

Particule allongée en écoulement de Stokes : une résolution asymptotique par équation intégrale de frontière

Antoine SELLIER

Ladhyx, École Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France.
E-mail : sellier@ladhyx.polytechnique.fr

Résumé. On construit, en fonction du petit paramètre d'éclatement de la particule, une approximation de la répartition surfacique de forces exercées par un écoulement de Stokes arbitraire sur celle-ci. L'idée consiste à inverser asymptotiquement l'équation intégrale de Fredholm de première espèce régissant cette densité de forces. La méthode proposée permet de traiter le cas rarement envisagé d'une particule non axisymétrique.

Mots clés : écoulement de Stokes / développement asymptotique

Stokes flow past a slender particle

Abstract. *A systematic and slender-body theory is proposed for a slender particle not necessarily of circular cross-section and embedded in an arbitrary Stokes flow. The approach consists in asymptotically expanding and inverting the well-posed Fredholm integral equation of the first kind, which governs the unknown surface force the particle experiments.*

Keywords: *Stokes flow / asymptotic expansion*

Abridged English Version

Consider a slender particle \mathcal{A}' but not necessarily of revolution (see *fig. 1*), whose smooth boundary $\partial\mathcal{A}'$ admits rounded ends O' and E' . If $L = O'E'$ and e denotes the main radius of \mathcal{A}' the slenderness ratio $\epsilon = e/L$ is small and a slender-body theory is built for \mathcal{A}' embedded in a general Stokes flow $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty)$. This is achieved by asymptotically expanding and inverting with respect to ϵ a boundary integral equation fulfilled by the surface stress applied on the particle.

Throughout this Note the integers i or k belong to $\{1, 2, 3\}$ whereas j or l belong to $\{1, 2\}$ with the notation $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_l + a_3 b_3$. Any point M of $\partial\mathcal{A}'$ is located either by its cylindrical co-ordinates $(e f(\theta, x_3), \theta, Lx_3)$ of axis $\mathbf{e}_3 = O'E'/L$ or its dimensionless cartesian coordinates (x_1, x_2, x_3) such that $O'M = \epsilon x_1 \mathbf{e}_1 + Lx_3 \mathbf{e}_3$ (see *fig. 1*), $\mathbf{n}(M)$ denotes the unit and

Note présentée par Paul GERMAIN.

normal vector outwarding \mathcal{A}' at M and $C(x_3) = \{P \in \partial\mathcal{A}' ; x_3^P = x_3\}$ is the cross-section of $\partial\mathcal{A}'$ to which $M(\theta, x_3)$ belongs. The positive body shape function f is smooth with $\partial_v^j f := \partial^j f / \partial v^j$ if $v \in \{\theta, x_3\}$, f^2 offering near $x_3 = 0$ or $x_3 = 1$ the behavior (2.1) with $0 < c_{j-1}(\theta) = O(1)$. The ambient flow $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty)$ satisfies the Stokes equations (2.2) in \mathbb{R}^3 and can be written $\mathbf{u}^\infty(M) = U v_i^\infty(M) \mathbf{e}_i$, if U designates the typical velocity magnitude, with (3.1) holding near \mathcal{A}' . The total flow $(\mathbf{u}^\infty + \mathbf{u}, p^\infty + p)$ induces the unknown surface stress \mathbf{f} on $\partial\mathcal{A}'$. The perturbation flow (\mathbf{u}, p) fulfills (2.2) this time in $\mathcal{D}' = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{A}' \cup \partial\mathcal{A}')$ and the boundary conditions (2.3). Consequently [see Kim and Karrila (1991) and Pozrikidis (1992)] one obtains for (\mathbf{u}, p) and in terms of the unknown density \mathbf{f} the basic integral representations (2.4)–(2.5) in \mathcal{D}' . Accordingly, the no-slip condition on $\partial\mathcal{A}'$ yields for \mathbf{f} the boundary integral equation (2.6). Since $\iint_{\partial\mathcal{A}'} \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{n} \, dS_P = 0$, such a Fredholm integral equation of the first kind is indeed well-posed and its solution writes $\mathbf{f}_s + \lambda \mathbf{n}$ for λ constant and \mathbf{f}_s a particular solution. Here we impose the pressure p^∞ to be linear in \mathbf{u}^∞ and select the solution \mathbf{f} as a linear function of the data $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty)$. Thanks to our cylindrical coordinates the equation (2.6) takes the form (3.4) where the new unknown density \mathbf{d} , the linear operator $A_{\epsilon, n}^{\theta, x_3}$ and function $H(\theta_P, x_3^P, \theta, x_3)$, respectively, obey the definitions (3.3), (3.6) and (3.7). By setting $\epsilon = 0$ one obtains for $A_{0, n}^{\theta, x_3}[\mathbf{v}]$ a singular integral and the application of the matched asymptotic procedure to build the asymptotic behavior of $A_{\epsilon, n}^{\theta, x_3}[\mathbf{v}]$ with respect to ϵ leads to tedious algebra. An alternative and systematic method (Sellier, 1996) has thus been derived in order to avoid such troubles and leads, if $v_m = \text{Max}_{[0, 1]} |v|$, to the behavior (3.8) and definitions (3.9)–(3.11) where pf indicates an integration in the finite part sense of Hadamard (Schwartz, 1966). By only requiring the function v in the cross-section $C(x_3)$ the terms $I_{1, 1}^{\theta, x_3}[\mathbf{v}]$ and $I_{0, 3}^{\theta, x_3}[\mathbf{v}]$ are two-dimensional, whereas $I_{1, 3}^{\theta, x_3}[\mathbf{v}]$, $I_{2, 1}^{\theta, x_3}[\mathbf{v}]$ and $I_{2, 3}^{\theta, x_3}[\mathbf{v}]$ are three-dimensional quantities. The solution of the asymptotic system (3.12)–(3.13) is sought under the form (4.1) and the reader may check that the occurring functions $t_{n, m}^i$ obey for $n \in \{0, 1\}$, $m \geq 0$ and $t_{0, 0}^i := 0$ the pyramidal set of equations (4.4) and integral equations of the first kind (4.5)–(4.6), respectively, related to the integral formulation of two-dimensional Dirichlet problems for the Laplace and the Stokes equations, where the operators $K^{x_3}, L^{\theta, x_3}, S^{\theta, x_3} = S_i^{\theta, x_3} \mathbf{e}_i$ and $V_{x_3}(a)$ are defined by (4.2), (4.3) and (4.7) with $dl_P = fs_0 \, d\theta_P$ in any cross-section $C(x_3)$. By resorting to some algebra one finds that the data $(b_{n, m}^1; b_{n, m}^2)$ satisfies $\oint_{C(x_3)} b_{n, m}^i n_i^{2d} \, dl_P = 0$ if $\mathbf{n}^{2d} = n_i^{2d} \mathbf{e}_i$ denotes the unit vector outwarding $C(x_3)$, i.e. that each integral equation (4.5) is indeed well-posed. The first-order solution $t_{0, m}^i$ is given by (4.12)–(4.13) if the particular functions $u_0, \mathbf{t}^i = (t_1^i; t_2^i)$ or operators $\mathbf{A}_{x_3}, \mathbf{B}_{x_3}$ such that $(v_1(x_3); v_2(x_3)) = \mathbf{A}_{x_3}(\alpha_1(t); \alpha_2(t))$ and $(w_1(x_3); w_2(x_3)) = \mathbf{B}_{x_3}(\alpha_1(t); \alpha_2(t))$ obey equations (4.8)–(4.11). As regards the solution $t_{1, m}^i$ one introduces the operator L_1^{θ, x_3} and the functions $u_i, v_i, w_i, \boldsymbol{\tau}^i = (\tau_1^i; \tau_2^i)$ and $\mathbf{r}^m = (r_1^m; r_2^m)$ by (4.14)–(4.17). Thus $t_{1, m}^i$ takes for $m \geq 0$ and if $r_i^0 = b_{0, 0}^i = K^{x_3}[t_{1, 0}^i] = 0$ the form (4.18) with the definitions (4.19) and the inductive relations (4.20)–(4.23). As soon as $(a_i^{0, 0}(t)) = (0)$ (consider for example, a pure shear flow for $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty)$) then $t_{0, m}^i = 0$ and the solutions $t_{1, m}^i$ give the leading terms.

The present theory has been applied to the body of ellipsoidal cross-section [see eq. (5.1)] with η constant and h a smooth function such that $h(0) = h(1) = 0$. In such a case one actually possibly obtains $t_{n, m}^i$ in a closed form. The results both agree with Geer (1976) for $\eta = 1$ (circular cross-section) and the asymptotic behavior of the exact solution one may build for a slender ellipsoid [choose $h^2(x_3) = 4x_3(1 - x_3)$] embedded in the Stokes flow described by equation (5.2) [see Jeffery (1922) and Lamb (1932)].

1. Introduction

Les propriétés macroscopiques d'une solution colloïdale (Happel et Brenner, 1973 ; Kim et Karrila, 1991) dépendent de l'écoulement de Stokes baignant chaque constituant supposé isolé. Souvent ce dernier est une particule allongée, ce qui autorise un traitement asymptotique et, excepté Batchelor (1970), restreint au premier ordre d'approximation, la particule est axisymétrique, la résolution s'appuyant sur la Méthode des développements asymptotiques raccordés (Keller et Rubinow, 1976) ou sur l'inversion d'une équation intégrale établie pour une densité de singularités disposées sur une partie de l'axe du corps (Geer, 1976). Cette note propose de construire une solution aux ordres élevés, pour une forme élancée et un écoulement amont de Stokes arbitraires, en inversant l'équation intégrale qui régit cette fois la densité surfacique des efforts exercés par l'écoulement sur la particule.

2. Hypothèses et présentation intégrale du problème

La particule \mathcal{A}' (fig. 1) est un ouvert connexe immobile, de frontière $\partial\mathcal{A}'$ régulière d'extrémités O' et E' , de longueur $L = O'E'$ et d'épaisseur caractéristique $e = \epsilon L$ telle que $0 < \epsilon \ll 1$.

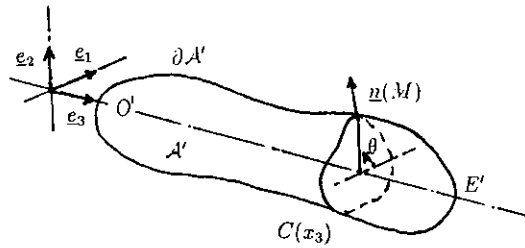


Fig. 1. – Illustration des notations introduites.
 Fig. 1. – Definition of the notations as used.

On associe à tout point M de $\partial\mathcal{A}'$ ses coordonnées cylindriques $(\epsilon f(\theta, x_3), \theta, Lx_3)$ d'axe $e_3 = O'E'/L$ et la normale sortante $\mathbf{n}(M)$. La fonction positive de forme f admet des dérivées partielles $\partial^j_v f := \partial^j f / \partial v^j$ pour $v \in \{\theta, x_3\}$, f^2 offrant, près des extrémités, les comportements :

$$f^2(\theta, t) = c_0(\theta) t + O(t^2) ; \quad f^2(\theta, 1-t) = c_1(\theta) t + O(t^2) ; \quad t \rightarrow 0^+ \quad (2.1)$$

avec $0 < c_k(\theta) = O(1)$. L'écoulement amont $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty)$, permanent et incompressible, de notre fluide homogène et visqueux vérifie dans tout \mathbb{R}^3 les équations classiques de Stokes :

$$\text{div} [\mathbf{u}^\infty] = 0 ; \quad \mu \Delta \mathbf{u}^\infty = \text{grad} [p^\infty] \quad (2.2)$$

tandis que l'écoulement stationnaire de perturbation (\mathbf{u}, p) induit par la particule vérifie (2.2), mais cette fois dans $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{A}' \cup \partial\mathcal{A}')$, et les conditions aux limites ci-après :

$$\mathbf{u}(M) = -\mathbf{u}^\infty(M) \text{ sur } \partial\mathcal{A}' ; \quad (\mathbf{u}, p) \rightarrow (\mathbf{0}, 0) \text{ à l'infini} \quad (2.3)$$

On peut (Kim et Karrila, 1991 ; Pozrikidis, 1992) représenter dans $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{A}' \cup \partial\mathcal{A}')$ l'écoulement de perturbation par un potentiel de simple couche de Stokeslets répartis sur $\partial\mathcal{A}'$ et d'inten-

A. Sellier

sité $f = \sigma \cdot n$ si σ désigne le tenseur des contraintes associé à l'écoulement total $(\mathbf{u}^\infty + \mathbf{u}, p^\infty + p)$. En usant du repère orthonormé $(O', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ il vient, pour $M \in \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{A}' \cup \partial\mathcal{A}')$:

$$8 \pi \mu \mathbf{u}(M) \cdot \mathbf{e}_i = - \int \int_{\partial\mathcal{A}'} \{ \delta_{ik} / PM + [\mathbf{PM} \cdot \mathbf{e}_i] [\mathbf{PM} \cdot \mathbf{e}_k] / PM^3 \} f_k(P) dS'_P \quad (2.4)$$

$$4 \pi p(M) = - \int \int_{\partial\mathcal{A}'} \mathbf{PM} \cdot \mathbf{f}(P) / PM^3 dS'_P \quad (2.5)$$

Cet écoulement (\mathbf{u}, p) est évanescent à l'infini tandis que (2.4) reste valable par continuité sur $\partial\mathcal{A}'$, ce qui procure, *via* (2.3), l'équation intégrale de Fredholm de première espèce d'inconnue f

$$8 \pi \mu \mathbf{u}^\infty(M) \cdot \mathbf{e}_i = \int \int_{\partial\mathcal{A}'} \{ \delta_{ik} / PM + [\mathbf{PM} \cdot \mathbf{e}_i] [\mathbf{PM} \cdot \mathbf{e}_k] / PM^3 \} f_k(P) dS'_P ; M \in \partial\mathcal{A}' \quad (2.6)$$

Comme $\int \int_{\partial\mathcal{A}'} \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{n} dS'_P = 0$ l'équation (2.6) admet des solutions (Dautray et Lions, 1988) de forme générale $f_s + \lambda \mathbf{n}$, où f_s est une solution particulière et λ une constante arbitraire. Par linéarité nous retenons la solution f linéaire de $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty)$, sous réserve d'imposer également pour p^∞ une expression linéaire en \mathbf{u}^∞ , ce qui définit la pression totale $p^\infty + p$ modulo une constante.

3. Écriture asymptotique de l'équation intégrale de frontière

Désormais i ou k parcourent $\{1, 2, 3\}$ et j ou l décrivent $\{1, 2\}$. Pour $M(x_1, x_2, x_3)$ voisin de \mathcal{A}' avec $O'M/L = \epsilon x_j \mathbf{e}_j + x_3 \mathbf{e}_3$ on suppose que l'écoulement amont a pour vitesse caractéristique U et s'écrit $\mathbf{u}^\infty(M) = U v_i^\infty(M) \mathbf{e}_i = U v_i^\infty(\epsilon x_1, \epsilon x_2, x_3) \mathbf{e}_i$ avec l'approximation suivante :

$$v_i^\infty(M) = a_i^{0,0}(x_3) + \epsilon [a_i^{1,0}(x_3) x_1 + a_i^{0,1}(x_3) x_2] + O(\epsilon^2) ; a_i^{j,l}(x_3) = O(1) \text{ si } j+l \leq 1 \quad (3.1)$$

L'hypothèse $\text{div}[\mathbf{u}^\infty] = 0$ impose : $a_1^{1,0} + a_2^{0,1} + \partial_{x_3} a_3^{0,0} = 0$. L'usage de nos coordonnées cylindriques permet de réécrire en fonction de ϵ le second membre de (2.6). A ce titre il vient :

$$f_k(P) dS'_P = eL [f_k f_{s_\epsilon}] (\theta_p, x_3^p) d\theta_p dx_3^p ; s_\epsilon(\theta, x_3) = \{1 + (f^{-1} f_\theta^l)^2 + (\epsilon f_{x_3}^l)^2\}^{1/2} \quad (3.2)$$

Introduisons la nouvelle inconnue $\mathbf{d} = d_i \mathbf{e}_i$ telle que :

$$8 \pi \mu U \mathbf{d}(P) = e [f_{s_\epsilon} \mathbf{f}] (P) = e [f_{s_\epsilon} \mathbf{f}] (\theta_p, x_3^p) \quad (3.3)$$

En repérant chaque point M de $\partial\mathcal{A}'$ par le couple (θ, x_3) , l'équation intégrale (2.6) devient :

$$v_i(\theta, x_3) = \int_0^{2\pi} \{ A_{\epsilon,1}^{\theta, x_3} [d_i] + \epsilon^{2-\delta_{i3}-\delta_{i3}} A_{\epsilon,3}^{\theta, x_3} [h_{ik}(\theta_p, x_3^p, \theta, x_3) d_k] \} d\theta_p \quad (3.4)$$

si les nouvelles fonctions h_{ik} et l'opérateur linéaire $A_{\epsilon,n}^{\theta, x_3}$ obéissent pour n entier non nul, v une fonction régulière et $M(\theta, x_3) = M(x_1, x_2, x_3)$ à :

$$h_{ik}(\theta_p, x_3^p, \theta, x_3) = (x_i^p - x_i) (x_k^p - x_k) \quad (3.5)$$

$$A_{\epsilon,n}^{\theta, x_3} [v] := \int_0^1 \frac{v(x_3^p) dx_3^p}{[(x_3^p - x_3)^2 + \epsilon^2 H^2(\theta_p, x_3^p, \theta, x_3)]^{n/2}} = \int_{-x_3}^{1-x_3} \frac{v(u+x_3) du}{[u^2 + \epsilon^2 h^2(u)]^{n/2}} \quad (3.6)$$

tandis que la fonction $h(u)$ vérifie $h(u) = H(\theta_p, u + x_3, \theta, x_3)$ avec la définition ci-après :

$$H(\theta_p, x_3^p, \theta, x_3) := \{f^2(\theta_p, x_3^p) + f^2(\theta, x_3) - 2 \cos(\theta_p - \theta) f(\theta_p, x_3^p) f(\theta, x_3)\}^{1/2} \quad (3.7)$$

Si $\theta_p \neq \theta$ alors $H > 0$, ce qui permet de choisir pour presque tout le domaine de l'intégrale (3.4) des intégrales $A_{\epsilon, n}^{\theta, x_3}[v]$ régulières dès que $\epsilon > 0$. Mais $A_{\epsilon, n}^{\theta, x_3}[v]$ devient hypersingulière pour $\epsilon = 0$ et l'établissement de son comportement asymptotique pour ϵ petit s'avère très ardu lorsqu'on utilise la technique des Développements asymptotiques raccordés (Van Dyke, 1975). Une autre méthode systématique (Sellier, 1996) s'applique ici et mène, pour $v_m = \text{Max}_{[0, 1]} |v|$, à :

$$\int_0^{2\pi} A_{\epsilon, n}^{\theta, x_3}[v] d\theta_p = \delta_{n3} I_{0, n}^{\theta, x_3}[v] \epsilon^2 + I_{1, n}^{\theta, x_3}[v] \log \epsilon + I_{2, n}^{\theta, x_3}[v] + O(v_m \epsilon^2 \log \epsilon); \quad n \in \{1, 3\} \quad (3.8)$$

avec, si pf désigne la partie finie au sens d'Hadamard (Schwartz, 1966), les opérateurs suivants :

$$\frac{I_{1, 1}^{\theta, x_3}[v]}{2} = - \int_0^{2\pi} v(\theta_p, x_3) d\theta_p; \quad \frac{I_{0, 3}^{\theta, x_3}[v]}{2} = \int_0^{2\pi} \frac{v(\theta_p, x_3) d\theta_p}{H^2(\theta_p, x_3, \theta, x_3)}; \quad I_{1, 3}^{\theta, x_3}[v] = \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{I'_{1, 1}[v]}{2} \right]_{t=x_3} \quad (3.9)$$

$$I_{2, 1}^{\theta, x_3}[v] = - \left\{ I_{1, 1}^{\theta, x_3}[v] \log 2 + pf \int_0^1 \frac{I'_{1, 1}[v] dt}{2|t - x_3|} + 2 \int_0^{2\pi} \frac{\log H(\theta_p, x_3, \theta, x_3)}{v^{-1}(\theta_p, x_3)} d\theta_p \right\} \quad (3.10)$$

$$I_{2, 3}^{\theta, x_3}[v] = - pf \int_0^1 \frac{I'_{1, 1}[v] dt}{2|t - x_3|^3} - \frac{d^2}{dt^2} \left[\int_0^{2\pi} \left(1 + \log \frac{H(\theta_p, t, \theta, x_3)}{2} \right) v(\theta_p, t) d\theta_p \right]_{t=x_3} \quad (3.11)$$

Comme $I_{1, 1}^{\theta, x_3}[v]$ et $I_{0, 3}^{\theta, x_3}[v]$ n'impliquent que la trace de v sur la section $C(x_3) = \{P \in \partial \mathcal{A}' ; x_3^p = x_3\}$ passant par $M(\theta, x_3)$ ce sont des contributions bidimensionnelles. Le terme $I_{1, 3}^{\theta, x_3}[v]$ est faiblement tridimensionnel mais $I_{2, 1}^{\theta, x_3}[v]$ et $I_{2, 3}^{\theta, x_3}[v]$ concernant v sur tout $\partial \mathcal{A}'$ sont fortement tridimensionnels. Pour $D_i = \text{Max}_{\partial \mathcal{A}'} |d_i|$ l'alliance de (3.4) et (3.8) procure :

$$v_j^\infty(\theta, x_3) = I_{1, 1}^{\theta, x_3}[d_j] \log \epsilon + I_{2, 1}^{\theta, x_3}[d_j] + I_{0, 3}^{\theta, x_3}\{(x_j^p - x_j) [(x_1^p - x_1) d_1 + (x_2^p - x_2) d_2]\} \\ + \epsilon [I_{2, 3}^{\theta, x_3} + I_{1, 3}^{\theta, x_3} \log \epsilon] [(x_j^p - x_j) (x_3^p - x_3) d_3] + O(D_1, D_2, \epsilon D_3) \epsilon^2 \log \epsilon; \quad j \in \{1, 2\} \quad (3.12)$$

$$v_3^\infty(\theta, x_3) = \{I_{1, 1}^{\theta, x_3}[d_3] + I_{1, 3}^{\theta, x_3}[(x_3^p - x_3)^2 d_3]\} \log \epsilon + I_{2, 1}^{\theta, x_3}[d_3] + I_{2, 3}^{\theta, x_3}[(x_3^p - x_3)^2 d_3] \\ + \epsilon [I_{2, 3}^{\theta, x_3} + I_{1, 3}^{\theta, x_3} \log \epsilon] [d_1(x_1^p - x_1) + d_2(x_2^p - x_2)] + O(\epsilon D_1, \epsilon D_2, D_3) \epsilon^2 \log \epsilon \quad (3.13)$$

Pour établir ce résultat, nous avons aussi exploité l'égalité $I_{0, 3}^{\theta, x_3}[w(x_3^p - x_3)] = 0$, valable [éq. (3.9)] pour toute fonction $w(x_3^p)$ régulière au voisinage du point x_3 .

4. Approximation asymptotique de la densité surfacique de forces

A la lueur du système (3.12)–(3.13) et de (3.1) cherchons alors chaque solution d_i sous la forme :

$$d_i(\theta, x_3) = \sum_{n=0}^1 \sum_{m=1-n}^{\infty} [fs_0 t_{n, m}^i](\theta, x_3) \epsilon^n [\log \epsilon]^{-m} + O(\epsilon^2 \log \epsilon); \quad d_{n, m}^i := fs_0 t_{n, m}^i \quad (4.1)$$

A. Sellier

Sur toute section $C(x_3)$ notons que $dl_P = fs_0 d\theta_P$ et définissons pour $M(\theta, x_3) \in C(x_3)$ un opérateur K^{x_3} et deux équations intégrales de première espèce, de données b et $(b_1; b_2)$, par :

$$K^{x_3}[u] = \oint_{C(x_3)} u(P) dl_P; \quad L^{\theta, x_3}[u] = -\oint_{C(x_3)} \log [PM] u(P) dl_P = b(M) \quad (4.2)$$

$$S_j^{\theta, x_3}(u_1; u_2) = \oint_{C(x_3)} \{-\delta_{jl} \log [PM] + [PM \cdot e_j] [PM \cdot e_l] / PM^2\} u_l(P) dl_P = b_j(M) \quad (4.3)$$

Les équations (4.2) ou (4.3), aussi notée $S^{\theta, x_3}(u_1; u_2) = S_j^{\theta, x_3}(u_1; u_2) e_j = [b_1; b_2]$, correspondent aux formulations intégrales de type potentiel de simple couche de problèmes de Dirichlet bidimensionnels respectivement pour l'opérateur de Laplace et les équations de Stokes. A l'instar de (2.6), l'équation intégrale (4.3) n'admet une solution générale, cette fois définie modulo le vecteur n^{2d} , normale sortante à $C(x_3)$, que si $\oint_{C(x_3)} b_l e_l \cdot n^{2d} dl_P = 0$. L'injection de (4.1) dans (3.12)–(3.13) mène pour $t_{0,0}^i := 0$, $n \in \{0, 1\}$ et $m \geq 0$ aux jeux suivants de relations récurrentes :

$$K^{x_3}[t_{0,m}^i] = -a_i^{0,0}(x_3)/2^{1+\delta_n}; \quad K^{x_3}[t_{1,0}^i] = 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} S_j^{\theta, x_3}(t_{n,m}^1, t_{n,m}^2) &= K^{x_3}[t_{n,m+1}^j] - V_{x_3}(0) \{K^t[t_{n,m}^j]\} + \delta_{n0}/2(\delta_{m0}[a_j^{1,0}(x_3) x_1 + a_j^{0,1}(x_3) x_2] \\ &- I_{1,3}^{x_3}[(x_j^p - x_j)(x_3^p - x_3) d_{0,m+1}^3] + (\delta_{m0} - 1) I_{2,3}^{\theta, x_3}[(x_j^p - x_j)(x_3^p - x_3) d_{0,m}^3]) := b_{n,m}^j(\theta, x_3) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} L^{\theta, x_3}[t_{n,m}^3] &= K^{x_3}[t_{n,m+1}^3] - V_{x_3}(1/2) \{K^t[t_{n,m}^3]\} + \delta_{n0}/4(\delta_{m0}[a_3^{1,0}(x_3) x_1 + a_3^{0,1}(x_3) x_2] \\ &- I_{1,3}^{x_3}\{(x_3^p - x_3)[x_l^p - x_l] d_{0,m+1}^l\} + (\delta_{m0} - 1) I_{2,3}^{\theta, x_3}\{(x_3^p - x_3)[x_l^p - x_l] d_{0,m}^l\}) := b_{n,m}^3(\theta, x_3) \end{aligned} \quad (4.6)$$

où pour a réel et une fonction régulière α , l'opérateur linéaire $V_{x_3}(a) \{\alpha(t)\}$ obéit à :

$$V_{x_3}(a) \{\alpha(t)\} = [\log 2 - a] \alpha(x_3) + pf \int_0^1 \frac{\alpha(t) dt}{2|t - x_3|} \quad (4.7)$$

Les liens (4.5)–(4.6) constituent un système pyramidal bien posé (l'auteur a vérifié pour chaque $[b_{n,m}^1; b_{n,m}^2]$ la condition antérieure de compatibilité) permettant de construire en cascade sous les conditions (4.4) et en ne retenant pour (4.5) que la solution linéaire en $[b_{n,m}^1; b_{n,m}^2]$ les quantités $K^{x_3}[t_{n,m}^j]$ et $t_{n,m}^j$. Définissons pour toute section $C(x_3)$ les solutions particulières $u_0, t^i = (t_1^i; t_2^i)$, les réels non nuls $c_0(x_3), \Delta(x_3)$ et les opérateurs A_{x_3} et B_{x_3} par :

$$u_0(\theta, x_3) = \{L^{\theta, x_3}\}^{-1}[1]; \quad (t_1^1; t_2^1) = \{S^{\theta, x_3}\}^{-1}[1; 0]; \quad (t_1^2; t_2^2) = \{S^{\theta, x_3}\}^{-1}[0; 1] \quad (4.8)$$

$$c_0(x_3) = K^{x_3}[u_0]; \quad \Delta(x_3) = K^{x_3}[t_1^2] K^{x_3}[t_2^1] - K^{x_3}[t_2^2] K^{x_3}[t_1^1] \quad (4.9)$$

$$[\Delta v_1](x_3) = K^{x_3}[t_2^2] \alpha_1(x_3) - K^{x_3}[t_1^2] \alpha_2(x_3); \quad w_1(x_3) = v_1(x_3) + V_{x_3}(0) \{\alpha_1(t)\} \quad (4.10)$$

$$[\Delta v_2](x_3) = K^{x_3}[t_1^1] \alpha_2(x_3) - K^{x_3}[t_2^1] \alpha_1(x_3); \quad w_2(x_3) = v_2(x_3) + V_{x_3}(0) \{\alpha_2(t)\} \quad (4.11)$$

si $(v_1(x_3); v_2(x_3)) = A_{x_3}(\alpha_1(t); \alpha_2(t))$ et $(w_1(x_3); w_2(x_3)) = B_{x_3}(\alpha_1(t); \alpha_2(t))$. Si $O_{x_3}^k = O_{x_3} \circ O_{x_3}^{k-1}$ pour $k \geq 1$ et $O_{x_3}^0[\alpha(t)] = \alpha(x_3)$ il vient, pour $m \geq 1$:

$$4 c_0(x_3) t_{0,m}^3 = -\left[V_{x_3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c_0(x_3)}\right)\right]^{m-1} \{a_3^{0,0}(t)\} u_0; \quad t_{0,m}^j = b_{0,m}^1 t_j^1 + b_{0,m}^2 t_j^2 \quad (4.12)$$

$$2(K^{x_3}[t_{0,m}^1; K^{x_3}[t_{0,m}^2]) = -\mathbf{B}_{x_3}^{m-1}(a_1^{0,0}(t); a_2^{0,0}(t));$$

$$(b_{0,m}^1; b_{0,m}^2) = \mathbf{A}_{x_3}(K^t[t_{0,m}^1]; K^t[t_{0,m}^2]) \quad (4.13)$$

Ainsi, seules les solutions u_0 et t^i interviennent pour expliciter les fonctions $t_{0,m}^i$. Pour $t_{1,m}^i$ nous introduisons, en conservant la convention de sommation d'Einstein sur un indice, l'opérateur L_1 , les fonctions $u_l, v_l, w_l, \tau^i = (\tau_1^i; \tau_2^i)$ et, si $m \geq 1, r^m = (r_1^m; r_2^m)$ tels que :

$$L_1^{\theta, x_3}[u] = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} [[fs_0 u] (\theta_p, t) \log H(\theta_p, t, \theta, x_3)]_{t=x_3} d\theta_p; \quad \partial_{x_3} \{a(t)\} = \frac{da}{dt}(x_3) \quad (4.14)$$

$$(\tau_1^1; \tau_2^1) = \{S^{\theta, x_3}\}^{-1}[x_2; 0]; \quad (\tau_1^2; \tau_2^2) = \{S^{\theta, x_3}\}^{-1}[0; x_1]; \quad (\tau_1^3; \tau_2^3) = \{S^{\theta, x_3}\}^{-1}[x_1; -x_2] \quad (4.15)$$

$$L^{\theta, x_3}[u_l] = x_l; \quad 2L^{\theta, x_3}[v_l] = -L^{\theta, x_3}[(x_j^p - x_j) \tau_j^l]; \quad 2L^{\theta, x_3}[w_l] = L_1^{\theta, x_3}[(x_j^p - x_j) \tau_j^l] \quad (4.16)$$

$$S_j^{\theta, x_3}(r_1^m; r_2^m) = \partial_{x_3} \{ [1/2 - 1/c_0(t)] K^t[t_{0,m}^3] x_j \} + L_1^{\theta, x_3}[(x_j^p - x_j) t_{0,m}^3]; \quad m \geq 1 \quad (4.17)$$

La solution $t_{1,m}^i$ cherchée admet alors, pour $m \geq 0$ et en posant $r_l^0 = b_{0,0}^l = 0$, la forme suivante :

$$t_{1,m}^3 = a_m^3 u_0 + \delta_{m0} s_l u_l + (v_l - u_l/2) \partial_{x_3} b_{0,m}^l + b_{0,m}^l w_l; \quad t_{1,m}^i = a_m^i t_j^l + \delta_{m0} c_i \tau_j^l + r_j^m \quad (4.18)$$

où les fonctions s_l, c_i et a_m^i obéissent, pour $m \geq 0$ et $t_{0,0}^i := 0 = K^{x_3}[t_{1,0}^i]$, aux relations :

$$2c_1 = a_1^{0,1}; \quad 2c_2 = a_2^{1,0}; \quad 2c_3 = a_1^{1,0} + \partial_{x_3} a_3^{0,0}/2; \quad 4s_j = a_1^{\delta_{j1}, \delta_{j2}} + \partial_{x_3} a_j^{0,0} \quad (4.19)$$

$$(a_m^1(x_3); a_m^2(x_3)) = \mathbf{A}_{x_3}(\gamma_1(t); \gamma_2(t)); \quad \gamma_j(t) = K^t[t_{1,m}^j] - \delta_{m0} c_i(t) K^t[\tau_j^i] - K^t[r_j^m] \quad (4.20)$$

$$[c_0 a_m^3](x_3) = K^{x_3}[t_{1,m}^3] - \delta_{m0} s_l(x_3) K^{x_3}[u_l] - K^{x_3}[v_l - u_l/2] \partial_{x_3} b_{0,m}^l - b_{0,m}^l(x_3) K^{x_3}[w_l] \quad (4.21)$$

$$K^{x_3}[t_{1,m+1}^3] = a_m^3(x_3) + V_{x_3}(1/2) \{K^t[t_{1,m}^3]\} - \partial_{x_3}(V_l(0) \{K^v[x_j^p t_{0,m}^l]\} + K^t[x_j^p t_{0,m+1}^l])/2 \quad (4.22)$$

$$K^{x_3}[t_{1,m+1}^i] = a_m^i(x_3) + V_{x_3}(0) \{K^t[t_{1,m}^i]\} - \partial_{x_3}(K^t[x_j^p t_{0,m+1}^3] - V_l(0) \{K^v[x_j^p t_{0,m}^3]\}) \quad (4.23)$$

Cette solution $d_{1,m}^i$, acquise au prix d'un effort certain, devient dominante dès que $d_{0,m}^i = 0$ (cas, par exemple, d'un cisaillement pur pour u^∞) avec de notables simplifications pour (4.17)–(4.21).

5. Remarques et conclusion

Nous avons appliqué cette théorie au corps élançé de section $C(x_3)$ elliptique d'équation :

$$x_1^2 + x_2^2/\eta^2 = h^2(x_3); \quad 0 < \eta \leq 1; \quad x_3 \in]0, 1[\quad (5.1)$$

avec η constant et h régulière telle que $h(0) = h(1) = 0$. La solution $t_{n,m}^i$ admet alors une expression analytique que, par souci de concision, nous ne reproduisons pas ici. Signalons que pour $\eta = 1$ on retrouve les résultats (Geer, 1976) propres au corps axisymétrique et que la solution obtenue est cohérente, terme à terme, avec l'approximation asymptotique des solutions analytiques exactes (Jeffery, 1922; Lamb, 1932) qu'il est possible d'établir pour un ellipsoïde (choisir $h^2(x_3) = 4x_3(1-x_3)$) baigné par un écoulement amont u^∞ de Stokes du type suivant :

$$u^\infty(M) = [a_1 - \epsilon w x_1 + \epsilon w_1 x_2] e_1 + [a_2 + w_2 x_3] e_2 + [a_3 + w(x_3 - 1/2) + \epsilon w_3 x_1] e_3 \quad (5.2)$$

A. Sellier

La densité auxiliaire d présente un développement (4.1) uniforme pour $x_3 \in]0, 1[$ qui permet d'obtenir le comportement de quantités intégrées d'intérêt pratique : force ou moments résultants d'ordre quelconque exercés sur la particule, approximation uniforme dans $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{A}' \cup \partial\mathcal{A}')$ de l'écoulement (\mathbf{u}, p) induit par la présence de celle-ci en exploitant (2.4)–(2.5).

Enfin la méthode décrite possède l'avantage de s'appliquer au cas utile, mais rarement traité, du corps non axisymétrique et de permettre l'accès, grâce à la formule systématique de développement d'une intégrale en fonction d'un petit paramètre (Sellier, 1996), aux ordres élevés d'approximation en évitant les délicates règles de raccord de la méthode des Développements asymptotiques raccordés.

Remerciements. L'auteur remercie le Professeur J. P. Guiraud pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Note remise le 7 avril 1997, acceptée après révision le 11 juin 1997.

Références bibliographiques

- Batchelor G. K., 1970. Slender-body theory for particles of arbitrary cross-section in Stokes flow, *J. Fluid. Mech.*, 44, 419-440.
- Dautray R., Lions J. L., 1988. *Analyse mathématique et calcul numérique*, 6, Masson.
- Geer J., 1976. Stokes flow past a slender body of revolution, *J. Fluid. Mech.*, 78, 577-600.
- Happel J., Brenner H., 1973. *Low Reynolds number hydrodynamics*, Martinus Nijhoff.
- Jeffery G. B., 1922. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 102, 161-179.
- Keller J. B., Rubinow S. I., 1976. Slender-body theory for slow viscous flow, *J. Fluid. Mech.*, 77, 705-714.
- Kim S., Karrila S. J., 1991. *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*, Butterworth, Boston.
- Lamb H., 1932. *Hydrodynamics*, 6th edition, Cambridge University Press.
- Pozrikidis C., 1992. *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*, Cambridge University Press.
- Schwartz L., 1966. *Théorie des distributions*, Hermann, Paris.
- Sellier A., 1996. Asymptotic expansion of a general integral, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 452, 2655-2690.
- Van Dyke M., 1975. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Parabolic Press, New York.