Ecole Polytechnique
Laboratoire d'Hydrodynamique

Claire DONNADIEU

Dynamique des sillages tourbillonnaires en milieu homogène et stratifié

Résumé

Le sillage d'un avion est constitué d'une paire de tourbillons contra-rotatifs d'axe horizontal qui, en fluide homogène, est affectée par une instabilité à grande longueur d'onde : l'instabilité de Crow, et par une instabilité à petite longueur d'onde : l'instabilité elliptique. Cette thèse a pour but d'étudier les instabilités tridimensionnelles et les croissances transitoires des perturbations sur ce dipôle tourbillonnaire en milieu homogène et stratifié et de mieux comprendre l'effet de la stratification verticale sur la dynamique bidimensionnelle et tridimensionnelle de cette paire de tourbillons par des simulations numériques directes et des analyses théoriques.

Par une étude de stabilité linéaire tridimensionnelle, on retrouve les bandes d'instabilités de Crow et elliptique, mais on observe également de nouveaux modes oscillants dont le taux de croissance maximum est plus faible que celui l'instabilité elliptique mais qui est beaucoup plus large bande, déstabilisant tous les nombres d'onde même lorsque l'ellipticité est modérée. Les croissances transitoires des perturbations sur ce dipôle, étudiées en déterminant les perturbations optimales linéaires calculées en utilisant l'adjoint des équations de Navier-Stokes linéarisées, montrent le rôle crucial de la région où l'étirement est maximal aux temps courts par rapport au temps d'advection du dipôle et des points hyperboliques aux temps intermédiaires.

Des études sur la dynamique tridimensionnelle des tourbillons de sillage d'avion en fluide stratifié ont été réalisées. Une analyse de stabilité linéaire s'appuyant sur une hypothèse de quasi stationnarité pour des niveaux de stratification faibles montre que les instabilités de Crow et elliptique sont peu affectées. Les taux de croissance et les longueurs d'onde de ces instabilités sont proportionnelles aux valeurs instantanées des paramètres du dipôle. Pour les stratifications modérées et intenses, l'écoulement étant instationnaire, les perturbations optimales sont calculées par une technique du direct-adjoint qui tient compte de l'évolution de l'état de base. La dynamique reste principalement inertielle aux instants intermédiaires, l'effet de la force de flottabilité étant, de modifier la dynamique bidimensionnelle en rapprochant les tourbillons, de déformer et rapprocher les perturbations présentes dans le coeur de chacun des tourbillons. Par contre, aux instants plus longs pour des niveaux de stratification intenses, la dynamique pilotée par les effets de densité est concentrée dans le sillage du dipôle et non plus dans les coeurs des tourbillons, dans le cas de l'instabilité à courte longueur d'onde.

Abstract

An aircraft wake is made of horizontal counter-rotating vortices and is known to be affected, in homogeneous fluid, by a long-wavelength instability : the Crow instability and a short-wavelength instability : the elliptic instability. Here three-dimensionnal instabilities and transient growth of perturbations on such dipole in homogeneous and stratified media are explored and the effect of vertical stratification on two-dimensionnal and three-dimensionnal dynamics of this vortex pair is investigated with direct numerical simulations and theoretical analyses.

By means of a three-dimensionnal linear stability analysis, we retrieve the Crow and elliptic instability bands but we also observe new oscillatory modes with maximal growth rates weaker than the elliptic instability ones but much more broad band instability mode, destabilizing all the wavenumbers even when ellipticity is moderate. Transient growth of perturbations on this dipole, investigated by computing the linear optimal perturbations calculated with the adjoint of linearized Navier-Stokes equations, demonstrates the crucial role of the region of maximal strain at short times compared to the advection time of the dipole and of the hyperbolic points at intermediate times.

Investigations on the three-dimensional dynamics of trailing vortices in stratified fluids have been performed. For weak stratifications, a linear stability analysis, relying on a quasi steady hypothesis, demonstrates that the Crow and elliptic instabilities are almost unaffected. The growth rates and the wavelengths of these instabilities scale on the instantaneous values of the parameters of the dipole. For moderate and intense stratifications, the flow is unsteady and optimal perturbations are computed with a direct-adjoint technique which takes into account the evolution of the base flow. Dynamics is mainly inertial at intermediate times, the effect of the buoyancy force being to modify the bidimensional dynamics, by reducing the separation distance between the vortices, to deform and bring closer the perturbations located on each vortex core. However, at larger time horizon for intense stratifications, all the dynamics, driven by density effects, is concentrated in the wake of the dipole and not in the vortex cores, in the case of short-wavelength instability.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

Les tourbillons de sillage d'avion sont des régions d'intense vorticité qui se développent derrière les avions au cours de leur vol. Sur la Figure 1.1, ils sont visibles grâce à la déformation des nuages.

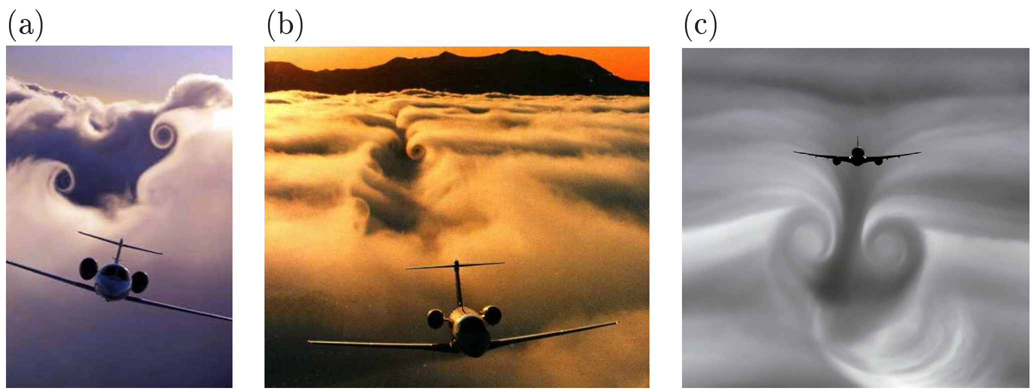

FIG. 1.1 – *(a) Tourbillons de sillage derrière un avion visibles grâce à la déformation des nuages. La photo a été prise par P. Bowen. (b) Tourbillons de sillage derrière un Cessna au-dessus d'un banc de brume survolant le lac Tahoe à la vitesse d'environ* $313km/h$*. Lors de la descente des tourbillons de sillage à travers le banc de brume, l'écoulement dans le sillage a été rendu visible par la déformation de la couche de brume. La photo a été prise par P. Bowen pour la Cessna Aircraft Company (Source : Gallery of Fluid Motion, Physics of Fluids A, Vol. 5, September 1993)- (c) Sillage derrière un Boeing 777. La photo a été prise par Steve Morris. (Source : Airliners.net)*

Lors du vol d'un avion, il apparaît une zone de plus haute pression sous l'aile qu'au dessus, à l'origine de la force de portance. Aux extrémités, la masse d'air située dans la zone de haute pression sous l'aile (intrados) a tendance à s'échapper vers la zone de basse pression au dessus de l'aile (extrados). Par conséquent, sur l'intrados (resp. extrados) les lignes de courant sont défléchies vers le bout de l'aile (resp.vers l'avion). La masse d'air acquiert ainsi un

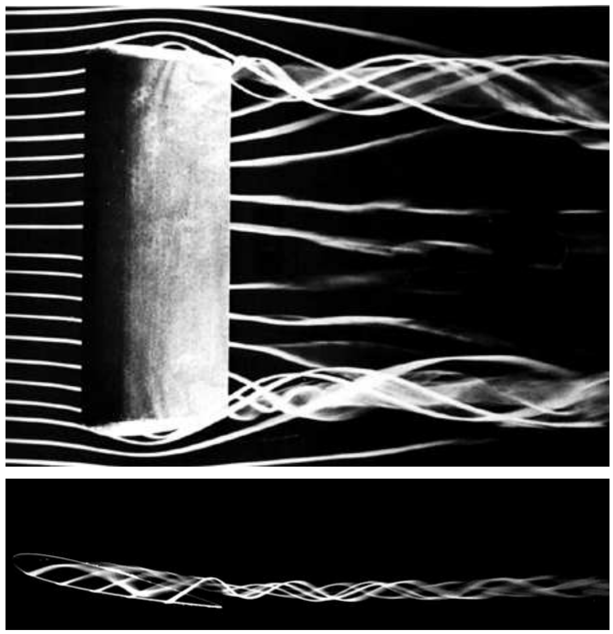

FIG. 1.2 – *Tourbillons de bout d'aile derrière une aile rectangulaire. L'aile est dans un tunnel de fumée, où les tubes de courant individuels sont visibles grâce à des filaments de fumée. (Source : An Album of Fluid Motion, Van Dyke Milton, The Parabolic Press, Stanford, Calif, 1982.)*

mouvement de giration aboutissant à la formation d'une paire de tourbillons horizontaux et de sens de rotations opposés (Figure 1.2), appelés tourbillons de sillage d'avions. En fait, à l'atterrissage et au décollage, plusieurs tourbillons se forment par contournement par le fluide des diverses extrémités de la voilure (ailes, volets ...). Ces tourbillons fusionnent pour donner naissance à une seule paire de tourbillons contra-rotatifs très intense qui se propage vers le bas. Selon les conditions météorologiques, cette paire de tourbillons peut être rapidement détruite (atmosphère turbulente) ou être transportée en dehors des couloirs aériens, ou au contraire persister longtemps (atmosphère calme). Si elle conserve sa cohérence, elle constitue un danger pour les avions suiveurs car elle provoque un mouvement de roulis et un mouvement de descente. La menace est d'autant plus grande que l'avion qui suit est de plus petite taille que l'avion qui a engendré la paire de tourbillons et, en particulier, en phase d'atterrissage et de décollage (Figure 1.3). Afin

FIG. 1.3 – *Séquence représentant le décollage d'un Boeing 747, de la fumée industrielle permettant d'observer les contours d'un des tourbillons de sillage (Photo B. Stoyles, Source : `http://oea.larc.nasa.gov/PAIS/Concept2Reality/wake_vortex.html`).*

d'éviter les accidents graves, des normes de sécurité définissant des distances de séparation minimales entre les avions ont été mises en place afin de limiter la fréquence des atterrissages et des décollages (voir Jacquin [22] et sur le site de la NASA "Wake-Vortex Hazard" `http://oea.larc.nasa.gov/PAIS/Concept2Reality/wake_vortex.html`). Ces normes, qui prennent en compte la catégorie de poids de l'avion meneur et de l'avion suiveur, sont efficaces du point de vue de la sécurité mais sont souvent excessives par rapport aux distances de séparation réellement nécessaires car la dissipation des tourbillons de sillage dépend des conditions météorologiques. Avec l'engorgement des aéroports et les projets de super gros porteurs comme l'A380, il s'avère nécessaire d'affiner ces normes qui ont été établies à la fin des années 60. Plusieurs voies sont actuellement explorées afin de diminuer le danger que représentent les tourbillons de sillage tout en optimisant la gestion du trafic dans les aéroports. D'une part, concernant la détection des tourbillons dans les aéroports par des systèmes de mesure comme le LIDAR (Light Detection And Ranging) qui permettent de suivre les tourbillons afin de voir s'ils sont détruits ou emportés en dehors des couloirs aériens. D'autre part, en étudiant les mécanismes de dissipation de ces tourbillons afin d'être capable d'atténuer la signature tourbillonnaire des avions. En plus de cet intérêt économique, vient s'ajouter le problème de l'impact potentiel des avions à haute altitude de croisière sur l'environnement. En effet, les gaz d'échappement des avions sont à l'origine de la formation de traînées de condensation, appelées "contrails", qui sont visibles par beau temps sous forme de traces blanches dans le ciel (Figure

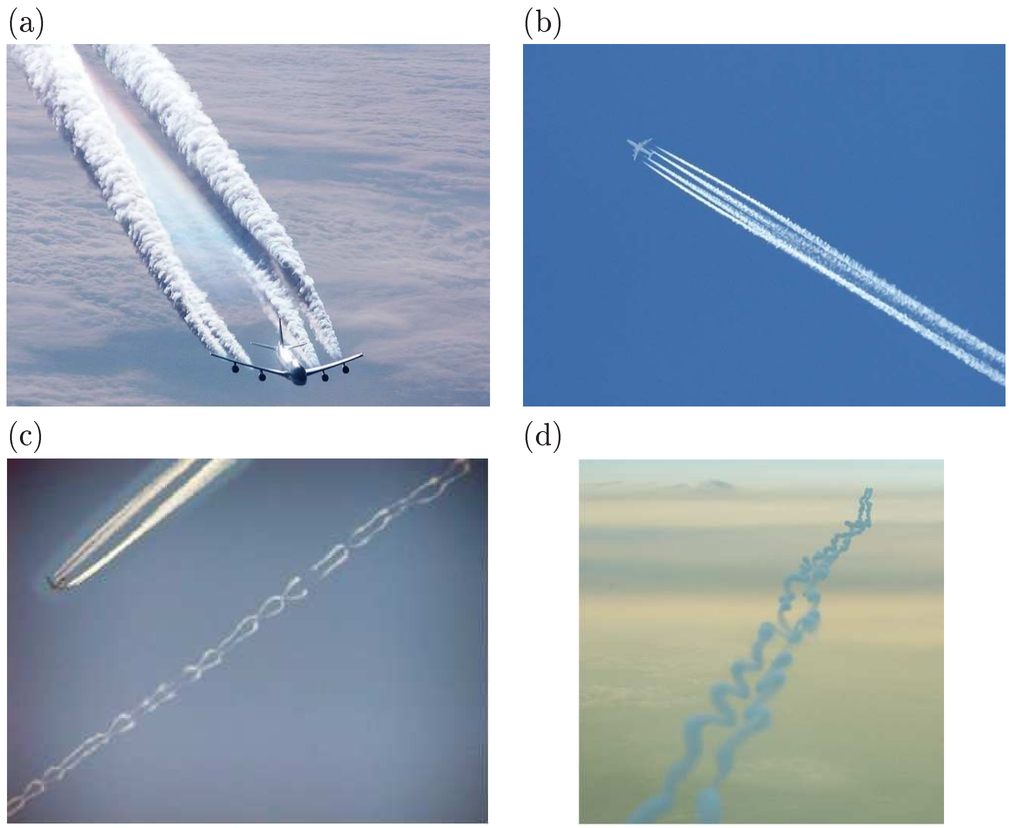

FIG. 1.4 – *Traînées de condensation derrière des avions. (a)-(d) Photos de J.P. Willems (Source : Airliners.net).*

1.4). Ce sont la vapeur d'eau et les gaz sulfuriques (en formant des petites particules) contenus dans les gaz d'échappement qui sont principalement à l'origine de l'existence de ces traînées de condensation (Paoli *et al.* [38]). Elles peuvent se former si, alors que que les gaz d'échappement se refroidissent et se mélangent à l'air ambient, l'humidité devient suffisamment importante (ou la température de l'air devient suffisament basse) pour que la condensation de l'eau liquide puisse se produire. Si le niveau d'humidité est suffisant, la vapeur d'eau se condense sur des particules pour former des gouttes d'eau qui, en se refroidissant, gèlent et forment les particules de glace qui constituent les traînées de condensation ("Aircraft Contrails Sheet", United States Environmental Protection Agency, Septembre 2000, `www.faa.gov/regulations_policies/policy_guidance/envir_policy/media/contrails.pdf`). A la suite de cette formation de glace, les traînées de condensation peuvent évoluer de deux façons différentes selon le degré d'humidité de l'atmosphère. Si celui-ci est bas, leur durée de vie sera courte puisque les particules de glace vont s'évaporer rapidement en même temps que les gaz d'échappement seront complètement mélangés à l'atmosphère. Si au contraire l'humidité est élevée, les traînées de condensation vont persister longtemps puisque les particules de glace nouvellement formées vont continuer à grossir en prenant de l'eau de l'atmosphère qui les entoure. Dans ce cas, elles peuvent persister pendant plusieurs heures, s'étendre sur plusieurs kilomètres en largeur et sur 200 à 400m en hauteur. Elles forment d'abord des nuages en forme de lignes

(a) (b)

FIG. 1.5 – *(a) Vue depuis la Station Spatiale Internationale (ISS) des traînées de condensation sur la vallée du Rhône et les Alpes le 15 Mai 2002 (Source : Earth Science and Image Analysis Laboratory, NASA) - (b) Traînées de condensation et nuages naturels en Virginie du Nord le 26 Janvier 2001 (Photo : L. Nguyen, Source : NASA)*

(estimés couvrir en moyenne 0.1 % de la surface de la terre), puis évoluent en nuages similaires aux cirrus mais contenant une plus grande densité de petits cristaux de glace comparé aux cirrus naturels et ayant donc un plus grand albedo (Travis *et al.* [51]). L'impact de ces traînées de condensation sur l'environnement a été discuté pendant plusieurs années et récemment démontré par l'étude climatique de Travis *et al.* [50]. Ils ont démontré que cette augmentation artificielle de la couverture nuageuse de l'atmosphère avait un impact sur le climat. Après le 11 Septembre 2001 et l'interdiction de vol de tous les avions commerciaux pendant la période de trois jours qui a suivi, ils ont mesuré la variation de température journalière (DTR), i.e. la différence entre la température maximale diurne et la température minimale nocturne, en l'absence de traînée de condensation. Ils ont observé une augmentation significative de la DTR, démontrant un effet global de refroidissement de l'atmosphère. Le changement de la DTR mesuré pendant l'interdiction de

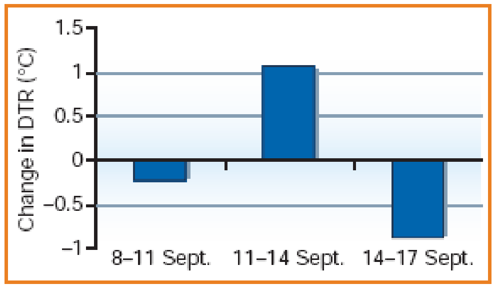

FIG. 1.6 – *Ecart des variations de température journalière moyenne par rapport aux valeurs normales provenant des données climatologiques de 1971-2000 pour les périodes de 3 jours indiquées en Septembre 2001. Ces périodes incluent les trois jours avant les attaques terroristes de 11 Septembre ; les trois jours immédiatement après, pendant l'interdiction de vol des avions et il n'y avait donc pas de contrails ; et les trois jours suivants. (Source : Travis et al. [50])*

vol (du 11 au 14 Septembre 2001) par plusieurs stations météorologiques à travers les Etats-Unis a augmenté d' $1.1C$ par rapport aux normales mesurées entre 1971 et 2000 (Figure 1.6). Ce résultat est en contraste avec les périodes de trois jours adjacentes pour lesquelles les valeurs de la DTR sont proches ou inférieures à la moyenne (Figure 1.6). Les écarts de DTR pour la période d'interdiction de vol sont en moyenne supérieures d' $1.8C$ par rapport aux écarts de DTR pour les deux périodes de 3 jours adjacentes.
La taille, la densité et la persistance des traînées de condensation étant liées au mélange dû au développement des instabilités au début de l'évolution du sillage, il importe de caractériser au mieux les instabilités et les mécanismes qui les contrôlent. Il serait possible de limiter la persistance de ces traînées en agissant sur les tourbillons de sillage d'avion.

1.2 Stabilité des tourbillons

Ces dipôles tourbillonnaires sont instables vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles. Des études ont montré l'existence d'instabilités à grande et petite longueur d'ondes. Après avoir été observée sur des sillages d'avions (Figure 1.7), la première visualisation de l'instabilité à grande longueur d'onde sur une paire de tourbillons contra-rotatifs est dûe aux expériences en laboratoire réalisées par Leweke & Williamson [30]. Plusieurs observations expérimentales de l'instabilité à petite longueur d'onde ont été réalisées, d'abord sur des anneaux de vorticité (Krutzsch [25], Widnall & Sullivan [54] ...), puis par Thomas & Auerbach [49] sur un tourbillon d'une paire non symétrique mais la première étude quantitative expérimentale de cette instabilité à courte longueur d'onde sur une paire de tourbillons contra-rotatifs a été réalisée par Leweke & Williamson [31]. La Figure 1.8, représente une vue de

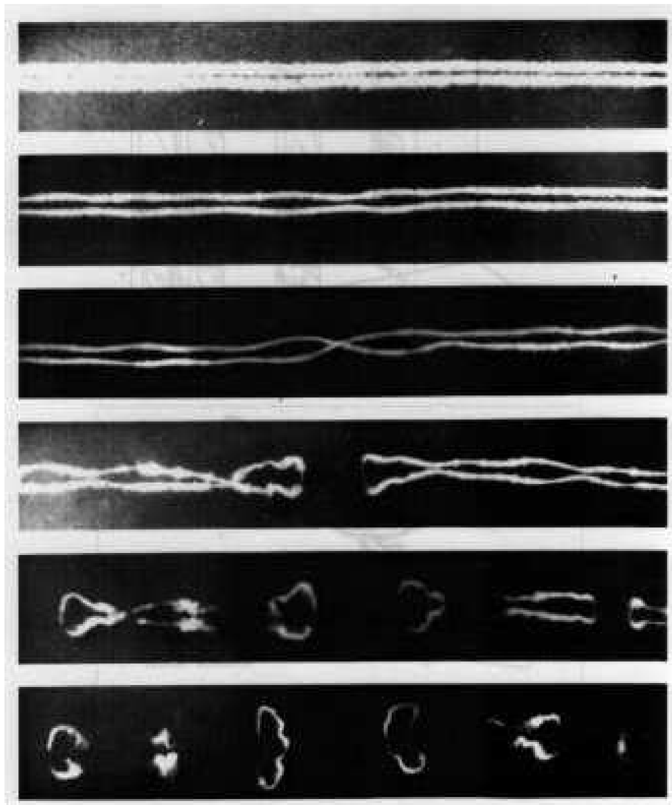

FIG. 1.7 – *Traînée de condensation derrière un bombardier B-47. On observe une déformation sinusoidale des tourbillons (instabilité à grande longueur d'onde) aboutissant à leur mise en contact puis à la formation d'anneaux (Source : An Album of Fluid Motion, Van Dyke, Parabolic Press).*

dessous d'une paire de tourbillons contra-rotatifs engendrée par deux flaps horizontaux dans une cuve remplie d'eau et visualisée par du colorant. On observe une instabilité à grande longueur d'onde symétrique par rapport au plan séparant les deux tourbillons, correspondant à l'instabilité de Crow [8], et une instabilité à petite longueur d'onde antisymétrique, correspondant à l'instabilité elliptique. Ces deux instabilités, qui déforment les tourbillons de

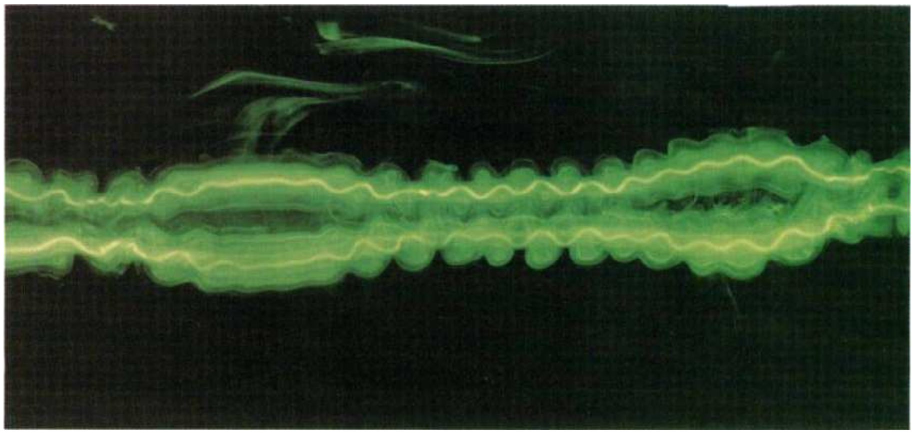

FIG. 1.8 – *Vue de dessous d'une paire de tourbillons contra-rotatifs engendrée par deux flaps horizontaux dans une cuve remplie d'eau et visualisée par du colorant. Le développement d'une instabilité à petite longueur d'onde (inférieure à la distance de séparation des tourbillons) superposé au développement d'une instabilité à grande longueur d'onde (très grande par rapport à la distance de séparation des tourbillons) est visible. (d'après Leweke & Williamson [31])*

manière sinusoïdale, sont liées au champ d'étirement exercé par un tourbillon sur son voisin.

1.2.1 Instabilité de Crow

L'instabilité à grande longueur d'onde a été étudiée par Crow [8] par une analyse de stabilité linéaire sur une paire de filaments de vorticité. Elle est caractérisée par des longueurs d'onde axiales comprises entre 5 et 10 fois la distance de séparation des tourbillons. Le mécanisme de cette instabilité est lié à la présence du champ d'étirement au coeur de chaque tourbillon, induit par le tourbillon voisin. Les tourbillons tendent à s'aligner dans la direction d'étirement : ils ondulent de manière symétrique dans des plans orientés à 45° (plan d'étirement maximal). Cette instabilité induit un déplacement symétrique des tourbillons sans déformation de la structure tourbillonnaire et se développe de manière coopérative sur les deux tourbillons. Aux temps longs, cette instabilité aboutit à la mise en contact des tourbillons (Figure 1.9(a)) qui forment ainsi des anneaux de vorticité par reconnection (Figure 1.9(b)).

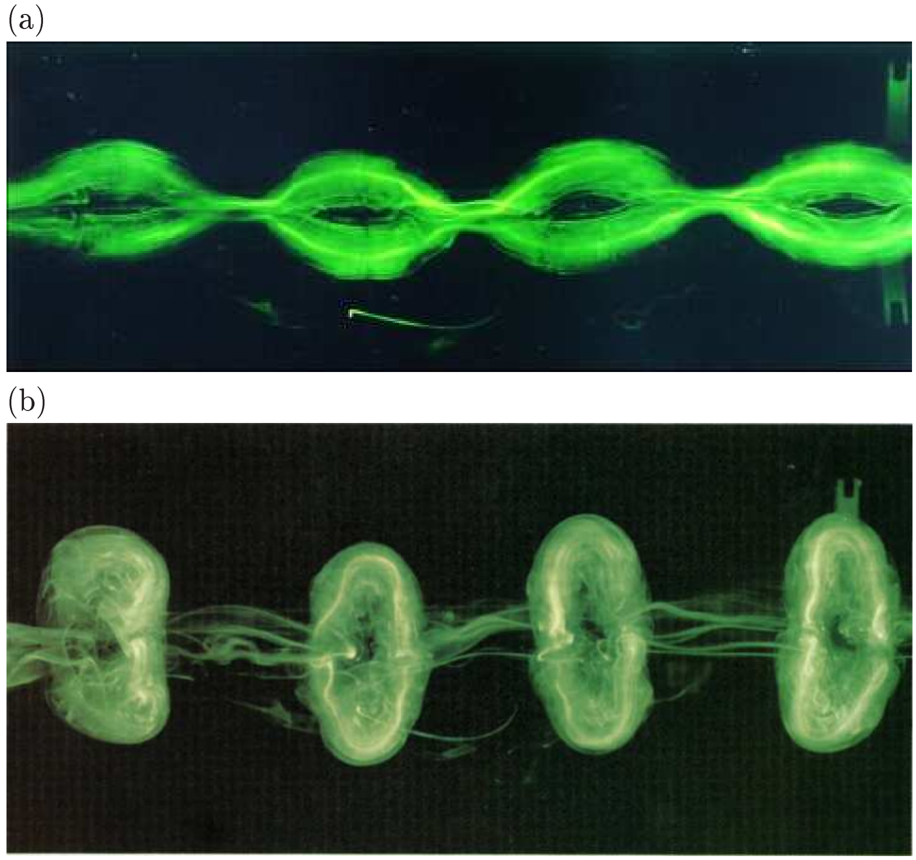

FIG. 1.9 – *Vue de côté du développement aux temps longs de l'instabilité de Crow. L'amplification de la déformation sinusoïdale des tourbillons a abouti à leur (a) mise en contact puis à leur reconnection et à la (b) formation d'anneaux de vorticité périodiques (d'après Leweke & Williamson [30]).*

1.2.2 Instabilité elliptique

L'instabilité à petite longueur d'onde, appelée instabilité elliptique, est dûe à la déformation elliptique du coeur des tourbillons par le champ d'étirement induit par chacun des tourbillons sur son voisin. Elle est caractérisée par des longueurs d'onde axiales proportionnelles à la taille du coeur des tourbillons. Le mécanisme d'instabilité est une résonance entre le champ d'étirement d'intensité ϵ qu'un tourbillon applique sur l'autre et deux ondes d'inertie se propageant sur un tourbillon, appelées ondes de Kelvin, de même nombre d'onde axial k, de même fréquence ω et de nombres d'onde azimuthal m et $m+2$. Cette instabilité a été décrite théoriquement par Moore & Saffman [34] et Tsai & Widnall [52], qui ont étudié la stabilité d'un filament de vorticité dans un champ d'étirement uniforme en se limitant aux modes de Kelvin hélicoïdaux, i.e. de nombres d'onde azimuthal $|m| = 1$. Ils ont montré

(a) (b)

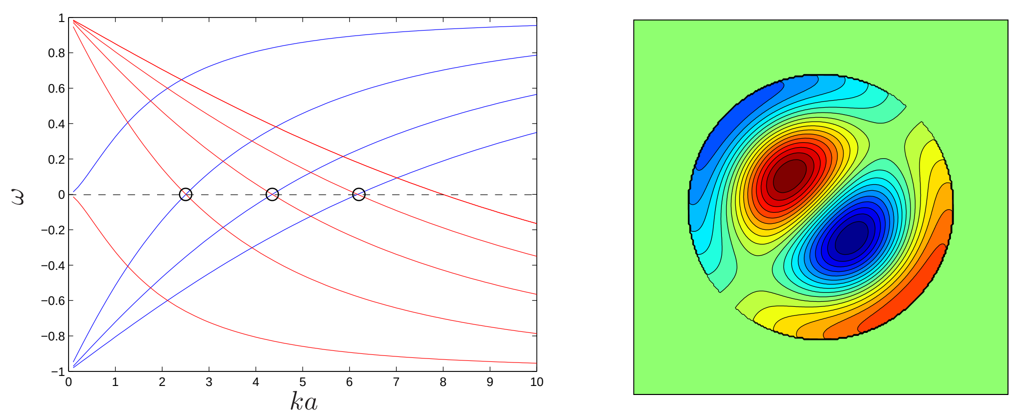

FIG. 1.10 – *(a) Relation de dispersion pour les modes de Kelvin d'un tourbillon de Rankine avec $m = 1$ (——) et $m = -1$ (——). Seules les 5 premières branches ont été représentées (d'après Saffman [42]). - (b) Contours de la vorticité axiale de la perturbation pour un tourbillon de Rankine (d'après Waleffe [53]).*

que l'instabilité se produit pour des nombres d'onde k et des fréquences ω aux points d'intersection des relations de dispersion associées aux ondes de Kelvin $m_1 = 1$ et $m_2 = -1$ dans le plan (k, ω) représentés sur la Figure 1.10. Cette instabilité est particulièrement intense pour $\omega = 0$ et aux points d'intersection $(ka = 2.5, ka = 4.35, ...)$, le taux de croissance est proportionnel à l'étirement :

$$\sigma = 0.57\epsilon. \tag{1.1}$$

Plus tard, Pierrehumbert [39] et Bayly [3] ont montré qu'un tourbillon elliptique infini radialement est instable. Landman & Saffman [26] ont ensuite étendu cette instabilité à des fluides visqueux en ajoutant un terme $\sigma_{visq} = -\nu k^2$. Waleffe [53] a donné une interprétation physique de cette instabilité et un moyen de construire les modes normaux. Par une approche locale, il a montré que l'instabilité elliptique apparaît comme une instabilité paramétrique d'onde d'inertie de fréquence nulle dans le repère fixe et est ainsi similaire à celle découverte par Tsai & Widnall [52]. Par des considération énergétiques, il a déterminé le taux de croissance maximal de l'instabilité :

$$\sigma = \frac{9}{16}\epsilon. \tag{1.2}$$

Ce résultat, proche de la valeur calculée par Tsai & Widnall [52], montre que c'est la dynamique du coeur des tourbillons qui gouverne l'instabilité elliptique. Un mode de l'instabilité elliptique sur un tourbillon de Rankine (vorticité uniforme) dans un champ d'étirement uniforme est représenté sur la Figure 1.10(b). Superposé à l'état de base, la perturbation aura pour effet de déformer le tourbillon. Cette déformation a été observée expérimentalement par Leweke & Williamson [31] (Figure 1.11).

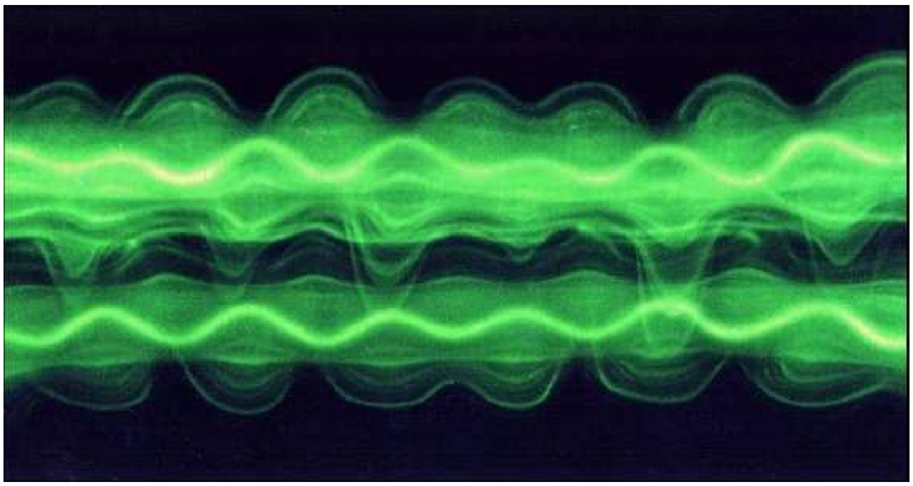

FIG. 1.11 – *Vue rapprochée de l'instabilité à petite longueur d'onde, montrant la déformation de la structure interne des tourbillons (d'après Leweke & Williamson [31]).*

Cependant, le modèle du tourbillon de Lamb-Oseen (distribution gaussienne de vorticité) est plus proche des tourbillons réels que le modèle du tourbillon de Rankine. Or, dans le cas du tourbillon de Lamb-Oseen, il n'existe pas de solution analytique simple des modes de Kelvin et il faut tenir compte de l'existence de couches critiques. En effet, une singularité apparaît dans la relation de dispersion lorsque la vitesse azimuthale de la perturbation est égale à la vitesse angulaire de l'écoulement de base. De nombreuses études ont été consacrées à la stabilité des tourbillons de Lamb-Oseen (Eloy & Le Dizès [13], Le Dizès & Laporte [29], Sipp & Jacquin [47] ...). Récemment, Fabre *et al.* [15] ont décrit théoriquement les ondes de Kelvin existant sur un tourbillon de Lamb-Oseen : certains modes sont des ondes de Kelvin régulières non amorties existant sur le tourbillon de Rankine alors que d'autres sont des modes singuliers amortis de nature différente. La présence d'un second tourbillon impose un champ d'étirement sur le premier, à l'origine d'une amplification de ces ondes dans le coeur. Cependant, à la différence du tourbillon de Rankine, la présence de couches critiques empêche un large nombre de résonances possibles. Sipp & Jacquin [47], par une analyse de stabilité linéaire, ont trouvé que les seules résonances qui se produisent sont liées aux ondes stationnaires $\omega = 0$ hélicoïdales $m = \pm 1$ obtenues pour des valeurs spécifiques du nombre d'onde axial $ka = 2.26, 3.96, 5.61...$. L'instabilité elliptique a été décrite théoriquement pour une paire de tourbillons de Lamb-Oseen par Le Dizès & Laporte [29] qui ont déterminé le taux de croissance par une estimation locale calculée à partir des caractéristiques du tourbillon près de son centre.

1.3 Influence de la stratification

Une des caractéristiques de l'atmosphère est d'être stratifiée verticalement en densité. En effet, le rayonnement solaire absorbé par l'atmosphère y induit des gradients thermiques qui déterminent la forme des profils de densité.

1.3.1 Fréquence de Brunt-Väisälä

Dans une stratification stable $\bar{\rho}(z)$, si une particule subit un déplacement infinitésimal ξ de sa position d'équilibre selon la verticale, elle ressent une force de rappel dûe à la poussée d'Archimède qui agit pour la ramener à sa position initiale. Dans l'hypothèse d'un fluide incompressible, elle est soumise à la force de flottabilité volumique :

$$g\xi \frac{d\bar{\rho}}{dz}. \tag{1.3}$$

Si on néglige la viscosité et les effets dynamiques de la pression, on obtient l'équation du mouvement de cette particule :

$$\rho_0 \frac{d^2\xi}{dt^2} = g\xi \frac{d\bar{\rho}}{dz} \tag{1.4}$$

où ρ_0 est la densité de référence. Pour $d\bar{\rho}/dz < 0$, cette équation est celle d'un oscillateur de fréquence :

$$N = \left(-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.5}$$

Cette fréquence est appelée fréquence de Brunt-Väisälä et mesure l'intensité de la stratification. Elle est proportionnelle à la variation verticale de la densité (dûe au changement de pression, de température ou de concentration en vapeur d'eau dans l'atmosphère) et une configuration $d\bar{\rho}/dz < 0$, i.e. $N^2 > 0$, est gravitationnellement stable. En réalité, cela est vrai si on néglige les effets de compressibilité : pour que le profil de densité soit instable, il faut dépasser une valeur critique du gradient de densité.

1.3.2 Stratification de l'atmosphère

La Figure 1.12(a) représente le profil vertical de densité dans les $15km$ inférieurs de l'atmosphère. Dans la troposphère $(0-11km)$, la densité décroît avec l'altitude et le profil de densité est gravitationnellement stable. La Fi-

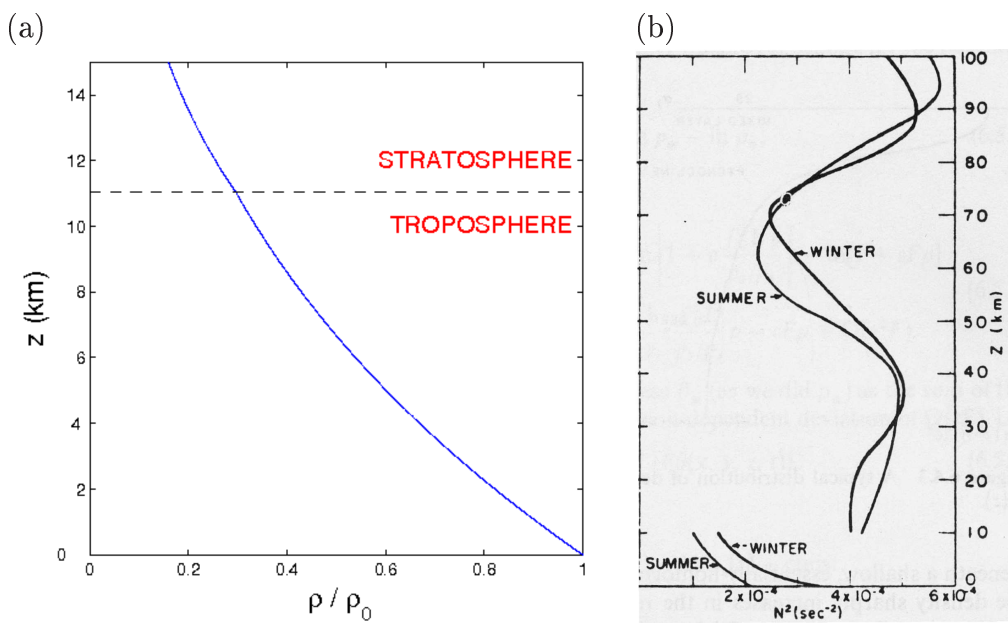

FIG. 1.12 – *(a) Distribution de densité avec l'altitude dans l'atmosphère (d'après NASA 1962 Standard Atmosphere). - (b) Distribution verticale du carré de la fréquence de Brunt-Väisälä $N^2(z)$ dans l'atmosphère en hiver et en été (d'après Charney & Drazin [?])*

gure 1.12(b) représente la distribution verticale de $N^2(z)$ dans l'atmosphère en hiver et en été. La fréquence de Brunt-Väisälä N est de l'ordre de $10^{-2}s^{-1}$ dans l'atmosphère. Dans la troposphère, elle augmente avec l'altitude et varie entre $0.02s^{-1}$ au sol et $0.01s^{-1}$ à la tropopause $(11km)$ alors que dans la basse stratosphère, sa valeur varie peu et reste proche de $0.02s^{-1}$. Les avions volent à une altitude de croisière d'environ 10-12 km. Les tourbillons de sillage formés derrière les avions descendent verticalement dans l'atmosphère, transportant une masse de fluide dont la densité est celle de l'air à l'altitude à laquelle l'avion vole. En descendant, cette masse de fluide va rencontrer du fluide de densité différente et la force de flottabilité va affecter son mouvement. L'intensité de la stratification est caractérisée par le nombre de Foude Fr qui correspond au rapport entre l'échelle de temps caractéristique de la stratification $T_s = 1/N$ et le temps d'advection des tourbillons $T_a = 2\pi b^2/\Gamma$, où b est la distance de séparation entre les tourbillons et Γ la ciculation d'un tourbillon (T_a correspond au temps que met la paire de tourbillon créée par l'avion à parcourir une distance de séparation du dipôle). Pour les gros avions (A340, B747), T_a est supérieur à $30s$ en phase d'atterrissage et à $25s$ en phase de croisière (Gerz [18]). Pendant l'hiver, à l'atterrissage, correspondant à la configuration où la fréquence de Brunt-Väisälä est la plus élevée, i.e. l'influence de la stratification la plus forte, le nombre de Froude est de l'ordre de $Fr = T_s/T_a \simeq 1.8$ et, en été pendant la phase de croisière, $Fr \simeq 4$. Les effets de variation de densité doivent donc être pris en compte aussi bien pour les phases de vol près du sol que pour les vols de croisière.

1.3.3 Dynamique d'un dipôle tourbillonnaire en milieu stratifié

La dynamique d'une paire de tourbillons contra-rotatifs horizontaux dans un écoulement stratifié selon la verticale est encore mal connue. Des études numériques sur la dynamique bidimensionnelle en présence de stratification ont été réalisées mais sont en désaccord. La dynamique tridimensionnelle est encore mal connue et l'on ne connaît pas les effets de la stratification sur les instabilités qui se développent en milieu homogène : l'instabilité de Crow et l'instabilité elliptique.

Evolution 2D d'un dipôle tourbillonnaire en milieu stratifié

Dans le cas d'un fluide non stratifié, une paire de tourbillons bidimensionnels se propage vers le bas avec une vitesse et une distance de séparation constantes. Par contre, dans le cas d'un fluide stratifié, chaque tourbillon transporte du fluide plus léger dans une région où le fluide est plus lourd lors de sa descente. Il apparaît donc de fort gradients de densité autour du dipôle. L'équation de la vorticité ω_y pour un écoulement bidimensionnel homogène suivant y avec g suivant z s'écrit :

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} = -(\mathbf{u}.\nabla)\omega_y + \frac{1}{Re}\Delta\omega_y + \frac{1}{Fr^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{1.6}$$

où Re est le nombre de Reynolds et ρ la densité du fluide. Le premier terme du membre droit de l'équation est le terme d'advection (par lequel la vorticité est advectée comme un scalaire par l'écoulement), le second terme est le terme de diffusion visqueuse et le dernier terme est le terme de production barocline par lequel de la vorticité est créée par les gradients de densité. A droite du

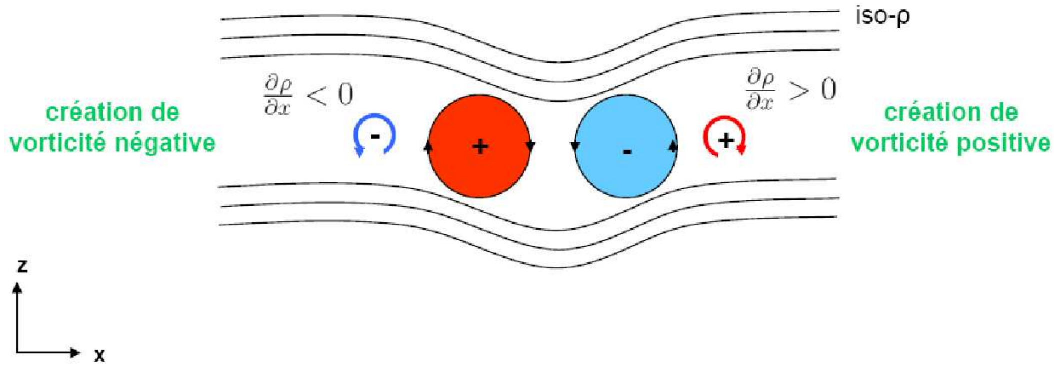

FIG. 1.13 – *Schéma de la création de vorticité barocline autour du dipôle dûe à l'apparition de gradients de densité selon la direction x. Le tourbillon de vorticité axiale positive (resp. négative) est représenté en rouge (resp. bleu). Les lignes d'isodensité sont déformées par la présence de la paire de tourbillon. Cette déformation est à l'origine de l'apparition d'un gradient de densité négatif (resp. positif) selon la direction x autour du tourbillon de vorticité positive (resp. négative), créant ainsi de la vorticité barocline négative (resp. positive).*

tourbillon primaire de vorticité positive, il existe un gradient de densité selon x négatif et il y a donc création de vorticité négative par production barocline (voir Figure 1.13). Identiquement, de la vorticité barocline positive est créée autour du tourbillon de vorticité négative.

Les études numériques 2D sont en désaccord sur l'évolution de la vitesse de translation du dipôle au cours de sa descente verticale. Scorer & Davenport [45] ont été les premiers à s'intéresser a l'évolution de cette paire de tourbillon en milieu stratifié ($Fr > 1$). Ils ont observé une réduction de la distance de séparation entre les tourbillons et une augmentation de sa vitesse de descente en fonction du temps. Ce résultat a été confirmé par la prévision théorique de Crow [8] et par Spalart [48]. Garten *et al.* [16] ont également observé que, pour les grands nombres de Froude ($Fr > 1$), la vorticité barocline créée autour des tourbillons primaires les rapproche et leur descente est donc accélérée. Pour les petits nombres de Froude, il apparaît des ondes de gravité interne et les tourbillons sont rapidement détruits. Ces résultats sont en contradiction avec les simulations de Holzäpfel & Gerz [20] qui ont observé un ralentissement de la descente des tourbillons suivi d'une accélération.

Dynamique 3D d'un dipôle tourbillonnaire en milieu stratifié

Les expériences en laboratoire de Sarpkaya [43] et Delisi & Robins [10] ainsi que les simulations numériques directes 3D de Robins & Delisi [40] et Garten *et al.* [17] ont montré une décroissance de la distance de séparation des tourbillons mais un ralentissement de la vitesse de descente du dipôle. Il a été suggéré que ce ralentissement serait dû à l'apparition des instabilités tridimensionnelles.

L'effet de la stratification sur l'instabilité de Crow a été étudié par des simulations numériques directes par Robins & Delisi [40] et par Garten *et al.* [17]. Robins & Delisi [40] ont observé pour $Fr \geq 4$ une mise en contact des tourbillons et la formation d'anneaux de vorticité, d'autant plus rapidement que la stratification est forte. Pour $Fr \leq 2$, il n'y a pas de formation d'anneaux de vorticité mais de structures tridimensionnelles appelées "puffs". Garten *et al.* [17] ont observé que pour $Fr \leq 2$, la stratification ambiante affecte l'instabilité de Crow. Pour $Fr > 2/3$, nombres de Froude pour lesquels la vorticité barocline rapproche les tourbillons, l'instabilité croît plus rapidement alors que pour $Fr < 2/3$, nombres de Froude pour lesquels la vorticité barocline écarte les tourbillons, la croissance de l'instabilité est retardée et il n'y a pas de mise en contact des tourbillons.

Nomura *et al.* [35] ont étudié l'influence de la stratification sur l'instabilité elliptique par des simulations numériques directes 3D pour $Fr \geq 1$. Dans le cas d'une stratification faible ou modérée, la réduction de la distance de séparation entre les tourbillons a pour effet d'augmenter la déformation des tourbillons. L'instabilité elliptique apparaît plus tôt et les taux de croissances qui sont proportionnels à la déformation des tourbillons augmentent avec l'intensité de la stratification. Aux temps longs, la destruction des tourbillons est accélérée. Dans le cas d'une forte stratification (échelle de temps caractéristique de l'instabilité comparable a celle de la stratification), la stratification agit sur le développement de l'instabilité. En raison d'une forte création de vorticité barocline les tourbillons sont très rapprochés et diffusent l'un dans l'autre, en plus du detrainment par la vorticité barocline. La forme des tourbillons étant fortement modifiée par la stratification, l'instabilité ne peut plus être considérée comme l'instabilité elliptique : la structure radiale de l'instabilité est plus complexe et, en raison de la diminution de la taille du coeur des tourbillons, le nombre d'onde est plus grand qu'en fluide homogène.

Chapitre 2

Instabilités 3D et croissance transitoire des tourbillons de sillage

Ce chapitre, qui reprend une publication soumise à la revue *Physics of Fluids* sous le titre "Three-dimensional instabilities and transient growth of trailing vortices", a pour objet, d'une part, l'étude de la stabilité linéaire temporelle tridimensionnelle d'une paire de tourbillons contra-rotatifs de Lamb-Oseen relativement concentrés pour des nombres de Reynolds finis et, d'autre part, l'étude des croissances transitoires des perturbations sur ce dipôle.

Les modes instables d'une paire de tourbillons gaussiens contra-rotatifs de rapport d'aspect $a/b = 0.2$ ont été déterminés par une analyse de stabilité linéaire visqueuse. Nous avons retrouvé les instabilités classiques de Crow (instabilité à grande longueur d'onde) et elliptique (instabilité à petite longueur d'onde). Pour des longueurs d'onde de l'ordre de la distance de séparation des tourbillons, l'instabilité correspond au déplacement symétrique (par rapport au plan situé au milieu des deux tourbillons) des tourbillons dans la direction d'étirement maximal caractéristique de l'instabilité de Crow. Les taux de croissance des modes instables sont en très bon accord avec la théorie inviscide de Crow pour un applat de vorticité. Pour des longueurs d'onde de l'ordre de la taille du coeur des tourbillons, notre étude est une extension de celle réalisée par Sipp & Jacquin [47] pour des nombres de Reynolds finis. L'instabilité observée est la conséquence de la résonance entre l'étirement et les modes de Kelvin helicoidaux $m = \pm 1$ stationnaires. Comme Sipp & Jacquin [47] dans le cas inviscide, nous avons trouvé que les taux de croissances des modes symétriques et antisymétriques sont presque indentiques, alors que Leweke & Williamson [31] ont observé expérimentalement une déformation antisymétrique du coeur des tourbillons pour les petites longueurs d'onde.

Un résultat important de ce chapitre est la découverte d'une instabilité oscillante en plus des instabilités de Crow et elliptique. Elle correspond à une résonance entre l'étirement et les ondes de Kelvin de nombre d'onde azimutal $m = 0$ et $|m| = 2$ quand leur nombre d'onde axial et leur fréquence sont égales. Cette instabilité avait déjà été observée pour le dipôle de Lamb-Chaplygin par Billant *et al.* [4] et pour le tourbillon de Rankine par Eloy & Le Dizès [14] mais pas par Sipp & Jacquin [47] pour le dipôle de Lamb-Oseen dans le cas inviscide. La fréquence du mode propagatif le plus instable est comparable à celle prédite pour le tourbillon de Rankine, mais le taux de croissance est beaucoup plus faible. L'hypothèse avancée dans ce chapitre est l'existence de couches critiques pour le dipôle de Lamb-Oseen, contrairement au tourbillon de Rankine, qui induirait un fort amortissement de ces modes propagatifs, amortissement néanmoins pas suffisant pour stabiliser ces modes contrairement à la conjecture faite par Sipp & Jacquin [47].

L'analyse de stabilité linéaire, qui décrit le comportement aux temps longs des perturbations, a montré que les modes instables sont intenses dans le coeur des tourbillons. Cependant, cette analyse modale n'est pas suffisante pour caractériser complètement la dynamique de la paire de tourbillons puisqu'elle ne permet pas de caractériser la croissance transitoire des perturbations. Afin de caractériser les mécanismes physiques, l'intensité et les temps caractéristiques de la dynamique aux temps courts, les perturbations optimales linéaires ont été calculées en intégrant les équations linéarisées de Navier-Stokes adjointes. La recherche de la perturbation optimale maximisant l'énergie se ramène à la résolution d'un problème itératif : la méthode direct-adjoint introduite par Luchini [32]. Plusieurs zones actives de l'écoulement de base ont ainsi été mises en évidence selon l'échelle de temps considérée.

Ainsi, nous avons pu montrer qu'aux temps courts par rapport au temps caractéristique d'advection du dipôle, la dynamique est concentrée sur les points où l'étirement est maximal, localisés à la périphérie du coeur des tourbillons. Aux temps correspondant au temps d'advection du dipôle, selon la symétrie de la perturbation, un des points d'arrêt hyperbolique joue un rôle prépondérant dans la dynamique, là où la perturbation de vorticité est étirée comme pour l'instabilité hyperbolique. Ces instants transitoires, sont peu voire pas séléctifs en nombre d'onde axial : c'est l'instabilité elliptique qui impose cette séléction.

Three-dimensional instabilities and transient growth of trailing vortices

Claire Donnadieu[1], Sabine Ortiz[1,2], Jean-Marc Chomaz[1] and Paul Billant[1]

[1] *LadHyX, CNRS–Ecole Polytechnique F-91128 Palaiseau Cedex, France*
[2] *UME/DFA, ENSTA, chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau Cedex, France*

Abstract

This paper investigates the three-dimensional instabilities and the transient growth of perturbations on a pair of counter-rotating Lamb-Oseen vortices at finite Reynolds number. The instability peaks corresponding to the Crow instability for the long-wavelength and to the elliptic instability for the short-wavelength are retrieved with a linear stability analysis using a high resolution Krylov method and agree well with Sipp & Jacquin [47]. The oscillatory elliptic instability involving Kelvin waves with azimuthal wavenumbers $m = 0$ and $|m| = 2$ is also found in contrast to the analysis of Sipp & Jacquin [47]. It is less unstable than the classical elliptic instability and exists for both symmetries with respect to the middle plane between the two vortices and sufficiently high Reynolds numbers. Optimal transient growths have been computed using the direct and the adjoint operators. We show that the transient dynamics is led by different regions of the flow, depending on the time scale considered. At very short times compared to the advection time of the dipole, the dynamics is concentrated on the points of maximal strain of the base flow, located at the periphery of the vortex core. At intermediate times, depending on the symmetry of the perturbation, one of the hyperbolic stagnation points provides the optimal amplification by stretching of the perturbation vorticity as in the classical hyperbolic instability. The growth of both short time and intermediate time transient perturbations are non or weakly dependent of the axial wavenumber.

2.1 Introduction

Trailing vortices behind aircrafts consist of a horizontal pair of counter-rotating vortices propagating downwards. Such a dipole can be hazardous to following aircrafts during take-off and landing since it can persist over a long time and can induce a strong rolling moment to following aircrafts. Safety regulation imposes a minimum distance between airplanes to avoid such danger. On top of this economic relevance, the potential environmental impact of trailing vortices for high altitude cruising has been debated for years and recently demonstrated by the climate study of Travis *et al.* [50]. Indeed, ice clouds can be formed by condensation of the water vapour on aerosols contained in the air or in the exhaust gas. These condensation trails, or contrails, commonly visible as white lines in clear sky conditions, can degenerate into clouds similar to cirrus (but with a higher albedo). The size, density and persistence of the contrails are linked to the mixing due to the development of instabilities at the early stage of the wake evolution. Travis *et al.* [50] have shown that this anthropic increase of the cloud cover of the atmosphere has an impact on the climate. After the 11th September terrorist attacks and the resulting three-day grounding of all commercial airplanes, they had the opportunity to measure the daily temperature range (DTR), i.e. the difference between the maximum day and minimum night temperatures, in absence of contrails and they have observed a significant increase in DTR demonstrating a global cooling effect of air traffic.

The dynamics of counter-rotating vortices has been widely studied in the past and also in recent years, mainly regenerated by the economic venture of the super jumbo jets, such as the A380. These studies have shown that a pair of counter-rotating vortices is unstable with respect to three-dimensional perturbations. A long and a short wavelength instabilities have been observed and numerically analysed. This confirmed the theoretical work of Crow [8] on a pair of vortex filaments predicting the existence of a long-wavelength symmetric (with respect to the plane separating the two vortices) instability with a wavelength of about five to ten times the vortex core separation distance. The existence of a short-wavelength elliptic instability has been described theoretically by Moore and Saffman [34] and Tsai & Widnall [52], who have investigated the stability of a vortex patch in a uniform strain field. They have shown that this instability originates from the resonant interaction between the strain and Kelvin waves of azimuthal wavenumbers $m = 1$ and $m = -1$ when both waves have the same frequency ω and is particularly intense for $\omega = 0$. Later, Pierrehumbert [39] has shown that an unbounded strained vortex, with elliptic streamlines, is unstable to three-dimensional instabilities. In this unbounded limit, Bayly [3] and Waleffe [53], using a local approach, have shown that the elliptic instability appears as a parametric instability of inertial waves of zero frequency in the fixed frame and is therefore similar to the one discovered by Tsai & Widnall [52]. Numerous papers ever since have focused on this instability with both numerical and theoretical studies (Sipp & Jacquin [47], Billant *et al.* [4], Laporte & Corjon [27], Le Dizès & Laporte [29] ...), recently reviewed by Kerswell [24]. The general case of the resonant interaction between Kelvin waves of azimuthal wavenumbers m and

$m' = m - 2$ has been also analysed (Eloy & Le Dizès [14]).

A few experimental works have described the short-wavelength instability experienced by a pair of counter-rotating vortices. Among them, Leweke & Williamson [31] have observed the internal deformation of the vortex cores characteristic of the elliptic instability and been able to obtain quantitative measurements of the wavelength and the growth rate in agreement with theoretical predictions. However, in their laboratory experiments, they observe an antisymmetric deformation of the cores whereas both symmetric and antisymmetric elliptic modes are almost equally unstable in theoretical investigations (Sipp & Jacquin [47], Billant *et al.* [4] ...). Sipp & Jacquin [47] have proposed that this selection is due to the viscous diffusion of the base flow. The present paper will extend their work by examining the sensitivity of the mode to initial perturbations. As it has been studied in many different configurations (Schmid & Henningson [44]), non-normality of the linearized Navier-Stokes operator may induce a different sensitivity of the modes to initial perturbations and large transient growth of the perturbations on the vortex pair. Short time dynamics of the Lamb-Oseen vortex pair should be explored in order to characterize the physical mechanism, the intensity and the characteristic time scale of transient growths.

In this paper, a three-dimensional stability analysis of a Lamb-Oseen vortex pair is performed in Section 2.2. Transient growths of perturbations on the counter-rotating vortex pair are studied in Section 2.3. In Section 2.3.1, we give the adjoint equations and discuss the adjoint eigenmodes. After the study of the large time energy growth of the perturbations in Section 2.3.3, we focus in Section 2.3.4 on the short time behaviour of the perturbations on the dipole by computing the optimal linear perturbations with a direct-adjoint technique similar to the one introduced by Luchini [32].

2.2 Linear three-dimensional stability analysis of a vortex pair

We investigate the three-dimensional instabilities of a horizontal pair of counter-rotating vortices of initial circulation Γ_0, vortex radius a_0 and vortex separation b_0. The spatial coordinates are Cartesian (x, y, z), corresponding respectively to transverse, axial and vertical directions. The vortex pair propagates downwards along the vertical direction with the initial advection velocity $W_0 = \Gamma_0/2\pi b_0$. The initial state is the superposition of two circular Lamb-Oseen vortices with two-dimensional initial vorticity field ω_{By} given by :

$$\omega_{By}(x,z,t=0) = \frac{\Gamma_0}{\pi a_0^2} e^{-\frac{(x-x_1)^2+(z-z_1)^2}{a_0^2}} - \frac{\Gamma_0}{\pi a_0^2} e^{-\frac{(x-x_2)^2+(z-z_2)^2}{a_0^2}} \tag{2.1}$$

where (x_1, z_1) and $(x_2 = x_1 + b_0, z_2 = z_1)$ are the initial coordinates of the two vortex centroids.

2.2.1 2D base state

The base state is computed from this initial state by a 2D numerical simulation described in Appendix A. As described by Sipp *et al.* [46], the counter-rotating vortices adapt to each other by a two-dimensional process in two steps. First, the mutual strain imposed on one vortex by the other drives the vortices to become elliptical. An equilibrium is rapidly reached and a quasi-steady solution of the Euler equations is established. Then, the dipole belongs to a unique family characterized by its aspect ratio a/b (Sipp *et al.* [46]) for which Γ and b are constant and a evolves by viscous diffusion according to the law (Batchelor [3]) : $a^2 = a_0^2 + 4\nu t$, where ν is the viscosity of the flow. At that stage, for large Reynolds numbers, the evolution of the dipole in the frame moving with the vortices at the vertical velocity W_0 is therefore extremely slow and, at each instant, we can perform a quasi-static stability analysis by freezing the instantaneous flow field.

Figure 2.1(a) represents the isovalues of the axial vorticity obtained in the diffusive regime at time $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 3$ for $Re_{\Gamma_0} = \Gamma_0/\nu = 2400$. The aspect ratio of the dipole has evolved from its initial value $a_0/b_0 = 0.1$ to the value $a/b = 0.206$, where the vortex radius a is computed using the vorticity polar moment : $a = \langle[(x-x_2)^2 + (z-z_2)^2]\omega_{By}\rangle / \langle\omega_{By}\rangle$ with $\langle.\rangle$ denoting the integration over the semi-infinite domain $x > 0$ and the distance between the two vortices is $b = |x_2 - x_1|$, (x_1, z_1) and (x_2, z_2) being the location of the vorticity extrema. This base state is symmetric with respect to the axis $x = 0$:

$$\begin{aligned} &[u_B, 0, w_B](x,z) = [-u_B, 0, w_B](-x,z) \\ &[0, \omega_{By}, 0](x,z) = [0, -\omega_{By}, 0](-x,z) \end{aligned} \tag{2.2}$$

where u_B and w_B are respectively the transverse and the vertical velocity of the base state.

Figure 2.1(a) shows the streamlines in the frame moving with the dipole. The base state streamlines possess two hyperbolic points (indicated by stars on Figures 2.1(a)-2.1(b)). Figure 2.1(b) represents the strain rate

$$\epsilon(x,z) = \sqrt{\left(\frac{\partial w_B}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_B}{\partial z} + \frac{\partial w_B}{\partial x}\right)^2}$$

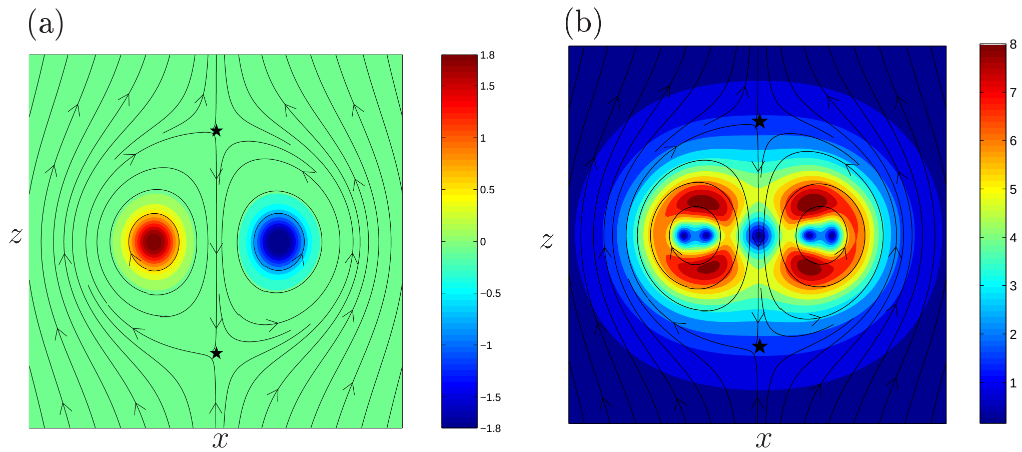

FIG. 2.1 – *Isovalues of (a) the axial vorticity of the base state $\omega_{By} 2\pi a^2/\Gamma$ and (b) the local strain rate $\epsilon 2\pi b^2/\Gamma$ in the (x,z) plane for $a/b = 0.206$ and $Re_{\Gamma_0} = \Gamma_0/\nu = 2400$. The stars represent the two hyperbolic points of the base state and the arrowed lines sketch the streamlines of the base state. The size of the domain shown is $3b \times 3b$ where b is the separation distance between the two vortex centers.*

of the base state. The strain is maximum at the periphery of the vortex cores (dark red in Figure 2.1(b)) in non trivial locations.

2.2.2 Linearized equations

For the stability analysis, the base state presented on Figure 2.1 is frozen in the frame moving with the dipole. This frame of reference is taken by substracting the advection velocity of the dipole to the base state velocity field. The quasi-static stability analysis is valid as long as the time scale of the instability is smaller than the diffusion time scale $T_\nu = a^2/\nu$. This hypothesis should be verified a posteriori, once the growth rate is determined. As known from previous studies, the mutual strain exerted by one vortex on the other is the driving instability mechanism for both Crow and elliptic instabilities, therefore the time scale of the instability is of the order $T_i = 2\pi b^2/\Gamma$. The quasi-static approximation implies $T_i << T_\nu$, i.e. $Re(a/b)^2 >> 1$ where $Re = Wb/\nu$ is the Reynolds number, with $W = \Gamma/2\pi b$ the advection velocity of the dipole. In the following, we will use the circulation Reynolds number $Re_\Gamma = 2\pi Re = \Gamma/\nu$. The procedure is here identical to that of Sipp & Jacquin [47] except that we will carry out a finite Reynolds number viscous stability analysis.

Infinitesimal three-dimensional perturbations are superposed on the frozen base state.

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{u}'(x,y,z,t) = \mathbf{u}_B(x,z) + \mathbf{u}(x,y,z,t) \\ \boldsymbol{\omega}'(x,y,z,t) = \boldsymbol{\omega}_B(x,z) + \boldsymbol{\omega}(x,y,z,t) \\ p'(x,y,z,t) = p_B(x,z) + p(x,y,z,t) \end{array}\right. \tag{2.3}$$

where $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, p](x,y,z,t)$, the velocity, the vorticity and the pressure of the three-dimensional perturbation are solutions of the linearized Navier-Stokes equations :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u}_B \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_B - \nabla(p + \mathbf{u}.\mathbf{u}_B) + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \nabla.\mathbf{u} = 0 \end{array}\right. \tag{2.4}$$

where p is the pressure normalized by the constant density.

As the base state is uniform along the y axis, the perturbations can be decomposed into normal modes :

$$[\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, p](x,y,z,t) = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{p}](x,z,t) \exp^{ik_y y} + c.c. \tag{2.5}$$

where k_y is the axial wavenumber and c.c. denotes the complex conjugate.

2.2.3 Numerical method

The linearized Navier-Stokes Equation (2.4) are integrated using the pseudo-spectral method in Cartesian coordinates with periodic boundary conditions described in Delbende *et al.* [9]. The velocity, vorticity and pressure perturbations are expressed in Fourier space by application of the Fourier transform :

$$[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{p}](x,z,t) = \int\int [\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{p}](k_x, k_z, t) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x dk_z \tag{2.6}$$

In spectral space, the linear Navier-Stokes Equation (2.4) become :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbf{P}(\mathbf{k})[\mathbf{u}_B \times \widehat{\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}} \times \boldsymbol{\omega}_B] - \nu \mathbf{k^2} \hat{\mathbf{u}}, \tag{2.7}$$

where $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ is the total wavevector and $\mathbf{P}(\mathbf{k})$ is the projection operator on the space of divergence-free fields which, in Fourier space, may be expressed as a tensor with components $P_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / \mathbf{k^2}$. Introduction of this operator suppresses the term $\nabla(p + \mathbf{u}.\mathbf{u}_B)$. The cross-product terms $\mathbf{u}_B \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_B$ are evaluated in the physical space. Time integration is performed with a second-order Adams-Bashforth scheme whereas the dissipative term

$\nu\Delta\mathbf{u}$ is integrated exactly in the Fourier space.
The eigenmodes are computed independently for each axial wavenumber k_y. For $k_y a$ larger than 0.3, the domain size in the x and z directions is half that used to compute the base state $(\mathbf{u}_B, \boldsymbol{\omega}_B)$ (see Appendix A), i.e. $L_x = L_z = 3b$ with a Cartesian grid of 256×256. The accuracy and the convergence of the results have been tested by taking a larger box size and a finer resolution (see Appendix B for details). For wavenumbers $k_y a$ smaller than 0.3, the size of the computational domain has been kept the same as that of the base flow $L_x = L_z = 6b$ with 512×512 grid points. Indeed, away from the vortex dipole, the perturbation with an axial wavenumber k_y decreases exponentially with an evanescent length scale proportional to k_y^{-1}. Assuming periodicity in the relatively small box $L_x = L_z = 3b$ has negligible effect when $k_y a$ is larger than 0.3 but affects the results for $k_y a < 0.3$ whereas, down to $k_y a = 0.1$, the size $L_x = L_z = 6b$ is sufficiently large. The time step is set to $\delta t = 10^{-3}$, with $b = 2$ and $\Gamma = 2\pi$. The three-dimensional perturbation has been initialized either by divergence-free white noise or by an eigenmode computed previously for a slightly different axial wavenumber in order to speed up the time convergence.

A Krylov method similar to the one described in Edwards *et al.* [12] is implemented in order to retrieve with a reasonable precision the three leading eigenmodes. After an initial integration over a time $T = 70$ obtained from a simulation initialized by white noise, six perturbation velocity fields $\tilde{\mathbf{u}}$ are saved, at six successive times separated by $\Delta T = 10$ in order to construct an orthonormalized basis which spans a six dimension Krylov subspace. The eigenvalues of the evolution operator are computed in this subspace [23].

2.2.4 Three-dimensional unstable modes

Since the base state is symmetric versus $x \to -x$, the eigenmodes can be decomposed into symmetric (same symmetry as the base state) :

$$\begin{aligned} [\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z](x,z) &= [-\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z](-x,z) \\ [\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z](x,z) &= [\tilde{\omega}_x, -\tilde{\omega}_y, -\tilde{\omega}_z](-x,z) \end{aligned} \tag{2.8}$$

and into an antisymmetric family (opposite symmetry to the base state) :

$$\begin{aligned} [\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z](x,z) &= [\tilde{u}_x, -\tilde{u}_y, -\tilde{u}_z](-x,z) \\ [\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z](x,z) &= [-\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z](-x,z). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Symmetric and antisymmetric eigenmodes are calculated separately, the symmetries being imposed at each timestep during the time evolution. This procedure improves the precision on the eigenvalues when their growthate is small but is not essential since we have checked that eigenvalues and eigenmodes are similar by either imposing the symmetry at posteriori on the Krylov subspace if the integration is run without imposing the symmetry or by not imposing the symmetry but by increasing the dimension of the Krylov subspace to 12 in order to retrieve simultaneously the modes without assuming the symmetries of the modes (Equation 3.13 and 3.14).

The Figure 2.2 shows the real part of the dimensional growth rate σ_r scaled by $2\pi b^2/\Gamma$, the strain imposed by one vortex on the other, of symmetric and antisymmetric modes as function of the dimensional axial wavenumber k_y scaled by the vortex core radius a for two Reynolds numbers $Re_\Gamma = 10^5$ (Figure 2.2(a)) and $Re_\Gamma = 2000$ (Figure 2.2(b)). The different instability bands

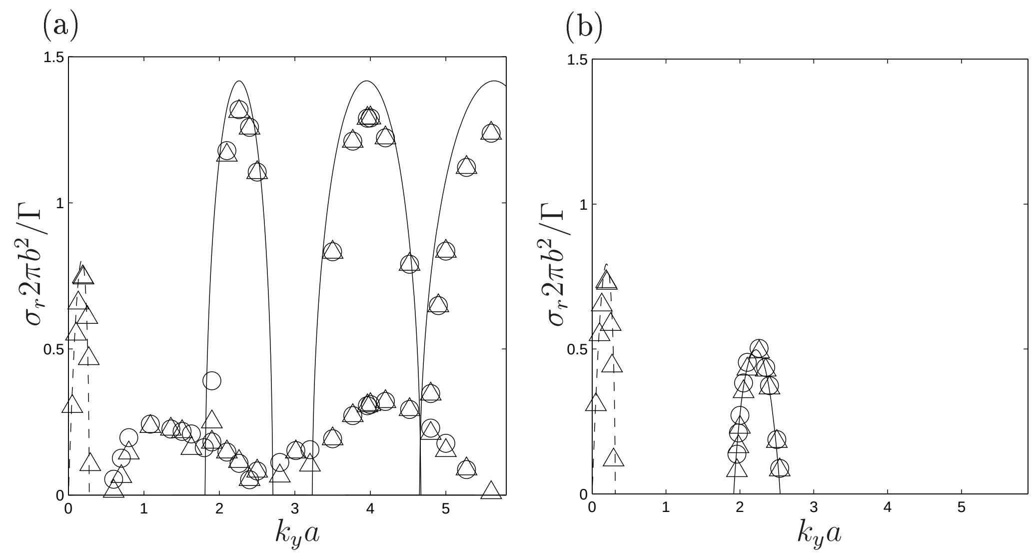

FIG. 2.2 – *Non-dimensional growth rates $\sigma_r 2\pi b^2/\Gamma$ of symmetric (△) and antisymetric (◯) modes as function of the non-dimensional axial wavenumber $k_y a$ for (a) $Re_\Gamma = 10^5$ and (b) $Re_\Gamma = 2000$. Dashed line corresponds to the theory of Crow [8] for a pair of vortex filaments. Continuous lines of Figure (a) correspond to the theory of Le Dizès & Laporte [29] for a pair of Lamb-Oseen vortices with a Gaussian vorticity profile in the inviscid limit and the continuous line of Figure (b) is the estimate (2.14), which corresponds to the inviscid theory of Le Dizès & Laporte [29] with a novel viscous correction derived in Section 2.3.2.*

corresponding to the classical Crow, elliptical instabilities and to oscillatory modes are described below.

Crow instability

The first band on the left of Figures 2.2(a) and 2.2(b), between $k_y a = 0$ and $k_y a = 0.3$, corresponds to the long-wavelength Crow instability, with a maximum growth rate $\sigma_r 2\pi b^2/\Gamma = 0.74$ for $Re_\Gamma = 10^5$ and 0.73 for $Re_\Gamma = 2000$ at the wavenumber $k_y a = 0.19$, corresponding to $k_y b = 0.92$. This instability is symmetric, antisymmetric modes being all stable for $k_y a$ smaller than 0.5. The dashed line on Figure 2.2 represents the theoretical inviscid predictions of Crow [8] for a pair of vortex filaments with an equivalent radius $a_e = 1.36a$, for long-wavelength disturbances, the coefficient 1.36 being derived from the bending mode dynamics taking into account the present gaussian vorticity distribution (Widnall [55]). The agreement is remarkable with a predicted maximum growth rate of 0.79 at the wavenumber $k_y a = 0.19$. The axial vorticity $\tilde{\omega}_y$ of the eigenmode (Figure 4.4) at the maximum of the Crow instability band $k_y a = 0.19$ is odd with respect to $x = 0$ since the

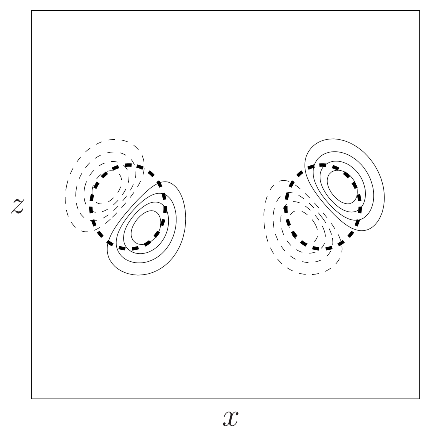

FIG. 2.3 – **Crow instability** - *Contours of the axial vorticity $\tilde{\omega}_y$ of the eigenmode in the (x,z) plane for $Re_\Gamma = 10^5$ at the leading wavenumber of the Crow instability branch : $k_y a = 0.19$. The contour levels $\tilde{\omega}_y/|\tilde{\omega}_{ymax}|$ shown are ± 0.2, ± 0.4, ± 0.6 and ± 0.8. Continuous lines correspond to positive vorticity and dashed lines correspond to negative vorticity. The heavy dashed lines correspond to the isocontours $\omega_{By}/|\omega_{By_{max}}| = \pm exp(-1)$ of the base state. The size of the domain shown is $2b \times 2b$ whereas the computation domain is $6b \times 6b$.*

mode is symmetric. This vorticity perturbation, when added to the base flow, induces a symmetric displacement of the base flow vortices along lines inclined at an angle of 45° as predicted by the theory [8].

Elliptic instability

On the right side of the Crow branch, Figure 2.2(a) shows for $Re_\Gamma = 10^5$ three other bands of instability, with maximum non-dimensional growth rate equal to 1.32 at wavenumber $k_y a = 2.26$, 1.29 at $k_y a = 3.96$ and 1.24 at $k_y a = 5.64$, which correspond to the elliptic instability and are well predicted by the inviscid theory of Le Dizès & Laporte [29] [2]. The computed growth rates of symmetric and antisymmetric modes are almost identical, showing that the present value of $a/b = 0.206$ is already small enough for the coupling between the elliptic instability that affect each vortex core to be negligible as assumed in Le Dizès & Laporte [29]. For the low Reynolds number $Re_\Gamma = 2000$ shown on Figure 2.2(b), only the first band with a maximum growth rate $\sigma_r 2\pi b^2/\Gamma = 0.5$ at wavenumber $k_y a = 2.26$ is unstable. The present finite Reynolds number stability analysis shows that the viscous correction proposed by Le Dizès & Laporte [29] is not valid since it predicts that this mode should be stable for $Re_\Gamma = 2000$ with a growth rate $\sigma_r 2\pi b^2/\Gamma = -0.33$ at the maximum of the instability band. In Le Dizès & Laporte [29], the viscous damping is derived from the asymptotic formula of Landman & Saffman [26] $\nu k_y^2/cos^2\xi$ valid at large k_y for any inertial wave with a local wavevector $\mathbf{k}$, with a k_y component along the rotation axis y and making the angle ξ with the y axis. In Le Dizès & Laporte [?], the relevant angle ξ is obtained from the numerically computed frequency of the resonant Kelvin mode $m = 1$ which, for the different branches, give the fitted formula :

$$cos\xi = \frac{1}{2} - \frac{(2.26 + 1.69n) - k_y a}{14.8 + 9n}$$

where $n = 0, 1, 2, ...$ is the index of the branch. The present direct stability analysis shows that such a procedure, legitimate for large axial wavenumbers, strongly overestimates (by nearly a factor two) the viscous correction of the first elliptic instability branches. Their viscous theory has not been displayed on Figure 2.2(b). Instead, the solid curve reported on Figure 2.2(b) is the Le Dizès & Laporte [29] formula in the inviscid limit with a viscous damping computed with the method presented in Section 2.3.2. This new formula takes into account the very spatial structure of the eigenmode by the use of the adjoint mode of the elliptic instability instead of assuming a plane wave expansion.

[2] The misprints in formulas (6.1) and (6.2) in Le Dizès & Laporte [29] have been corrected and b^2/a_i^2 has been replaced by b^4/a_i^4.

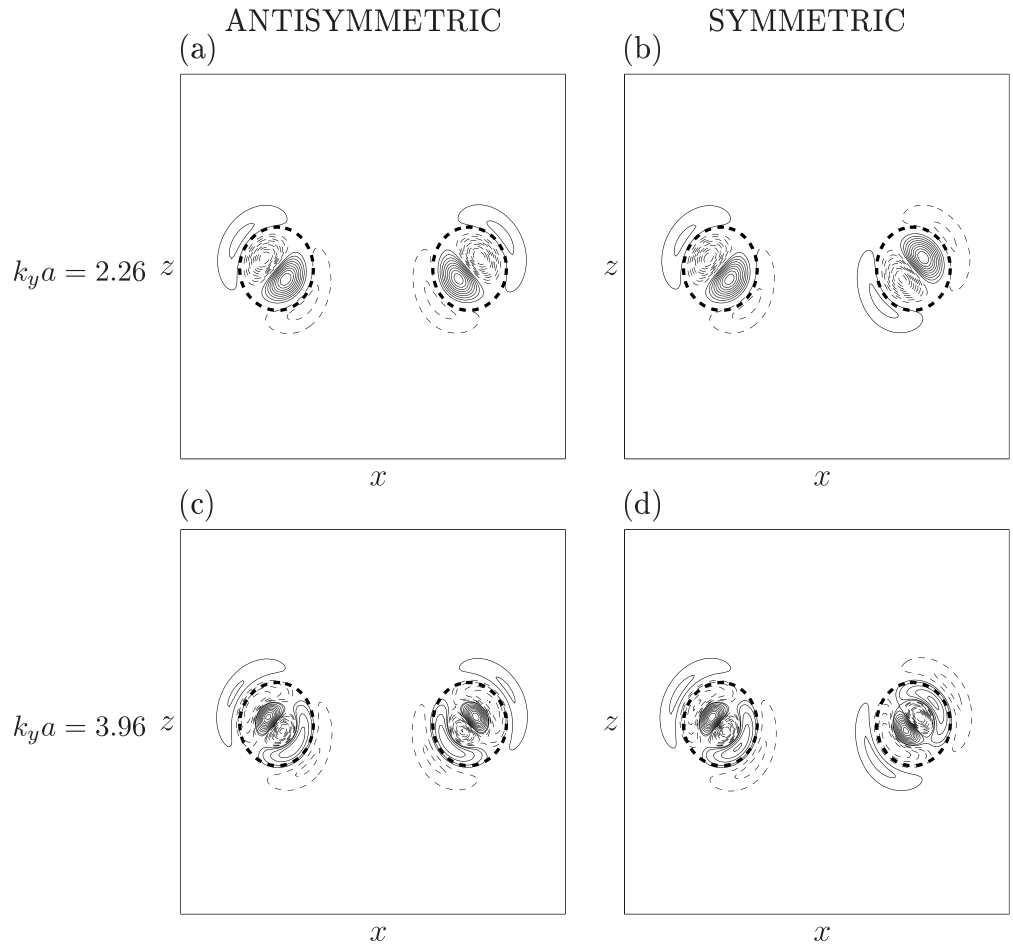

FIG. 2.4 – **Elliptic instability** - *Same as Figure 4.4 but for the first band of the elliptic instability at $k_y a = 2.26$ (a)-(b) and for the second band at $k_y a = 3.96$ (c)-(d). (a)-(c) Antisymmetric modes. (b)-(d) Symmetric modes. The contour levels $\tilde{\omega}_y / |\tilde{\omega}_{ymax}|$ shown are ± 0.1, ± 0.3, ± 0.5, ± 0.7 and ± 0.9 for (a)-(b) and ± 0.05,± 0.1, ± 0.3, ± 0.5, ± 0.7 and ± 0.9 for (c)-(d).*

Oscillatory instabilities

At large Reynolds number $Re_\Gamma = 10^5$, the two lower bands on Figure 2(a), between $k_y a = 0.5$ and $k_y a = 2.5$ with a maximum growth rate 0.24 at $k_y a = 1.09$ and between 2.8 and 5.6 with a maximum 0.32 at 4.2, will be thereafter refered to as oscillatory instabilities since the growth rates have an imaginary part. They exist for both symmetric and antisymmetric modes with extremely close growth rates. Figure 2.5 shows the axial vorticity of the antisymmetric oscillatory modes for the most unstable wavenumber of each unstable bands. The vorticity perturbation at $k_y a = 1.09$ (Figures 2.5(a) for the real part and 2.5(b) for the imaginary part) consists of a central maximum located inside the core of each base flow vortex and two lobes of opposite signs at the periphery. The vorticity perturbation in each vortex core may therefore be constructed by superposition of a $m = 0$ and $|m| = 2$ azimuthal perturbation and may be interpreted as the elliptic instability mode resulting from a resonance between the strain and Kelvin waves of azimuthal wavenumbers $m = 0$ and $|m| = 2$ as proposed by Billant *et al.* [4] in the case of the Lamb-Chaplygin dipole and investigated in details by Eloy & Le Dizès [14] for the Rankine vortex.

The frequency of the most unstable oscillatory mode of the first branch has been compared to the frequency of the resonant Kelvin waves of azimuthal wavenumbers $m = 0$ and $|m| = 2$ on a Rankine vortex obtained by solving the dispersion relation given by Saffman [**?**] (see also Billant *et al.* [4]). The first resonance occurs at the wavenumber $k_y a_r = 1.24$ for a frequency $\omega_i/\Omega = 0.8$, where a_r is the radius and Ω the rotation rate of the Rankine vortex. Since the sampling frequency $2\pi/\Delta T$ used to retrieve the eigenmodes with the Krylov method explained in Section 2.2.3 is very small compared to the frequency of the oscillatory modes, the imaginary parts of the eigenvalues of these modes computed with this method are not the very frequency but one of its harmonic with the sampling frequency. Therefore, the frequency of the propagative mode at the maximum of the first unstable band $k_y a = 1.09$ has been computed directly from the temporal evolution of the energy E of the perturbation sample at high frequency $2\pi/10^{-3}$. The times between two successive maxima (or two successive minima) of $d(\ln E)/dt$ corresponds to the period T, hence giving the imaginary part of the eigenvalue $\sigma_i = 2\pi/T$. We find $\sigma_i/\Omega(r = 0) = \sigma_i 2\pi a^2/\Gamma = 0.6$ at $k_y a = 1.09$ for both symmetries, $\Omega(r = 0)$ being the effective rotation rate in the core of the vortex, which agrees in magnitude with $\omega_i/\Omega = 0.8$, the value predicted for the Rankine vortex. This agreement is satisfactory considering the important differences in the vorticity distribution between the Rankine and Lamb-Oseen vortices.

Eloy & Le Dizès [14] have shown that the inviscid growth rates of the resonant Kelvin modes combination $m = 0$ and $m = 2$ and the helical modes $m = \pm 1$ are comparable for the Rankine vortex. These oscillatory instabilities were not found by Sipp & Jacquin [47] in their inviscid analysis. These authors put forward the presence of a viscous critical layer since, for the Lamb-Oseen vortex, the Kelvin waves for $m = 2$ with frequencies between 0 and $2\Omega_{max}$ (Ω_{max} the maximum of the angular velocity at the center of the vortex), presents a critical layer at the radius where the azimuthal phase velocity of the perturbation equals the angular velocity $\Omega(r)$ of the base state, i.e. $\omega/m = \Omega(r)$. This viscous critical layer induces a strong damping of the

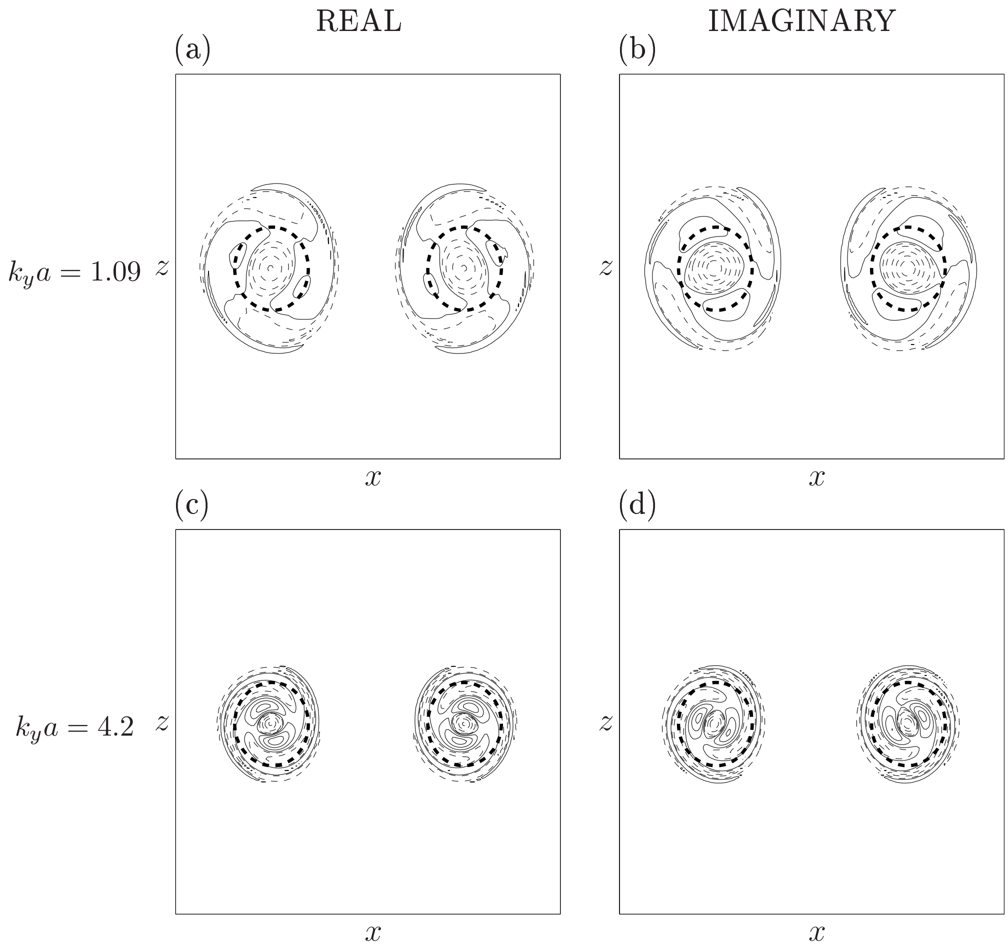

FIG. 2.5 – **Oscillatory instability** - *Same as Figure 4.4 except that only the antisymmetric mode is presented, the symmetric being similar.(a)-(b)* $k_y a = 1.09$ *and (c)-(d)* $k_y a = 4.2$. *(a)-(c) Real part of the eigenmode axial vorticity. (b)-(d) Imaginary part of the modes. The contour levels* $\tilde{\omega}_y/|\tilde{\omega}_{ymax}|$ *shown are* ± 0.02, ± 0.1, 0.2, ± 0.3, -0.5 *and* -0.7.

mode. In the present stability analysis, this resonance is observed for large but finite Reynolds number. However, the damping due to the critical layer may explain why the growth rate of the $m = 0$, $|m| = 2$ elliptic mode is much lower than the elliptic instability with $m = \pm 1$ Kelvin waves for the Lamb-Oseen vortices whereas their growth rates are almost equal for the Rankine vortex [14]. Another possibility would be that finite ellipticity effects might dominate the viscous effects and change the nature of the critical layer. This issue would deserve future analysis.

2.3 Non-normality and adjoint modes

The stability analysis presented above considers the eigenmode of the linearized evolution operator. For each axial wavenumber k_y, it is known that, starting from random initial condition, the flow will eventually converge toward the leading eigenmode and experience an exponential growth when this mode is unstable. This exponential longtime behaviour should be complemented by examining the fate of the perturbations at short time since, as the Navier-Stokes operator linearized around the base flow is non-normal (Schmid & Henningson [44]), they may exhibit transient growth of their energy. A standard technique to compute transient growth requires the resolution of the adjoint of linearized Navier-Stokes equations. The scalar product used to construct the adjoint is :

$$< \mathbf{f}'|\mathbf{f} >= \int_0^{\tau}\int_0^{L_x}\int_0^{L_z} \mathbf{f}'^{*T}.\mathbf{f} dxdzdt = \int_0^{\tau}\int_0^{L_x}\int_0^{L_z} (\mathbf{u}'^{*T}.\mathbf{u} + p'^{*}p) dxdzdt \tag{2.10}$$

where $\mathbf{f}' = (\mathbf{u}', p')$ and $\mathbf{f} = (\mathbf{u}, p)$ are two complex state vectors, the superscripts * and ^{T} denote the complex conjugate and the transposition, the kinetic energy being then given by :

$$E(t) = (\mathbf{u}|\mathbf{u}) = \int_0^{L_x}\int_0^{L_z} (\mathbf{u}^{*T}.\mathbf{u}) dxdz \tag{2.11}$$

2.3.1 Adjoint equations and adjoint eigenmodes

The adjoint of the linearized Navier-Stokes equations, is deduced from Equation 2.4 using the Lagrange identity (Ince [21], Schmid & Henningson [44]) and rewritten as :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t'} = \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{u}^+ - \nabla \times (\mathbf{u}_B \times \mathbf{u}^+) - \nabla p^+ + \nu \Delta \mathbf{u}^+ \\ \nabla.\mathbf{u}^+ = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

where $[\mathbf{u}^+, p^+](x, y, z, t)$ are the adjoint velocity and pressure perturbations and $t' = -t$. These equations are integrated with a pseudo-spectral technique similar to the technique used to solve the direct problem in Section 2.2.3, where the advection term is replaced by $\boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{u}^+ - \nabla \times (\mathbf{u}_B \times \mathbf{u}^+)$. The size of the box and the timestep are the same as for the direct linear Navier-Stokes equations. The leading eigenmodes of the adjoint operator are computed using the same Krylov method, the symmetries being imposed at each timestep or a posteriori as for the direct equations. For all k_y, the computed spectrum of the adjoint operator is equal to the direct spectrum with a fifth digit precision. It verifies also the biorthogonality property with the same accuracy : all adjoint and direct eigenmodes corresponding to a given eigenvalue are orthogonal.

Figure 2.6 displays the axial vorticity and the enstrophy of the symmetric and antisymmetric adjoint eigenmodes at the peak of the first elliptic instability branch for $Re_\Gamma = 2000$. The spatial distribution of the adjoint eigenmodes differs for both symmetries. For the antisymmetric mode, the vorticity perturbation of the adjoint elliptic mode is intense inside the core of the vortices and on the contracting manifold of both the upper and lower hyperbolic stagnation points. The symmetric mode is intense inside the core and on the contracting manifold of the lower hyperbolic stagnation point only, with no contribution of the upper stagnation point.

2.3.2 Viscous damping estimate of the elliptic instability

In Section 2.2.4, we have observed that the viscous theory of Le Dizès & Laporte [29] predicts that all the modes of the elliptic instability are stable for $Re_\Gamma = 2000$. However, the present direct linear stability analysis gives a band of unstable modes corresponding to the elliptic instability with a maximum growth rate $\sigma_r 2\pi b^2/\Gamma = 0.5$ at the wavenumber $k_y a = 2.26$. This discrepancy shows that the viscous damping proposed by Le Dizès & Laporte [29] overestimate by nearly a factor two the actual one. In this Section, we give an estimate of the viscous damping using the adjoint eigenmode at the maximum of the elliptic instability at large Reynolds number. The viscosity is considered as a perturbation of the large Reynolds number linear Navier-Stokes operator (Schmid & Henningson [44]) : $L \sim L^{(0)} + \nu L^{(1)}$, where L is the viscous linear Navier-Stokes operator, $L^{(0)}$ the inviscid linear Navier-Stokes operator, $L^{(1)} = \Delta_{2D} - k_y^2$ the perturbation operator. Asymptotic expansion of the leading eigenvalue $\sigma_1 \sim \sigma_1^{(0)} + \nu\sigma_1^{(1)}$ and eigenmode $\phi_1 \sim \phi_1^{(0)} + \nu\phi_1^{(1)}$, where $\sigma_1^{(0)}$ (resp. $\phi_1^{(0)}$) corresponds to the inviscid leading eigenvalue (resp. eigenmode) and $\sigma_1^{(1)}$ (resp. $\phi_1^{(1)}$) corresponds to the leading-order modification of the leading eigenvalue (resp. eigenmode) due to perturbation by the viscous operator, gives :

$$\sigma_1^{(1)} = \frac{< \phi_1^{(0)+} | L^{(1)} \phi_1^{(0)} >}{< \phi_1^{(0)+} | \phi_1^{(0)} >} = \frac{< \phi_1^{(0)+} | \Delta_{2D} \phi_1^{(0)} >}{< \phi_1^{(0)+} | \phi_1^{(0)} >} - k_y^2, \qquad (2.13)$$

where $\phi_1^{(0)+}$ is the adjoint eigenmode. The estimate of the viscous damping of the elliptic instability, for a Reynolds number based on the circulation

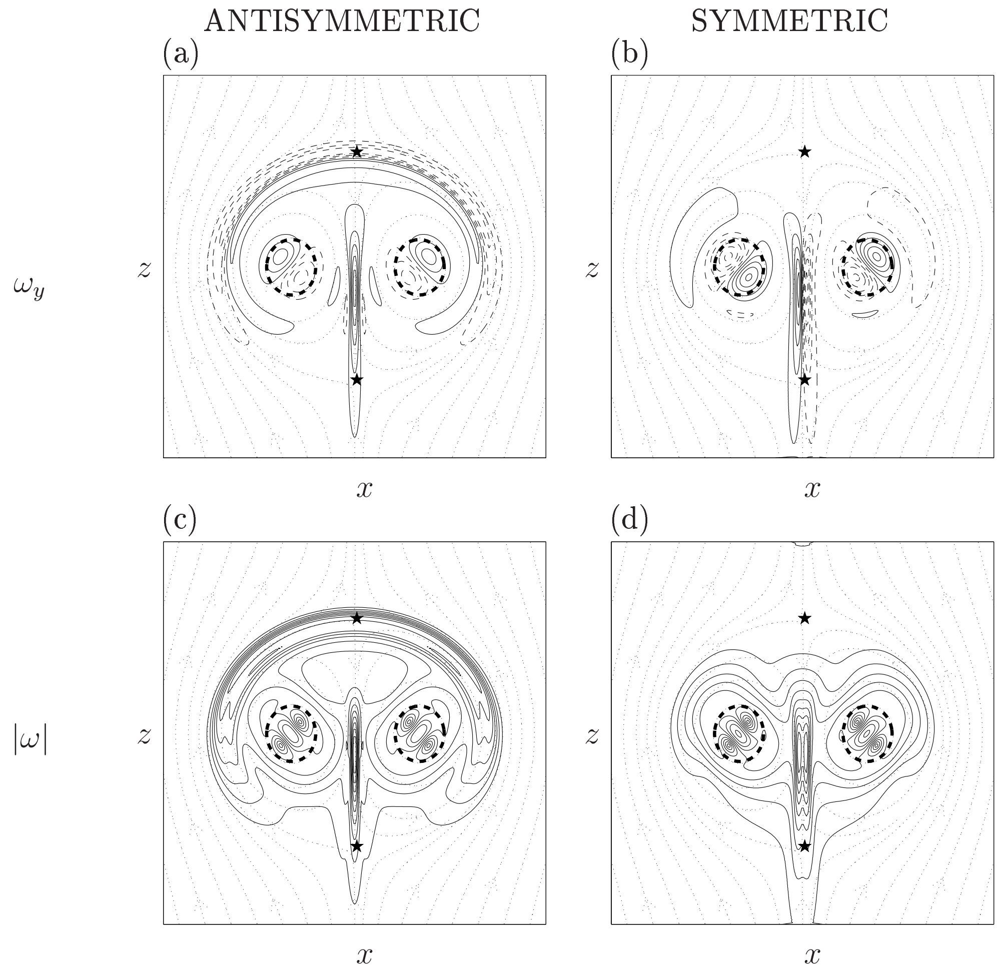

FIG. 2.6 – **Adjoint modes for the elliptic instability** - *Contours of axial vorticity $\tilde{\omega}_y$ (a)-(b) and square root of enstrophy $|\tilde{\omega}|$ (c)-(d) of adjoint eigenmodes in the (x,z) plane for $Re_\Gamma = 2000$ at the elliptic instability maximum $k_y a = 2.26$. (a)-(c) Antisymmetric mode. (b)-(d) Symmetric mode. Continuous lines correspond to positive vorticity and dashed lines correspond to negative vorticity. The contour levels shown on Figures (a) and (b) are $\tilde{\omega}_y/|\tilde{\omega}_{ymax}| = \pm 0.1, \pm 0.3, \pm 0.7, \pm 0.9$ and $|\tilde{\omega}|/|\tilde{\omega}_{max}| = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ on Figures (c) and (d). The heavy dashed lines mark the vortex core of the base state like in Figure 4.4. The stars represent the stagnation points of the base state and the dotted lines with arrows correspond to the streamlines of the base state. The size of the domain shown is larger than in previous Figures : $3b \times 3b$.*

$Re_\Gamma = 2000$ has been computed using the Equation (2.13). The growth rate nondimensionalized by the strain $2\pi b^2/\Gamma$ is given by :

$$\sigma_1 \frac{2\pi b^2}{\Gamma} = \sigma_1^{(0)} \frac{2\pi b^2}{\Gamma} - \frac{2\pi}{Re_\Gamma} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left((k_y a)^2 - C_{k_{ym}} a^2\right), \qquad (2.14)$$

where $\sigma_1^{(0)} 2\pi b^2/\Gamma$ is the inviscid prediction of Le Dizès & Laporte [29] and the constant $C_{k_{ym}}$

$$C_{k_{ym}} = \frac{< \phi_{1m}^{(0)+} | \Delta_{2D} \phi_{1m}^{(0)} >}{< \phi_{1m}^{(0)+} | \phi_{1m}^{(0)} >} = -\frac{6.71}{a^2},$$

has been computed for $k_{ym} a = 2.26$, the maximum of the first elliptic instability band using the direct eigenmode $\phi_{1m}^{(0)}$ and the adjoint eigenmode $\phi_{1m}^{(0)+}$ obtained for $Re_\Gamma = 10^5$ (which is close enough to the inviscid limit). This estimate predicts $\sigma_1 2\pi b^2/\Gamma = 0.5$ for $Re_\Gamma = 2000$ for the antisymmetric mode, which is equal to the growth rate of the antisymmetric mode $\sigma_r 2\pi b^2/\Gamma = 0.5$ obtained in Section 2.2.4. The prediction (2.14), plotted on Figure 2.2(b), is in remarkable agreement with the results of the linear stability analysis.

2.3.3 Large times behaviour

The adjoint eigenmode is the initial condition that maximises the energy gain at large times (Schmid & Henningson [44]), the energy gain at time t for an initial condition being defined by :

$$G(t) = \frac{E(t)}{E(0)} \qquad (2.15)$$

where $E(0)$ is the initial energy of the perturbation and $E(t)$ is its value at time t. Figures 2.7(a) and 2.7(b) show the logarithm of the energy gain as function of time for a single axial wavenumber at the peak of the elliptic instability $k_y a = 2.26$, for different initial conditions and for two different Reynolds numbers $Re_\Gamma = 2000$ and $Re_\Gamma = 5000$. The heavy (resp. thin) dashed line corresponds to the amplification factor in the symmetric (resp. antisymmetric) case with the direct eigenmode taken as initial condition. The dependence of $ln(G)$ as function of t is linear and the slope is twice the growth rate computed previously, i.e. $\sigma_s 2\pi b^2/\Gamma = 0.49$ for the symmetric case and $\sigma_a 2\pi b^2/\Gamma = 0.5$ for the antisymmetric case, for $Re_\Gamma = 2000$ and for $k_y a = 2.26$. Since the difference between the growth rate of the symmetric and antisymmetric modes is small, their energy differs only by 12% at time $t\Gamma/2\pi b^2 = 5$.

The heavy (resp. thin) continuous line corresponds to the gain in the symmetric (resp. antisymmetric) case when the initial condition is the adjoint eigenmode. The final energy gain at time $t\Gamma/2\pi b^2 = 5$ is larger by a factor 4 (antisymmetric) and 2 (symmetric) when initialized by the adjoint than by the direct eigenmode. The antisymmetric mode is therefore more sensitive to initial perturbation than the symmetric one. Any initial condition $\mathbf{u}$ with $(\mathbf{u_1^+}|\mathbf{u}) \neq 0$, where $\mathbf{u_1^+}$ is the leading adjoint mode, is dominated at large time by the leading eigenmode $\mathbf{u_1}$ with an amplitude equal to $(\mathbf{u_1^+}|\mathbf{u})/(\mathbf{u_1^+}|\mathbf{u_1})e^{\lambda_1 t}$ which is the largest when $\mathbf{u} = \mathbf{u_1^+}$ (see Ortiz & Chomaz [36] for a detailed demonstration). Therefore, when both $\mathbf{u_1^+}$ and $\mathbf{u_1}$ are normalized, $1/|(\mathbf{u_1^+}|\mathbf{u_1})|^2$ measures the extra gain obtained, at large time, by initializing by the adjoint mode $\mathbf{u_1^+}$ instead of by the direct mode $\mathbf{u_1}$. Presently, its value is $ln(1/|(\mathbf{u_1^+}|\mathbf{u_1})|^2) = 1.6$ in the antisymmetric case and $ln(1/|(\mathbf{u_1^+}|\mathbf{u_1})|^2) = 1.1$ in the symmetric case, in close agreement with the numerical results of Figure 2.7(a) obtained by direct time integration of the perturbation equation. The scalar $1/(\mathbf{u_1^+}|\mathbf{u_1})$ indicates the sensivity to initial perturbation of the leading eigenmode and quantifies therefore its non-normality. But, at finite times, several eigenmodes may interfere to give large transient and the knowledge of the leading adjoint mode is not sufficient to characterise the finite time behaviour of perturbations.

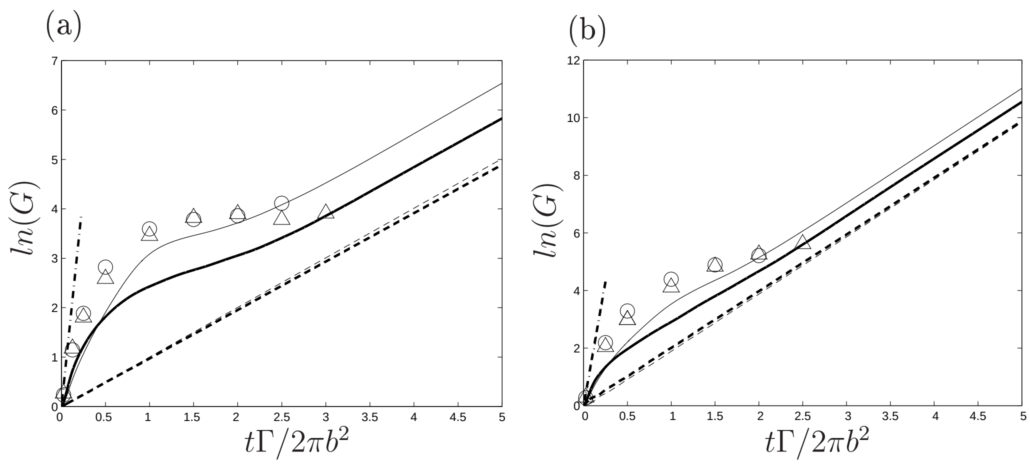

FIG. 2.7 – *Energy gain of the symmetric (heavy lines and △) and antisymmetric (thin lines and ◯) modes as function of the time t nondimensionalized by the advection time of the dipole $2\pi b^2/\Gamma$ for different initial conditions. (a) $Re_\Gamma = 2000$ - (b) $Re_\Gamma = 5000$. Dashed lines : initial condition is the direct eigenmode. Continuous lines : initial condition is the adjoint eigenmode, optimal at large times. Open symbols : optimal gain at each time. Dash-dotted lines : theoretical prediction of the energy gain at short times.*

2.3.4 Short times behaviour

Transient growths are first computed for a single axial wavenumber $k_y a = 2.26$ corresponding to the maximum of the first elliptic instability branch. A discussion of the variation with $k_y a$ will be then given. The optimal perturbations can be computed by different techniques. We use here the direct-adjoint iterative procedure introduced by Luchini [32] to determine the optimal initial condition and the optimal response at finite time for both symmetries. The direct Equation (2.4) are integrated with the adjoint velocity perturbation taken as a guess value for the optimal initial condition : $\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u_1}^+$ until time $t = \tau$. The backward in time integration of the adjoint Equation (2.12) is then performed by taking the direct velocity perturbation at $t = \tau$ as initial condition : $\mathbf{u}^+(t'=0) = \mathbf{u}(t=\tau)$, where $t' = t - \tau$. The adjoint Equation (2.4) are then integrated until $t' = \tau$. Then, the procedure is reiterated taking as initial condition for the direct integration, the adjoint field at the final time τ, normalized to unit energy : $\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}^+(t'=\tau)/|\mathbf{u}^+(t=\tau)|$. The successive integrations of direct and adjoint equations are repeated until the convergence is obtained, i.e. the variation of $ln(G(\tau))$ is less than 10^{-2}. This is usually archieved in about 3 to 10 iterations. The choice of the adjoint eigenmode as an initial condition instead of a random noise simply speeds up the convergence but does not change the final result. The optimal energy gains of symmetric ($\triangle$) and antisymmetric ($\bigcirc$) optimal perturbations obtained independently for each symmetry at time τ are displayed on Figure 2.7. They are very close for both symmetries. The optimal gains depart from the gain obtained with the adjoint mode as an initial condition till $t\Gamma/2\pi b^2 \simeq 2.5$, that may be therefore considered as the time duration of the transient regime. The spatial distribution of the optimal initial perturbation and optimal response are different for both symmetries as shown on Figures (2.8) and (2.9). The axial vorticity of the antisymmetric initial optimal perturbation at $t\Gamma/2\pi b^2 = 1$ is intense on the contracting manifold of the upper stagnation point whereas in the symmetric case it is strong in the middle of the two vortices, i.e. on the contracting manifold of the lower stagnation point. The axial vorticity of the optimal response (Figures 2.8(c) and 2.9(c)) at $t\Gamma/2\pi b^2 = 1$ is in both cases localized in the core of the vortices but, when comparing to Figure 4.5, it has not yet converged toward the eigenmode with in particular large enstrophy perturbation (Figures 2.8(d) and 2.9(d)) outside the core of the optimal response, confirming that $t\Gamma/2\pi b^2 = 1$ is still in the transient regime. This optimal response corresponds to the formation of vertical vortices on the symmetry axis in the antisymmetric case, i.e. along the stretching manifold of the upper hyperbolic point (Figure 2.8(d)). In the symmetric case, it corresponds to the formation of nearly horizontal vortex ribs along the stretching manifold of the lower hyperbolic point (Figure 2.9(d)).

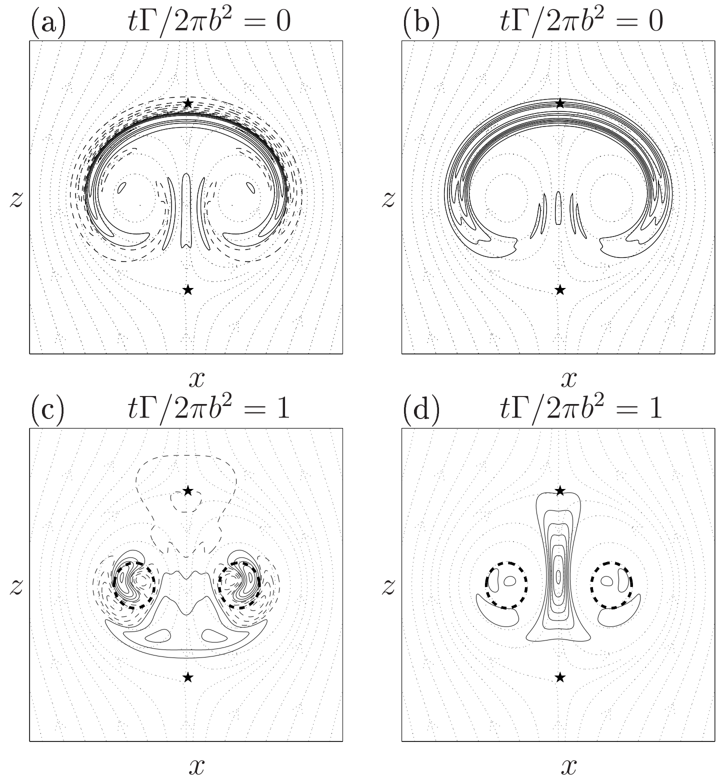

FIG. 2.8 – **Optimal initial perturbation (a)-(b) and optimal response (c)-(d) at $t\Gamma/2\pi b^2 = 1$ for the antisymmetric case**. *Contours of (a)-(c) axial vorticity $\tilde{\omega}_y$ and (b)-(d) square root of enstrophy $|\tilde{\omega}|$ in the (x,z) plane for $Re_\Gamma = 2000$ at $k_y a = 2.26$ for the antisymmetric case at $t\Gamma/2\pi b^2 = 1$. In (a)-(c), the continuous lines correspond to positive vorticity and the dashed lines correspond to negative vorticity. The contour levels shown are $\tilde{\omega}_y/||\tilde{\mathbf{u}}(t=0)||$ $= \pm 0.01$, ± 0.05, ± 0.09, ± 0.13 and 0.17 on Figure (a), $\tilde{\omega}_y/||\tilde{\mathbf{u}}(t=0)|| =$ ± 0.01, ± 0.05, ± 0.09, ± 0.13 and ± 0.17 on Figure (c), $|\tilde{\omega}|/||\tilde{\mathbf{u}}(t=0)|| =$ 0.02, 0.05, 0.08, 0.11, 0.14, 0.17 and 0.2 on Figure (b) and $|\tilde{\omega}|/||\tilde{\mathbf{u}}(t=0)||$ $= 0.2$, 0.4, 0.6, 0.8, $1.$, 1.2 and 1.4 on Figure (d). Same as Figure 2.6, for other characteristics.*

The spatial distribution of the optimal perturbation and response at $t\Gamma/2\pi b^2 = 0.025$ is displayed on Figure 2.10 for the antisymmetric case and on Figure 2.11 for the symmetric case. At very short times, we observe that the shape of the optimal initial perturbation is very similar to the optimal response since the flow has little time to develop. For both symmetries, the

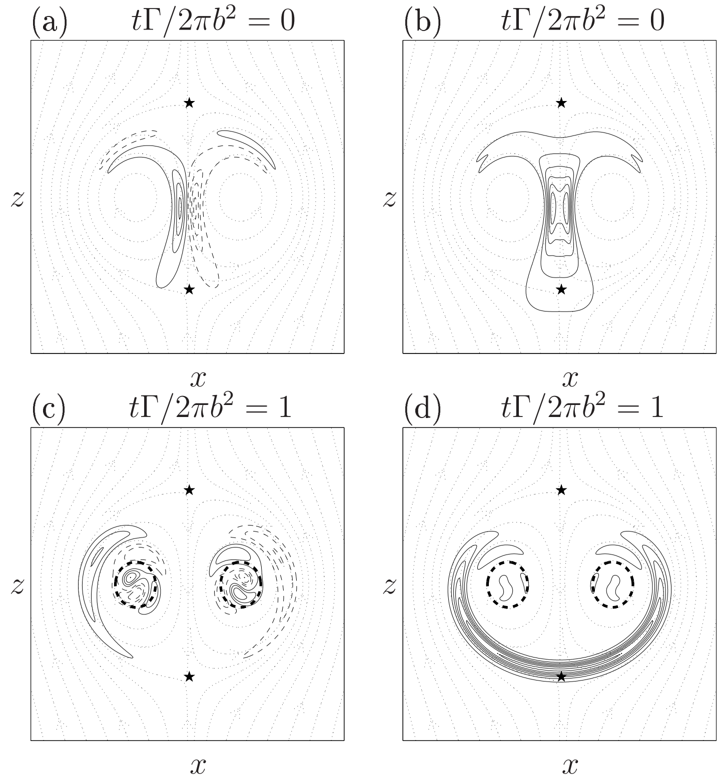

FIG. 2.9 – **Optimal initial perturbation and optimal response at $t\Gamma/2\pi b^2 = 1$ for the symmetric case.** *Same legend as Figure 2.8 but for the symmetric case. The contour levels shown are* $\tilde{\omega}_y/||\tilde{\mathbf{u}}(t=0)|| = \pm 0.01$, ± 0.05, ± 0.09 *and* ± 0.13 *on Figure (a),* $\tilde{\omega}_y/||\tilde{\mathbf{u}}(t=0)|| = \pm 0.015$, ± 0.03, ± 0.045 *and* ± 0.06 *on Figure (c),* $|\tilde{\omega}|/||\tilde{\mathbf{u}}(t=0)|| = 0.02$, 0.06, 0.1, 0.14, 0.18, 0.22 *and* 0.26 *on Figure (b) and* $|\tilde{\omega}|/||\tilde{\mathbf{u}}(t=0)|| = 0.1$, 0.25, 0.4, 0.55, 0.7, 0.85 *and* 1 *on Figure (d).*

axial vorticity of the optimal perturbation is concentrated very close and slightly upstream from the points of maximal strain, whereas the optimal response is localized slightly downstream from that points, indicated by the black dots on Figures 2.10 and 2.11. This localization of the optimal short time perturbation can be understood by extending the work of Caulfield & Kerswell [6] who have shown, on an inviscid infinite flow model with hyperbolic streamlines and uniform strain, that the maximal energy gain at short times depends only on the strain rate ϵ of the flow. If we neglect the pressure as in Caulfield & Kerswell [6], the direct Equation (2.4) and adjoint Equation

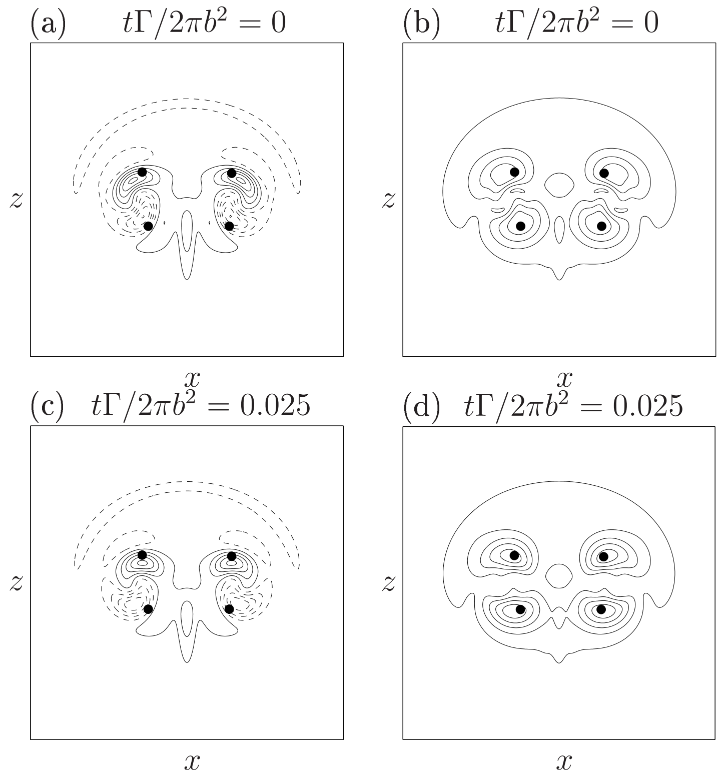

FIG. 2.10 – **Optimal initial perturbation (a)-(b) and optimal response (c)-(d) at $t\Gamma/2\pi b^2 = 0.025$ for the antisymmetric case.** *Same as Figure 2.8. The contour levels shown on Figures (a) and (c) are* $\tilde{\omega}_y/||\tilde{\mathbf{u}}(t=0)|| = \pm 0.01$, ± 0.03, ± 0.05, ± 0.07 *and 0.09. The contour levels shown on Figures (b) and (d) are* $|\tilde{\omega}|/||\tilde{\mathbf{u}}(t=0)|| = 0.01$, 0.04, 0.07, 0.09 *and* 0.12. *The black dots correspond to the points of maximum strain of the base state.*

(2.12) reads :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -L_B(\mathbf{u}), \qquad \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t} = -L_B^+(\mathbf{u}^+) \tag{2.16}$$

with $L_B(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_B \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_B$ and $L_B^+(\mathbf{u}^+) = \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{u}^+ - \nabla \times (\mathbf{u}_B \times \boldsymbol{u}^+)$. At short times,

$$\mathbf{u}(t) = (1 - tL_B)\mathbf{u}(0) + O(t^2), \qquad \mathbf{u}^+(t) = (1 - tL_B^+)\mathbf{u}^+(0) + O(t^2) \tag{2.17}$$

and the energy gain may be written as :

$$G(t) = 1 - \frac{t((L_B + L_B^+)\mathbf{u}(0)|\mathbf{u}(0))}{(\mathbf{u}(0)|\mathbf{u}(0))} + O(t^2) = 1 - 2t\frac{(S_B\mathbf{u}(0)|\mathbf{u}(0))}{(\mathbf{u}(0)|\mathbf{u}(0))} + O(t^2) \tag{2.18}$$

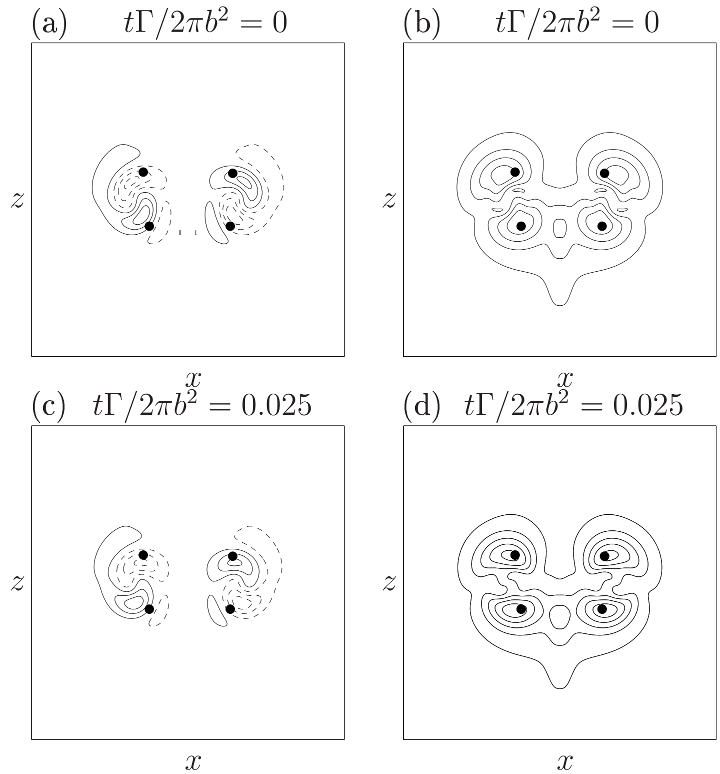

FIG. 2.11 – **Optimal initial perturbation (a)-(b) and optimal response (c)-(d) at $t\Gamma/2\pi b^2 = 0.025$ for the symmetric case.** *Same as Figure 2.10 but for the symmetric case. The contour levels shown on Figures (a) and (c) are* $\tilde{\omega}_y/||\tilde{\mathbf{u}}(t=0)|| = \pm 0.01$, ± 0.03 *and* ± 0.05. *The contour levels shown on Figures (b) and (d) are* $|\tilde{\omega}|/||\tilde{\mathbf{u}}(t=0)|| = 0.01$, 0.04, 0.07, 0.09, 0.12 *and* 0.15.

since $(L_B + L_B^+)\mathbf{u}(t) = 2S_B\mathbf{u}(t)$, with S_B the symmetric part of the base flow velocity gradient tensor. At each location (x, z), S_B admits two eigenvalues $\pm\epsilon(x, z)$ which correspond to the local strain rate of the base flow represented on Figure 2.1(b). The initial condition which maximises the energy gain at short times is given by $\mathbf{u}(0)$ localized at the point where $\epsilon(x, z)$ is maximum and the gain is then :

$$ln(G(t)) = -2max(\epsilon)t + O(t^2). \tag{2.19}$$

This theoretical prediction of the energy gain at short times is reported on Figure 2.7 by a dash-dotted line. At $t\Gamma/2\pi b^2 = 0.025$, the theory predicts $ln(G) = 0.43$ whereas the numerical calculations, for $Re_\Gamma = 2000$, give $ln(G) = 0.23$ for the antisymmetric mode and $ln(G) = 0.26$ for the symmetric mode and, for $Re_\Gamma = 5000$, $ln(G) = 0.27$ for the antisymmetric mode and $ln(G) = 0.29$ for the symmetric mode. At $t\Gamma/2\pi b^2 = 2.5 \times 10^{-3}$, the same factor exists between the theoretical estimate and the computed optimal growth. Moreover, the optimal perturbation and response (Figures 2.10 and 2.11) are not totally concentrated on the points of maximal strain. The discrepancy certainly comes from the fact that the theory is asymptotically valid for large $k_y a$ since, to neglect pressure at leading order, the perturbation should varies more rapidly along the y direction than in the (x, z) plane (approximation of the so-called pressureless dynamics [28]). For finite k_y, the pressure term in the expression of L_B and L_B^+ cannot be neglected and it is already remarkable that the asymptotic theory gives a decent agreement both in the localization of the perturbation and on the gain. This conjecture is confirmed by the computation of the optimal perturbation for a larger wavenumber $k_y a = 6$ at time $t\Gamma/2\pi b^2 = 0.025$ for the antisymmetric case and a larger Reynolds number $Re_\Gamma = 5.10^4$ represented on Figure 2.12. Perturbations are in that case more localized around the maximum strain location and the value $ln(G) = 0.33$ is closer to the inviscid large k_y prediction $ln(G) = 0.43$.

Up to now, the optimal gain has been presented only for the most uns-

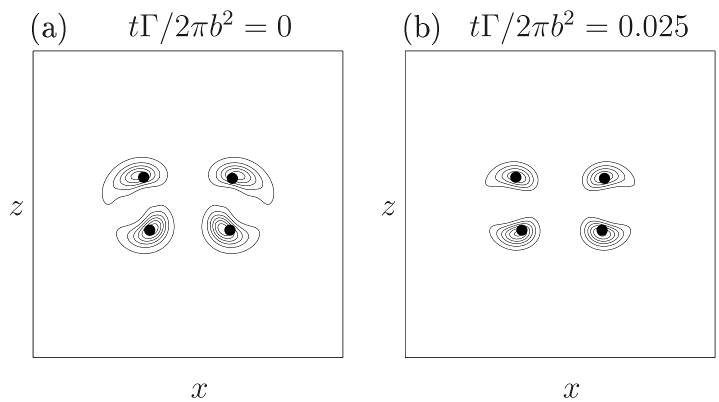

FIG. 2.12 – **Optimal perturbations at $t\Gamma/2\pi b^2 = 0.025$ for the antisymmetric case and $k_y a = 6$.** *Contours of the square root of enstrophy $|\tilde{\omega}|$ of (a) optimal initial perturbation and (b) optimal response in the (x,z) plane for $Re_\Gamma = 5.10^4$ at $k_y a = 6$ for the antisymmetric case at $t\Gamma/2\pi b^2 = 0.025$. The contour levels shown are $|\tilde{\omega}|/||\tilde{\mathbf{u}}(t = 0)|| = 0.2 \times 10^{-5}$, 0.6×10^{-5}, 1×10^{-5}, 1.4×10^{-5}, 1.8×10^{-5}, 2.2×10^{-5} on Figures (a) and $|\tilde{\omega}|/||\tilde{\mathbf{u}}(t = 0)|| = 0.5 \times 10^{-5}$, 1×10^{-5}, 1.5×10^{-5}, 2×10^{-5}, 2.5×10^{-5}, 3×10^{-5} on Figures (b). The black dots correspond to the points of maximum strain of the base state.*

table wavenumber $k_y a = 2.26$, but the procedure may be repeated for each k_y. The pieces of information are then very abundant since the optimal gain should be computed for each $k_y a$ at each time for both symmetries of the perturbation. We restrict ourself to the values $k_y a = 0.2$ close to the maximum of the Crow instability, $k_y a = 1.09$ and $k_y a = 2.6$ on both sides of the first elliptic instability peak where the flow is stable for $Re_\Gamma = 2000$ and Figure 2.13 presents the same graph as Figure 2.7 but for these three new values of $k_y a$, the fourth graph presenting the optimal gain as a function of time for the four wavenumbers studied. For all wavenumbers, the transient lasts until $t\Gamma/2\pi b^2 \simeq 2.5$. For the Crow instability, at $k_y a = 0.2$, the energy at large time is about 50 times larger when initialized by the adjoint mode than by the direct mode. Remarkably, up to $t\Gamma/2\pi b^2 = 2.5$, the transient growth of antisymmetric perturbations, marked by an open circle on Figure 2.13(a), is nearly as large as the one of symmetric perturbation, even though they are stable at large time and decays, whereas the symmetric mode keeps increasing at large time when the Crow instability develops. For all the stable wavenumbers, the maximum gain is reached around $t\Gamma/2\pi b^2 = 2$ with an energy increase by a factor close to 50. At very short time, Figure 2.13(d) shows that all the wavenumbers computed experience a similar transient growth, no matter if they are stable or unstable at large time. This demonstrates that the sharp selection of unstable wavenumber based on the modal analysis should be reconsidered when finite time growth is concerned. In particular, instabilities in experiments are observed at relatively short times. They may be still affected by transient effect and therefore may not yet reflect the modal frequency selection valid at large time.

2.4 Conclusion

The unstable modes of a Lamb-Oseen vortex pair have been determined with a linear three-dimensional stability analysis based on a Krylov technique. The long-wavelength Crow instability has been retrieved. This instability is symmetric with respect to the plane separating the two vortices and the most unstable wavelength is $6.8b$, which is in good agreement with Crow's theory. Both symmetric and antisymmetric modes of the elliptic instability with nearly identical growth rates have been found. These instability modes are non oscillatory and very selective with thin unstable band well predicted by Tsai & Widnall [52] theory refined by Le Dizès & Laporte [29]. The present results for $Re_\Gamma = 10^5$ are comparable with the inviscid linear stability analysis of Sipp & Jacquin [47] for the non oscillatory elliptic instability branches but, we have also found an oscillatory instability similar to the one

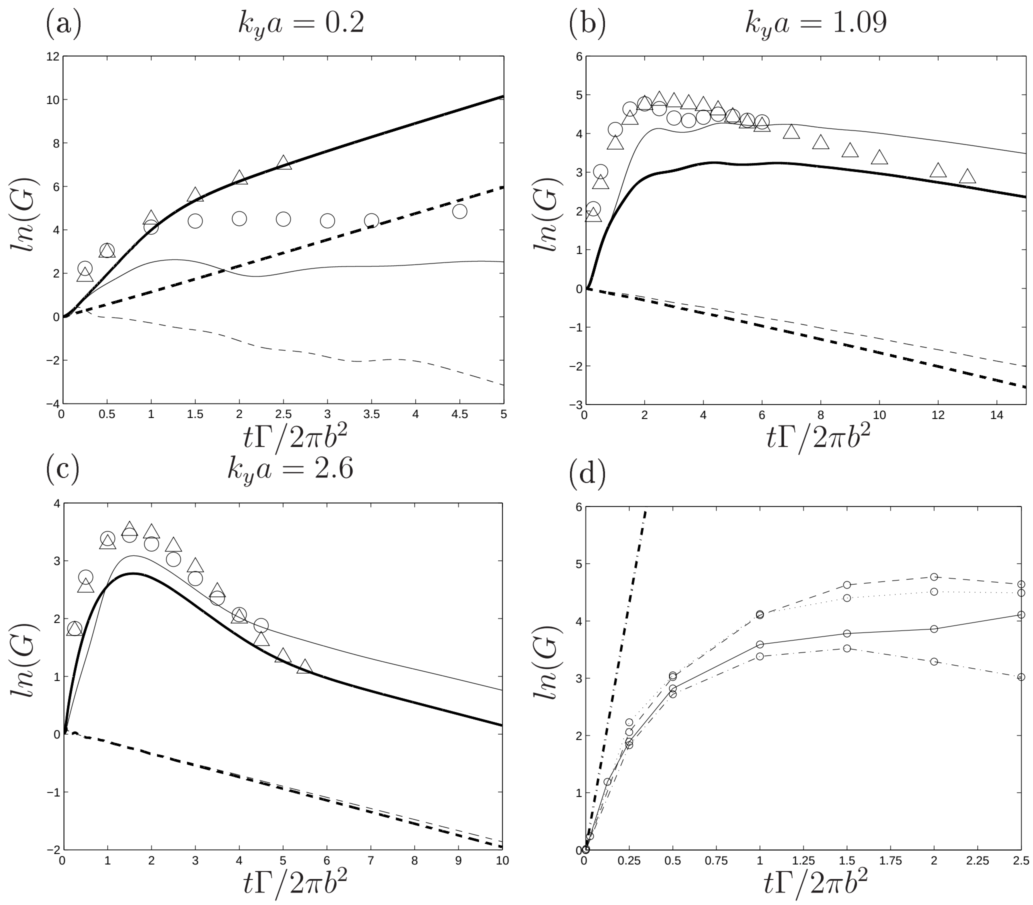

FIG. 2.13 – **Transient growth for different wavenumbers** - *Amplification factor of the symmetric (bold lines and △) and antisymmetric (thin lines and ◯) modes as function of the time* t *nondimensionnalized by* $2\pi b^2/\Gamma$ *for different initial conditions. (a)* $k_y a = 0.2$*, (b)* $k_y a = 1.09$ *and (c)* $k_y a = 2.6$*. Dashed lines : initial condition is the direct eigenmode. Continuous lines : initial condition is the adjoint eigenmode for the energy norm, which is the initial condition that maximizes the energy at large times. Dots : optimal perturbation at each time as initial condition. (d) Close-up view of the optimal energy gain for the antisymmetric case (◯) at short times for* $k_y a = 0.2$ *(····),* $k_y a = 1.09$ *(– – –),* $k_y a = 2.26$ *(——) and* $k_y a = 2.6$ *(–·–). The bold dashed dotted line corresponds to the theoretical prediction.*

obtained by Billant *et al.* [4] for the Lamb-Chaplygin dipole. This instability seems to result from the resonance between the strain and Kelvin waves of azimuthal wavenumbers $m = 0$ and $|m| = 2$ even though the latter is, in the absence of strain, strongly damped due to the presence of critical layers

(Fabre *et al.* [15]). For finite strain, the critical layer might be modified and not regularized by the viscosity but by the strain.

Leweke & Williamson [31], in their experiments on trailing vortices, have observed only the antisymmetric mode of the elliptic instability. As already observed by Billant *et al.* [4] and Sipp & Jacquin [47], this strong selection cannot be understood considering the classical stability theory since the growth rate of the leading unstable mode of both symmetries are very close. Sipp & Jacquin [47] have proposed an interpretation of this result by taking into account the unsteadiness due to the diffusion of the base flow. The effect of this instationnarity favors the antisymmetric elliptic mode but the resulting selection is moderate and one may explore other mechanism to explain the strong preference for the antisymmetric elliptic instability observed in experiment. The idea pursued in the present work is a difference in sensitivity to initial condition and, indeed, antisymmetric mode presents a factor 2 in energy when long time optimal initial perturbations are considered. This larger sensitivity of the antisymmetric mode would explain a more frequent occurrence of this mode but the difference seems not large enough to explain the strong selection observed experimentally. This enhanced sensitivity to initial perturbation associated with the unsteadiness effect described by Sipp & Jacquin [47] might unite to explain the experiments results.

Investigations on transient growths of the perturbations on the vortex pair have been performed for differents instants and several axial wavenumbers. Each wavenumber computed experience a transient growth even if they are stable at large times and the transient growth typically lasts 2.5 advection time of the dipole. Leweke & Williamson [31] did their observations at a times which correspond to 4.9 to 7.5 advection time of the dipole, which means that the experimental observations have not been carried out in the transient phase.

At a short time corresponding to 0.025 advection time of the dipole, the dynamics is led by the points where the strain of the base flow is maximum and the optimal perturbations and responses are localized around that point for both symmetries. At an intermediate time corresponding to one advection time of the dipole, the optimal perturbations are controled by the hyperbolic points of the base state : by the trailing (i.e. upper) stagnation point for the antisymmetric case and by the front (i.e. lower) stagnation point for the symmetric case. The optimal response then takes the shape of vortex ribs aligned along the stretching manifold of the active hyperbolic points.

In summary, for a vortex dipole with relatively concentrated vorticity ($a/b = 0.2$), it is noticeable that, depending upon the time at which the gain is computed, different regions of the base flow are active. For very short time compared to the advection time of the dipole, the points of maximum strain, which are located inside the cores in non trivial locations off the center, are where perturbations will grow the most, suffering the fastest stretching ; for time about the advection time, the hyperbolic points define the optimal growth of the perturbation, leading to a transient hyperbolic instability : the perturbations are intensified by a stretching when trajectories pass close to one of the hyperbolic points ; for long time, the vortex core dominates the dynamics and the growth of the perturbations are due to the elliptic instability. Since it is associated to the resonance between waves, a selection on the axial wavenumber is then imposed.

A. Numerical method for computing the 2D base state and domain reduction for the stability problem

The evolution of the velocity, the vorticity and the pressure of the base state $[\mathbf{u_B}, \boldsymbol{\omega_B}, p_B](x,z,t)$ is governed by the 2D Navier-Stokes equations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathbf{u_B}}{\partial t} = \mathbf{u_B} \times \boldsymbol{\omega_B} - \nabla (p_B + \dfrac{\mathbf{u_B^2}}{2}) + \nu \Delta \mathbf{u_B} \\ \nabla . \mathbf{u_B} = 0 \end{array} \right. \tag{2.20}$$

These equations are solved with a pseudo-spectral method in Cartesian coordinates with periodic boundary conditions. The velocity, the vorticity and the pressure are expressed in Fourier space by application of the two-dimensional Fourier transform :

$$[\mathbf{u_B}, \boldsymbol{\omega_B}, p_B](x,z,t) = \int [\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{B}, \hat{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{B}}, \hat{p}_B](k_x, k_z, t) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x dk_z. \tag{2.21}$$

where k_x and k_z are the components of the wavevector $\mathbf{k}_{2D}$. In spectral space, the Navier-Stokes Equations (2.20) become :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{P}(\mathbf{k}_{2D})[\widehat{\mathbf{u_B} \times \boldsymbol{\omega_B}}] - \nu \mathbf{k}_{2D}^2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{B}, \tag{2.22}$$

where $\mathbf{P}(\mathbf{k}_{2D})$ is the projection operator on the space of divergence-free fields which, in Fourier space, may be expressed as a tensor with components $P_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / \mathbf{k}_{2D}^2$. The term $\mathbf{u_B} \times \boldsymbol{\omega_B}$ is evaluated in the physical space. Time integration is carried out with a second-order Adams-Bashforth scheme whereas the dissipative term $\nu \Delta \mathbf{u_B}$ is integrated exactly.

The size of the periodic box $L_x = L_z = 12$ is large enough to minimize the effects of periodic boundary conditions ($L_x = L_z = 60a_0$) and to adapt to the downward descent of the dipole. The mesh is Cartesian with 512×512 (and 1024×1024 in some cases) collocation points equally spaced in the x and z directions with $\delta x = \delta z = 0.023$. This number allows approximately 16 points in each vortex core. The time step is set to $\delta t = 10^{-3}$, which is small enough to fulfill the Courant-Friedrich-Levy condition : $\delta x / \delta t = 23 > U_{max}$, with the maximum velocity here equal to $U_{max} \simeq \Gamma_0 / 2\pi a_0 = 5$. For the linear stability analysis performed in Section 2.2, the eigenmodes have been computed in a smaller box by cropping the velocity and vorticity of the base state $[\mathbf{u_B}, \boldsymbol{\omega_B}](x, z)$. There is no periodicity problem since the perturbation alone is periodic in the small box.

B. Computational accuracy

The accuracy and the convergence of the results have been tested in a larger box size : $L_x = L_z = 6b$ with 512×512 grid points and with a finner resolution : $L_x = L_z = 3b$ with 512×512 for three typical axial wavenumbers : the first maximum of the elliptic instability $k_y a = 2.26$, the first maximum of the oscillatory instability $k_y a = 1.09$ and the maximum of the Crow instability $k_y a = 0.2$ for $Re_\Gamma = 10^5$. The results of the tests are displayed in Table 2.1.

We observe that doubling the size of the computational domain without changing the resolution doesn't change the growth rate and doubling the resolution changes the value of the growth rate by less than 1% for the wavenumbers $k_y a = 2.26$ and $k_y a = 1.09$. For the smaller wavenumber $k_y a = 0.2$, widening the periodic box to $L = 6b$ and keeping the same resolution changes the value of the growth rate by 12%.

2.5 Comparaison avec l'expérience

Comme mentionné dans la Section de l'article, dans les expériences en laboratoire, les instabilités sont généralement observées à des instants relativement courts. Il est donc possible que les observations soient affectées par les effets transitoires et ainsi ne pas refléter le comportement modal assuré à une croissance exponentielle valide aux temps longs. Leweke & Williamson [31] ont réalisé leurs expériences à des instants entre 4.9 et 7.5 temps d'advection du dipôle, hors de la phase transitoire.

Une autre spécificité des expériences en laboratoire est qu'elles reposent sur des visualisations, le plus souvent par du colorant. D'une part, le nombre

	$k_y a = 2.26$			$k_y a = 1.09$		
L	**3b**	$6b$	$3b$	**3b**	$6b$	$3b$
N	**256**	512	512	**256**	512	512
δ	**0.0234**	0.0234	0.0117	**0.0234**	0.0234	0.0117
σ^*	**1.3189**	1.3189	1.3196	**0.2429**	0.2427	0.2430

	$k_y a = 0.2$		
L	$3b$	**6b**	$12b$
N	256	**512**	1024
δ	0.0234	**0.0234**	0.0234
σ^*	0.6223	**0.7470**	0.7447

TAB. 2.1 – *Computationnal accuracy of the growth rate $\sigma^* = \sigma_r 2\pi b^2/\Gamma$ with respect to the size of the box $L = L_x = L_z$ and the resolution $\delta = L/N$, with $N = N_x = N_z$ for three axial wavenumbers : $k_y a = 2.26$ (antisymmetric mode), $k_y a = 1.09$ (antisymmetric mode) and $k_y a = 0.2$ (symmetric mode). The Reynolds number is $Re_\Gamma = 10^5$. The bold values correspond to the reference values, which have been chosen for the computation of the modes in Section 2.2.4.*

de caractéristiques accessibles de l'écoulement est relativement faible et, d'autre part, les techniques de visualisation peuvent induire des biais comparé à une mesure instantanée des vitesses. En effet, l'importance dynamique aux temps courts des point d'arrêt, situés en dehors du coeur des tourbillons, a été démontrée dans la Section de l'article. Cependant, dans les expériences de Leweke & Williamson [31], seuls les coeurs des tourbillons ont été visualisé et la dynamique autour des points d'arrêt n'était donc pas visible. Afin de quantifier l'effet induit par la visualisation en colorant, nous avons calculé les perturbations en colorant d'un colorant initialement non perturbé avec une distribution de colorant de base identique à la vorticité de l'écoulement de base, et ce pour différentes conditions initiales.
La concentration en colorant c' est gouvernée par l'équation d'advection-diffusion :

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla c' = \kappa c' \tag{2.23}$$

où κ est la diffusivité du colorant. Dans les expériences, le colorant est entraîné par le fluide le long des flaps, la distribution initiale en colorant est donc corrélée à la distribution initiale de vorticité créée par les flaps qui elle-même peut être représentée par une diffusion de vorticité à partir de la condition d'adhérence sur les parois. La valeur absolue de la vorticité de l'état de base est prise comme concentration du colorant de base : $c_B(x, z) = |\omega_{By}|$. L'équation 2.23 est linéarisé autour de l'état de base et la perturbation tridimensionnelle en colorant c est solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u}_B.\nabla c + \mathbf{u}.\nabla c_B = \kappa c \tag{2.24}$$

La perturbation en colorant c est décomposée en ondes le long de la direction homogène y :

$$c(x, y, z, t) = \tilde{c}(x, z, t)e^{ik_y y} + c.c. \tag{2.25}$$

où c.c. dénote le complexe conjugué. Nous avons déterminé la perturbation en colorant associée aux perturbations optimales des modes symétriques et antisymétriques aux temps courts, l'énergie de la perturbation initiale étant normalisée à 1 afin de comparer l'intensité de la perturbation en colorant pour différentes conditions initiales. La Figure (2.15) représente la perturbation en colorant associée aux perturbations optimales à $t\Gamma/2\pi b^2 = 1$ pour les deux symétries.

On observe que la distribution de la perturbation en colorant dans chaque tourbillon est très similaire pour les deux symétries. Cependant, l'amplitude de la perturbation en colorant correspondant au mode antisymétrique est plus grande d'un facteur 3.5 que le symétrique alors que l'énergie de la perturbation initiale est la même. En effet, l'amplitude pic à pic de la perturbation en colorant antisymétrique est 0.26 alors qu'elle est de 0.075 pour le symétrique. A $t\Gamma/2\pi b^2 = 1$, la perturbation en colorant, sensible seulement à la déformation du coeur où le colorant est initialement localisé, est plus de trois fois plus grande pour le mode antisymétrique que pour le symétrique tandis que le rapport entre l'énergie des perturbations des deux symétries est proche de 1. C'est pourquoi nous proposons que les observations expérimentales sur la domination du mode antisymétrique pourrait être associée au fait que, à la fois les visualisations en colorant et les mesures de la vorticité axiale, comme l'on fait Leweke & Williamson [31], sont sensibles à la perturbation dans le coeur des tourbillons mais pas à l'extérieur du coeur. Cette idée est illustrée par la Figure 2.16 où (a) et (b) sont identiques à la Figure 2.7(a) sauf que dans (a) l'énergie de la perturbation en colorant est définie comme :

$$\mathcal{D} = \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} |c|^2 dxdz \tag{2.26}$$

et dans (b) l'enstrophie axiale ξ_y est tracée avec :

$$\xi_y = \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} |\omega_y|^2 dxdz. \tag{2.27}$$

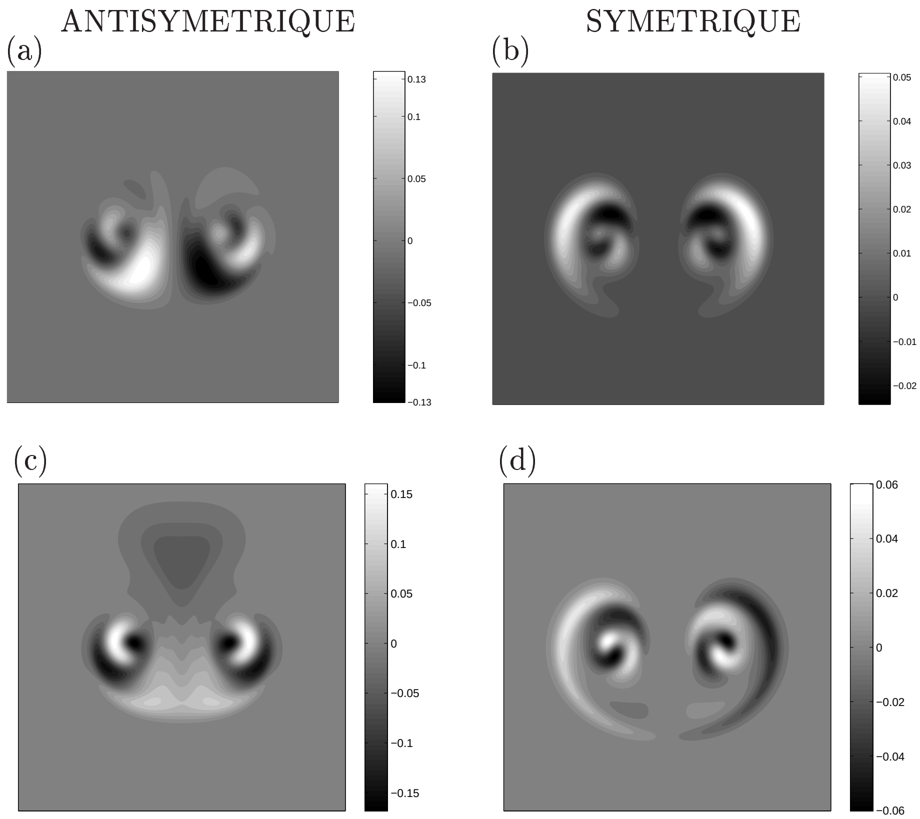

FIG. 2.14 – *Isovaleurs de la perturbation (a)-(b) en colorant et (c)-(d) en vorticité axiale ω_y dans le plan (x, z) associée à la réponse optimale des modes (a)-(c) antisymétrique and (b)-(d) symétrique à $t\Gamma/2\pi b^2 = 1$ pour $Re_\Gamma = 2000$ à $k_y a = 2.26$. La perturbation en colorant était initialement nulle et l'énergie de la perturbation est dans les deux cas normalisée à 1 afin de comparer leur effet sur la visualisation de l'écoulement.*

Si on compare les Figures 2.16(a) et 2.16(b) avec la Figure 2.7(a) de la Section 2.3, pour laquelle les gains en énergie optimaux sont très proches pour les deux symétries, on observe qu'au contraire il existe un facteur 2 en faveur du mode antisymétrique pour une énergie de perturbation identique si les perturbations sont mesurées avec la perturbation de colorant ou avec l'enstrophie axiale.

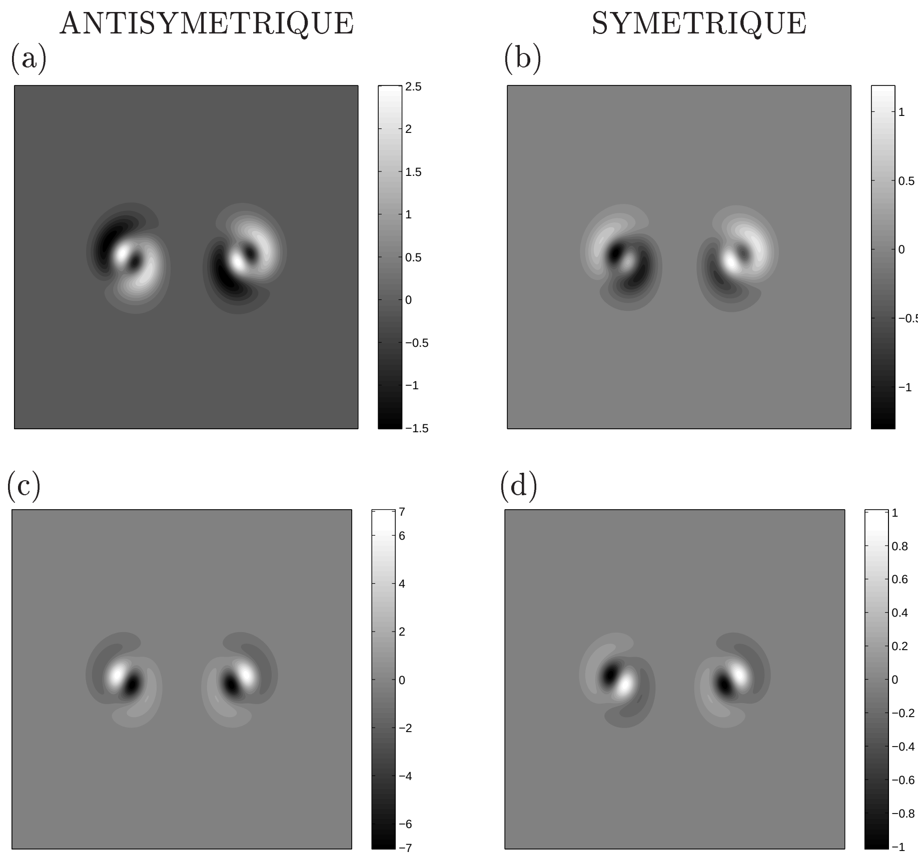

FIG. 2.15 – *Isovaleurs de la perturbation (a)-(b) en colorant et (c)-(d) en vorticité axiale ω_y dans le plan (x, z) associée à la réponse optimale des modes (a)-(c) antisymétrique and (b)-(d) symétrique à $t\Gamma/2\pi b^2 = 5$ pour $Re_\Gamma = 2000$ à $k_y a = 2.26$. La perturbation en colorant était initialement nulle et l'énergie de la perturbation est dans les deux cas normalisée à 1 afin de comparer leur effet sur la visualisation de l'écoulement.*

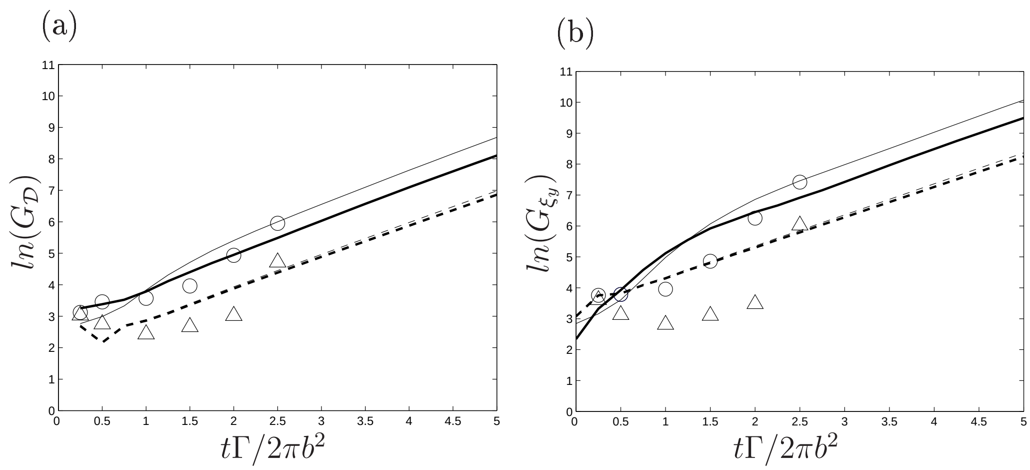

FIG. 2.16 – *Logarithme (a) de l'amplitude de la perturbation associée aux perturbations optimales à différents instants, la perturbation initiale en énergie étant normalisée à 1, et (b) du gain en enstrophie des modes symétriques (deep lines and △) et antisymétriques (thin lines and ◯) en fonction du temps pour différentes conditions initiales. Tiretés : la condition initiale est le mode propre direct. Lignes continues : la condition initiale est le mode propre adjoint. Points : Perturbation optimale à chaque instant comme condition initiale.*

Chapitre 3

Instabilités 3D et perturbations optimales des tourbillons de sillage en milieu stratifié

Ce chapitre, qui reprend une publication en préparation pour la revue *Physics of Fluids* sous le titre "Three-dimensional instabilities and optimal perturbations of trailing vortices in stratified fluid", a pour objet l'étude de la dynamique tridimensionnelle d'une paire de tourbillons de Lamb-Oseen horizontaux dans un fluide stratifié verticalement en densité, gravitationnellement stable. Après l'étude de l'évolution bidimensionnelle de cette paire de tourbillons en milieu stratifié, une analyse de stabilité linéaire temporelle tridimensionnelle à différents instants pour des stratifications faibles et modérées, d'une part, et le calcul des perturbations optimales pour des stratifications intenses, d'autre part, sont réalisés.

L'évolution bidimensionnelle d'un paire de tourbillons de Lamb-Oseen de rapport d'aspect initial $a_0/b_0 = 0.2$ a été déterminée par des simulations numériques directes pour différentes intensités de stratification. On observe que cette évolution est affectée par la présence de la stratification. En effet, au fur et à mesure de la descente du dipôle, il apparaît des gradients de densité horizontaux autour et dans le sillage de la paire de tourbillons, à l'origine de la création de vorticité barocline, comme l'ont observé Garten *et al* [16]. L'échelle de variation temporelle du rayon du dipôle a, de la distance de séparation entre les deux tourbillons b et de la circulation du dipôle Γ est l'inverse de la fréquence de Brunt-Väisälä, caractéristique de la stratification. La distance de séparation entre les tourbillons b décroît en fonction du temps puisque les deux tourbillons sont déplacés l'un vers l'autre par la présence de la vorticité barocline. Finalement, les tourbillons entrent en contact et diffusent l'un dans l'autre, entraînant une diminution de la circulation de chacun des tourbillons, accentuée par le detrainment des tourbillons primaires. Le rayon du dipôle a croît par diffusion visqueuse puis commence à décroître lorsque les tourbillons sont proches. Cette évolution des paramètres du dipôle est à l'origine de l'évolution du rapport d'aspect a/b, de l'étirement $\Gamma/2\pi b^2$ et du nombre de Reynolds basé sur la circulation Re_Γ en fonction du temps, et diffère du cas homogène. Pour les faibles stratifications, l'étirement est peu affecté par la stratification alors qu'il croît fortement pour les stratifications modérées et intenses.

L'étude de l'évolution bidimensionnelle de la paire de tourbillons en milieu stratifié a montré que la stratification agit sur une échelle de temps grande devant le temps d'advection du dipôle $\Gamma/2\pi b^2$ pour de faibles stratifications. L'état de base bidimensionnel peut donc être considéré comme quasi-stationnaire et l'ordre dominant de l'évolution de la perturbation peut être déterminé par un analyse de stabilité linéaire. Les modes instables de la paire de tourbillons de rapport d'aspect initial a_0/b_0 sont ainsi déterminés à deux instants $Nt = 1$ et $Nt = 2$ pour différents nombres de Froude, l'état de base étant figé dans le repère se déplaçant avec le dipôle. Nous avons retrouvé les instabilités classiques de Crow (instabilité à grande longueur d'onde) et elliptique (instabilité à petite longueur d'onde) existant dans les fluides homogènes. Pour des longueurs d'onde de l'ordre de la distance de séparation instantanée des tourbillons, l'instabilité correspond au déplacement symétrique (par rapport au plan situé au milieu des deux tourbillons) des tourbillons dans la direction d'étirement maximal caractéristique de l'instabilité de Crow. La longueur d'onde de cette instabilité symétrique est proportionnelle à la distance de séparation instantanée entre les deux tourbillons et le taux de croissance à l'étirement instantané, ce qui est en accord avec les prévisions pour l'instabilité de Crow. Pour des longueurs d'onde de l'ordre de la taille du coeur des tourbillons, le mécanisme de l'instabilité est l'instabilité elliptique comme l'ont observé Nomura *et al.* [35] pour des stratifications faibles et modérées. Les taux de croissance sont proportionnels à la valeur instantanée de l'étirement $\Gamma/2\pi b^2$ et la longueur d'onde à la valeur instantanée du rayon des tourbillons a, comme le prévoit la théorie de l'instabilité elliptique. L'effet principal de la stratification est donc d'intensifier l'étirement en provoquant le rapprochement des tourbillons l'état de base. En plus des instabilités de Crow et elliptique, une instabilité oscillante similaire à celle existant dans les fluides homogènes (Chapitre 2) est observée. La partie réelle des taux de croissance est proportionnelle à la valeur instantanée de l'étirement et la longueur d'onde à la valeur instantanée du rayon des tourbillons. Elle correspond à une instabilité elliptique mettant en jeu les ondes de Kelvin de nombre d'onde azimuthal $m = 0$ et $|m| = 2$.

Pour des niveaux de stratification modérés à intenses, la stratification agit sur une échelle de temps du même ordre que le temps d'advection du dipôle et l'état de base ne peut donc plus être considéré comme quasi-stationnaire, invalidant l'approximation de l'analyse de stabilité linéaire (approximation WKBJ). Afin d'étudier la dynamique de cet écoulement instationnaire, les perturbations optimales à deux instants $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ et $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ sont déterminées par une technique direct-adjoint qui prend en compte l'évolution de l'état de base, les opérateurs d'évolution direct et adjoint étant obtenus par linéarisation autour de la trajectoire représentant l'évolution 2D de l'écoulement de base.

Dans un premier temps, les perturbations optimales sont déterminées pour les fluides homogènes, l'instationnarité de l'écoulement de base est donc uniquement dûe à la diffusion visqueuse qui induit une augmentation du rayon du tourbillon. Pour les grandes longueurs d'onde, contrairement aux résultats de l'analyse de stabilité asymptotique où seul le mode symétrique est instable, les taux de croissance optimaux moyens sont grands pour les deux symétries. Dans le cas symétrique, la réponse optimale est similaire au mode propre de l'instabilité de Crow et les taux de croissance moyens optimaux sont en bon accord avec la théorie de Crow. Pour les petites longueurs d'onde, on retrouve l'instabilité elliptique. La part du gain dûe à l'instationnarité de l'écoulement semble favoriser le mode antisymétrique, confirmant ainsi l'analyse de Sipp & Jacquin [47] qui repose sur l'hypothèse que la perturbation s'ajuste à tous les instants au mode propre dominant instantané.

Dans un second temps, les perturbations optimales sont déterminées pour les fluides stratifiés, l'instationnarité de l'écoulement de base étant ainsi dûe, en plus de la diffusion visqueuse, à la présence de la stratification. Comme dans le cas homogène, on observe des pics d'instabilité aux faibles nombres d'onde et aux nombres d'onde de l'ordre de la taille du coeur du tourbillon. A $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ pour $Fr > 2$ et à $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ pour $Fr > 5$, on retrouve les instabilités de Crow et elliptique. La présence de la stratification affecte peu la dynamique, l'énergie potentielle étant négligeable devant l'énergie cinétique : les taux de croissance moyens ne varient pas avec la stratification et les perturbations optimales sont similaires au cas non stratifié. Par contre, à $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ pour $Fr < 2$ et à $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ pour $Fr < 5$, les énergies potentielle et cinétique sont comparables. Cependant, la dynamique reste principalement inertielle sauf pour $Fr = 2$ à $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$. En effet, la perturbation de vorticité longitudinale de la réponse optimale est proche de celle liée aux modes propres des instabilités de Crow et elliptique. D'autre part, les taux de croissance moyens sont égaux à ceux du cas homogène pour les grandes longueurs d'onde et augmentent avec le nombre de Froude pour les petites longueurs d'onde, ce qui est cohérent avec les résultats de l'analyse de stabilité linéaire ainsi qu'avec les prédictions de l'instabilité elliptique, puisque l'étirement augmente avec le nombre de Froude dû au rapprochement des tourbillons. Pour $Fr = 2$ à $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$, la réponse optimale est concentrée dans le sillage du dipôle, ce qui pourrait expliquer les observations de Nomura *et al.* [35] de l'apparition de tourbillons verticaux pour $Fr = 2$.

Three-dimensional instabilities and optimal perturbations of trailing vortices in stratified fluid

Claire Donnadieu[1], Jean-Marc Chomaz[1], Sabine Ortiz[1,2] and Paul Billant[1]

[1] *LadHyX, CNRS–Ecole Polytechnique F-91128 Palaiseau Cedex, France*
[2] *UME/DFA, ENSTA, chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau Cedex, France*

Abstract

This paper investigates the three-dimensional instabilities and the optimal perturbations on a pair of horizontal counter-rotating Lamb-Oseen vortices in a stable vertically stratified flow. Two-dimensional simulations are first perfomed, showing that the two-dimensional temporal evolution of the vortex parameters : the radius a, the separation distance b and the circulation Γ, scales on the Brunt-Väisälä frequency, which is the characteristic timescale of the stratification. For weak and moderate stratifications, we show that the stratification acts on a long timescale compared to the advection time of the dipole implying that the base flow can be considered as quasi-stationary. A linear stability analysis is thus perfomed. We retrieve the instability peaks corresponding to the Crow instability for the long-wavelength and to the elliptic instability for the short wavelength showing that the dynamics is almost unaffected by the presence of the stratification. The oscillatory elliptic instability involving Kelvin waves of azimuthal wavenumber $m = 0$ and $|m| = 2$ existing in homogeneous fluids (Donnadieu *et al.* [11]) is also found. For strong stratifications, the base flow being unsteady, we compute the optimal perturbations at two time horizons $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ with a direct-adjoint technique which takes into account the evolution of the base flow. The unsteadiness of the flow due to viscous diffusion in homogeneous media which induces a growth of the vortex core radius a is first investigated : for the short-wavelength, the elliptic instability is retrieved. The part of the energy gain due to the unsteadiness of the flow seems to favor the antisymmetric mode, confirming the analysis of Sipp & Jacquin [47] who assumed that the perturbation adjusts immediately to the instantaneous leading eigenmode. This result demonstrates that the antisymmetric mode of the elliptic instability should dominate. Investigations on the dynamics of the vortex pair in stratified fluid are then performed : the unsteadiness of the flow is due to the presence of the stratification. As for homogeneous media, peaks at small wavenumbers and at wavenumbers of the order of the

vortex core size are found. The dynamics is mainly inertial with optimal responses strongly resembling to Crow and elliptic modes and growthrates close to the homogeneous case ones for the long wavelength and in good agreement with the linear stability analysis for the short wavelength. For $Fr = 2$ at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$, the potential energy is as important as the kinetic energy and the optimal response is concentrated in the wake of the dipole, which might explain the observation by Nomura *et al.* [35], in their direct numerical simulations, of the formation of vertical vortices structures when $Fr = 2$.

3.1 Introduction

The wake which forms behind an aircraft due to its lift is a pair of horizontal counter-rotating vortices propagating downwards. Depending on the atmospheric conditions, such dipole can persist over a long time or be rapidly destroyed. If it remains coherent, it can be hazardous to following aircraft, hence safety regulations impose a minimum separation distance between airplanes. With the saturation of airports and the projects of super jumbo jets, it is important to understand the dissipation mechanisms of such dipole in order to be able to accelerate their decay. The dynamics of such dipole has been widely studied in the past and in recent years and have shown that, in homogeneous fluids, this vortex pair is unstable with respect to three-dimensional perturbations. Crow [8] has discovered a long-wavelength instability, symmetric with respect to the plane separating the two vortices. The existence of a short-wavelength elliptic instability has been revealed by Moore & Saffman [34], Tsai & Widnall [52] and numerous articles ever since for both symmetric and antisymmetric modes. This instability, due to the elliptic deformation of the core of the vortices, is a resonant interaction between the strain and Kelvin waves of azimuthal wavenumbers $m = 1$ and $m = -1$ when both waves have the same frequency ω and are particularly intense for $\omega = 0$.
However, in many atmospheric situations, as such dipoles propagate downwards they evolve under the influence of the stable stratification of the atmosphere. Investigations on the two-dimensional evolution of a counter-rotating vortex pair in a stably stratified flow have shown that the dipole is affected by the presence of the stratification. In an homogeneous flow, a two-dimensional vortex pair propagates downwards at a constant speed with a constant separation distance between the vortices but, when density stratification is present, the buoyancy complicates the flow. Studies have disagreed : some predict a reduction of the separation distance between the vortices with acceleration of the dipole (Scorer & Davenport [45], Hill [19], Spalart [48], Garten *et al.* [16]) whereas Holzäpfel & Gertz [20] have observed a deceleration before

the acceleration of the descent of the dipole. The three-dimensional dynamics of this vortex pair in stratified flow has received much less attention. Laboratory observations (Sarpkaya [43], Delisi & Robins [10]) and three-dimensional numerical simulations of Robins & Delisi [40] and Garten *et al.* [17] show a reduction of separation distance and deceleration. Nomura *et al.* [35], in their recent three-dimensional direct numerical simulations, have observed a decrease in time of the separation distance with a nearly constant descent speed for the weakly stratified flows and a deceleration for the moderate and strong stratifications. The influence of the stable stratification on the three-dimensional instabilities which develop in unstratified flows, the long wavelength Crow instability and the short wavelength elliptic instability, has received much less attention. Robins & Delisi [40] have investigated the effect of stratification on the Crow instability and observed that for weak and moderate stratifications, the vortices eventually links and form rings, the rate of linking increasing with increasing stratification. For stronger stratification, they observed the formation of three-dimensional structures called *puffs*. Garten et al. [17] observe that for relatively strong stratification the Crow instability grows faster since the vortices are closer due to the reduction of separation distance. Direct numerical simulations of Nomura *et al.* [35] on the short-wavalength instability of a counter-rotating vortex pair in presence of stable stratification have suggested that, for weak and moderate stratifications, the instability mechanism corresponds, despite the stratification, to the elliptic instability as in homogeneous media. The instability appears earlier than in the unstratified case, owing to the decrease due to the stratification of the separation distance between the vortices as they propagate downwards, decrease that induces larger ellipticity of the vortices and then enhances the instability. For strongly stratified flows, the instability can not be considered as elliptic anymore since the shape of the primary vortices is strongly affected by the stratification.

In this paper, the two-dimensional evolution of a Lamb-Oseen vortex pair in stably stratified fluid is investigated in Section 3.2. In the case of weak stratification, the evolution of the two-dimensional flow due to stratification is slow and can be ignored in the leading order stability analysis and we perform a linear stability analysis of the frozen flow field at different instants in stratified fluid in Section 3.3. In the case of strong stratification, the two-dimensional flow is unsteady and the optimal perturbations are computed at several times, with a direct-adjoint technique similar to the one used in the steady case (Donnadieu *et al.* [11]) and which takes into account the evolution of the flow. The results of this study are presented in Section 3.4.

3.2 Two-dimensional simulations of counter-rotating vortices in stratified fluid

3.2.1 Equations and numerical method

We first investigate the two-dimensional evolution of a pair of counter-rotating vortices in a stable vertically stratified fluid. The spatial coordinates are Cartesian (x, z), corresponding respectively to transverse and vertical directions. The initial state is the superposition of two circular Lamb-Oseen vortices of initial circulation Γ_0, initial radius a_0 and initial separation distance b_0 with opposite signs vorticity and the initial vorticity distribution is :

$$\omega_y(x,z,t=0) = \frac{\Gamma_0}{\pi a_0^2} e^{-\frac{(x-x_1)^2+(z-z_1)^2}{a_0^2}} - \frac{\Gamma_0}{\pi a_0^2} e^{-\frac{(x-x_2)^2+(z-z_2)^2}{a_0^2}} \tag{3.1}$$

where ω_y is the axial vorticity and (x_1, z_1) and (x_2, z_2) are the initial coordinates of the two vortex centroids. The background density profile is linear and the total density field is :

$$\rho^*(x,z,t) = \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \rho(x,z,t) \tag{3.2}$$

where ρ_0 is a constant reference value, $\bar{\rho}(z)$ is the linear density profile and ρ is the density perturbation which is assumed to be zero at the initial instant. The evolution of the velocity, vorticity, pressure and density perturbation $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, p, \rho](x, z, t)$ is governed by the following two-dimensional Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla.(p + \frac{\mathbf{u^2}}{2}) + \nu \Delta \mathbf{u} - \rho N^2 \mathbf{e_z} \\ \nabla.\mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{u}.\nabla \rho' + u_z + \frac{\nu}{Sc} \Delta \rho. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

where ν is the kinematic viscosity of the flow, the Brunt-Väisälä frequency $N = \sqrt{-(g/\rho_0) d\bar{\rho}/dz}$, with g the acceleration due to gravity, is assumed to be constant and $Sc = \kappa/\nu$ is the Schmidt number with κ the diffusivity of the stratified agent. The characteristic length scale is the initial vortex separation distance between the two vortices b_0 and the velocity scale is the initial advection velocity of the dipole $W_0 = \Gamma_0/2\pi b_0$, hence the characteristic time scale is the dipole advection timescale $2\pi b_0^2/\Gamma_0$. The Reynolds number based on the initial circulation of the vortices is defined as follows :

$$Re_{\Gamma_0} = \frac{\Gamma_0}{\nu} = \frac{2\pi W_0 b_0}{\nu} \tag{3.4}$$

and the Froude number, which corresponds to the ratio of the characteristic timescale of the stratification $1/N$ to the characteristic timescale of the flow, is :

$$Fr = \frac{W_0}{Nb_0}. \tag{3.5}$$

The two-dimensional Navier-Stokes Equations (3.3) are integrated with the pseudo-spectral method in Cartesian coordinates with periodic boundary conditions described in Delbende *et al.* [9]. With the application of the two-dimensional Fourier transform on the velocity, vorticity, pressure and density perturbation fields

$$[\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, p, \rho](x, z, t) = \int\int [\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{p}, \hat{\rho}](k_x, k_z, t) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x dk_z \tag{3.6}$$

where k_x and k_z are the transverse and vertical components of the wavevector $\mathbf{k}_{2D}$, the Navier-Stokes Equations (3.3) become in the spectral space :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbf{P}(\mathbf{k_{2D}})[\widehat{\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}} - \hat{\rho} N^2 \mathbf{e_z}] - \nu |\mathbf{k}_{2D}|^2 \hat{\mathbf{u}} \\ \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -i\mathbf{k}.\widehat{\mathbf{u}\rho} + \hat{u}_z - \frac{\nu}{Sc} |\mathbf{k}_{2D}|^2 \hat{\rho}. \end{cases} \tag{3.7}$$

where $\mathbf{P}(\mathbf{k}_{2D})$ is the projection operator on the space of divergence-free fields which, in Fourier space, may be expressed as a tensor with components $P_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / \mathbf{k}_{2D}^2$. The advection term $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ is evaluated in the physical space. Time integration is being marched with a second-order Adams-Bashforth scheme whereas the dissipative terms $\nu \Delta \mathbf{u}$ and $\nu / Sc \Delta \rho'$ are integrated exactly.
The timestep is set to $\Delta t = 10^{-3}$. The size of the periodic box is $L_x = 12$ in the transverse direction and $L_z = 24$ in the vertical direction with 512×1024 collocation points equally spaced in the x and z direction. The transverse and vertical lengths are large enough to minimize the effects of periodic boundary conditions ($L_x = 60a_0$), to adapt to the downard descent of the dipole and to prevent the dipole from encoutering its wake. The number of collocation points allows approximately 8 points along a vortex core diameter.

3.2.2 The two-dimensional evolution of the flow

In this Section, the Schmidt number is set to $Sc = 1$, the Reynolds number is $Re_{\Gamma_0} = 2400$ and the Froude numbers considered are $Fr = 10, 5$ and 2. The initial aspect ratio of the dipole is $a_0/b_0 = 0.2$. As the counter-rotating vortices propagate downwards, they evolve under the influence of the stratification. Figures 3.1 and 3.2 represent the axial vorticity of the vortex pair and the density perturbation at two times rescaled by the Brunt-Väisälä frequency $Nt = 1$ and $Nt = 2$ for the three Froude numbers. As shown by

Garten *et al.* [16] for high Froude numbers, i.e. for flows dominated by advection, we observe on Figure 3.2 that, as the dipole propagates downwards, strong horizontal density gradients appear around and behind the vortex pair which induce the creation of vorticity through baroclinic production. The opposite-sign vorticity which appears around and behind the primary vortices on Figure 3.1 is this baroclinic vorticity which pushes the vortices towards one another, hence reducing the separation distance b between the vortices. This secondary vorticity is detrained during the descent of the dipole as observed on Figures 3.1(d)-(e)-(f). At later stages, the vortices are so close that they touch and diffuse into one another, resulting in the decrease of the circulation of the primary vortices. Therefore, due to the presence of the stratification, the circulation Γ, the separation distance between the vortices b and the radius a evolve as a function of time. The temporal evolution of the radius a and the external strain rate $\Gamma/2\pi b^2$ of the vortices, i.e. the strain induced by one vortex if his neighbor was not here, has been studied. The core size of the vortices is determined by computing the vorticity contour corresponding to $\omega_y = \omega_y^{max} exp(-1)$, hence giving the semi-minor axis a_x and the semi-major axis a_z of the elliptic vortex. The radius of the vortices is : $a = \sqrt{(a_x^2 + a_z^2)/2}$. The circulation of the vortices, computed on one primary vortex by setting the baroclinic vorticity to zero, is given by : $\Gamma =< \omega_y >$, where $< . >$ denotes the integration on a box cut around one primary vortex. Figure 3.3 represents the radius a, the separation distance b and the circulation Γ as function of time (Figures 3.3(a)-(c)-(e)) and as function of the time rescaled by the Brunt-Väisälä frequency Nt (Figures 3.3(b)-(d)-(f)) for $Fr = \infty$, 10, 5 and 2. By comparing Figures 3.3(a)-(c)-(e) with Figures 3.3(b)-(d)-(f), we observe that the curves collapse better for the different Froude numbers when time is rescaled by N, implying that the temporal evolution of a, b and Γ scales on the Brunt-Väisälä frequency, which is the characteristic timescale of the stratification. The temporal evolution of separation distance b between the vortices is plotted on Figure 3.3(c)-(d). In the stratified flows, b decreases in time, faster with increasing stratification, since the vortices are advected closer by the baroclinic vorticity. It is a function of Nt and compares reasonably well with the theoretical prediction of Saffman [41] for a two-dimensional quasi-steady inviscid flow with weak stratification. The vortices eventually come into contact and diffuse into one another. This contact happens when the separation distance between the vortices becomes equal to twice the radius of one vortex, which corresponds to $t \simeq 4$ for $Fr = 2$, $t \simeq 8$ for $Fr = 5$ and $t \simeq 14$ for $Fr = 10$. This contact implies a decrease in the circulation of each vortex due to the mutual diffusion of each vortex on the other. The evolution of the circulation Γ of the vortices is shown on Figure 3.3(e)-(f). For the homogeneous flow, Γ remains nearly constant

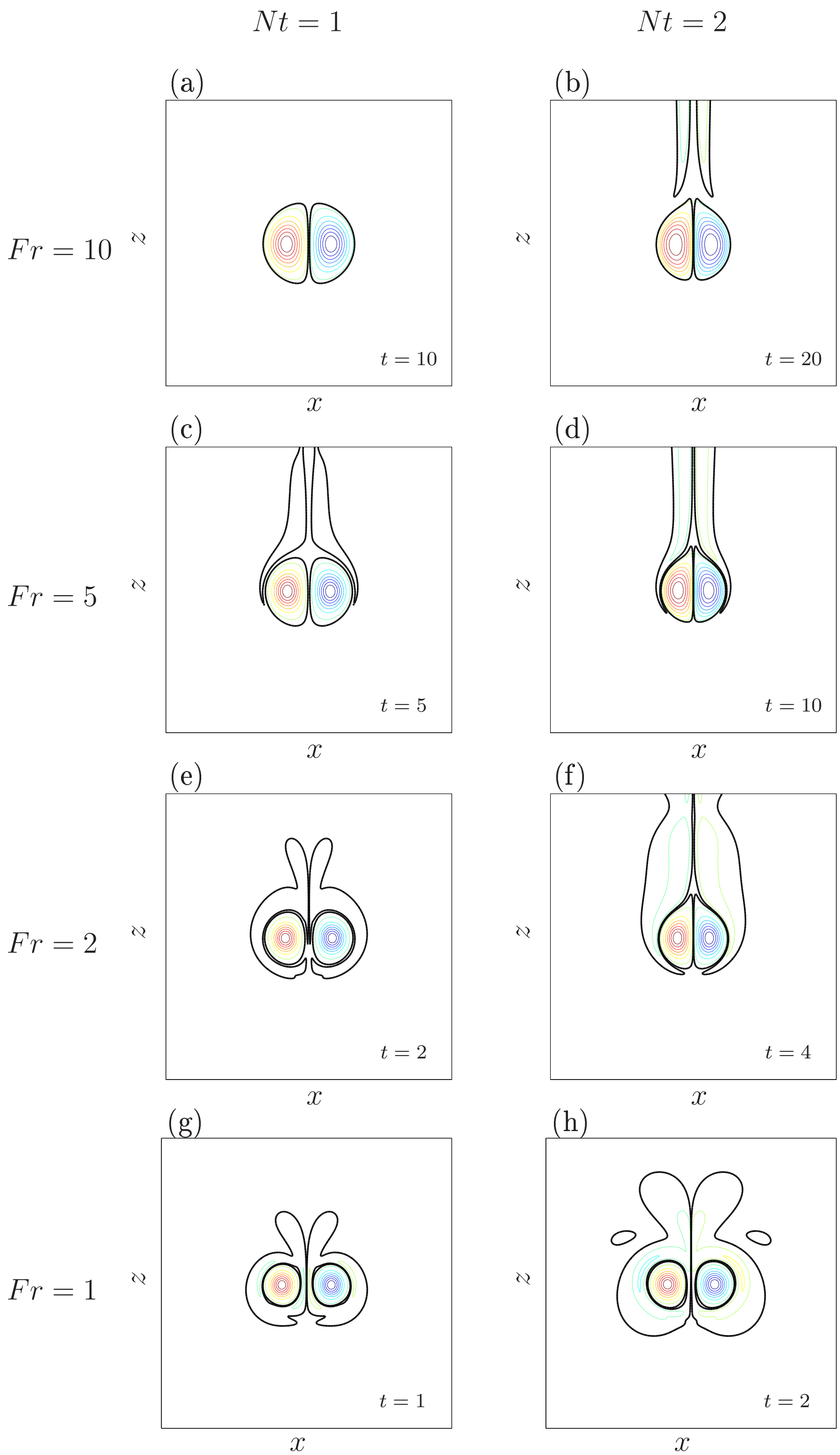

FIG. 3.1 – *Isovalues of the axial vorticity of the vortex pair in the (x, z) plane at (a)-(c)-(e)-(g) $Nt = 1$ and (b)-(d)-(f)-(h) $Nt = 2$ for (a)-(b) $Fr = 10$, (c)-(d) $Fr = 5$, (e)-(f) $Fr = 2$ and (g)-(h) $Fr = 1$. The heavy black lines correspond to the isocontours $\omega_y/\omega_y^{max} = \pm exp(-1)$. The size of the domain shown is $6b_0 \times 6b_0$ whereas the computation domain is $12b_0 \times 24b_0$, where b_0 is the initial separation distance between the vortices.*

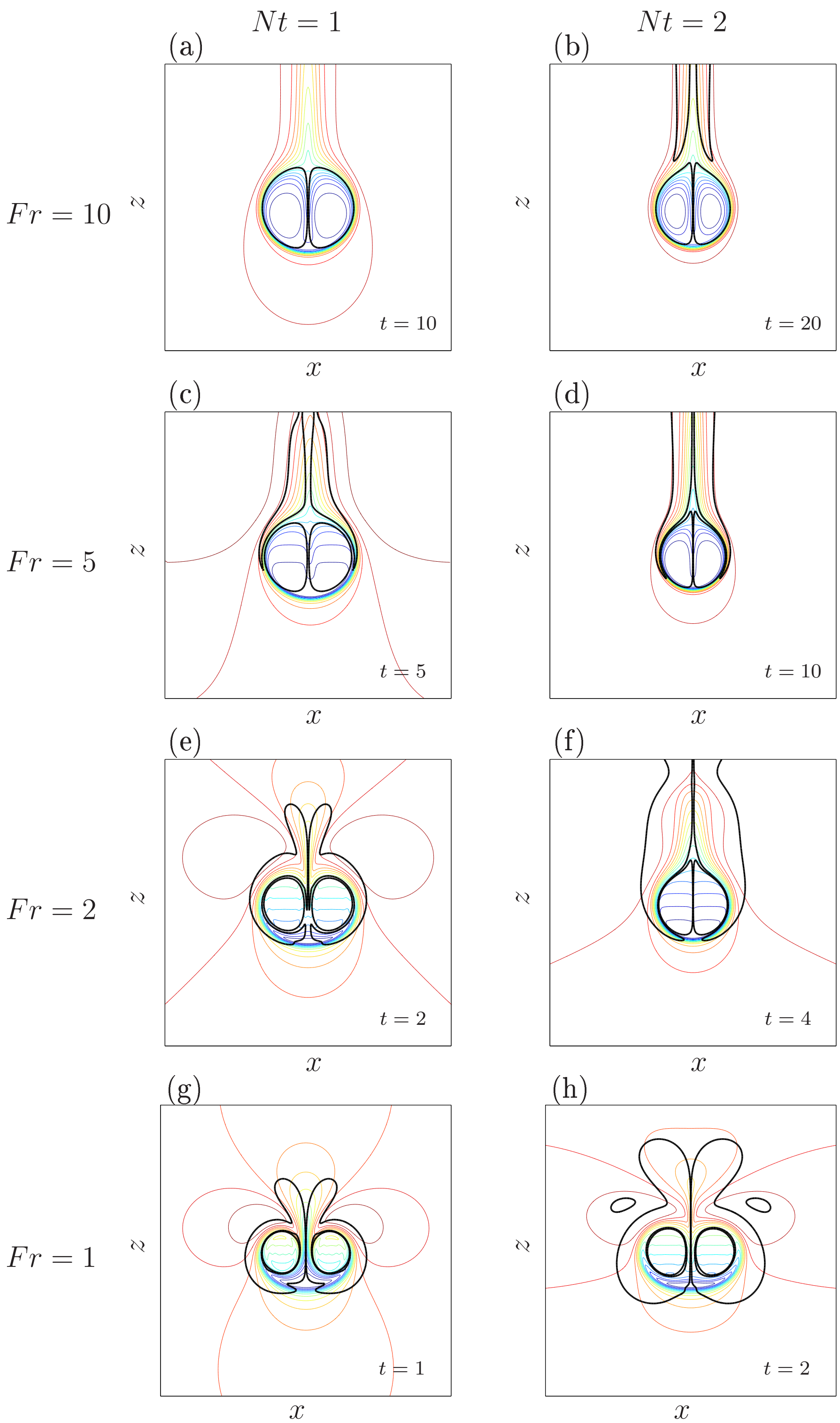

FIG. 3.2 – *Isovalues of the density perturbation in the* (x, z) *plane. Same legend as Figure 3.1.*

as time evolves whereas the circulation significantly decreases as function of time for the stratified fluids. This decrease, which happens earlier with increasing stratification, is due to the combined effect of the mutual diffusion of each vortex in the other after they are in contact and to the detrainement of the primary vortices due to baroclinic torque. On Figures 3.3(a)-(b) which display the temporal evolution of the radius a of the vortices, we observe that for $Fr = \infty$ the growth of a as function of time (Figure 3.3(a)) is due to viscous diffusion and is in good agreement with the theoretical prediction of Batchelor [2] : $a(t) = \sqrt{a_0^2 + 4\nu t}$, where ν is the viscosity of the flow, represented with a dashed line on Figure 3.3(a). For the stratified cases, the size of the vortices a grows by viscous diffusion until $t \simeq 2/N$ and then decreases since, as explained previously, in the stratified flows, the vorticity of primary vortices is detrained and the primary vortices diffuse into the other inducing a reduction of their size.
Figure 3.4 displays the aspect ratio of the dipole a/b, the external strain rate $\Gamma/2\pi b^2$ and the Reynolds number Re_Γ as function of the time rescaled by the Brunt-Väisälä frequency for $Fr = 10$, 5 and 2. We observe on Figure 3.4(a) that a/b increases with time since, as discussed previously, the radius a of the vortices increases and the separation distance between the vortices decreases. The strain $\Gamma/2\pi b^2$ is nearly constant and equal to 1 until $Nt = 1$ for the three Froude numbers considered. For the weakly stratified flow $Fr = 10$, the strains remain close to 1 as time evolves suggesting that the strain is not significantly altered by the stratification. For the moderately stratified flows $Fr = 5$ and 2, the strain strongly increase until $Nt = 2.5$ for $Fr = 5$ and $Nt = 3$ for $Fr = 2$, faster with increasing stratification due to the strong reduction of the separation distance. On Figure 3.4(c), we observe a decrease of the instantaneous Reynolds number Re_Γ as function of time since the circulation of the vortices decreases. At the same time, Re_Γ is larger with increasing stratification.

3.3 Linear stability analysis in stratified fluid

As described in Section 3.2, in a vertically stratified environment, the two-dimensional evolution of the horizontal vortex pair is affected by stratification. In the case of weak stratification, i.e. for large Froude numbers Fr, as stratification acts on a long timescale $1/N$ compared to the advection time $\Gamma/2\pi b^2$ of the dipole, the base state can be considered as as quasi-stationary and a linear stability analysis in stratified fluid describes the leading order evolution of the perturbation. This is true since for $Re_{\Gamma_0} = 2400$ the diffusion also acts on a slow time scale a^2/N. In this Section, we investigate the

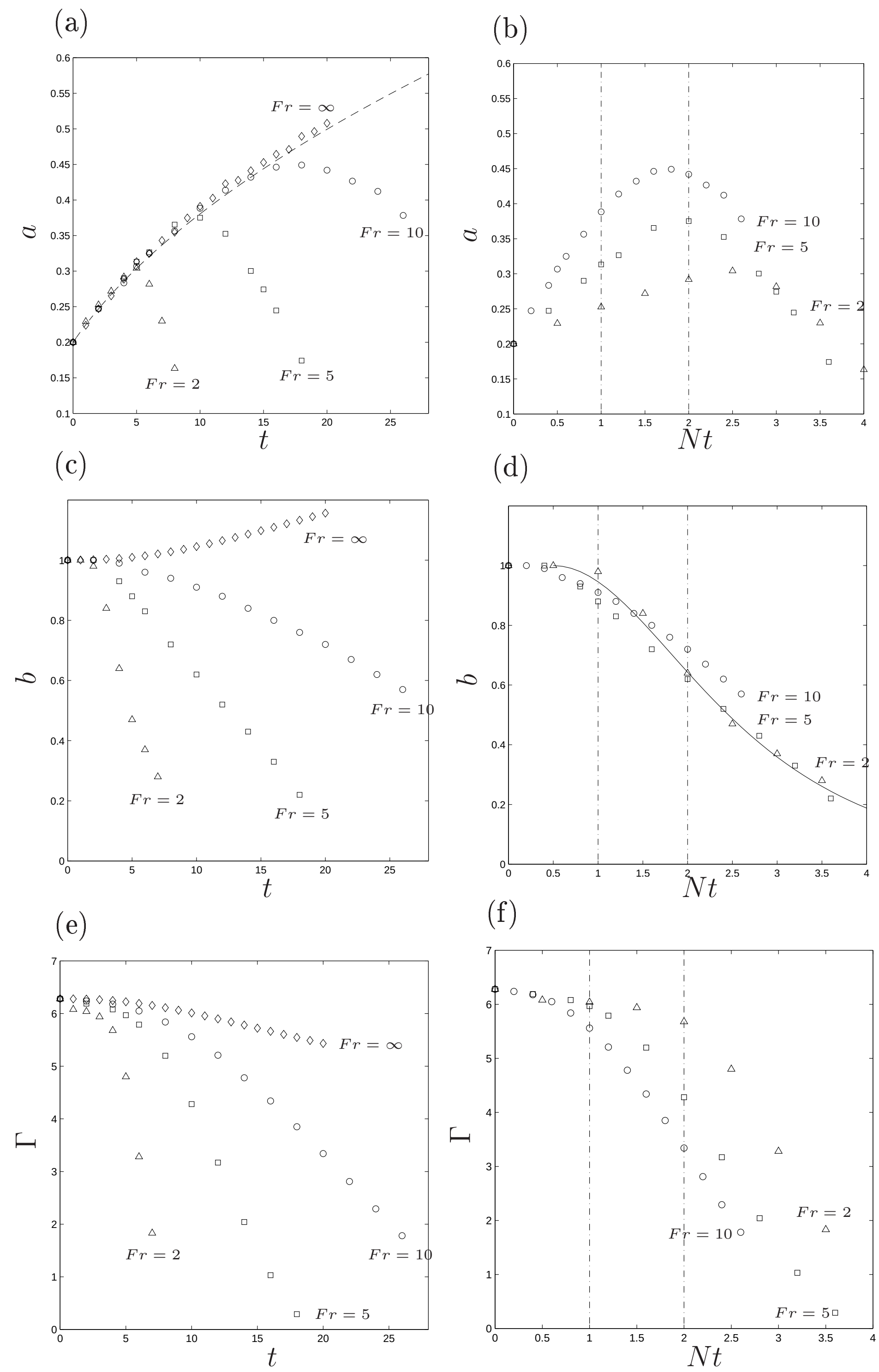

FIG. 3.3 – *Evolution of (a)-(b) the radius a of the vortex core, (c)-(d) the separation distance b between the vortices and (e)-(f) the circulation of the vortices Γ as function of (a)-(c)-(e) time t and (b)-(d)-(f) time rescaled by the Brunt-Väisälä frequency Nt for $Fr = \infty$ ($\diamond$), 10 ($\circ$), 5 ($\square$) and 2 ($\triangle$). The dashed line corresponds on Figure (a) to the law (Batchelor [2]) : $a(t) = \sqrt{a_0^2 + 4\nu t}$, where ν is the viscosity of the flow, valid for $Fr = \infty$. The dash-dotted lines correspond to the instant chosen for the linear stability analysis : $Nt = 1$ and $Nt = 2$. The continuous line on Figure (d) correspond to the prediction of Saffman [41].*

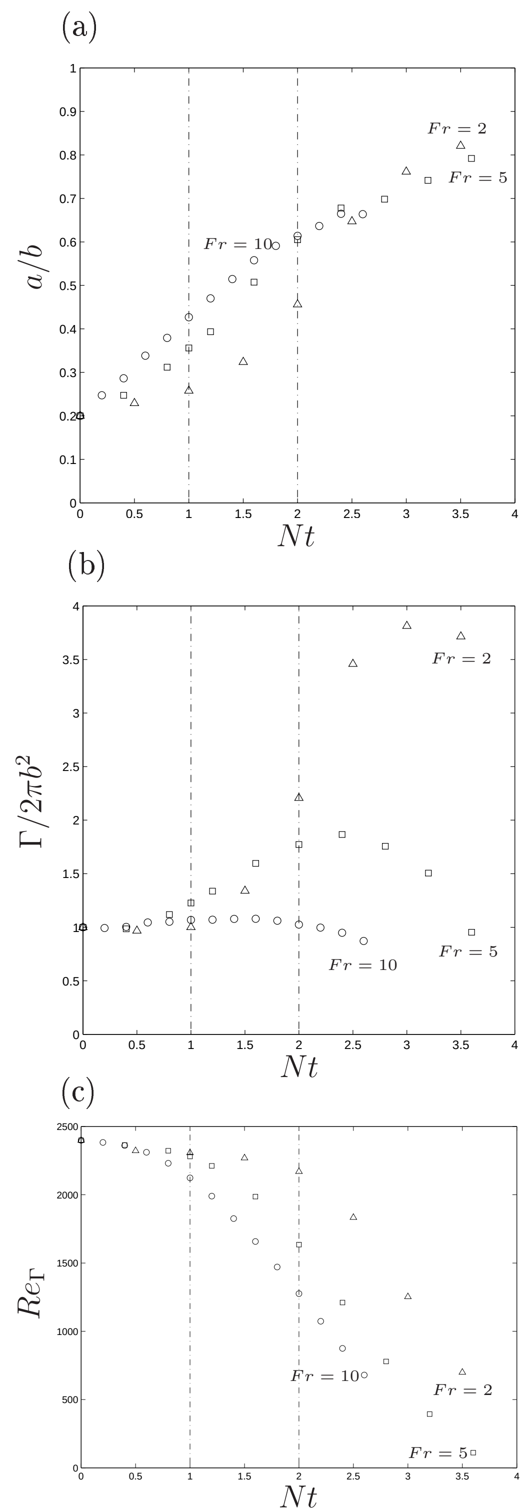

FIG. 3.4 – *Evolution of (a) the aspect ratio a/b of the dipole, (b) the external strain rate $\Gamma/2\pi b^2$ and (c) the Reynolds number Re_Γ as function of time rescaled by the Brunt-Väisälä frequency Nt for $Fr = \infty$ (◇), 10 (○), 5 (□) and 2 (△). The dash-dotted lines correspond to the instant chosen for the linear stability analysis : $Nt = 1$ and $Nt = 2$.*

three-dimensional instability of a horizontal pair of counter-rotating vortices of circulation Γ, radius a and separation distance b by freezing the base flow at particular instant.

3.3.1 2D base flow

The base state is obtained by the two-dimensional computation presented in Section 3.2. In the following, the linear stability analysis in stratified fluid has been performed for a dipole of initial aspect ratio $a_0/b_0 = 0.2$, for an initial Reynolds number $Re_{\Gamma_0} = 2400$ and Froude numbers based on the initial parameters of the dipole $Fr = 10$, 5 and 2. The times chosen for the stability analysis are $Nt = 1$ and $Nt = 2$. The axial vorticity and density perturbation of the base states chosen for the linear stability analysis are shown on Figure 3.1 and Figure 3.2. The base state is being frozen in the frame moving with the dipole. Defining the advection velocity of the dipole is not unique since different parts (in particular its wake) propagate at different speeds. Here, the advection velocity is chosen as the velocity at the points of maximum vorticity at the center of the vortices. The base state is symmetric with respect to the axis $x = 0$:

$$\begin{array}{l} [u_B, 0, w_B, \rho_B](x, z) = [-u_B, 0, w_B, \rho_B](-x, z) \\ [0, \omega_{By}, 0](x, z) = [0, -\omega_{By}, 0](-x, z) \end{array} \tag{3.8}$$

where u_B and w_B are respectively the transverse and vertical velocities, ρ_B is the density perturbation and ω_{By} is the axial vorticity of the base state.

3.3.2 Linearized equations

Infinitesimal three-dimensional perturbations are superposed on this bi-dimensional base state. At leading order, they are solutions of the linearized Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u'}}{\partial t} = -\mathbf{U}_B \times \boldsymbol{\omega'} - \mathbf{u'} \times \boldsymbol{\Omega}_B - \nabla.(p' + \mathbf{u'}.\mathbf{U}_B) + \nu \Delta \mathbf{u'} - \rho' N^2 \mathbf{e_z} \\ \nabla.\mathbf{u'} = 0 \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\mathbf{U}_B.\nabla \rho' - \mathbf{u'}.\nabla \rho_B + u'_z + \nu Sc \Delta \rho'. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

where $[\mathbf{u'}, \boldsymbol{\omega'}, \rho', p'](x, y, z, t)$ are the velocity, the vorticity, the density and the pressure of the three-dimensional perturbation. As the base state is uniform along the y axis, the perturbations can be decomposed into normal modes :

$$[\mathbf{u'}, \boldsymbol{\omega'}, \rho', p'](x, y, z, t) = [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\rho}, \tilde{p}](x, z, t) \exp^{ik_y y} + c.c. \tag{3.10}$$

where k_y is the axial wavenumber and c.c. denotes the complex conjugate.

3.3.3 Numerical method

The linearized Navier-Stokes equations (3.9) are integrated using the pseudo-spectral method in Cartesian coordinates with periodic boundary conditions described in Delbende & al. [9]. The velocity, vorticity, density and pressure of the normal mode corresponding to the axial wavenumber k_y are expressed in Fourier space by application of the Fourier transform :

$$[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\rho}, \tilde{p}](x, z, t) = \int [\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\rho}, \hat{p}](k_x, k_z, t) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x dk_z \tag{3.11}$$

In spectral space, the linear Navier-Stokes equations (3.9) become :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = \mathbf{P}(\mathbf{k})[\widehat{\mathbf{u}_B \times \boldsymbol{\omega}} + \widehat{\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_B} - \hat{\rho} N^2 \mathbf{e_z}] - \nu \mathbf{k^2} \hat{\mathbf{u}} \\ \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -i\mathbf{k}.\widehat{\mathbf{u}_B \rho} - \widehat{\mathbf{u}.\nabla \rho_B} + \hat{u}_z - \nu Sc \mathbf{k^2} \hat{\rho}, \end{array} \right. \tag{3.12}$$

where $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ is the total wavevector and $\mathbf{P}(\mathbf{k})$ is the projection operator on the space of divergence-free fields which, in Fourier space, may be expressed as a tensor with components $P_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / \mathbf{k^2}$. Time integration is being marched with a second-order Adams-Bashforth scheme whereas the dissipative terms $\nu \mathbf{k^2} \hat{\mathbf{u}}$ and $\nu Sc \mathbf{k^2} \hat{\rho}$ are integrated exactly. The eigenmodes are computed independently for each axial wavenumber k_y.

3.3.4 Three-dimensional unstable modes

Since the base state is symmetric versus $x \to -x$ (Equation 3.8), the eigenmodes can be decomposed in a symmetric (same symmetry as the base state) :

$$\begin{array}{l} [\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z, \tilde{\rho}](x, z) = [-\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z, \tilde{\rho}](-x, z) \\ [\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z](x, z) = [\tilde{\omega}_x, -\tilde{\omega}_y, -\tilde{\omega}_z](-x, z) \end{array} \tag{3.13}$$

and an antisymmetric family :

$$\begin{array}{l} [\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z, \tilde{\rho}](x, z) = [\tilde{u}_x, -\tilde{u}_y, -\tilde{u}_z, -\tilde{\rho}](-x, z) \\ [\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z](x, z) = [-\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z](-x, z). \end{array} \tag{3.14}$$

Symmetric and antisymmetric eigenmodes were calculated separately, the symmetries being imposed at each timestep during the time evolution.
Figures 3.5 and 3.6 show the real part of the growth rate σ_r either scaled by $2\pi b_0^2/\Gamma_0$, the initial strain imposed by one vortex on the other, as function of the axial wavenumber k_y scaled by the initial vortex core radius a_0 for Figures 3.5(a)-(c) and 3.6(a)-(c), or scaled by $2\pi b^2/\Gamma$, the instantaneous strain imposed by one vortex on the other, as function of the axial wavenumber k_y scaled

by the instantaneous vortex core radius a for Figures 3.5(b)-(d) and 3.6(b)-(d) at two instants rescaled by the Brunt-Väisälä frequency $Nt = 1$ (Figures 3.5(a)-(b) and 3.6(a)-(b)) and $Nt = 2$ (Figures 3.5(c)-(d) and 3.6(c)-(d)). It displays several instability bands.

Long-wavelength symmetric instability

We first consider the symmetric unstable modes at small wavenumbers at time $Nt = 2$ displayed on Figure 3.6(c). Between $k_y a_0 = 0$ and $k_y a_0 = 0.6$, it shows one band of instability for each Froude number with maximum growth rates $\sigma_r 2\pi b_0^2/\Gamma_0 = 0.26$ for $Fr = 10$, $\sigma_r 2\pi b_0^2/\Gamma_0 = 0.54$ for $Fr = 5$ and $\sigma_r 2\pi b_0^2/\Gamma_0 = 0.94$ for $Fr = 2$ around $k_y a_0 = 0.3$. The values of the growth rates scaled by the initial strain $\sigma_r 2\pi b_0^2/\Gamma_0$ increase with increasing stratification. Figure 3.6(d) represents the growth rate as function of the axial wavenumber, both rescaled by the instantaneous parameters of the dipole. The position of the maximum $k_y a$ is shifted to smaller values with increasing stratification and corresponds to a maximum around $k_y b = 1$, once rescaled by the instantaneous value of the separation distance between the vortices, for the three wavenumbers. The values of the growth rates collapse reasonnably well for the three Froude numbers, once rescaled by the instantaneous value of the strain. The wavelength of this symmetric instability scales on the separation distance between the vortices and the growth rate on the strain. This is in agreement with the prediction for the Crow instability [8]. Figure 3.7 represents the axial vorticity (Figure 3.7(a)) and the density (Figure 3.7(b)) of the perturbation at the maximum of the instability peak for $Fr = 5$ at $Nt = 2$. This mode is similar to the Crow instability mode which exists in the homogeneous fluids. Superposed to the base flow, it would induce a symmetric displacement of the vortices with an angle of 45° with no deformation of its internal structure. The density perturbation is located around the vortices and is due to the shifting of the strong total density gradient area of the base flow by the axial vorticity perturbation.

Short wavelength instability

Let us first discuss the later time ($Nt = 2$) instantaneous instability properties. Figure 3.5(c) displays one band of instability for each Froude number between $k_y a_0 = 0.7$ and $k_y a_0 = 1.93$ with maximum growth rates $\sigma_r 2\pi b_0^2/\Gamma_0 = 0.65$ at $k_y a_0 = 1$ for $Fr = 10$, $\sigma_r 2\pi b_0^2/\Gamma_0 = 1.25$ at $k_y a_0 = 1.25$ for $Fr = 5$ and $\sigma_r 2\pi b_0^2/\Gamma_0 = 1.95$ at $k_y a_0 = 1.36$. Figure 3.6(c) is similar to Figure 3.5(c) but applies to symmetric modes for which the peaks are slightly smaller. We observe that the values of the growth rates scaled by the

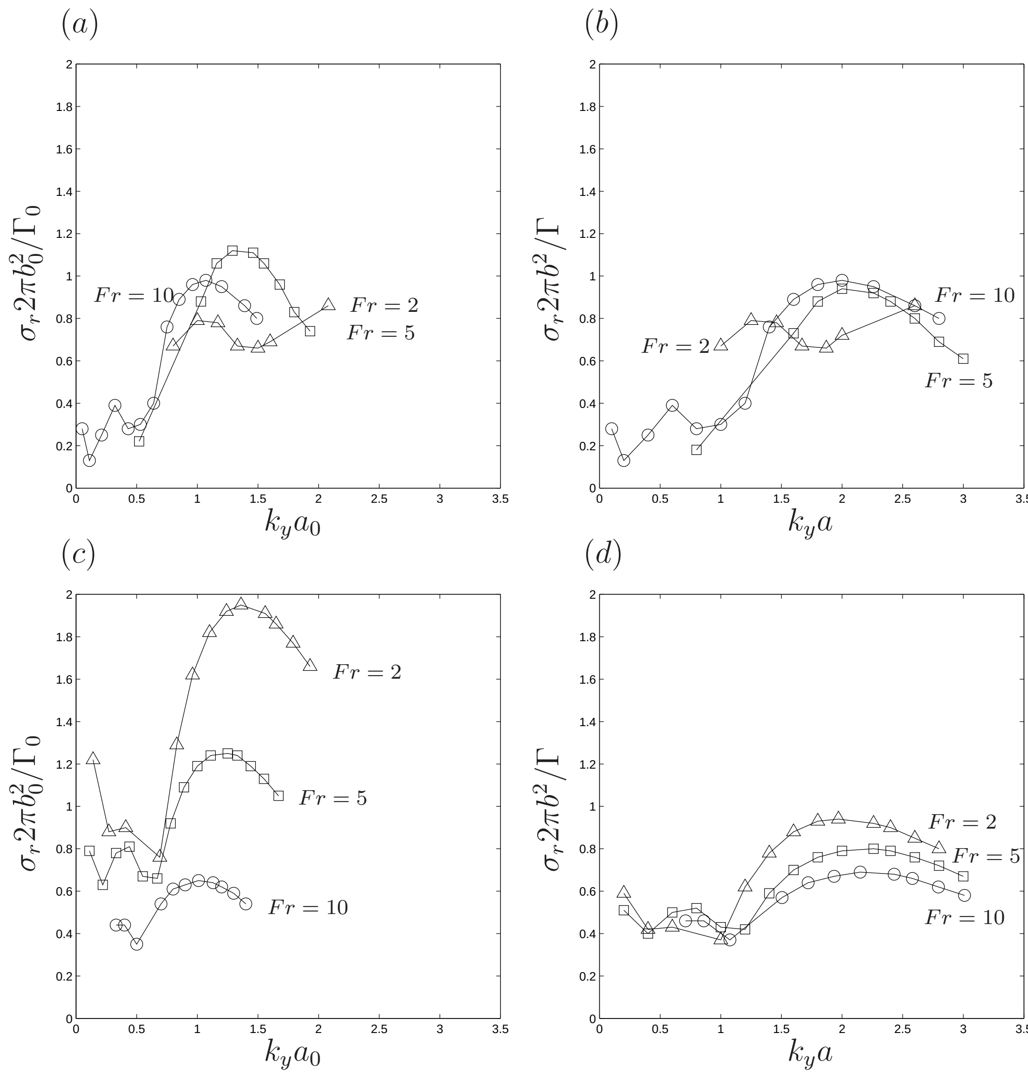

FIG. 3.5 – *growth rates σ_r of antisymmetric modes as function of the axial wavenumber k_y scaled (a)-(c) by the initial values of the radius a_0, the separation distance b_0 and the circulation Γ_0 of the vortices and (b)-(d) by the instantaneous values of the radius a, the separation distance b and the circulation Γ at two instants (a)-(b) $Nt = 1$ and (c)-(d) $Nt = 2$ for $Re_{\Gamma_0} = 2400$ and three Froude numbers $Fr = 10$ ($\circ$), $Fr = 5$ ($\square$) and $Fr = 2$ ($\triangle$).*

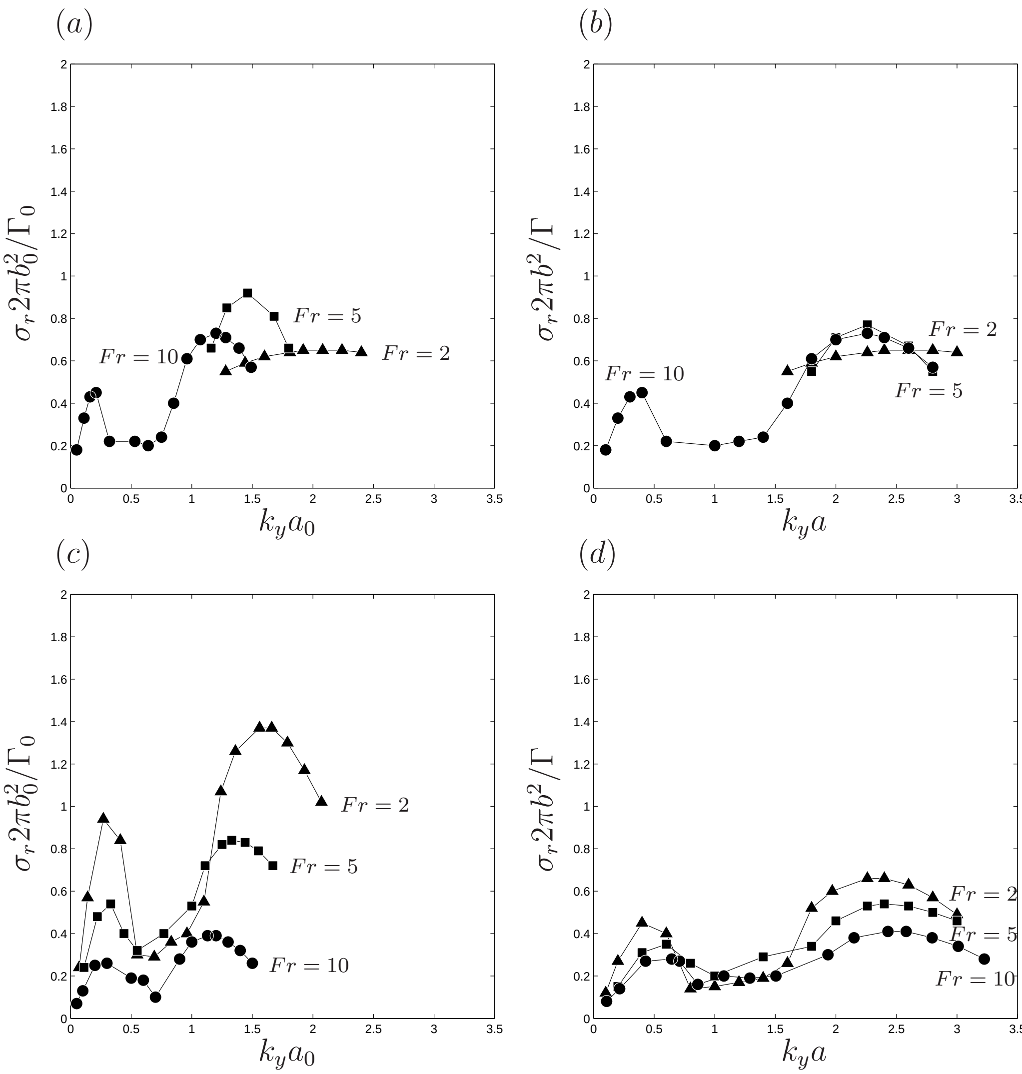

FIG. 3.6 – *growth rates σ_r of symmetric modes as function of the axial wavenumber k_y scaled (a)-(c) by the initial values of the radius a_0, the separation distance b_0 and the circulation Γ_0 of the vortices and (b)-(d) by the instantaneous values of the radius a, the separation distance b and the circulation Γ at two instants (a)-(b) $Nt = 1$ and (c)-(d) $Nt = 2$ for $Re_{\Gamma_0} = 2400$ and three Froude numbers $Fr = 10$ (●), $Fr = 5$ (■) and $Fr = 2$ (▲).*

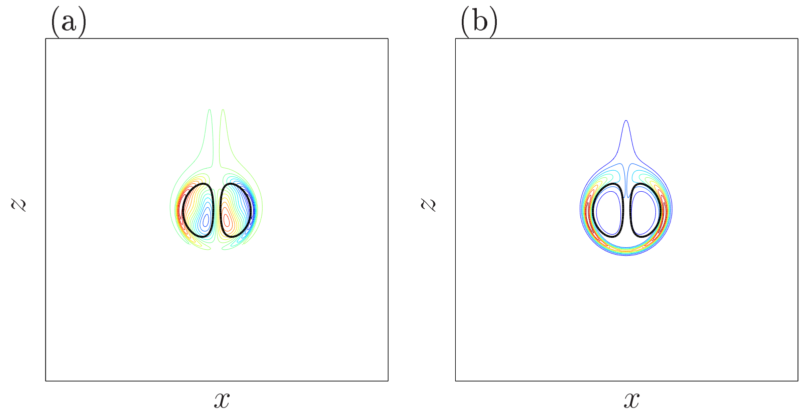

FIG. 3.7 – *Isovalues of the (a) axial vorticity ω_y and (b) density ρ of the perturbation in the (x, z) plane at the maximum of the unstable peak $k_y a = 0.6$ for $Re_{\Gamma_0} = 2400$ and $Fr = 5$ at $Nt = 2$ for the symmetric mode. The heavy black lines correspond to the isocontours $\omega_{By}/\omega_{By}^{max} = \pm exp(-1)$. The size of the domain shown is $6b_0 \times 6b_0$ whereas the computation domain is $12b_0 \times 12b_0$, where b_0 is the initial separation distance between the vortices. The potential energy represents 67% of the total energy.*

initial value of the strain $\sigma_r 2\pi b_0^2/\Gamma_0$ at the maximum of the instability bands strongly increase with increasing stratification whereas the $k_y a_0$ location of the maximum is slightly shifted to larger values.
As observed in Section 3.2.2, the radius a of the vortices and the strain $\Gamma/2\pi b^2$ evolve as a function of time, due to the presence of the stratification. The growth rates of unstable modes as function of the axial wavenumber, both rescaled by the instantaneous parameters of the dipole are shown on Figures 3.5(d) and 3.6(d). Once rescaled by the instantaneous values the three curves nearly collapse with a maximum around $k_y a = 2$ and $\sigma_r 2\pi b^2/\Gamma$ about 1, which agree with the prediction of the first resonance branch of the elliptic instability (Tsai & Widnall [52], Le Dizès & Laporte [29] ...). The fact that the instability seems to be weaker when the Reynolds number is larger is probably due to dissipation since the larger the Froude number, the larger the time to reach $Nt = 2$ and the stronger the decrease in instantaneous Reynolds number as shown on Figure 3.4(c). The values of the maximum growth rates for $Fr = 10$ and $Fr = 5$ is compensated for the viscous damping estimate according to [11] to $-\alpha Re^{-1}$ with α a factor which equals at the first resonance of the elliptic instability. It gives a maximum value at the peak ($k_y a \simeq 2$) of $\sigma_r 2\pi b^2/\Gamma + \alpha Re^{-1} = 0.88$ instead of $\sigma_r 2\pi b^2/\Gamma = 0.67$ for $Fr = 10$, $\sigma_r 2\pi b^2/\Gamma + \alpha Re^{-1} = 0.98$ instead of $\sigma_r 2\pi b^2/\Gamma = 0.79$ for $Fr = 5$

which is in reasonable agreement with the value $\sigma_r 2\pi b^2/\Gamma = 0.94$ for $Fr = 2$. Figure 3.8(c) displays the axial vorticity of the perturbation at the maximum of the instability peak for $Fr = 5$ at $Nt = 2$ for the antisymmetric case. The axial vorticity of the perturbation consists of a dipole in the vortex core and a lobe of opposite sign vorticity at his periphery. This mode corresponds to the deformation of the vortex core in opposite phase to the vortex periphery characteristic of elliptic instability modes. Figure 3.8(d) shows the density perturbation at the maximum of the instability peak for $Fr = 5$ at $Nt = 2$ for the antisymmetric case. There is no density perturbation inside the vortex cores where the density of the base flow is uniform. It is located at the periphery of the vortex base flow since it is induced by shifting of the area of strong density gradient of the total density at the periphery of the vortices. At the shorter time $Nt = 1$, the results are similar to the case $Nt = 2$ except that the curves representing the growth rates of the instability peak as function of the axial wavenumber are closer for the three Froude numbers. The axial vorticity of the perturbation at $Nt = 1$ for $Fr = 5$ at the maximum of the peak displayed on Figure 3.8(a) is similar to the $Nt = 2$ case except that the size of the perturbation is smaller since the radius of the vortices grows by viscous diffusion between $Nt = 1$ and $Nt = 2$ and the perturbation located on each vortex core are more searated since, at that time, the vortices are further.
As observed by Nomura *et al.* [35] in their direct numerical simulations, for weak and moderate stratification, the instability mechanism is the elliptic instability. The growth rates scale on the instantaneous value of the strain $\Gamma/2\pi b^2$ and the wavelengths scale on the instantaneous value the vortex radius a, as predicted by the elliptic theory. The growth rates scaled by the initial strain are larger with stronger stratification, which corroborates the results of Nomura *et al.*. The effect of the stratification is to enhance the strain by reducing the separation distance between the vortices of the base flow. The most unstable modes are the antisymmetric modes and the difference between the growth rates of symmetric and antisymmetric mode is larger at $Nt = 2$ than at $Nt = 1$. This may be due to the increasing selection process of the antisymmetric mode with increasing a/b. Indeed, since a grows and b decreases as function of time, the value of the aspect ratio of the dipole a/b is larger at $Nt = 2$ than at $Nt = 1$ for the three Froude numbers.

Oscillatory instabilities

At the instant $Nt = 2$, the points between $k_y a_0 = 0.2$ and $k_y a_0 = 0.5$ on Figure 3.5(c) correspond to an oscillatory instability since the growth rates have an imaginary part (region labeled by $\circ$). The growth rates scaled by

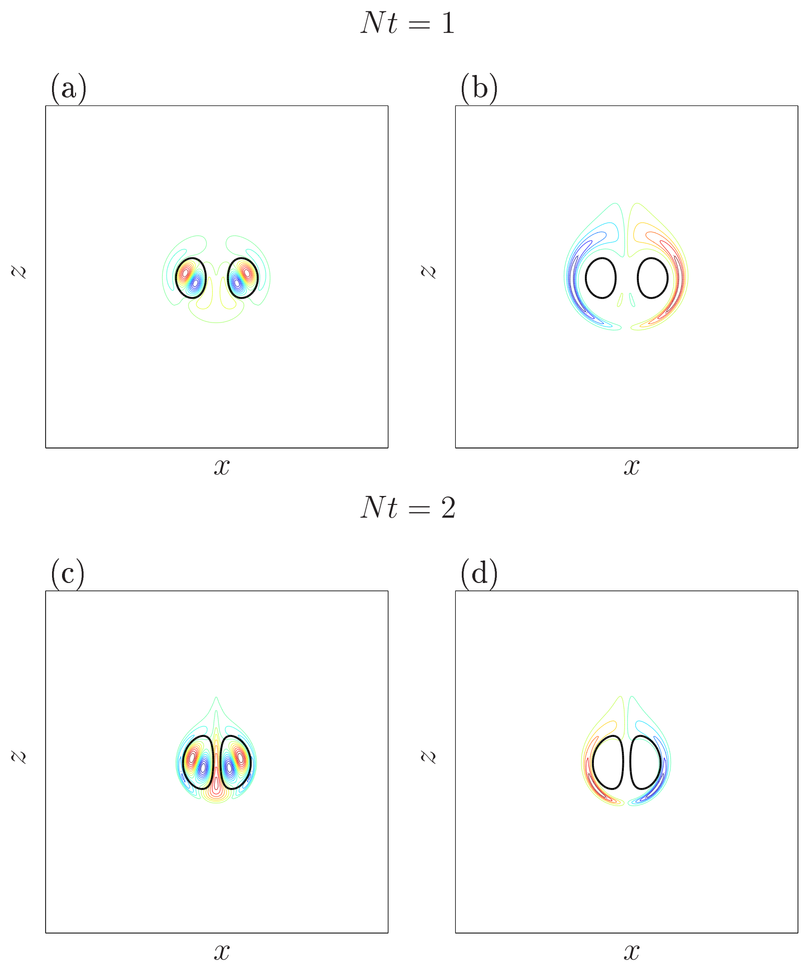

FIG. 3.8 – *Isovalues of the (a)-(c) axial vorticity ω_y and (b)-(d) density ρ of the perturbation in the (x, z) plane at the maximum of the unstable peak at (a)-(b) $k_y a = 2$ at $Nt = 1$ and (c)-(d) $k_y a = 2.26$ at $Nt = 2$ for $Re_{\Gamma_0} = 2400$ and $Fr = 5$ for the antisymmetric mode. The heavy black lines correspond to the isocontours $\omega_{By}/\omega_{By}^{max} = \pm exp(-1)$. The size of the domain shown is $6b_0 \times 6b_0$ which is the size of the computation domain, where b_0 is the initial separation distance between the vortices. The potential energy represents 10% of the total energy at $Nt = 1$ and 48% of the total energy at $Nt = 2$.*

the initial value of the strain increase with increasing stratification. This instability exists for the three Froude numbers considered. The three curves corresponding to the growth rates as function of the axial wavenumbers both rescaled by the instantaneous value of the dipole parameters collapse, meaning that the growth rate scales on the instantaneous value of the strain. For these values of the axial wavenumber, the effect of the Reynolds number is small. Figures 3.9(a) and 3.9(c) represent the axial vorticity of the perturbation at $k_y a = 0.8$ for $Fr = 5$. It consists of a central maximum inside the core of the vortices and two lobes of opposite sign vorticity at the periphery. This mode is characteristic of an elliptic instability involving Kelvin waves of azimuthal wavenumbers $m = 0$ and $|m| = 2$.

This oscillatory instability also exists for the symmetric modes but at small wavenumbers is superseded by the Crow instability. On Figure 3.6(c), the points between $k_y a_0 = 0.6$ and $k_y a_0 = 1$ correspond to the real part of the growth rates and Figure 3.6(d) shows that the real part of the growth rate scales on the instantaneous value of the strain.

3.4 Optimal perturbations in stratified fluid

In the case of strong stratification, i.e. for small Froude numbers, the unsteadiness of the flow questions the validity of the quasi-steady approximation used in the previous Section. In order to study the dynamics of this unsteady flow, we explore here a different approach valid even when base flow and perturbations evolve on similar time scale. We compute for each instant t, the initial perturbation that will exhibit the largest gain in total energy by the time t. A direct-adjoint technique (Luchini [32], Corbett & Bottaro [7]) has been developped in order to compute the optimal perturbations while taking into account the evolution of the base flow. This method requires the computation of both the direct and the adjoint evolution operators obtained by linearizing the Navier-Stokes equation around a time evolving base flow. The scalar product used to construct the adjoint is :

$$[\mathbf{f}'|\mathbf{f}] = \int_0^{\tau}\int_0^{L_x}\int_0^{L_z} \mathbf{f}'^{*T}.\mathbf{f}\,dxdzdt = \int_0^{\tau}\int_0^{L_x}\int_0^{L_z} (\mathbf{u}'^{*T}.\mathbf{u} + p'^{*}p + \rho'^{*}\rho)\,dxdzdt \tag{3.15}$$

where $\mathbf{f}' = (\mathbf{u}', p', \rho')^T$ and $\mathbf{f} = (\mathbf{u}, p, \rho)^T$ are two complex state vectors, the superscripts * and ^{T} denote the complex conjugate and the transposition, the total energy being then given by :

$$E(t) =< Q\mathbf{f}|Q\mathbf{f} >= \int_0^{L_x}\int_0^{L_z} (\mathbf{u}^{*T}.\mathbf{u} + N^2\rho^{*}.\rho)\,dxdz \tag{3.16}$$

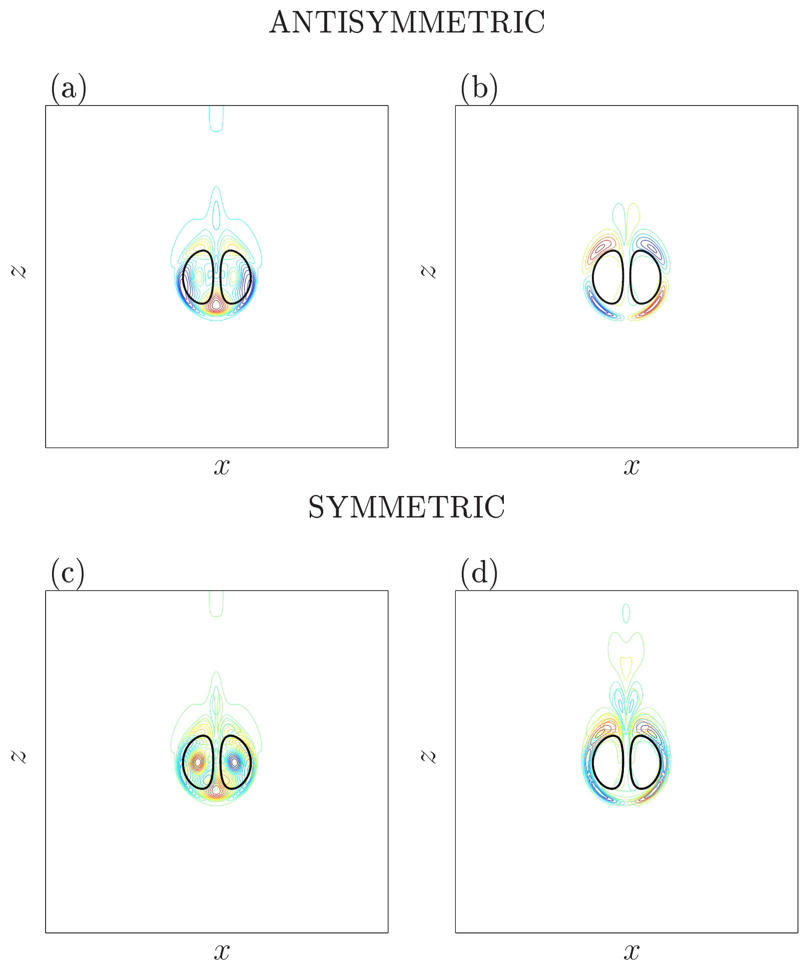

FIG. 3.9 – *Isovalues of the (a)-(c) axial vorticity ω_y and (b)-(d) density ρ of the perturbation in the (x, z) plane at the maximum of the unstable peak (a)-(b) $k_y a = 0.8$ for the antisymmetric mode and (c)-(d) $k_y a = 1.4$ for the symmetric mode for $Re_{\Gamma_0} = 2400$ and $Fr = 5$ at $Nt = 2$. The heavy black lines correspond to the isocontours $\omega_{By}/\omega_{By}^{max} = \pm exp(-1)$. The size of the domain shown is $6b_0 \times 6b_0$ whereas the computation domain is $12b_0 \times 12b_0$, where b_0 is the initial separation distance between the vortices. The potential energy represents 43% of the total energy for the antisymmetric mode and 40% for the symmetric mode.*

where $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix}$.

3.4.1 Equations and numerical method

The adjoint of the linearized Navier-Stokes equations, is deduced from Equation 3.9 by using the Lagrange identity (Ince [21], Schmid & Henningson [44]) and rewritten as :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t'} = \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{u}^+ - \nabla \times (\mathbf{u}_B \times \mathbf{u}^+) - \nabla p^+ + \nu \Delta \mathbf{u}^+ - \nabla \rho_B . \rho^+ + \rho^+ \mathbf{e_z} \\ \nabla . \mathbf{u}^+ = 0 \\ \frac{\partial \rho^+}{\partial t'} = \mathbf{u}_B . \nabla \rho^+ - N^2 u_z + \nu Sc \Delta \rho^+ \end{array} \right. \tag{3.17}$$

where $[\mathbf{u}^+, p^+, \rho^+](x, y, z, t)$ are the adjoint velocity, pressure and density perturbations and $t' = -t$. The optimal initial condition and the optimal response at finite times are computed with a direct-adjoint technique adapted from Corbett & Bottaro [7]. The actual procedure is as follows : the two-dimensional Navier-Stokes (Equation 3.3) is first integrated till time $t = \tau$, starting from an initial state corresponding to the superposition of two circular Lamb-Oseen vortices of initial aspect ratio $a_0/b_0 = 0.2$ as defined previously. The velocity, vorticity and density fields of the so obtained time dependent base flow $[\mathbf{u}_B, \boldsymbol{\omega}_B, \nabla \rho_B]$ are saved in memory each $n\Delta t$, with n an integer number adjusted as a trade off between memory requirement and precision : the larger n, the smaller the memory used for the storage of the base flow evolution but the larger the imprecision. The unsteadiness of the base flow during the direct and adjoint integrations is then taken into account by reading the base flow fields $[\mathbf{u}_B, \boldsymbol{\omega}_B, \nabla \rho_B]$ saved in memory each $n\Delta t$. In order to improve accuracy, the base flow fields are computed, at each Δt, via a linear interpolation between $n\Delta t$ and $(n+1)\Delta t$. The direct Equation 3.9 is integrated until time $t = \tau$ with, either divergence-free white noise, or an optimal initial condition computed previously for a slightly different axial wavenumber, taken as initial condition $\mathbf{f}(t = 0)$. The backward in time integration of the adjoint Equation 3.17 is next performed by taking $\mathbf{v}^+(t' = 0) = (Q^+ Q)\mathbf{f}(t = \tau)$ as an initial condition, where $t' = \tau - t$. The adjoint Equation 3.17 is integrated until $t' = \tau$. Then, the procedure is reiterated taking as initial condition for the direct integration :

$\mathbf{f}(t=0) = (Q^+Q)^{-1}\mathbf{v}^+(t'=\tau)$. The energy gain at time $t=\tau$ is then :

$$G(\tau) = \frac{E(\tau)}{E(0)} = \frac{< Q\mathbf{f}(\tau)|Q\mathbf{f}(\tau) >}{< Q\mathbf{f}(0)|Q\mathbf{f}(0) >}. \tag{3.18}$$

The successive direct and adjoint integrations are repeated until the convergence is obtained, i.e. variations of $\ln(G)$ are smaller than 10^{-3}. This is usually archieved in about 3 to 4 direct / adjoint forward and return journey. The optimal energy gains are computed independently for each symmetry. In the following, we define the optimal mean transient growth rate (OMTG) as :

$$\sigma = \ln(G)/2t, \tag{3.19}$$

the kinetic energy at time t as :

$$E_c(t) = \int_0^{L_x}\int_0^{L_z} \mathbf{u}^{*T}.\mathbf{u}dxdz \tag{3.20}$$

and the potential energy as :

$$E_p(t) = \int_0^{L_x}\int_0^{L_z} N^2\rho^*.\rho dxdz. \tag{3.21}$$

3.4.2 Unstratified flows ($Fr = \infty$)

Figure 3.10 displays the optimal mean transient growth rate σ scaled by $\Gamma_0/2\pi b_0^2$, the initial strain imposed by one vortex on the other, for the antisymmetric (Figure 3.10(a)) and symmetric (Figure 3.10(b)) cases as function of the axial wavenumber k_y scaled by the initial vortex core radius a_0. The optimal has been computed for two distinct instants $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$, both times being larger than $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 \simeq 2.5$, the transient if the dipole is assumed steady as determined by [11]. For homogeneous fluid, the unsteadiness of the base flow is due to viscous diffusion that induces an increase of the vortex core radius a. The aspect ratio of the base flow has evolved through viscous diffusion from its initial value $a_0/b_0 = 0.2$ to $a/b = 0.29$ at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and $a/b = 0.37$ at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$.

Long-wavelength dynamics

At low wavenumbers, i.e. for wavenumbers k_ya_0 roughly smaller than 0.6, it is striking that the mean transient growth rates are large for both symmetries whereas, in the asymptotic stability analysis, antisymmetric modes are stable and only symmetric modes are unstable and correspond to the

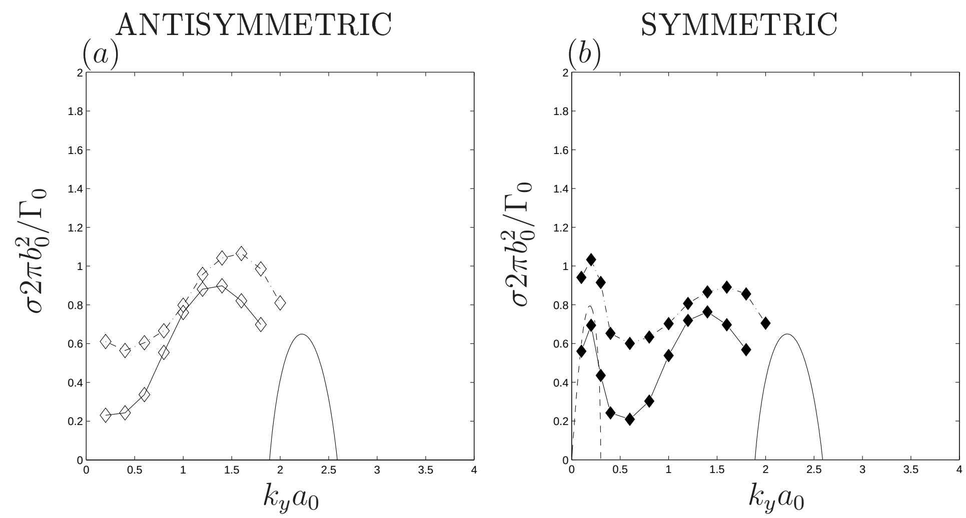

FIG. 3.10 – *Mean transient growth rate σ of the (a) antisymmetric and (b) symmetric unstable modes as function of the axial wavenumber k_y scaled by the initial values of the radius a_0, the separation distance b_0 and the circulation Γ_0 of the vortices for $Fr = \infty$ at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ (·–◇–·,·–◆–·) and $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ (–◇–,–◆–). Dashed lines correspond to the theoretical prediction of Crow for a pair of vortex filaments for an inviscid and homogeneous fluid. Continuous line corresponds to the inviscid theory of Le Dizès & Laporte [29] for a pair of Lamb-Oseen vortices of aspect ratio $a/b = 0.2$ in an homogeneous fluid with a viscous damping [11] computed for $Re_\Gamma = 2400$.*

long-wavelength Crow instability. Figures 3.11, 3.12, 3.13 and 3.14 display the optimal initial perturbations and optimal responses at the maximum of the symmetric peak $k_y a_0 = 0.2$ at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ for both symmetries.

Symmetric perturbations

For the symmetric case, the axial vorticity of the optimal response (Figures 3.11(c) and 3.12(c)) consists of a dipole located on the base flow vortices. Superposed on the base flow, it would induce a symmetric displacement of the vortices along lines inclined at an angle of 45° with no deformation of the internal structure of the vortices. This optimal response is therefore similar to the eigenmode of the Crow instability. As the vortex core size has increased between $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$, the size of the region where the vorticity of the optimal response is not small, has increased from $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ to $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$. The optimal initial perturbation is localized on the contracting manifold of the lower stagnation point at both instants, i.e. in between the two vortices (Figures 3.11(a)-(b) and 3.12(a)-(b)). The predicted growth rate of Crow instability for a pair of vortex filaments for an inviscid and unstratified flow is plotted with dashed lines on Figure 3.10(b) and is in good agreement with the optimal mean transient growth rate computed at both instants. It predicts a maximum growth rate at $k_y a_0 = 0.19$, corresponding to $k_y b_0 = 1.05$. Between $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$, the mean transient gain has decreased by 38%.

Antisymmetric perturbations

For the antisymmetric case, the axial vorticity of the optimal response (Figures 3.13(c) and 3.14(c)) corresponds to an antisymmetric displacement of the vortices with no deformation of the vortex cores. In contrast with the symmetric case, the enstrophy of the optimal response (Figure 3.13(d) and 3.14(d)) is strong not only in the vortex cores but also in the wake of the vortices, corresponding to the formation of vertical vortices in the lee of the dipole. At $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$, the contribution of the wake of the vortices is dominant. The optimal initial perturbations (Figures 3.13(b) and 3.13(b)) are localized on the contracting manifold of the upper stagnation point and does not vary much between the two instants.

Short wave dynamics

At large wavenumbers, i.e. for $k_y a_0 > 0.6$, we observe on Figure 3.10 a well separated band of large mean transient growth rate for both symmetries and both instants studied. The bands present a well defined maximum slightly

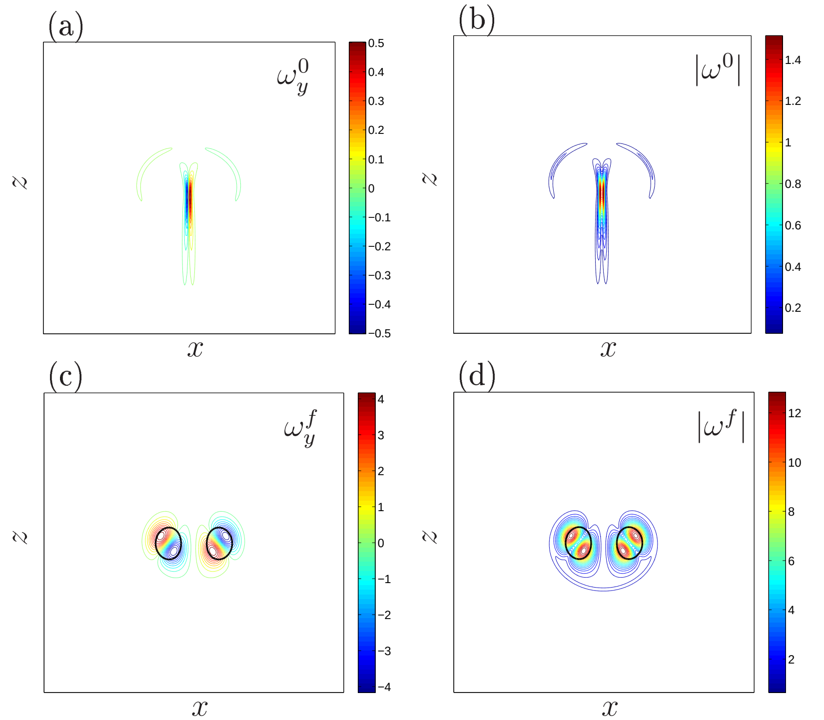

FIG. 3.11 – **(a)-(b) Optimal initial perturbations and (c)-(d) optimal responses for** $Fr = \infty$ **at** $k_y a_0 = 0.2$ **for the symmetric case at** $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ - *Isovalues of the (a)-(c) axial vorticity of the (a) optimal initial perturbation* ω_y^0 *and the (c) optimal response* ω_y^f *at the time horizon* $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ *and (b)-(d) enstrophy f the (b) optimal initial perturbation* ω_y^0 *and the (d) optimal response* ω_y^f *at the time horizon* $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ *in the* (x, z) *plane normed by the square root of the total energy of the optimal initial perturbation. The heavy black lines correspond to the isocontours* $\omega_{By}/\omega_{By}^{max} = \pm exp(-1)$. *The size of the domain shown is* $6b_0 \times 6b_0$ *whereas the computation domain is* $12b_0 \times 12b_0$, *where* b_0 *is the initial separation distance between the vortices. The* z *axis of the initial perturbation is different from the optimal response one since the base flow has propagated downwards between* $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 0$ *and* $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$.

shifted to smaller values when the time horizon is larger. For both symmetries, the position of the maximum of the peaks $k_y a_0 = 1.6$ at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ is shifted to the smaller value $k_y a_0 = 1.4$ at larger time $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$. The bands are narrower when time horizon is larger, i.e. from $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ to $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$. This narrowing with time suggests that, if viscous damping were neglected, the strong selectivity of the elliptic mode appears progressi-

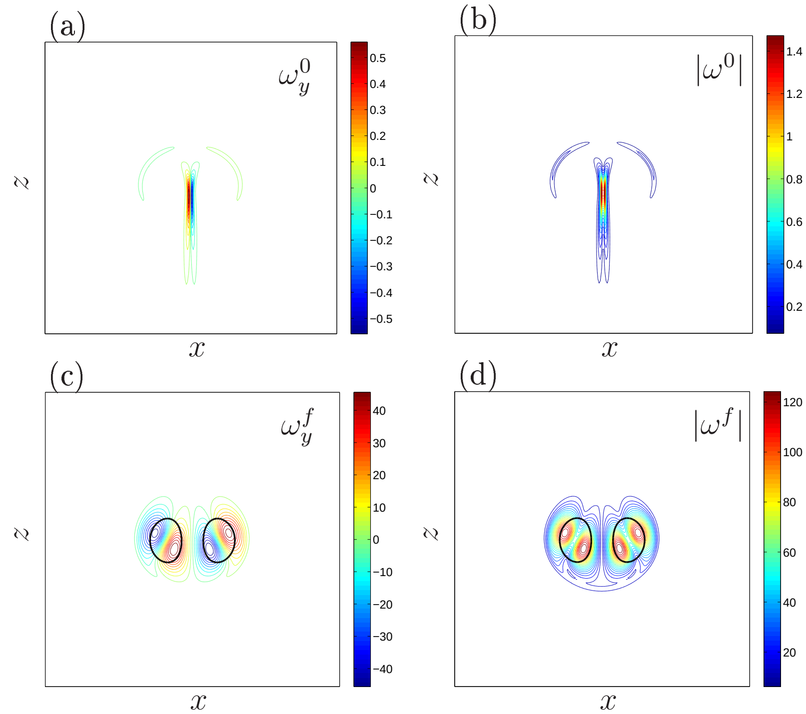

FIG. 3.12 – **(a)-(b) Optimal initial perturbations and (c)-(d) optimal responses for $Fr = \infty$ at $k_y a_0 = 0.2$ for the symmetric case at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$** - *Same legend as Figure 3.11 but for $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$.*

vely when the time horizon is slided to infinity. The mean transient growth rates of the antisymmetric case are larger than the symmetric ones at both instants with a difference of 19% at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and of 15% at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ at the maximum of the bands.

Figures 3.15, 3.17, 3.16 and 3.18 display the optimal initial perturbations and optimal responses near the maximum of the peaks $k_y a_0 = 1.2$ at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ for both symmetries. At the two instants and for both symmetries, the optimal response is located inside the core of the vortices with intense enstrophy perturbations in the inner part of the core (Figures 3.15(d), 3.17(d), 3.16(d) and 3.18(d)). The axial vorticity of the optimal response (Figures 3.15(c), 3.17(c), 3.16(c) and 3.18(c)) consists of a dipole neasted inside the core and a dipole at the periphery of each base flow vortex. Superposed to the base flow, this optimal response would induce a displacement of the inner and outer parts of the core in opposite directions. The optimal response (Figures 3.15(c), 3.17(c), 3.16(c) and 3.18(c)) inside each vortex core is similar to the eigenmode of the first elliptic insta-

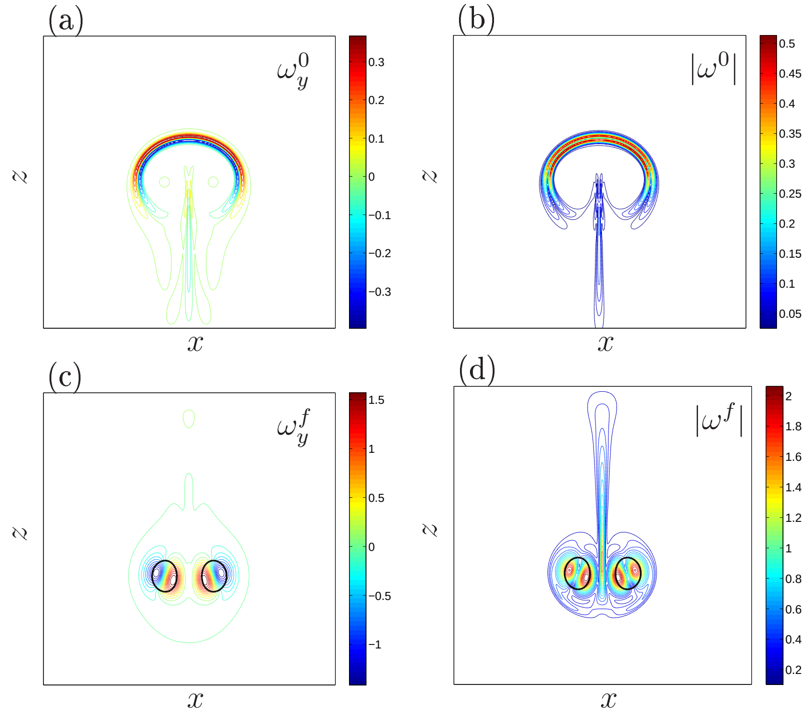

FIG. 3.13 – **(a)-(b) Optimal initial perturbations and (c)-(d) optimal responses for $Fr = \infty$ at $k_y a_0 = 0.2$ for the antisymmetric case at** $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ - *Same legend as Figure 3.11*

bility resonance also discussed on Figure 3.8(a). However, at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$, we observe large enstrophy perturbations on the stretching manifold of the upper stagnation point for the antisymmetric case (Figure 3.15(d)) and on the stretching manifold of the lower stagnation point for the symmetric case (Figure 3.17(d)), whereas at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ the enstrophy of the optimal response is localized only in the vortex cores (Figures 3.16(d) and 3.18(d)). These perturbations at the early time $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ correspond to weak vertical vortices in the lee of the dipole in the antisymmetric case and to stronger spanwise vortices in front of the dipole for symmetric perturbations. At $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$, the size of the optimal response (Figure 3.16(c)) is larger than at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ but comparison with the bold line showing the actual size of the vortices cores at each instant shows that the final perturbation (the optimal response) is adjusted to the vortex core size at that instant, core which has grown by viscous diffusion. For the antisymmetric case, the outer parts of the axial vorticity of the optimal response (Figure 3.16(c)) located between the two vortices have merged since, at that time, the base

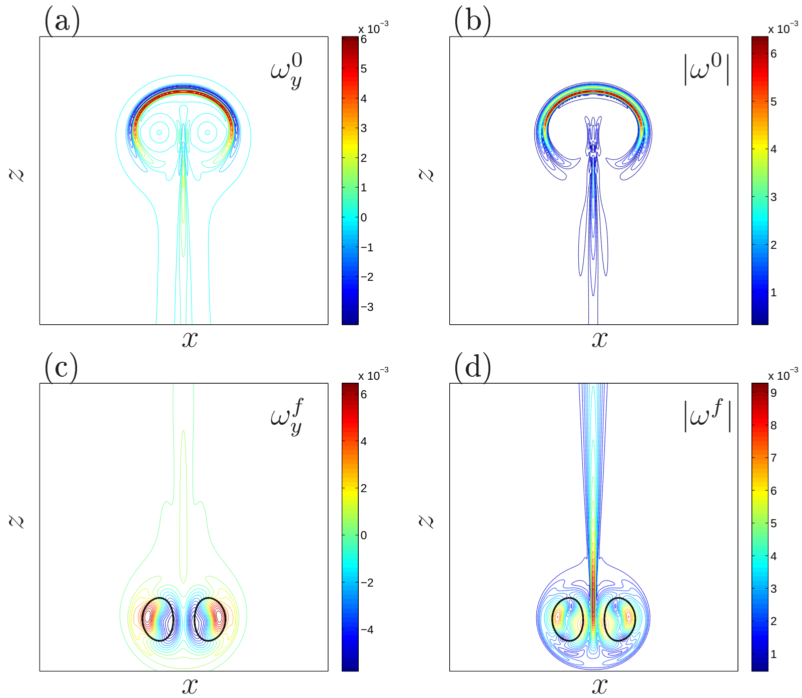

FIG. 3.14 – **(a)-(b) Optimal initial perturbations and (c)-(d) optimal responses for $Fr = \infty$ at $k_y a_0 = 0.2$ for the antisymmetric case at** $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ - *Same legend as Figure 3.11 but for* $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$.

flow vortices are in contact (see the bold lines).

The optimal initial perturbations ((a) and (b) of Figures 3.15, 3.17, 3.16 and 3.18) are similar at both instants but differ for each symmetry. For the antisymmetric case ((a) and (b) of Figures 3.15 and 3.16), the enstrophy is intense on both upper and lower stagnation points, whereas for the symmetric case ((a) and (b) of Figures 3.17 and 3.18) it is intense only on the lower stagnation point when comparing Figures 3.15 and 3.16 to Figures 3.13 and 3.14, it is striking to note that initial perturbation shape is nearly independent of optimal.

The inviscid theoretical prediction for the elliptic instability of Le Dizès & Laporte [29] for a pair of frozen Lamb-Oseen vortices of aspect ratio $a/b = 0.2$ in an homogeneous fluid with a viscous damping [11] computed for $Re_\Gamma = 2400$ is plotted on Figure 3.10 with continuous lines. The maximum of the unstable band predicted by the theory is at the wavenumber $k_y a = 2.26$. This value is larger than the position $k_y a_0$ of the maximum of the bands computed at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$, which is shifted to a shorter value at the larger time $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ since the radius of the vortices is larger due to viscous diffusion. Both the vorticity distribution of the optimal response and the variation with the wavenumber k_y indicate that the growth rate of the perturbation is led by the elliptic instability. A part of the energy gain is due to the receptivity which does not vary between the two times horizon t considered since optimal initial perturbation are independent of time. The other part of the gain is due the unsteadiness of the flow, which seems to favors the antisymmetric mode, which has a 15% larger growth rate than the symmetric mode. The present result, that relies on no approximation, confirms the analysis of Sipp & Jacquin [47] who, assuming that the perturbation adjusts immediately to the instantaneous leading eigenmode, has demonstrated that the antisymmetric mode should dominate. The present study not only recovers that result but also validates the shape assumption since the optimal response is at each instant close to the elliptic eigenmode.

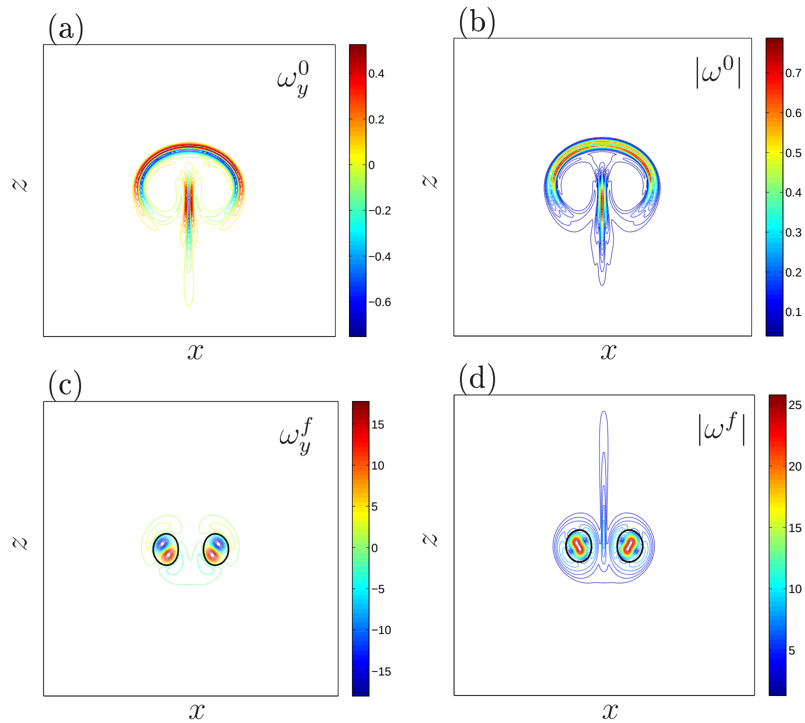

FIG. 3.15 – **(a)-(b) Optimal initial perturbations and (c)-(d) optimal responses for $Fr = \infty$ at $k_y a_0 = 1.2$ for the antisymmetric case at** $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ - *Same legend as Figure 3.11.*

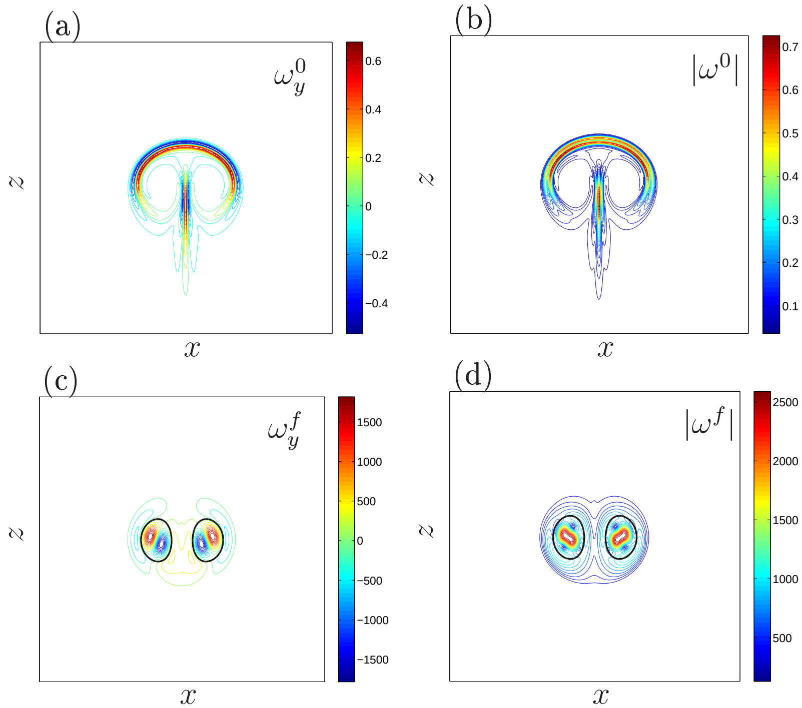

FIG. 3.16 – **Optimal initial perturbations (a)-(b) and optimal responses (c)-(d) for $Fr = \infty$ at $k_y a_0 = 1.2$ for the antisymmetric case at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$** - *Same legend as Figure 3.11 but for $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$.*

3.4.3 Stratified flows (Fr=10, 5, 2 and 1)

In this Section, the unsteadiness of the base flow is due, on top of the viscous diffusion, to the presence of the stratification. Figure 3.19 displays the optimal mean transient growth rates σ scaled by $\Gamma_0/2\pi b_0^2$, the initial strain imposed by one vortex on the other, for the antisymmetric (Figures 3.19(a)-(c)) and symmetric (Figures 3.19(b)-(d)) cases as function of the axial wavenumber k_y scaled by the initial vortex core radius a_0 at two instants $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ (Figures 3.19(a)-(b)) and $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ (Figures 3.19(c)-(d)) for $Re_{\Gamma_0} = 2400$ and for five Froude numbers $Fr = \infty$, 10, 5, 2 and 1. For $Fr = 1$, the optimal perturbations have been computed only at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ since, at the time $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$, the base flow primary vortices have been completely detrained. To compare with the linear stability analysis Section 3.3, it should be noted that Nt equals 0.4 and 1 for $Fr = 10$, 0.8 and 2 for $Fr = 5$ and 2 and 5 for $Fr = 2$ (these values are collected in Table 3.1).

Up to $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$, it is striking that the transient gain is very similar for all the Froude numbers considered except for $Fr = 1$, for which the

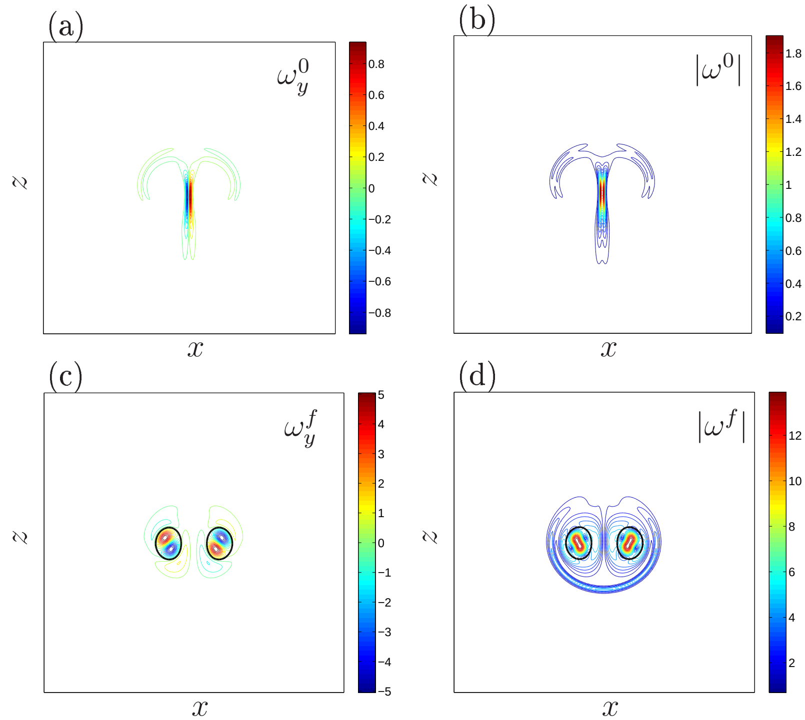

FIG. 3.17 – **Optimal initial perturbations (a)-(b) and optimal responses (c)-(d) for $Fr = \infty$ at $k_y a_0 = 1.2$ for the symmetric case at** $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ - *Same legend as Figure 3.11.*

vortices have collapsed by that time, suggesting that stratification does not affect the instability mechanism down to $Fr = 2$. The effect of the density perturbations in the dynamics may be evaluated by comparing the respective contribution of the potential and kinetic energy into the optimal perturbation and the optimal response at different instants. Such data are collected for selected wavenumbers in Tables 3.4, 3.5, 3.2 and 3.3.

In all the cases, except for Froude number equal to 1 at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ (which corresponds to $Nt = 4$, see Tables 3.4 and 3.2) and for Froude number equal to 2 at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ (which corresponds to $Nt = 5$, see Tables 3.5 and 3.3) the potential energy of the initial perturbation is less than 0.5 ‰. Even at this late time for $Fr = 2$ the initial potential energy never exceeds a few percent of the total energy. The effect of the initial density perturbation is therefore marginal and can be safely ignored for all time studied and all Froude number except $Fr = 1$. For Froude number equal to 1, the potential energy in the initial perturbation represents usually 5% of the total energy and raises only to 11% for symmetric mode at small wavenumber. Even

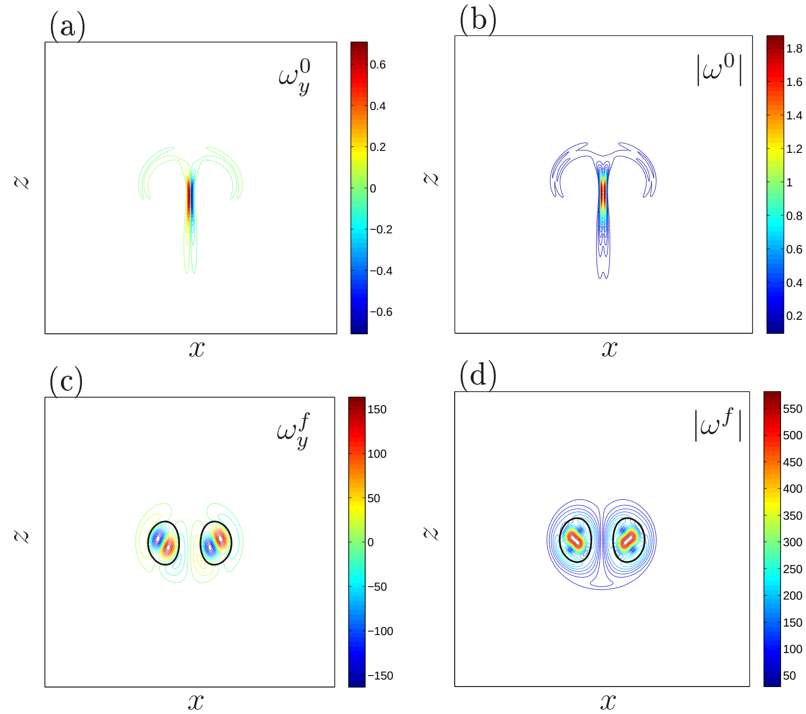

FIG. 3.18 – **Optimal initial perturbations (a)-(b) and optimal responses (c)-(d) for $Fr = \infty$ at $k_y a_0 = 1.2$ for the symmetric case at** $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ - *Same legend as Figure 3.11 but for* $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$.

for $Fr = 1$, the optimal initial perturbation is led by inertial effects and not by gravity effects. Therefore, initial density perturbation will not be presented here even for $Fr = 1$. The potential energy of the optimal response is negligible for $Fr > 2$ at time horizon $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ (Tables 3.4 and 3.2) and $Fr > 5$ at time horizon $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ (Tables 3.5 and 3.3). But it cannot be neglected for $Fr = 2$ or $Fr = 1$ at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and for $Fr = 5$ and $Fr = 2$ at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ for which it represents between 30% and 50% of the energy of the optimal response. This result based on potential energy contribution is coherent with the fact that mean growth rate curves (Figure 3.19) at time horizon $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$, does not vary with the stratification for $Fr = 10$ and $Fr = 5$ and for time horizon $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ for $Fr = 10$ only. It also agrees with the observation that the vorticity distribution of the optimal initial perturbation and optimal response in the stratified case for Froude numbers $Fr = 10$ and 5 at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and $Fr = 10$ at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ are identical to the unstratified case and will not be reproduced here to save space. For these cases, the previous discussion with, in particular, analysis of the short

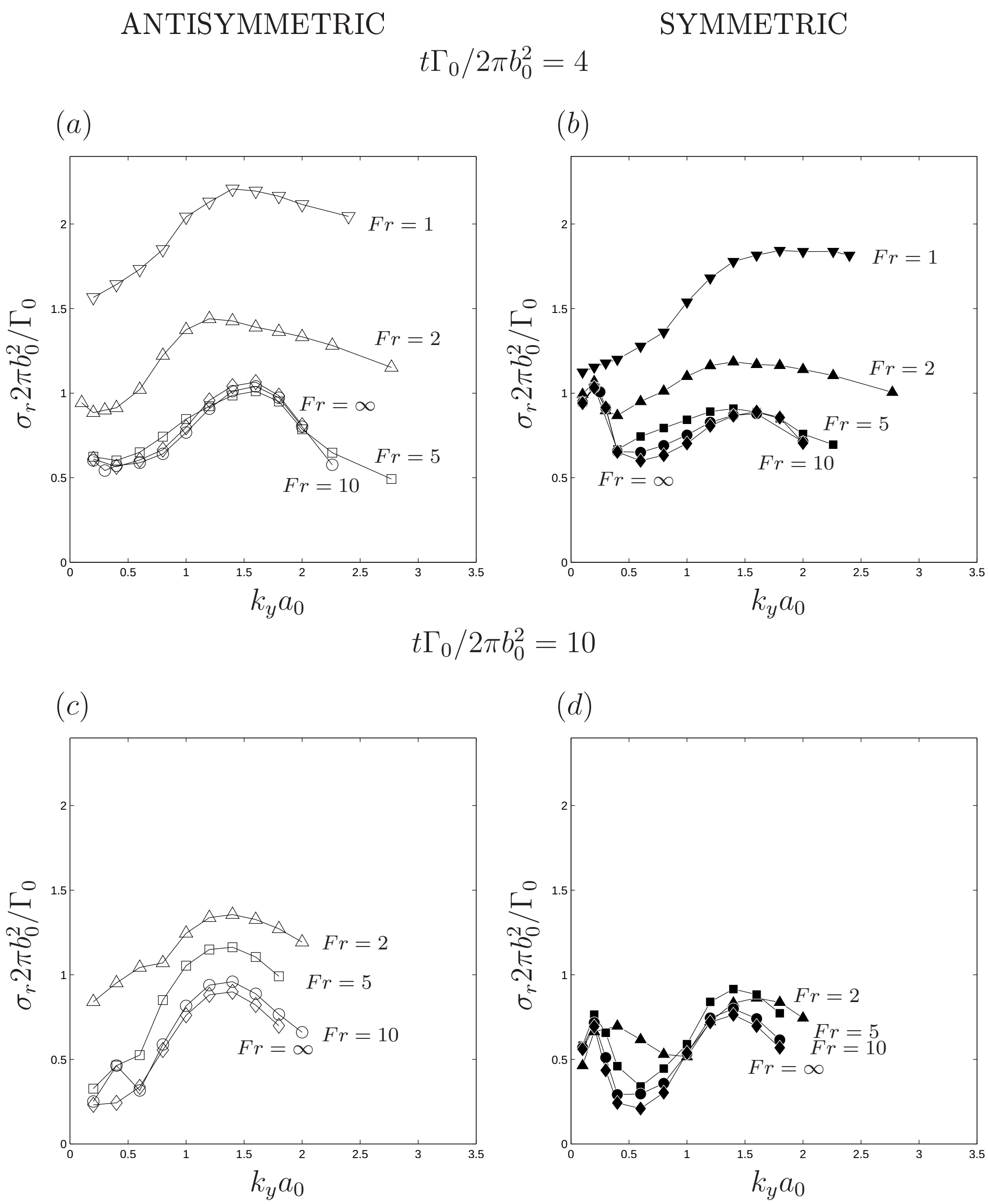

FIG. 3.19 – *Mean transient growth rates σ for the (a)-(c) antisymmetric and (b)-(d) symmetric cases as function of the axial wavenumber k_y scaled by the initial values of the radius a_0, the separation distance b_0 and the circulation Γ_0 of the vortices at two instants (a)-(b) $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and (c)-(d) $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ for $Re_{\Gamma_0} = 2400$ and for $Fr = \infty$ ($\Diamond$,$\blacklozenge$), $Fr = 10$ ($\circ$, $\bullet$), $Fr = 5$ ($\square$,$\blacksquare$), $Fr = 2$ ($\triangle$, $\blacktriangle$) and $Fr = 1$ (∇, $\blacktriangledown$).*

$t\Gamma_0/2\pi b_0^2$ \ Fr	1	2	5	10
4	4	2	0.8	0.4
10	10	5	2	1

TAB. 3.1 – *Values of Nt for each Froude number at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$.*

ANTISYMMETRIC

Fr	10	5	2	1
E_c^0	1	1	0.997	0.964
E_p^0	1.365×10^{-6}	7.250×10^{-5}	3.086×10^{-3}	3.624×10^{-2}
E^f	1.256×10^2	1.551×10^2	1.261×10^3	2.673×10^5
E_c^f	1.228×10^2	1.445×10^2	1.106×10^3	2.169×10^5
E_p^f	2.727	10.60	1.551×10^2	5.040×10^4

SYMMETRIC

Fr	10	5	2	1
E_c^0	1	1	0.994	0.886
E_p^0	4.429×10^{-7}	2.765×10^{-5}	5.475×10^3	0.114
E^f	3.947×10^3	4.112×10^3	5.680×10^3	1.016×10^4
E_c^f	3.913×10^3	3.974×10^3	4.715×10^3	7.450×10^3
E_p^f	33.95	1.383×10^2	9.648×10^2	2.713×10^3

TAB. 3.2 – **Energy normed by the initial total energy at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ at $k_y a = 0.2$.**

and long wave dynamics holds and we will show in the following how density effect will modify it. Table 3.1 reports the value of Nt corresponding to each case studied.

For the two instants for which optimal perturbations have been computed, the above discussion shows that potential energy becomes significant in the optimal response as soon as Nt is equal to 2, a feature that can be anticipated from the linear stability analysis for which instantaneous eigenmode involves both density and inertial effects when Nt is equal to 2. As for the unstratified case, we observe on Figure 3.19 two peaks for symmetric modes : one at small wavenumbers and one at wavenumbers of the order of the inverse of the vortex core size, and a single peak at large wavenumber for the antisymmetric case.

ANTISYMMETRIC

Fr	10	5	2
E_c^0	1	1	0.994
E_p^0	3.29×10^{-6}	1.524×10^{-4}	6.080×10^{-3}
E^f	1.486×10^{2}	7.719×10^{2}	2.173×10^{7}
E_c^f	1.073×10^{2}	5.270×10^{2}	1.117×10^{7}
E_p^f	0.413×10^{2}	2.449×10^{2}	1.056×10^{7}

SYMMETRIC

Fr	10	5	2
E_c^0	1	1	0.995
E_p^0	5.146×10^{-7}	2.970×10^{-5}	5.311×10^{-3}
E^f	1.663×10^{6}	4.389×10^{6}	6.222×10^{5}
E_c^f	1.414×10^{6}	2.189×10^{6}	2.778×10^{5}
E_p^f	2.490×10^{5}	2.200×10^{6}	3.444×10^{5}

TAB. 3.3 – **Energy normed by the initial total energy at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ at $k_y a = 0.2$.**

Long-wavelength dynamics

At low wavenumbers, as for the unstratified flow, the transient gains are large for both symmetries . For the symmetric case, the optimal transient growth rate presents a peak around $k_y a_0 = 0.2$ for the Froude numbers larger than or equal to 2 at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and equal to 5 at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$. This peak is of similar height for all Froude numbers.
Figure 3.20 displays the optimal perturbations at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ for the symmetric case at the maximum of the band $k_y a_0 = 0.2$ for the two Froude numbers $Fr = 2$ and $Fr = 1$. For $Fr = 2$, for which the mean transient growth rates are nearly equal to the unstratified flow ones, the enstrophy and the axial vorticity of optimal initial and final perturbations are very similar to the unstratified flow. The axial vorticity of the optimal response consists of a dipole on each vortex which corresponds to a symmetric displacement of the vortices as a whole. These dipoles are closer for $Fr = 2$ when compared to $Fr = \infty$ since the stronger stratification is the faster the vortices move closer together and the enstrophy of the optimal initial perturbations is intense in the middle of the vortices. The effect of the stratification is moderate since, for $Fr = 2$, the potential energy is less than 17% of the total energy as shown on Table 3.2. For $Fr = 1$, the symmetric initial and final perturbations at

ANTISYMMETRIC

Fr	10	5	2	1
E_c^0	1	1	0.999	0.938
E_p^0	3.702×10^{-7}	2.743×10^{-5}	1.068×10^{-3}	6.179×10^{-2}
E^f	4.166×10^3	3.377×10^3	6.805×10^4	4.238×10^7
E_c^f	4.152×10^3	3.350×10^3	6.019×10^4	3.663×10^7
E_p^f	13.30	26.53	7.854×10^3	5.743×10^6

SYMMETRIC

Fr	10	5	2	1
E_c^0	1	1	0.997	0.954
E_p^0	6.759×10^{-7}	4.463×10^{-5}	3.115×10^{-3}	4.597×10^{-2}
E^f	1.178×10^3	1.257×10^3	1.185×10^4	2.010×10^6
E_c^f	1.124×10^3	9.835×10^2	8.469×10^3	1.663×10^6
E_p^f	53.62	2.740×10^2	3.377×10^3	3.478×10^5

TAB. 3.4 – **Energy normed by the initial total energy at** $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ **at** $k_y a = 1.6$**.**

ANTISYMMETRIC

Fr	10	5	2
E_c^0	1	1	0.999
E_p^0	4.031×10^{-7}	2.631×10^{-5}	1.074×10^{-3}
E^f	5.281×10^7	4.158×10^9	3.408×10^{11}
E_c^f	4.358×10^7	2.036×10^9	2.006×10^{11}
E_p^f	9.228×10^6	2.122×10^9	1.402×10^{11}

SYMMETRIC

Fr	10	5	2
E_c^0	1	1	0.993
E_p^0	7.331×10^{-7}	5.536×10^{-5}	6.550×10^{-3}
E^f	2.792×10^6	4.972×10^7	3.350×10^7
E_c^f	2.322×10^6	1.739×10^7	1.596×10^7
E_p^f	4.700×10^5	3.233×10^7	1.754×10^7

TAB. 3.5 – **Energy normed by the initial total energy at** $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ **at** $k_y a = 1.6$**.**

$t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ are very different from larger Froude numbers since for $Fr = 1$ the base flow dipole is strongly deformed from the start. Still initial optimal perturbations are mainly inertial and the mean growth rate is very similar to the unstratified case despite the much more complex optimal response structure. The picture is radically different for the antisymmetric mode for which the mean growth rate strongly increases with decreasing Froude number. For $Fr = 2$, the mean growth rate of the antisymmetric mode equals the symmetric mode corresponding to the Crow instability and for $Fr = 1$, it supersedes the symmetric mode growth rate by 50% with a final optimal response dominated by kinetic energy. Figure 3.22(g) shows the optimal response vorticity distribution with a complex structure not easily interpreted. At farther time horizon $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ the features are similar but now the antisymmetric optimal mean growth rate becomes larger than the symmetric mode one for $Fr = 2$. In the response, both for $Fr = 5$ and $Fr = 2$ the potential energy is now as important as the kinetic energy. For the symmetric mode, the initial perturbation merely varies with the Froude number, showing that the initial development of the perturbation involves the Crow instability even though the shape of the final response differs strongly between $Fr = 5$, which strongly resembles the Crow mode with perturbation corresponding to a symmetric displacement of the vortices, and $Fr = 2$, with a final perturbation strongly elongated since the base flow vortices have been steered by buoyancy effects. Antisymmetric perturbations are more complex with an initial optimal perturbation for $Fr = 10$ close to the unstratified one when $Fr = 5$ which induces an optimal response corresponding to a zigzaging of the dipole with a strong contribution of the wake. For $Fr = 2$, the picture is different with a complex initial perturbation and a final response entirely concentrated in the wake corresponding to a periodic sinuous deformation (Figure 3.23(g)).

Short wavelength dynamics

Both the antisymmetric and symmetric optimal mean transient growth rate curves present an extremum respectively around $k_y a_0 = 1.6$ and $k_y a_0 = 1.4$ for all Froude numbers and all time horizons. Contrary to the long wavelength mode, the antisymmetric perturbation keeps having the leading growth rate for all the Froude numbers and all the times. At time horizons $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and 10, the mean growth rate of antisymmetric perturbations doubles when going from $Fr = \infty$ to $Fr = 1$ whereas the symmetric mode mean growth rate increases much more moderately. As Froude number decreases, the optimal initial perturbation evolves and its maximum enstrophy migrates from the upper contracting manifold to the symmetry axis per-

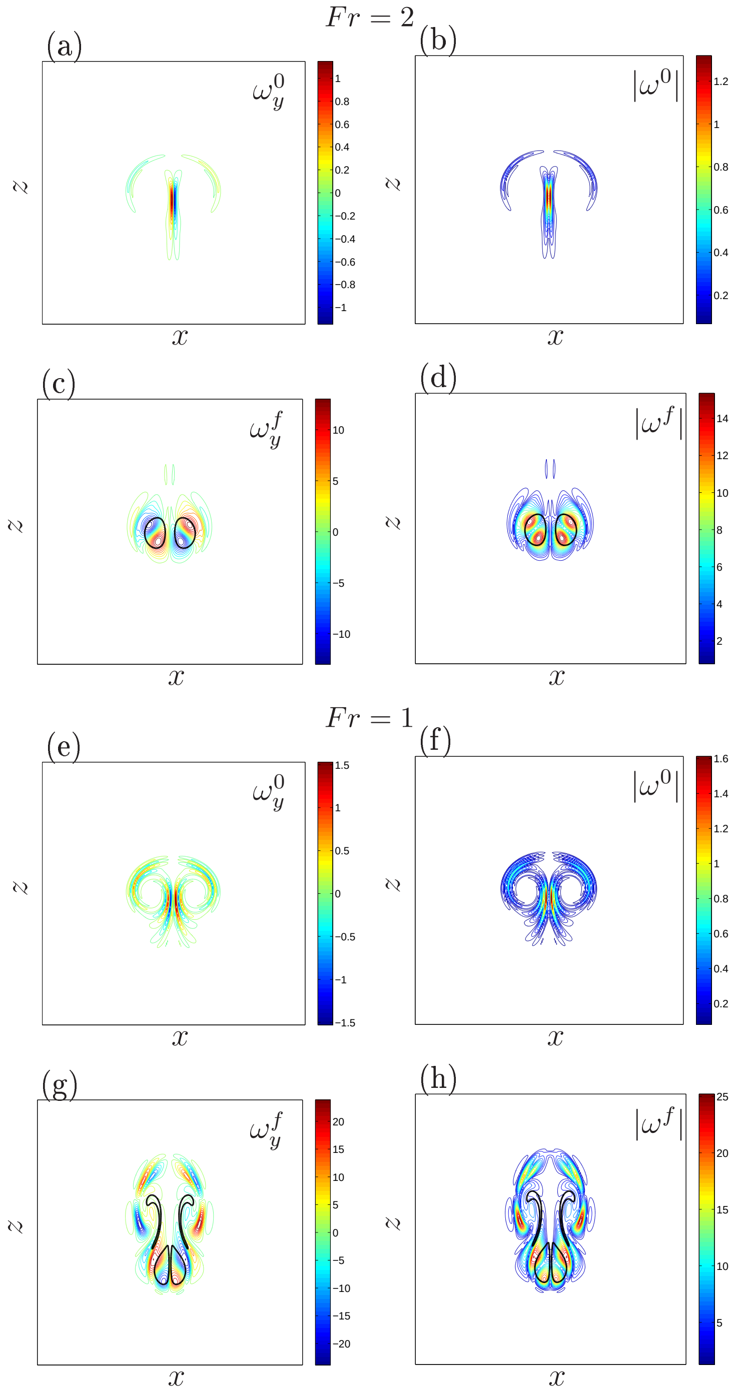

FIG. 3.20 – **(a)-(b)-(e)-(f) Optimal initial perturbations and (c)-(d)-(g)-(h) optimal responses at $k_y a = 0.2$ for the symmetric case at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$** - *Isovalues of the (a)-(c)-(e)-(g) axial vorticity of the (a)-(e) optimal initial perturbations ω_y^0 and the (c)-(g) optimal responses ω_y^f at the time horizon $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and (b)-(d)-(f)-(h) enstrophy (b)-(f) optimal initial perturbation $|\omega^0|$ and the (c)-(g) optimal response $|\omega^f|$ at the time horizon $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ in the (x, z) plane normed by the total energy of the optimal initial perturbation for (a)-(b)-(c)-(d) $Fr = 2$ and (e)-(f)-(g)-(h) $Fr = 1$. The heavy black lines correspond to the isocontours $\omega_{By}/\omega_{By}^{max} = \pm exp(-1)$. The size of the domain shown is $6b_0 \times 6b_0$ whereas the computation domain is $12b_0 \times 12b_0$. The z axis of the initial perturbation is different from the optimal response one.*

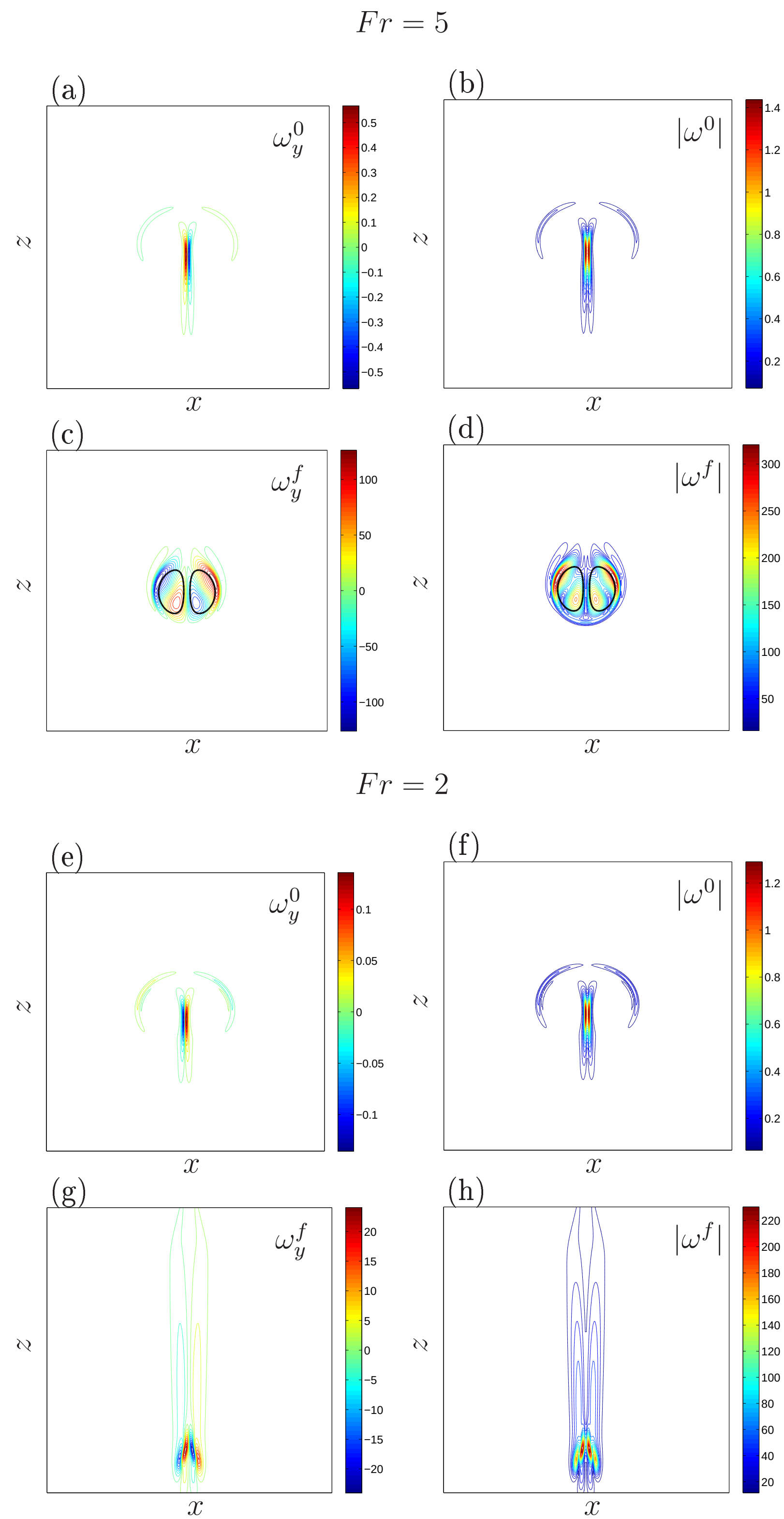

FIG. 3.21 – **(a)-(b)-(e)-(f) Optimal initial perturbations and (c)-(d)-(g)-(h) optimal responses at $k_y a = 0.2$ for the symmetric case at** $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ *- Same legend as Figure 3.20 but for* $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ *and* $Fr = 5$ *and* 2.

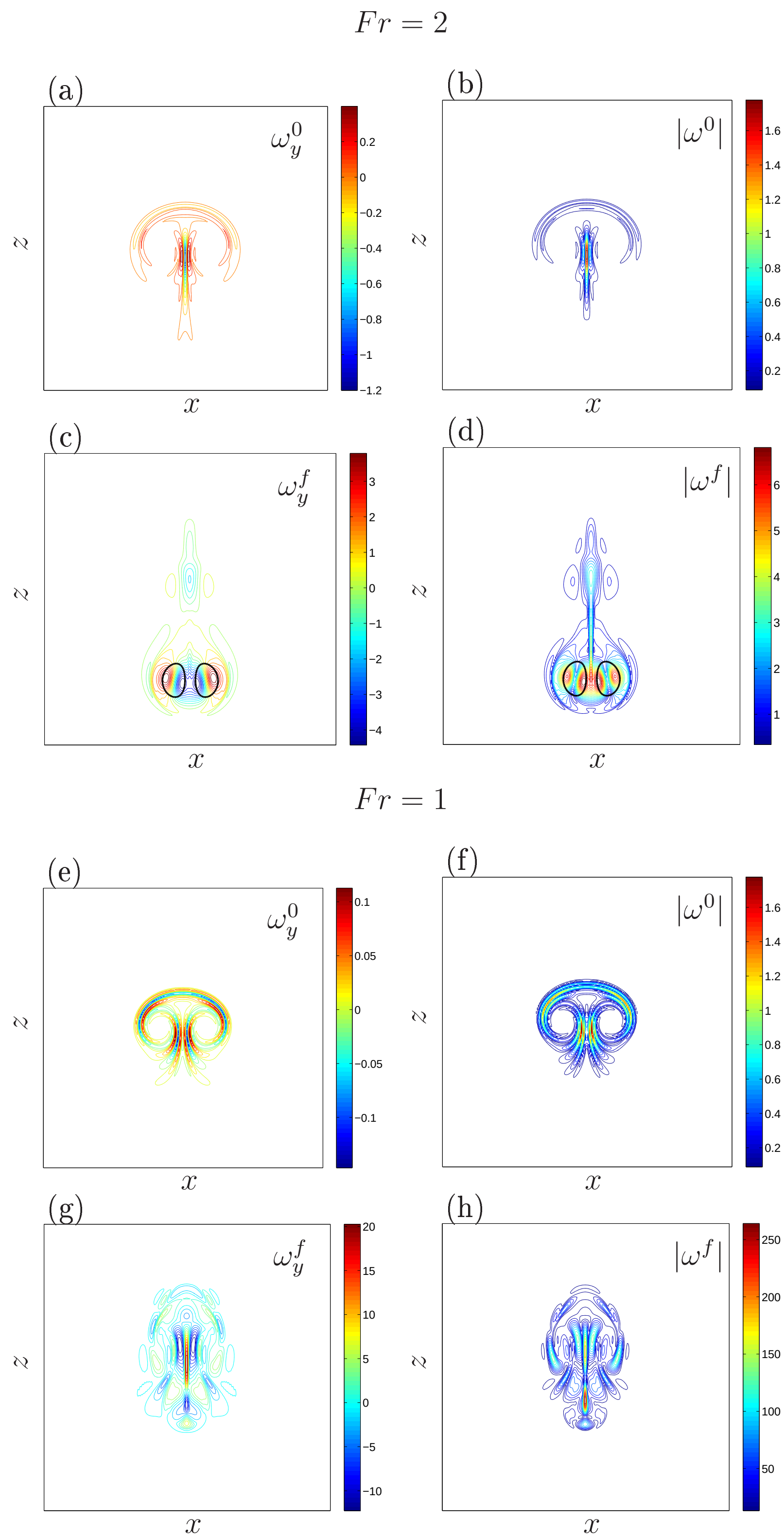

FIG. 3.22 – **(a)-(b)-(e)-(f) Optimal initial perturbations and (c)-(d)-(g)-(h) optimal responses at $k_y a = 0.2$ for the antisymmetric case at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$** - *Same legend as Figure 3.20.*

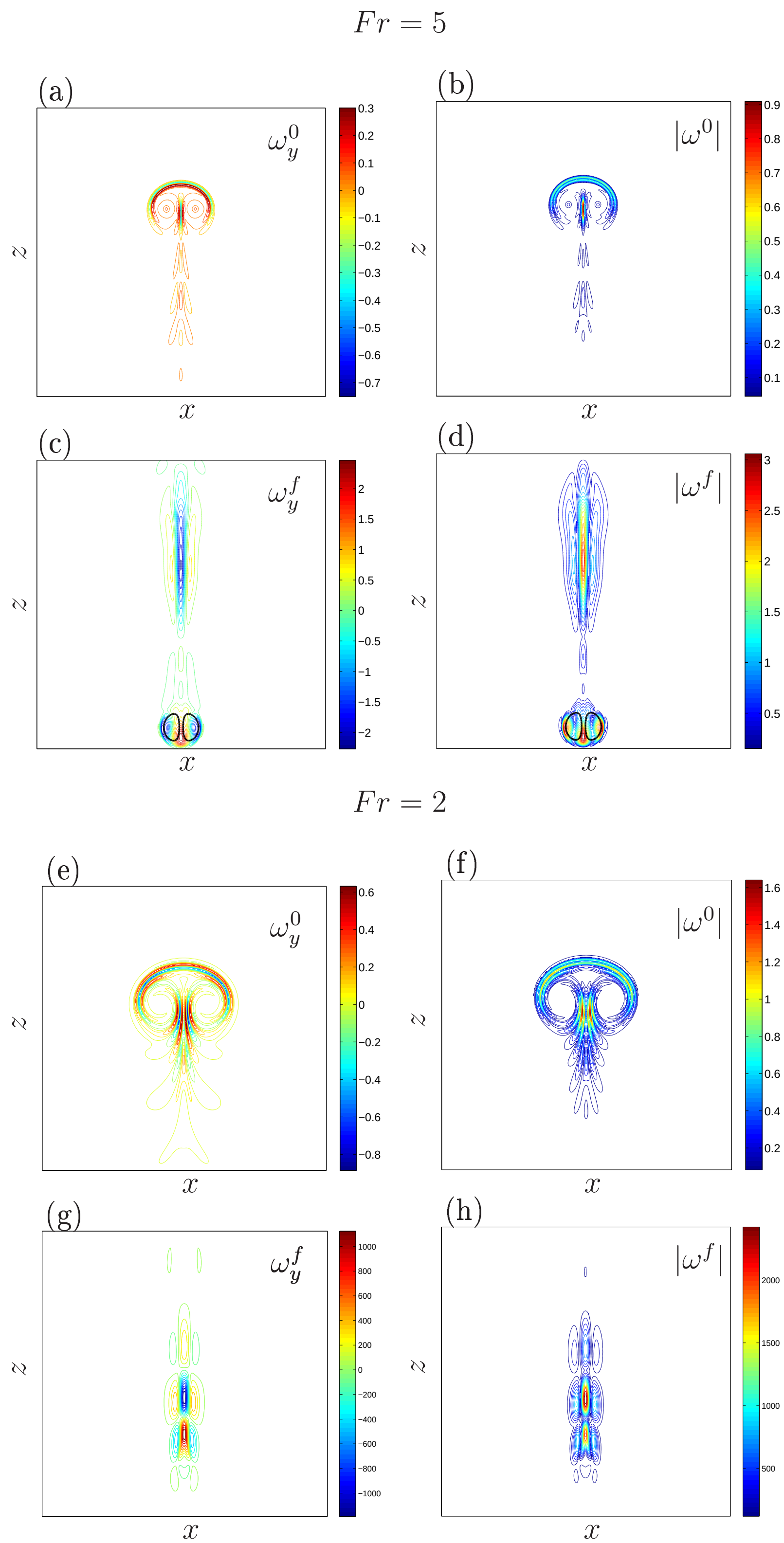

FIG. 3.23 – **(a)-(b)-(e)-(f) Optimal initial perturbations and (c)-(d)-(g)-(h) optimal responses at $k_y a = 0.2$ for the antisymmetric case at** $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ - *Same legend as Figure 3.20 but for* $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ *and* $Fr = 5$ *and* 2 *except that the size domain shown is* $10b_0 \times 10b_0$ *for Figures (a)-(b)-(c)-(d).*

turbation for antisymmetric mode (Figures 3.25(b) and (f)). Amazingly, symmetric perturbation follows exactly the opposite trend with a maximum migrating from the symmetric axis towards the upper contracting manifold (Figures 3.26(b) and (f)). In both cases, the response intensifies in the lee of the dipole. At the same time, the perturbation in each vortex core corresponds to the elliptic mode with the characteristic out of phase deformation between the vortex inner core and periphery. The increase of the mean growth rate with the Froude number is coherent with the linear stability analysis. The optimal response on the contrary shows the particular dynamics of the wake of the dipole that is not captured by the linear stability analysis but might explain the observation of Nomura *et al.* [35] of appearence of vertical vortices when Froude numbers was equal to 2. As for the long wavelength dynamics discussed above, if density perturbations are negligible at time horizon $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$, equipartition is archieved both for $Fr = 2$ and 5 at time horizon $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ but for $Fr = 5$ the vorticity of the optimal response is still reminiscent of the elliptic mode, suggesting that density perturbations respond to the inertial dynamics with little retroaction.

3.5 Conclusion

The effects of the stratification on the two- and three- dimensionnal dynamics of a Lamb-Oseen vortex pair has been investigated. The Froude numbers considered range from ∞ to 1.
The two-dimensionnal evolution of the flow is affected by the presence of the stratification, as shown by Garten *et al.* [16]. Here, a quantitative study of this flow has been performed. We observe that, due to the presence of the stratification the dipole parameters evolve as function of time and scale on the inverse of the Brunt-Väisälä frequency. This evolution implies the evolution of the dipole aspect ratio a/b, the external strain rate $\Gamma/2\pi b^2$ and the Reynolds number Re_Γ as function of time. For weak stratifications, the strain is not significantly altered by the presence of the stratification whereas it grows strongly for moderate to intense stratifications.
For weak levels of stratifications, linear stability analysis, relying on a quasi-steady hypothesis, shows that Crow and elliptic instabilities are almost unaffected. The wavelength and the growthrates of these instabilities scale on the instantaneous parameters of the dipole.
For moderate to strong levels of stratifications, calculation of optimal perturbations shows that dynamics is mainly inertial at intermediate times. The effect of the buoyancy force is to alter the two-dimensionnal dynamics by reducing the separation distance between the vortice and thus to deform and bring closer the perturbations located on each vortex core. However, at larger times and for stronger stratifications, all the dynamics, driven by density effects, is concentrated in the wake of the dipole and not in the vortex cores, in the case of the short-wavelength instability. These results agrees with Nomura *et al.* [35] who observed in their direct numerical simulations

A. Validation of the direct-adjoint technique which takes into account the evolution of the base flow

The code which computes the optimal perturbations in stratified flows by a direct-adjoint technique which takes into account the evolution of the base flow was adapted from the direct-adjoint technique developped for the unstratified fluids with frozen base flow [11] by adding the density in the direct and adjoint equations and saving the base flow fields each $n\Delta t$ as already explained in Section 3.4. In order to validate our method, the results of the new code for an unstratified flow have been compared to the former one. For the former code, the aspect ratio of the dipole of the base flow was $a/b = 0.2$. Therefore, the optimal perturbations were computed for a dipole of initial aspect ratio $a_0/b_0 = 0.2$ for a Reynolds number $Re_{\Gamma_0} = 2000$ and for $Fr = \infty$ at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 1$. Between $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 0$ and $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 1$, the radius of the vortices has grown by 2% through viscous diffusion but the separation distance between the vortices and the circulation of the vortices has remained constant. The optimal perturbations at $t\Gamma/2\pi b^2 = 1$ on a dipole of aspect ratio $a/b = 0.2$ computed with the former code for $Re_{\Gamma_0} = 2000$ and for an homogeneous fluid, corresponding to the case 1 of Table 3.6, have been first compared to the optimal perturbations computed with the new code which takes into account the evolution of the base flow but the initial state, consisting in the elliptic counter-rotating vortices of aspect ratio $a/b = 0.2$ in the reference frame of the dipole, was read at $t = 0$ and fixed during the forward and backward integrations, corresponding to the case 2 of Table 3.6. The enstrophy of optimal initial perturbations (Figures 3.28(a) and 3.28(c)) and optimal responses (Figures 3.28(b) and 3.28(d)) are similar and the mean transient growth rates (cases 1 and 2 of Table 3.6) are equal. The case 1 of Table 3.6 has then be compared to the optimal perturbations computed with the new code which takes into account the evolution of the base flow with initial state consisting of two circular Lamb-Oseen vortices of initial aspect ratio $a_0/b_0 = 0.2$, which is read every $10\Delta t$ and computed every Δt via a linear interpolation as mentioned in Section 3.4.1, this corresponds to the case 3 of Table 3.6. The mean growthrate (case 3 of Table 3.6) is 2% lower than the case 1, which is in agreement with the growth of the radius of the vortices throught viscous diffuson : the position of the maximum is shifted to a shorter value and, consequently, the growthrate is smaller at $k_y a_0 = 2.26$ since it is not the maximum of the peak anymore. The choice of the value of n is a compromise between memory requirement and precision : the larger the n, the smaller the memory use for the storage of the base flow evolution but the larger the imprecision. Therefore, the accuracy of the computations has been tested for several values of n : the same computation as the case 3 is performed with the base flow read every $40\Delta t$ (case 4 of Table 3.6), $100\Delta t$ (case 5 of Table 3.6) and $200\Delta t$ (case 6 of Table 3.6). The optimal perturbations corresponding to the case 4 of Table 3.6 are displayed on Figures 3.28(e) and 3.28(f). The spatial distribution of the enstrophy of optimal initial perturbation and optimal response is similar to the case 1 (Figures 3.28(a) and 3.28(b)) except that the optimal response is at a lower height since the base flow vortices have propagated downwards between $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 0$ and $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 1$. The growth rate of the case 4 is equal to the case 3 one whereas it is lower by 0.5% for the case 5 and by 1% for the case 6. The value of n has been chosen equal to 40 for $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$ and to 100 for $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ which provides the best accuracy considering the greater use of memory.

case	1	2	3	**4**	**5**	6
n	0	0	10	**40**	**100**	200
$\sigma 2\pi b_0^2/\Gamma_0$	1.80	1.80	1.76	**1.76**	**1.75**	1.74

TAB. 3.6 – **Validation** - *Computational accuracy of the growth rate* $\sigma 2\pi b_0^2/\Gamma_0$ *for the antisymmetric case at* $k_y a = 2.26$ *for* $Re_\Gamma = 2000$ *and* $Fr = \infty$*. The bold cases correspond to the values of* n *chosen for the computation of optimal perturbations of Section 3.4.*

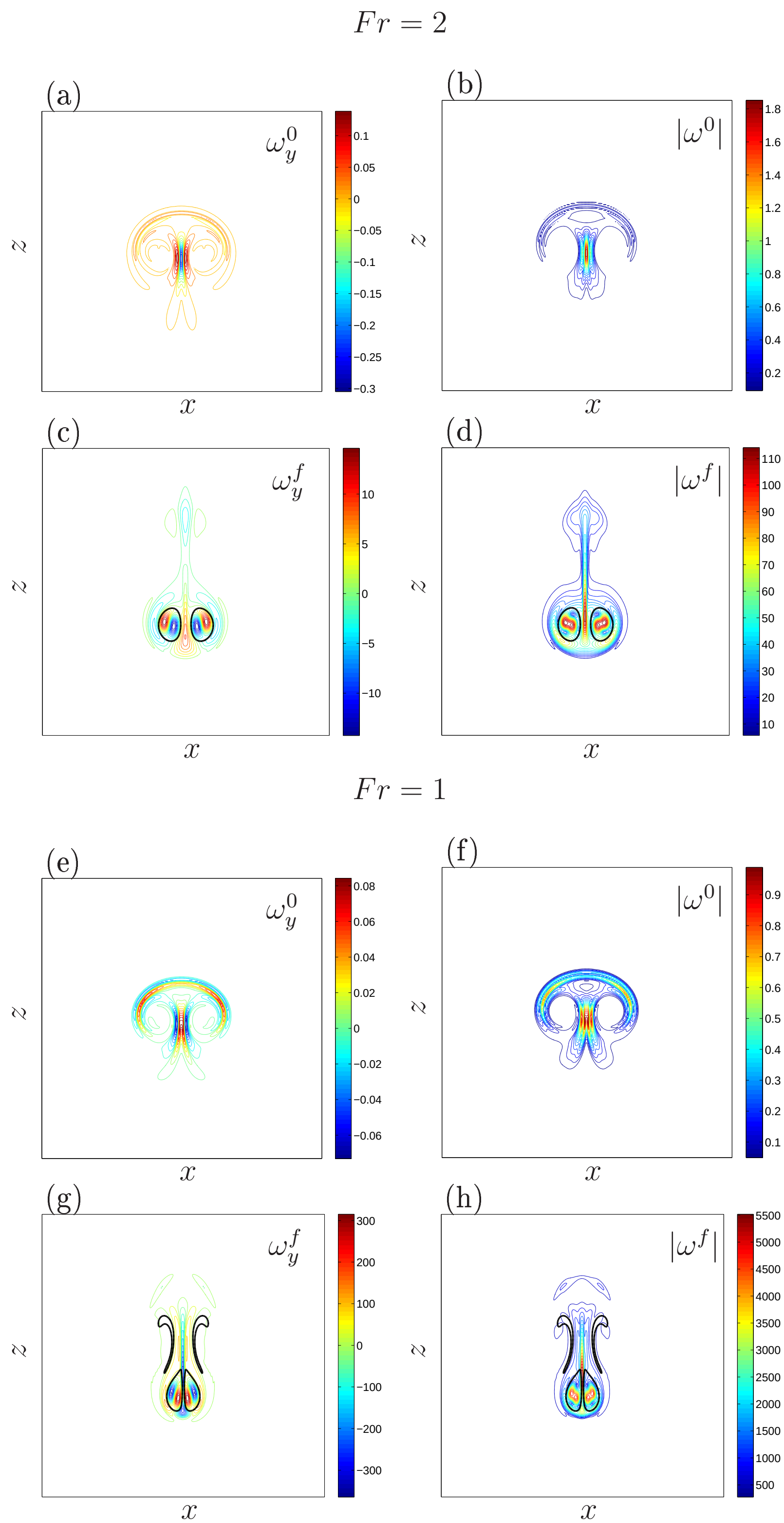

FIG. 3.24 – **(a)-(b)-(e)-(f) Optimal initial perturbations and (c)-(d)-(g)-(h) optimal responses at $k_y a = 1.6$ for the antisymmetric case at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$.** - *Same legend as Figure 3.20.*

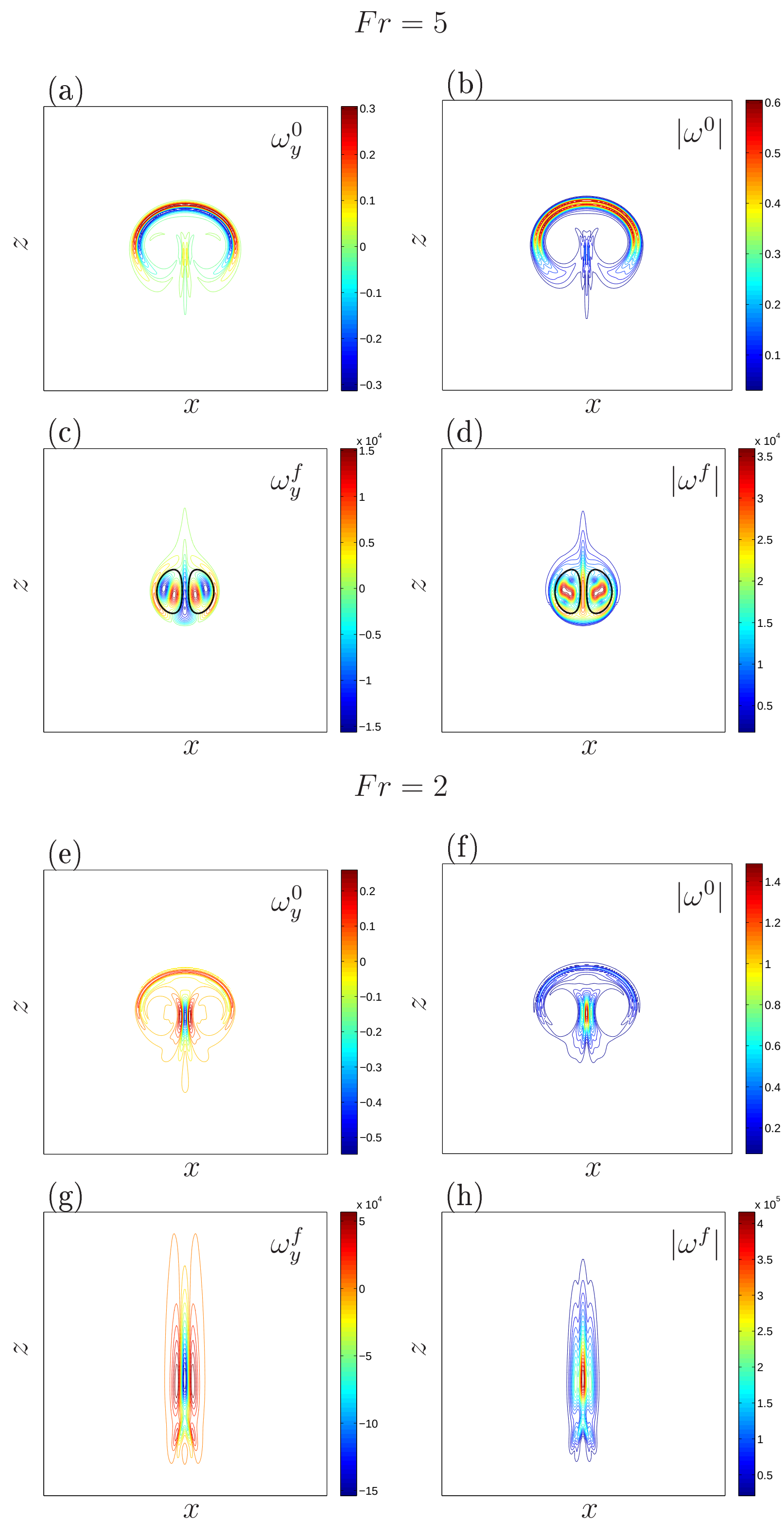

FIG. 3.25 – **(a)-(b)-(e)-(f) Optimal initial perturbations and (c)-(d)-(g)-(h) optimal responses at $k_y a = 1.4$ for the antisymmetric case at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$.** - *Same legend as Figure 3.20 but for $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ and $Fr = 5$ and 2.*

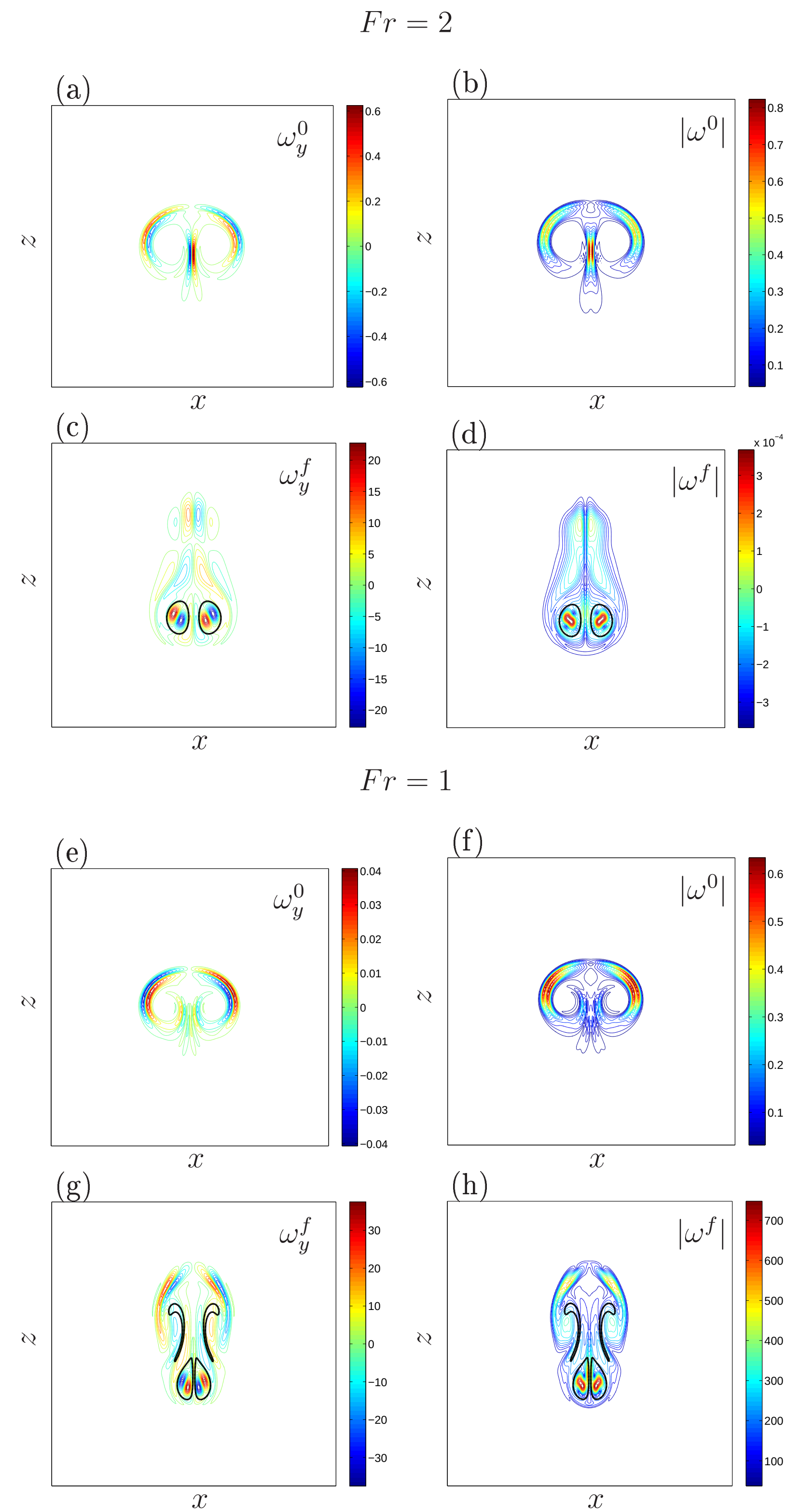

FIG. 3.26 – **(a)-(b)-(e)-(f) Optimal initial perturbations and (c)-(d)-(g)-(h) optimal responses at $k_y a = 1.6$ for the symmetric case at $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 4$.** *- Same legend as Figure 3.20.*

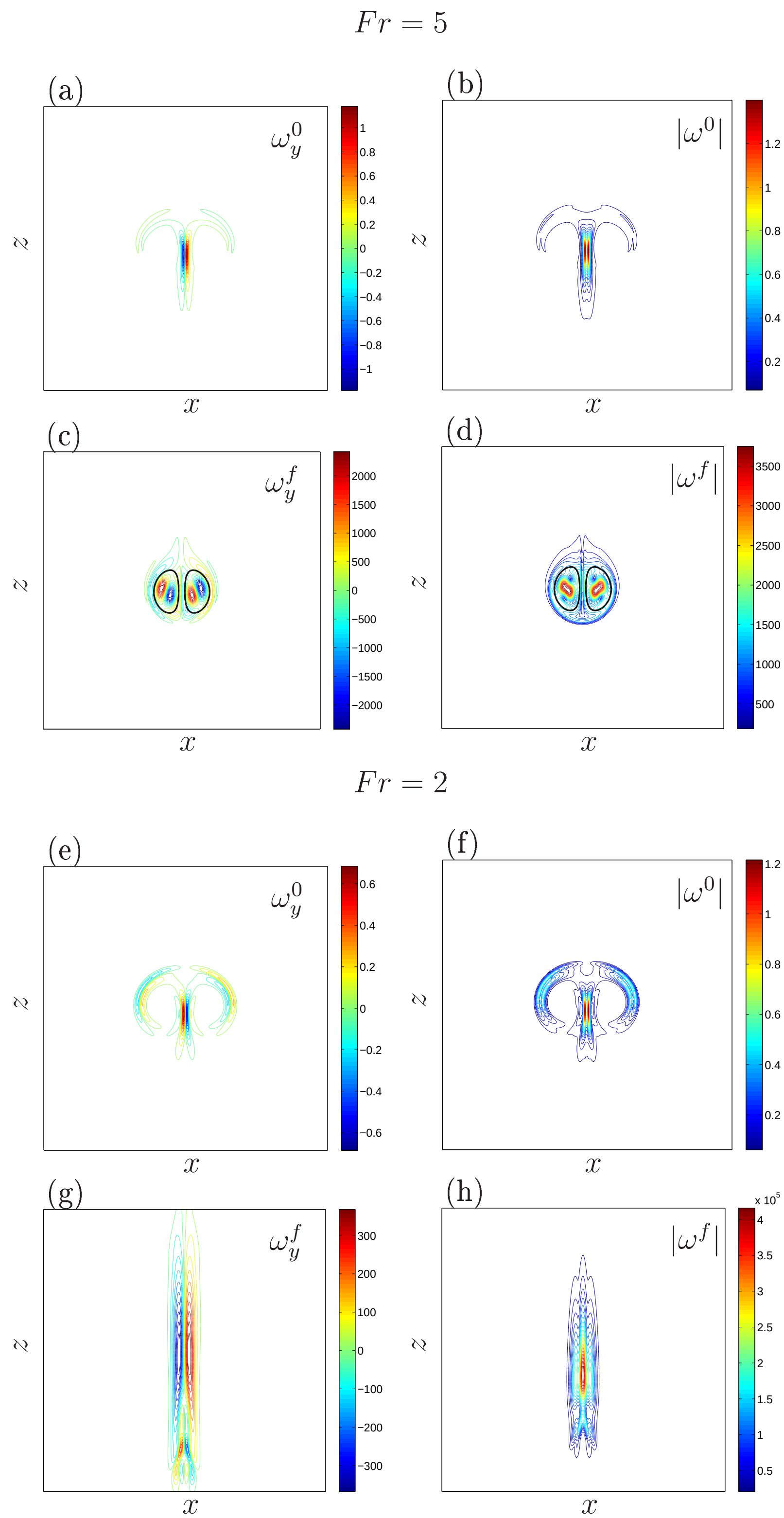

FIG. 3.27 – **Optimal initial perturbations (a)-(b)-(e)-(f) and optimal responses (c)-(d)-(g)-(h) at** $k_y a = 1.4$ **for the symmetric case at** $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$**.** - *Same legend as Figure 3.20 but for* $t\Gamma_0/2\pi b_0^2 = 10$ *and* $Fr = 5$ *and 2.*

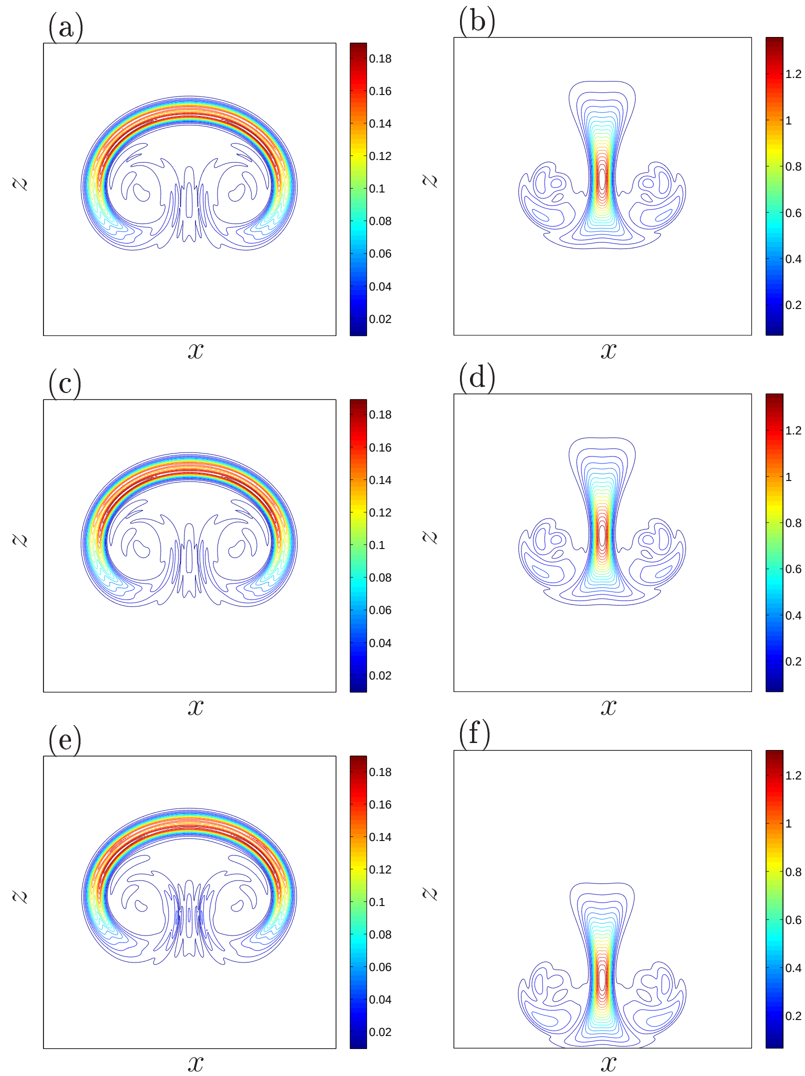

FIG. 3.28 – **Validation -** *Enstrophy of (a)-(c)-(e) the optimal perturbation and (b)-(d)-(f) the optimal response of the antisymmetric case at the maximum of the elliptic instability band* $k_y a = 2.26$ *for* $Re_\Gamma = 2000$ *and* $Fr = \infty$ *at* $t = 1$. *(a) Former code (Donnadieu et al. [11]) which doesn't take into account the evolution of the base flow. - (b) New code which takes into account the evolution of the base flow but the initial state, consisting in the elliptic counter-rotating vortices of aspect ratio* $a/b = 0.2$ *in the reference frame of the dipole, is read at* $t = 0$ *and fixed during the forward and backward integrations. - (c) New code which takes into account the evolution of the base flow, which is read every* $40\Delta t$. *The size of the domain shown is* $3b \times 3b$ *whereas the computation domain is* $3b \times 3b$ *for (a)-(b) and* $6b \times 6b$ *for (c)-(d)-(e)-(f).*

Chapitre 4

Expériences

Ce chapitre présente des résultats expérimentaux obtenus en partie avec Julien Labaune durant son stage de 2è année de Magistère de Physique de l'ENS Lyon. L'objectif de cette étude expérimentale était d'observer l'influence de la stratification verticale sur le développement des instabilités tridimensionnelles sur une paire de tourbillons contra-rotatifs horizontaux. La paire de tourbillons horizontaux est produite par la fermeture de deux volets horizontaux selon un dispositif similaire à celui utilisé par Leweke & Williamson [31] dans leur étude de l'instabilité de Crow et de l'instabilité elliptique en milieu neutre. La stratification selon la verticale est réalisée en remplissant la cuve d'eau stratifiée en salinité avec une méthode des deux bacs. Ce dispositif permet de faire varier les paramètres caractéristiques de l'écoulement en modifiant soit la vitesse de fermeture des volets, soit l'intensité du gradient vertical de densité. Cependant, la gamme des paramètres accessibles est limitée. La dynamique du sillage tourbillonnaire est visualisée grâce à de la fluorescéine. Après avoir décrit le dispositif expérimental utilisé pour réaliser les expériences, les résultats sont présentés dans une deuxième partie d'abord en milieu homogène puis en milieu stratifié.

4.1 Dispositif expérimental

4.1.1 Génération et visualisation des tourbillons

Les expériences ont été réalisées dans une cuve carrée en verre de $1m$ de côté et de $90cm$ de hauteur remplie, selon les expériences, soit d'eau claire, soit d'eau stratifiée en salinité sur une hauteur de $70cm$. La paire de tourbillons horizontaux est créée en fermant deux volets horizontaux dont le mouvement est imposé par un moteur pas à pas contrôlé par ordinateur. Ces volets sont similaires à ceux utilisés par Leweke & Williamson [31] et ont une longueur de $90cm$, occupant ainsi presque toute la longueur de la cuve. Ils sont maintenus au-dessus de la cuve grâce à un système de câbles reliés à un moteur qui permet de les faire descendre lentement dans la cuve et de les immerger complètement. Les deux volets sont immergés, initialement parallèles. A l'instant initial, ils sont mis en rotation symétriquement et tournent d'un angle prédéfini α, entraînant la formation d'une paire de tourbillons qui s'éloigne des volets, se déplaçant par induction mutuelle. Le taux de rotation des volets décroît linéairement jusqu'à zéro durant le mouvement de fermeture, ce qui est à l'origine de la création de deux petits tourbillons à l'arrêt du mouvement. L'angle de fermeture est fixé égal à 14 (Billant & Chomaz [5]), valeur suffisamment élevée pour que ces deux petits tourbillons soient piégés à l'intérieur des volets et suffisamment faible pour éviter une forte expulsion du fluide intérieur à la fin du mouvement des volets. Seul le temps de fermeture des flaps a été varié : la taille des flaps fixe l'échelle verticale du dipôle et l'angle ainsi que le temps de fermeture des volet fixent la vitesse initiale de la paire de tourbillons. Le seul paramètre caractéristique du dipôle pouvant être modifié est donc sa vitesse. Son rayon et l'écart entre les deux tourbillons sont eux fixés. Afin de diminuer les effets de bords, des plaques s'étendant sur la largeur des volets ont été placées à leurs deux extrémités (voir Figure 4.1(a)). En effet, sans la présence de ces plaques, un écoulement se propageait selon l'axe des tourbillons du dipôle à partir des extrémités des tourbillons, détruisant la paire de tourbillons. Cet écoulement est ainsi réduit et les instabilités ont donc le temps de se développer avant la destruction des tourbillons.

Afin de visualiser la paire de tourbillons, du colorant fluorescent est peint à l'intérieur des volets horizontaux lorsque ceux-ci sont hors de l'eau. Une fois le colorant sec, les volets sont descendus lentement dans la cuve. A la fermeture des volets, le colorant fluorescent est entraîné par les tourbillons, permettant ainsi la visualisation de l'écoulement, éclairé par deux lampes UV placées sous la cuve. Une caméra placée dans un plan parallèle à l'axe des tourbillons (plan (x, z) de la Figure 4.1(b)) permet de suivre l'évolution temporelle de la paire de tourbillons et ainsi d'observer le développement des instabilités.

4.1.2 Méthode de stratification

Le profil de densité linéaire est obtenu par une méthode classique de remplissage avec deux réservoirs (décrit dans Oster & Yamamoto [37]). La Figure 4.2 représente le schéma du système de réservoirs et de pompes utilisé pour établir le gradient vertical linéaire de densité dans la cuve. Un premier

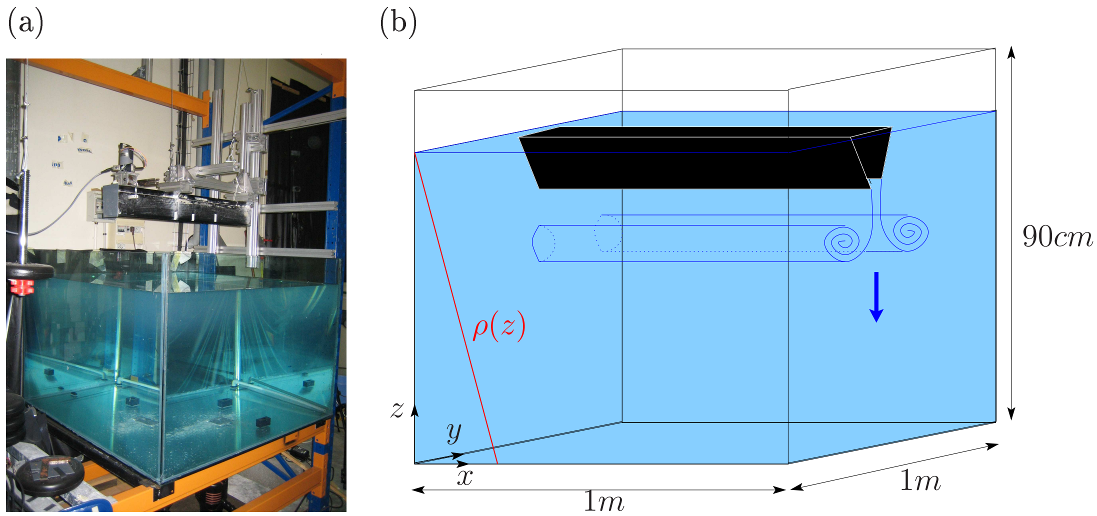

FIG. 4.1 – *(a) Photographie de la cuve utilisée pour réaliser les expériences. On peut voir les deux volets horizontaux parallèles maintenus par des câbles au-dessus de la cuve ainsi que le moteur qui contrôle leur fermeture. A l'extrémité, une des plaques utilisée pour minimiser les effets de bords est également visible. (b) Schéma du montage expérimental.*

réservoir est rempli d'eau salée (réservoir (1)) tandis qu'un second est rempli d'eau claire (réservoir (2)). L'eau salée du réservoir (1) est pompée dans le réservoir (2) d'eau moins dense qui, après mélange, est pompée dans la cuve expérimentale. Les deux pompes sont des pompes volumétriques à débit contrôlé et c'est le réglage de ces deux débits qui permet d'obtenir un profil de densité linéaire à la fréquence de Brunt-Väisälä voulue.

La détermination de la fréquence de Brunt-Väisälä N s'effectue en mesurant directement la densité $\bar{\rho}(z)$ à l'aide d'un réfractomètre par prélèvements d'eau dans la cuve à différentes hauteurs. La fréquence de Brunt-Väisälä est ensuite calculée grâce à l'équation :

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\bar{\rho}}{dz}}$$

où ρ_0 est une densité de référence et g l'accélération de la pesanteur.

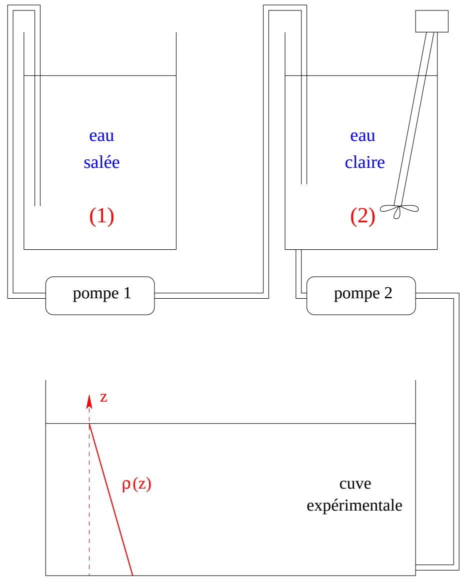

FIG. 4.2 – *Schéma du système de réservoirs et de pompes utilisé pour établir le gradient vertical linéaire de densité dans la cuve.*

4.2 Résultats

Le rayon initial a_0 des tourbillons générés par les volets horizontaux, approximés par la superposition de deux tourbillons de Lamb-Oseen (distribution gaussienne de vorticité), est de l'ordre de $1.3cm$ et la distance de séparation initiale entre les deux tourbillons b_0 est de l'ordre de $4cm$, ce qui correspond à un rapport d'aspect initial de l'ordre de $a_0/b_0 = 0.3$. La valeur de a_0 a été recalculée pour un tourbillon de Lamb-Oseen à partir des mesures réalisés par P. Billant [5] avec des volets similaires pour lesquelles les tourbillons était approximés par un dipôle de Lamb-Chaplygin de rayon R grâce à la formule $a_0 = 0.37R$ (Billant *et al.* [4]) alors que la valeur de b_0 a été déterminée expérimentalement. Dans la suite, le temps adimensionné est :

$$t^* = t\frac{W_0}{b_0}$$

où W_0 est la vitesse de translation du dipôle, le nombre de Reynolds est défini par :

$$Re = \frac{W_0 b_0}{\nu},$$

où ν est la viscosité cinématique de l'eau, et le nombre de Froude par :

$$Fr = \frac{W_0}{Nb_0}.$$

En milieu homogène, le seul paramètre de contrôle que l'ont peut faire varier est la vitesse de translation du dipôle W_0, tandis qu'en milieu stratifié les deux paramètres de contrôle sont la vitesse de translation du dipôle W_0 et la fréquence de Brunt-Väisälä N. Quand W_0 varie, le nombre de Reynolds et le nombre de Froude sont modifiés.

4.2.1 Milieu homogène

Les instabilités tridimensionnelles se développant sur une paire de tourbillons contra-rotatifs ont tout d'abord été étudiées expérimentalement en milieu homogène, la cuve étant remplie d'eau claire.
Une caméra placée dans un plan perpendiculaire à l'axe des tourbillons (plan (y, z)) nous a permis de déterminer la vitesse de descente de la paire de tourbillons W_0 ainsi que la distance de séparation entre les tourbillons qui, en fluide homogène, ne varient pas au cours du temps. La Figure 4.3 représente une photographie de la paire de tourbillons contra-rotatifs visualisée dans le plan (y, z) grâce au colorant fluorescent.
La caméra placée dans un plan parallèle à l'axe des tourbillons (plan (x, z))

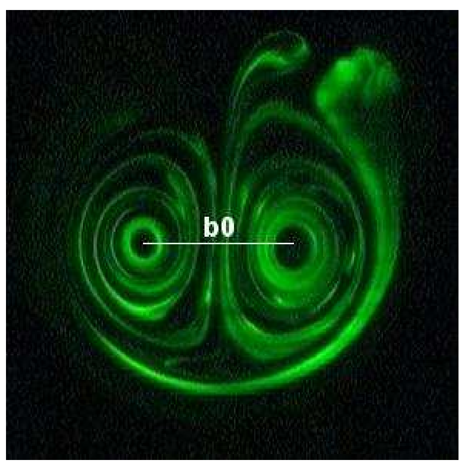

FIG. 4.3 – *Photographie de la paire de tourbillons contra-rotatifs générée par les volets horizontaux et visualisée dans le plan (y, z) grâce au colorant fluorescent.*

nous a permis d'observer le développement de l'instabilité elliptique antisymétrique à courte longueur d'onde, dont la longueur d'onde est de l'ordre de

la taille des coeurs des tourbillons, ainsi que de l'instabilité symétrique de Crow à grande longueur d'onde, c'est-à-dire dont la longueur d'onde est de l'ordre de la distance de séparation entre les tourbillons. Les Figures 4.4 et 4.5 représentent l'évolution temporelle de la paire de tourbillons visualisée grâce au colorant fluorescent dans le plan (x, z). Dans le cas de la Figure 4.4, le champ de la caméra visualisait la totalité de la paire de tourbillons afin d'observer le développement de l'instabilité à grande longueur d'onde alors que dans le cas de la Figure 4.5, le champ de la caméra ne visualisait qu'une partie de la paire de tourbillons (environ 1/4 de sa longueur) afin d'observer le développement de l'instabilité à courte longueur d'onde.
Sur la Figure 4.4(a), à $t^* = 0.8$, on observe une déformation sinusoïdale de la paire de tourbillons avec une longueur d'onde de l'ordre de $\lambda = 5 - 6b_0$ caractéristique de l'instabilité de Crow. Plus tard, à $t^* = 2.5$ (Figure 4.4(c)), on assiste à la reconnection des tourbillons puis à la formation d'anneaux à partir de $t^* = 3$ (Figure 4.4(d)).
Sur la Figure 4.5(a), à $t^* = 1.25$, on observe l'instabilité à grande longueur d'onde de Crow puis, à $t^* = 1.4$ (Figure 4.5(b)), apparaît une instabilité dont la longueur d'onde est beaucoup plus petite : c'est l'instabilité elliptique étudiée expérimentalement par Leweke & Williamson [31]. Sur la Figure 4.5, les traits plus marqués correspondent à la trace des coeur des tourbillons et on observe que le déplacement des centres de chacun des tourbillons se fait en opposition de phase. La longueur d'onde mesurée pour cette instabilité est de l'ordre de $\lambda/b_0 = 0.88$, cette valeur est en accord avec les simulations numériques directes de Laporte & Corjon [27] qui ont trouvé $\lambda/b_0 = 0.85 \pm 0.05$ et comparable aux mesures de Thomas & Auerbach [49] : $0.6 < \lambda/b_0 < 0.8$. Cependant, le nombre d'onde adimensionné par la valeur initiale du rayon des tourbillons est $k_y a_0 = 2.1$, ce qui est supérieur à la valeur mesurée par Leweke & Williamson [31] $k_y a_0 = 1.6$ pour $Re = 438$ et déterminée numériquement par Laporte & Corjon [27] $k_y a_0 = 1.87$ pour $Re = 382$, où a_0 est le rayon initial. Cette valeur est proche de la prévision théorique pour un tourbillon de Lamb-Oseen $k_y a = 2.26$ (Sipp & Jacquin [47]).

4.2.2 Milieu stratifié

Afin d'étudier l'influence de la stratification verticale sur le développement des instabilités tridimensionnelles sur la paire de tourbillons contrarotatifs horizontaux observées en milieu homogène dans le paragraphe 4.2.1, les expériences suivantes ont été menées en fluide stratifié en salinité. Le profil de densité vertical est linéaire et obtenu grâce à la méthode exposée au paragraphe 4.1.2. L'intensité de la stratification dépend du gradient vertical de densité et est déterminée par le nombre de Froude, qui dépend de la vitesse de translation de dipôle W_0 ainsi que de la fréquence de Brunt-Väisälä N. Des expériences ont d'abord été réalisées en milieu fortement stratifié puis avec une stratification modérée, le nombre de Froude variant de 0.2 à 1.5.

Stratification intense ($Fr < 1$)

Les premières expériences ont été réalisées avec un fort gradient vertical linéaire en densité : la stratification du milieu est donc très intense. La Figure 4.6 représente le profil vertical de densité. Il correspond à une fréquence de Brunt-Väisäla N égale à $1.3s^{-1}$, ce qui correspond à des nombres de Froude Fr inférieurs à 0.6. La Figure 4.7 représente l'évolution temporelle du dipôle tourbillonnaire visualisé dans le plan (y, z) dans le milieu fortement stratifié. On observe la formation des tourbillons générés par les volets horizontaux $1.8s$ après leur fermeture (Figure 4.7(a)). La forte stratification du milieu empêche leur descente et les tourbillons s'écartent entraînant l'extension horizontale de l'écoulement $2.5s$ après la fin de la fermeture des volets (Figure 4.7(b)) puis la destruction des tourbillons après $t = 3s$ (Figures 4.7(c) et Figure 4.7(d)). La paire de tourbillons ne peut donc pas pénétrer dans le milieu pour les nombres de Froude trop faibles et les instabilités tridimensionnelles n'ont pas le temps de se développer avant la destruction du dipôle. Pour pouvoir observer le développement de ces instabilités, il faut donc augmenter le nombre de Froude, ce qui revient soit à augmenter la vitesse initiale des tourbillons, soit à diminuer la fréquence de Brunt-Väisälä. La gamme de variation de W_0 n'est pas suffisante pour obtenir des nombres de Froude suffisament grands. Nous avons donc diminué la fréquence de Brunt-Väisälä en diminuant le gradient vertical de densité.

Stratification modérée ($Fr \sim 1$)

Les expériences suivantes ont donc été réalisées avec un gradient de densité vertical plus faible représenté Figure 4.8. Le gradient n'étant pas complètement linéaire sur toute la hauteur de la cuve, la fréquence de Brunt-Väisälä a été calculée à partir du gradient de densité existant entre les hauteurs 70 et $40cm$, les tourbillons ne descendant pas en dessous de $40cm$ au cours des expériences. La fréquence de Brunt-Väisälä ainsi mesurée est $N = 0.44s^{-1}$ permettant d'obtenir des nombres de Froude Fr de l'ordre de 1.

La Figure 4.9 représente l'évolution temporelle du dipôle tourbillonnaire visualisé grâce à une caméra située sous la cuve (plan (x, y)), la paire se déplace donc vers l'observateur. Les traits plus brillants observés sur la Figure 4.9 sont la marque du coeur de chacun des tourbillons. La Figure 4.9(a) représente le dipôle $2s$ après la fin de la fermeture des volets : les tourbillons sont rectilignes. A la Figure 4.9(b), soit à $t = 4s$, l'apparition d'une instabilité commence à déformer la paire de tourbillons. Cette déformation est plus marquée sur la Figure 4.9(c), correspondant à un instant où l'instabilité s'est développée. On observe que la structure interne des tourbillons est modifiée puisque le coeur (trace brillante de colorant) et la périphérie de chaque tourbillon sont déplacés en des directions radiales opposées. La longueur d'onde axiale est de l'ordre de $\lambda/b_0 = 0.75$, c'est-à-dire proche de celle observée en milieu homogène dans le cas de l'instabilité elliptique.

Plusieurs expériences ont été réalisées pour des nombres de Reynolds et de Froude différents, dans la gamme de valeurs autorisées par les variations de la vitesse de descente des tourbillons W_0. Les résultats sont récapitulés dans le Tableau 4.1 et la Figure 4.10 représente le dipôle tourbillonnaire visualisé dans le plan (x, z) au début de l'apparition de l'instabilité et à un instant où l'instabilité est bien développée. On observe la déformation du coeur des tourbillons avec un déplacement en opposition de phase pour chacun des deux tourbillons caractéristique de l'instabilité à courte longueur d'onde observée en milieu homogène. Les longueurs d'onde mesurées sont en moyenne

Expérience	0	1	2	3
Re	500	880	760	660
Fr	∞	1.3	1.1	0.9
λ/b_0	0.88	1.1	0.70	0.71
$k_y a_0$	2.1	1.7	2.7	2.65
t_i^*	1.4	1.1	1.2	1.0

TAB. 4.1 – *Tableau récapitulatif donnant les valeurs de nombre de Reynolds Re, du nombre de Froude Fr, de la longueur d'onde adimensionnée par la distance de séparation initiale entre les deux tourbillons λ/b_0 de l'instabilité à courte longueur d'onde et du temps d'apparition de l'instabilité t_i^* pour les différentes expériences.*

un peu plus courtes qu'en milieu homogène pour les nombres de Froude de l'ordre de 1. Dans leur simulations numériques directes, Nomura *et al* [35] ont également observé un raccourcissement de la longueur d'onde de l'instabilité à petite longueur d'onde pour $Fr = 1$. D'autre part, l'instant d'apparition de l'instabilité est un peu plus court qu'en milieu homogène, cependant la différence n'est pas significative alors que Nomura *et al* [35] ont observé que l'instabilité apparaissait d'autant plus tôt que la stratification était intense du fait de la diminution de la distance de séparation entre les tourbillons.

Ainsi, la stratification semble avoir peu d'effets sur le développement des instabilités. En effet, même pour des nombres de Froude de l'ordre de 1, l'instabilité elliptique se maintient avec une longueur d'onde qui varie peu. Cependant, ces conclusions s'appuient sur un nombre limité d'expériences et une étude plus approfondie serait nécessaire. D'autre part, le colorant ne permet de visualiser que la couche limite sur les volets et le sillage n'est donc pas visible.

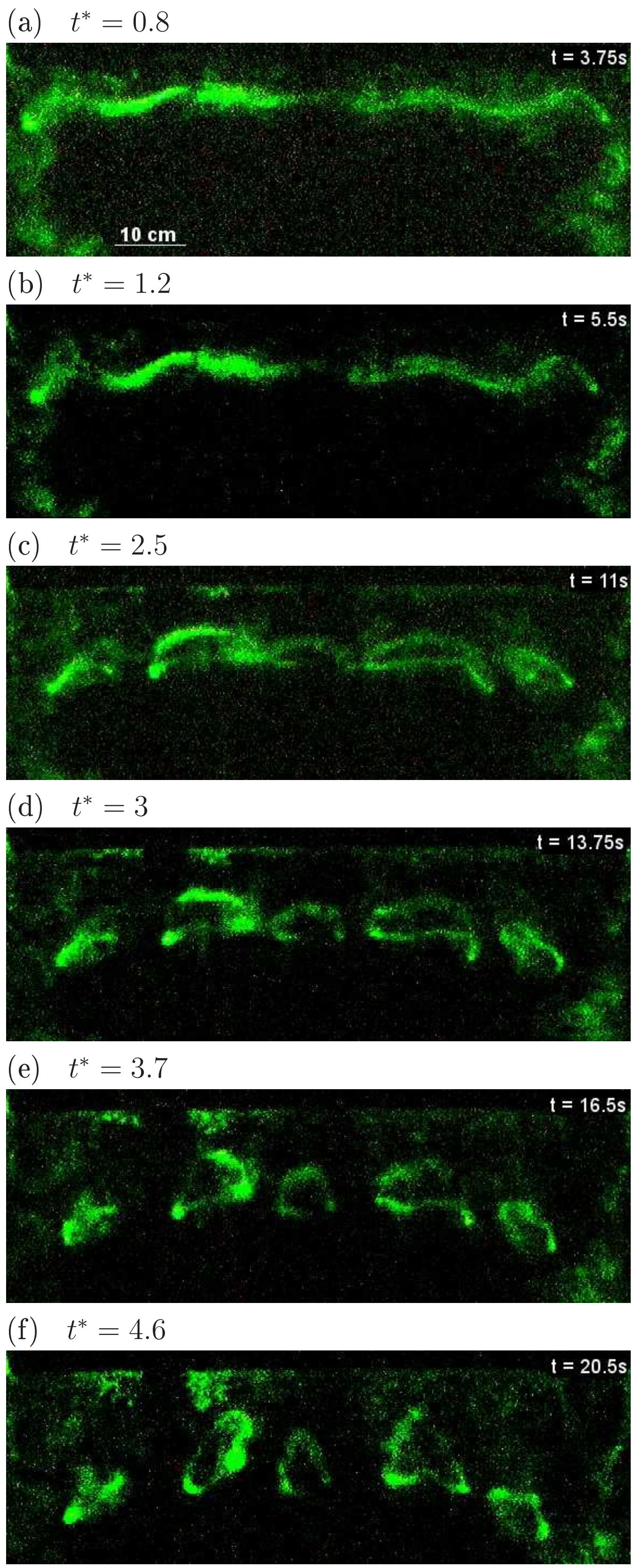

FIG. 4.4 – *Photographies à différents instants de la paire de tourbillons visualisée dans le plan (x, z) grâce au colorant fluorescent. - Vue éloignée pour Re = 360 permettant d'observer le développement de l'instabilité à grande longueur d'onde.*

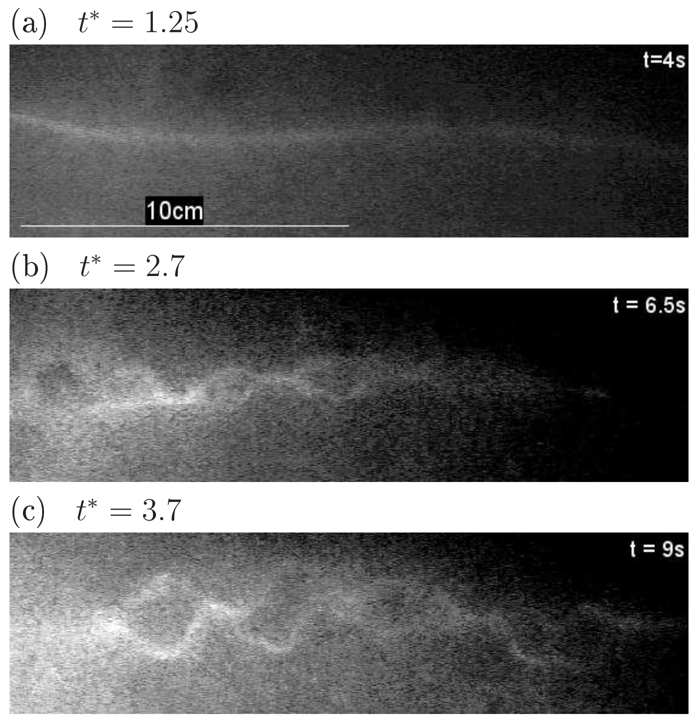

FIG. 4.5 – *Photographies à différents instants de la paire de tourbillons visualisée dans le plan (x, z) grâce au colorant fluorescent. - Vue rapprochée pour $Re = 500$ permettant d'observer le développement de l'instabilité à courte longueur d'onde.*

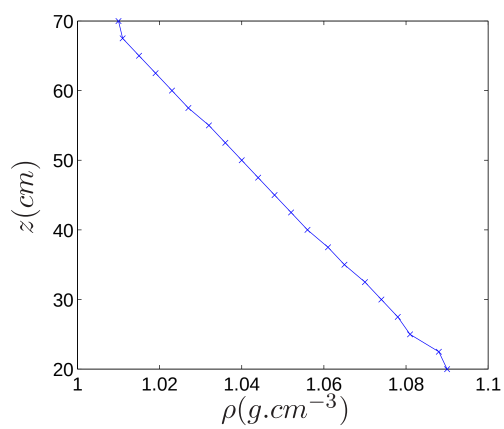

FIG. 4.6 – *Profil linéaire vertical de densité pour $N = 1.3s^{-1}$.*

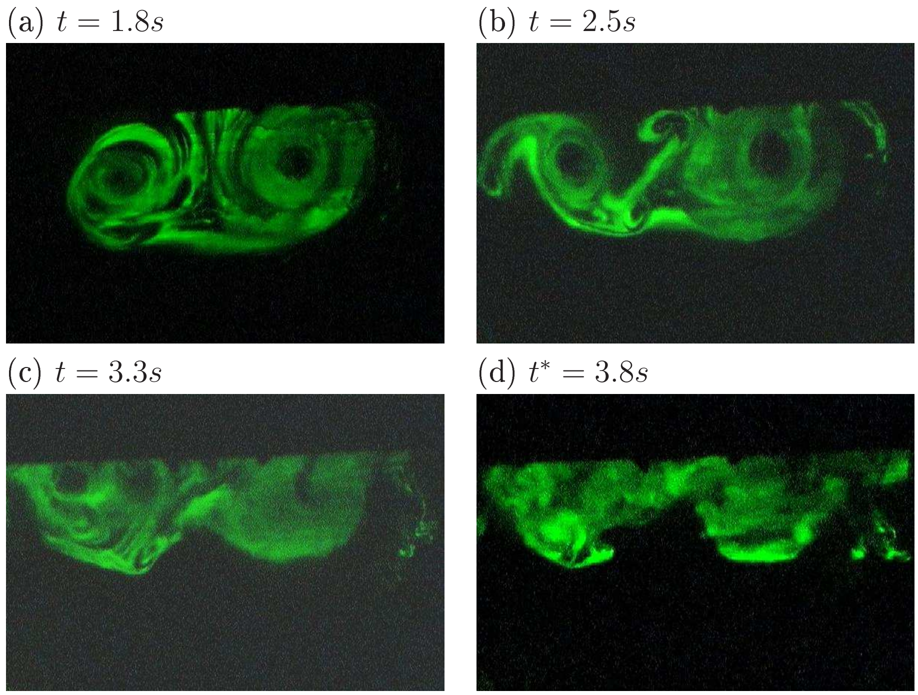

FIG. 4.7 – *Photographies de la paire de tourbillons à différents instants visualisée dans le plan (y, z) grâce à du colorant fluorescent.* .

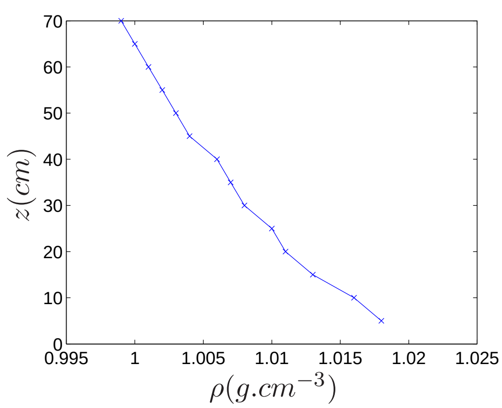

FIG. 4.8 – *Profil linéaire vertical de densité pour* $N = 0.44s^{-1}$.

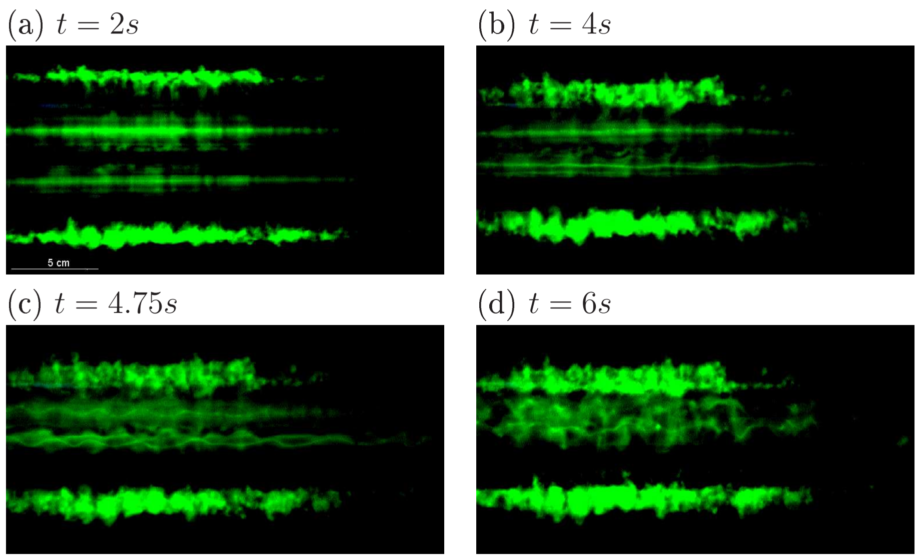

FIG. 4.9 – *Photographies de la paire de tourbillons contra-rotatifs à plusieurs instants visualisée dans le plan* (x, y) *avec du colorant fluorescent grâce à une caméra placée sous la cuve .*

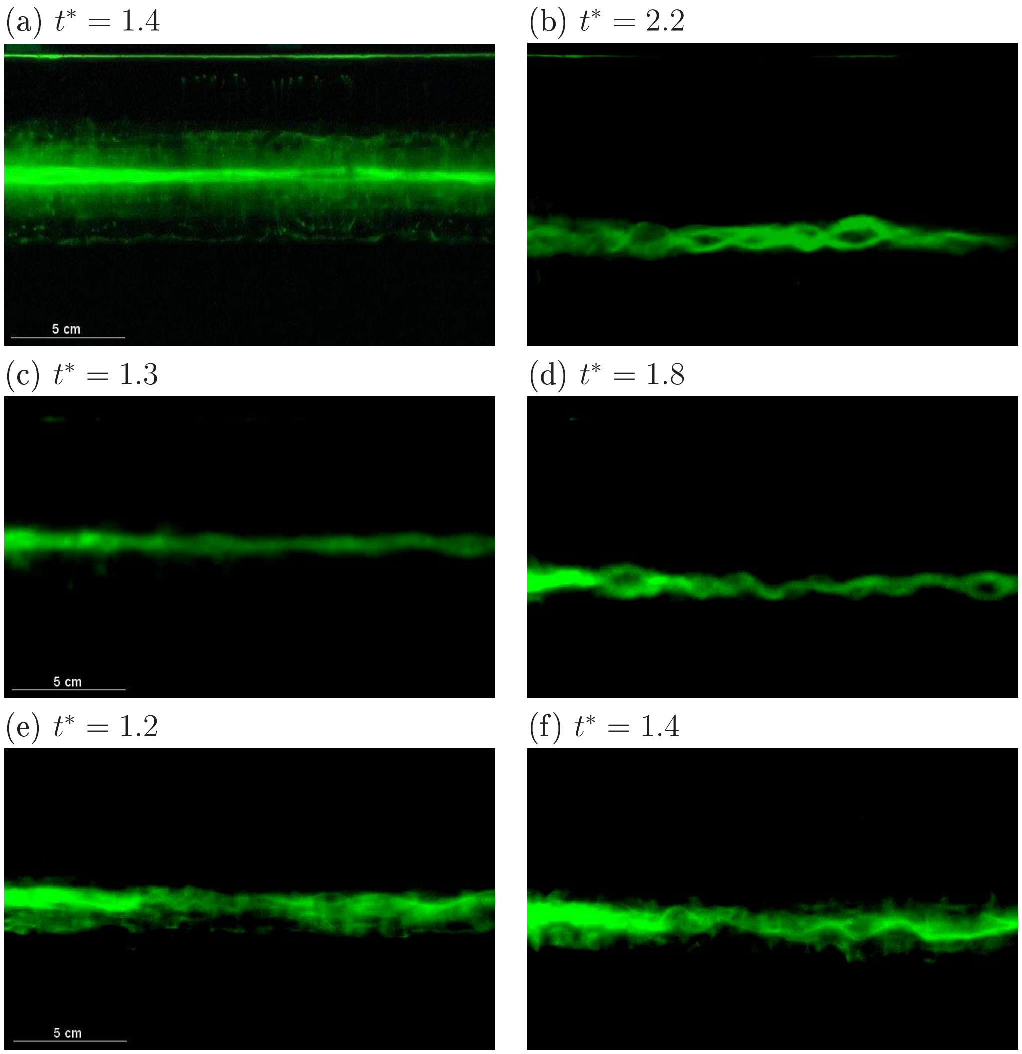

FIG. 4.10 – *Photographies de la paire de tourbillons contra-rotatifs visualisée dans le plan* (x, z) *avec du colorant fluorescent (a)-(c)-(e) au début de l'apparition de l'instabilité et (b)-(d)-(f) à un instant où l'instabilité est bien développée pour (a)-(b)* $Re = 880$ *et* $Fr = 1.3$*, (c)-(d)* $Re = 760$ *et* $Fr = 1.1$*, (e)-(f)* $Re = 660$ *et* $Fr = 0.9$*.*

Chapitre 5

Conclusion et Perspectives

L'étude de la dynamique des sillages tourbillonnaires en milieu homogène et stratifié en densité constitue l'objet de cette thèse. Les sillages des avions sont constitués d'une paire de tourbillons contra-rotatifs horizontaux sur laquelle se développent des instabilités tridimensionnelles à l'origine de leur destruction. La compréhension des mécanismes de dissipation naturelle s'avère donc indispensable afin de développer des stratégies de contrôle des instabilités pour accélérer la destruction du dipôle tourbillonnaire et constitue donc un enjeu économique et environnemental important.
Les travaux présentés ont permis, par une approche théorique, de caractériser (1) le comportement asymptotique ainsi que la dynamique aux temps courts de la paire de tourbillons contra-rotatifs et (2) l'influence de la stratification verticale sur la dynamique bidimensionnelle et tridimensionnelle du dipôle tourbillonnaire. Après avoir décrit les principaux résultats obtenus, les perspectives pour des travaux futurs sont présentées.

Stabilité des sillages tourbillonnaires en milieu homogène : modes d'instabilité et perturbations optimales

La première partie de cette thèse (Chapitre 2) est consacrée à l'étude théorique de la stabilité de la paire de tourbillons en milieu homogène : les différents modes d'instabilité linéaire ont été déterminés et les perturbations optimales ont été calculées.

Comportement asymptotique
Deux types d'instabilité se développant sur les dipôles tourbillonnaires ont été identifiées par le passée et sont maintenant bien connues : l'instabilité de Crow, qui est une instabilité symétrique à grande longueur d'onde

et l'instabilité elliptique, qui est une instabilité à courte longueur d'onde résultant de l'interaction résonante entre l'étirement et les ondes de Kelvin de nombre d'onde azimuthal $m = 1$ et $m = -1$ voyageant sur un tourbillon. Une analyse de stabilité linéaire nous a permis de retrouver les modes correspondant à l'instabilité de Crow et à l'instabilité elliptique. En outre, une autre instabilité a également été trouvée : une instabilité oscillante qui met en jeu les ondes de Kelvin de nombre d'onde azimuthal $m = 0$ et $m = 2$. Elle est moins instable que l'instabilité elliptique classique et n'existe que pour des nombres de Reynolds suffisamment grands mais nous avons proposé qu'elle est aussi de nature elliptique, les modes $m = 0$ et $m = 2$ étant couplés par la perturbation $m = 2$ liée à l'ellipticité des tourbillons.
Les nombreuses études théoriques et numériques asymptotiques qui ont été menées sur l'instabilité elliptique prévoient que les deux modes symétrique et antisymétrique sont également instables alors que les expériences réalisées par Leweke & Williamson [31] montrent que l'instabilité elliptique antisymétrique se développe préférentiellement. Une différence de sensibilité des modes symétrique et antisymétrique aux conditions initiales pourrait en être la cause. Les modes propres adjoints, qui constituent la condition initiale maximisant le gain en énergie aux temps longs, ont donc été calculés pour les deux symétries : leur distribution spatiale est très différente selon la symétrie. Pour le mode antisymétrique, la dynamique est concentrée dans les coeurs des tourbillons ainsi que sur la variété contractante des deux points d'arrêt hyperboliques de l'écoulement alors que pour le mode symétrique, elle est concentrée dans les coeurs et sur la variété contractante du point d'arrêt hyperbolique du bas seulement, sans contribution de celui du haut. Cependant, lorsque la condition initiale est l'adjoint, condition initiale optimale aux temps longs, le mode antisymétrique présente un gain en énergie seulement deux fois supérieur au mode antisymétrique, ce qui ne semble pas suffisant pour expliquer la sélection du mode antisymétrique observée expérimentalement.

Dynamique aux temps courts

Nous nous sommes intéressé à la dynamique aux temps courts du dipôle tourbillonnaire afin de caractériser les mécanismes physiques, l'intensité et les échelles de temps caractéristiques des croissances transitoires des perturbations sur la paire de tourbillons. Les perturbations optimales initiales ainsi que les réponses optimales ont été calculées à différents instants dans le cas de l'instabilité elliptique en utilisant la technique du direct-adjoint, l'état de base étant figé : l'écoulement est considéré comme stationnaire. Cette étude a montré que la dynamique aux temps courts est régie par différentes régions de l'écoulement selon l'échelle de temps considérée. Aux temps très courts

par rapport au temps d'advection du dipôle, la dynamique est concentrée sur les points d'étirement maximal de l'écoulement de base, situés à la périphérie du coeur des tourbillons. Aux temps intermédiaires, correspondant au temps d'advection du dipôle, ce sont les points d'arrêt hyperboliques qui sont à l'origine de la croissance d'énergie optimale en étirant la perturbation de vorticité. Contrairement aux temps très courts où les perturbations optimales sont les mêmes pour les deux symétries, aux temps intermédiaires les perturbations optimales sont contrôlées par le point hyperbolique situé à l'arrière du dipôle dans le cas symétrique alors que dans le cas antisymétrique c'est celui situé à l'avant qui est activé. D'autre part, la réponse optimale prend la forme d'anneaux partiels de vorticité alignés le long de la variété étirante du point hyperbolique activé.
La diffusion visqueuse induit une augmentation du rayon des tourbillons au cours du temps, rendant l'écoulement instationnaire. Cette instationnarité a été prise en compte en adaptant la méthode du direct-adjoint pour tenir compte de l'évolution de l'écoulement de base. Les perturbations optimales ont été calculées à différents instants depuis l'instant initial de production du sillage. La réponse optimale est concentrée dans le coeur des tourbillons pour les deux symétries et est similaire au mode propre de l'instabilité elliptique. Cependant, au temps intermédiaire correspondant à 4 temps d'advection du dipôle, des perturbations en enstrophie existent sur la variété étirante du point hyperbolique du haut pour le cas antisymétrique, correspondant à des tourbillons verticaux sur l'axe de symétrie du dipôle, et sur la variété étirante du point hyperbolique du bas pour le cas symétrique, correspondant à des tourbillons longitudinaux à l'avant du dipôle alors qu'aux temps plus longs, correspondant à 10 temps d'advection du dipôle, la perturbation en enstrophie est localisée uniquement dans le coeur des tourbillons. La perturbation initiale optimale est indépendante de l'instant considéré et, comme dans le cas stationnaire, elle est intense sur les deux points hyperboliques dans le cas antisymétrique alors qu'elle n'est intense que sur celui du bas dans le cas symétrique. L'indépendance de la perturbation initiale optimale en fonction du temps suggère qu'une partie du gain en énergie est liée à la réceptivité et ne varie pas en fonction du temps. L'autre partie du gain est due à l'instationnarité de l'écoulement, qui semble favoriser le mode antisymétrique puisque son taux de croissance est 15% supérieur à celui du mode symétrique. Ce résultat confirme l'analyse de Sipp & Jacquin [47] qui ont démontré que le mode antisymétrique de l'instabilité elliptique devrait dominer, en supposant que la perturbation s'ajustait immédiatement au mode propre dominant instantané. Les expériences de Leweke & Williamson [31] étant réalisées à des nombres de Reynolds relativement bas, la diffusion visqueuse n'est en effet pas négligeable.

Dynamique bidimensionnelle de la paire de tourbillons en milieu stratifié

Dans cette partie (Paragraphe 3.2 du Chapitre 3), l'influence de la stratification verticale en densité sur l'évolution bidimensionnelle de la paire de tourbillons contra-rotatifs horizontaux a été étudiée par des simulations numériques directes.
Dans un fluide non stratifié, un dipôle tourbillonnaire bidimensionnel se propage vers le bas avec un distance de séparation et une circulation constantes, seul le rayon des tourbillons croît par diffusion visqueuse. Dans un fluide stratifié, la paire de tourbillon évolue sous l'influence de la stratification modifiant ainsi l'évolution de la distance de séparation entre les tourbillons, la circulation et le rayon de chacun des tourbillons en fonction du temps. L'évolution temporelle des paramètres du dipôle a donc été étudiée en fonction de l'intensité de la stratification. Cette étude a montré que l'évolution temporelle de ces paramètres est proportionnelle à la fréquence de Brunt-Väisälä, échelle de temps caractéristique de la stratification. D'autre part, le temps d'advection du dipôle reste constant sur une échelle de temps de l'ordre de la fréquence de Brunt-Väisälä quelle que soit l'intensité de la stratification puis augmente fortement pour des stratifications modérées et intenses alors qu'il n'est pas modifié de façon significative pour des stratifications faibles. Ce résultat démontre que l'évolution du dipôle peut être considérée comme quasi-stationnaire dans le cas de faibles stratifications.

Stabilité des sillages tourbillonnaires en milieu stratifié : modes d'instabilité et perturbations optimales

Cette partie (Paragraphes 3.3 et 3.4 du Chapitre 3) est dédiée à l'étude théorique des effets de la force de flottabilité sur la dynamique tridimensionnelle des sillages. Les différents modes d'instabilité linéaire ont été déterminés et leur évolution en fonction de l'intensité de la stratification a été étudiée. Les perturbations optimales ont été calculées et la croissance transitoire des perturbations sur le dipôle a été étudiée en fonction du temps depuis l'instant initial de production du sillage, permettant de prendre en compte le caractère instationnaire de l'écoulement dû à la présence de la stratification, dans le cas de stratifications modérées et intenses.

Comportement asymptotique

L'effet de la stratification sur les instabilités tridimensionnelles existant en milieu homogène : l'instabilité de Crow et l'instabilité elliptique, a été étudié par une analyse de stabilité linéaire, l'état de base, considéré comme quasi-stationnaire, étant figé à différents instants. Les modes correspondant aux instabilités de Crow et elliptique ont été retrouvés : la stratification a pour effet de coupler plus fortement les perturbations de vorticité axiale qui se développent sur chacun des tourbillons puisque la distance de séparation entre les tourbillons de l'état de base diminue. D'autre part, des perturbations de densité apparaissent à la périphérie du dipôle. Le taux de croissance est proportionnel à la valeur instantanée de l'étirement et la longueur d'onde est proportionnelle à la valeur instantanée de la distance de séparation entre les tourbillons dans le cas de l'instabilité de Crow et du rayon des tourbillons dans le cas de l'instabilité elliptique. Ces résultats sont en accord avec les simulations numériques directes tridimensionnelles de Nomura *et al.* [35] qui ont trouvé que le mécanisme d'instabilité à petite longueur d'onde était l'instabilité elliptique dans le cas de stratifications faibles et modérés et que les taux de croissance adimensionnés par la valeur initiale de l'étirement augmentait avec l'intensité de la stratification.

Dynamique aux temps courts

Dans le cas de stratifications modérées et intenses, la stratification agit sur une échelle de temps comparable au temps d'advection du dipôle et l'approximation stationnaire n'est donc plus valide. Les perturbations optimales ont donc été calculées, grâce à la méthode du direct-adjoint qui tient compte de l'instationnarité de l'écoulement, à plusieurs instants et pour différents niveaux d'intensité de la stratification.

La dynamique reste principalement inertielle pour des nombres de Froude supérieurs à 2. Les réponses optimales ressemblent aux modes des instabilités de Crow et elliptique et les taux de croissance moyens sont proches de ceux du cas non stratifié. L'effet de la stratification est, en rapprochant les tourbillons, de rapprocher et déformer les perturbations de vorticité axiale présentes sur chacun des tourbillons, comme dans le cas de l'analyse de stabilité linéaire. Les perturbations initiales optimales sont proches du cas non stratifié instationnaire.

Pour $Fr = 2$, l'effet de la stratification reste modéré aux instants intermédiaires, correspondant à 4 temps d'advection du dipôle, l'énergie potentielle des perturbations restant faible devant leur énergie cinétique. Par contre, à un instant plus long, correspondant à 10 temps d'advection du dipôle, temps où l'équipartition de l'énergie est atteinte, la réponse optimale est fortement allongée par les effets de flottabilité pour le cas symétrique et concentrée dans le sillage pour le cas antisymétrique dans le cas de l'instabilité à grande

longueur d'onde et est concentrée dans le sillage pour les deux symétries dans le cas de l'instabilité à petite longueur d'onde. De façon surprenante, le taux de croissance moyen du mode antisymétrique devient supérieur à celui du mode symétrique pour l'instabilité à grande longueur d'onde alors que la perturbation antisymétrique reste dominante pour l'instabilité à petite longueur d'onde.
Pour $Fr = 1$, les perturbations optimales n'ont été calculées qu'au temps correspondant à 4 temps d'advection du dipôle, le sillage étant complètement détruit aux instants ultérieurs. La réponse optimale, dans le cas de l'instabilité à grande longueur d'onde pour le mode symétrique, est plus complexe que pour les nombres de Froude plus élevés puisque le dipôle a été très fortement déformé mais reste cependant principalement inertielle avec un taux de croissance du même ordre que dans le cas non stratifié. Par contre, comme pour $Fr = 2$, le taux de croissance du mode antisymétrique est très supérieur à celui du mode symétrique. Dans le cas de l'instabilité à courte longueur d'onde, la réponse optimale reste concentrée dans le coeur des tourbillons mais la perturbation initiale optimale a évolué avec l'intensité de la stratification : le maximum d'enstrophie migre progressivement de la variéte contractante du point d'arrêt du haut vers l'axe de symétrie du dipôle dans le cas antisymétrique alors qu'inversement il migre de l'axe de symétrie vers la variéte contractante du point d'arrêt du haut dans le cas symétrique.

Perspectives

Deux approches existent concernant la problématique des tourbillons de sillage d'avion : soit altérer le sillage tourbillonnaire afin de minimiser ses effets sur les avions suiveurs ainsi que son impact sur le climat, soit améliorer la prédiction de la persistance des sillages afin de modifier les distances de sécurité. Les résultats présentés dans cette thèse ouvrent des perspectives dans l'optique du contrôle des instabilités qui se développent sur ces dipôles tourbillonnaires afin d'accélérer leur dissipation et de la prévision de la persistance des sillages en fonction de la stratification et de la phase du vol.

Contrôle des instabilités

Le contrôle des instabilités de sillage permettrait d'accélérer sa dissipation. En effet, notre étude a montré que les points hyperboliques jouaient un rôle primordial dans la dynamique du dipôle aussi bien en milieu homogène qu'en milieu stratifié, la croissance optimale des instabilités étant obtenue par la création d'anneaux partiels de vorticité au niveau de ces points. Actuellement, le dispositif breveté par Boeing est constitué de volets pivotants.

Une alternative à ce dispositif serait d'exciter directement les instabilités à l'aide d'un dispositif passif en perturbant le dipôle de façon optimale.
Cependant, les sillages d'avion réels sont caractérisés par des rapports d'aspects beaucoup plus petits (a/b de l'ordre de 0.01) et des nombres de Reynolds beaucoup plus grands. Antkowiak & Brancher [1] ont étudié les croissances transitoires des perturbations sur un seul tourbillon de Lamb-Oseen et ont observé que la perturbation initiale optimale prenait la forme de spirales de vorticité concentrées à la périphérie du tourbillon, les ondes étant excitées dans le coeur du tourbillon par la combinaison d'un mécanisme de type Orr et d'un phénomène d'induction. Ce résultat suggère qu'un mécanisme similaire pourrait exister dans le cas de dipôles de faibles rapports d'aspects, configurations plus proche de la configuration réelle des tourbillons de sillage d'avion. L'étude des croissances transitoires des dipôles tourbillonnaires pour des rapports d'aspect plus petits et de plus grands nombre de Reynolds serait donc à explorer.

Etude expérimentale

Une étude expérimentale plus approfondie permettrait de caractériser l'influence de la stratification sur les instabilités se développant sur la paire de tourbillons contra-rotatifs. L'exploration d'une plus grande gamme de paramètres, notamment en nombres de Froude, serait intéressante afin de comparer avec les simulations numériques directes de Nomura *et al* [35]. En effet, les expériences ont été réalisées pour des nombres de Froude de l'ordre de 1 et les résultats obtenus ont montré un raccourcissement de la longueur d'onde de l'instabilité à courte longueur d'onde, comme l'ont observé Nomura *et al* [35]. Cependant, pour $Fr > 1$, ils ont trouvé que la longueur d'onde était inchangée par rapport au cas homogène. Il serait donc intéressant de réaliser des mesures de longueurs d'onde pour des nombres de Froude plus élevés afin de comparer à celles obtenues numériquement.
D'autre part, des mesures par PIV (Particules Image Velocimetry) permettraient une étude plus quantitative de l'influence de la force de flottabilité sur le développement des instabilités, notamment par la mesure des taux de croissance ainsi que des paramètres instantanés du dipôle.
L'étude expérimentale permettrait également l'étude de la dynamique aux temps longs de la paire de tourbillons.

Dynamique non linéaire

La présente étude s'est focalisée sur la dynamique linéaire de la paire de tourbillons contra-rotatifs. Cependant, les effets non-linéaires sont à prendre en compte afin de comprendre la persistance des sillages. Nomura *et al* [35] ont étudié le développement de l'instabilité à courte longueur d'onde sur cette paire de tourbillons contra-rotatifs en milieu stratifié en fonction de l'intensité de la stratification par des simulations numériques directes. Ils ont observé que les effets de flottabilité dominaient l'évolution non linéaire de la paire de tourbillons dans les écoulements faiblement et modérément stratifiés avec l'apparition de structures tourbillonnaires verticales, à l'origine d'échanges dans la direction transverse, et le detrainment des tourbillons primaires. Ces mécanismes sont à l'origine d'une dissipation plus rapide de la paire de tourbillons. Dans le cas de stratifications intenses, la dissipation est également accélérée. Cette étude pourrait être étendue à des rapports d'aspects a/b plus petits et des nombres de Reynolds plus grands.

Bibliographie

[1] ANTKOWIAK A. & BRANCHER P. 2004. Transient energy growth for the Lamb-Oseen vortex, *Phys. Fluids* **16**, L1 - L4.

[2] BATCHELOR G.K. 1967. An Introduction to Fluid Dynamics, *Cambridge University Press.*

[3] BAYLY B.J. 1986. Three-dimensional instability of elliptical flow, *Phys. Rev. Lett.* **57**(17), 2160-2163.

[4] BILLANT P., BRANCHER P. & CHOMAZ J.-M. 1999. Three-dimensional stability of a vortex pair, *Phys. Fluids* **11**, 2069 - 2077.

[5] BILLANT P. & CHOMAZ J.-M. 2000. Experimental evidence for a zig-zag instability of a vertical columnar vortex pair in a strongly stratified fluid, *J. Fluid Mec.* **418**, 167 - 188.

[6] CAULFIELD C.P. & KERSWELL R.R. 2000. The nonlinear development of three-dimensional disturbances at hyperbolic stagnation points : A model of the braid region in mixing layers, *Phys. Fluids* **12**, 1032-1043.

[7] CORBETT P. & BOTTARO A. 2000. Optimal perturbations for boundary layers subject to stream-wise pressure gradient, *Phys. Fluids* **12**, 120-130.

[8] CROW S.C. 1970. Stability theory for a pair of trailing vortices, *AIAA J.* **8**(12), 2172-2179.

[9] DELBENDE I., CHOMAZ J.-M. & HUERRE P. 1998. Absolute/convective instabilities in the batchelor vortex : a numerical study of the linear impulse response, *J. Fluid Mech.* **355**, 229-254.

[10] DELISI D.P. & ROBINS R.E. 2000. Short-scale instabilities in trailing wake vortices in a stratified fluid, *AIAA J.* **38**, 1916-1923.

[11] DONNADIEU C., ORTIZ S., CHOMAZ J.-M. & BILLANT P. . Three-dimensional instabilites and transient growth of trailing vortices, *Phys. Fluids*(submitted).

[12] EDWARDS W.S., TUCKERMAN L.S., FRIESNER R.A. & SORENSEN D.C. 1994. Krylov methods for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comput. Phys.* **110**, 82-102.

[13] ELOY C. & LE DIZES S. 1999. Three-dimensional instability of Burgers and Lamb-Oseen vortices in a strain field, *J. Fluid Mech.* **378**, 145-166.

[14] ELOY C. & LE DIZES S. 2001. Stability of the Rankine vortex in a multipolar strain field, *Phys. Fluids* **13**, 660-676.

[15] FABRE D., SIPP D. & JACQUIN L. 2006. Kelvin waves and the singular modes of the Lamb-Oseen vortex, *J. Fluid Mech.* **551**, 235-274.

[16] GARTEN J.F., ARENDT S., FRITTS D.C. & WERNE J. 1998. Dynamics of counter-rotating vortex pairs in stratified and sheared environments, *J. Fluid Mech.* **361**, 189-236.

[17] GARTEN J.F., WERNE J., FRITTS D.C. & ARENDT S. 2001. Direct numerical simulations of the Crow instability and subsequent vortex reconnection on a stratified fluid, *J. Fluid Mech.* **426**, 1-45.

[18] GERZ T., HOLZAPFEL F. & DARRACQ D. 2002. Commercial aircraft wake vortices, *Prog. Aerosp. Sci* **38**, 181-208.

[19] HILL F.M. 1975. A numerical study of the descent of a vortex pair in stably stratified atmosphere, *J. Fluid Mech.* **71**, 1-13.

[20] HOLZÄPFEL F. & GERZ T. 1999. Two-dimensional wake vortex physics in the stably stratified atmosphere, *Aerosp. Sci. Technol.* **43**, 451-464.

[21] INCE E.L. 1944. Ordinary Differential Equations, *DOVER.*

[22] JACQUIN L.. Les tourbillons de sillage d'avions, *http://www.onera.fr/conferences/tourbillons-sillage/*.

[23] JULIEN S., ORTIZ S. & CHOMAZ J.-M 2004. Secondary instability mechanisms in the wake of a flat plate, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **23**, 157-165.

[24] KERSWELL R.R. 2002. Elliptical instability, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34**, 83-113.

[25] KRUTZSCH C.-H. 1939. Uber eine experimentell beobachtete Erscheinung an Wirbelringen bei ihrer translatorischen Bewegung in wirklichen Flüssigkeiten, *Ann. Phys.* **35**(5), 497.

[26] LANDMAN M.J. & SAFFMAN P.G. 1987. The three-dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid, *Phys. Fluids* **30**, 2339-2342 .

[27] LAPORTE F. & CORJON A. 2000. Direct numerical simulations on the elliptic instability of a vortex pair, *Phys. Fluids* **12**, 1016-1031 .

[28] LEBLANC S. & CAMBON C. 1997. On the three-dimensional instabilities of plane flows subjected to Coriolis force, *Phys. Fluids* **9**, 1307-1313.

[29] LE DIZES S. & LAPORTE F. 2002. Theoretical predictions for the elliptical instability in a two-vortex flow, *J. Fluid Mech.* **471**, 120-130.

[30] LEWEKE T. & WILLIAMSON C.H.K. 1996. The long and short of vortex pair instability, *Phys. Fluids* **8**(9) S5. Gallery of Fluid Motion.

[31] LEWEKE T. & WILLIAMSON C.H.K. 1998. Cooperative elliptic instability of a vortex pair, *J. Fluid Mech.* **306**, 85-119.

[32] LUCHINI P. 2000. Reynolds-number-independant instability of the boundary layer over a flat surface : optimal perturbations, *J. Fluid Mech.* **404**, 289-309.

[33] MALKUS W.V.R. 1989. An experimental study of global instabilities due to the tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **48**, 123-134.

[34] MOORE D.W. & SAFFMAN P.G. 1975. The instability of a straight filament in a strain field, *Proc. R. Soc. Lond. A.* **346**, 413-425.

[35] NOMURA K.K., TSUTSUI H., MAHONEY D. & ROTTMAN J.W. 2006. Short-wavelength instability and decay of a vortex pair in stratified fluid, *J. Fluid Mech.* **553**, 283-322.

[36] ORTIZ S. & CHOMAZ J.-M.. Transient growth in a wake behind a flat plate : the role of hyperbolic instability, *Eur. J. Mech.* (submitted).

[37] OSTER G. & YAMAMOTO M. 1963. Density gradient techniques, *Chem. Rev.* **63**, 257-268.

[38] PAOLI R., HELIE J. & POINSOT T. 2004. Contrails formation in aircraft wakes, *J. Fluid Mech.* **502**, 361-373.

[39] PIERREHUMBERT R.T. 1986. Universal short-wave insatbility of two-dimensional eddies in an inviscid fluid, *Phys. Rev. Lett.* **57**(17), 2157-2159.

[40] ROBINS R.E. & DELISI D.P. 1998. Numerical simulation of three-dimensional trailing vortex evolution in stratified fluid, *AIAA J.* **36**, 981-985.

[41] SAFFMAN P.G. 1972. The motion of a vortex pair in a stratified atmosphere, *SIAM* **L1, 2**, 107-119.

[42] SAFFMAN P.G. 1992. Vortex Dynamics, *Cambridge University Press.*

[43] SARPKAYA T. 1983. Trailing vortices in homogeneous and density-stratified media, *J. Fluid Mech.* **136**, 85-109.

[44] SCHMID P.J. & HENNINGSON D.S. 2001. Stability and transition in shear flows, *New York Springer-Verlag*

[45] SCORER R.S. & DAVENPORT L.J. 1970. Contrails and aircraft downwash, *J. Fluid Mech.* **43**, 451-464.

[46] SIPP D., JACQUIN L. & COSSU C. 1999 Self-adaptation and viscous selection in concentrated 2D vortex dipole, *Phys. Fluids* **12**, 245-248.

[47] SIPP D. & JACQUIN L. 2003. Widnall instabilities in vortex pairs, *Phys. Fluids* **15**, 1861 -1874.

[48] SPALART P.R. 1996. On the motion of laminar wing wakes in a stratified fluid, *J. Fluid Mech.* **327**, 139-160.

[49] THOMAS P.J. & AUERBACH D. 1994. The observation of the simultaneous development of a long- and a short-wave instability mode on a vortex pair, *J. Fluid Mech.* **265**, 289-302.

[50] TRAVIS D.J., CARLETON A.M. & LAURITSEN R.G. 2002. Climatology : Contrails reduce daily temperature range, *Nature* **418**, 601.

[51] TRAVIS D.J., CARLETON A.M. & LAURITSEN R.G. 2004. Regional Variations in U.S. Diurnal Temperature Range for the 11-14 September 2001 Aircraft Groundings : Evidence of Jet Contrail Influence on Climate, *Journal of Climate* **17**(5), 1123-1134.

[52] TSAI C.-Y. & WIDNALL S.E. 1976. The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field, *J. Fluid Mech.* **73**, 721-733.

[53] WALEFFE F. 1990. On the three-dimensional instability of strained vortices, *Phys. Rev. Lett.* **57**(17), 2160-2163.

[54] WIDNALL S.E. & SULLIVAN J.P. 1973. On the stability of vortex tings, *Proc. R. Soc. Lond.* **332**, 335-353.

[55] WIDNALL S.E. 1975. Structure and dynamics of vortex filaments, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **7**, 141-165.