de Bessel d'ordre 1 et de première espèce, car $J_0' = -J_1$ (Abramowitz & Stegun 1972). Les deux équations (3.44) et (3.45) sont résolues numériquement. Pour $\ell = \ell_{opt}$, les évolutions de k et ω en fonction du coefficient d'amortissement ξ sont montrées à la figure 3.23. Les variations de k et ω sont concentrées dans une zone autour de $\xi = 1$. Plus précisément, la figure 3.23 (b) montre que la partie imaginaire du nombre d'onde croît fortement autour du coefficient d'amortissement optimal. Or, cette partie imaginaire est le marqueur du comportement propagatif, la propagation se faisant dans la direction des z croissants étant donné les signes respectifs de $\mathrm{Im}\,(k)$ et de $\mathrm{Re}\,(\omega)$. L'analyse linéaire de stabilité prédit l'apparition d'ondes progressives de VIV autour de $\xi = 1$, dont il a été montré qu'elles transportent l'énergie vers l'extrémité amortie, ce qui résulte en une haute efficacité de récupération. L'analyse linéaire permet donc de localiser rapidement les jeux de paramètres (ξ, ℓ) pour lesquels la récupération d'énergie par VIV d'une corde suspendue sera efficace.

3.5 Discussion et conclusion

Dans ce chapitre, la récupération d'énergie par VIV d'une corde suspendue équipée d'un récupérateur d'énergie à son extrémité supérieure et libre à son extrémité inférieure a été analysée. Dans un premier temps, les VIV d'un tel système, pour lequel la tension est induite par la gravité, sont caractérisées expérimentalement et analytiquement, section 3.2. Puis, il a été prouvé expérimentalement qu'il est possible d'extraire de l'énergie de cette dynamique, section 3.3. Le modèle de VIV est aussi capable de rendre compte précisément de l'efficacité de ce système d'extraction, section 3.3.4. Dès lors, nous avons mené à la section 3.4 une étude paramétrique complète de l'efficacité du système en fonction des deux paramètres d'amortissement que sont ℓ, la longueur réduite de la corde suspendue et ξ, le coefficient d'amortissement modélisant la récupération d'énergie.

3.5.1 Importance de la flexibilité

Les VIV d'une corde suspendue permettent de récupérer efficacement de l'énergie d'un écoulement géophysique. Le paramètre déterminant est l'amortissement ξ, la longueur réduite ℓ n'ayant qu'assez peu d'influence sur l'efficacité η. Les hautes efficacités sont localisées autour de $\xi = 1$. En particulier, l'efficacité optimale est obtenue pour

$\xi_{opt} = 1.1$. Les hautes efficacités sont obtenues pour des amortissements entraînant l'établissement d'ondes progressives, qui se propagent vers l'extrémité amortie et transportent ainsi l'énergie extraite de l'écoulement vers le récupérateur d'énergie. Or, c'est bien la flexibilité du système qui permet l'apparition de systèmes d'ondes de VIV, qu'elles soient stationnaires ou progressives. La flexibilité de la structure lui apporte donc un avantage fondamental par rapport à une structure rigide, à savoir sa capacité à transporter de l'énergie.

Nous pouvons donc donner le résultat intermédiaire suivant :

Les VIV d'une corde suspendue permettent de récupérer efficacement et localement de l'énergie d'un écoulement. Cette extraction locale est rendue efficace par le transport de l'énergie extraite tout le long de la structure vers le récupérateur via des ondes de VIV progressives.

3.5.2 Tension induite par la gravité

La flexibilité de la structure permet l'apparition d'ondes de VIV. Le fait que ces ondes soient progressives provient de l'asymétrie des conditions aux limites de la structure. L'extrémité inférieure est libre tandis que l'extrémité supérieure est amortie. Les ondes de VIV sont donc absorbées par le système de récupération d'énergie, ce qui explique le sens privilégié de la propagation des ondes.

Par ailleurs, la tension de la corde suspendue est induite par la gravité et augmente avec la variable Z. Cette tension variable influence fortement la dynamique de VIV de la corde suspendue. Or, ces ondes progressives de VIV sont le support du transport de l'énergie vers le système de récupération. L'énergie est transférée localement du fluide au solide à une ordonnée Z, puis est transportée par la tension tout en étant dissipée par l'amortissement ajouté. Une tension variant linéairement avec Z permet donc de transporter l'énergie avant qu'elle ne soit dissipée sur une plus grande distance que si la tension était constante. Cela explique la décroissance lente de η avec le paramètre ℓ, figure 3.20.

3.5.3 Sensibilité à la vitesse de l'écoulement

Une corde suspendue a a priori un intérêt pratique indéniable comparé au câble tendu présenté au chapitre précédent. Un seul récupérateur d'énergie est en effet nécessaire, localisé de plus à l'extrémité supérieure de la structure immergée. On peut alors imaginer un système pour lequel la récupération d'énergie se ferait à la surface, par exemple grâce aux oscillations d'une bouée montée sur une glissière. Cela permettrait d'éviter les problèmes de maintenance entrevus au chapitre 2.

Néanmoins, les variations de la vitesse de l'écoulement influencent l'efficacité du système. Nous considérons donc un écoulement dont la vitesse U varie autour d'une vitesse moyenne U_m. En revenant aux définitions des paramètres adimensionnels ℓ et ξ,

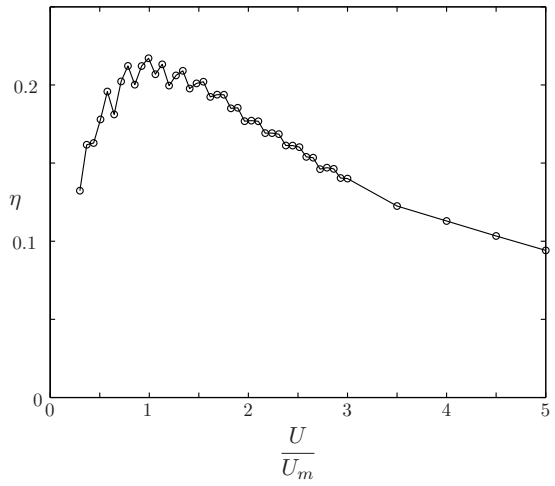


FIGURE 3.24 – Sensibilité de l'efficacité du système proposé aux variations de vitesse U.

$$\ell = 4\pi^2 St^2 \left(\frac{U}{D}\right)^2 \frac{m_t L}{m_s g} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{L m_s m_t g}}, \tag{3.46}$$

on remarque que ℓ varie comme U^2 tandis que l'amortissement est lui indépendant de U. Les paramètres étant calés pour que l'efficacité η soit maximale lorsque $U = U_m$, le système reste dans la bande de haute efficacité de la carte d'efficacité lorsque U varie, figure 3.19. On s'attend donc à ce que la sensibilité de l'efficacité du système à U soit relativement faible. L'évolution de l'efficacité en fonction de la vitesse de l'écoulement est tracée à la figure 3.24. L'efficacité de la récupération varie effectivement lentement avec la vitesse de l'écoulement, beaucoup plus lentement notamment que pour un câble tendu, figure 2.11. La largeur de pic vaut dans ce cas $\Delta = 1.92$, supérieure à la fois à largeur de pic pour le cas rigide et pour le câble à tension uniforme. Cette très faible dépendance de l'efficacité de la récupération avec U confère un second avantage à ce système sur celui présenté au chapitre précédent.

3.5.4 Longueur de la structure

Les hautes efficacités sont obtenues pour des jeux de paramètres entraînant l'apparition d'ondes progressives, qui transportent l'énergie extraite par la corde jusqu'au récupérateur situé à son extrémité supérieure. Cette énergie est néanmoins dissipée par le fluide ($-\gamma \dot{y}^2/\mu$) en même temps qu'elle est transportée. Il apparaît donc essentiel de comprendre les variations de η avec la longueur L de corde. Nous étudions ici l'évolution de l'efficacité du système avec la longueur de la corde immergée, pour un amortissement R et une vitesse d'écoulement U fixés.

Dans un premier temps, les variations de l'efficacité avec L sont montrées à la figure 3.25. D'après les définitions des variables adimensionnelles, $\ell \propto L$ et $\xi \propto 1/\sqrt{L}$. Modifier L revient donc à évoluer le long d'une courbe $\ell \propto 1/\xi^2$ sur la carte d'efficacité, figure

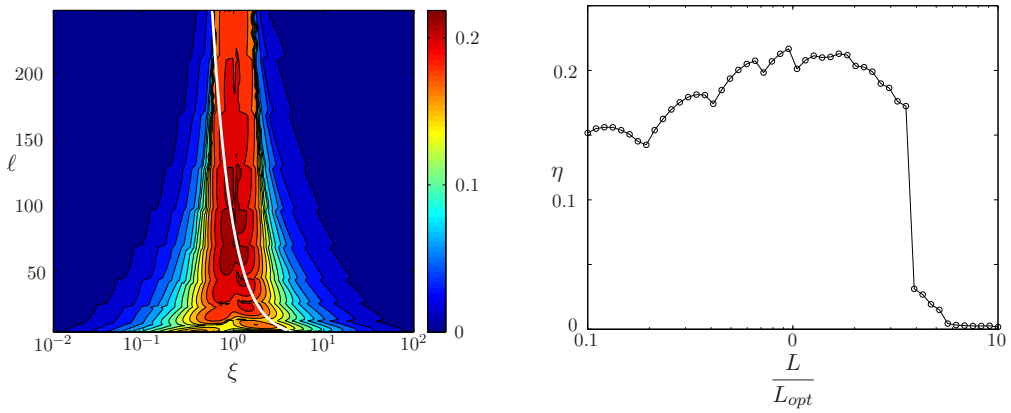


FIGURE 3.25 – Variations de l'efficacité du système proposé avec la longueur de la corde L pour un amortissement R fixé : (Gauche) Carte d'efficacité avec les variations des valeurs des paramètres ℓ et ξ induites par les variations de L et (Droite) Évolution de l'efficacité de la récupération avec L.

3.25. On s'attend donc à ce que l'évolution de η avec L présente un maximum, ce qui est vérifié sur la figure 3.25. L'efficacité augmente légèrement pour les câbles courts, les variations de η sont aussi marquées par les sauts de mode aux petites valeurs de L. En revanche, η chute brutalement si l'on installe un câble trop long ($L > 3L_{opt}$) à cause de l'étroitesse de la bande de haute efficacité pour les grandes valeurs de L.

Dans un second temps, le terme $L\eta\,(L)$ permet d'estimer la puissance effectivement dissipée par le système. L'évolution de cette puissance est montrée en figure 3.26. Il est frappant de noter que la puissance présente également une longueur optimale $L_P = 3L_{opt}$. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, la puissance dissipée n'augmente pas proportionnellement à la longueur du câble. L'amortissement doit en effet être assez intense pour dissiper l'énergie qui lui parvient et limiter la réflexion de ces ondes progressives, et les pertes par dissipation fluide associées.

3.5.5 Dimensionnement optimal

Comme au chapitre 2, il est possible d'utiliser l'étude présentée ici pour dimensionner un système de récupération d'énergie basé sur les VIV d'une corde suspendue. Si l'on considère une structure ayant les mêmes propriétés qu'au chapitre précédent, tableau 2.1, dans un écoulement de vitesse moyenne $U_m = 1.5$ m.s^{-1}, la longueur correspondant à l'optimal vaut $L = 0.12$ m. La puissance récupérée serait alors très faible. Il serait de plus difficile de considérer comme une structure élancée un cylindre de rapport d'aspect $\Lambda = 3$.

Le système considéré ici se justifie plutôt dans des écoulements lents, même si la puissance obtenue va nécessairement être faible, équation (2.29). On considère dorénavant un écoulement de vitesse $U_m = 0.1$ m.s^{-1} et une corde de diamètre $D = 0.20$ m, la masse linéique valant toujours $m_s = 3.20$ kg.m^{-1}. La puissance linéique optimale vaut alors $\langle P_h \rangle = 0.02$ W.m^{-1}, ce qui est effectivement très faible. On recherche néanmoins

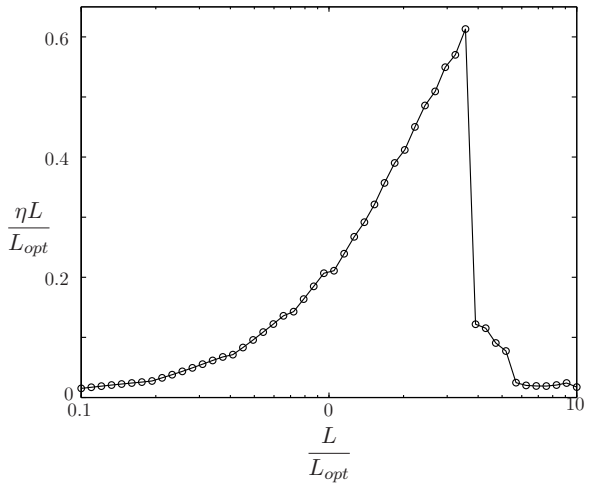


FIGURE 3.26 – Évolution de la puissance $\eta\,(L)\,L$ du système proposé avec la longueur de la corde L pour un amortissement R fixé.

la longueur L de corde et l'amortissement R permettant d'atteindre cet optimal. On trouve alors une longueur optimale de corde $L = 680$ m et un coefficient d'amortissement $R = 534.9$ kg.s^{-1}, équations (3.46), ce qui permet d'extraire une puissance de 13.6 W. Un tel système, de masse totale 2180 kg, peut par exemple être suspendu par une bouée dont le rayon est de l'ordre du mètre, et dont les oscillations sont amorties pour produire de l'énergie. Un système de récupération d'énergie par VIV de corde suspendue est donc relativement facile d'installation, mais ne peut être utile que lorsque de très petites puissances sont nécessaires, par exemple pour les capteurs de bouées météorologiques.

Chapitre 4

Conclusion

4.1 Conclusion

Les vibrations induites par vortex sont des oscillations auto-entretenues d'une structure interagissant avec son sillage fluctuant. Les VIV peuvent atteindre une amplitude de l'ordre du diamètre du solide et sont donc intéressantes dans l'optique d'extraire de l'énergie d'un écoulement. La densité énergétique d'un écoulement géophysique étant faible, la structure doit interagir avec l'écoulement sur une large surface pour produire une puissance significative. Cette vaste surface d'interaction peut être obtenue soit grâce à une multitude de structures de petite taille, comme dans l'article de Bernitsas *et al.* (2008), soit à l'aide d'une unique structure élancée. Dans ce manuscrit, la récupération d'énergie par VIV de structures élancées flexibles est analysée et comparée à l'extraction d'énergie par VIV d'une structure rigide. L'objectif final est de conclure sur le rôle que joue la flexibilité de la structure dans sa dynamique de VIV, plus particulièrement dans l'extraction d'énergie associée. Pour cela, deux montages différents ont été considérés et étudiés, analytiquement, numériquement et expérimentalement.

Dans un premier temps sont considérées les VIV d'une structure flexible idéale : un câble infini uniformément tendu. Le câble est périodiquement équipé de récupérateurs ponctuels, qui extraient de l'énergie du déplacement transverse de la structure. Nous montrons tout d'abord qu'un modèle d'oscillateur de sillage permet de modéliser correctement la dynamique de la structure flexible considérée et de mener une étude paramétrique de l'efficacité du système proposé. La récupération d'énergie dépend de deux paramètres : ℓ la distance entre deux récupérateurs d'énergie successifs et ξ, le coefficient d'amortissement d'un récupérateur. Ces deux paramètres locaux influencent fortement la dynamique globale du câble en VIV via la sélection du mode de vibrations à l'accrochage, dont le numéro de mode est le paramètre clé pour l'efficacité du système. L'accrochage d'un mode pair implique une faible efficacité tandis que l'accrochage d'un mode impair résulte en une récupération d'énergie efficace. La sensibilité de l'efficacité avec la vitesse de l'écoulement est aussi analysée. Une méthode de contrôle passif de la tension, dans laquelle la tension est induite par la traînée, permet de réduire considérablement les variations de l'efficacité du système avec la vitesse.

Dans un second chapitre, nous analysons la possibilité d'extraire de l'énergie avec un unique récupérateur. Après avoir étudié l'impact de la présence d'un unique amortisseur sur la dynamique d'un système semi-infini, nous nous intéressons à un système plus simple : une corde suspendue à son extrémité supérieure par un unique récupérateur d'énergie. La tension de ce système varie notamment avec l'altitude. Les VIV d'une corde suspendue sont caractérisées expérimentalement et analytiquement, l'extrémité supérieure étant fixe dans un premier temps, puis équipée d'un système d'extraction d'énergie. L'étude expérimentale prouve que ce montage permet effectivement de récupérer de l'énergie. Le coefficient d'amortissement ξ influence fortement l'efficacité du système. Le modèle d'oscillateur de sillage rend par ailleurs fidèlement compte des VIV d'une corde suspendue et de la récupération d'énergie. Nous réalisons donc une étude paramétrique des dépendances de l'efficacité avec les paramètres de récupération. Cette étude confirme le rôle prédominant joué par le coefficient d'amortissement ξ dans l'établissement de VIV pour lesquelles la récupération d'énergie est efficace. Pour des valeurs de ξ proches de 1, des ondes progressives de VIV se développent le long de la structure, l'amortisseur dissipant l'ensemble de l'énergie parvenant jusqu'à lui. Ces ondes progressives transportent l'énergie extraite du fluide par la corde vers l'extrémité amortie, induisant les hautes efficacités du système. Enfin, les variations avec U de l'efficacité sont faibles, ce qui est intéressant dans l'optique de la réalisation pratique d'une installation de ce type. En revanche, les faibles vitesses d'écoulement pour lesquelles un tel système est envisageable limitent fortement la puissance obtenue.

Nous avons introduit au chapitre 1 deux questions qui doivent nous permettre de conclure sur l'intérêt de la flexibilité de la structure pour extraire de l'énergie d'un écoulement.

1. *Les VIV de structures flexibles permettent-elles d'extraire efficacement de l'énergie d'un écoulement ? En particulier, quelle est la sensibilité des performances du système proposé aux propriétés du milieu, comme la vitesse de l'écoulement ?*

   Les études paramétriques menées sur les deux systèmes flexibles considérés ont permis d'isoler des configurations optimales de récupération d'énergie. L'efficacité maximale vaut $\eta_{opt} = 0.19$ pour le cas tendu étudié au chapitre 2 et $\eta_{opt} = 0.22$ pour la corde suspendue étudiée au chapitre 3. Ces efficacités optimales sont du même ordre que pour un système rigide. Les VIV de structures flexibles constituent par conséquent un mécanisme d'interaction fluide/structure permettant d'extraire efficacement de l'énergie d'un écoulement. Les dépendances de l'efficacité avec la vitesse de l'écoulement ont par ailleurs été étudiées aux différents chapitres. L'efficacité d'un câble tendu varie très fortement et de manière discontinue avec la vitesse de l'écoulement. Au contraire, la vitesse n'influence que faiblement l'efficacité de la récupération par VIV d'une corde suspendue.

2. *La flexibilité de la structure joue-t-elle un rôle fondamental dans la récupération d'énergie ? Une structure flexible a-t-elle un avantage intrinsèque dû à sa flexibilité sur un cylindre rigide ou bien ses performances sont-elles proches de celles d'une structure rigide « allongée » ?*

   Dans le cas où la récupération d'énergie est périodiquement distribuée le long d'un câble tendu, l'existence de différents modes de vibrations est la caractéristique principale de la dynamique expliquant l'efficacité du système. Le numéro du mode à l'accrochage détermine l'efficacité de la récupération. Dans le cas d'une corde suspendue par un système de récupération d'énergie localisé à son extrémité supérieure, c'est au contraire l'apparition d'ondes progressives de VIV qui engendre les hautes efficacités du système pour certains jeux de paramètres. Or l'existence de différents modes propres constitue l'une des caractéristiques fondamentales d'un système flexible, au même titre que sa capacité à supporter l'établissement d'un système d'ondes, stationnaires ou progressives. Une structure flexible adapte sa dynamique aux sollicitations exercées par le sillage. Cette adaptabilité permet à la récupération d'énergie d'être efficace et explique aussi la faible dépendance avec la vitesse de l'écoulement des performances du deuxième système considéré. Le comportement d'une structure flexible est intrinsèquement différent de celui d'une structure rigide, la flexibilité joue donc un rôle fondamental dans la récupération d'énergie.

Le travail présenté dans cette thèse permet de répondre à ces questions et de conclure :

Les VIV de structures flexibles permettent d'extraire efficacement de l'énergie d'un écoulement grâce à l'adaptabilité de la dynamique de la structure due à sa flexibilité.

4.2 Perspectives

Nous avons mené ici une analyse préliminaire de la capacité des VIV d'une structure flexible à extraire de l'énergie d'un écoulement uniforme. Cette étude démontre la bonne efficacité d'un tel système, notamment dans le cas d'une structure unique et suspendue dans un écoulement, chapitre 3. Néanmoins, quelques points doivent encore être abordés avant de pouvoir envisager une analyse technico-économique d'un système réel de récupération d'énergie basé sur les VIV d'une structure flexible.

4.2.1 Oscillateur de sillage

Le couplage entre un oscillateur de Van der Pol décrivant l'évolution temporelle du coefficient de portance fluctuante et des équations solides adaptées aux différents systèmes considérés (incluant notamment la récupération d'énergie) ont permis de construire des modèles de VIV pour chacune des configurations étudiées. Les prédictions du modèle ont été confrontées à des DNS au chapitre 2 et à des résultats expérimentaux au chapitre 3, avec un bon accord qualitatif dans les deux cas. Pour chacune des configurations étudiées, le calage des paramètres empiriques du modèle permet de plus un accord quantitatif satisfaisant entre les prédictions du modèle et les résultats des expériences ou DNS. Le modèle a néanmoins des limitations à cause par exemple, de la nécessité de fixer des paramètres comme le coefficient de masse ajoutée ou le nombre de Strouhal. Le modèle de VIV basé sur un oscillateur de sillage permet ainsi d'effectuer une étude préliminaire de la récupération d'énergie par VIV de différentes structures flexibles et de comprendre l'impact des différents paramètres sur l'efficacité. Si l'étude préliminaire permet de conclure sur l'intérêt d'un système de récupération d'énergie, il sera évidemment nécessaire de poursuivre l'étude par des calculs DNS et des expériences avant d'envisager la réalisation pratique d'un système industriel de récupération d'énergie par VIV de structures flexibles.

4.2.2 Ecoulements cisaillés

L'extension d'une structure flexible lui permet d'extraire de l'énergie d'un écoulement sur une très large surface et de récupérer ainsi une puissance significative malgré la faible densité énergétique des écoulements considérés. En revanche, l'analyse présentée dans ce manuscrit n'a considéré que des écoulements uniformes, là où un écoulement géophysique réel est cisaillé. Or, on sait que le cisaillement de la vitesse modifie les VIV de la structure, en induisant par exemple une réponse multi-modale ou des ondes progressives de VIV, se propageant des zones de fortes vitesses aux zones de faibles vitesses. L'étude présentée ici a permis d'identifier des systèmes efficaces de récupération d'énergie par VIV de structures flexibles, il apparaît donc nécessaire à ce stade de poursuivre l'étude du comportement et de l'efficacité de ces systèmes soumis à des écoulements plus réalistes.

4.2.3 VIV dans le sens de l'écoulement

Nous nous sommes restreints dans cette thèse aux VIV transverses. Or, si leurs amplitudes sont beaucoup plus faibles que celles des VIV transverses, les VIV dans le sens de l'écoulement ont pour résultat d'amplifier la réponse transverse dans le cas rigide. Une étude de l'effet des VIV dans le sens de l'écoulement sur l'efficacité de la récupération au voisinage des optimas déjà identifiés est nécessaire pour conclure sur la valeur réelle de l'efficacité maximale que l'on peut espérer atteindre.

4.2.4 Technologies de la récupération d'énergie

L'extraction d'énergie est modélisée par un terme de dissipation visqueuse dans ce manuscrit. Un véritable système de récupération d'énergie, comme par exemple un générateur électromagnétique, introduira au minimum une nouvelle raideur. Cela aura pour conséquence d'introduire une troisième fréquence propre : la fréquence propre de la récupération. Cette fréquence propre risque de perturber la dynamique de VIV de la structure flexible par un nouveau phénomène de couplage. Ce couplage peut par exemple amplifier l'extraction d'énergie par un phénomène de résonance (Xia *et al.* 2013). L'analyse de l'influence d'une technologie réelle de récupération d'énergie sur l'efficacité des systèmes considérés est nécessaire pour conclure sur l'intérêt des VIV de structures flexibles pour récupérer de l'énergie, donc sur la viabilité économique d'un tel système.

Annexe A

Résultats expérimentaux

A.1 Traitement des données brutes

Nous détaillons ici le traitement des données expérimentales présentées à la section 3.3. Les figures A.1 (a), (b) et (c) présentent l'ensemble des données expérimentales collectées pour l'efficacité de la récupération d'énergie par VIV de corde suspendue, section 3.3.

L'incertitude des mesures du coefficient d'amortissement R atteint 19 %. Certaines barres d'erreur successives se chevauchent. De manière à préserver la cohérence des résultats, nous regroupons donc les mesures pour lesquelles ces barres d'erreur se chevauchent, figures A.1 (a), (b) et (c). L'efficacité correspondant à chacun des cinq lots est enfin déterminée comme la moyenne des différentes mesures regroupées au sein de ce lot. Les barres d'erreur finales correspondent elles aux minimas et maximas du coefficient d'amortissement R et de l'efficacité η à l'intérieur de chacun des lots. Nous déterminons ainsi les efficacités présentées à la section 3.3. Les mesures d'amplitudes et de fréquence présentées dans la suite sont traitées exactement de la même façon.

A.2 Amplitudes de l'extrémité amortie

La figure A.2 présente l'évolution de l'amplitude du déplacement de l'extrémité amortie avec le coefficient d'amortissement. L'accord entre les résultats expérimentaux et les prédictions du modèle de VIV introduit à la section 3.3.4 est bon. L'accord entre le modèle et les expériences est légèrement meilleur pour les forts amortissements, $\xi >> 1$, car le coefficient A du modèle a été calé pour une condition aux limites fixe à l'extrémité supérieure de la corde, correspondant au cas $\xi \to \infty$, section 3.2.7.

Les résultats expérimentaux et analytiques montrent une décroissance de l'amplitude lorsque l'amortissement adimensionnel ξ augmente. Cette décroissance démarre un peu avant $\xi = 1$ et est régulière, sauf pour $\ell = 15.0$. On observe alors expérimentalement une chute brutale de l'amplitude des VIV pour $\xi = 0.55$, figure A.2 (a). Cette chute s'explique par la faible vitesse de l'écoulement U, pour laquelle l'amplitude des VIV

varie fortement avec U, figure 3.11. Les variations de la vitesse dans le canal dues à l'incertitude sur U expliquent probablement la faible amplitude de VIV mesurée.

La saturation des VIV aux faibles amortissements (Williamson & Govardhan 2004), est en outre plus prononcée et intervient plus tôt dans les prédictions du modèle. Ce phénomère peut provenir des VIV dans le sens de l'écoulement, qui sont négligés dans le modèle et amplifient pourtant les VIV transverses.

A.3 Fréquence des VIV

Les fréquences de vibrations sont très proches de la fréquence de Strouhal, quelle que soit la valeur de ξ, figure A.3. On sait que la fréquence des VIV dépend de la masse ajoutée. L'approximation $C_{M0} = 1$ faite dans le calcul des paramètres d'oscillateur de sillage explique sûrement l'écart entre les fréquences mesurées et les prédictions du modèle.

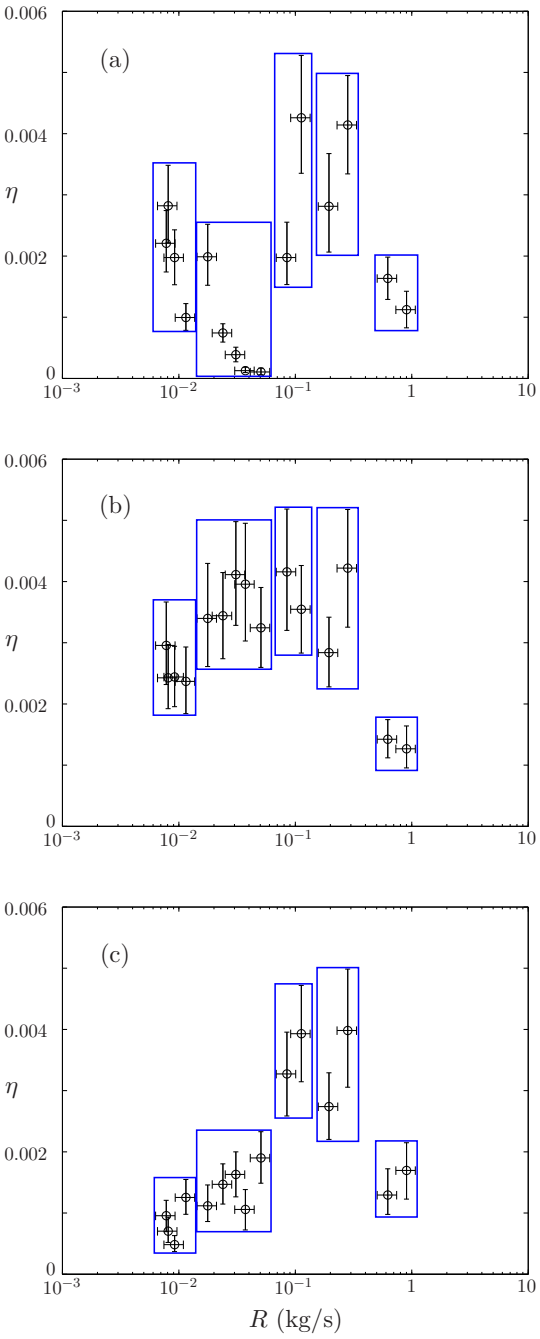


FIGURE A.1 – Efficacité en fonction du coefficient d'amortissement R pour (a) $\ell = 15.0$, (b) $\ell = 34.1$ et (c) $\ell = 50.0$. Sur chacune des figures, les rectangles bleus indiquent les regroupements de données dus aux incertitudes sur le coefficient d'amortissement R.

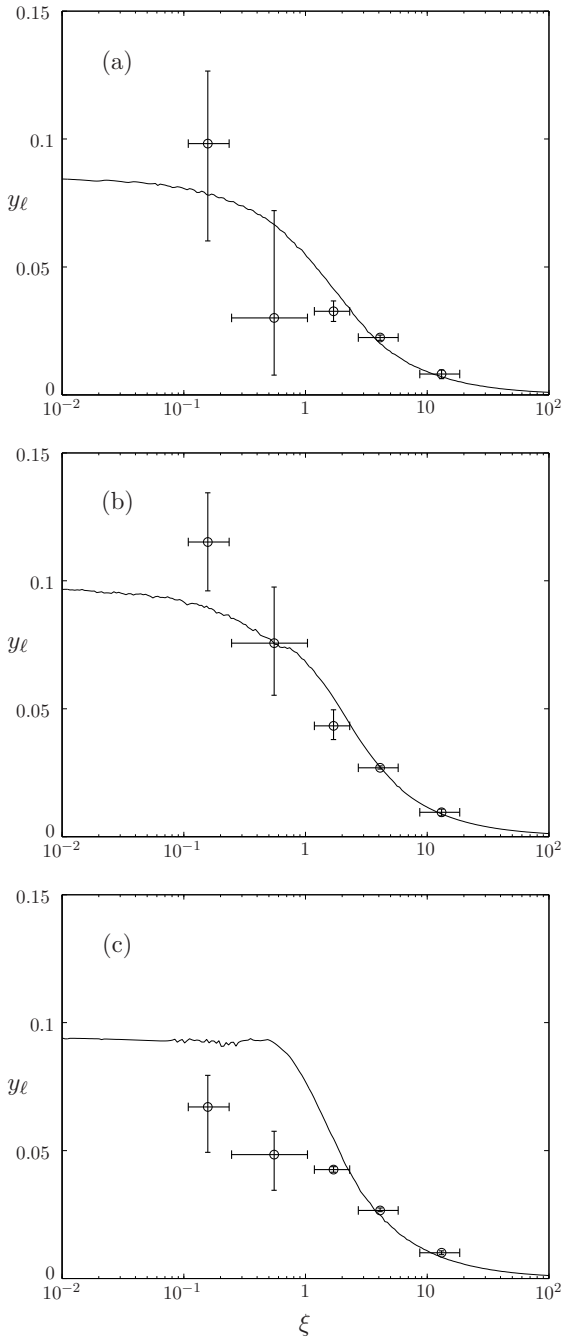


FIGURE A.2 – Amplitude y_ℓ du déplacement de l'extrémité amortie déterminée expérimentalement (symboles) et par le modèle (ligne continue) pour (a) $\ell = 15.0$, (b) $\ell = 34.1$ et (c) $\ell = 50.0$.

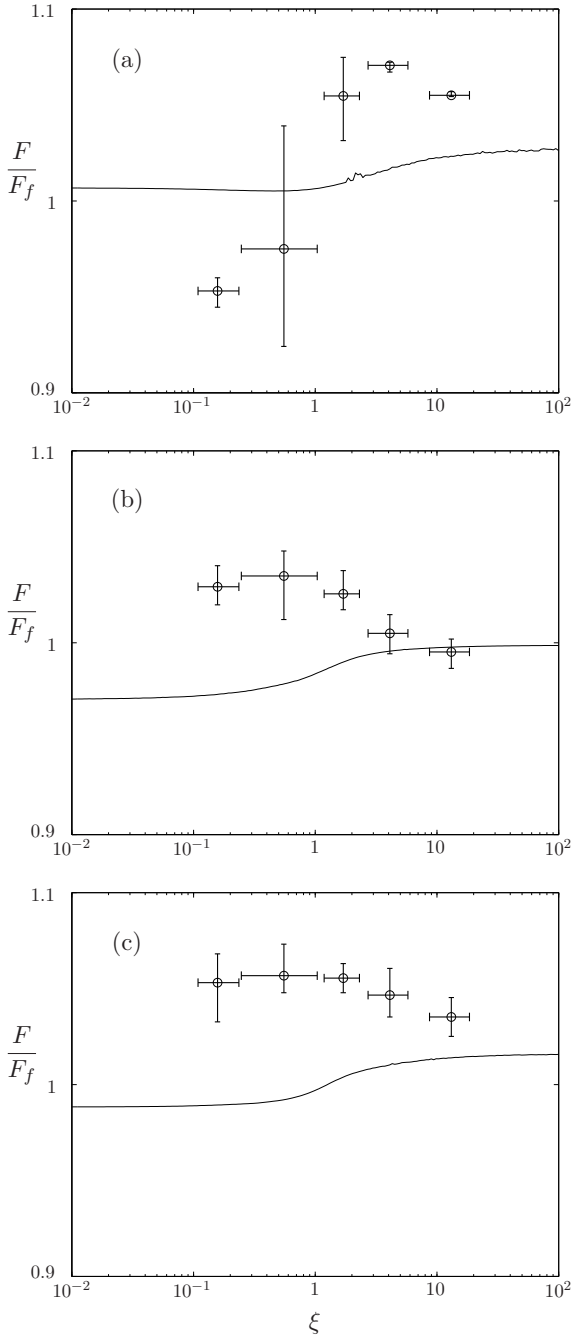


FIGURE A.3 – Fréquence normalisée par la féquence de Strouhal F/F_f, déterminée expérimentalement (symboles) et par le modèle (ligne continue) pour (a) $\ell = 15.0$, (b) $\ell = 34.1$ et (c) $\ell = 50.0$.

Annexe B

Cas d'une poutre : calculs avec rigidité de flexion

Au chapitre 2, nous avons analysé la récupération d'énergie par VIV d'un câble équipé de récupérateurs d'énergie distribués périodiquement. Dans cette annexe, nous étudions l'impact d'une rigidité de flexion sur l'efficacité de la récupération. L'équation de la dynamique de poutre s'écrit

$$m_t \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + \frac{1}{2}\rho D U C_D \frac{\partial Y}{\partial T} - \Theta \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial Z^4} = \frac{1}{4}\rho U^2 D C_{L0} q\left(T\right). \tag{B.1}$$

Des récupérateurs d'énergie sont distribués périodiquement le long de la poutre. L'équilibre des efforts au niveau de ces amortisseurs s'exprime sous la forme

$$-EI \left.\frac{\partial^3 Y}{\partial Z^3}\right|_{Z=0} + EI \left.\frac{\partial^3 Y}{\partial Z^3}\right|_{Z=L} = R\frac{\partial Y}{\partial T}. \tag{B.2}$$

Nous utilisons les mêmes adimensionnements qu'au chapitre 2. On en déduit la forme adimensionnelle du modèle de VIV pour une poutre

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - \frac{1}{4\pi^2}y'' + by'''' = Mq, \tag{B.3a}$$

$$\ddot{q} + \varepsilon\left(q^2 - 1\right)\dot{q} + q = A\ddot{y}, \tag{B.3b}$$

$$-by'''\left(0,t\right) + by'''\left(\ell,t\right) = \xi\ell\dot{y}\left(0,t\right), \tag{B.3c}$$

où la rigidité de flexion adimensionnelle est définie par

$$b = \frac{EI}{16\pi^4}\frac{m_t\omega_f^2}{\Theta^2}. \tag{B.4}$$

Le modèle de VIV est résolu par différences finies, voir annexe C. L'efficacité, équation (2.9), est montrée sur la figure B.1 pour $b = 1$, en fonction des paramètres ℓ et ξ.

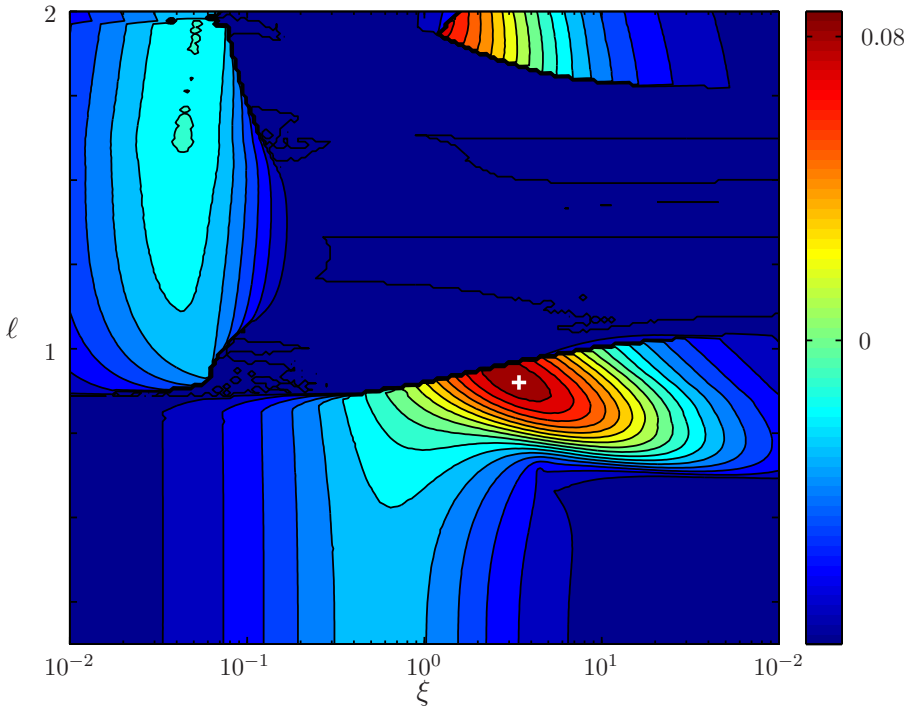


FIGURE B.1 – Efficacité de la récupération d'énergie par VIV de poutre avec récupérateurs périodiquement distribués. Les paramètres d'extraction sont le coefficient d'amortissement ξ et la longueur réduite ℓ. La croix blanche localise la configuration optimale : $\xi_{opt} = 3.41$ et $\ell_{opt} = 0.90$, pour laquelle l'efficacité vaut $\eta_{opt} = 0.17$.

La figure B.1 permet de localiser la configuration de récupération optimale, qui correspond à des valeurs de paramètres de $\xi = 3.41$ et $\ell = 0.90$. L'efficacité maximale atteinte est de $\eta_{opt} = 0.17$. Ces valeurs sont proches des paramètres optimaux identifiés dans le cas du câble, section 2.3.1.

Par ailleurs, la structure de la carte d'efficacité est semblable à celle correspondant au câble tendu, figure 2.4. L'efficacité varie fortement avec les paramètres, notamment la longueur réduite ℓ. On retrouve des régions de haute efficacité confinées aux forts amortissements ξ, qui correspondent aux paramètres d'amortissement pour lesquels les modes à l'accrochage sont des modes impairs, comme au chapitre 2. Nous avons vu au chapitre 2 qu'une analyse de stabilité linéaire permet de prédire correctement les zones d'accrochage des différents modes de câble. La même démarche est alors appliquée au cas de la poutre.

B.1 Analyse linéaire du modèle de VIV de câble

Le modèle linéaire de VIV pour le câble tendu est donné par les équations (2.14a), qui ont été résolues numériquement au chapitre 2. En cherchant des solutions sous la forme $y(z,t) = \mathrm{Re}\left[\varphi(z)\, e^{i\omega t}\right]$, on sait par ailleurs que la déformée modale est donnée par

$$\varphi(z) = \alpha e^{ikz} + \beta e^{-ikz}, \tag{B.5}$$

où le nombre d'onde k est relié à la pulsation ω par la relation

$$k^2 = 4\pi^2 \left[\frac{AM\omega^2}{\omega^2 - 1 + i\epsilon\omega} + \omega^2 - i\frac{\gamma}{\mu}\omega \right]. \tag{B.6}$$

Les constantes α et β sont déterminées par les conditions aux limites de périodicité, $\varphi(0) = \varphi(\ell)$, et d'amortissement, $\varphi'(0) - \varphi'(\ell) = i\ell\xi\omega\varphi(0)$. Ces constantes sont donc solutions du système linéaire

$$\begin{aligned} \alpha\left(1 - e^{ik\ell}\right) + \beta\left(1 - e^{-ik\ell}\right) &= 0, & \text{(B.7a)} \\ \alpha\left(k - ke^{ik\ell} - \ell\xi\omega\right) + \beta\left(-k + ke^{-ik\ell} - \ell\xi\omega\right) &= 0,. & \text{(B.7b)} \end{aligned}$$

B.2 Poutre faiblement rigide

Le modèle linéaire de VIV pour la poutre s'écrit

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - \frac{1}{4\pi^2}y'' + by'''' &= Mq, & \text{(B.8a)} \\ \ddot{q} - \varepsilon\dot{q} + q &= A\ddot{y},, & \text{(B.8b)} \end{aligned}$$

auquel s'ajoute les conditions aux limites de récupération d'énergie et de périodicité sur y et y' et y''.

Nous supposons que la poutre est faiblement rigide, c'est à dire $b << 1$. Comme dans l'article de Triantafyllou & Triantafyllou (1991), nous introduisons une couche limite rigide d'épaisseur 2δ autour des récupérateurs d'énergie, c'est à dire pour $0 \leq z \leq \delta$ et $\ell - \delta \leq z \leq \ell$, figure B.2. Nous définissons alors deux variables intérieures, $x = z/\delta$ et $u = (\ell - z)/\delta$. L'équation de la dynamique de poutre s'écrit en fonction de la variable intérieure x sous la forme

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - \frac{1}{4\pi^2\delta^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{b}{\delta^4}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = Mq, \tag{B.9}$$

d'où l'on déduit l'épaisseur de la couche limite : $\delta = 2\pi\sqrt{b}$.

Nous déterminons la solution extérieure $\varphi(z)$ à partir des équations (B.8a) et (B.8b).

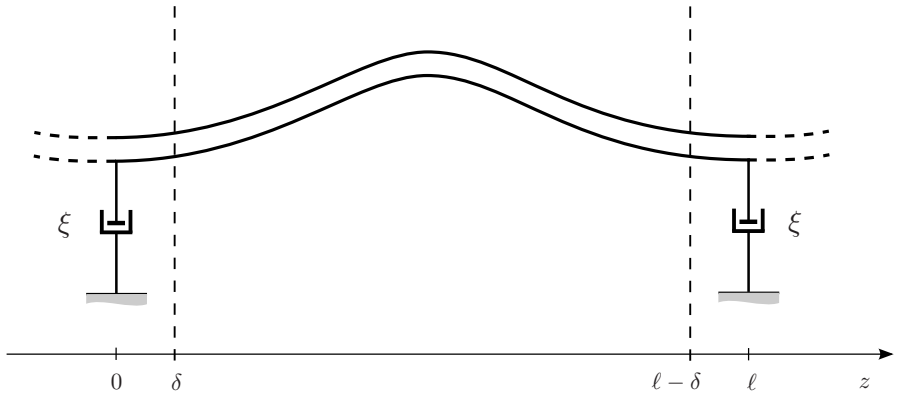


FIGURE B.2 – Schéma d'une poutre faiblement rigide en VIV transverse. La couche limite rigide d'épaisseur 2δ est visible pour $0 \leq z \leq \delta$ et $\ell - \delta \leq z \leq \ell$.

Elle satisfait l'équation

$$-\delta^2 \varphi'''' + \varphi'' + k^2 \varphi = 0, \tag{B.10}$$

où le nombre d'onde k est identique au cas du câble tendu évoqué à la section précédente, équation (B.6). La solution à l'ordre 1 est donnée par

$$\varphi(z) = (\alpha_0 + \delta\alpha_1)\, e^{ikz} + (\beta_0 + \delta\beta_1)\, e^{-ikz}, \tag{B.11}$$

où les constantes α_0, α_1, β_0 et β_1 sont déterminées à l'aide des raccordements avec les solutions intérieures.

Nous déterminons maintenant la solution intérieure $\overline{y}$ pour la couche limite entre $z = 0$ et $z = \delta$. Le modèle linéaire s'écrit

$$\ddot{\overline{y}} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{\overline{y}} - \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial x^2} + \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^4 \overline{y}}{\partial x^4} = Mq, \tag{B.12a}$$

$$\ddot{q} - \varepsilon\dot{q} + q = A\ddot{\overline{y}}, \tag{B.12b}$$

En cherchant des solutions sous la forme $\overline{y}(x,t) = \mathrm{Re}\left[\varphi_g(x)\, e^{i\omega t}\right]$, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial^4 \varphi_g}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 \varphi_g}{\partial x^2} - \delta^2 k^2 \varphi_g = 0. \tag{B.13}$$

qui donne au premier ordre

$$\varphi_g = \left(a_0 + b_0 x + c_0 e^x + d_0 e^{-x}\right) + \delta\left(a_1 + b_1 x + c_1 e^x + d_1 e^{-x}\right). \tag{B.14}$$

Nous obtenons aussi une solution intérieure pour la couche limite située entre $\ell - \delta$ et ℓ,

$$\varphi_d = \left(m_0 + n_0 u + p_0 e^u + q_0 e^{-u}\right) + \delta\left(m_1 + n_1 u + p_1 e^u + q_1 e^{-u}\right). \tag{B.15}$$

Nous déduisons finalement des relations entre les différentes constantes des solutions intérieures φ_g et φ_d à partir des conditions aux limites de périodicité et d'amortissement,

$$\begin{aligned}
a_0 + c_0 + d_0 &= m_0 + p_0 + q_0, && \text{(B.16a)}\\
a_1 + c_1 + d_1 &= m_1 + p_1 + q_1, && \text{(B.16b)}\\
b_0 + c_0 - d_0 &= -n_0 - p_0 + q_0, && \text{(B.16c)}\\
b_1 + c_1 - d_1 &= -n_1 - p_1 + q_1, && \text{(B.16d)}\\
c_0 - d_0 &= -p_0 + q_0, && \text{(B.16e)}\\
c_0 + d_0 &= p_0 + q_0, && \text{(B.16f)}\\
c_1 + d_1 &= p_1 + q_1, && \text{(B.16g)}\\
i\ell\xi\omega\left(a_0 + c_0 + d_0\right) &= -p_1 + q_1 - c_1 + d_1. && \text{(B.16h)}
\end{aligned}$$

Enfin, la condition de raccordement en $z = 0$ donne les relations entre les coefficients de la solution extérieure φ et la solution intérieure φ_g,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \alpha_0 + \beta_0, && \text{(B.17a)}\\
a_1 &= \alpha_1 + \beta_1, && \text{(B.17b)}\\
b_1 &= ik\left(\alpha_0 - \beta_0\right), && \text{(B.17c)}\\
b_0 &= c_0 = c_1 = 0,, && \text{(B.17d)}
\end{aligned}$$

tandis que le raccordement en $z = \ell$ donne

$$\begin{aligned}
m_0 &= \alpha_0 e^{ik\ell} + \beta_0 e^{-ik\ell}, && \text{(B.18a)}\\
m_1 &= \alpha_1 e^{ik\ell} + \beta_1 e^{-ik\ell}, && \text{(B.18b)}\\
n_1 &= -ik\left(\alpha_0 e^{ik\ell} - \beta_0 e^{-ik\ell}\right), && \text{(B.18c)}\\
n_0 &= p_0 = p_1 = 0, && \text{(B.18d)}
\end{aligned}$$

On déduit des équations (B.16a)-(B.18d) que $a_0 = m_0$ et que $i\ell\xi\omega a_0 = b_1 + n_1$, d'où l'on extrait les deux conditions suivantes sur les coefficients de la solution extérieure,

$$\begin{aligned}
\alpha_0\left(1 - e^{ik\ell}\right) + \beta_0\left(1 - e^{-ik\ell}\right) &= 0, && \text{(B.19a)}\\
\alpha_0\left(k - ke^{ik\ell} - \ell\xi\omega\right) + \beta_0\left(-k + ke^{-ik\ell} - \ell\xi\omega\right) &= 0,. && \text{(B.19b)}
\end{aligned}$$

On retrouve les conditions aux limites du câble tendu, équations (B.7a) et (B.7b). La

solution extérieure d'ordre zéro est donc identique à la déformée modale de câble tendu. Ce calcul prouve l'équivalence en termes de sélection de modes des VIV d'une poutre faiblement rigide et ceux d'un câble tendu. Or, le mode de vibrations est un facteur clé de la récupération d'énergie par VIV d'une structure flexible périodique. En conclusion, nous avons vu qu'une poutre est équivalente à un câble aux faibles rigidité de flexion, $b << 1$, et que même aux plus grandes rigidité de flexion, $b = 1$, le comportement d'une poutre est proche de celui d'un câble, figure B.1. Il est donc attendu que les principaux résultats de l'étude présentée au chapitre 2 puissent être transposés au cas d'une poutre, en particulier la grande efficacité des modes impairs de vibrations.

Annexe C

Différences finies

Les schémas de résolution numérique par différences finies sont détaillés ici pour chacune des configurations étudiées. Le temps est discrétisé en instants t^n. Le pas de temps est noté $t^{n+1} - t^n = h$. Lorsque la structure est flexible, le domaine spatial $0 \leq z \leq \ell$ est aussi discrétisé en différents points z_i, le pas d'espace vaut alors $z_{i+1} - z_i = d$.

Dans le cas du cylindre rigide, la position du cylindre et le coefficient de portance fluctuante à l'instant t^n sont notés y^n et q^n. Lorsque la structure est flexible, le déplacement de la structure et la portance fluctuante à l'instant t^n et à l'ordonnées z_i sont notés y_i^n et q_i^n.

C.1 Principes

Nous supposons connus y et q sur l'ensemble du domaine à l'instant t^n et aux instants antérieurs. Aucune dérivée temporelle de q n'intervient dans le terme de forçage qu'exerce le sillage fluctuant sur le solide en VIV, équation (1.8). La relation de différences finies permettant de déterminer le déplacement de la structure à l'instant t^{n+1} ne fait donc intervenir que q_i^n. Nous calculons par conséquent le déplacement de la structure y_i^{n+1} en fonction des déplacements aux instants précédents et de q_i^n. Le déplacement y_i^{n+1} est ensuite utilisé pour déterminer q_i^{n+1} à l'aide de la relation de différences finies déduite de l'oscillateur de sillage, et ainsi de suite.

De manière formelle, nous notons $Y^n = {}^t[y_1^n \cdots y_L^n]$ et $Q^n = {}^t[q_1^n \cdots q_L^n]$ les vecteurs regroupant la position des différents noeuds de la structure discrétisée et la valeur de la portance fluctuante qui s'y exerce, L étant le nombre de points de la discrétisation. La relation de différences finies déduite de l'équation solide s'écrit de manière formelle

$$\mathbf{D}Y^{n+1} = \mathbf{M}Y^n + \mathbf{N}Y^{n-1} + \mathbf{O}Q^n, \tag{C.1}$$

tandis que la relation fluide s'écrit

$$\mathbf{P}Q^{n+1} = \mathbf{R}Q^n + \mathbf{S}Q^{n-1} + \mathbf{T}Y^{n+1} + \mathbf{U}Y^n + \mathbf{V}Y^{n-1}. \tag{C.2}$$

A chaque pas de temps, nous résolvons donc le problème linéaire (C.1) pour obtenir

Y^{n+1}. Nous déterminons enfin Q^{n+1} grâce à la résolution du système (C.2). Dans le cas du cylindre rigide, $L = 1$ et les matrices se réduisent à des scalaires.

C.2 Oscillateur de sillage

L'équation d'oscillateur de sillage est identique pour toutes les structures en VIV. Elle s'écrit

$$\ddot{q} + \varepsilon \left(q^2 - 1\right) \dot{q} + q = A\ddot{y}. \tag{C.3}$$

Les dérivées en temps sont estimées par des différences finies centrées,

$$\ddot{q} = \frac{q^{n+1} - 2q^n + q^{n-1}}{h^2}, \tag{C.4a}$$

$$\dot{q} = \frac{q^{n+1} - q^{n-1}}{2h}, \tag{C.4b}$$

$$\ddot{y} = \frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{h^2}. \tag{C.4c}$$

La relation de différences finies fluide s'exprime par conséquent

$$\begin{aligned} q^{n+1} &= \frac{4 - 2h^2}{\varepsilon h \left(q^{n^2} - 1\right) + 2} q^n + \frac{\varepsilon h \left(q^{n^2} - 1\right) - 2}{\varepsilon h \left(q^{n^2} - 1\right) + 2} q^{n-1} \\ &+ \frac{2A}{\varepsilon h \left(q^{n^2} - 1\right) + 2} y^{n+1} - \frac{4A}{\varepsilon h \left(q^{n^2} - 1\right) + 2} y^n \\ &+ \frac{2A}{\varepsilon h \left(q^{n^2} - 1\right) + 2} y^{n-1}. \end{aligned} \tag{C.5}$$

L'expression au dénominateur $\varepsilon h \left(q^{n^2} - 1\right) + 2$ est strictement positive si $h < 2/\varepsilon$, ce qui est toujours vrai aux vues des pas de temps utilisés. Cette relation permet de déterminer la valeur de la portance fluctuante à l'instant t^{n+1}, y^{n+1} étant déjà connu, section C.1.

C.3 Cylindre rigide

L'équation de la dynamique du cylindre rigide s'écrit

$$\ddot{y} + \left(\xi + \frac{\gamma}{\mu}\right) \dot{y} + \delta^2 y = Mq. \tag{C.6}$$

Les dérivées en temps sont approximées par des différences finies centrées. Le terme d'accélération est estimé par l'équation (C.4c), tandis que la vitesse s'exprime sous la forme

$$\dot{y} = \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2h}. \tag{C.7}$$

On note le coefficient d'amortissement total $\alpha = \xi + \gamma/\mu$. La relation de différences finies solide s'écrit

$$y^{n+1} = \frac{4 - 2h^2\delta^2}{\alpha h + 2} y^n + \frac{\alpha h - 2}{\alpha h + 2} y^{n-1} + \frac{2Mh^2}{\alpha h + 2} q^n. \tag{C.8}$$

Les relations (C.5) et (C.8) permettent de résoudre le modèle de VIV et de déterminer la dynamique d'un cylindre rigide en VIV.

C.4 Câble périodique

Pour résoudre le modèle de VIV pour un câble tendu et équipé de récupérateurs d'énergie distribués périodiquement, nous utilisons l'équation (C.5) pour déterminer l'évolution de la portance fluctuante au niveau de chacun des z_i. L'équation de la dynamique de câble s'écrit

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - \frac{1}{4\pi^2} y'' = Mq. \tag{C.9}$$

A l'ordonnée z_i et à l'instant t^n, les dérivées temporelles sont approchées par des différences finies centrées, équations (C.4c) et (C.7). La dérivée seconde en espace est estimée par un schéma de Crank-Nicolson centré

$$y'' = \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1} + y_{i+1}^{n-1} - 2y_i^{n-1} + y_{i-1}^{n-1}}{2d^2}. \tag{C.10}$$

Pour les points intérieurs, la relation de différences finies pour la dynamique du câble tendu s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{h^2}{8\pi^2 d^2}\right) y_{i+1}^{n+1} \quad &+ \quad \left(1 + \frac{\gamma h}{2} + \frac{h^2}{4\pi^2 d^2}\right) y_i^{n+1} + \left(-\frac{h^2}{8\pi^2 d^2}\right) y_{i-1}^{n+1} = \\
2y_i^n \quad &+ \quad \left(\frac{h^2}{8\pi^2 d^2}\right) y_{i+1}^{n-1} + \left(-1 + \frac{\gamma h}{2} - \frac{h^2}{4\pi^2 d^2}\right) y_i^{n-1} \\
&+ \quad \left(\frac{h^2}{8\pi^2 d^2}\right) y_{i-1}^{n-1} + Mh^2 q_i^n.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Il faut maintenant traduire les conditions aux limites de périodicité : $y(0,t) = y(\ell,t)$, et d'amortissement : $y'(0,t) - y'(\ell,t) = 4\pi^2 \xi \ell \dot{y}(0,t)$. La condition aux limites de périodicité s'exprime simplement sous la forme

$$y_1^{n+1} - y_L^{n+1} = 0. \tag{C.12}$$

Les dérivées spatiales de la condition aux limites d'amortissement sont déterminées par des schémas de Crank-Nicolson amont et aval,

$$y'_1 = \frac{-3y_1^{n+1} + 4y_2^{n+1} - y_3^{n+1} - 3y_1^{n-1} + 4y_2^{n-1} - y_3^{n-1}}{4d}, \tag{C.13a}$$

$$y'_L = \frac{3y_L^{n+1} - 4y_{L-1}^{n+1} + y_{L-2}^{n+1} + 3y_L^{n-1} - 4y_{L-1}^{n-1} + y_{L-2}^{n-1}}{4d}. \tag{C.13b}$$

En utilisant la périodicité $y_1^n = y_L^n$, nous déduisons finalement la relation

$$\begin{aligned}\left(-6 - \frac{8\pi^2 d\xi\ell}{h}\right) y_1^{n+1} &+ 4y_2^{n+1} - y_3^{n+1} + 4y_{L-1}^{n+1} - y_{L-2}^{n+1} = \\ \left(6 - \frac{8\pi^2 d\xi\ell}{h}\right) y_1^{n-1} &- 4y_2^{n-1} + y_3^{n-1} - 4y_{L-1}^{n-1} + y_{L-2}^{n-1}.\end{aligned} \tag{C.14}$$

C.5 Poutre périodique

L'équation qui régit la dynamique de la poutre s'écrit

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - \frac{1}{4\pi^2}y'' + by'''' = Mq. \tag{C.15}$$

Cette équation est résolue par différences finies, de la même manière que pour le câble périodique, section C.4. En particulier, les dérivées en temps aux points intérieurs sont estimées par des schémas centrés, les dérivées en espace par des schémas de Crank-Nicolson centrés en espace. Pour un point z_i intérieur

$$\begin{aligned}y'''' &= \frac{1}{2d^4}\left[y_{i+2}^{n+1} - 4y_{i+1}^{n+1} + 6y_i^{n+1} - 4y_{i-1}^{n+1} + y_{i-2}^{n+1}\right. \\ &+ \left. y_{i+2}^{n-1} - 4y_{i+1}^{n-1} + 6y_i^{n-1} - 4y_{i-1}^{n-1} + y_{i-2}^{n-1}\right].\end{aligned} \tag{C.16}$$

On a donc la relation de différences finies

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{b}{2d^4}\right) y_{i+2}^{n+1} + \left(-\frac{1}{8\pi^2 d^2} - \frac{2b}{d^4}\right) y_{i+1}^{n+1} + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\gamma}{2\mu h} + \frac{1}{4\pi^2 d^2} + \frac{3b}{d^4}\right) y_i^{n+1} \\
&+ \left(-\frac{1}{8\pi^2 d^2} - \frac{2b}{d^4}\right) y_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{b}{2d^4}\right) y_{i+2}^{n+1} \\
&= \left(\frac{2}{h^2}\right) y_i^n + M q_i^n \\
&+ \left(-\frac{b}{2d^4}\right) y_{i+2}^{n-1} + \left(\frac{1}{8\pi^2 d^2}\frac{2b}{d^4}\right) y_{i+1}^{n-1} + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{\gamma}{2\mu h} - \frac{1}{4\pi^2 d^2} - \frac{3b}{d^4}\right) y_i^{n+1} \\
&+ \left(\frac{1}{8\pi^2 d^2} + \frac{2b}{d^4}\right) y_{i-1}^{n-1} + \left(-\frac{b}{2d^4}\right) y_{i+2}^{n-1}.
\end{aligned} \tag{C.17}
$$

Les conditions aux limites doivent maintenant être prises en compte. La périodicité du déplacement se traduit par l'équation (C.12) comme dans le cas du câble. En estimant y_1' et y_L', comme aux équations (C.13a) et (C.13b), la périodicité de y' donne

$$
-3y_1^{n+1} + 4y_2^{n+1} - y_3^{n+1} - 3y_L^{n+1} + 4y_{L-1}^{n+1} - y_{L-2}^{n+1} = 0. \tag{C.18}
$$

De la même manière, la périodicité de y'' se traduit par

$$
2y_1^{n+1} - 5y_2^{n+1} + 4y_3^{n+1} - y_4^{n+1} - 2y_L^{n+1} + 5y_{L-1}^{n+1} - 4y_{L-2}^{n+1} + y_{L-3}^{n+1}. \tag{C.19}
$$

Enfin, la condition aux limites de récupération d'énergie, équation (B.3c), s'exprime sous la forme

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{5b}{4d^3}\right) y_1^{n+1} + \left(\frac{9b}{2d^3}\right) y_2^{n+1} + \left(-\frac{6b}{d^3}\right) y_3^{n+1} \\
&+ \left(\frac{7b}{2d^3}\right) y_4^{n+1} + \left(-\frac{3b}{4d^3}\right) y_5^{n+1} \\
&+ \left(\frac{\xi\ell}{2h} - \frac{5b}{4d^3}\right) y_L^{n+1} + \left(\frac{9b}{2d^3}\right) y_{L-1}^{n+1} + \left(-\frac{6b}{d^3}\right) y_{L-2}^{n+1} \\
&+ \left(\frac{7b}{2d^3}\right) y_{L-3}^{n+1} + \left(-\frac{3b}{4d^3}\right) y_{L-4}^{n+1} \\
&= \left(\frac{5b}{4d^3}\right) y_1^{n-1} + \left(-\frac{9b}{2d^3}\right) y_2^{n-1} + \left(\frac{6b}{d^3}\right) y_3^{n-1} \\
&+ \left(-\frac{7b}{2d^3}\right) y_4^{n-1} + \left(\frac{3b}{4d^3}\right) y_5^{n-1} \\
&+ \left(\frac{\xi\ell}{2h} + \frac{5b}{4d^3}\right) y_L^{n-1} + \left(-\frac{9b}{2d^3}\right) y_{L-1}^{n-1} + \left(\frac{6b}{d^3}\right) y_{L-2}^{n-1} \\
&+ \left(-\frac{7b}{2d^3}\right) y_{L-3}^{n-1} + \left(\frac{3b}{4d^3}\right) y_{L-4}^{n-1}.
\end{aligned} \tag{C.20}
$$

C.6 Corde suspendue

Pour la corde suspendue, l'équation de la dynamique du solide s'écrit

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - (zy')' = Mq. \tag{C.21}$$

C.6.1 Changement de variables

La déformée modale du câble est proche d'une fonction de Bessel du type $J_0\left(2k\sqrt{z}\right)$, chapitre 3, avec $k \approx 1$. Le déplacement de la structure varie fortement et est de grande amplitude près de l'extrémité libre. Un grand nombre de points z_i est nécessaire pour rendre compte précisément du déplacement du bas de la corde. Le pas d'espace d doit donc être très petit aux alentours de l'extrémité libre. Néanmoins, un pas d'espace trop petit entraînerait de longs temps de calcul, d'autant plus qu'une discrétisation beaucoup plus grossière est suffisante pour résoudre correctement les déplacements du haut de la corde. Nous choisissons donc d'utiliser une discrétisation à pas d'espace variable. Pour cela, nous effectuons le changement de variable

$$u = 2k_0\sqrt{z}, \tag{C.22}$$

où k_0 est la partie réelle du nombre d'onde k déterminé par l'approche linéaire, section 3.4.3. En résolvant le nouveau système avec une discrétisation à pas constant d_u pour la variable u, nous obtenons un pas variable pour la discrétisation en z, d variant comme $\sqrt{z}$. Ceci permet une résolution fine du bas de la corde sans avoir à considérer trop de points z_i. L'équation de la dynamique de corde s'exprime alors sous la forme

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - \frac{k_0^2}{u}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial y}{\partial u}\right) = Mq, \tag{C.23}$$

Par ailleurs, les conditions aux limites du système doivent aussi être exprimées en fonction de cette nouvelle variable d'espace u. L'extrémité libre est traitée comme à la section 3.2.7, ce qui s'écrit maintenant

$$\ddot{y} = \sigma\frac{2k_0^2}{u}\frac{\partial y}{\partial u}, \tag{C.24}$$

où u est très petit. Le terme de droite de l'équation est estimé grâce à la relation (C.23), vraie pour les u très petits. On obtient alors une condition aux limites pour l'extrémité inférieure de la corde suspendue

$$(2\sigma - 1)\,\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - k_0^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - Mq = 0. \tag{C.25}$$

La condition aux limites d'amortissement s'exprime en fonction de u sous la forme

$$-k_0\frac{\partial y}{\partial u} = \xi\dot{y}. \tag{C.26}$$

C.6.2 Différences finies

Les équations (C.23), (C.25) et (C.26) sont résolues par différences finies. Le pas d'espace d_u est constant. Les indices j correspondent aux différents points u_j de la discrétisation spatiale. Les dérivées spatiales par rapport à u sont approchées de la même manière qu'à la section précédente, par des schémas de Crank-Nicolson. Les dérivées temporelles sont toujours déterminées par des schémas centrés.
Il vient finalement pour les noeuds intérieurs,

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{k_0^2}{2d_u^2}-\frac{k_0^2}{4d_u u_j}\right)\; y_{j+1}^{n+1} \;&+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{\gamma}{2\mu h}+\frac{k_0^2}{d_u^2}\right) y_j^{n+1}\\
+\left(-\frac{k_0^2}{2d_u^2}+\frac{k_0^2}{4d_u u_j}\right)\; y_{j-1}^{n+1} \;&= \\
\left(\frac{2}{h^2}\right) y_j^n + M q_j^n \;&- \left(-\frac{k_0^2}{2d_u^2}-\frac{k_0^2}{4d_u u_j}\right) y_{j+1}^{n-1}\\
-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{\gamma}{2\mu h}+\frac{k_0^2}{d_u^2}\right)\; y_j^{n-1} \;&-\left(-\frac{k_0^2}{2d_u^2}+\frac{k_0^2}{4d_u u_j}\right) y_{j-1}^{n-1}.
\end{aligned} \tag{C.27}$$

La condition aux limites à l'extrémité inférieure de la corde se traduit par la relation

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2\sigma-1}{h^2}+\frac{\gamma}{2\mu h}+\frac{3k_0^2}{4d_u^2}\right) y_1^{n+1} \;&- \left(\frac{k_0^2}{d_u^2}\right) y_2^{n+1} + \left(\frac{k_0^2}{4d_u^2}\right) y_3^{n+1} = \\
\left(\frac{4\sigma-2}{h^2}\right) y_1^n + M q_1^n \;&- \left(\frac{2\sigma-1}{h^2}-\frac{\gamma}{2\mu h}+\frac{3k_0^2}{4d_u^2}\right) y_1^{n-1}\\
+\left(\frac{k_0^2}{d_u^2}\right) y_2^{n-1} \;&- \left(\frac{k_0^2}{4d_u^2}\right) y_3^{n-1},
\end{aligned} \tag{C.28}$$

où les dérivées spatiales sont déterminées comme à l'équation (C.13a). En utilisant l'équation (C.13b) pour estimer la dérivée spatiale à l'extrémité supérieure de la corde suspendue, on aboutit enfin à la condition aux limites amorties pour l'extrémité supérieure de la corde,

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{3k_0}{4d_u}-\frac{\xi}{2h}\right) y_L^{n+1} \;&+ \left(\frac{k_0}{d_u}\right) y_{L-1}^{n+1} - \left(\frac{k_0}{4d_u}\right) y_{L-2}^{n+1} = \\
-\left(-\frac{3k_0}{4d_u}+\frac{\xi}{2h}\right) y_L^{n-1} \;&- \left(\frac{k_0}{d_u}\right) y_{L-1}^{n-1} + \left(\frac{k_0}{4d_u}\right) y_{L-2}^{n-1}.
\end{aligned} \tag{C.29}$$

Les L équations (C.27), (C.28) et (C.29) permettent finalement de déterminer la dynamique de VIV de la corde suspendue comme décrit à la section C.1.

Annexe D

Publications

On the efficiency of energy harvesting using vortex-induced vibrations of cables
C. Grouthier, S. Michelin, R. Bourguet, Y. Modarres-Sadeghi, E. de Langre
soumis à Journal of Fluids and Structures, 2013.

Self-similar vortex-induced vibrations of a hanging string
C. Grouthier, S. Michelin, Y. Modarres-Sadeghi, E. de Langre
Journal of Fluid Mechanics (2013), 724, R2.

Optimal energy harvesting by vortex-induced vibrations in cables
C. Grouthier, S. Michelin, E. de Langre
Proceedings of the 10th International Conference on Flow-Induced Vibration (& Flow-Induced Noise), FIV 2012, Dublin, Ireland.

Energy harvesting by vortex-induced vibrations in slender structures
C. Grouthier, S. Michelin, E. de Langre
Proceedings of the 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, OMAE 2013, Nantes, France.

Bibliographie

Abramowitz, M. & Stegun, I.A. 1972 *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 55.

Alexander, C.M. 1981 The complex vibrations and implied drag of a long oceanographic wire in cross-flow. *Ocean Engineering* **8**, 379–406.

Allen, J.J. & Smits, A.J. 2001 Energy harvesting eel. *Journal of Fluids and Structures* **15**, 629–640.

Baarholm, G.S., Larsen, C.M. & Lie, H. 2006 On fatigue damage accumulation from in-line and cross-flow vortex-induced vibrations on risers. *Journal of Fluids and Structures* **22**, 109–127.

Babarit, A. & Clément, A. H. 2006 Optimal latching control of a wave energy device in regular and irregular waves. *Applied Ocean Research* **28**, 77–91.

Bahaj, A.S. 2013 Marine current energy conversion : the dawn of a new era in electricity production. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* **371**, 20120500.

Barrero-Gil, A., Alonso, G. & Sanz-Andres, A. 2010 Energy harvesting from transverse galloping. *Journal of Sound and Vibration* **329**, 2873–2883.

Barrero-Gil, A., Pindado, S. & Avila, S. 2012 Extracting energy from vortex-induced vibrations : a parametric study. *Applied mathematical modelling* **36**, 3153–3160.

Batten, W.M.J., Harrison, M.E. & Bahaj, A.S. 2013 Accuracy of the actuator disc-RANS approach for predicting the performance and wake of tidal turbines. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* **371**, 20120293.

Bernitsas, M. M., Raghavan, K., Ben-Simon, Y. & Garcia, E. M. H. 2008 VIVACE (Vortex-Induced Vibration Aquatic Clean Energy) : A new concept in generation of clean and renewable energy from fluid flow. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering* **130** (041101), 1–15.

Blevins, R.D. 1990 *Flow-induced vibration - Second edition*. Van Nostrand Reinhold, New York.

Boragno, C., Festa, R. & Mazzino, A. 2012 Elastically bounded flapping wing for energy harvesting. *Applied Physics Letters* **100**, 253906.

Bourguet, R. 2013 *Communication personnelle* .

Bourguet, R., Karniadakis, G. E. & Triantafyllou, M. S. 2011*a* Vortex-induced vibrations of a long flexible cylinder in shear flow. *Journal of Fluid Mechanics* **677**, 342–382.

Bourguet, R., Modarres-Sadeghi, Y., Karniadakis, G. E. & Triantafyllou, M. S. 2011*b* Wake-body resonance of long flexible structures is dominated by counterclockwise orbits. *Physical Review Letters* **107**, 134502.

Chaplin, J.R., Bearman, P.W., Huera-Huarte, F.J. & Pattenden, R.J. 2005 Laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a vertical tension riser in a stepped current. *Journal of Fluids and Structures* **21**, 3–24.

Clément, A., McCullen, P., ao, A. Falc Fiorentino, A., Gardner, F., Hammarlund, K., Lemonis, G., Lewis, T., Nielsen, K., Petroncini, S., Pontes, M.T., Schild, P., Sjöström, B.O., Sorensen, H.C. & Thorpe, T. 2002 Wave energy in europe : current status and perspectives. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* **6**, 405–431.

Davies, P., Germain, G., Gaurier, B., Boisseau, A. & Perreux, D. 2013 Evaluation of the durability of composite tidal turbine blades. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* **371**, 20120187.

Doaré, O. & Michelin, S. 2011 Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates : linear stability analysis and conversion efficiency. *Journal of Fluids and Structures* **27**, 1357–1375.

Dunnmon, J.A., Stanton, S.C., Mann, B.P. & Dowell, E.H. 2011 Power extraction from aeroelastic limit cycle oscillations. *Journal of Fluids and Structures* **27**, 1182–1198.

Facchinetti, M. L., de Langre, E. & Biolley, F. 2004*a* Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures* **19**, 123–140.

Facchinetti, M. L., de Langre, E. & Biolley, F. 2004*b* Vortex-induced travelling waves along a cable. *European Journal of Mechanics B/Fluids* **23**, 199–208.

Fey, U., König, M. & Eckelmann, H. 1998 A new Strouhal-Reynolds-number relationship for the circular cylinder in the range $47 < Re < 2 * 10^5$. *Physics of Fluids* **10(7)**, 1547–1549.

Gabbai, R.D. & Benaroya, H. 2005 An overview of modelling and experiments of vortex-induced vibration of circular cylinders. *Journal of Sound and Vibration* **282**, 575–616.

Grouthier, C., Michelin, S., Modarres-Sadeghi, Y. & de Langre, E. 2013 Self-similar vortex-induced vibrations of a hanging string. *Journal of Fluid Mechanics* **724**, R2.

Hartlen, R.T. & Currie, I.G. 1970 Lift-oscillator model for vortex-induced vibration. *Proceedings of American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division* **96**, 577–591.

Hobbs, W.B. & Hu, D.L. 2012 Tree-inspired piezoelectric energy harvesting. *Journal of Fluids and Structures* **28**, 103–114.

Huera-Huarte, F.J. & Bearman, P.W. 2009 Wake structures and vortex-induced vibrations of a long flexible cylinder-part 1 : Dynamic response. *Journal of Fluids and Structures* **25**, 979–990.

Iwan, W.D. & Blevins, R.D. 1974 A model for vortex-induced oscillation of structures. *Journal of Applied Mechanics* **41**, 581–586.

Khalak, A. & Williamson, C.H.K. 1997 Fluid forces and dynamics of a hydroelastic structure with very low mass and damping. *Journal of Fluids and Structures* **11**, 973–982.

Khalak, A. & Williamson, C.H.K. 1999 Motions, forces and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping. *Journal of Fluids and Structures* **13**, 813–851.

King, R. 1995 An investigation of vortex-induced vibrations of sub-sea communications cables. In *Proceedings of the 6th International conference on Flow-Induced Vibration, London, UK : P.W. Bearman (ed)*, pp. 443–454.

de Langre, E. 2006 Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter. *Journal of Fluids and Structures* **22**, 783–791.

Li, S., Yuan, J. & Lipson, H. 2011 Ambient wind energy harvesting using cross-flow fluttering. *Journal of Applied Physics* **109**, 026104.

Lucor, D., Mukundan, H. & Triantafyllou, M.S. 2006 Riser modal identification in CFD and full-scale experiments. *Journal of Fluids and Structures* **22**, 905–917.

Marcollo, H., Eassom, A., Fontaine, E., Tognarelli, M., Beynet, P., Constantinides, Y. & Jr, O.H. Oakley 2011 Traveling wave response in full-scale drilling rising VIV measurements. In *Proceedings of the ASME 30th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Rotterdam, The Netherlands*, pp. OMAE2011–49821.

Mathelin, L. & de Langre, E. 2005 Vortex-induced vibrations and waves under shear flow with a wake oscillator model. *European Journal of Mechanics B/Fluids* **24**, 478–490.

Mehmood, A., Abdelkefi, A., Hajj, M.R., Nayfeh, A.H., Akhtar, I. & Nuhait, A.O. 2013 Piezoelectric energy harvesting from vortex-induced vibrations of circular cylinder. *Journal of Sound and Vibration* **332**, 4656–4667.

Meliga, P., Chomaz, J.-M. & Gallaire, F. 2011 Extracting energy from a flow : An asymptotic approach using vortex-induced vibrations and feedback control. *Journal of Fluids and Structures* **27**, 861–874.

Michelin, S. & Doaré, O. 2013 Energy harvesting efficiency of piezoelectric flags in axial flows. *Journal of Fluid Mechanics* **714**, 489–504.

Modarres-Sadeghi, Y., Chasparis, F., Triantafyllou, M.S., Tognarelli, M. & Beynet, P. 2011 Chaotic response is a generic feature of vortex-induced vibrations of flexible risers. *Journal of Sound and Vibration* **330**, 2565–2579.

Modarres-Sadeghi, Y., Mukundan, H., Dahl, J.M., Hover, F.S. & Triantafyllou, M.S. 2010 The effect of higher harmonic forces on fatigue life of marine risers. *Journal of Sound and Vibration* **329**, 43–55.

Mukundan, H., Modarres-Sadeghi, Y., Dahl, J.M., Hover, F.S. & Triantafyllou, M.S. 2009 Monitoring VIV fatigue damage on marine risers. *Journal of Fluids and Structures* **25**, 617–628.

Naudascher, E. & Rockwell, D. 1990 *Flow-induced vibration - an engineering guide.* Balkema A.A.

Newman, D.J. & Karniadakis, G.E. 1997 A direct numerical simulation study of flow past a freely vibrating cable. *Journal of Fluid Mechanics* **344**, 95–136.

Nishino, T. & Willden, R.H.J. 2012 The efficiency of an array of tidal turbines partially blocking a wide channel. *Journal of Fluid Mechanics* **708**, 596–606.

Norberg, C. 2003 Fluctuating lift on a circular cylinder : review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures* **17**, 57–96.

Park, H.I., Hong, Y.P., Nakamura, M. & Koterayama, W. 2002 An experimental study on transverse vibrations of a highly flexibe free-hanging pipe in water. In *Proceedings of the twelfth International Offshore and Polar Engineering Conference, Kitakyushu, Japan*, pp. 199–206.

Peng, Z. & Zhu, Q. 2009 Energy harvesting through flow-induced oscillations of a foil. *Physics of Fluids* **21**, 123602.

Singh, K., Michelin, S. & de Langre, E. 2012*a* The effect of non-uniform damping on flutter in axial flow and energy-harvesting strategies. *Proceedings of the Royal Society A* **468**, 3620–3635.

Singh, K., Michelin, S. & de Langre, E. 2012*b* Energy harvesting from axial fluid-elastic instabilities of a cylinder. *Journal of Fluids and Structures* **30**, 159–172.

Skop, R.A. & Balasubramanian, S. 1997 A new twist on an old model for vortex-excited vibrations. *Journal of Fluids and Structures* **11**, 395–412.

Skop, R.A. & Griffin, O.M. 1973 A model for the vortex-excited resonant response of bluff cylinders. *Journal of Sound and Vibration* **27**, 225–233.

Srinil, N. 2010 Multi-mode interactions in vortex-induced vibrations of flexible curved/straight structures with geometric nonlinearities. *Journal of Fluids and Structures* **26**, 1098–1122.

Srinil, N. 2011 Analysis and prediction of vortex-induced vibrations of variable-tension vertical risers in linearly sheared currents. *Applied Ocean Research* **33**, 41–53.

Tang, Liaosha, Païdoussis, Michael P. & Jiang, Jin 2009 Cantilevered flexible plates in axial flow : Energy transfer and the concept of flutter mill. *Journal of Sound and Vibration* **326**, 263–276.

Tognarelli, M.A., Taggart, S. & Campbell, M. 2008 Actual VIV response of full scale drilling risers : with and without supression devices. In *Proceedings of the ASME 27th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Estoril, Portugal*, pp. OMAE2008–57046.

Triantafyllou, M.S. & Triantafyllou, G.S. 1991 The paradox of the hanging string : an explanation using singular perturbations. *Journal of Sound and Vibration* **148(2)**, 343–351.

Triantafyllou, M. S., Grosenbauch, M. A. & Gopalkrishnan, R. 1994 Vortex-induced vibrations in a sheared flow : a new predictive method. *Hydroelasticity in Marine Technology (eds Faltinsen et al.)* pp. 31–37.

Trim, A.D., Braaten, H., Lie, H. & Tognarelli, M.A. 2005 Experimental investigation of vortex-induced vibration of long marine risers. *Journal of Fluids and Structures* **21**, 335–361.

Vandiver, J.K. 1993 Dimensionless parameters important to the prediction of vortex-induced vibration of long, flexible cylinders in ocean currents. *Journal of Fluids and Structures* **7**, 423–455.

Vandiver, J.K., Jaiswal, V. & Jhingran, V. 2009 Insights on vortex-induced, travelling waves on long risers. *Journal of Fluids and Structures* **25**, 641–653.

Violette, R. 2009 *Modèle linéaire des vibrations induites par vortex de structures élancées*. PhD Thesis, École Polytechnique.

Violette, R., de Langre, E. & Szydlowski, J. 2007 Computations of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscilator model : Comparison with DNS and experiments. *Computers and Structures* **85**, 1134–1141.

Violette, R., de Langre, E. & Szydlowski, J. 2010 A linear stability approach to vortex-induced vibrations and waves. *Journal of Fluids and Structures* **26** (3), 442–466.

Whittaker, T. & Folley, M. 2012 Nearshore oscillating wave surge converters and the development of Oyster. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* **370**, 345–364.

Willden, R.H.J. & Graham, J.M.R. 2004 Multi-modal vortex-induced vibrations of a vertical riser pipe subject to a uniform current profile. *European Journal of Mechanics B/Fluids* **23**, 209–218.

Williamson, C.H.K. & Brown, G.L. 1998 A series in $1/\sqrt{Re}$ to represent the Strouhal-Reynolds number relationship of the cylinder wake. *Journal of Fluids and Structures* **12**, 1073–1085.

Williamson, C.H.K. & Govardhan, R. 2004 Vortex-induced vibrations. *Annual Review of Fluid Mechanics* **36**, 413–455.

Wu, X., Ge, F. & Hong, Y. 2012 A review of recent studies on vortex-induced vibrations of long slender cylinders. *Journal of Fluids and Structures* **28**, 292–308.

Xia, Y., Michelin, S. & Doaré, O. 2013 Inductive effects on energy harvesting piezoelectric flag. In *Proceedings of the 21st Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, France*.

Xu, W.H., Zeng, X.H. & Wu, Y.X. 2008 High aspect ratio (L/D) riser VIV prediction using wake oscillator model. *Ocean Engineering* **35**, 1769–1774.

Yemm, R., Pizer, D., Retzler, C. & Henderson, R. 2012 Pelamis : experience from concept to connection. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* **370**, 365–380.

Références internet

[WEB01] : Parc hydrolien Paimpol-Bréhat, `http://energie.edf.com`

[WEB02] : Système houlomoteur Pelamis, `www.pelamiswave.com`

[WEB03] : Système VIVACE , `www.vortexhydroenergy.com`

On the efficiency of energy harvesting using vortex-induced vibrations of cables

Clément Grouthier[a,1], Sébastien Michelin[a], Rémi Bourguet[b], Yahya Modarres-Sadeghi[c], Emmanuel de Langre[a]

[a] *Département de Mécanique, LadHyX, École Polytechnique, 91128, Palaiseau, France*
[b] *Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, Université de Toulouse and CNRS, 31400, Toulouse, France*
[c] *Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Massachusetts, Amherst, MA 01003, USA*

Abstract

Many technologies based on fluid-structure interaction mechanisms are being developed to harvest energy from geophysical flows. The velocity of such flows is low, and so is their energy density. Large systems are therefore required to extract a significant amount of energy. The question of the efficiency of energy harvesting using VIV of cables is addressed in this paper, through two reference configurations: (i) a long tensioned cable with periodically-distributed harvesters and (ii) a hanging cable with a single harvester at its upper extremity. After validation against either direct numerical simulations or experiments, an appropriate reduced-order wake-oscillator model is used to perform parametric studies of the impact of the harvesting parameters on the efficiency. For both configurations, an optimal set of parameters is identified and it is shown that the maximum efficiency is close to the value reached with an elastically-mounted rigid cylinder. The variability of the efficiency is studied in light of the fundamental properties of each configuration, i.e. body flexibility and gravity-induced spatial variation of the tension. In the periodically-distributed harvester configuration, it is found that the standing-wave nature of the vibration and structural mode selection play a central role in energy extraction. In contrast, the efficiency of the hanging cable is essentially driven by the occurrence of traveling wave vibrations.

Keywords: Efficiency, Energy harvesting, vortex-induced vibrations, cable, wake-oscillator, waves.

[1] clement.grouthier@ladhyx.polytechnique.fr

1. Introduction

Innovative energy harvesting devices are being developed to extract energy from geophysical flows such as wind or marine currents. The most common way to extract this energy is to convert it into the rotary motion of a dedicated structure, as wind turbines or marine turbines (Nishino and Willden, 2012; Bahaj, 2013; Batten et al., 2013). Even if these technologies are now mature from an industrial point of view, several other mechanisms to harvest this energy are currently being studied.

Among them, a specific class is based on flow-induced vibrations (Blevins, 1990; Naudascher and Rockwell, 1990). Energy harvesting through fluid-elastic instabilities has been investigated, such as galloping (Barrero-Gil et al., 2010), airfoil coupled-mode flutter (Peng and Zhu, 2009; Boragno et al., 2012) and flutter in an axial flow (Tang et al., 2009; Singh et al., 2012b,a; Michelin and Doaré, 2013). Vortex-induced vibrations (VIV), a strong coupling between the solid dynamics and its fluctuating wake, are another interesting mechanism to extract energy from geophysical flows (Yoshitake et al., 2004; Barrero-Gil et al., 2012). Bernitsas et al. (2008) for instance developed the VIVACE device to harvest energy by VIV of elastically-supported rigid cylinders.

A quantitative criterion is necessary to compare the performances of all these emerging technologies. As in Barrero-Gil et al. (2010), Bernitsas et al. (2008) or Hobbs and Hu (2012), we define the efficiency of the harvesting, η, as the ratio between the time-averaged extracted power $\langle \mathcal{P} \rangle$, where $\langle . \rangle$ stands for time-averaged quantities, and the energy flux across the cross-flow section $\mathcal{A}$ of the device, $\mathcal{P}_0$,

$$\eta = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\mathcal{P}_0} = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\frac{1}{2}\rho \mathcal{A} U^3}, \tag{1}$$

where ρ and U are respectively the fluid density and the flow velocity. There are of course many other ways to define the efficiency of an energy harvesting device, see for instance Zhu et al. (2009) or Doaré and Michelin (2011). In such geophysical flows, the energy density ($\rho U^3/2$) is low, of the order of 500 W/m^2 for typical wind speed (10 m/s) or current speed (1 m/s). A large area $\mathcal{A}$ is thus needed to access large quantitites of energy. This can be achieved either by considering many short devices, as in Bernitsas et al. (2008), or one single large structure, as considered in the present paper.

In the specific domain of VIV, such large structures have been extensively studied for offshore engineering issues (Baarholm et al., 2006; Tognarelli et al., 2008; Mukundan et al., 2009; Modarres-Sadeghi et al., 2010). VIV of long cables consist of vortex-induced waves, which can be stationary or traveling (Vandiver, 1993). The excitation of the structure through lock-in, i.e. the synchronization between the vortex shedding and body oscillation, may occur successively for each vibration mode of the cable (Chaplin et al., 2005; King, 1995).

Placing long flexible structures, such as cables, in a cross-flow seems like a promising way to harvest energy from low velocity geophysical flows. Yet the corresponding dynamics is much more complex than that of a rigid body, and

it is necessary to explore how the efficiency depends on the parameters of the system. In the present paper, this question is addressed through two reference configurations, using a classical reduced-order model, which is validated here in comparison with Direct Numerical Simulations (DNS) and experiments. The configuration of a tensioned cable with periodically-distributed harvesters is first investigated to study how the distance between harvesters and their respective intensity influence the efficiency. To analyze the impact of a single harvester, and to show the feasibility of the proposed energy harvester in practice, the second configuration is a hanging cable with one harvester at its upper extremity, for which the tension is induced by gravity. Section 2 describes the model used throughout the paper. In Section 3, the case of the elastically-mounted rigid cylinder is considered. Sections 4 and 5 address the two reference cases of a cable with harvesters, introduced above.

2. Model

2.1. A reduced-order wake-oscillator model

A comprehensive study of the impact on the efficiency of the system parameters using experiments or DNS would be very time consuming and computationally expensive. A reduced-order model is therefore used in this study, based on the ones that have been developed for VIV since Hartlen and Currie (1970). These models have been extended to long cables (Violette et al., 2007; Xu et al., 2008; Srinil, 2010), and have been proven to predict accurately the main features of their dynamics, as well as some of their complex features like mode switching (Violette et al., 2010). In these models, the fluctuating lift exerted by the wake on the bluff body is modeled by a single variable, $q = 2C_L/C_{L0}$, where C_L is the instantaneous lift coefficient and C_{L0} the lift coefficient if the solid were fixed. In the wake-oscillator considered here, the evolution of q is assumed to follow a Van der Pol oscillator equation,

$$\ddot{q} + \varepsilon \left(q^2 - 1\right) \dot{q} + q = f_s, \tag{2}$$

where $\dot{(\,)}$ stands for the derivative with respect to the dimensionless time $t = \omega_f T$, where $\omega_f = 2\pi \mathrm{St} U/D$ is the Strouhal shedding frequency, St being the Strouhal number, U the flow speed and D the solid diameter. Equation (2) is coupled with the solid equation by the forcing term f_s. Facchinetti et al. (2004) showed that an inertial coupling provides an accurate representation of VIV, using $f_s = A\ddot{y}$, where $y = Y/D$ is the solid dimensionless transverse displacement. In the following, the values $\varepsilon = 0.3$ and $A = 12$ are used (Facchinetti et al., 2004), unless specified otherwise.

2.2. Model for the energy harvesters

Energy harvesting induces a loss of energy for the fluid-solid system. It is thus represented in the remainder of the paper by a local viscous damping force, whose intensity is a key parameter of the problem.

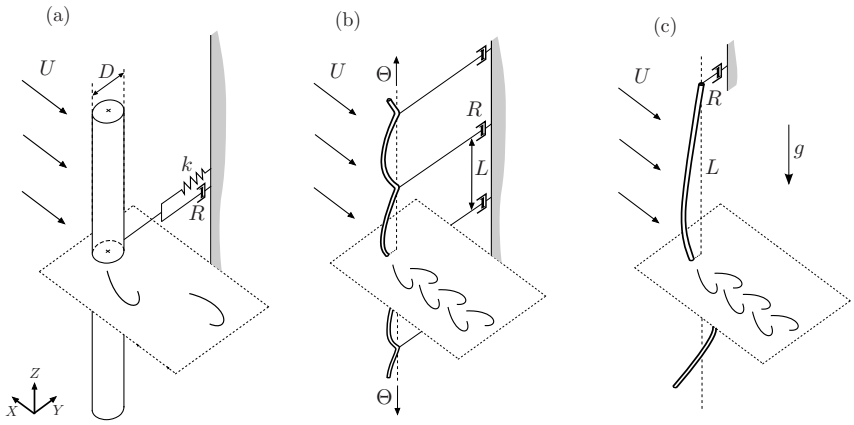


Figure 1: Energy harvesting by cross-flow VIV of (a) an elastically-mounted rigid cylinder, (b) a tensioned cable with periodically-distributed energy harvesters and (c) a hanging cable with a single energy harvester at its upper extremity.

3. The elastically-mounted rigid cylinder

The efficiency of the energy harvesting by VIV of an elastically-mounted rigid cylinder is first investigated, Figure 1 (a). Let m_s be the mass per unit length of the cylinder. The natural frequency of the cylinder in still fluid may be expressed as $\omega_s = \sqrt{k/m_t}$, where $m_t = m_s + \rho\pi D^2 C_{M0}/4$ is the total mass per unit length of the cable, including the added inertia. An added mass coefficient of $C_{M0} = 1$ is considered in this paper. Following Facchinetti et al. (2004), the cross-flow dynamics of the cylinder is governed by

$$\ddot{y} + \left(\xi + \frac{\gamma}{\mu}\right)\dot{y} + \delta^2 y = Mq, \tag{3}$$

where $\delta = \omega_s/\omega_f$ is the ratio between the solid natural frequency and the vortex shedding frequency. The damping term includes both the structural damping $\xi = R/m_t\omega_f$ and the fluid damping γ/μ, where $\gamma = C_D/4\pi St$ is the stall parameter, C_D being the drag coefficient (Skop and Balasubramanian, 1997; Facchinetti et al., 2004), and $\mu = m_t/\rho D^2$ is the mass ratio. In Equation (3), Mq is the wake forcing with $M = C_{L0}/16\mu\pi^2 St^2$. Unless specified otherwise, we use $C_D = 2$, $C_{L0} = 0.8$, $St = 0.17$, and $\mu = 2.79$ (Violette et al., 2010).

Following Section 2.2, the harvested energy is defined and computed as the total energy dissipated by the structural damping ξ. The system of Equations (2) and (3) is integrated numerically using finite differences and a centered explicit scheme. The solid is initially at rest and the lift coefficient q is subjected to a small random initial perturbation. The system quickly reaches a limit cycle which is used to derive time-averaged quantities such as the efficiency, Equation (1), which reads as $\eta = 16\mu\pi^3 St^3 \left\langle \xi\dot{y}^2 \right\rangle$ in dimensionless variables. The evolution of η with the damping ξ and the frequency ratio δ is shown in Figure 2. The maximum efficiency, $\eta_{opt} = 0.23$, is close to the value of 0.22

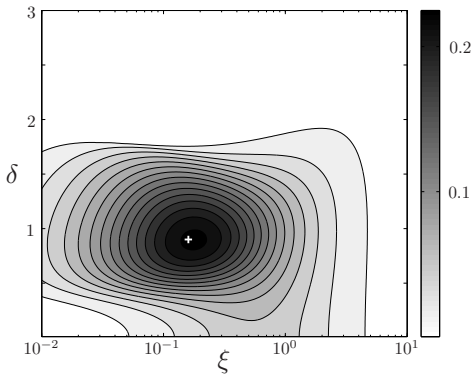


Figure 2: Efficiency of the energy harvesting by VIV of an elastically-mounted rigid cylinder, as a function of the damping parameter ξ and the frequency ratio δ. The white cross locates the optimal harvesting configuration: $\xi = 0.16$ and $\delta = 0.90$, leading to an efficiency of $\eta = 0.23$.

presented in Bernitsas et al. (2008). It is obtained under lock-in, which results in high-amplitude vibrations. More precisely, the optimal efficiency is reached for $\xi_{opt} = 0.16$ and $\delta_{opt} = 0.90$, in the vicinity of the condition, $\delta = 1$. For each frequency ratio δ, the efficiency follows a bell-shaped evolution with ξ. At low damping parameters, η is proportional to ξ as VIV amplitude saturates (Williamson and Govardhan, 2004). The amplitude is proportional to $1/\xi$ at high damping parameters (Facchinetti et al., 2004), and so is the efficiency.

We have shown here that the wake oscillator model is a valuable tool to simply derive efficiency maps. Moreover we have emphasized that high efficiencies are obtained under lock-in condition, in a region of the parameter space where the frequency of shedding matches the natural frequency of the cylinder. The successive lock-ins of the different vibration modes of a flexible structure may consequently lead to wider ranges of parameters leading to high efficiencies. Energy harvesting by VIV of cables is therefore explored in the next sections.

4. A tensioned cable with periodically-distributed harvesters

In this section, the energy harvesting by cross-flow VIV of an infinitely long tensioned cable with periodically-distributed energy harvesting devices is investigated, Figure 1 (b). This discussion does not aim at describing how to implement theses devices, as obviously infinitely long cables cannot be constructed. The discussion, however, is valuable towards understanding the impact on the efficiency of the harvester distribution along a cable. The parameters D, m_s, ρ and U have the same meaning as in Section 3, and Θ is now the cable's uniform tension. The energy harvesting devices are modeled by dashpots of damping coefficient R and the distance between two successive dashpots is denoted by L. The dimensionless spanwise coordinate is defined as $z = Z/Z_c$, with Z_c the

wavelength of a wave traveling along the cable with frequency ω_f and phase speed $c = \sqrt{\Theta/m_t}$,

$$Z_c = \frac{2\pi}{\omega_f}\sqrt{\frac{\Theta}{m_t}}. \tag{4}$$

The cross-flow dynamics of the cable are described by the dimensionless equation

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - \frac{1}{4\pi^2}y'' = Mq, \tag{5}$$

where $(\,)'$ stands for the derivation with respect to z. The force balance at the dashpot locations introduces the local condition

$$\frac{1}{4\pi^2}\left[y'(0,t) - y'(\ell,t)\right] = \xi\ell\dot{y}(0,t), \tag{6}$$

where $y'(0,t)$ is the right derivative of the displacement y with respect to z at location $z = 0$, and $y'(\ell,t)$ its left derivative at $z = \ell$. The damping parameter reads as $\xi = R/Lm_t\omega_f$, and the reduced length is defined as $\ell = L/Z_c$. The motion of the cable with periodic harvesters, Equations (2), (5) and (6), is integrated using centered finite differences on a spatially periodic domain and a Crank-Nicolson method.

4.1. Comparison with direct numerical simulations

The cable dynamics predicted by the model is first compared with the results of direct numerical simulations (DNS), Figure 3. The parallelized code Nektar, based on the spectral/hp element method (Karniadakis and Sherwin, 1999) is used to solve the coupled fluid-solid dynamics, as detailed in Bourguet et al. (2011). The Reynolds number is set to Re = 300 and the corresponding lift coefficient C_{L0} is obtained by a DNS with a fixed cable. The obtained value of $C_{L0} = 0.61$ is consistent with the experimental results found in Norberg (2003) and is used in this section.

The displacements predicted by the model and the DNS are plotted in Figure 3), for three different sets of parameters. In both cases, the vibration modes are identical. A good agreement is also observed between the model and the DNS for predicting the traveling or stationary behaviour of the cable VIV. Figure 4 shows the evolution of the efficiency $\eta = 16\mu\pi^3 St^3\left\langle\xi\dot{y}^2\right\rangle$ with the two harvesting parameters, ℓ and ξ. For both DNS results and model predictions, the efficiency η varies rather smoothly with the damping parameter ξ, while its evolution with ℓ exhibits some discontinuities. This strong influence of the reduced length on the efficiency will be discussed in section 4.2. These comparisons between DNS and model predictions confirm the ability of the model to represent the dynamics of cross-flow VIV of a tensioned cable. The VIV model is consequently an appropriate tool to complete a systematic study of the evolution of the efficiency η with the two harvesting parameters, ξ and ℓ.

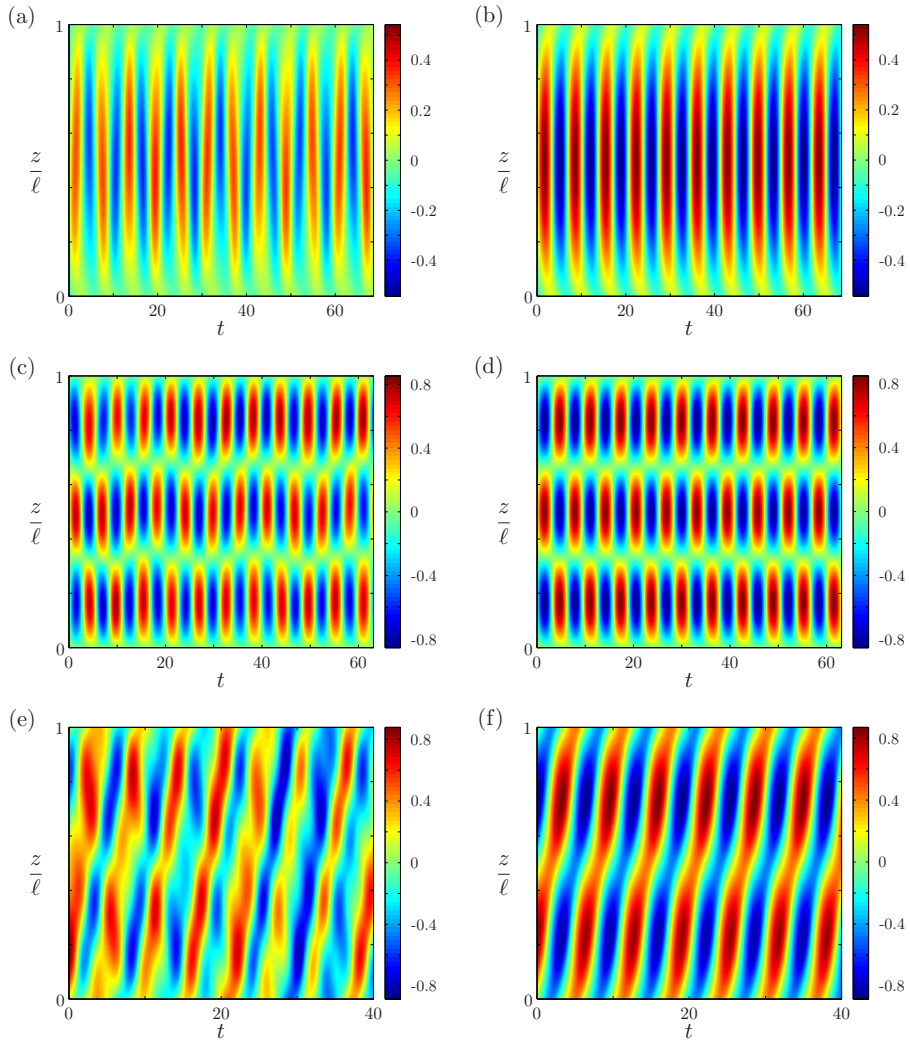


Figure 3: Cross-flow displacement of the tensioned cable predicted by DNS (left) and by the model (right): $\ell = 0.55$ and $\xi = 3.65$ in Figures (a) and (b), $\ell = 1.50$ and $\xi = 3.65$ in Figures (c) and (d), $\ell = 1.00$ and $\xi = 0.04$ in Figures (e) and (f).

4.2. Efficiency map

A full parametric study of the efficiency η is performed, with the same parameters as in Section 3, in particular $C_{L0} = 0.8$ contrary to the previous section for which it was adapted to the considered values of the Reynolds number. Figure 5 shows the evolution of η with respect to the reduced length ℓ and the damping parameter ξ.

The optimal efficiency $\eta_{opt} = 0.19$, reached for $\ell_{opt} = 0.55$ and $\xi_{opt} = 3.65$, is close to the value of 0.23 obtained for a rigid cylinder, Section 3. The efficiency η

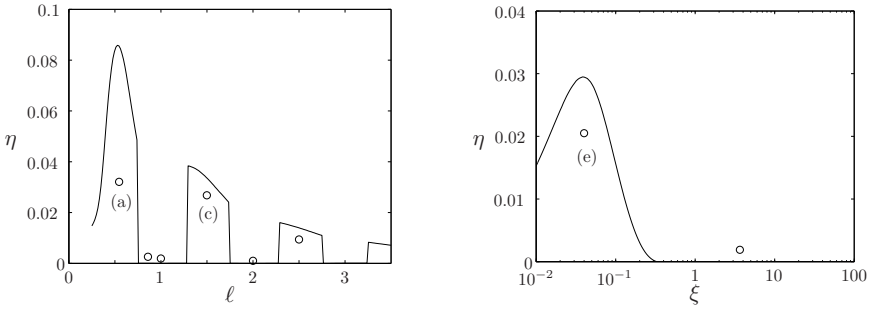


Figure 4: Left: evolution of the efficiency with the reduced length ℓ for $\xi = 3.65$; Right: evolution of the efficiency with the damping parameter ξ for $\ell = 1$. Model results (solid lines) and DNS results (symbols). The letters (a), (c) and (e) correspond to the DNS results shown in Figure 3.

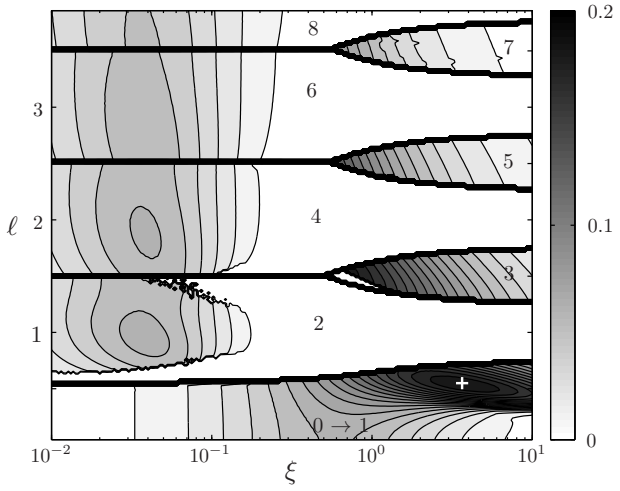


Figure 5: Efficiency η as a function of ξ and ℓ. The white cross locates the optimal harvesting configuration: $\xi = 3.65$ and $\ell = 0.55$, leading to an efficiency of $\eta = 0.19$. The number of the dominant mode, determined by a linear stability analysis, is also indicated.

depends significantly on both harvesting parameters ℓ and ξ. Except for $\ell < 0.5$, where its variations are rather smooth, the efficiency varies dramatically with the reduced length ℓ. It exhibits discontinuities, which have already been pointed out in Figure 4 (left), where the high impact of ℓ on η is visible. The high-efficiency zones correspond to well-defined high efficiency tongues located in the high-damping region of the map; these regions are analyzed in the following.

4.3. Relation between efficiency and vibration modes

The cross-flow motion of the cable for three sets of parameters leading to very different efficiencies are shown in Figure 6. In order to characterize the cable dynamics, the mode number n is defined as

$$n = \frac{2\ell}{\lambda}, \tag{7}$$

where λ is the wavelength of the VIV. As the extremities of the cable are not fixed but damped, this mode number may not necessarily be an integer. In such cases, n is defined as the closest integer to the ratio $2\ell/\lambda$.

When the harvesting parameters are optimal, the cable displacement corresponds to a mode 1, Figure 6 (a), and to a mode 3 when $\ell = 1.50$, Figure 6 (c). In both cases, the envelope of the oscillations also shows that the dashpots are moving, leading to an efficient extraction of energy. On the contrary, the energy harvesters are still when $\ell = 1$, for which the selected vibration mode has a mode number of $n = 2$, Figure 6 (b).

The mode selected by the cable VIV therefore seems to be a key parameter for the system efficiency. The dashpots are forced by the slope discontinuity between the two strands of the cable on either side of the harvesters, Equation (6). This slope discontinuity is much larger when the mode number n is odd compared with when it is even, as shown in Figure 6 (d) and (e). This explains why the parameters for which an odd mode of vibration is excited lead to a much higher efficiency than the ones leading to an even mode. It is consequently important to identify the dominance zone of every vibration mode of the tensioned cable. To this end, a linear approach is used.

4.4. Linear stability analysis and lock-in

Following the work of de Langre (2006), Violette et al. (2010) have shown that a linear stability analysis of the VIV model provides an accurate prediction of the frequency and wavelength of VIV of a tensioned cable. The non-linear term $\varepsilon q^2 \dot{q}$ of the wake-oscillator, Equation (2), is neglected and a stability analysis of the coupled linear system is performed. The most unstable linear mode is determined for each set of parameters ℓ and ξ. The dominance zones of the cable vibration modes are reported on the efficiency map, Figure 5. There is a very good agreement between the dominance zones of the linear vibration modes and the complex structure of the efficiency map. The high efficiency regions of the parameter space correspond rigorously to the dominance zones of the odd vibration modes. This confirms that in practice, the harvesting parameters ℓ and ξ should be chosen so that an odd mode number of the cable is excited, for the harvesting to be efficient. As for the case of an elastically-mounted rigid cylinder, Section 3, the high efficiencies are obtained under lock-in conditions, but for any of the odd modes.

The structure of the efficiency map is therefore due to the dominance zones of the different vibration modes of the cable in VIV. The eigenfrequency of the mode n of a tensioned cable with fixed ends reads as

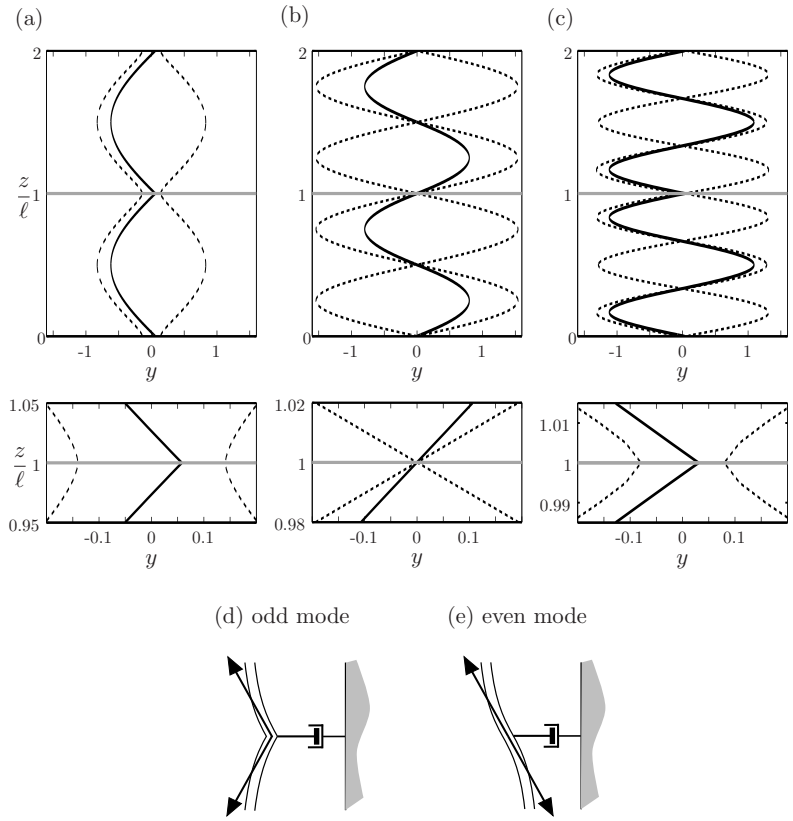


Figure 6: Displacement (solid line) and envelope (dashed line) of the cross-flow VIV of the tensioned cable for $\xi = \xi_{opt} = 3.65$ and (a) $\ell = \ell_{opt} = 0.55$, corresponding to the optimal case for energy harvesting, $\eta = \eta_{opt} = 0.19$ (b) $\ell = 1$, $\eta = 0$ and (c) $\ell = 1.50$, $\eta = 0.07$. A magnification of each plot is shown below Figures (a), (b) and (c) in order to visualize the displacement of the cable in the vicinity of the dashpots, $z/\ell \approx 1$. In each figure, the horizontal grey line shows the location of one energy harvester. Sketches of the resulting forcing of the cable on the dashpot are also shown, in cases where the excited mode number is (d) odd and (e) even.

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{\Theta}{m_t}}. \tag{8}$$

Combining Equation (8) with the definition of ℓ, Equation (4), leads to

$$\ell = \frac{n}{2}\left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right). \tag{9}$$

The dimensionless length parameter, ℓ, corresponds to the ratio between the Strouhal frequency and the successive eigenfrequencies of the tensioned cable. A match between the vortex shedding frequency, ω_f, and the natural frequency of mode n, ω_n, is therefore observed for $\ell = n/2$. These conditions notably

locate the local maxima of η within the dominance zone of each mode, Figure 5. The two harvesting parameters have to be chosen so that ℓ ensures that the shedding frequency is close to the natural frequency of an odd mode while ξ has to be high enough to allow this particular mode to be excited; at low damping, only even modes develop, as seen in Figure 5.

The existence of several vibration modes is one of the fundamental characteristics of a flexible structure when compared to an elastically-mounted rigid cylinder. The cable adapts its VIV dynamics to the wake forcing, through mode selection, which strongly impacts the efficiency of the harvesting, Figure 5. Therefore, flexibility modifies the energy harvesting behaviour of the structure dramatically, compared to a rigid one, through this ability to adapt its dynamics via the lock-in of its successive modes.

5. A hanging cable with a localized harvester

The previous section has shown that VIV of long and flexible structures may be a relevant mechanism to harvest energy from geophysical flows. It is yet still necessary to look for an appropriate configuration with fewer harvesters. In this section, a single energy harvester is considered. The cable is hung by an energy harvester at its upper extremity, the lower one being free, Figure 1 (c). This configuration differs from the previous one by its gravity-induced tension, varying along the span of the cable, and by the asymmetry of its boundary conditions.

The dimensionless cross-flow displacement y and time t are defined as in previous sections. Following Grouthier et al. (2013), the dimensionless spanwise coordinate is defined as $z = Z/Z_c$ where the characteristic length for the spanwise coordinate is $Z_c = m_s g/m_t \omega_f^2$. Given these characteristic dimensions, there are two dimensionless harvesting parameters. The first one is $\ell = L/Z_c$, the dimensionless length of the hanging cable. The second one is the dimensionless damping parameter, $\xi = R/\sqrt{L m_s m_t g}$.

5.1. Experiments

The energy harvesting by VIV of a hanging cable was first studied experimentally; then the results were compared with the predictions of an appropriate model. Physical properties of the cable were $L = 0.65$ m, $m_s = 21$ g.m^{-1} and $D = 2.5$ mm. The cable was placed in uniform flow of constant speed U in the water channel of the Fluid-Structure Interactions laboratory of University of Massachusetts, Amherst, whose test section dimensions are 38 cm $\times$ 50 cm $\times$ 150 cm. The experimental setup was similar to that used by Grouthier et al. (2013), except for the top dissipative boundary condition. The cable was hung by nylon strings and fixed to the dashpot, Figure 7. The viscous damping was generated by a stick, immersed in an appropriate mixture of water and glycerol. This allowed adjusting the magnitude of the damping parameter by varying the proportion of glycerol. Most of the uncertainty in the forthcoming results actually came from the uncertainty in the measurement of the damping parameter

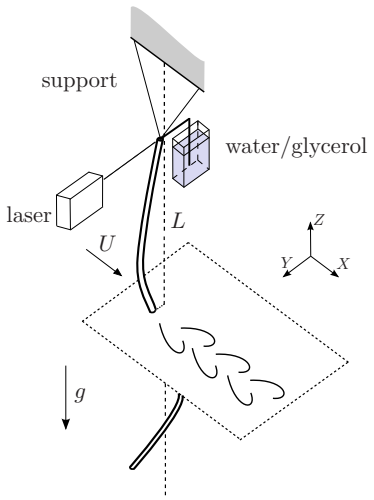


Figure 7: Sketch of the experimental setup for the analysis of the energy harvesting by cross-flow VIV of a hanging cable in a uniform flow.

ξ, obtained through water-glycerol mixture. The displacement of the upper end of the cable was measured with a laser displacement sensor Micro-epsilon OptoNCDT ILD1302-20. The acquisition frequency was 256 Hz. Three flow speeds were tested, corresponding to different values of the dimensionless length parameter: $\ell = 15.0$, 34.1 and 50.0. For each flow speed, measurements were taken for five damping values ranging from 0.1 to 20. The measured displacement was filtered around its dominant frequency, close to the expected Strouhal frequency (Grouthier et al., 2013). To avoid noise due to signal differentiation, the numerator of Equation (1) was estimated as $R\Omega^2 Y_L^2$, with Ω and Y_L the frequency and amplitude of the cable upper end oscillation.

Figure 8 shows the evolution of the efficiency with the damping parameter ξ, derived from the experiments. For all values of ℓ, the efficiency shows a maximum, in the vicinity of $\xi = 1$. This configuration is also studied using the wake oscillator model coupled with a cable equation, as in the previous section, but taking into account the gravity-induced spatial variations of the tension and the specific boundary conditions. The model reads

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - (zy')' = Mq, \tag{10a}$$

$$\ddot{q} + \varepsilon\left(q^2 - 1\right)\dot{q} + q = A\ddot{y}, \tag{10b}$$

with boundary conditions

$$m_s\ddot{y} - m_t y' = 0 \quad \text{and} \quad y' - \frac{y}{h} + \frac{\xi}{\sqrt{\ell}}\dot{y} = 0, \tag{11}$$

at the lower end, $z = 0$, and upper end, $z = \ell$, respectively. The lower end condition is obtained from the momentum balance for an arbitrary small end mass, and the upper end condition corresponds to a connection between a massless nylon string of length h and the damper. The lift coefficient C_{L0} is adapted to the experimental range of Reynolds numbers, Re ≈ 100, $C_{L0} = 0.3$ (Norberg, 2003; Violette et al., 2007). The coupling parameter A is fitted to amplitude measurements of the hanging cable VIV in cases were the upper end is fixed, $A = 2.5$ (Grouthier, 2013), while the Strouhal number is taken from Grouthier et al. (2013). The model is integrated in space and time using finite differences and the efficiency reads as

$$\eta = \frac{16\mu\pi^3 St^3 \left\langle \xi \dot{y}^2 \right\rangle}{\sqrt{\ell}}. \tag{12}$$

The evolution of the efficiency, η, with ξ is plotted in Figure 8. There is a reasonable agreement between the experimental results and numerical predictions. Computational results clearly show the expected bell-shaped evolution of the efficiency, consistently with the experimental results. Note that the length parameter ℓ has a rather small influence on the results, contrary to the previous configuration.

5.2. Parametric study

In this section, the VIV model is used to perform a parametrical study of the energy harvesting by VIV of a hanging cable, Figure 1 (c). The model is that given in Equations (10) and (11), but with $h = \infty$, corresponding to the case shown in Figure 1 (c). For the sake of comparison with the tensioned cable configuration, the model parameters are now the same as in Section 4.2: $C_D = 2$, $C_{L0} = 0.8$, $St = 0.17$, $\mu = 2.79$, $A = 12$ and $\varepsilon = 0.3$. Note that the coupling parameter A and the Strouhal number differ from Section 5.1, where lower Reynolds numbers were considered. The efficiency map is given in Figure 9, in terms of the parameters ξ and ℓ.

An optimal set of parameters, $\ell_{opt} = 68.3$ and $\xi_{opt} = 1.1$, is identified. The corresponding efficiency reaches $\eta_{opt} = 0.22$, which is slightly higher than for the tensioned cable, Section 4. The dependence of η on the harvesting parameters is much simpler than for the tensioned cable, Figure 5. In particular, maximum efficiency is achieved around $\xi \approx 1$, as already noted in experiments, regardless of the value of the length parameter, ℓ. The fir-tree shape of the efficiency map is due to the different modes that are successively excited. It is clear that in this case, the mode selection has very little impact on the efficiency, contrary to the case of a tensioned cable, Section 4.

5.3. Stationary and traveling waves

In order to understand the dependence of the efficiency on ξ, the motion of the hanging cable is plotted in Figure 10 for three different damping parameters and $\ell = \ell_{opt}$. For both small and high dampings, Figure 10 (a) and (c), the motion is characterized by mainly-stationary waves, as in the case of a fixed

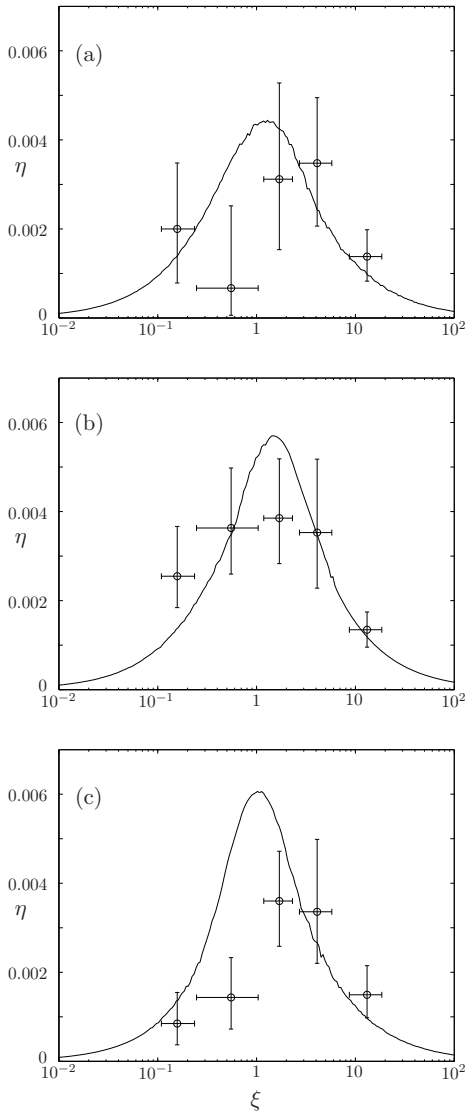


Figure 8: Efficiency η obtained experimentally (symbols) and by the model for VIV of a hanging string (solid line) for (a) $\ell = 15.0$, (b) $\ell = 34.1$ and (c) $\ell = 50.0$.

upper extremity (Grouthier et al., 2013). The corresponding mode shape is actually very close to a zero-order Bessel function of the first kind, with either a free-end condition, $y'(\ell) = 0$ for small ξ, Figure 10 (a), or a fixed-end condition, $y(\ell) = 0$ for high ξ, Figure 10 (c). However, when the optimal damping parameter is considered, $\xi = 1.1$, Figure 10 (b), traveling waves appear and are oriented towards the top of the cable, where energy is extracted by the dis-

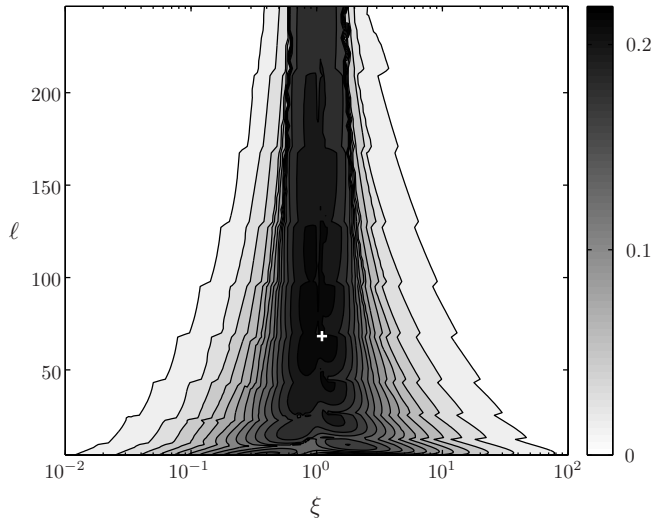


Figure 9: Efficiency of the energy harvesting by VIV of a hanging cable with a single dashpot localized at its upper end as a function of the damping parameter ξ and reduced length ℓ. The white cross locates the optimal harvesting configuration: $\xi = 1.1$ and $\ell = 68.3$, leading to an efficiency of $\eta = 0.22$.

sipative boundary condition. The local amplitude of oscillations is also more uniform than for the two other values of ξ, the lower end displacement being much smaller. The modification of the cable cross-flow dynamics from stationary waves to traveling waves is associated with the high efficiency reached for $\xi = 1.1$, and more generally around $\xi = 1$. In fact, the local conservation of energy for the hanging cable reads as

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}zy'^2\right] = Mq\dot{y} - \frac{\gamma}{\mu}\dot{y}^2 + \left(zy'\dot{y}\right)', \tag{13}$$

where $Mq\dot{y}$ is the energy transferred to the solid by its wake through lift, $\gamma\dot{y}^2/\mu$ is the energy dissipated by the flow and $\left(zy'\dot{y}\right)'$ is the instantaneous balance of the energy flux at location z. The energy flux ϕ along the cable consequently reads as

$$\phi\left(z\right) = -\left\langle zy'\dot{y}\right\rangle, \tag{14}$$

and its sign indicates the direction of the energy propagation along the structure. This energy flux is plotted in Figure 11, for the three cases considered previously. For both small and high damping parameters, the flux is negative everywhere along the cable, except in the close vicinity of the dashpot, Figure 10 (a) and (c); energy travels downwards and is dissipated by the flow in regions of high amplitudes of oscillations. Conversely, the flux ϕ is positive and increases linearly along the span of the cable for the optimal ξ. The energy transferred

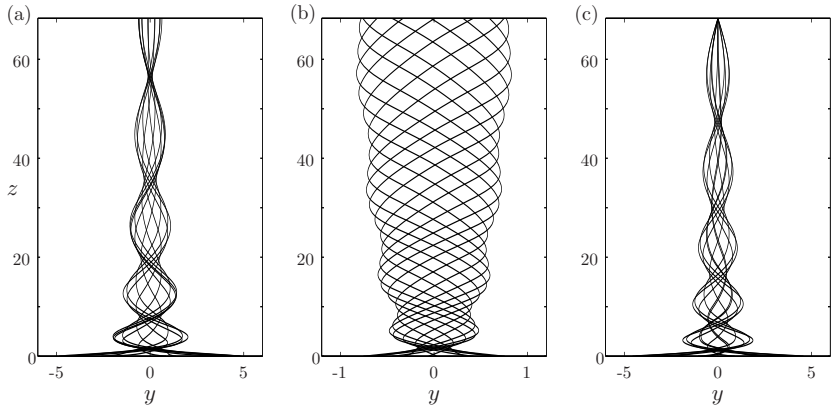


Figure 10: Selected instantaneous positions of a hanging cable VIV with a damped upper extremity for $\ell = \ell_{opt}$ and three different damping parameters : (a) $\xi = \xi_{opt}/100$, (b) $\xi = \xi_{opt}$ and (c) $\xi = 100\xi_{opt}$.

from the flow to the cable all along its span is then transported towards the energy harvester by the traveling waves. Note that for an ideal traveling wave of amplitude y_0, wavenumber k and frequency ω, the flux is $\phi(z) = k\omega y_0^2/2$. This approximation of the energy flux is plotted in Figure 11 (b) and is in very good agreement with the actual energy flux. This confirms that the high efficiencies are caused by energy transport towards the damped end of the system, through traveling waves, thanks to the cable flexibility and the gravity-induced tension.

6. Discussion and Conclusion

Two configurations subjected to VIV have been considered in this paper, a tensioned cable with periodic harvesters (PH in the following) and a hanging cable with a top harvester (TH in the following). In both cases, predictions of efficiency were presented using a model validated against DNS and experiments. The first important result is that the optimal efficiencies of both configurations are close to that of an elastically-mounted rigid cylinder with a harvester, $\eta \approx 0.20$. These optimal efficiencies are found under lock-in, in regions of the parameter space where the vortex shedding frequency is close to the natural frequency of a structural mode. For these cable systems, the multiplicity of vibration modes allows multiple lock-ins and thereby multiple high-efficiency regions. This is a clear advantage compared to rigid systems and represents a second important result. The third main result is that these two configurations behave differently, as illustrated by the shape of the efficiency maps, Figures 5 and 9. These maps were analyzed in details, and the differences shown to be related to the difference in the selection of waves by the boundary conditions. In the PH case, stationary waves dominate and the key parameter is the excited mode number, the parity of which is essential. In the TH case, traveling waves

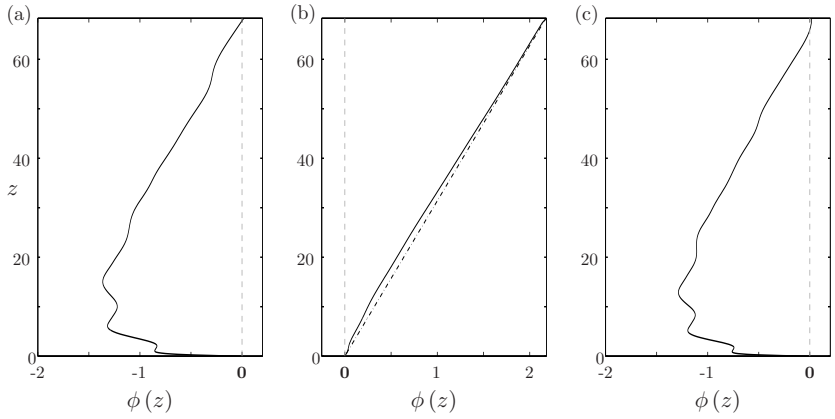


Figure 11: Energy flux $\phi(z)$ for (a) $\xi = \xi_{opt}/100$, (b) $\xi = \xi_{opt}$ and (c) $\xi = 100\xi_{opt}$. The dashed-dotted line shows the linear approximation of ϕ on plot (b).

allow the transport of energy to the harvester, provided that the intensity of the harvester is properly selected.

In terms of practical applications, the two configurations behave differently by several aspects. In order to answer the question of which configuration should be installed in a flow of given velocity U_0, the optimal dimensional power generated by one harvester, $\langle \mathcal{P} \rangle$, is computed using the optimal parameters identified in Sections 4.2 and 5.2. The mean flow velocity indeed impacts the optimal dimensional power $\langle \mathcal{P} \rangle$ through the energy flux $\rho D U^3/2$ and the optimal value of L, with L the distance between two harvesters for PH case and L the length of the system for TH case. The optimal harvested power scales differently with the dimensional flow velocity U_0,

$$\langle \mathcal{P} \rangle_{\mathrm{PH}} \sim U_0^2 \quad \text{and} \quad \langle \mathcal{P} \rangle_{\mathrm{TH}} \sim U_0. \tag{15}$$

The TH configuration seems more adapted to lower flow velocities and the PH to higher ones. This is illustrated in Figure 12, for a given cable ($D = 0.04$ m and $m_s = 3.20$ kg/m) and a given tension for the PH case ($\Theta = 10$ kN), where the crossing point of the two configurations is near $U_0 = 0.1$ m/s. Clearly, the systems are more adapted to rather low flow velocities and thus low generated power, since the optimal power may vary like U_0^3 for other energy harvesting systems.

The two configurations differ in terms of their robustness versus possible variations of the flow velocity around the design point. This appears in the efficiency maps, Figures 5 and 9, where the PH case shows discontinuities while the TH case exhibits smoother variations of efficiency with the parameters. Figure 13 shows the effect on the efficiency of the actual velocity U, normalized by the reference value at design, U_0, for the two cases. The PH case exhibits ranges of zero efficiency, while the TH case varies more regularly. These evolutions result from the efficiency maps discussed above, knowing that $\ell \sim U$ and $\xi \sim 1/U$ in the PH case while $\ell \sim U^2$ and ξ is independent of U in the TH case. The TH

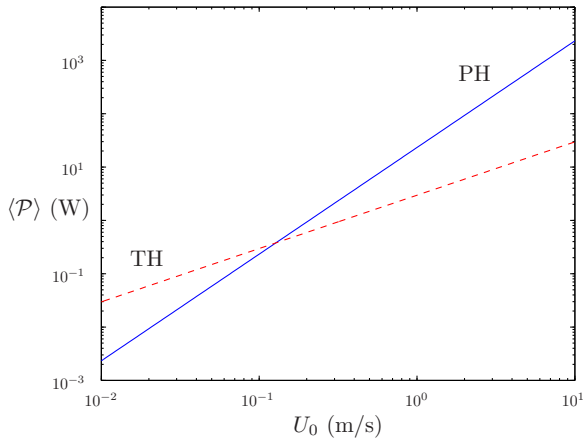


Figure 12: Dimensional power, $\langle \mathcal{P} \rangle$ (in W), harvested by one harvester for VIV of a tensioned cable with periodically-distributed energy harvesters (solid line) or a hanging cable (dashed line). For each flow velocity U_0 and each configuration, the optimal dimensional parameters are derived and give access to the optimal power $\langle \mathcal{P} \rangle$ which is extracted by a single harvester.

case seems much more robust. Yet, a simple solution exists to regularize the efficiency of the PH case, by having a tension that is induced by a drag force, $\Theta \sim U^2$, Figure 13. In that case, the natural frequencies of the structural modes vary simultaneously with the vortex shedding frequency and lock-in is preserved on the lowest mode.

Altogether, VIV of cables with localized harvesters seem a promising way to harvest energy from low velocity geophysical flows. Considerable work, however, remains to be done to design real harvesters, but the simplicity of the flexible structures is a clear advantage in terms of building and maintenance.

References

Baarholm, G., Larsen, C., Lie, H., 2006. On fatigue damage accumulation from in-line and cross-flow vortex-induced vibrations on risers. Journal of Fluids and Structures 22, 109–127.

Bahaj, A., 2013. Marine current energy conversion: the dawn of a new era in electricity production. Philosophical Transactions of the Royal Society A 371, 20120500.

Barrero-Gil, A., Alonso, G., Sanz-Andres, A., 2010. Energy harvesting from transverse galloping. Journal of Sound and Vibration 329, 2873–2883.

Barrero-Gil, A., Pindado, S., Avila, S., 2012. Extracting energy from vortex-induced vibrations : a parametric study. Applied mathematical modelling 36, 3153–3160.

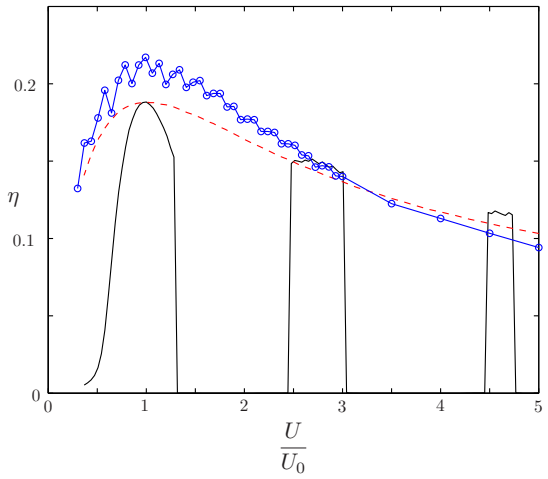


Figure 13: Sensitivity of the efficiency η to flow speed variations for the three flexible devices considered: the tensioned cable with constant tension (solid line), the tensioned cable with a drag-induced tension (dashed line) and the hanging cable (line and symbols).

Batten, W., Harrison, M., Bahaj, A., 2013. Accuracy of the actuator disc-RANS approach for predicting the performance and wake of tidal turbines. Philosophical Transactions of the Royal Society A 371, 20120293.

Bernitsas, M. M., Raghavan, K., Ben-Simon, Y., Garcia, E. M. H., 2008. Vivace (Vortex-Induced Vibration Aquatic Clean Energy) : A new concept in generation of clean and renewable energy from fluid flow. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering 130 (041101), 1–15.

Blevins, R., 1990. Flow-induced vibration - Second edition. Van Nostrand Reinhold, New York.

Boragno, C., Festa, R., Mazzino, A., 2012. Elastically bounded flapping wing for energy harvesting. Applied Physics Letters 100, 253906.

Bourguet, R., Karniadakis, G. E., Triantafyllou, M. S., 2011. Vortex-induced vibrations of a long flexible cylinder in shear flow. Journal of Fluid Mechanics 677, 342–382.

Chaplin, J., Bearman, P., Huera-Huarte, F., Pattenden, R., 2005. Laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a vertical tension riser in a stepped current. Journal of Fluids and Structures 21, 3–24.

de Langre, E., 2006. Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter. Journal of Fluids and Structures 22, 783–791.

Doaré, O., Michelin, S., 2011. Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates : linear stability analysis and conversion efficiency. Journal of Fluids and Structures 27, 1357–1375.

Facchinetti, M. L., de Langre, E., Biolley, F., 2004. Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. Journal of Fluids and Structures 19, 123–140.

Grouthier, C., 2013. Récupération d'énergie et vibrations induites par vortex de structures flexibles. PhD Thesis, École Polytechnique.

Grouthier, C., Michelin, S., Modarres-Sadeghi, Y., de Langre, E., 2013. Self-similar vortex-induced vibrations of a hanging string. Journal of Fluid Mechanics 724, R2.

Hartlen, R., Currie, I., 1970. Lift-oscillator model for vortex-induced vibration. Proceddings of American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Divisin 96, 577–591.

Hobbs, W., Hu, D., 2012. Tree-inspired piezoelectric energy harvesting. Journal of Fluids and Structures 28, 103–114.

Karniadakis, G., Sherwin, S., 1999. Spectral/HP Element Methods for CFD, 1st edn. Oxford University Press.

King, R., 1995. An investigation of vortex-induced vibrations of sub-sea communications cables. In: Proceedings of the 6th International conference on Flow-Induced Vibration, London, UK : P.W. Bearman (ed). pp. 443–454.

Michelin, S., Doaré, O., 2013. Energy harvesting efficiency of piezoelectric flags in axial flows. Journal of Fluid Mechanics 714, 489–504.

Modarres-Sadeghi, Y., Mukundan, H., Dahl, J., Hover, F., Triantafyllou, M., 2010. The effect of higher harmonic forces on fatigue life of marine risers. Journal of Sound and Vibration 329, 43–55.

Mukundan, H., Modarres-Sadeghi, Y., Dahl, J., Hover, F., Triantafyllou, M., 2009. Monitoring viv fatigue damage on marine risers. Journal of Fluids and Structures 25, 617–628.

Naudascher, E., Rockwell, D., 1990. Flow-induced vibration - an engineering guide. Balkema A.A.

Nishino, T., Willden, R., 2012. The efficiency of an array of tidal turbines partially blocking a wide channel. Journal of Fluid Mechanics 708, 596–606.

Norberg, C., 2003. Fluctuating lift on a circular cylinder : review and new measurements. Journal of Fluids and Structures 17, 57–96.

Peng, Z., Zhu, Q., 2009. Energy harvesting through flow-induced oscillations of a foil. Physics of Fluids 21, 123602.

Singh, K., Michelin, S., de Langre, E., 2012a. The effect of non-uniform damping on flutter in axial flow and energy-harvesting strategies. Proceedings of the Royal Society A 468, 3620–3635.

Singh, K., Michelin, S., de Langre, E., 2012b. Energy harvesting from axial fluid-elastic instabilities of a cylinder. Journal of Fluids and Structures 30, 159–172.

Skop, R., Balasubramanian, S., 1997. A new twist on an old model for vortex-excited vibrations. Journal of Fluids and Structures 11, 395–412.

Srinil, N., 2010. Multi-mode interactions in vortex-induced vibrations of flexible curved/straight structures with geometric nonlinearities. Journal of Fluids and Structures 26, 1098–1122.

Tang, L., Païdoussis, M. P., Jiang, J., 2009. Cantilevered flexible plates in axial flow : Energy transfer and the concept of flutter mill. Journal of Sound and Vibration 326, 263–276.

Tognarelli, M., Taggart, S., Campbell, M., 2008. Actual viv response of full scale drilling risers: with and without supression devices. In: Proceedings of the ASME 27th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Estoril, Portugal. pp. OMAE2008–57046.

Vandiver, J., 1993. Dimensionless parameters important to the prediction of vortex-induced vibration of long, flexible cylinders in ocean currents. Journal of Fluids and Structures 7, 423–455.

Violette, R., de Langre, E., Szydlowski, J., 2007. Computations of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscilator model : Comparison with DNS and experiments. Computers and Structures 85, 1134–1141.

Violette, R., de Langre, E., Szydlowski, J., 2010. A linear stability approach to vortex-induced vibrations and waves. Journal of Fluids and Structures 26 (3), 442–466.

Williamson, C., Govardhan, R., 2004. Vortex-induced vibrations. Annual Review of Fluid Mechanics 36, 413–455.

Xu, W.-H., Zeng, X.-H., Wu, Y.-X., 2008. High aspect ratio (L/D) riser VIV prediction using wake oscillator model. Ocean Engineering 35, 1769–1774.

Yoshitake, Y., Sueoka, A., Yamasaki, M., Sugimura, Y., Ohishi, T., 2004. Quenching of vortex-induced vibrations of towering structure and generation of electricity using hula-hoops. Journal of Sound and Vibration 272, 21–38.

Zhu, Q., Haase, M., h. Wu, C., 2009. Modeling the capacity of a novel flow-energy harvester. Applied Mathematical Modelling 33, 2207–2217.

J. Fluid Mech. (2013), *vol.* 724, R2, doi:10.1017/jfm.2013.204



JFM RAPIDS
journals.cambridge.org/rapids

Self-similar vortex-induced vibrations of a hanging string

C. Grouthier[1],†, S. Michelin[1], Y. Modarres-Sadeghi[2] and E. de Langre[1]

[1]LadHyX, Department of Mechanics, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France
[2]Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Massachusetts, Amherst, MA 01003, USA

(Received 13 March 2013; revised 16 April 2013; accepted 16 April 2013)

An experimental analysis of the vortex-induced vibrations of a hanging string with variable tension along its length is presented in this paper. It is shown that standing waves develop along the hanging string. First, the evolution of the Strouhal number St with the Reynolds number Re follows a trend similar to what is observed for a circular cylinder in a flow for relatively low Reynolds numbers ($32 < Re < 700$). Second, the extracted mode shapes are self-similar: a rescaling of the spanwise coordinate by a self-similarity coefficient allows all of them to collapse onto a unique function. The self-similar behaviour of the spatial distribution of the vibrations along the hanging string is then explained theoretically by performing a linear stability analysis of an adapted wake-oscillator model. This linear stability analysis finally provides an accurate description of the mode shapes and of the evolution of the self-similarity coefficient with the flow speed.

Key words: flow–structure interactions, vortex shedding

1. Introduction

Vortex-induced vibrations (VIV) of slender structures are of major importance in many engineering fields. In offshore applications, for instance, a good knowledge of the dynamic loads exerted on risers and mooring cables is required to prevent fatigue damage (Baarholm, Larsen & Lie ; Modarres-Sadeghi *et al.*). VIV are self-sustained oscillations of an immersed bluff body originating in a strong coupling between the structure's dynamics and its induced fluctuating wake. This coupling may lead to a synchronization of the solid vibrations and vortex shedding frequencies, a phenomenon known as lock-in, resulting in large-amplitude oscillations (Blevins ; Williamson & Govardhan).

† Email address for correspondence: clement.grouthier@ladhyx.polytechnique.fr

© Cambridge University Press 2013

The case of long and flexible structures in VIV, most relevant to offshore applications, has been extensively studied using numerical computations (see e.g. Newman & Karniadakis ; Evangelinos & Karniadakis), experiments (Vandiver, Jaiswal & Jhingran ; Modarres-Sadeghi *et al.*) and reduced-order models (Violette, de Langre & Szydlowski ; Srinil). When a long flexible structure is placed perpendicular to the oncoming flow, higher vibration modes can be excited as the flow velocity is increased, through the successive synchronization of its structural modes with the local shedding frequency (Chaplin *et al.*). Spatial variations of the vortex shedding frequency, for example in sheared flows, significantly modify the dynamics from the canonical problem of tensioned cables in uniform flows (Mathelin & de Langre ; Bourguet, Karniadakis & Triantafyllou ; Bourguet *et al.*). Similarly, spatial variations of the cable's tension (for example, due to gravity and/or free end conditions) is expected to impact the structure's dynamics, in particular by localizing vibrations in regions with lower tension. This second configuration has so far received little attention (Park *et al.* ; Srinil). The present paper thus discusses an experimental investigation of the VIV of a hanging string, where gravity-induced tension varies from the bottom to the top.

Section 2 presents the experimental set-up and typical raw measurements. In § 3, the evolution of the dimensionless frequency of oscillations with Reynolds number is analysed, and § 4 identifies a self-similar behaviour in the spatial distribution of the amplitude of vibrations. This self-similarity is confirmed analytically in § 5 using a wake-oscillator model, before concluding remarks are given in § 6.

2. Experiments

2.1. *Experimental set-up*

Experiments were performed in the fluid–structure interactions laboratory of the University of Massachusetts in Amherst. Fixed at its top extremity, a chain was hung in the water channel and was submitted to a flow of constant speed U (figure a). The chain consisted of several spheres of equal diameter connected through short metallic rods (figure b). Three different chains were used, and their respective characteristics are shown in table , where L and D are the chain length and diameter, d is the distance between two successive spheres, h is the diameter of the connecting metallic rods and m_s is the chain mass per unit length. The cross-flow displacement $Y(Z, T)$ was recorded using a Phantom Miro M110 camera through a window located at the downstream end of the water channel (figure a). The camera was equipped with a lens of focal length 50 mm and aperture $f/1.4$. The position of the chain was obtained by tracking the contrast between the bright spheres and dark background (figure c), and filtering the resulting displacement signal around its dominant frequency. Some wake visualizations were also performed using dye released slightly upstream from the lower tip of the string.

The chains used in the experiments were heavy enough not to float while keeping a very small bending stiffness for small curvatures. Yet, significant nonlinear rigidity may appear for higher curvatures. When the wavelength is large in comparison with the sphere spacing d, the chain can be used to model an ideal string of equivalent diameter $D_{eq} = \pi D/4$. Here, D_{eq} is defined such that the equivalent string has the same cross-sectional area as the spheres, thereby neglecting the effect of the connecting rods on the fluid–solid coupling. The Reynolds number Re is based on this equivalent

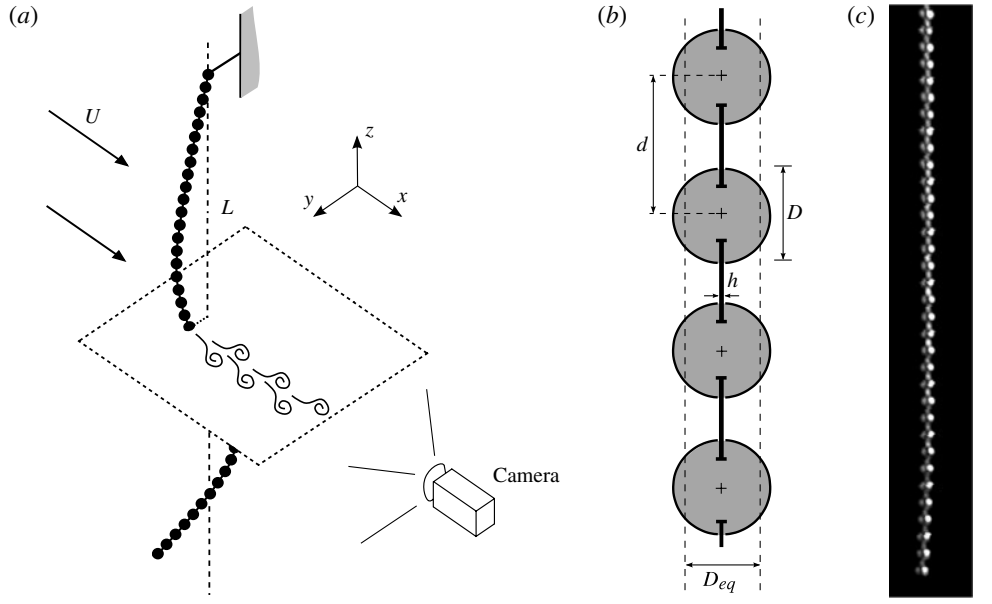


FIGURE 1. (*a*) Experimental set-up of the hanging string subject to a transverse flow. (*b*) Geometry of the chains that were used to model a string of equivalent diameter D_{eq}. (*c*) Visualization of chain 3 during one typical experiment.

	L (m)	D (mm)	d (mm)	h (mm)	m_s (g m^{-1})
Chain 1	0.48	2.0	3.0	0.4	8
Chain 2	0.48	3.1	4.5	0.6	21
Chain 3	0.48	4.4	6.3	0.8	29

TABLE 1. Dimensional properties of the three different chains used for the experiments.

diameter and reads as

$$Re = \frac{UD_{eq}}{\nu}, \tag{2.1}$$

where $\nu = 10^{-6}$ m^2 s^{-1} is the kinematic viscosity of water at room temperature. With this definition, the Reynolds number varies in these experiments between 32 and 700.

For all experiments, the flow velocity was sufficiently low for the string's static in-line deflection to be negligible, so that the flow may be considered perpendicular to the string. The in-line vibrations were too small to be detected in our set-up and are therefore not investigated further, although they are known to exist in such configurations (Huera-Huarte & Bearman). The present study consequently focuses on the string's cross-flow oscillations. Finally, it ought to be mentioned here that it was not possible to capture the motion of the top 6 cm (of the total 48 cm) of the string because of the size of the window through which videos were recorded. This does not affect the conclusions and explains why the top displacement of the string is not shown later in figure (*a*,*b*).

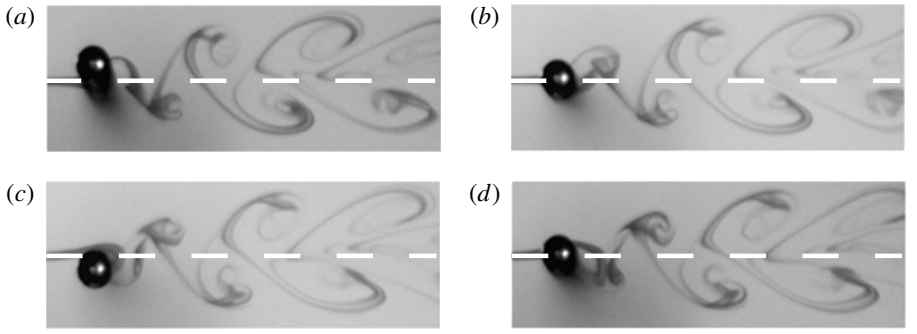


FIGURE 2. Wake visualization during one cycle of oscillations of chain 2 for $Re = 106$. The white dashed line on each panel shows the location of the chain at rest. Panels (*a*,*c*) correspond to the minimum and maximum displacement of the chain, respectively.

2.2. *Wake visualizations*

Wake visualizations were performed in order to confirm that the measured displacements actually are vortex-induced vibrations. Four snapshots showing the tip displacement of the hanging string as well as its near wake are shown in figure . The vortex shedding behind the string is synchronized with the periodic oscillations of the solid: one vortex is shed every time the free end of the hanging string reaches its minimum or maximum displacement, as shown in figure . The frequency of vibrations of the body and the frequency of the vortex shedding are locked, and the vibrations result from this strong coupling between the string's dynamics and its induced wake.

2.3. *Motion of the string*

The string's transverse displacement was obtained from the videos and is plotted in figure (*a*,*b*) for two typical cases, showing standing waves along the hanging string. The maximum amplitudes are significant – of the order of half of the equivalent diameter. The vibrations with the highest amplitudes are concentrated in the lower part of the string, where the tension is lower.

The standing wave can be decomposed into its temporal and spatial components, as shown in figure (*c*)–(*f*). As the flow velocity increases, a higher structural mode is excited, which corresponds to a higher frequency of oscillations, since VIV are due to the lock-in between vortex shedding and one of the string's eigenfrequencies. In the sample cases shown in figure , the second and the fourth structural modes are excited, respectively, as the flow velocity increases from $U = 0.033$ m s^{-1} to $U = 0.064$ m s^{-1}. The excitation of higher modes at higher flow velocities is expected in VIV of flexible cylinders (Chaplin *et al.* ; Trim *et al.*).

3. Strouhal number

The natural frequency of vortex shedding, F_s, is defined here as the frequency at which vortices would be shed if the string were fixed and perfectly rigid. The Strouhal number is thus defined as

$$St = \frac{F_s D_{eq}}{U}. \tag{3.1}$$

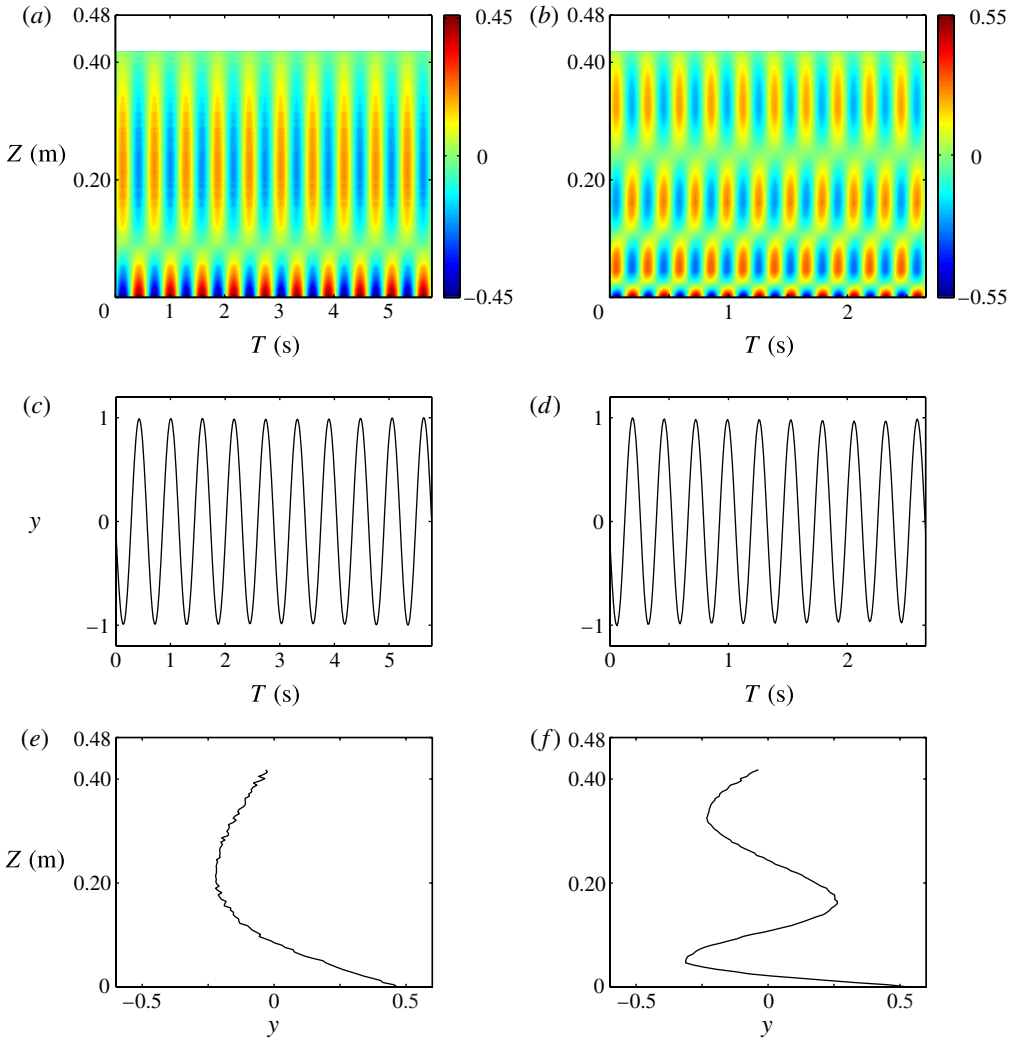


FIGURE 3. Vortex-induced vibrations of chain 3 for two typical experiments, (*a*,*c*,*e*) $U = 0.033\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ ($Re = 115$) and (*b*,*d*,*f*) $U = 0.064\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ ($Re = 221$). (*a*,*b*) Dimensionless displacement $y = Y/D_{eq}$ (level step 0.015). (*c*,*d*) Rescaled tip displacement. The amplitudes of the temporal components were arbitrarily set to 1. (*e*,*f*) Spatial component of the solid's displacement, derived as the time-averaged shape of the string over all the time steps for which the tip displacement is larger than three-quarters of the tip root-mean-square amplitude.

For flexible structures, VIV originate in the lock-in between the frequency of vortex shedding and one of the eigenfrequencies of the structure (Wu, Ge & Hong). The measured frequency F of the string's displacement is therefore close to, but not equal to, the natural frequency of vortex shedding, F_s. The Strouhal number, as defined in (3.1), may thus be estimated here by FD_{eq}/U, and is shown in figure as a function of the Reynolds number.

The Strouhal number St is close to 0.2, which is the value commonly used for cylinders over a wide range of Re (Blevins ; Naudascher & Rockwell). Moreover, St increases with Re for $Re < 200$ before it reaches a constant level slightly

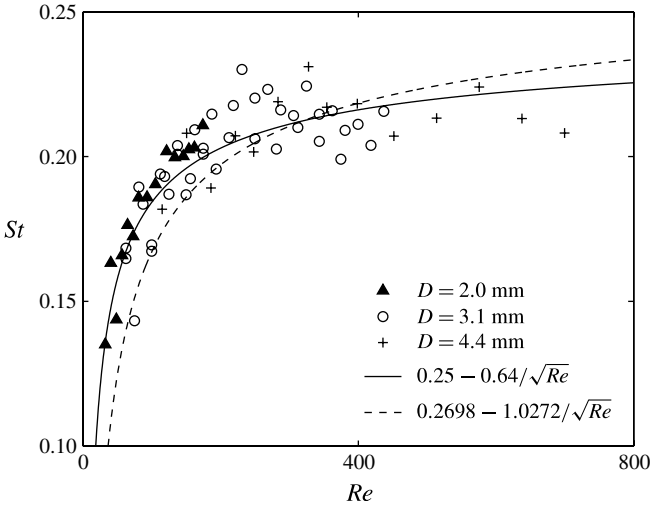


FIGURE 4. Strouhal number as a function of the Reynolds number: measurements (symbols), best fit in a series in $1/\sqrt{Re}$ (full line) and fit introduced in Williamson & Brown ( ) (dashed line).

higher than 0.2 for higher values of Re. This trend is very similar to the St versus Re plot that can be found, for instance, in Blevins ( ) or in Norberg ( ). It was also shown in Fey, König & Eckelmann ( ) and in Williamson & Brown ( ) that a fit in a series of $1/\sqrt{Re}$ is appropriate to interpolate the variations of St in this range of Re. Such a fit is derived for the presented data and is plotted in figure ,

$$St = 0.25 - \frac{0.64}{\sqrt{Re}}. \tag{3.2}$$

The coefficients proposed in Williamson & Brown ( ) also result in a reasonably good fit for the presented measurements (figure). This shows the relevance of this estimation of the Strouhal number as well as the consistency of its variations with Re. The chosen definition of D_{eq} may impact the experimental curve of figure , therefore explaining part of its deviation from the fits derived in Williamson & Brown ( ).

Equation (3.2) is consequently used in the remainder of the paper to estimate the Strouhal number of the discussed experimental results.

4. Mode shapes

4.1. *Characteristic dimensions of the problem*

The equivalent diameter D_{eq} is a natural characteristic length for the cross-flow displacement $Y(Z, T)$, and the natural frequency of vortex shedding $\omega_s = 2\pi St\, U/D_{eq}$ defines a characteristic frequency for the string's VIV.

For the spanwise coordinate Z, a characteristic length Z_c is derived from a typical phase speed, as follows. The tension is induced by gravity g, and a characteristic value for the tension consequently is $\Theta = m_s g Z_c$. The solid is completely immersed, so its effective mass per unit length reads $m_t = m_s + \rho\pi D_{eq}^2/4$, where an added mass coefficient of 1 is assumed, $\rho = 1000$ kg m^{-3} being the fluid density. By defining a

phase speed $c = \sqrt{m_s g Z_c / m_t} = \omega_s Z_c$, a characteristic length is derived as

$$Z_c = \frac{m_s}{m_t} \frac{g}{\omega_s^2}. \tag{4.1}$$

The dimensionless set of parameters consequently is

$$y = \frac{Y}{D_{eq}}, \quad t = \omega_s T, \quad z = \frac{Z}{Z_c}. \tag{4.2}$$

With this scaling, the problem is characterized by one dimensionless coefficient, the string's reduced length $\ell = L/Z_c$, which depends on the flow speed and thus changes from one experiment to another.

4.2. *Self-similar mode shapes*

For moderate values of Re, $Re \leqslant Re_c$ with $Re_c = 110$ for chain 1, $Re_c = 160$ for chain 2 and $Re_c = 250$ for chain 3, vortex-induced standing waves are observed. Mode shapes are extracted for every experiment and are normalized using the L^2 norm. Figure ⌜(*e*,*f*) shows some similarity in the mode shapes of different experiments: the mode shape of the lower flow velocity case (figure ⌜*e*) and the bottom part of the high velocity one ($Z < 0.10$ m; figure ⌜*f*), actually look alike. We therefore search here for a self-similar behaviour of the spatial distribution of the string's vibrations. Considering the mode shape of the experiment with the highest value of ℓ as a reference $\varphi_{ref}(z)$, the spanwise coordinate z is rescaled for each experiment as z/κ, so as to minimize the L^2 norm of $\varphi(z/\kappa) - \varphi_{ref}(z)$:

$$E^2(\kappa) = \int_0^{\kappa \ell} \left[\varphi\left(\frac{z}{\kappa}\right) - \varphi_{ref}(z) \right]^2 \mathrm{d}z. \tag{4.3}$$

All the rescaled mode shapes are plotted as a function of κz in figure ⌜(*a*). The collapse of all the mode shapes onto the same function proves their self-similarity. As ℓ increases with Re, every experiment has a contribution to the lower region of the graph. There are consequently many more points at the bottom of the curve, which explains the higher scatter of the experimental data on this part of the plot.

The evolution of the self-similarity coefficient κ with ℓ is plotted on figure ⌜(*c*). It strongly depends on the string's reduced length ℓ, and exhibits many discontinuities. Each one of the continuous parts of this indented curve was observed to correspond to a different mode of vibration of the hanging string. For instance, the two cases shown in figure ⌜(*a*,*b*) correspond to the points *A* and *B* in figure ⌜(*c*), where the second and fourth structure modes are excited, respectively. The discontinuities in the evolution of the self-similarity coefficient κ therefore seem to be associated with changes in the modes of vibrations. Further insight into this mode selection is provided in the next section using a wake-oscillator model.

5. A linear wake-oscillator model

Wake-oscillator models are reduced-order models (Hartlen & Currie ⌜) that have been proven recently to render well the main features of the dynamics of a continuously flexible structure in VIV, in particular its frequency and mode shape (Violette *et al.* ⌜). Moreover, the linear stability analysis of such a model has already shown a good ability to predict the dominant zone of each mode as well as its particular mode shape and frequency for tensioned cables in VIV (Violette, de Langre

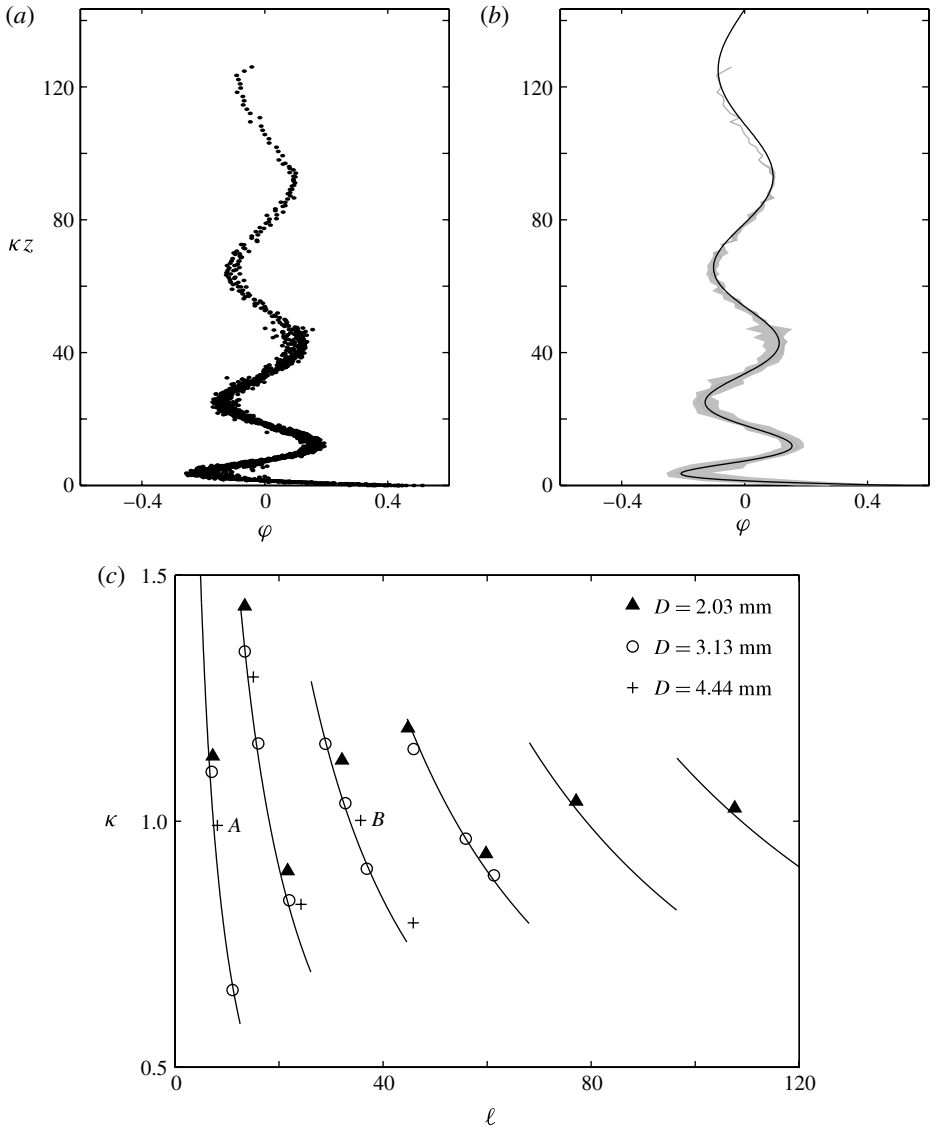


FIGURE 5. Self-similarity of the mode shapes. (*a*) Superposition of all the experimental mode shapes as a function of the rescaled spanwise coordinate. (*b*) Comparison between the experimental mode shapes (grey) and the prediction of the linear model in § 5 (black full line). (*c*) Evolution of the self-similarity coefficient κ with the dimensionless length of the hanging string ℓ, obtained from the experimental data (symbols) and using the linear model (full line).

& Szydlowski). This approach is adapted here to the case of a hanging string, where tension varies.

The dimensionless equation for the cross-flow displacement of the hanging string reads as

$$\ddot{y} - (zy')' = f_{fluid}, \tag{5.1}$$

where f_{fluid} stands for the fluid forces on the solid apart from the added mass effect, which is already included in the definition of the effective mass per unit length m_t (Facchinetti, de Langre & Biolley). The fluid forcing is therefore proportional to a fluctuating lift coefficient, $f_{fluid} = Mq$, where $q = 2C_L/C_{L0}$ and $M = C_{L0}/16\mu\pi^2 St^2$, C_{L0} being the mean value of the fluctuating lift coefficient acting on the string and $\mu = m_t/\rho D_{eq}^2$ its mass ratio. The evolution of q satisfies a harmonic oscillator equation forced by the string's dynamics,

$$\ddot{q} + q = A\ddot{y}. \tag{5.2}$$

Following Norberg ( ) and Violette *et al.* ( ), the values of the model parameters are taken as $A = 12$, $C_{L0} = 0.3$. Looking for solutions of the form $[y, q] = \mathrm{Re}[e^{i\omega t}(\varphi(z), \psi(z))]$, it results from (5.2) that $\psi = A\omega^2\varphi/(\omega^2 - 1)$. Equation (5.1) consequently becomes

$$(z\varphi')' + k^2\varphi = 0, \tag{5.3}$$

where the wavenumber k and the frequency ω are linked through the dispersion relation

$$\omega^4 + \omega^2(AM - 1 - k^2) + k^2 = 0. \tag{5.4}$$

The displacement of the string's lower end must remain finite, leading to the solution $\varphi(z) = \mathrm{J}_0(2k\sqrt{z})$ for (5.3), where J_0 is the zero-order Bessel function of the first kind (Triantafyllou & Triantafyllou ; Park *et al.*). The finite length of the string and the boundary condition at the fixed upper end restrict k to discrete values, namely

$$k_n = \frac{\alpha_n}{2\sqrt{\ell}}, \tag{5.5}$$

where α_n are the successive zeros of the Bessel function J_0.

For given values of n and ℓ, the dispersion relation (5.4) provides the growth rate of an unstable mode as

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{-k_n^2 + 2k_n + AM - 1}. \tag{5.6}$$

From (5.5) and (5.6), it can be found that mode n is the most unstable mode for values of the dimensionless length ℓ in the interval

$$\tfrac{1}{16}(\alpha_{n-1} + \alpha_n)^2 < \ell < \tfrac{1}{16}(\alpha_n + \alpha_{n+1})^2. \tag{5.7}$$

The most unstable mode shape is $\mathrm{J}_0(2k_n\sqrt{z})$ with $k_n = \alpha_n/2\sqrt{\ell}$ over the interval defined by (5.7). This form is consistent with the self-similarity of the mode shapes that has been observed experimentally in the previous section. The mode shapes are truncations of a unique function $\mathrm{J}_0(2k_n\sqrt{z})$ and the self-similarity coefficient is linked with the wavenumbers k_n by the relation

$$\kappa = \left(\frac{k_n}{k_{ref}}\right)^2, \tag{5.8}$$

where k_{ref} is the most unstable wavenumber corresponding to φ_{ref}. The value of $k_{ref} = 1.017$ is derived according to the preceding analysis (equation (5.5)). The most unstable linear mode is shown in figure (*b*), in excellent agreement with the mode shapes obtained experimentally. Furthermore, the values of the self-similarity coefficient κ obtained analytically from (5.8) are also plotted in figure (*c*). Again,

the agreement of the predictions obtained using the linear wake-oscillator model with experiments is excellent. The stability analysis explains and predicts analytically each feature of the dependence of κ with ℓ, namely the origin and location of the discontinuities (change in the most linearly unstable mode) and the variations of κ.

The real part of the most unstable frequency is also derived in the same manner as the growth rate but is not shown here for brevity. Its evolution with ℓ, centred around a value close to 1, exhibits some discontinuities because of the mode selection, similarly to the wavenumber k. The impact of the mode selection may explain part of the dispersion of the Strouhal number measurements in figure .

6. Conclusion

VIV of flexible slender bodies are characterized by the possibility of successive excitation of higher structural modes as the flow velocity is increased. In this paper, the dynamics of a hanging string in VIV is investigated experimentally to explore the effect of non-uniform tension. Over the range of *Re* considered, standing vortex-induced waves were observed, with a concentration of the highest amplitudes in the regions of lowest tension. Excitations of up to the seventh mode of the string were observed for relatively low *Re*. The experiments prove the self-similarity of the spatial distribution of the vibrations, and these dynamics were fully characterized. Furthermore, the variations of the self-similarity coefficient with the reduced length of the string was explained, using a linear stability analysis, as the result of the successive lock-ins of the different eigenmodes of the string. This standing wave structure breaks down at higher *Re*: travelling waves are indeed observed in the lower part of the chain that exhibits the largest amplitude of vibrations. This phenomenon, which is beyond the scope of the present paper, should be further studied to identify whether it is intimately linked to the system used in the present experiments or a fundamental property of hanging strings in high-*Re* flows.

References

Baarholm, G. S., Larsen, C. M. & Lie, H. 2006 On fatigue damage accumulation from in-line and cross-flow vortex-induced vibrations on risers. *J. Fluids Struct.* **22**, 109–127.

Blevins, R. D. 1990 *Flow-Induced Vibration*, 2nd edn. Van Nostrand Reinhold.

Bourguet, R., Karniadakis, G. E. & Triantafyllou, M. S. 2011*a* Vortex-induced vibrations of a long flexible cylinder in shear flow. *J. Fluid Mech.* **677**, 342–382.

Bourguet, R., Modarres-Sadeghi, Y., Karniadakis, G. E. & Triantafyllou, M. S. 2011*b* Wake–body resonance of long flexible structures is dominated by counterclockwise orbits. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 134502.

Chaplin, J. R., Bearman, P. W., Huera-Huarte, F. J. & Pattenden, R. J. 2005 Laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a vertical tension riser in a stepped current. *J. Fluids Struct.* **21**, 3–24.

Evangelinos, C. & Karniadakis, G. E. 1999 Dynamics and flow structures in the turbulent wake of rigid and flexible cylinders subject to vortex-induced vibrations. *J. Fluid Mech.* **400**, 91–124.

Facchinetti, M. L., de Langre, E. & Biolley, F. 2004 Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations. *J. Fluids Struct.* **19**, 123–140.

Fey, U., König, M. & Eckelmann, H. 1998 A new Strouhal–Reynolds-number relationship for the circular cylinder in the range $47 < Re < 2 \times 10^5$. *Phys. Fluids* **10** (7), 1547–1549.

Hartlen, R. T. & Currie, I. G. 1970 Lift-oscillator model for vortex-induced vibration. *J. Engng Mech. ASCE* **96**, 577–591.

HUERA-HUARTE, F. J. & BEARMAN, P. W. 2009 Wake structures and vortex-induced vibrations of a long flexible cylinder – Part 1: Dynamic response. *J. Fluids Struct.* **25**, 979–990.

MATHELIN, L. & DE LANGRE, E. 2005 Vortex-induced vibrations and waves unders shear flow with a wake oscillator model. *Eur. J. Mech. (*B/*Fluids*) **24**, 478–490.

MODARRES-SADEGHI, Y., CHASPARIS, F., TRIANTAFYLLOU, M. S., TOGNARELLI, M. & BEYNET, P. 2011 Chaotic response is a generic feature of vortex-induced vibrations of flexible risers. *J. Sound Vib.* **330**, 2565–2579.

MODARRES-SADEGHI, Y., MUKUNDAN, H., DAHL, J. M., HOVER, F. S. & TRIANTAFYLLOU, M. S. 2010 The effect of higher harmonic forces on fatigue life of marine risers. *J. Sound Vib.* **329**, 43–55.

NAUDASCHER, E. & ROCKWELL, D. 1990 *Flow-Induced Vibration – an Engineering Guide*. A.A. Balkema.

NEWMAN, D. J. & KARNIADAKIS, G. E. 1997 A direct numerical simulation study of flow past a freely vibrating cable. *J. Fluid Mech.* **344**, 95–136.

NORBERG, C. 2003 Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *J. Fluids Struct.* **17**, 57–96.

PARK, H. I., HONG, Y. P., NAKAMURA, M. & KOTERAYAMA, W. 2002 An experimental study on transverse vibrations of a highly flexibe free-hanging pipe in water. In *Proceedings of the Twelfth International Offshore and Polar Engineering Conference, ISOPE, Kitakyushu, Japan*, pp. 199–206. International Society of Offshore and Polar Engineers.

SRINIL, N. 2010 Multi-mode interactions in vortex-induced vibrations of flexible curved/straight structures with geometric nonlinearities. *J. Fluids Struct.* **26**, 1098–1122.

SRINIL, N. 2011 Analysis and prediction of vortex-induced vibrations of variable-tension vertical risers in linearly sheared currents. *Appl. Ocean Res.* **33**, 41–53.

TRIANTAFYLLOU, M. S. & TRIANTAFYLLOU, G. S. 1991 The paradox of the hanging string: an explanation using singular perturbations. *J. Sound Vib.* **148** (2), 343–351.

TRIM, A. D., BRAATEN, H., LIE, H. & TOGNARELLI, M. A. 2005 Experimental investigation of vortex-induced vibration of long marine risers. *J. Fluids Struct.* **21**, 335–361.

VANDIVER, J. K., JAISWAL, V. & JHINGRAN, V. 2009 Insights on vortex-induced, traveling waves on long risers. *J. Fluids Struct.* **25**, 641–653.

VIOLETTE, R., DE LANGRE, E. & SZYDLOWSKI, J. 2007 Computations of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscilator model: comparison with DNS and experiments. *Comput. Struct.* **85**, 1134–1141.

VIOLETTE, R., DE LANGRE, E. & SZYDLOWSKI, J. 2010 A linear stability approach to vortex-induced vibrations and waves. *J. Fluids Struct.* **26** (3), 442–466.

WILLIAMSON, C. H. K. & BROWN, G. L. 1998 A series in $1/\sqrt{Re}$ to represent the Strouhal–Reynolds number relationship of the cylinder wake. *J. Fluids Struct.* **12**, 1073–1085.

WILLIAMSON, C. H. K. & GOVARDHAN, R. 2004 Vortex-induced vibrations. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36**, 413–455.

WU, X., GE, F. & HONG, Y. 2012 A review of recent studies on vortex-induced vibrations of long slender cylinders. *J. Fluids Struct.* **28**, 292–308.

OPTIMAL ENERGY HARVESTING BY VORTEX-INDUCED VIBRATIONS IN CABLES

Clément Grouthier*
Sébastien Michelin
Emmanuel de Langre
LadHyX
Department of Mechanics
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau, France
Email: clement.grouthier@ladhyx.polytechnique.fr

ABSTRACT

The issue of global climate change and the growing energy demand induce a need for innovative energy harvesting devices. The possibility to harvest energy using VIV of a long tensioned cable or of an elastically-mounted rigid cylinder is investigated throughout this paper. A simple wake-oscillator model is used to represent the major characteristics of the complex dynamics of such structures. The optimal efficiency of the two devices are similar and are reached when the solid and its fluctuating wake are in lock-in condition. The sensitivity of the optima of such energy harvesters with flow velocity is also discussed.

INTRODUCTION

Geophysical flows represent a widely available source of clean energy, useful to tackle the global energy demand using for example wind turbines, marine turbines or wave energy converters.

An original way to extract energy from these flows is to take advantage of flow-induced vibrations, reviewed for example in Ref. [1]. For instance, several devices based on fluid-elastic instabilities like transverse galloping or flutter have already been introduced in Refs. [2–5]. Another kind of flow-induced oscillations that can be useful to harvest energy from a flow is the vortex-induced vibrations (VIV) of a bluff body [6]. The strong coupling between a solid and its fluctuating wake may lead to a lock-in phenomenon between the solid dynamics and the vortex shedding, resulting in high amplitude oscillations, that can be used for energy harvesting [7, 8].

Yet, the energy density in geophysical flows is small, and large systems are required in order to harvest significant amount of energy. Besides, VIV of long cables like oil rigs anchors or risers have been extensively investigated since they are of capital importance for offshore industry [9]. The possibility to harvest energy from a flow using VIV of long tensioned cables is consequently studied in this paper [10].

Extensive experimental and numerical analysis have shown that the dynamics of slender structures in VIV are very rich and complex [11–13]. The most important features of these dynamics (frequencies, wavenumbers) are however well predicted by a simple wake oscillator approach [14–16]. This approach is used in the present paper to investigate the energy harvesting using VIV of long tensioned cables.

In a first section, the model is presented and the generic case of energy extraction using VIV of an elastically-mounted short rigid cylinder is analyzed. Energy harvesting using VIV of an infinite tensioned cable is investigated in a second section.

THE ELASTICALLY-MOUNTED RIGID CYLINDER

The energy harvesting from an elastically-mounted rigid cylinder VIV is first investigated, see Fig. 1. The fluid density and velocity are respectively noted ρ and U, while D and m_s stand for the rigid cylinder diameter and mass per unit length. Let also r and h be the damping and stiffness coefficients of the elastic support.

*Address all correspondence to this author.

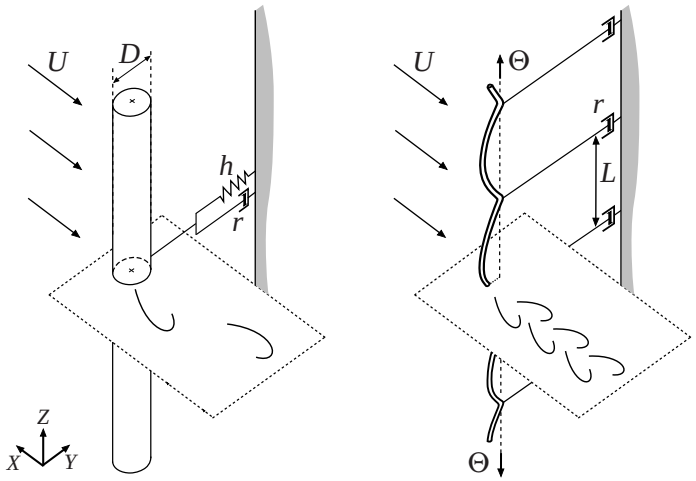


FIGURE 1. ENERGY HARVESTING FROM VIV OF (LEFT) AN ELASTICALLY-MOUNTED RIGID CYLINDER AND (RIGHT) AN INFINITE TENSIONED CABLE.

The fluid-solid model for energy harvesting

The cross-flow displacement Y of the cylinder is described by

$$m_t \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + (r + r_a) \frac{\partial Y}{\partial T} + hY = F_{wake}, \tag{1}$$

where $m_t = m_s + m_a$, $m_a = \pi\rho D^2 C_{M0}/4$ being the added mass per unit length and C_{M0} the added mass coefficient. The fluid added damping is defined by $r_a = \rho DUC_D/2$, where C_D is the cylinder drag coefficient and F_{wake} denotes the wake forcing on the body [14]. Two frequencies appear : (i) the natural frequency of the solid in still fluid $\omega_s = \sqrt{h/m_t}$ and (ii) the vortex shedding frequency behind a fixed cylinder, $\omega_f = 2\pi StU/D$, St being the Strouhal number [1]. Using $y = Y/D$ and $t = \omega_f T$, the dimensionless equation for the solid motion reads

$$\ddot{y} + \left(\xi + \frac{\gamma}{\mu}\right)\dot{y} + \delta^2 y = f_{wake}, \tag{2}$$

where $\delta = \omega_s/\omega_f$ is the frequency ratio and $\xi = r/m_t\omega_f$ the damping coefficient. The dimensionless fluid added damping coefficient γ/μ is defined by the stall parameter $\gamma = C_D/4\pi St$ [17] and the mass ratio $\mu = m_t/\rho D^2$ [14]. As far as the cylinder is concerned, harvesting energy from its motion comes to a loss of energy, which is modelled by the damping term $r\partial Y/\partial T$, or $\xi\dot{y}$ in dimensionless form. The efficiency of such an harvesting device is defined as the ratio between the time-averaged extracted power and the energy flux through the section of the cylinder $\rho DU^3/2$ [3, 8, 10, 18]. In dimensionless form, it reduces to

$$\eta = 16\mu\pi^3 St^3 \left\langle \xi\dot{y}^2 \right\rangle. \tag{3}$$

Following [14], a wake-oscillator approach is used to model f_{wake}. The fluctuating load due to the wake is assumed to be proportional to a fluctuating lift coefficient $q = 2C_L/C_{L0}$, which satisfies a Van der Pol oscillator equation, C_{L0} being a fluctuating lift coefficient. This second equation is then coupled with Eqn. (2) by an inertial forcing to define the fluid-solid model

$$\ddot{y} + \left(\xi + \frac{\gamma}{\mu}\right)\dot{y} + \delta^2 y = Mq, \tag{4a}$$

$$\ddot{q} + \varepsilon\left(q^2 - 1\right)\dot{q} + q = A\ddot{y}, \tag{4b}$$

where $\dot{(\,)}$ denotes derivation with respect to dimensionless time t, coefficient M being defined as $M = C_{L0}/16\mu\pi^2 St^2$ and A and ε are parameters based on experiments. In all the paper, the values $A = 12$, $\varepsilon = 0.3$, $C_D = 2$, $C_{L0} = 0.8$, $St = 0.17$, $\mu = 2.79$ and $C_{M0} = 1$ are fixed as in [10, 16], so that $M = 0.06$ and $\gamma/\mu = 0.34$. Equations (4) are integrated using finite differences and the limit cycle is analyzed in terms of efficiency.

Optimal energy harvesting and lock-in

The map of the efficiency as a function of the frequency ratio δ and the damping coefficient ξ is displayed on Fig. 2.

There is an optimal harvesting configuration leading to maximum efficiency, corresponding to a frequency ratio of $\delta = 0.89$ and a damping coefficient of $\xi = 0.20$. The corresponding optimal efficiency $\eta_{2D}^{opt} = 0.23$ is close to the value found in [7] for a similar system.

The efficiency vanishes for both small and large damping, as expected. For small damping, the amplitude saturates according to the Skop-Griffin diagram [6] and η thus varies linearly with ξ. On the other hand, large damping inhibits the solid motion leading to an amplitude varying as $1/\xi$: the efficiency $\eta \propto \xi\dot{y}^2$ consequently also vanishes as $1/\xi$ for large values of ξ.

The optimal frequency ratio $\delta = \omega_s/\omega_f = 0.89$ is close to 1, which corresponds to the synchronization of the wake and solid natural frequencies or lock-in [6],

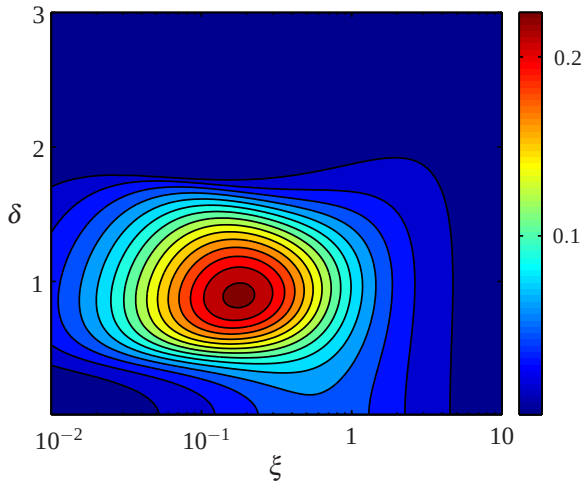


FIGURE 2. (a) HARVESTING EFFICIENCY AS A FUNCTION OF THE TWO HARVESTING PARAMETERS δ AND ξ (LEVEL STEP : 0.015).

known to lead to high amplitude oscillations. The optimal configuration for energy harvesting from VIV of an elastically-mounted short rigid cylinder corresponds to a lock-in condition for the frequency ratio δ and a well-balanced value of the damping coefficient, or harvesting intensity, ξ.

THE INFINITE TENSIONED CABLE

The possibility to harvest energy from a flow using VIV of an infinite tensioned cable is now investigated [10]. The same approach as in the previous section is followed, the vortex-induced vibrations of the structure are modelled by a wake-oscillator. This model is identical to the one used for the rigid cylinder case, except that the stiffness force hY is now replaced by the stiffness induced by the uniform tension Θ of the cable : $-\Theta\partial^2 Y/\partial Z^2$. The spanwise coordinate Z is scaled using a characteristic length based on the waves phase velocity $z = Z\omega_f\sqrt{m_t/\Theta}$ and the dimensionless form of the model reads

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - y'' = Mq, \tag{5a}$$

$$\ddot{q} + \varepsilon\left(q^2 - 1\right)\dot{q} + q = A\ddot{y}, \tag{5b}$$

where $(\,)'$ denotes derivation with respect to dimensionless spanwise coordinate z. The extraction of energy from a flow is still modelled by damping. In this configuration, discrete harvesters/dashpots are periodically distributed over the span of the cable, see Fig. 1, with a distance L between two harvesters of damping coefficient R. This

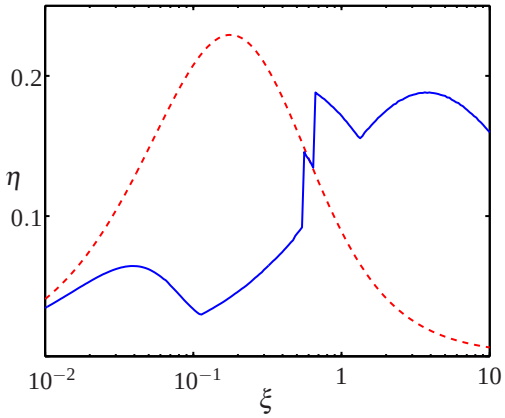


FIGURE 3. COMPARISON OF EFFICIENCIES OF (RED - DASHED) THE ELASTICALLY-MOUNTED RIGID CYLINDER CASE $\eta_{2D}(\xi)$ AND (BLUE - SOLID) THE INFINITE TENSIONED CABLE $\eta_{3D}(\xi)$.

introduces a damping condition at each damper location which reads in dimensionless form

$$y'(0,t) - y'(l,t) = l\xi\dot{y}(l,t), \tag{6}$$

where $\xi = R/Lm_t\omega_f$ is the dimensionless damping per unit length and $l = L\omega_f\sqrt{m_t/\Theta}$ the dimensionless distance between two harvesters.

The efficiency is again defined as the ratio between the time-averaged power extracted by a dashpot and the energy flux through a length L of the cable, which is still written using the dimensionless variables as Eqn. (3). The system of Eqns. (5) and (6) is integrated in space and time using finite differences on a spatially periodic domain, with the cable initially at rest $y = 0$ and a small random perturbation of the fluctuating lift q. The harvesting is studied as a function of the length between two dampers l and the damping per unit length ξ.

Optimal efficiency

In order to compare the energy harvesting using either an elastically-mounted rigid cylinder or an infinite tensioned cable, two optimal efficiency curves are derived, giving the maximum achievable efficiency for any value of the damping density ξ. For the two-dimensional case of the rigid cylinder, $\eta_{2D}(\xi)$ corresponds to the efficiency obtained for an optimal value of the frequency ratio δ at a given damping density ξ, whereas for the infinite tensioned cable case, $\eta_{3D}(\xi)$ is the optimal efficiency given by the choice of an optimal value of l at a given ξ. The two curves are shown on Fig. 3.

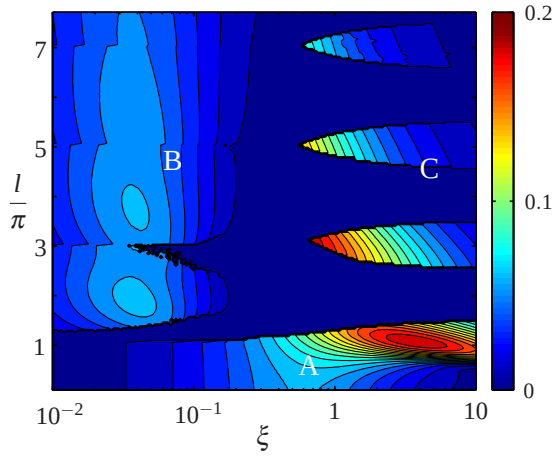


FIGURE 4. HARVESTING EFFICIENCY AS A FUNCTION OF THE LENGTH BETWEEN TWO HARVESTERS l AND THE DAMPING PER UNIT LENGTH ξ (LEVEL STEP : 0.01).

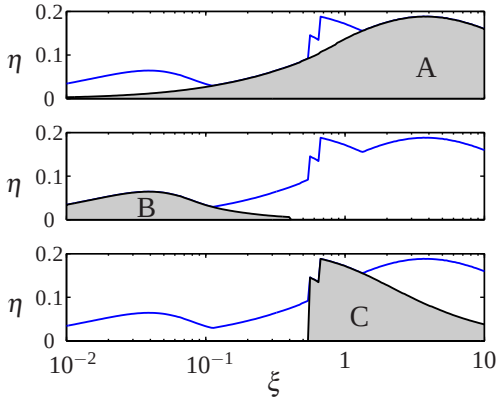


FIGURE 5. CONTRIBUTION OF EACH ZONE TO THE EFFICIENCY CURVE $\eta_{3D}(\xi)$.

The optimal performances of these two systems are similar, $\eta_{2D}^{opt} = 0.23$ while $\eta_{3D}^{opt} = 0.19$, justifying a deeper investigation of the new concept of energy harvesting using a tensioned cable.

The differences in the shape of the two curves η_{2D} and η_{3D} are yet striking. Contrary to the case of the rigid cylinder, the efficiency of energy harvesting via an infinite tensioned cable in VIV is far from a classical bell-shape curve. The optimal damping per unit length is also very different for the two configurations as, for the elastically-mounted rigid cylinder $\xi_{2D}^{opt} = 0.20$, whereas in the case of an infinite tensioned cable, $\xi_{3D}^{opt} = 3.65$. A deeper analysis of the efficiency dependence of the latter configuration with the two harvesting parameters l and ξ is thus necessary. Figure 4 displays the map of the efficiency as a function of these two parameters.

This map is actually much more complex than that of Fig. 2. Three zones may be defined to explain its structure.

The first one, zone A, corresponds to small distances between two dashpots for any damping. Within this zone, the classical influence of damping on the efficiency is retrieved. Actually, η vanishes for small and large damping, even if the peak is not at the same location for every values of l. Moreover, the overall optimal harvesting configuration lies in this zone : $\xi = 3.65$ and $l = 1.09\pi$ lead to $\eta = 0.19$. As shown on Fig. 5, this zone explains most of the efficiency curve $\eta_{3D}(\xi)$.

The second zone, zone B, corresponds to the left part of the map, typically $\xi < 0.4$, and larger values of l. The efficiency within this zone is rather small, it corresponds to the left low peak of the efficiency curve, Fig. 5. Within this zone, the motion of the cable is close to travelling waves of wavelength $\lambda = 2\pi, 4\pi, 6\pi,$ etc... Yet, the efficiency is low in zone B so it shall not be discussed any further.

Within zone C, the efficiency depends very strongly on the two parameters, especially on l. High efficiency tongues are surrounded with inefficient harvesting configurations, resulting in the discontinuities that can be seen on the efficiency curve, Fig. 5.

Mode shapes and efficiency

To gain some understanding of the efficient part of this complex energy map (zone A and C), the dynamics of the cable in these two zones are compared and shown on Fig. 6. Contrary to zone B, the motion of the cable is close to stationary waves.

The optimal cable displacement for energy harvesting is shown on Fig. 6(a), and the corresponding values of the parameters are reported in Tab. 1. The motion resembles a mode 1 vibration of a tensioned cable, with slight displacement of the dashpots.

If a fixed value of the damping ξ is considered, the cable motion evolves with an increasing length l, but it is always close to one of the classical harmonics of a tensioned cable. The cable dynamics actually jumps from even modes in zones where the harvesting efficiency is very low, Fig. 6(b), to odd modes in the high efficiency regions of zone C, Fig. 6(c).

The motion of the dashpot is forced by the jump in the cable slope between the two sides of the harvester, Eqn. (6). Odd modes are thus more likely than even ones to lead to high jumps in the cable slope, then to high efficiency, Fig. 7.

The mode number is defined as $n = 2l/\lambda$, where λ denotes the wavelength of the cable motion. This mode

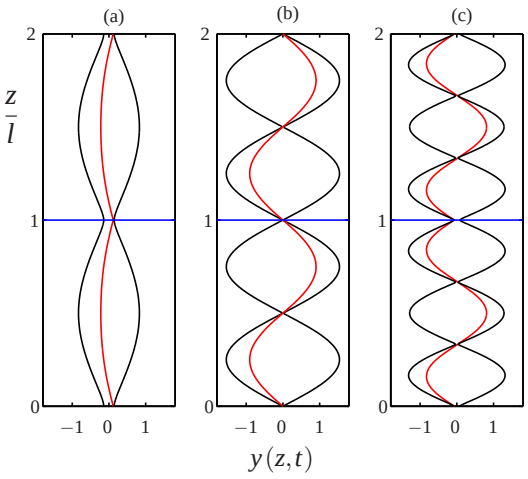


FIGURE 6. DYNAMICS OF THE CABLE IN ZONES A AND C, THE RED LINE STANDS FOR THE INSTANTANEOUS DISPLACEMENT OF THE CABLE, THE BLUE ONE FOR THE POSITION OF ONE OF THE DASHPOTS AND THE BLACK LINE REPRESENTS THE ENVELOPE OF THE CABLE MOTION : (a) $l = 3.43$, $\xi = 3.65$, $\eta = 0.19$, ZONE A (OPTIMAL CASE), (b) $l = 6.80$, $\xi = 3.65$, $\eta = 9.10^{-7}$, ZONE C, (c) $l = 9.56$, $\xi = 3.65$, $\eta = 0.07$, ZONE C.

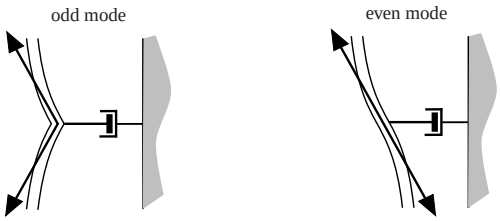


FIGURE 7. LOCAL MECHANISM OF FORCING OF AN HARVESTER BY STATIONARY MODES. LEFT : ODD MODES, HIGH EFFICIENCY, RIGHT : EVEN MODES, LOW EFFICIENCY.

number may not be an integer, in that case, the closest integer is used. Following Ref. [16], the linearized version of the model is used to derive the characteristics of the most unstable linear mode which will dominate the nonlinear response of the model. The linearized version of the model reads

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - y'' = Mq, \tag{7a}$$

$$\ddot{q} - \varepsilon\dot{q} + q = A\ddot{y}. \tag{7b}$$

The dominance zones of every mode number n are reported on the efficiency map of the infinite tensioned cable, see Fig. 8. There is a very good agreement between the discontinuities of the efficiency map and the frontiers between the dominance zones of two different mode numbers. In particular, the high efficiency tongues indeed correspond with regions where the dominant mode number is odd. In zone B, only even modes exist, which are expected to be less efficient.

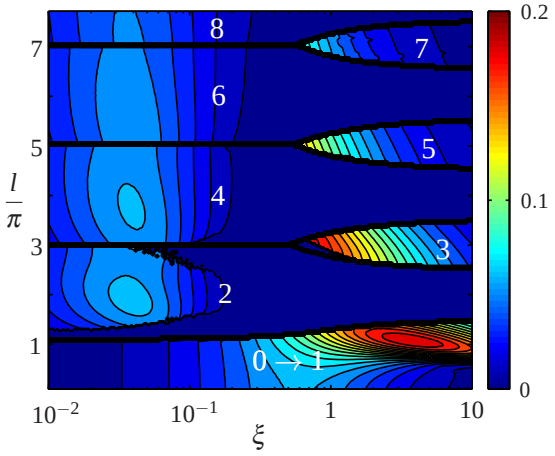


FIGURE 8. MODE NUMBERS ZONES REPORTED ON THE EFFICIENCY MAP (LEVEL STEP : 0.01).

Finally, the damping coefficient plays a double role in energy harvesting from VIV of an infinite tensioned cable as it controls both the local dynamics of the harvesters and the global mode shape of the solid displacement.

DISCUSSION

Energy harvesting using VIV of (i) an elastically-mounted rigid cylinder and (ii) an infinite tensioned cable was investigated in this paper and exhibit similar optimal efficiencies, of the order of 0.2.

Optimal harvesting and lock-in

For the two devices, the optimal harvesting configuration corresponds to a lock-in condition. For an elastically-mounted rigid cylinder, this lock-in condition takes the classical form of synchronization between the vortex shedding frequency and the solid natural frequency, $\delta = \omega_s/\omega_f = 1$.

In the case of an infinite tensioned cable, Refs. [15, 16] showed that lock-in corresponds to the highest growth rates of the fluid/solid coupled mode instability. The modes dominance zones shown on Fig. 8 can then also be regarded as the lock-in regions of each mode. The dispersion relation between frequency ω and wavenumber k derived from Eqn. 7 consequently results in a lock-in condition for an infinite cable, $k = 1$. This condi-

tion is yet modulated by the periodic boundary condition, Eqn. (6), leading to a lock-in condition for each mode. The solid adapts its own dynamics via its wavenumber in order to be always at lock-in, under the restrictions of the periodic harvesting boundary conditions. Considering an ideal lock-in condition $k = 1$ and the definition of the wavenumber, one may nevertheless derive optimal lengths corresponding with the lock-in condition for every mode. For the odd modes, which were shown to be the efficient ones, this results in the lock-in conditions $l = (2n+1)\,\pi$, which agree well on the location of the several peaks on Fig.5. For each mode number $2n+1$, it also defines a frequency ratio $\delta_{2n+1} = (2n+1)\,\pi/l$, playing a similar role as the frequency ratio $\delta = \omega_s/\omega_f$ of the rigid cylinder case. Reminding that the exact optimal configurations differ slightly from the exact lock-in conditions, see Tab. 1, the optimal frequency ratio indeed reads for the elastically-mounted rigid cylinder

$$\delta = \left(\frac{D}{2\pi S_t U}\right)\omega_s = 0.89, \tag{8}$$

and for the infinite tensioned cable

$$\delta_1 = \frac{\pi}{l} = \left(\frac{D}{2\pi S_t U}\right)\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\Theta}{m_t}} = 0.92. \tag{9}$$

These two conditions are of the same form and actually correspond to lock-in between the vortex shedding frequency and the natural frequency of the solid motion, the natural frequency of the rigid cylinder ω_s being replaced by the natural frequency of the cable vibrations

$$\omega_c = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\Theta}{m_t}}. \tag{10}$$

The major difference between the two optimal configurations lies in the values of the optimal damping intensity ξ, which differ by more than an order of magnitude between the two analyzed devices. This is due to the fact that for the tensioned cable with periodically distributed harvesting devices, ξ does not only drive the local dynamics of the dashpots, as it is the case for the short rigid cylinder, but it also controls the choice of the overall dynamics of the cable. This double role of the harvesters is of capital importance since the harvesting efficiency depends a lot on the cable overall motion, especially on the selected mode number.

TABLE 1. OPTIMAL CONFIGURATIONS FOR THE TWO CONSIDERED ENERGY HARVESTING DEVICES USING VIV.

	Rigid cylinder	Tensioned cable
η	0.23	0.19
ξ	0.20	3.65
δ	0.89	0.92

Optimal design of a real energy harvester

The present study may then be used to design an energy harvester based on VIV, using Tab. 1. The definition of the efficiency η provides an estimation of the maximum power extracted by a cable of length $L_{tot} = 100$ m and diameter $D = 4$ cm in a flow of mean velocity $\overline{U} = 1.5$ m.s^{-1}, namely $P = 1282.5$ W. It is interesting to note that this is far from being negligible and that it can be achieved for many different triplets (Θ, L, R).

For an elastically-mounted rigid cylinder of diameter $D = 4$ cm and mass ratio $\mu = 2.79$ placed in a flow of mean velocity $\overline{U} = 1.5$ m.s^{-1}, the dimensional optimal damping and stiffness are $r = 35.8$ kg.s^{-1}.m^{-1} and $h = 5673.2$ kg.s^{-2}.m^{-1}. For the tensioned cable mentioned above ($L_{tot} = 100$ m), under a tension $\Theta = 10$ kN, the damping coefficient of each dashpot is $R = 2645$ kg.s^{-1} and they are separated by a distance $L = 4.05$ m.

Influence of the velocity variations on the efficiency in real operating conditions

The dimensional parameters are fixed once and for all, but the operating conditions may drift from the optimal ones because of a varying flow velocity U. The influence of a varying flow speed on the performances of a harvesting device is now discussed. Three cases are considered : (i) an elastically-mounted rigid cylinder, (ii) an infinite cable with constant tension and (iii) an infinite cable with drag-induced tension. The values of the harvesting parameters are derived so that the optimal is reached for the mean flow speed $\overline{U}$. The evolution of the efficiency with the flow speed for each case is then plotted on Fig.9. In order to quantify the influence of flow speed fluctuations on the actual efficiency, the peak width w is defined as the ratio between the length of the velocity interval for which the efficiency is above 75% of the peak efficiency ΔU and the mean velocity $\overline{U}$, see Tab. 2.

For the rigid cylinder, it comes from the dimensionless parameters definitions that $\delta \propto 1/U$ and $\xi \propto 1/U$.

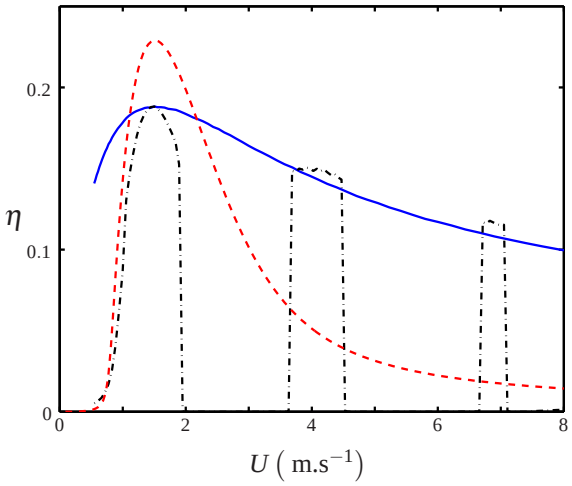


FIGURE 9. EVOLUTION OF THE EFFICIENCY WITH FLOW VELOCITY. (RED - DASHED) RIGID CYLINDER, (BLUE - SOLID) CABLE WITH DRAG-INDUCED TENSION AND (BLACK - DASH-DOT) CABLE WITH FIXED TENSION.

The curve of the evolution of η with U hence corresponds to the values of η along a curve $\delta \propto \xi$ passing through the optimal configuration. Even if the best efficiency is achieved as expected by this configuration, the width of the peak is small, see Tab. 2. The efficiency dramatically drops down as the current speed drifts away from its mean value.

For the long tensioned cable, if the tension is constant (induced for instance by a buoy on top of a cable anchored at its bottom), $\xi \propto 1/U$ and l varies linearly with U. The efficiency depends a lot on the flow speed, Fig.9. The peak width is even smaller than for the rigid cylinder, $w = 0.54$, and η even falls down to zero for some velocities. This solution should be avoided because of this high sensitivity to current velocity.

In the last case considered, the tension is due to a drag force acting on a well-chosen area A, which may differ from the cable area DL_{tot}. The area A has here been chosen so that the optimal harvesting parameters are identical to the constant tension case in order to compare this configuration with previous ones ($\Theta = 10$ kN for $U = \overline{U}$). In that case, $\Theta \propto U^2$, $\xi \propto 1/U$ and l is constant ($l = 3.43$), which sounds a valuable option as the efficiency depends a lot more on l than on ξ, Fig. 4. It actually appears as the best solution since the efficiency stays high for a wide range of velocity, Fig. 9. The peak value is lower than for the rigid cylinder, but the peak width is much larger, $w = 2.47$, see Tab. 2. The efficiency decrease as U deviates from $\overline{U}$ is slow, it even overtakes the rigid cylinder efficiency for $U \leq 1.1$ m.s^{-1} and $U \geq 2.2$ m.s^{-1}.

TABLE 2. WIDTH OF THE PEAK AROUND THE OPTIMAL FLOW VELOCITY $w = \Delta U/\overline{U}$.

Configuration	Peak width w
Rigid cylinder	0.73
Cable - constant tension	0.54
Cable - drag-induced tension	2.47

As a conclusion, the analysis performed throughout this paper has shown that energy harvesting using vortex-induced vibrations of a long tensioned cable seems, at least, as promising as using those of an elastically-mounted short rigid cylinder as in [7] or [8]. This new configuration may even have some advantages like the possibility to imagine very long cables able to harvest large amounts of energy, and to adapt their dynamics so that they are always near lock-in conditions, if their tension is induced by drag.

ACKNOWLEDGMENT

S. Michelin would like to acknowledge the support of a Marie Curie International Reintegration Grant within the 7th European Community Framework Program. Clement Grouthier is also supported by a Gaspard Monge scholarship of the Ecole Polytechnique.

REFERENCES

[1] Blevins, R., 1990. *Flow-induced vibration - Second edition*. Van Nostrand Reinhold, New York.

[2] Tang, L., Padoussis, M. P., and Jiang, J., 2009. "Cantilevered flexible plates in axial flow : Energy transfer and the concept of flutter mill". *Journal of Sound and Vibration*, ***326***, pp. 263–276.

[3] Barrero-Gil, A., Alonso, G., and Sanz-Andres, A., 2010. "Energy harvesting from transverse galloping". *Journal of Sound and Vibration*, ***329***, pp. 2873–2883.

[4] Doaré, O., and Michelin, S., 2011. "Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates : linear stability analysis and conversion efficiency". *Journal of Fluids and Structures*, ***27***, pp. 1357–1375.

[5] Singh, K., Michelin, S., and de Langre, E., 2012. "Energy harvesting from axial fluid-elastic instabilities of a cylinder". *Journal of Fluids and Structures*, ***30***, pp. 159–172.

[6] Williamson, C., and Govardhan, R., 2004. "Vortex-induced vibrations". *Annual review of fluid mechanics,* ***36***, pp. 413–455.

[7] Bernitsas, M. M., Raghavan, K., Ben-Simon, Y., and Garcia, E. M. H., 2008. "Vivace (vortex-induced vibration aquatic clean energy) : A new concept in generation of clean and renewable energy from fluid flow". *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering,* ***130***(041101), pp. 1–15.

[8] Barrero-Gil, A., Pindado, S., and Avila, S., 2011. "Extracting energy from vortex-induced vibrations : a parametric study". *Applied mathematical modelling*, p. *In press*.

[9] Baarholm, G., Larsen, C., and Lie, H., 2006. "On fatigue damage accumulation from in-line and cross-flow vortex-induced vibrations on risers". *Journal of Fluids and Structures,* ***22***, pp. 109–127.

[10] Grouthier, C., Michelin, S., and de Langre, E., 2012. "Energy harvesting using vortex-induced vibrations of tensioned cables". *Under review*, p. http://arxiv.org/abs/1203.0236.

[11] Newman, D. J., and Karniadakis, G. E., 1997. "A direct numerical simulation study of flow past a freely vibrating cable". *Journal of Fluid Mechanics,* ***344***, pp. 95–136.

[12] Bourguet, R., Karniadakis, G. E., and Triantafyllou, M. S., 2011. "Vortex-induced vibrations of a long flexible cylinder in shear flow". *Journal of fluid mechanics,* ***677***, pp. 342–382.

[13] Modarres-Sadeghi, Y., Chasparis, F., Triantafyllou, M., Tognarelli, M., and Beynet, P., 2011. "Chaotic response is a generic feature of vortex-induced vibrations of flexible risers". *Journal of Sound and Vibration,* ***330***, pp. 2565–2579.

[14] Facchinetti, M. L., de Langre, E., and Biolley, F., 2004. "Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations". *Journal of Fluids and Structures,* ***19***, pp. 123–140.

[15] de Langre, E., 2006. "Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter". *Journal of Fluids and Structures,* ***22***, pp. 783–791.

[16] Violette, R., de Langre, E., and Szydlowski, J., 2010. "A linear stability approach to vortex-induced vibrations and waves". *Journal of Fluids and Structures,* ***26***(3), pp. 442–466.

[17] Skop, R., and Balasubramanian, S., 1997. "A new twist on an old model for vortex-excited vibrations". *Journal of Fluids and Structures,* ***11***, pp. 395–412.

[18] Zhu, Q., Haase, M., and h. Wu, C., 2009. "Modeling the capacity of a novel flow-energy harvester". *Applied Mathematical Modelling,* ***33***, pp. 2207–2217.

Proceedings of the ASME 2013 International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering
OMAE 2013
June 9 - 14, 2013, Nantes, France

OMAE2013-10241

DRAFT: ENERGY HARVESTING BY VORTEX-INDUCED VIBRATIONS IN SLENDER STRUCTURES

Clement Grouthier*
Sebastien Michelin
Emmanuel de Langre
LadHyX
Department of Mechanics
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau, France
Email: clement.grouthier@ladhyx.polytechnique.fr

ABSTRACT

Vortex-induced vibrations (VIV) are self-sustained oscillations of an immerged bluff body strongly coupled with its fluctuating wake. In this paper, energy harvesting by VIV of slender structures is investigated using a wake-oscillator model. The generic case of an infinitely long tensioned cable with periodically distributed harvesters is first investigated. The linear stability analysis of the model is a good tool to understand the strong influence of the different harvesting parameters on the efficiency. As the achieved efficiency is rather high, VIV seem promising as a mechanism for energy harvesting. The more realistic case of a hanging string with a single energy harvesting device at its upper extremity is thus considered. The optimal efficiency is still rather high, travelling waves develop towards the harvester when parameters are in the efficient region of the parameter space, which is identified thanks to a forced analytical calculation.

INTRODUCTION

Geophysical flows are a widely available source of clean energy. Extracting energy out of these flows is part of the current global search for innovative tools to produce renewable energy. This is mainly done by wind turbines or marine turbines but another way to take advantage of these flows to harvest energy is to use the flow-induced vibrations of a bluff body [1]. For instance, one can think of producing energy thanks to the transverse galloping of a bluff body [2] or the flutter of a solid, which can be a flag [3, 4] or a slender body [5].

Another fluid-elastic instabilities, the vortex-induced vibrations (VIV) of an immerged bluff body, could also be used to harvest energy from geophysical flows. Vortex-induced vibrations are indeed self-sustained oscillations of a solid in strong interaction with its fluctuating wake. Moreover, those vibrations may reach high amplitudes (of the order of the diameter of the solid) when the natural frequencies of the solid and of its wake are close, this is the lock-in phenomenon. One can consequently think of extracting energy out of a geophysical flow thanks to these self-sustained high-amplitude oscillations of a rigid cylinder [6, 7].

However, energy density is very low in such flows. Very large systems are therefore required in order to produce a significant amount of energy. In the specific domain of VIV, such large structures have been extensively studied for offshore engineering issues to study and prevent any risk of fatigue failure of oil rigs anchor cables or risers [8–10]. These studies provide efficient tools for deriving the dynamics of large structures in VIV, like wake-oscillator models [11], and consequently opens new perspectives in the field of energy harvesting by vortex-induced vibrations.

*Address all correspondence to this author.

Copyright © 2013 by ASME

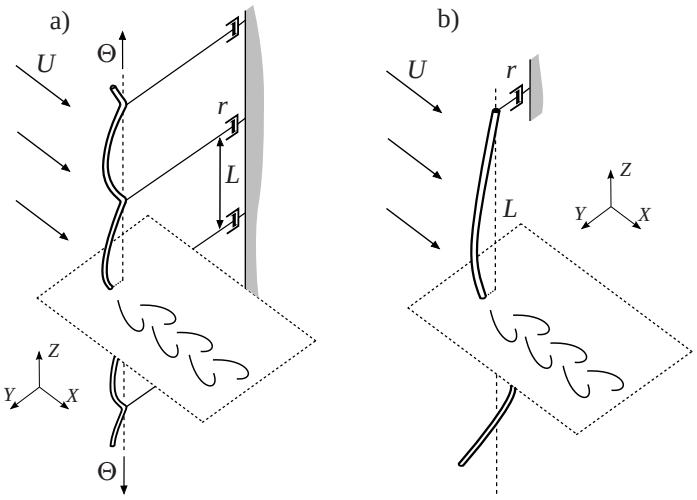


FIGURE 1. ENERGY HARVESTING BY VIV OF (a) AN INFINITE TENSIONED CABLE AND (b) A FINITE HANGING CABLE.

In this paper, the energy harvesting by cross-flow VIV of slender structures is investigated using a wake-oscillator model. In a first part, the model is introduced and the idealized case of an infinite tensioned cable with periodically distributed energy harvesting devices is assessed. It allows one to gain a deeper insight in the use of VIV as a mechanism for energy extraction out of geophysical flows. Then, the more realistic case of energy harvesting by VIV of a finite cable using a single harvester is investigated in a second part.

ENERGY HARVESTING BY VIV OF AN INFINITE TENSIONED CABLE

The energy harvesting by vortex-induced vibrations of an infinite tensioned cable is first investigated (Fig. 1(a)).

The fluid density and velocity are noted ρ and U, while D is the diameter of the cable and m_s its mass per unit length. The cable tension is constant and is noted Θ. As the cable is immerged in fluid, its effective mass per unit length reads $m_t = m_s + \pi\rho D^2 C_{M0}/4$ where C_{M0} is the added mass coefficient. There is also an added fluid damping $r_f = \rho DUC_D/2$ where C_D is the cable's drag coefficient. Finally, the dimensional cable equation reads

$$m_t \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} + r_f \frac{\partial Y}{\partial T} - \Theta \frac{\partial^2 Y}{\partial Z^2} = F_{fluid} \tag{1}$$

where Y is the cross-flow displacement of the cable, Z the spanwise coordinate and T the time.

We want to harvest energy form the VIV of this cable. An energy harvesting model has to be added to Eqn. (1). From the point of view of the solid, extracting energy from its dynamics comes to a net loss of energy. The choice has thus been made to model the energy extraction by an added damping term. As the harvesters are periodically distributed along the length of the cable, they appear as dashpots with a damping coefficient r and a distance L between two successive dashpots (Fig. 1). This introduces a periodic harvesting boundary condition, which is written

$$\Theta\left[\frac{\partial Y}{\partial Z}(0,T) - \frac{\partial Y}{\partial Z}(L,T)\right] = r\frac{\partial Y}{\partial T}(0,T) \tag{2}$$

Defining the dimensionless variables $y = Y/D$, $t = \omega_f T$ and $z = Z/Z_c$, where $\omega_f = 2\pi StU/D$ is the Strouhal frequency of the wake and $Z_c = \sqrt{\Theta/m_t}/\omega_f$ is a characteristic length based on the waves phase speed, the cable equations reads

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - y'' = f_{fluid}, \tag{3a}$$

$$y'(0,t) - y'(l,t) = l\xi\dot{y}(l,t), \tag{3b}$$

where $(.)'$, respectively $\dot{(.)}$, denotes derivation with respect to the dimensionless spanwise coordinate z, respectively dimensionless time t. The dimensionless fluid added damping coefficient γ/μ is defined by the stall parameter $\gamma = C_D/4\pi St$ [12] and the mass ratio $\mu = m_t/\rho D^2$ [13]. The values $C_D = 2$, $St = 0.17$, $\mu = 2.79$ and $C_{M0} = 1$ are fixed as in [14, 15].

The effect of the two dimensionless harvesting parameters $\xi = r/Lm_t\omega_f$ and $l = L/Z_c$ on the harvesting performances of the device is going to be studied. An efficiency η is defined as the ratio between the time-averaged harvested power and the flux of energy across the section of the cable $\rho DU^3/2$ [2,7,15,16] and reads, using dimensionless variables

$$\eta = 16\mu\pi^3 St^3 \left\langle \xi\dot{y}^2 \right\rangle. \tag{4}$$

Wake-oscillator model

Despite the high complexity of the dynamics of a cable in VIV [10, 17–19], it has been shown that a wake-oscillator model renders accurately the main features of the VIV of a tensioned cable [11, 20], as well as some of its finest properties like mode switching or time sharing [14]. The choice has consequently been made to use a wake oscillator to model the VIV of the considered tensioned cable. The fluid forcing on the cable is thus proportional to a fluctuating lift coefficient $q = 2C_L(t)/C_{L0}$. It therefore reads $f_{fluid} = Mq$, where $M = C_{L0}/16\mu\pi^2 St^2 = 0.06$. The evolution of q satisfies a Van der Pol oscillator equation, coupled with Eqn. (3a) according to [13]. It reads

Copyright © 2013 by ASME

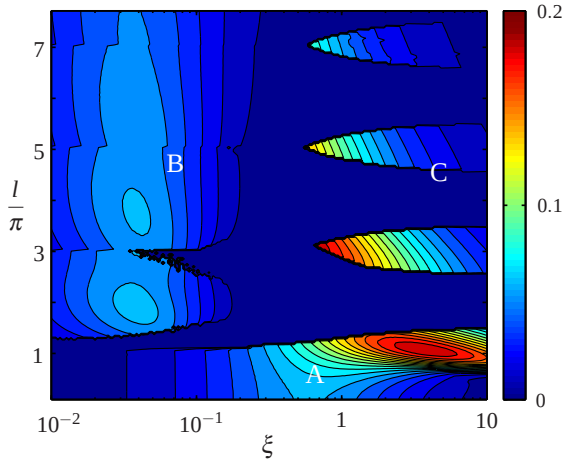


FIGURE 2. HARVESTING EFFICIENCY AS A FUNCTION OF THE LENGTH BETWEEN TWO HARVESTERS l AND THE DAMPING PER UNIT LENGTH ξ (LEVEL STEP : 0.01).

$$\ddot{q}+\varepsilon\left(q^2-1\right)\dot{q}+q=A\ddot{y}, \tag{5}$$

where the parameters $A=12$ and $\varepsilon=0.3$ are chosen as prescribed in [13].

Efficiency and selected vibration mode

The complete model can now be solved using finite differences and the limit cycle is analyzed in terms of efficiency. A parametric study of the variation of η with the two harvesting parameters l and ξ is performed (Fig.2).

An optimal configuration for energy harvesting can be identified, corresponding to $\xi=3.65$ and $l=1.09\pi$ and leading to an efficiency of $\eta_{inf}=0.19$. Even if this significant optimal efficiency suggests that VIV of tensioned cables is a promising mechanism for energy harvesting, the structure of the efficiency map is very complex. Indeed, there are for instance some discontinuities in Fig. 2. The efficiency exhibits a high sensitivity to the parameters l and ξ which has to be explained in order to conclude on the advantages of such a device.

To describe it accurately, the efficiency map is divided into three zones. The first one, zone A corresponds to the low values of l, i.e. the bottom of the map. Within this zone, η varies smoothly with the damping ξ. Indeed, the efficiency is found to follow a classical bell-shape evolution with the damping for any value of the parameter l in zone A. Zone A is above all interesting because of the optimal configuration, introduced previously, which belongs to it.

The second zone, zone B, corresponds to the low values of the damping coefficient for higher l. In zone B, the dynamics of the cable is close to travelling waves with even mode numbers. The achieved efficiencies are yet small all over zone B so it shall not be discussed further in this paper.

High efficiencies are reached in zone C, corresponding to the high damping region of the parameter space. Zone C is the part of Fig. 2 in which the variation of η with l are the strongest : there are several high-efficiency tongues surrounded by zero harvesting zones.

In zone C and in the optimal part of zone A, the efficiency η shows a very high sensitivity to the parameter l. Figure 3 compares the dynamics of the cable for one fixed value of the damping coeffcient $\xi=3.65$ but three different values of the distance between two dashpots. It appears that for each case, the motion is close to a stationary wave but vibration modes are different. When the efficiency is high, the mode number is odd, $n=1$ for the optimal case shown on Fig. 3(a) and $n=3$ on Fig. 3(c), in the first high efficiency tongue of zone C. On the contrary, Fig. 3(b) shows the displacement of the cable in a case where the efficiency is zero ; the mode number is here even, $n=2$.

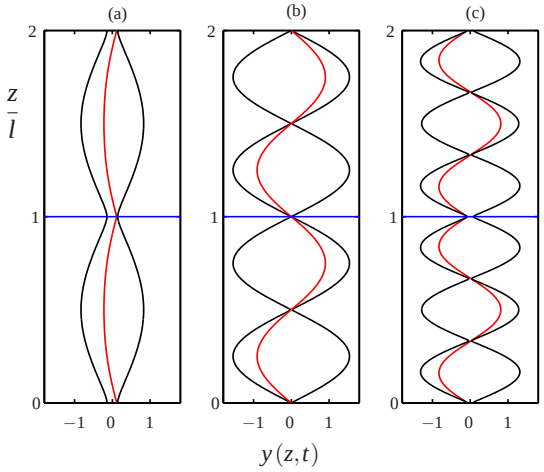


FIGURE 3. DYNAMICS OF THE CABLE IN ZONES A AND C, THE RED LINE STANDS FOR THE INSTANTANEOUS DISPLACEMENT OF THE CABLE, THE BLUE ONE FOR THE POSITION OF ONE OF THE DASHPOTS AND THE BLACK LINE REPRESENTS THE ENVELOPE OF THE CABLE MOTION : (a) $l=3.43$, $\xi=3.65$, $\eta=0.19$, ZONE A (OPTIMAL CASE), (b) $l=6.80$, $\xi=3.65$, $\eta=9.10^{-7}$, ZONE C, (c) $l=9.56$, $\xi=3.65$, $\eta=0.07$, ZONE C.

The cable dynamics actually jumps from even modes, in zones where the harvesting efficiency is very low, to odd modes in the high efficiency regions of zone C (Fig. 3(c)). The motion of the dashpot is forced by the jump in the cable slope between

Copyright © 2013 by ASME

the two sides of the harvester, Eqn. (3b). Odd modes are more likely than even ones to lead to high jumps in the cable slope, then to high efficiency (Fig. 4).

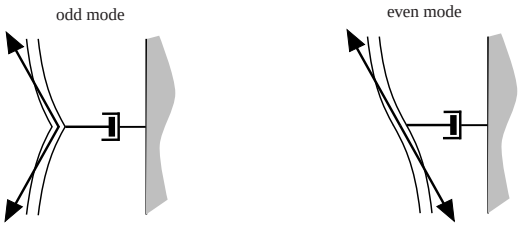


FIGURE 4. LOCAL MECHANISM OF FORCING OF AN HARVESTER BY STATIONARY MODES. LEFT : ODD MODES, HIGH EFFICIENCY / RIGHT : EVEN MODES, LOW EFFICIENCY.

The vibration mode being linked with the efficiency, a stability analysis of the linearized wake-oscillator model is performed to derive the most unstable mode for every set of parameters. Defining the mode number as the closest integer n to the ratio $2l/\lambda$, where λ is the wavelength of the most unstable mode, the dominance zone of each mode number is plotted on the efficiency map (Fig. (5)).

There is a good agreement between the structure of the efficiency map and the frontiers of the dominance zones of the different vibration modes. Moreover, the efficient parts of the parameter space exactly correspond with the regions where the most unstable mode has an odd mode number. The linear selection of the vibration modes is the mechanism that will lead to high or poor efficiency of the energy harvesting by VIV of tensioned cables. The harvesting parameters have to be chosen so that the most unstable linear mode, which will dominate the non-linear response of the system, has an odd mode number. The linear stability analysis is a quick and simple tool to estimate a priori how efficient the harvesting by such a device will be, given a particular set of parameters ξ and l.

ENERGY HARVESTING BY VIV OF A FINITE HANGING STRING

In the previous section, the idealized case of an infinite tensioned cable with periodically distributed energy harvesting devices has been investigated. VIV of such slender structures appear to be a good mechanism for energy harvesting.

The more realistic case of energy harvesting by VIV of a finite structure with a single energy harvester is investigated in this section. As maintenance is a big issue for devices extracting energy out of geophysical flows, it is interesting to develop a device with the energy harvester out of the water or at least, at its

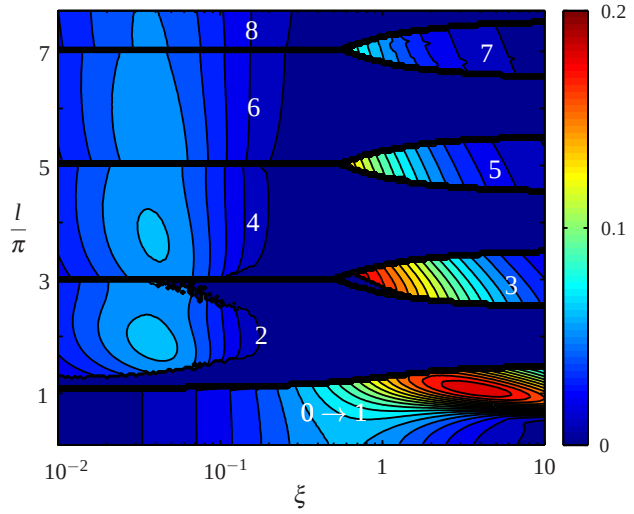


FIGURE 5. MODE NUMBERS ZONES REPORTED ON THE EFFICIENCY MAP (LEVEL STEP : 0.01).

surface. The easiest way to imagine such a system is to hang a cable with an energy harvester at its upper extremity (Fig. 1(b)).

Model

Contrary to the previous case, the tension is not constant anymore but induced by gravity. The cable equation from the model and the harvesting boundary condition consequently have to be adapted. Using the new characteristic length $Z_v = (m_s g)/(m_t \omega_f^2)$ to build the dimensionless spanwise variable $z = Z/Z_v$, the hanging string equation reads

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{\mu}\dot{y} - \left(zy'\right)' = f_{fluid}, \tag{6a}$$

$$-y'(l,t) = \xi \dot{y}(l,t), \tag{6b}$$

There are still two harvesting parameters : the dimensionless damping coefficient $\xi = r/Lm_t\omega_f$ and the dimensionless length of the hanging string $l = L/Z_v$. The efficiency is again defined as the ratio between the time-averaged harvested power and the flux of energy across the section of the cable. The only scaling that differs from the previous case is the spanwise coordinate's one, which does not appear in the efficiency η, which consequently still reads as in Eqn. 4.

Localized periodic forcing

The hanging string in still fluid is first considered. In order to gain some understanding of the energy extraction effects on the cable dynamics, a simple periodic displacement is applied at

Copyright © 2013 by ASME

the cable lower tip : $y(0,t) = y_0 e^{i\omega t} + c.c.$. The fluid forcing is set to zero $f_{fluid} = 0$ and the solid equations, eqns. 6 can be solved analytically.

The complete expression of the harvesting efficiency is derived. When the cable is long enough, the expression reduces to Eqn. 7, the efficiency decreases exponentially with $\sqrt{l}$,

$$\eta \propto \frac{\xi}{|k - \xi\omega l|^2} e^{-2Im(k)\sqrt{l}} \tag{7}$$

where $k^2 = \omega^2 - i\omega\gamma/\mu$ is the most unstable wavenumber given by the dispersion relation. This estimation of the efficiency gives a very simple relation between the two harvesting parameters that will lead to an optimal value for η. For any fixed value of l, the optimal damping coefficient is given by the relation

$$\xi_{opt}\sqrt{l} = \frac{|k|}{\omega} \tag{8}$$

This defines an optimal band on the parameter space which leads to high efficiencies. Coming back to dimensional parameter, this relation reads

$$\frac{r_{opt}\sqrt{L}}{m_s g} = \sqrt{1 - \frac{\rho D^2 C_D}{4\pi St m_t}} \tag{9}$$

which is independent of the flow speed U. In order to design such a device, the length L of the cable is first selected, then the damping coefficient r is estimated to achieve an efficient energy extraction. The flow speed may change, the set of parameters will still lead to good performances of the energy harvester.

Efficiency and travelling waves

Now, the fluid forcing is considered. The energy harvesting hanging string is immerged into the fluid and placed transverse to a flow. Similarly as in the first section, a wake-oscillator is used to model the fluid forcing, Eqn. 5. Using finite differences, the complete model is solved and a parametric study is performed in order to analyze the influence of the two harvesting parameters on η (Fig. 6).

First of all, it can be said that the structure of the efficiency map is much simpler than for the infinite tensioned cable with periodically distributed energy harvesting devices (Fig. 2). For every value of the parameter l, the efficiency follows an expected bell-shape curve as the damping goes from zero to infinity. There

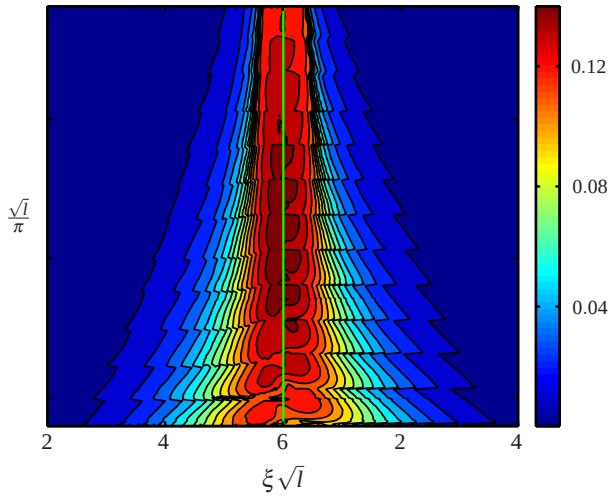


FIGURE 6. EFFICIENCY MAP OF THE ENERGY HARVESTING BY VIV OF A HANGING STRING (LEVEL STEP : 0.01) THE GREEN LINE GIVES THE OPTIMAL VALUE OF THE DAMPING PARAMETER GIVEN BY THE FORCED CALCULATIONS.

is also an optimal configuration ($l = 197.3$ and $\xi\sqrt{l} = 0.93$), the achieved efficiency of $\eta_{hang} = 0.15$ being significant.

Second, there is a band of high efficiency at the center of the map for any length of the hanging string. This band is centered around the value $\xi\sqrt{l} = 1$, this corresponds to the region of the parameter space predicted by the forced analytical calculations. Similarly as for the generic case of the periodic cable, a simple tool gives a quick way to estimate a priori if a set of parameters (ξ, l) will lead to an efficient harvesting or not. Nevertheless, $\xi\sqrt{l}$ is independent of the flow speed, Eqn. 9. Given a cable of fixed length, the selected damping will thus be optimal whatever the flow speed is.

Even though the system still selects discretized vibration modes because of the harvesting boundary conditions, this does not seem to be the mechanism that drives the performances of the energy extraction. Indeed, the mode selection is responsible for the fir tree pattern of Fig. 6, but efficient extraction can be obtained for any mode if an appropriate value of ξ is chosen. The trend of the evolution of the efficiency with the damping coefficient even seems to be quite independent of the mode that is selected.

In order to understand what mechanisms explain the structure of the efficiency map and why some parameters lead to more efficient energy harvesting than others, a comparison between the VIV dynamics of the hanging string with different harvesting configurations is presented (Fig. 7). The dynamics of a fixed hanging string of length l_{opt} with three different damping coefficients are indeed plotted.

The system is a hanging string, for which the linear eigenmodes are Bessel functions of the type $J_0(2k\sqrt{z})$. For both small

Copyright © 2013 by ASME

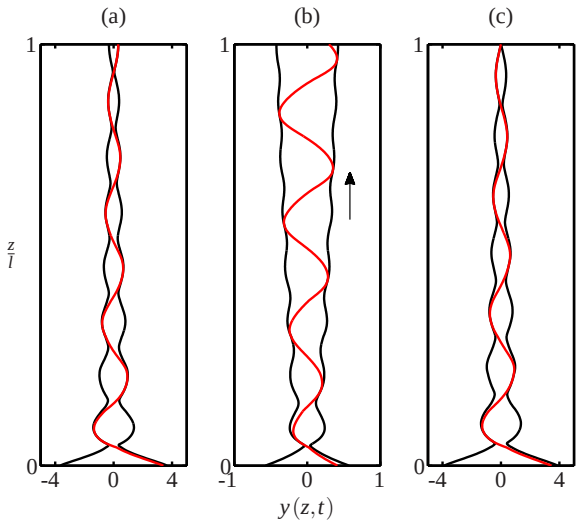


FIGURE 7. DYNAMICS OF THE HANGING STRING IN VIV FOR A FIXED LENGTH OF THE CABLE l_{opt} AND THREE DIFFERENT DAMPING COEFFICIENTS : (a) $\xi = \xi_{opt}/100$, (b) $\xi = \xi_{opt}$ AND (c) $\xi = 100\xi_{opt}$

and high damping, we observe bessel-like stationnary oscillations of the hanging string with an upper boundary condition very close to the perfect free end ($y' = 0$) for the weak damping or fixed end ($y = 0$) for the strong one. One can also notice that there is some propagation towards the free end of the cable for these two cases, located in the vicinity of the lower tip of the cable. This is due to the boundary condition used to solve the non-linear model with finite differences. It has indeed been assumed that there is a very small mass attached to the lower extremity of the cable.

On the other hand, the motion of the cable for the optimal case is very different from the two others and far from any Bessel function. In that case, the maximum amplitude is still obtained at the lower tip of the cable. It is much smaller than for the two other cases but the amplitude of oscillations is much more uniform along the length of the string than for smaller and higher values of ξ. The enveloppe of the cable is even widening near the energy harvester. The most striking feature of the cable dynamics is that there is a propagative wave travelling towards its damped extremity, transporting the energy that is dissipated/harvested by the dashpot. This propagation is the mechanism that explains the higher efficiency than for smaller or higher dampings.

For the tensioned cable, the boundary conditions at its two ends were identical. The symmetry induces that unless the length l becomes very large, stationnary waves were likely to occur as soon as the damping coefficient is significant. The parameters had to be chosen in a way that the most efficient stationnary vibration mode is selected. Now that only one extremity of the system is damped, there is no symmetry of the boundary conditions any more. The optimal harvesting parameters correspond to the most efficient travelling wave for energy extraction. This is a fundamental difference between the mechanisms that will lead to high efficiency of the two devices considered in this paper.

CONCLUSION

A preliminary investigation of the energy harvesting by vortex-induced vibrations of slender structures has been introduced in this article. Based on previous works, an appropriate wake-oscillator model has been used to perform a parametric study of the efficiency dependency of two different systems with their harvesting devices characteristics. The generic case of an infinite tensioned cable with periodically distributed energy harvesting devices has first been studied as an idealized case of energy harvesting by VIV of slender structures. The more realistic case of energy harvesting by VIV of a hanging cable has been analyzed in a second part.

The idealized case of an infinite tensioned cable first exhibits good performances in terms of optimal efficiencies, as the value of $\eta_{inf} = 0.19$ is achieved. However, the structure of the efficiency map is complex, a good understanding of the cable dynamics is hence needed to understand it deeply. The entire efficiency map can be explained by the different modes of vibrations that are selected by the cable according to the characteristics of the harvesters : stationnary even modes or travelling waves will lead to low efficiency while stationnary odd modes induce high efficiency. A linear stability analysis also provides a good way to identify the efficient regions of the parameter spaces.

The more realistic case of a finite hanging string in VIV with a single energy harvester at its upper end is then considered. A parameteric analysis of the efficiency of such a device is performed and the optimal set of parameters is identified, still leading to a rather good optimal efficiency $\eta_{hang} = 0.15$. The structure of the map is much simpler than for the tensioned case : there is a band of high efficiency centered around $\xi\sqrt{l} = 1$. High efficiencies are no more linked with particular modes as the optimal damping seems independent of the mode and the efficiency varies slowly with l. Now, the mechanism that drives the efficiency has been proven not to be the mode selection but the transport of energy towards the damped end of the cable by travelling waves. The damping has to be chosen so that the limit-cycle of the wake-oscillator model is close to a travelling wave near the top of the hanging string, bringing energy to the harvester. Again, this efficient zone of the parameter space can be localized thanks to simple analytical calculations.

Finally, VIV of slender structures appear to be a rather good way to extract energy from geophysical flows even if real experiments still need to be done to assess the predictions of the wake-oscillator. Although the real amount of power that can be generated by such devices may remain low compared with other devices like marine turbines, it can be useful as a solution to

Copyright © 2013 by ASME

provide isolated places like oil rigs or small islands with clean energy.

ACKNOWLEDGMENT

S. Michelin would like to acknowledge the support of a Marie Curie International Reintegration Grant within the 7th European Community Framework Program. Clement Grouthier is also supported by a Gaspard Monge scholarship of the Ecole Polytechnique.

REFERENCES

[1] Blevins, R., 1990. *Flow-induced vibration - Second edition*. Van Nostrand Reinhold, New York.

[2] Barrero-Gil, A., Alonso, G., and Sanz-Andres, A., 2010. "Energy harvesting from transverse galloping". *Journal of Sound and Vibration,* ***329***, pp. 2873–2883.

[3] Tang, L., Padoussis, M. P., and Jiang, J., 2009. "Cantilevered flexible plates in axial flow : Energy transfer and the concept of flutter mill". *Journal of Sound and Vibration,* ***326***, pp. 263–276.

[4] Doaré, O., and Michelin, S., 2011. "Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates : linear stability analysis and conversion efficiency". *Journal of Fluids and Structures,* ***27***, pp. 1357–1375.

[5] Singh, K., Michelin, S., and de Langre, E., 2012. "Energy harvesting from axial fluid-elastic instabilities of a cylinder". *Journal of Fluids and Structures,* ***30***, pp. 159–172.

[6] Bernitsas, M. M., Raghavan, K., Ben-Simon, Y., and Garcia, E. M. H., 2008. "Vivace (vortex-induced vibration aquatic clean energy) : A new concept in generation of clean and renewable energy from fluid flow". *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering,* ***130***(041101), pp. 1–15.

[7] Barrero-Gil, A., Pindado, S., and Avila, S., 2011. "Extracting energy from vortex-induced vibrations : a parametric study". *Applied mathematical modelling*, p. *In press*.

[8] Baarholm, G., Larsen, C., and Lie, H., 2006. "On fatigue damage accumulation from in-line and cross-flow vortex-induced vibrations on risers". *Journal of Fluids and Structures,* ***22***, pp. 109–127.

[9] Lie, H., and Kaasen, K., 2006. "Modal analysis of measurements from a large-scale viv model test of a riser in linearly sheared flow". *Journal of Fluids and Structures,* ***22***, pp. 557–575.

[10] Vandiver, J. K., Jaiswal, V., and Jhingran, V., 2009. "Insights on vortex-induced, travelling waves on long risers". *Journal of Fluids and Structures,* ***25***, pp. 641–653.

[11] Violette, R., de Langre, E., and Szydlowski, J., 2007. "Computations of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscilator model : Comparison with DNS and experiments". *Computers and Structures,* ***85***, pp. 1134–1141.

[12] Skop, R., and Balasubramanian, S., 1997. "A new twist on an old model for vortex-excited vibrations". *Journal of Fluids and Structures,* ***11***, pp. 395–412.

[13] Facchinetti, M. L., de Langre, E., and Biolley, F., 2004. "Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations". *Journal of Fluids and Structures,* ***19***, pp. 123–140.

[14] Violette, R., de Langre, E., and Szydlowski, J., 2010. "A linear stability approach to vortex-induced vibrations and waves". *Journal of Fluids and Structures,* ***26***(3), pp. 442–466.

[15] Grouthier, C., Michelin, S., and de Langre, E., 2012. "Energy harvesting using vortex-induced vibrations of tensioned cables". *Under review*, p. http://arxiv.org/abs/1203.0236.

[16] Zhu, Q., Haase, M., and h. Wu, C., 2009. "Modeling the capacity of a novel flow-energy harvester". *Applied Mathematical Modelling,* ***33***, pp. 2207–2217.

[17] Willden, R., and Graham, J., 2004. "Multi-modal vortex-induced vibrations of a vertical riser pipe subject to a uniform current profile". *European Journal of Mechanics B/Fluids,* ***23***, pp. 209–218.

[18] Chaplin, J., Bearman, P., Huera-Huarte, F., and Pattenden, R., 2005. "Laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a vertical tension riser in a stepped current". *Journal of Fluids and Structures,* ***21***, pp. 3–24.

[19] Modarres-Sadeghi, Y., Chasparis, F., Triantafyllou, M., Tognarelli, M., and Beynet, P., 2011. "Chaotic response is a generic feature of vortex-induced vibrations of flexible risers". *Journal of Sound and Vibration,* ***330***, pp. 2565–2579.

[20] Facchinetti, M. L., de Langre, E., and Biolley, F., 2004. "Vortex-induced travelling waves along a cable". *European Journal of Mechanics B/Fluids,* ***23***, pp. 199–208.

Copyright © 2013 by ASME