



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 127–132



## Migration d'une particule ellipsoïdale conductrice sous l'action d'un champ électromagnétique uniforme

## Migration of a conducting ellipsoid subject to uniform ambient electric and magnetic fields

Antoine Sellier

LadHyX, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 14 octobre 2002 ; accepté après révision le 14 janvier 2003

Présenté par René Moreau

---

### Résumé

On établit l'expression analytique du mouvement d'une micro-particule solide, conductrice et ellipsoïdale plongée dans un métal liquide conducteur et soumise à un champ électromagnétique uniforme. Quelques propriétés remarquables de ce mouvement sont alors examinées. *Pour citer cet article* : A. Sellier, C. R. Mecanique 331 (2003).

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

We obtain analytically, within a relevant framework, the rigid-body motion of a solid, conducting and ellipsoidal particle immersed in a liquid metal and subject to uniform ambient electric and magnetic fields. The motion experienced exhibits a few basic properties that are briefly discussed. *To cite this article*: A. Sellier, C. R. Mecanique 331 (2003).

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

*Mots-clés* : Mécanique des fluides ; Magnétohydrodynamique ; Migration ; Ellipsoïde

*Keywords*: Fluid mechanics; Magnetohydrodynamics; Migration; Ellipsoid

---

### Abridged English version

Any solid and conducting particle  $\mathcal{P}$  immersed in a liquid metal moves [1] under external and uniform electric and magnetic fields  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ . Since this motion allows impurities removal, it is worth determining the translational velocity  $\mathbf{U}$  of one point  $O$  attached to  $\mathcal{P}$  and the angular velocity  $\boldsymbol{\Omega}$  of  $\mathcal{P}$ . This has been achieved both for

---

Adresse e-mail : [sellier@ladhyx.polytechnique.fr](mailto:sellier@ladhyx.polytechnique.fr) (A. Sellier).

1631-0721/03/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.  
doi:10.1016/S1631-0721(03)00024-X

conducting spheres [1,2] and insulating ellipsoids [3]. This Note addresses the motion of a conducting ellipsoid and examines its main properties.

We adopt Cartesian coordinates  $(O, x_1, x_2, x_3)$ , the summation convention with  $\mathbf{OM} = \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$  and  $r^2 = x_i x_i$  and first consider an arbitrarily-shaped particle of length scale  $a$  and surface  $S$  of unit outward normal  $\mathbf{n}$  (see Fig. 1). The particle and the fluid admit constant conductivity  $\sigma_s \geq 0$  and  $\sigma > 0$  respectively and the electric field becomes  $\mathbf{E} - \nabla\phi'$  in  $\mathcal{P}$  and  $\mathbf{E} - \nabla\phi$  in  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{P} \cup S)$  where  $\phi$  and  $\phi'$  obey (1), (2). Denoting by  $\rho, \mu, \mu_0$  and  $U$  the constant fluid density, viscosity, electromagnetic permeability and the fluid velocity scale, the Reynolds magnetic number  $\text{Re}_m$  and the Hartmann number  $M$  [4] are assumed to obey (3). Accordingly, the net force  $\mathbf{F}'$  and torque  $\mathbf{G}'$  (with respect to  $O$ ) applied by the Lorentz body force on  $\mathcal{P}$  obey (4) and, see [5], the fluid flow  $(\mathbf{u}, p)$ , of stress tensor  $\sigma$  and Lorentz body force  $\mathbf{f} = \sigma(\mathbf{E} - \nabla\phi) \wedge \mathbf{B}$ , is governed by the quasi-static Stokes problem (5), (6). Neglecting any inertial effect and denoting by  $\mathbf{F}$  and  $\mathbf{G}$  the net force and torque induced on  $S$  by  $(\mathbf{u}, p)$ , we finally obtain  $(\mathbf{U}, \Omega)$  by requiring that  $\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{0}$  and  $\mathbf{G} + \mathbf{G}' = \mathbf{0}$ . As soon as  $\mathcal{P}$  is orthotropic (with planes  $x_i = 0$  as planes of symmetry),  $\mathbf{G} = \mathbf{G}' = \Omega = \mathbf{0}$  and the velocity  $\mathbf{U}$ , of general form (7) with  $\varepsilon_{ijk}$  the permutation tensor and  $\delta = \sigma_s/\sigma$  [5], is deduced from  $\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{0}$ . Introducing 3 Stokes flows  $(\mathbf{u}_T^{(i)}, p_T^{(i)})$  of stress tensor  $\sigma_T^{(i)}$  through (8) and applying the extended (with body forces) reciprocal identity [6] to  $(\mathbf{u}, p)$  and  $(\mathbf{u}_T^{(i)}, p_T^{(i)})$ , as detailed in (9), one deduces (10) and the basic equation (11) where  $\mathcal{V}$  is the volume of our orthotropic particle and  $\mathbf{K} = K_{ii} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$ .

Let us apply (11) to the motivating case of an ellipsoid  $(a_1, a_2, a_3, \delta)$  of relative conductivity  $\delta = \sigma_s/\sigma$  and surface  $S$  and associated outer normal  $\mathbf{n}$  given by (12). We introduce coefficients  $\alpha_j$  by (13) and, by superposition, first select  $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_1$ . Following [7],  $\phi'$  and  $\phi$  are sought under the forms (14) with  $\beta(M)$  obeying equalities (15) without summation over  $i$ . Such choices ensure (1) and  $\phi = \phi'$  on  $S$ . The unknown constant  $A$  is deduced from the other boundary condition (2). After elementary algebra, one obtains (16). For  $\mathbf{E} = E_j \mathbf{e}_j$  we introduce coefficients  $C_j(\delta)$  and functions  $\phi_0^j$ , harmonic in  $\Omega$ , by (17). In virtue of (16), (11) then yields (18). Noting that  $C_j(0) = 1$  whereas the electric field outside the insulating ellipsoid reads  $\mathbf{E} - \nabla\phi_0^j$  if  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_j$ , the coefficients  $S_{ijk}(\delta)$  occurring in (7) obey  $S_{ijk}(\delta) = C_j(\delta)S_{ijk}(0)$ , without summation over  $j$ , for the ellipsoid. Since  $S_{ijk}(0)$  is given for the insulating ellipsoid [3] by (19) (without summation over  $i$  and  $j$ ) the required rigid-body motion  $(\mathbf{U}, \Omega)$  of the ellipsoidal particle admits the form (20).

For a sphere of radius  $a$ ,  $\alpha_j = 2/3$  and (20) yields (21), i.e., one recovers available results [1,2] obtained by computing  $(\mathbf{u}, p, \phi)$  in the whole fluid domain. Because  $\alpha_j$  is unchanged under the change of scale  $\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$  (see (13)), the velocity of the ellipsoid  $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \delta)$  is  $\lambda^2$  times the velocity of the ellipsoid  $(a_1, a_2, a_3, \delta)$ . In addition, (20) reveals that  $\mathbf{U}$  vanish with  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ , is parallel to  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$  when this vector is parallel to one vector  $\mathbf{e}_i$  but in other circumstances  $\mathbf{U}$  not necessarily parallel to  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ ! For instance, if  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_3$ ,  $E_3 = 0$ ,  $E_1 \neq 0$  and  $E_2 \neq 0$  then (22) holds, i.e., for  $a_1 \neq a_2$  the migration is not parallel to  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ . For such fields  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ , two spheroids  $(\lambda a_1, \lambda a_1, \lambda a_3, \delta' \neq 1)$  and  $(a_1, a_1, a_3, \delta \neq 1)$  experience the same translation if (23) holds. This result depends upon  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ : for  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_1$  and  $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_3$ , (23) must be replaced by (24).

Finally, it is worth pointing out that (20) provides a nice benchmark in testing any numerical treatment one would necessarily employ for arbitrary-shaped particles.

## 1. Introduction

Une particule solide  $\mathcal{P}$  de conductivité constante  $\sigma_s \geq 0$  et plongée dans un métal liquide homogène, de conductivité  $\sigma > 0$  et de viscosité  $\mu$ , se déplace sous l'action de champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{B}$  uniformes dès que  $\sigma_s \neq \sigma$  [1]. Ce mouvement, décrit par la vitesse  $\mathbf{U}$  de translation d'un point  $O$  de  $\mathcal{P}$  et sa vitesse de rotation  $\Omega$ , peut servir à extraire des impuretés. L'obtention de  $(\mathbf{U}, \Omega)$  en fonction de  $\mu, \sigma, \sigma_s, \mathbf{E}, \mathbf{B}$  et de la forme de  $\mathcal{P}$  revêt donc une grande importance. A ce jour, seuls les cas d'une sphère conductrice [1,2] et d'un ellipsoïde

non conducteur [3] sont traités. Cette Note construit la solution pour une particule ellipsoïdale conductrice ( $\sigma_s \neq 0$ ) et en examine certaines propriétés.

## 2. Formulation du problème pour une particule orthotrope quelconque

Nous adoptons des coordonnées cartésiennes orthonormées  $(O, x_1, x_2, x_3)$  et la convention de sommation des indices avec  $\mathbf{OM} = x_i \mathbf{e}_i$  et  $r^2 = x_i x_i$ . Cette partie envisage une particule de taille caractéristique  $a$ , occupant l'ouvert  $\mathcal{P}$  de surface  $S$  (voir Fig. 1) et orthotrope avec pour plans de symétrie les trois plans  $x_1 = 0, x_2 = 0$  et  $x_3 = 0$ .

Le fluide newtonien, de masse volumique  $\rho$  et de permittivité magnétique  $\mu_0$ , baigne l'ouvert  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{P} \cup S)$ . La particule affecte  $\mathbf{E}$  et le champ électrique devient  $\mathbf{E} - \nabla\phi'$  dans  $\mathcal{P}$  et  $\mathbf{E} - \nabla\phi$  dans  $\Omega$  où les potentiels de perturbation  $\phi$  et  $\phi'$  vérifient

$$\nabla^2\phi' = 0 \text{ dans } \mathcal{P}, \quad \nabla^2\phi = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \nabla\phi \rightarrow \mathbf{0} \text{ si } r \rightarrow \infty \tag{1}$$

$$\phi = \phi' \text{ sur } S, \quad \sigma_s(\mathbf{E} - \nabla\phi') \cdot \mathbf{n} = \sigma(\mathbf{E} - \nabla\phi) \cdot \mathbf{n} \text{ sur } S \tag{2}$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante sur  $S$ . Désignant par  $U$  la vitesse typique des points de  $\mathcal{P}$ , nous supposons [4] que les nombres de Reynolds  $Re$ , de Reynolds magnétique  $Re_m$  et de Hartmann  $M$  sont tels que

$$Re = \frac{\rho U a}{\mu} \ll 1, \quad Re_m = \mu_0 \sigma U a \ll 1, \quad M = |\mathbf{B}| a \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^{1/2} \ll 1 \tag{3}$$

Ainsi,  $\mathbf{B}$  n'est pas altéré. La résultante  $\mathbf{F}'$  et le moment  $\mathbf{G}'$  par rapport à  $O$  de la force de Lorentz  $\mathbf{f}'$  appliquée dans  $\mathcal{P}$ , s'écrivent

$$\mathbf{F}' = \sigma_s \left[ \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{E} - \nabla\phi') dv \right] \wedge \mathbf{B}, \quad \mathbf{G}' = \sigma_s \int_{\mathcal{P}} \mathbf{OM} \wedge [(\mathbf{E} - \nabla\phi') \wedge \mathbf{B}] dv \tag{4}$$

De son côté, l'écoulement  $(\mathbf{u}, p)$  du fluide, de force massique de Lorentz  $\mathbf{f} = \sigma(\mathbf{E} - \nabla\phi) \wedge \mathbf{B}$  et de tenseur des contraintes  $\sigma$ , est régi [5] par les équations de Stokes

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ et } \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p - \sigma(\mathbf{E} - \nabla\phi) \wedge \mathbf{B} \text{ dans } \Omega \tag{5}$$

$$(\mathbf{u}, p) \rightarrow (\mathbf{0}, \sigma[\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}] \cdot \mathbf{OM}) \text{ si } r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{u} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM} \text{ sur } S \tag{6}$$

et exerce sur la surface  $S$  de la particule une force  $\mathbf{F}$  et un moment  $\mathbf{G}$  (par rapport à  $O$ ) hydrodynamiques. Le mouvement  $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})$  d'une particule, d'inertie négligeable et de forme arbitraire (orthotrope ou non), s'obtient alors

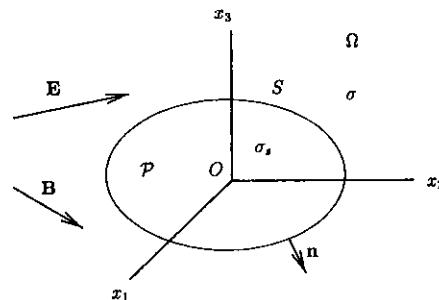


Fig. 1. Une particule solide, conductrice et orthotrope  $\mathcal{P}$  plongée dans  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ .

Fig. 1. A solid, conducting and orthotropic particle  $\mathcal{P}$  embedded in  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ .

en imposant  $\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{G} + \mathbf{G}' = \mathbf{0}$ . Des considérations de symétrie [5] montrent qu'une particule orthotrope ne tourne pas ( $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ ) et admet, en posant  $\delta = \sigma_s/\sigma$ , une translation  $\mathbf{U}$  de la forme générale suivante

$$\mathbf{U} = \frac{\sigma}{\mu} S_{ijk}(\delta) [\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_j] [\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_k] \mathbf{e}_i \quad \text{avec } S_{ijk}(\delta) = 0 \text{ si } \varepsilon_{ijk} = 0 \quad (7)$$

où  $\varepsilon_{ijk}$  est le tenseur des permutations. Dans un tel cas  $\mathbf{G} = \mathbf{G}' = \mathbf{0}$  et le seul lien  $\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{0}$  procure  $\mathbf{U}$  (donc les 6 coefficients non nuls  $S_{ijk}(\delta)$ ). La composante  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i$  s'obtient en appliquant le théorème de réciprocité étendu [6] (en présence de forces massiques) à  $(\mathbf{u}, p)$  et à l'écoulement de Stokes particulier  $(\mathbf{u}_T^{(i)}, p_T^{(i)})$ , de tenseur des contraintes  $\sigma_T^{(i)}$  et de force massique  $\mathbf{f}_T^{(i)}$  nulle, tel que

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(i)} = 0 \quad \text{et} \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u}_T^{(i)} = \nabla p_T^{(i)} \quad \text{dans } \Omega, \quad \mathbf{u}_T^{(i)} = \mathbf{e}_i \quad \text{sur } S \quad (8)$$

Puisque  $\mathbf{f}_T^{(i)} = \mathbf{0}$  ce théorème de réciprocité s'écrit ici

$$\int_S [\mathbf{u} \cdot \sigma_T^{(i)} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_T^{(i)} \cdot \sigma \cdot \mathbf{n}] dS = - \int_\Omega \mathbf{u}_T^{(i)} \cdot \mathbf{f} d\Omega \quad (9)$$

et procure alors l'expression (sans sommation des indices dans (10))

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i = -\mu K_{ii} U_i - \sigma \left[ \int_{\mathcal{P}} dv \right] \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} - \sigma \int_\Omega \mathbf{u}_T^{(i)} \cdot [\nabla \phi \wedge \mathbf{B}] dv, \quad -\mu K_{ii} = \int_S \mathbf{e}_i \cdot \sigma_T^{(i)} \cdot \mathbf{n} dS < 0 \quad (10)$$

En posant  $\mathbf{K} = K_{ii} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$ , l'équation procurant  $\mathbf{U}$  s'écrit donc, d'après (8) et (10),

$$\mu \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \sigma \left\{ (\delta - 1) \mathcal{V} [\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}] - \delta \left[ \int_{\mathcal{P}} \nabla \phi' dv \right] \wedge \mathbf{B} - \left[ \int_\Omega \mathbf{u}_T^{(i)} \cdot (\nabla \phi \wedge \mathbf{B}) dv \right] \mathbf{e}_i \right\} \quad (11)$$

où  $\mathcal{V}$  désigne le volume de la particule orthotrope. Une astuce similaire à celle employée dans [3] permettrait de convertir l'intégrale de volume sur  $\Omega$  en une intégrale double sur  $S$  impliquant seulement les  $\sigma_T^{(i)} \cdot \mathbf{n}$  et les dérivées premières et secondes de  $\phi$ . Ces quantités, jointes à la connaissance de  $\nabla \phi'$  dans  $\mathcal{P}$ , permettent ainsi d'obtenir  $\mathbf{U}$  via (11) pour une particule orthotrope quelconque.

### 3. Solution analytique pour une particule ellipsoïdale

Considérons à présent une particule orthotrope ellipsoïdale telle que

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \frac{x_1/a_1^2 \mathbf{e}_1 + x_2/a_2^2 \mathbf{e}_2 + x_3/a_3^2 \mathbf{e}_3}{\{x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4 + x_3^2/a_3^4\}^{1/2}} \quad \text{si } M(x_1, x_2, x_3) \in S \quad (12)$$

Cherchons la solution de (1), (2). Dans ce but introduisons les constantes  $\alpha_j$  telles que

$$\alpha_j = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{S(t) dt}{a_j^2 + t} \quad \text{où } S(t) = \{(a_1^2 + t)(a_2^2 + t)(a_3^2 + t)\}^{-1/2} \quad (13)$$

et, par superposition, choisissons d'abord  $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_1$ . En utilisant [7], nous prenons alors

$$\phi'(M) = -\frac{A \alpha_1 x_1}{a_1 a_2 a_3} \quad \text{dans } \mathcal{P}, \quad \phi(M) = -A \left[ \int_{\beta(M)}^\infty \frac{S(t) dt}{a_1^2 + t} \right] x_1 \quad \text{dans } \Omega \cup S \quad (14)$$

où  $\beta(x_1, x_2, x_3)$ , définie dans  $\Omega \cup S$ , est telle que (sans sommation sur  $i$  dans (15))

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \beta} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \beta} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \beta} = 1, \quad \left( \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \right)_{\beta=0} = \frac{2x_i/a_i^2}{x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4 + x_3^2/a_3^4} \quad (15)$$

Les choix (14) assurent (1) et  $\phi = \phi'$  sur la surface  $S$  associée à  $\beta = 0$ . La constante  $A$  est obtenue en écrivant que  $\delta[\mathbf{E}\mathbf{e}_1 - \nabla\phi'] \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{E}\mathbf{e}_1 - \nabla\phi] \cdot \mathbf{n}$  sur  $S$ , en exploitant la forme (12) de  $\mathbf{n}$  et (15). Quelques calculs élémentaires donnent  $A = -a_1 a_2 a_3 D_1 E$  avec

$$D_1 = \frac{\delta - 1}{2 + (\delta - 1)\alpha_1}, \quad \nabla\phi' = \alpha_1 D_1 E \mathbf{e}_1 \quad \text{dans } \mathcal{P}, \quad \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = (\alpha_1 - 2) D_1 E \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } S \quad (16)$$

Pour le cas général  $\mathbf{E} = E_j \mathbf{e}_j$  introduisons alors les coefficients  $C_j(\delta)$  et les potentiels élémentaires  $\phi_0^j$ , harmoniques dans  $\Omega$ , tels que

$$C_j(\delta) = \frac{(\delta - 1)(\alpha_j - 2)}{2 + (\delta - 1)\alpha_j}, \quad \nabla\phi_0^j \rightarrow 0 \quad \text{si } r \rightarrow \infty, \quad \nabla\phi_0^j \cdot \mathbf{n} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } S \quad (17)$$

Le résultat (11) adopte ainsi, en vertu des relations (16), la forme suivante

$$\mu \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = -\sigma \sum_{j=1}^3 C_j(\delta) \left\{ \forall E_j \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{B} + E_j \sum_{i=1}^3 \left[ \int_{\Omega} \mathbf{u}_T^{(i)} \cdot (\nabla\phi_0^j \wedge \mathbf{B}) dv \right] \mathbf{e}_i \right\} \quad (18)$$

Remarquons que  $C_j(0) = 1$  et que le potentiel  $\phi_0^j$  est le potentiel régnant à l'extérieur de l'ellipsoïde non conducteur ( $\delta = 0$ ) pour le champ  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_j$ . A la lueur de (7) nous en déduisons le lien important  $S_{ijk}(\delta) = C_j(\delta) S_{ijk}(0)$ , où il n'y a pas de sommation sur l'indice  $j$ , qui permet de déduire la vitesse de l'ellipsoïde conducteur de celle du même ellipsoïde isolant. Ce dernier cas a été traité dans [3] qui fournit (sans sommation des indices  $i$  et  $j$  dans le résultat (19))

$$S_{ijk}(0) = \frac{\varepsilon_{ijk}}{12} \left\{ \frac{\alpha_j(2a_j^2 + \alpha_i a_i^2)}{\alpha_j - 2} - \alpha_i a_i^2 \right\} \quad (19)$$

Le mouvement  $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})$  de l'ellipsoïde s'écrit donc, en combinant (17) et (19),

$$\mathbf{U} = \frac{\sigma}{6\mu} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\varepsilon_{ijk}(\delta - 1)(\alpha_i a_i^2 + \alpha_j a_j^2)}{2 + (\delta - 1)\alpha_j} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_j] [\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_k] \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0} \quad (20)$$

où les coefficients géométriques  $\alpha_i$ , définis par (13), ne dépendent pas de  $\delta = \sigma_s/\sigma$ .

#### 4. Applications immédiates et conclusions

Considérons le cas d'une sphère de rayon  $a$  pour lequel, pour tout  $i$ , nous avons  $a_i = a$  et  $\alpha_i = 2/3$ . L'application immédiate de (20) fournit

$$\mathbf{U} = \frac{\sigma a^2 \delta - 1}{3\mu \delta + 2} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \quad (21)$$

en accord avec les prédictions disponibles [1,2] par le calcul direct (mais complexe) de l'écoulement dans tout le fluide. Comme pour la sphère, l'ellipsoïde décrit par  $a_i' = \lambda a_i$  admet pour vitesse  $\lambda^2$  fois la vitesse de l'ellipsoïde  $(a_1, a_2, a_3)$  et de même conductivité  $\sigma_s$  (il suffit, en utilisant (20), de noter que  $\alpha_j$  est invariant lors de l'homothétie de rapport  $\lambda > 0$  d'après (13)). Toutefois, si la sphère, particule isotrope, se translate parallèlement à  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$  ce n'est plus nécessairement le cas pour un ellipsoïde ! Plus précisément, (20) montre immédiatement que :

- (i) Si  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , alors  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ .  
 (ii) Si  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$  nous pouvons avoir  $\mathbf{U}$  non parallèle à  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ . A titre d'exemple, prenons  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$  avec  $B \neq 0$  et  $E_3 = 0, E_1 \neq 0, E_2 \neq 0$ . Sous ces hypothèses, il vient

$$\mathbf{U} = \frac{\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2}{6\mu} \left\{ \frac{\sigma B(\delta - 1)E_2 \mathbf{e}_1}{2 + (\delta - 1)\alpha_2} - \frac{\sigma B(\delta - 1)E_1 \mathbf{e}_2}{2 + (\delta - 1)\alpha_1} \right\}, \quad \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = B(E_2 \mathbf{e}_1 - E_1 \mathbf{e}_2) \quad (22)$$

Dès que  $a_1 \neq a_2$  nous avons (voir (13))  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  et  $\mathbf{U}$  n'est pas colinéaire à  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ .

- (iii) Notons cependant que si  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$  est colinéaire au vecteur  $\mathbf{e}_i$  alors  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$  sont parallèles. En effet, on trouve aisément dans ce cas que  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_j = 0$  si  $j \neq i$ .

Ainsi, la migration d'une particule ellipsoïdale dépend fortement de l'orientation des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  et de sa conductivité  $\sigma_s \neq \sigma$ . Toutefois, des ellipsoïdes différents peuvent adopter la même vitesse sous certaines conditions. A titre d'illustration, examinons le cas de deux sphéroïdes (ellipsoïdes de révolution) homothétiques, caractérisés par  $(a_1 = a_2, a_3, \delta \neq 1)$  et  $(\lambda a_1, \lambda a_1, \lambda a_3, \delta' \neq 1)$  respectivement, soumis aux champs électrique et magnétique du point (ii) précédent. Pour ces champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , (22) montre que les deux sphéroïdes se déplacent à la même vitesse, colinéaire à  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ , lorsque

$$\lambda^2 = \frac{[\delta - 1][2 + (\delta' - 1)\alpha_1]}{[\delta' - 1][2 + (\delta - 1)\alpha_1]} \quad (23)$$

puisque  $\alpha_j$  est invariant lors de l'homothétie. Le résultat est sensible à l'orientation de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  : si  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_3$  et  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_1$  la migration, parallèle à  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ , devient identique pour

$$\lambda^2 = \frac{[\delta - 1][2 + (\delta' - 1)\alpha_3]}{[\delta' - 1][2 + (\delta - 1)\alpha_3]} \quad (24)$$

Signalons enfin que la formule analytique (20) constitue un précieux moyen de valider, sur une configuration ellipsoïdale, un traitement numérique à développer pour le cas d'une particule conductrice de forme arbitraire.

## Références

- [1] D. Leenov, A. Kolin, Theory of electromagnetophoresis. I. Magnetohydrodynamic forces experienced by spherical and symmetrically oriented cylindrical particles, *J. Chem. Phys.* 22 (1954) 683–688.
- [2] P. Marty, A. Alemany, Theoretical and experimental aspects of electromagnetic separation, in: H.K. Moffatt, M.R.E. Proctor (Eds.), *Metallurgical Applications of Magnetohydrodynamics*, Metals Society, pp. 245–259.
- [3] A. Sellier, Migration of an insulating particle under the action of uniform ambient electric and magnetic fields. Part 2. Boundary formulation and ellipsoidal particles, *J. Fluid Mech.*, submitted.
- [4] R. Moreau, *Magnetohydrodynamics*, Kluwer Academic, 1990.
- [5] H.K. Moffatt, A. Sellier, Migration of an insulating particle under the action of uniform ambient electric and magnetic fields. Part 1. General theory, *J. Fluid Mech.* 464 (2002) 279–286.
- [6] M. Teubner, The motion of charged colloidal particles in electric fields, *J. Chem. Phys.* 76 (11) (1982) 5564–5573.
- [7] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover, New York, 1945.