

Sur l'électrophorèse d'un ensemble de particules portant la même densité uniforme de charges

Antoine SELLIER

Ladhyx, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

E-mail : sellier@ladhyx.polytechnique.fr

(Reçu le 15 décembre 1998, accepté le 28 décembre 1998)

Résumé. On étudie le mouvement de particules solides, plongées dans un électrolyte et portant la même répartition uniforme de charges, sous l'action d'un champ électrostatique E_∞ non nécessairement uniforme. Fait remarquable, il s'avère pour cela inutile de déterminer le champ électrostatique effectif E régnant dans la solution. © Académie des sciences/Elsevier, Paris

électrophorèse / écoulement de Stokes / théorème de réciprocité

On the electrophoretic motion of particles admitting the same uniform charge

Abstract. *We consider the electrophoresis of solid particles embedded in a possibly non-uniform electric field E_∞ . For particles admitting the same uniform zeta potential, the rigid-body motion of each particle is obtained without calculating the total electric field E within the electrolyte. © Académie des sciences/Elsevier, Paris*

electrophoresis / Stokes flow / reciprocal identity

Abridged English Version

We consider the electrophoresis of an assemblage of $N \geq 1$ solid particles moving in an electrolyte, of constant permittivity ϵ and viscosity μ , under the action of a possibly non-uniform external electric field E_∞ . For particles admitting the same uniform zeta potential, this note shows that it is actually possible to determine the rigid-body motion of each particle without computing the electric field E within the electrolyte.

For $n \in \{1, \dots, N\}$, O_n and S_n (see *figure 1*) denote points attached to the particle \mathcal{P}_n and the surface of \mathcal{P}_n respectively. Each particle is surrounded by a thin cloud \mathcal{C}_n of counter-ions whose typical thickness is the Debye-Hückel screening length [2]. Outside these clouds the fluid remains neutral but the electric field becomes E where the perturbation field $E - E_\infty$ is induced by the charges on the particles and within the clouds and admits the electrostatic potential ϕ' . The application of E_∞

Note présentée par Paul GERMAIN.

results in a *quasi-static* Stokes motion (\mathbf{u}, p) of the fluid and a rigid-body motion of each particle \mathcal{P}_n (described by the translational and angular velocities $\mathbf{U}^{(n)}$ and $\boldsymbol{\omega}^{(n)}$). We designate by R the typical radius of curvature of the surface S consisting of all the surfaces S_n , and by Ω the fluid domain. If the electric field \mathbf{E}_∞ only experiences variations over lengths of order of $L \gg R$ and $\kappa R \rightarrow \infty$, the flow (\mathbf{u}, p) and the potential ϕ' satisfy the problem (2.2)–(2.4) with $\mathbf{u}_d := \mathbf{u}^{(n)}$ on each S_n where $\mathbf{u}^{(n)}$ is given by (2.1). For (2.3) note that \mathbf{n} and ζ_n respectively denote the unit outwarding normal and the zeta potential on S_n in (2.1) whilst $r := OM$ for a given origin O (*figure 1*). By expanding the creeping motion equations (2.2) in terms of spherical harmonics [4, 5], one shows that if $\mathbf{u} \rightarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$ then, far from O , $|\mathbf{u}| \sim 1/r$, $p \sim 1/r^2$ and $|\boldsymbol{\sigma}| \sim 1/r^2$ where the stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ obeys (2.5). Since the net charge of $S_n \cup \mathcal{C}_n$ is zero, \mathbf{E}_∞ exerts zero force and torque on each \mathcal{P}_n . Thus, once (\mathbf{u}, p, ϕ') is reached, the velocities $(\mathbf{U}^{(n)}, \boldsymbol{\omega}^{(n)})$ are obtained by imposing on each \mathcal{P}_n zero net force $\mathbf{F}^{(n)} = F_i^{(n)} \mathbf{e}_i$ and torque $\boldsymbol{\Gamma}^{(n)} = \Gamma_i^{(n)} \mathbf{e}_i$ (about the point O_n), i.e. the conditions (2.6).

If (\mathbf{u}, p) and (\mathbf{u}', p') satisfy (2.2)–(2.4) for functions \mathbf{u}_d and \mathbf{u}'_d , the reciprocal identity (3.1) [5] yields the relations (3.3) where the $6N$ motions $(\mathbf{u}_T^{(n),i}, p_T^{(n),i}, \boldsymbol{\sigma}_T^{(n),i})$ and $(\mathbf{u}_R^{(n),i}, p_R^{(n),i}, \boldsymbol{\sigma}_R^{(n),i})$ obey (2.2)–(2.3) with boundary conditions (3.2). Hence, one deduces for the generalized unknown $\mathbf{X} := (\mathbf{U}^{(1)}, \dots, \mathbf{U}^{(N)}, \boldsymbol{\omega}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\omega}^{(N)})$ the linear system (3.4)–(3.5) whose associated matrix \mathbf{M} is symmetric, positive-definite [6] and given by (3.6) (replace the subscript T by R if necessary). Hence, (3.4)–(3.5) admit a unique solution. In the general case, one has to obtain the velocity $\mathbf{v} := \nabla\phi'$ on S before computing the right-hand sides of (3.4)–(3.5).

Henceforth, we restrict ourselves to particles admitting the same uniform zeta potential ζ . In such circumstances, the system (3.4)–(3.5) suggests calculating the terms $a_T^{(n),i}$ and $a_R^{(n),i}$ introduced by (4.3)–(4.4). In this task, note that the Neumann problem (2.2)–(2.4) gives $\mathbf{v} := \nabla\phi'$ in Ω and yields

[7] the representation (4.1) with $\int_{S_n} q_m \, dS_m = 0$. Moreover, since the flow $(\mathbf{v}, 0)$ also satisfies the Stokes equations (2.2)–(2.3) the reciprocal identity ensures (4.3)–(4.4). Observe that (4.1) actually defines ϕ'_m in $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{P}_m$. Moreover, $\partial\phi'_m/\partial x_i$ is harmonic in a neighborhood of \mathcal{P}_n if $m \neq n$. This latter remark shows that the sum arising on the right-hand side of (4.3) vanishes. If one introduces the notation $\mathbf{O}_n \mathbf{M} = x_i^{(n)} \mathbf{e}_i$, the domain $\Omega_n(d)$ and the surface $\Sigma_n(d)$, use of the divergence theorem yields (4.5)–(4.6) (where ϵ_{kil} is the completely antisymmetric permutation tensor). Since $\epsilon_{kil} + \epsilon_{lik} = 0$, $\phi'_n \sim 1/r^2$ if $r \rightarrow \infty$ and $\partial\phi'_n/\partial x_i$ is harmonic in $\Omega_n(d)$, it follows that $a_T^{(n),i} = b_m^{(n),i} = 0$ for any m . Thus, only the terms involving the applied field \mathbf{E}_∞ arise in the right-hand sides of (3.4)–(3.5).

For a uniform field \mathbf{E}_∞ , the unique and trivial solution (5.1) is immediately deduced. For $N = 1$, such a solution has been obtained (after a good deal of algebra) in [8] for a sphere and for a particle of arbitrary shape in [9, 10]. In addressing the more tricky case of a non-uniform field \mathbf{E}_∞ , one has only to compute the $6N$ surface forces $\boldsymbol{\sigma}_T^{(n),i}$ and $\boldsymbol{\sigma}_R^{(n),i}$.

1. Introduction

L'électrophorèse joue un rôle important dans l'étude des solutions colloïdales de particules solides chargées. Elle permet non seulement de séparer divers types de particules, mais aussi d'accéder aux propriétés physiques de leurs surfaces [1]. Ici, nous supposons que toutes les particules portent la même densité surfacique uniforme de charges, mais que le champ électrostatique appliqué \mathbf{E}_∞ n'est pas nécessairement uniforme. Sous d'autres hypothèses classiques du domaine, cette note montre que le

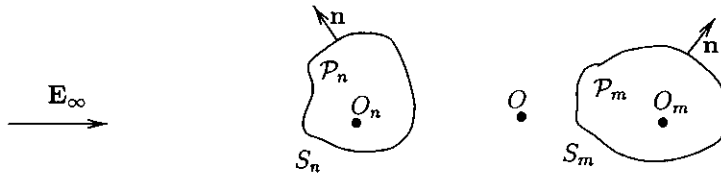
mouvement de corps solide de chaque particule s'obtient alors sans déterminer au préalable le champ électrique total E régnant dans l'électrolyte.

2. Présentation des hypothèses et du problème

On considère $N \geq 1$ particules solides plongées dans un électrolyte infini, de permittivité diélectrique ϵ et de viscosité μ . La surface fermée S_n désigne la frontière de la particule \mathcal{P}_n de numéro $n \in \{1, \dots, N\}$ et O_n un point lié à cette particule (figure 1).

Figure 1. Représentation de deux particules \mathcal{P}_m et \mathcal{P}_n pour $n \neq m$ et $N \geq 2$.

Figure 1. Our notations for two particles \mathcal{P}_m and \mathcal{P}_n if $n \neq m$ and $N \geq 2$.



Chaque particule \mathcal{P}_n est entourée d'une pellicule \mathcal{C}_n d'ions (de signe opposé à celui des charges présentes sur S_n) confinée entre les surfaces S_n et S_n^+ et ayant pour épaisseur typique la longueur κ^{-1} de Debye-Hückel [2]. Les surfaces S_n^+ , très proches des surfaces S_n , ne sont pas indiquées sur la figure. En dehors des domaines \mathcal{C}_n , le fluide reste neutre, au repos à l'infini et plongé dans un champ électrique total E . Ce dernier induit un mouvement des ions de chaque \mathcal{C}_n et donc, par viscosité, de \mathcal{P}_n et du fluide. On décrit le mouvement du solide \mathcal{P}_n par sa vitesse angulaire de rotation $\omega^{(n)}$ et la vitesse $U^{(n)}$ de O_n . Le fluide acquiert un écoulement de Stokes permanent. Désignons par ϕ' le potentiel de $E - E_\infty$ et par u et p la vitesse et la pression du fluide. Sous l'hypothèse $\kappa R \gg 1$, où R est le rayon de courbure typique des surfaces S_n , nous obtenons sur chaque surface S_n^+ [3] les conditions aux limites :

$$u(M) = u^{(n)}(M) := U^{(n)} + \omega^{(n)} \wedge O_n M + \frac{\epsilon \zeta_n(M)}{\mu} (\nabla \phi' - E_\infty); \nabla \phi' \cdot n = E_\infty \cdot n \quad (2.1)$$

où n désigne la normale sortante à S_n^+ . La condition (2.1) sur ϕ' indique que chaque particule est isolante, tandis que ζ_n désigne le potentiel « zêta » de \mathcal{P}_n qui peut être relié à la densité de charges sur S_n (pour plus de détails voir [2]). À la limite $\kappa R \rightarrow \infty$, la frontière S du domaine fluide Ω devient la réunion des S_n et pour E_∞ n'admettant que des variations à une échelle $L \gg \kappa^{-1}$, les conditions (2.1) sont prescrites sur chaque S_n . Outre ces conditions couplées, le potentiel ϕ' et l'écoulement (u, p) vérifient :

$$\mu \nabla^2 u = \nabla p; \nabla \cdot u = 0; \nabla^2 \phi' = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.2)$$

$$(u, p) \rightarrow (0, 0); \nabla \phi' \rightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

$$u = u_d; \nabla \phi' \cdot n = E_\infty \cdot n \quad \text{sur } S \quad (2.4)$$

avec $r := OM$ où O est une origine à distance finie des particules (figure 1) et $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}^{(n)}$ sur S_n . Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ associé à l'écoulement (\mathbf{u}, p) s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j; \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \quad (2.5)$$

si δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker et $\mathbf{OM} = x_i \mathbf{e}_i$. En exploitant (2.2) en coordonnées sphériques [4], la condition $(\mathbf{u}, p) \rightarrow (\mathbf{0}, \text{cste})$ à l'infini montre que, si $r \rightarrow \infty$, alors $|\mathbf{u}| \sim 1/r$, $p \sim 1/r^2$ et $\sigma_{ij} \sim 1/r^2$, ce qui justifie (2.3) pour p . La résolution du problème (2.1)–(2.4) procure $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction des inconnues $(\mathbf{U}^{(n)}, \boldsymbol{\omega}^{(n)})$. Le champ électrique n'exerce, pour $\kappa R \rightarrow \infty$, ni force, ni couple globaux sur chaque particule. Ces dernières ayant un mouvement quasi permanent, les inconnues $(\mathbf{U}^{(n)}, \boldsymbol{\omega}^{(n)})$ s'obtiennent donc en imposant une force totale $\mathbf{F}^{(n)} = F_i^{(n)} \mathbf{e}_i$ et un couple total $\boldsymbol{\Gamma}^{(n)} = \Gamma_i^{(n)} \mathbf{e}_i$ (par rapport à O_n) nuls sur chaque \mathcal{P}_n . Ainsi, pour $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq n \leq N$, il faut assurer :

$$F_i^{(n)} = \int_{S_n} \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS_n = 0; \quad \Gamma_i^{(n)} = \int_{S_n} [\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{O}_n \mathbf{M}] \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS_n = 0 \quad (2.6)$$

3. Le théorème de réciprocité et le système d'équations linéaires

Si deux écoulements (\mathbf{u}, p) et (\mathbf{u}', p') obéissent à (2.2)–(2.4) pour des données \mathbf{u}_d et \mathbf{u}'_d avec $\boldsymbol{\sigma}' := \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}', p')$, alors le théorème de réciprocité [5] s'écrit, avec S réunion des S_n ,

$$\int_S \mathbf{u}'_d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \mathbf{u}_d \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.1)$$

La démonstration fait appel aux comportements en $1/r$ de la vitesse et en $1/r^2$ du tenseur des contraintes à l'infini. L'introduction des $6N$ mouvements particuliers $(\mathbf{u}_T^{(n),i}, p_T^{(n),i}, \boldsymbol{\sigma}_T^{(n),i})$ et $(\mathbf{u}_R^{(n),i}, p_R^{(n),i}, \boldsymbol{\sigma}_R^{(n),i})$ obéissant à (2.2)–(2.3) et aux conditions :

$$\mathbf{u}_T^{(n),i} = \delta_{nm} \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{u}_R^{(n),i} = \delta_{nm} [\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{O}_n \mathbf{M}] \text{ sur } S_m \quad \text{pour } 1 \leq m \leq N \quad (3.2)$$

permet, par application licite de (3.1), de réécrire (2.6) sous la forme :

$$F_i^{(n)} = \sum_m \int_{S_m} \mathbf{u}^{(m)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_T^{(n),i} \cdot \mathbf{n} \, dS_m = 0; \quad \Gamma_i^{(n)} = \sum_m \int_{S_m} \mathbf{u}^{(m)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_R^{(n),i} \cdot \mathbf{n} \, dS_m = 0 \quad (3.3)$$

avec $\mathbf{u}^{(m)}$ défini par (2.1). En exploitant (2.1), nous obtenons le système de $6N$ équations linéaires pour l'inconnue généralisée $\mathbf{X} := (\mathbf{U}^{(1)}, \dots, \mathbf{U}^{(N)}, \boldsymbol{\omega}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\omega}^{(N)})$

$$\sum_m \sum_j \{A_{(m),T}^{(n),ij} U_j^{(m)} + B_{(m),T}^{(n),ij} \omega_j^{(m)}\} = -\frac{\epsilon}{\mu^2} \int_S \zeta [\mathbf{E}_\infty - \nabla \phi'] \cdot \boldsymbol{\sigma}_T^{(n),i} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.4)$$

$$\sum_m \sum_j \{A_{(m),R}^{(n),ij} U_j^{(m)} + B_{(m),R}^{(n),ij} \omega_j^{(m)}\} = -\frac{\epsilon}{\mu^2} \int_S \zeta [\mathbf{E}_\infty - \nabla \phi'] \cdot \boldsymbol{\sigma}_R^{(n),i} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.5)$$

avec les définitions suivantes (où il faut, dans le cas de l'indice R , remplacer T par R),

$$\mu A_{(m),T}^{(n),ij} = - \int_{S_m} \mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}_T^{(n),i} \cdot \mathbf{n} \, dS_m ; \quad \mu B_{(m),T}^{(n),ij} = - \int_{S_m} (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{O}_m \mathbf{M}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_T^{(n),i} \cdot \mathbf{n} \, dS_m \quad (3.6)$$

L'utilisation du théorème de réciprocity et de considérations de dissipation énergétique en écoulement de Stokes [6] montre que la matrice \mathbf{M} associée au système $\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{D}$ précédent est symétrique et définie positive. Ainsi, (3.4)–(3.5) admet une unique solution \mathbf{X} pour tout second membre \mathbf{D} . En pratique, il faut évaluer \mathbf{M} (via les *mouvements particuliers*) et \mathbf{D} en déterminant le champ $\mathbf{v} := \nabla \phi'$ dans Ω et sur \mathcal{S} .

4. Cas où les particules portent la même densité uniforme de charges

Nous montrons que si ζ admet sur chaque S_n la même valeur constante, alors les termes impliquant $\mathbf{v} := \nabla \phi'$ dans (3.4)–(3.5) sont nuls. Notons d'abord que le problème de Neumann (2.2)–(2.4) vérifié par ϕ' procure le vecteur $\mathbf{v} = \nabla \phi'$ dans le domaine fluide Ω et autorise la représentation suivante de type « potentiel de simple couche » [7] :

$$\phi'(M) = \sum_m \phi'_m(M) ; \quad \phi'_m(M) := \int_{S_m} q_m(P) \, dS_m / PM \quad \text{pour } M \text{ dans } \Omega \quad (4.1)$$

Comme $\nabla \cdot \mathbf{E}_\infty = 0$ au voisinage de chaque \mathcal{P}_n , (2.4) et (4.1) montrent que $\int_{S_m} q_m \, dS_m = 0$, c'est-à-dire que $|\mathbf{v}| \sim 1/r^3$ quand $r \rightarrow \infty$. De plus, l'écoulement $(\mathbf{v}, 0)$ obéit aux équations de Stokes (2.2) avec un tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}' := \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, 0)$ s'écrivant, selon (2.5) :

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2 \mu [\partial^2 \phi' / \partial x_i \partial x_j] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (4.2)$$

Ainsi, l'application légitime du théorème de réciprocity conduit, pour $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$, à :

$$a_T^{(n),i} := (2\mu)^{-1} \int_S \nabla \phi' \cdot \boldsymbol{\sigma}_T^{(n),i} \cdot \mathbf{n} \, dS = \sum_{m \neq n} \int_{S_n} \nabla \left(\frac{\partial \phi'_m}{\partial x_i} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS_n + \int_{S_n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \phi'_n}{\partial x_i} \right) n_j \, dS_n \quad (4.3)$$

$$a_R^{(n),i} := (2\mu)^{-1} \int_S \nabla \phi' \cdot \boldsymbol{\sigma}_R^{(n),i} \cdot \mathbf{n} \, dS = \sum_m b_m^{(n),i} ; \quad b_m^{(n),i} = \int_{S_n} \left[\epsilon_{kil} x_l \frac{\partial^2 \phi'_m}{\partial x_k \partial x_j} \right] n_j \, dS_n \quad (4.4)$$

où ϵ_{ikl} est le tenseur des permutations. Notons que (4.1) définit en fait ϕ'_m dans tout $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{P}_m$. Seul le dernier terme dans (4.3) subsiste, car $\partial \phi'_m / \partial x_i$ est harmonique au voisinage de \mathcal{P}_n si $m \neq n$. Posons alors $\mathbf{O}_n \mathbf{M} = x_i^{(n)} \mathbf{e}_i$ et $r_n := \mathbf{O}_n \mathbf{M}$. Le théorème de la divergence appliqué au domaine

A. Sellier

$\Omega_n(d) := \{M \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{P}_n; O_n M < d\}$, contenant \mathcal{P}_n pour d assez grand et de frontière extérieure $\Sigma_n(d) = \{M \in \mathbb{R}^3; O_n M = d\}$, procure pour $m \neq n$:

$$a_T^{(n),i} = \int_{\Sigma_n(d)} \frac{\partial^2 \phi'_n x_j^{(n)}}{\partial x_i \partial x_j r_n} dS - \int_{\Omega_n(d)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla^2 \phi'_n) d\Omega_n; \quad b_m^{(n),i} = \int_{\mathcal{P}_n} \epsilon_{kil} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[x_l \frac{\partial^2 \phi'_m}{\partial x_k \partial x_j} \right] d\Omega \quad (4.5)$$

$$b_n^{(n),i} = \int_{\Sigma_n(d)} \frac{\epsilon_{kil} x_l x_j^{(n)}}{r_n} \frac{\partial^2 \phi'_n}{\partial x_k \partial x_j} dS - \int_{\Omega_n(d)} \epsilon_{kil} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[x_l \frac{\partial^2 \phi'_n}{\partial x_k \partial x_j} \right] d\Omega_n \quad (4.6)$$

Or $\epsilon_{kil} + \epsilon_{lik} = 0$, $\partial \phi'_m / \partial x_k$ est harmonique au voisinage de \mathcal{P}_n si $m \neq n$ et $\partial \phi'_n / \partial x_i$ est harmonique dans $\Omega_n(d)$ avec $\phi'_n \sim 1/r^2$ si $r \rightarrow \infty$. Ainsi, $a_T^{(n),i} = b_m^{(n),i} = 0$ pour tout m , ce qui donne le résultat annoncé : seuls les termes contenant E_∞ subsistent dans (3.4)–(3.5). La démarche précédente ne s'applique pas à ces termes, car le potentiel ϕ_∞ associé à E_∞ ne se comporte pas comme $1/r^2$ loin de O (penser, par exemple, au cas de E_∞ uniforme).

5. Application immédiate et conclusions

Nous conservons l'hypothèse d'un potentiel « zêta » de même valeur uniforme, ζ , sur chaque S_n . En vertu de l'unicité de la solution X , si E_∞ est uniforme, alors (3.4)–(3.5) admet, d'après (3.6), la solution triviale :

$$U^{(m)} = \frac{\epsilon \zeta}{\mu} E_\infty; \quad \omega^{(m)} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq m \leq N \quad (5.1)$$

Pour $N = 1$, cette solution est dite de Smoluchowski et a été obtenue de manière plus lourde pour une sphère dans [8], puis pour une forme arbitraire dans [9, 10]. Pour $N \geq 1$ et E_∞ uniforme, les particules (de formes a priori différentes) ne tournent pas et se traduisent à la même vitesse uniforme (mouvement en bloc). Notre résultat montre surtout que si E_∞ n'est pas uniforme, la solution généralisée X peut toutefois être obtenue en se contentant de déterminer les $6N$ *mouvements particuliers* (sans calculer le potentiel de perturbation ϕ') ou plus précisément les efforts surfaciques $\sigma_T^{(n),i}$ et $\sigma_R^{(n),i}$ sur les frontières S_n .

Références bibliographiques

- [1] Adamson A.W., Physical Chemistry of Surfaces, Wiley-Interscience, New York, 1990.
- [2] Hunter R.J., Zeta Potential in Colloid Science, Academic Press, New York, 1981.
- [3] Anderson J.L., Colloid transport by interfacial forces, Ann. Rev. Fluid. Mech. 21 (1989) 61–99.
- [4] Lamb H., Hydrodynamics, 6th ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1932.
- [5] Pozrikidis C., Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [6] Happel J., Brenner H., Low Reynolds number hydrodynamics, Martinus Nijhoff, 1973.
- [7] Dautray R., Lions J.-L., Analyse mathématique et calcul numérique, Masson, Paris, 1988, vol. 6.
- [8] Smoluchowski M.V., in: Barth J.A. (Ed.), Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Ed. L. Graetz, Leipzig, Barth, 1921.
- [9] Morrison F.A., Electrophoresis of a particle of arbitrary shape, J. Colloid. Interf. Sci. 34 (1970) 210–214.
- [10] Teubner M., The motion of charged colloidal particles in electric fields, J. Chem. Phys. 76 (11) (1982) 5564–5573.