C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série II *b*, p. 41–46, 2000
Mécanique des fluides/*Fluid mechanics*

Électrophorèse d'une particule allongée sous l'action d'un champ électrostatique axisymétrique

Antoine SELLIER

École polytechnique Ladhyx, 911128 Palaiseau cedex France
Courriel : ladhyx@ladhyx.polytechnique.fr

(Reçu le 13 juillet 1999, accepté le 2 novembre 1999)

Résumé. On approxime asymptotiquement (en fonction de son petit paramètre d'élancement) le mouvement d'une particule allongée, de potentiel « zeta » arbitraire, sous l'action d'un champ électrique axisymétrique (par rapport à la direction principale de la particule) quelconque. Contrairement à la littérature existante, l'étude n'est pas restreinte au cas d'une particule à sections circulaires de potentiels « zeta » constants. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Particule élancée / électrophorèse / écoulement de Stokes

Electrophoretic motion of a slender particle embedded in an axisymmetric electric field

Abstract. *We consider a slender particle of straight centre-line (the line to which it collapses as its slenderness ratio ϵ vanishes) and of possibly non-uniform zeta potential. The body, not necessarily of circular cross-section, is embedded in a given electric field of revolution about the centre-line. Under those assumptions, this work asymptotically approximates, with respect to ϵ, the electrophoretic motion of the particle. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

Slender particle / Electrophoresis / Stokes flow

Abridged English Version

We consider a straight and slender particle $\mathcal{P}$ whose smooth boundary S admits ends O and E with $\mathbf{OE} = L\mathbf{e}_3$ (see *figure 1*). If r' denotes the distance to the $(O, \mathbf{e}_3)$ axis, the small slenderness ratio ϵ obeys $L\epsilon = e := \mathrm{Max}_{M \in S}[r']$ and, in dimensionless cylindrical coordinates (r, θ, x_3) such that $r' = er$ and $\mathbf{OM}.\mathbf{e}_3 = Lx_3$, the equation of S reads $r = f(\theta, x_3)$ where the smooth enough function f^2 vanishes for $x_3(1 - x_3) = 0$ and $\partial_\nu^1 f = \partial f/\partial \nu$ for $\nu \in \{\theta, x_3\}$. The solid $\mathcal{P}$, of zeta potential ζ, is embedded in an unbounded electrolyte of viscosity μ and constant permittivity ϵ_e. Hence, under the action of an external electric field $\mathbf{E}_\infty$, it experiences a rigid-body motion described by the velocity

Note présentée par Paul GERMAIN.

$\mathbf{U}$ of O and the angular velocity $\boldsymbol{\omega}$. If $\mathbf{E}_\infty$ and ζ are uniform, the Smoluchowski's formula $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) = (\epsilon_e \zeta \mathbf{E}_\infty/\mu, \mathbf{0})$ holds [1-3]. This Note approximates, with respect to ϵ, the solution $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$ for the more tricky case of non-uniform zeta potential ζ and axisymmetric field $\mathbf{E}_\infty$. Contrary to available results [4], the particle does not need to be of circular cross-section.

Henceforth, indices i or j belong to $\{1, 2, 3\}$ while $l \in \{1,2\}$ and the usual summation convention is used. If S is nonconducting and admits a typical radius of curvature R, very large compared to the Debye-Hückel screening length κ^{-1} [5-6], the fluid velocity $\mathbf{u}$, the fluid pressure p and the perturbation electrostatic potential ϕ satisfy (2.1)-(2.2), where $\mathbf{n}$ denotes the outer unit normal vector, and the boundary condition (2.3) (see [7]). By virtue of the reciprocal theorem [8], the requirement of zero net hydrodynamic force and torque on $\mathscr{P}$ yields therefore the governing system (2.4)-(2.6) for $\mathbf{U} = U_j\,\mathbf{e}_j$ and $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_j\,\mathbf{e}_j$ if $\boldsymbol{\sigma}_T^{(i)}.\mathbf{n}$ or $\boldsymbol{\sigma}_R^{(i)}.\mathbf{n}$ denote the hydrodynamic surface stresses acting on S for fluid motions obeying (2.1) with $\mathbf{u}_d = \mathbf{e}_i$ or $\mathbf{u}_d = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{OM}$ respectively. The solution $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$ of (2.4)-(2.5) is unique [9] and (see (2.6)) its approximation rests on the asymptotic expansion of vectors $\mathbf{E}_\infty - \nabla\phi$, $\boldsymbol{\sigma}_T^{(i)}.\mathbf{n}$and $\boldsymbol{\sigma}_R^{(i)}.\mathbf{n}$ on S. For $\mathbf{E}_\infty$ axisymmetric and of typical magnitude E near $\mathscr{P}$, one obtains $\mathbf{E}_\infty = EL\,\nabla[\psi(\epsilon^2 r^2, x_3)]$ with a smooth enough function ψ (see [10]). Accordingly [11], the term $\nabla\phi.\mathbf{e}_3$ is small on S as compared to $\mathbf{E}_\infty.\mathbf{e}_3$ and equalities (3.1) hold with $\partial^1_{x_3}\psi = \partial\psi/\partial x_3$. With definitions (2.7), (3.2), $\mathbf{t}^{(i)}_{T,j} = t^{(i)}_T.\mathbf{e}_j$ and $\mathbf{t}^{(i)}_{R,j} = t^{(i)}_R.\mathbf{e}_j$ it follows [12] that $fs_0\, t^{(k)}_{T,3} = O(\epsilon/\log\epsilon)$, $fs_0\, t^{(3)}_{T,k} = O(\epsilon/\log\epsilon)$, $fs_0\, t^{(k)}_{T,l} = O(1/\log\epsilon)$ and also that $fs_0\, t^{(k)}_{R,3} = O(\epsilon)$, $fs_0\, t^{(3)}_{R,k} = O(\epsilon)$, $fs_0\, t^{(k)}_{R,l} = O(1/\log\epsilon)$.Moreover, if the operator K^{x_3} and the function u_0 obey (3.3) in any dimensionless cross-section $C(x_3) = \{P(r, \theta, x_3)\,;\, r = f(\theta, x_3)\}$ with $\mathrm{d}l_P = fs_0\,\mathrm{d}\theta_P$ and $r_{PM} = PM/e$, then (3.4)-(3.6) hold (fp indicating the Hadamard's finite-part [13]). Provided that ζ, U_i, $L\omega_l$ and $e\omega_3$ are made dimensionless by the average $\bar{\zeta}$ of ζ on S and the velocity $\epsilon_e\,\zeta E/\mu$, it is possible to cast (2.4)–(2.5) into the form (3.7) with $8\pi La = K_{33}\log\epsilon$, $8\pi L^2\epsilon c = C_{33}\log\epsilon$, $8\pi\bar{\zeta}Eb = T^{(3)} < \zeta(\mathbf{E}_\infty - \nabla\phi) > \log\epsilon$ and (3.8)–(3.9). Cramer's rule yields the asymptotic solution (3.10) with $\epsilon_1 := \epsilon\log\epsilon$ for $c \neq 0$, else $\epsilon_1 := \epsilon$ (for instance $\bar{c}$ vanishes as soon as $\mathscr{P}$ admits a plane of symmetry [9]).

For ζ and $\mathbf{E}_\infty = \mathbf{e}_3$ uniform, (3.10) reads $U_3 = 1 + O(\epsilon)$ and this agrees with the Smoluchowski's velocity $U_{3s} = 1$. For other cases, $U_3 - U_{3s}$ may be large. Indeed, (3.5) shows that (4.1) holds and for $\zeta = \zeta(x_3)$ the term U_{30} becomes $\int_0^1 \zeta(x_3)\,\partial^1_{x_3}\psi(0, x_3)\,\mathrm{d}x_3$ and may vanish (for instance, take for $\zeta(x_3)\,\partial^1_{x_3}\psi(0, x_3)$ an odd function of $x_3 - 1/2$). In the case of a particle of elliptical cross sections (such that (4.2) holds on S) with $\zeta = \zeta(\varphi, x_3)$, if φ denotes the elliptical angle $(\tan\theta = \eta\tan\varphi)$, then c_0 and u_0 obey (4.3) and, therefore U_{30} is given by (4.4). Finally, one can easily derive the improved estimate (4.5) for a slender ellipsoid (take $h^2(x_3) = 4x_3(1 - x_3)$).

1. Introduction

L'électrophorèse (voir la rubrique suivante) étudie le mouvement $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$ d'une particule solide, de potentiel « zêta » ζ, sous l'action d'un champ électrique imposé $\mathbf{E}_\infty$. Pour ζ et $\mathbf{E}_\infty$ uniformes, la solution de Smoluchowski $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega}) = (\epsilon_e \zeta \mathbf{E}_\infty/\mu, \mathbf{0})$ s'applique [1-3]. Pour certaines applications où la particule est allongée (argile par exemple) et $\mathbf{E}_\infty$ ou ζ ne sont pas a priori uniformes, estimer asymptotiquement $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$ revêt un réel intérêt [4]. Cette note présente, dans le cas simplifié de $\mathbf{E}_\infty$ axisymétrique (voir ci-après) et ζ quelconques, une méthode générale approximant $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$ pour une particule allongée arbitraire (pas nécéssairement à sections circulaires où ζ est uniforme, comme supposé dans [4]).

2. Le système à résoudre et les hypothèses de travail

Soit une particule solide (ouvert connexe $\mathscr{P}$ de frontière S ; voir *figure 1*) plongée dans un électrolyte, de viscosité μ et de permittivité diélectrique ϵ_e, occupant le domaine infini $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \mathscr{P}$. Par intéraction avec l'électrolyte, S acquiert une distribution de charges et de « zêta » potentiel ζ et une pellicule d'ions, d'épaisseur d'ordre de la longueur κ^{-1} de Debye-Hückel, enveloppe $\mathscr{P}$ [5]. Sous l'action d'un champ électrostatique $\mathbf{E}_\infty$, la particule admet un mouvement décrit par la vitesse $\mathbf{U}$ de l'un de ses points O et sa vitesse de rotation $\boldsymbol{\omega}$. Pour S non conductrice et de rayon de courbure typique $R \gg \kappa^{-1}$ [6], le potentiel électrostatique de perturbation ϕ, la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression p de l'électrolyte Newtonien vérifient

$$\nabla^2 \phi = 0 \text{ dans } \Omega \,; \quad \nabla\phi \to \mathbf{0} \text{ si } OM \to \infty \,; \quad \nabla\phi.\mathbf{n} = \mathbf{E}_\infty.\mathbf{n} \text{ sur } S \tag{2.1}$$

$$\mu\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p, \nabla.\mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \,; \quad (\mathbf{u}, p) \to (\mathbf{0}, 0) \text{ si } OM \to \infty \,; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } S \tag{2.2}$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale sortante à S et $\mathbf{u}_d$ est liée à $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$ et $(\mathbf{E}_\infty, \nabla\phi)$ par [7] :

$$\mathbf{u}_d(M) = \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OM} - \epsilon_e \zeta(M) \left[\mathbf{E}_\infty - \nabla\phi\right](M)/\mu \tag{2.3}$$

Le couple $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$ est alors obtenu en exigeant la nullité du torseur des efforts hydrodynamiques exercés par l'écoulement $(\mathbf{u}, p)$ sur $\mathscr{P}$. En notant, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{\sigma}_T^{(i)}$ et $\boldsymbol{\sigma}_R^{(i)}$ les tenseurs des contraintes associés aux six écoulements particuliers régis par (2.1) respectivement pour $\mathbf{u}_d = \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{u}_d = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{OM}$, l'usage du théorème de réciprocité mène au système [8]

$$\mu\{K_{ij}\, U_j + C_{ij}\, \omega_j\} = \epsilon_e\, T^{(i)} < \zeta(\mathbf{E}_\infty - \nabla\phi) > ; \; K_{ij} = T^{(i)} < \mathbf{e}_j > ; \; C_{ij} = R^{(j)} < \mathbf{e}_i > \tag{2.4}$$

$$\mu\{D_{ij}\, U_j + \Omega_{ij}\, \omega_j\} = \epsilon_e\, R^{(i)} < \zeta(\mathbf{E}_\infty - \nabla\phi) > ; \; \Omega_{ij} = T^{(j)} < \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{OM} > ; \; D_{ij} = C_{ji} \tag{2.5}$$

où la convention de sommation d'Einstein est adoptée ($\mathbf{U} = U_j\, \mathbf{e}_j$, $\boldsymbol{\omega} = \omega_j\, \mathbf{e}_j$) et :

$$\mu T^{(i)} < \mathbf{a} > := -\int_S \mathbf{a}.\boldsymbol{\sigma}_T^{(i)}.\mathbf{n}\, \mathrm{d}S \,; \quad \mu R^{(i)} < \mathbf{a} > := -\int_S \mathbf{a}.\boldsymbol{\sigma}_R^{(i)}.\mathbf{n}\, \mathrm{d}S \tag{2.6}$$

Ici, nous cherchons l'unique solution [9] de (2.4)–(2.5) pour une particule allongée (voir *figure 1*) d'extrémités O et E telle que si $L = OE$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{OE}/L$ et r' est la distance de M à l'axe $(O, \mathbf{e}_3)$ alors $e := \mathrm{Max}_{M \in S}\,[r'] = \epsilon L$ où $0 < \epsilon \ll 1$.

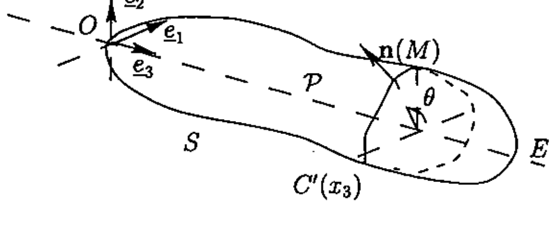

Figure 1. La particule allongée et nos notations.

Figure 1. *The slender particle and our notations.*

Pour $r' = re$ et $\mathbf{OM}.\mathbf{e}_3 = Lx_3$, nous supposons aussi que S admet en coordonnées cylindriques adimensionnées (r, θ, x_3) l'équation $r = f(\theta, x_3)$ où f^2 est différentiable et s'annule avec $x_3(1 - x_3)$. Si $\partial_v^1 f = \partial f/\partial v$ pour $v \in \{\theta, x_3\}$ et a est réel, notons enfin que

$$\mathrm{d}S = eL[fs_\epsilon]\,(\theta, x_3)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x_3; \quad s_a := \{1 + (f^{-1} f_\theta^1)^2 + (a f_{x_3}^1)^2\}^{1/2} \tag{2.7}$$

Selon (2.4)–(2.7), l'approximation du couple $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$ en fonction du petit paramètre ϵ passe par celle des vecteurs $\mathbf{E}_\infty - \nabla\phi$, $\boldsymbol{\sigma}_T^{(i)}.\mathbf{n}$ et $\boldsymbol{\sigma}_R^{(i)}.\mathbf{n}$ sur S. La rubrique suivante détaille ce travail.

3. La solution asymptotique pour $\mathbf{E}_\infty$ axi-symétrique

Si $\mathbf{E}_\infty = -\nabla\phi_\infty$ de norme typique E est à symétrie de révolution autour de $(O, \mathbf{e}_3)$ alors [10], au voisinage de $\mathscr{P}$, $\phi_\infty(M) = -EL\psi(\epsilon^2 r^2, x_3)$ où la fonction différentiable ψ et ses dérivées sont de l'ordre de l'unité au voisinage de $[0, \epsilon] \times [0, 1]$. Si $\partial_{x_3}^1 \psi := \partial\psi/\partial x_3$, nous pouvons négliger $\nabla\phi.\mathbf{e}_3$ devant $\mathbf{E}_\infty.\mathbf{e}_3$ sur S [11] et nous obtenons les estimations

$$\mathbf{E}_\infty.\mathbf{e}_3 = E\{\partial_{x_3}^1 \psi(0, x_3) + O(\epsilon^2)\}; \quad (\mathbf{E}_\infty - \nabla\phi).\mathbf{e}_l = EO(\epsilon) \text{ si } l \in \{1, 2\} \tag{3.1}$$

D'après (2.6)-(2.7), il reste à estimer asymptotiquement les vecteurs $\mathbf{t}_T^{(i)} = t_{T,j}^{(i)}\,\mathbf{e}_j$ et $\mathbf{t}_R^{(i)} = t_{R,j}^{(i)}\,\mathbf{e}_j$ définis sur S par les relations (voir (2.7))

$$8\pi\mu f s_0\, \mathbf{t}_T^{(i)} = e f s_\epsilon\, \boldsymbol{\sigma}_T^{(i)}.\mathbf{n}\,; \quad 8\pi\mu L f s_0\, \mathbf{t}_R^{(i)} = e f s_\epsilon\, \boldsymbol{\sigma}_R^{(i)}.\mathbf{n} \tag{3.2}$$

Pour k et l appartenant à $\{1, 2\}$, les résultats établis dans [12] fournissent d'une part $fs_0\, t_{T,3}^{(k)} = O(\epsilon/\log\epsilon)$, $fs_0\, t_{T,k}^{(3)} = O(\epsilon/\log\epsilon)$, $fs_0\, t_{T,l}^{(k)} = O(1/\log\epsilon)$, d'autre part $fs_0\, t_{R,3}^{(k)} = O(\epsilon)$, $fs_0\, t_{R,k}^{(3)} = O(\epsilon)$, $fs_0\, t_{R,l}^{(k)} = O(1/\log\epsilon)$. Enfin, si $C(x_3) = \{P(r, \theta, x_3)\,;\, r = f(\theta, x_3)\}$ désigne le contour (adimensionné par e) de la section de $\mathscr{P}$ d'ordonnée Lx_3 et l'opérateur K^{x_3} et la fonction u_0 obéissent aux définition et équation intégrales suivantes

$$K^{x_3}[u] = \oint_{C(x_3)} u(P)\,\mathrm{d}l_P\,; \quad \oint_{C(x_3)} u_0(P) \log[r_{PM}]\,\mathrm{d}l_P = -1 \text{ sur } S \tag{3.3}$$

et avec $\mathrm{d}l_P = fs_0\,\mathrm{d}\theta_P$ et $r_{PM} = PM/e$ nous obtenons également les comportements

$$fs_0\, t_{T,3}^{(3)} = \sum_{m \geq 1} fs_0\, t_m [\log\epsilon]^{-m} + O\left(\frac{\epsilon}{\log\epsilon}\right); fs_0\, t_{R,3}^{(3)} = fs_0\, \epsilon^2\{t_{-1}\log\epsilon + t_0\} + O\left(\frac{\epsilon^2}{\log\epsilon}\right) \tag{3.4}$$

où les fonctions t_n satisfont $fs_0\, t_n = O(1)$ et, pour $m \geq 1$,

$$K^{x_3}[t_{-1}] = 0\,; \quad t_m = \frac{T_{x_3}^{m-1}[1]}{4c_0(x_3)}\, u_0 \quad \text{avec} \quad c_0(x_3) := K^{x_3}[u_0] \neq 0 \tag{3.5}$$

$$T_{x_3}[\alpha(t)] = \left\{\frac{1}{c_0(x_3)} - \frac{1}{2} + \log 2\right\} \alpha(x_3) + fp \int_0^1 \frac{\alpha(t)\,\mathrm{d}t}{2|t - x_3|} \tag{3.6}$$

si fp désigne la partie finie au sens d'Hadamard [13], $T^0_{x_3} = id$ et enfin $T^m_{x_3} = T^{m-1}_{x_3} \circ T_{x_3}$ si $m \geq 1$. En adimensionnant ζ par sa moyenne $\bar{\zeta}$ sur S et les vitesses U_i, $e\omega_3$ et $L\omega_l$ par $\epsilon_e \bar{\zeta} E/\mu$ les comportements et définitions précédents permettent alors de réécrire le système (2.4)–(2.5) sous la forme

$$\begin{bmatrix} O(1) & O(1) & O(\epsilon) & O(1) & O(1) & O(1) \\ O(1) & O(1) & O(\epsilon) & O(1) & O(1) & O(1) \\ O(\epsilon) & O(\epsilon) & a & O(\epsilon) & O(\epsilon) & c \\ O(1) & O(1) & O(\epsilon) & O(1) & O(1) & O(1) \\ O(1) & O(1) & O(\epsilon) & O(1) & O(1) & O(1) \\ O(1) & O(1) & c & O(1) & O(1) & O(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ L\omega_1 \\ L\omega_2 \\ e\omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O(\epsilon) \\ O(\epsilon) \\ b \\ O(\epsilon) \\ O(\epsilon) \\ O(\epsilon) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

où $8\pi La = K_{33} \log \epsilon$, $8\pi L^2 \epsilon c = C_{33} \log \epsilon$ et $8\pi \bar{\zeta} Eb = T^{(3)} < \zeta(\mathbf{E}_\infty - \nabla\phi) > \log\epsilon$, à savoir

$$a = \bar{K} \log \epsilon + O(\epsilon)\,; \quad b = \bar{T} \log \epsilon + O(\epsilon)\,; \quad c = \bar{c}\epsilon \log \epsilon + O(\epsilon), \quad \bar{c} = \int_0^1 K^{x_3}[t_0]\, dx_3 \tag{3.8}$$

$$\bar{T} = -\sum_{m \geq 1} \left\{ \int_0^1 \partial^1_{x_3}\, \psi(0, x_3)\, K^{x_3}[\zeta t_m]\, dx_3 \right\} [\log \epsilon]^{-m}; \quad \bar{K} = -\sum_{m \geq 1} \left\{ \int_0^1 K^{x_3}[t_m]\, dx_3 \right\} [\log \epsilon]^{-m} \tag{3.9}$$

Une application soignée de la règle de Cramer fournit alors la solution asymptotique cherchée

$$U_3 = \bar{T}/\bar{K} + O(\epsilon)\,; \quad e\omega_3 = O(\epsilon_1)\,; \quad L\omega_l = O(\epsilon_1)\,; \quad U_l = O(\epsilon_1)\,; \quad l \in \{1, 2\}$$

où $\epsilon_1 = \epsilon\log\epsilon$ si $\bar{c} \neq 0$ et $\epsilon_1 = \epsilon$ sinon (par exemple, dès que $\mathscr{P}$ admet un plan de symétrie C_{33} et donc $\bar{c}$ sont nuls [9]). Ainsi, l'approximation de $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\omega})$ requiert seulement la trace de $\mathbf{E}_\infty.\mathbf{e}_3$ sur le segment $O'E'$ et l'obtention, dans toute section $C(x_3)$, de u_0 via (3.3).

4. Commentaires immédiats et applications

Pour ζ et $\mathbf{E}_\infty = \mathbf{e}_3$ uniformes, la solution $U_3 = 1 + O(\epsilon)$ prédite par (3.8)–(3.10) est compatible avec le résultat $U_{3s} = 1$ de Smoluchowski [1]. Pour ζ ou une trace de $\mathbf{E}_\infty.\mathbf{e}_3$ sur $O'E'$ non uniforme(s), l'écart à la solution U_{3s} peut toutefois être considérable. En effet, (3.5) montre que $K^{x_3}[t_1] = 1/4$ et l'approximation (3.10) de U_3 s'écrit aussi

$$U_3 = U_{30} + O(1/\log \epsilon)\,; \quad U_{30} = \int_0^1 \partial^1_{x_3}\, \psi(0, x_3)\, K^{x_3}[\zeta u_0]/c_0(x_3)\, dx_3 \tag{4.1}$$

Ainsi, pour $\zeta = \zeta(x_3)$ le terme dominant $U_{30} = \int_0^1 \zeta(x_3)\, \partial^1_{x_3}\psi(0, x_3)\, dx_3$ ne dépend pas de la forme de la particule et peut même s'annuler (par exemple, pour une fonction $\zeta(x_3)\, \partial^1_{x_3}\psi(0, x_3)$ impaire de $x_3 - 1/2$). Si $\zeta = \zeta(\theta, x_3)$ il faut déterminer la solution u_0 de (3.3) dans toute section $C(x_3)$. À titre d'exemple, considérons une particule allongée $\mathscr{P}$ de sections elliptiques homothétiques telle que, pour $M \in S$,

$$x_1^2 + x_2^2/\eta^2 = h^2(x_3)\ ; \quad ex_l = \mathbf{OM}.\mathbf{e}_l,\ l \in \{1, 2\} \tag{4.2}$$

où $0 < \eta = O(1)$ et la fonction h^2, régulière, s'annule avec $x_3(1 - x_3)$. Dans un tel cas [12]

$$\frac{1}{c_0(x_3)} = -\log\left[\frac{1+\eta}{2} h(x_3)\right]\ ; \quad u_0(\theta, x_3) = \frac{c_0(x_3)}{2\pi\eta\{x_1^2 + x_2^2/\eta^4\}^{1/2}} \tag{4.3}$$

et, en désignant par φ l'angle elliptique (tel que $\tan\theta = \eta \tan\varphi$),

$$U_{30} = \int_0^1 <\zeta>(x_3)\, \partial_{x_3}^1\, \psi(0, x_3)\, \mathrm{d}x_3; \quad 2\pi <\zeta>(x_3) = \int_0^{2\pi} \zeta(\varphi, x_3)\, \mathrm{d}\varphi \tag{4.4}$$

Ainsi, si $\zeta(\theta + \pi, x_3) = -\zeta(\theta, x_3)$ pour $x_3 \in\ ]0, 1[$ alors $U_3 = O(1/\log \epsilon)$ pour tout champ $\mathbf{E}_\infty$ axisymétrique.

Enfin, notons que pour un ellipsoide allongé (choisir $h^2(x_3) = 4x_3(1 - x_3)$) les résultats (3.5)–(3.6) et (3.9)–(3.10) conduisent à une extension de (4.1). En effet, dans ce cas (4.3) montre que

$$T_{x_3}[1] = -\frac{1}{2} - \log\left[\frac{1+\eta}{2}\right], \quad U_3 = U_{30} + O(\epsilon) \tag{4.5}$$

où U_{30} conserve sa définition (4.1). La forme (4.5) de U_3 reste en fait valable pour toute particule allongée à sections homothétiques telle que $f(\theta, x_3) = h(x_3)\, g(\theta)$ avec $h^2(x_3) = 4x_3(1 - x_3)$ (seule la valeur, constante, de $T_{x_3}[1]$ changeant dans (4.5)).

Références bibliographiques

[1] Smoluchowski M.V., In: Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus (Ed.) L. Graetz, J.A. Barth, Leipzig, 1921.
[2] Morrison F.A., Electrophoresis of a particle of arbitrary shape, J. Colloid. Interface Sci. 34 (1970) 210–214.
[3] Teubner M., The motion of charged colloidal particles in electric fields, J. Chem. Phys. 76 (11) (1982) 5564–5573.
[4] Solomentsev Y., Anderson J.L., Electrophoresis of slender particles, J. Fluid Mech. 279 (1994) 197–215.
[5] Hiemenz P.C., Rajagopalan R., Principles of Colloid and Surface Chemistry, Marcel Dekker, New York, 1986.
[6] Hunter R.J., Zeta Potential in Colloid Science, Academic, New York, 1981.
[7] Anderson J.L., Colloid transport by interfacial forces, Ann. Rev. Fluid. Mech. 21 (1989) 61–99.
[8] Kim S., Karrila S.J., Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications, Butterworth, 1991.
[9] Happel J., Brenner H., Low Reynolds number hydrodynamics, Martinus Nijhoff, 1973.
[10] Geer J., Stokes flow past a slender body of revolution, J. Fluid Mech. 78 (1976) 577–600.
[11] Sellier A., A slender dielectric body embedded in an arbitrary external potential, soumis à IMA J. of Appl. Math.
[12] Sellier A., Stokes flow past a slender particle, Proc. Roy. Soc. Lond. A455 (1999) 2975-3002.
[13] Schwartz L., Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1966.