C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série II *b*, p. 645-652, 1996
Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*

Solution approchée du problème non portant des corps élancés par une formulation intégrale

Antoine SELLIER

LADHYX, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX, France.
E-mail: sellier@ladhyx.polytechnique.fr

Résumé. On propose une théorie des corps élancés non portant, en faible incidence et de géométrie quelconque. Le travail repose sur la résolution asymptotique de l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce portant sur une densité surfacique inconnue de sources. L'application de la technique exposée permet en outre d'accéder au coefficient de pression sur le corps.

A formal slender-body theory in nonlifting case

Abstract. *An alternative approach is proposed in order to build a formal slender-body theory valid up to high orders with respect to the slenderness ratio and for a nonlifting body which is not necessary of revolution. The basic idea consists in asymptotically expanding and inverting the Fredholm integral equation of the second kind bearing on an unknown source distribution one may spread over the boundary of the body.*

Abridged English Version

(Equation numbers refer to the French version.)

Consider a cartesian coordinate system (O', x', y', z') and a motionless and slender body $\mathcal{A}'$ whose boundary is $\partial\mathcal{A}'$, with ends O' and E' and such that $\underline{e}_z$ is directed along $\underline{O'E'}$ (see *fig.*). If $L := O'E'$ and e denotes the main thickness of $\mathcal{A}'$ then the slenderness ratio $\epsilon := e/L$ is small. Under this latter assumption one seeks the *nonlifting*, incompressible, irrotational and steady flow (of velocity $\underline{u}$) around $\mathcal{A}'$ of an inviscid, constant density (ρ_∞) fluid such that as $z' \to -\infty$ then the pressure p goes to p_∞ and $\underline{u} \to u_\infty[\cos(\alpha\epsilon)\underline{e}_z + \sin(\alpha\epsilon)\underline{e}_x]$ with $u_\infty > 0$ and $\alpha = O(1)$. Since the flow is irrotational one may write $\underline{u} = \underline{u}_\infty + \underline{\mathrm{grad}}[\phi]$ where the potential function ϕ is obtained for this nonlifting flow by spreading over $\partial\mathcal{A}'$ an unknown source density $u_\infty\lambda$. The aim of this study is to expand with respect to the small parameter ϵ not only the function λ but also the pressure coefficient

Note présentée par Paul GERMAIN.

$C_p := 2(p - p_\infty)/[\rho_\infty u_\infty^2]$ on the body. We actually show that this task reduces to the derivation of the asymptotic behaviour of a general integral.

For each point M of $\partial\mathcal{A}' \setminus \{O', E'\}$ the set $(\underline{t}_1(M), \underline{t}_2(M), \underline{n}(M))$ of unit vectors is such that $\underline{n}(M)$ is the normal vector directed outwards $\mathcal{A}', \underline{t}_1(M).\underline{e}_z = \underline{t}_1(M).\underline{n}(M) = 0 < \underline{t}_2(M).\underline{e}_z$ and $\underline{t}_2(M) := \underline{n}(M) \wedge \underline{t}_1(M)$. If $M \in \partial\mathcal{A}' \setminus \{O', E'\}$ then for $u_i(M) := \underline{u}(M).\underline{t}_i(M)/u_\infty$ and $c_i(M) := \underline{u}_\infty.\underline{t}_i(M)/u_\infty$ the flow-tangency condition leads to the well-known Fredholm equation (2.2) of the second kind for the unknown function λ. On the body the pressure coefficient $C_p(M)$ obeys (2.1) where the link between $u_i(M)$ and the density λ is provided by (2.3) (vp means an integration in the principal value sense of Cauchy). In order to rewrite the equalities (2.2) and (2.3) in terms of the slenderness parameter ϵ it is convenient to locate each point M of $\partial\mathcal{A}' \setminus \{O', E'\}$ by its cylindrical co-ordinates $(\epsilon f(\theta, z), \theta, Lz)$ of axis $\underline{e}_z$ with $0 < z < 1, \theta \in [0, 2\pi]$ and also $\partial_v^j f := \partial^j f/\partial v^j = O(1)$ for $v \in \{\theta, z\}$. If $J_0(\theta, z)$ and $J_i(\theta, z), i \in \{1, 2\}$, respectively designate the integrals arising, for $M(\theta, z) \in \partial\mathcal{A}' \setminus \{O', E'\}$, in relations (2.2) and (2.3) one easily obtains the result (2.5) where the symbol pf means an integration in the finite part sense of Hadamard (*see* Schwartz, 1966), the function s_ϵ obeys definition (2.4) and new functions H, B and $A_k^\epsilon, k \in \{0, 1, 2\}$, are given by equalities (2.6)-(2.10). Consequently the reader may check that the asymptotic expansion of quantities $J_k(\theta, z)$ with respect to the small parameter ϵ is established as soon as one builds the asymptotic behaviour of a general integral $I_\epsilon^z[v]$ defined by (3.1) for $0 < z < 1$ and v and h respectively smooth and strictly positive functions. Unfortunately for $\epsilon = 0$ the quantity $I_\epsilon^z[v]$ becomes a singular integral. This feature suggests that the asymptotic expansion of $I_\epsilon^z[v]$ can be derived by using the method of Matched Asymptotic Expansions. However, such an approach leads to a longwinded, cumbersome procedure of algebra. Hence a systematic formula has been established (*see* Sellier, 1996) that yields for $v_m := \mathrm{Max}_{[0,1]}|v|$ the behaviour (3.2) with definitions (3.3) and (3.4). Thanks to result (3.2) it is now possible to cast the integral equation (2.2) into the equality (4.1) where the linear operators $L_0^{\theta,z}, L_1^{\theta,z}$ and $L_2^{\theta,z}$ satisfy definitions (4.2), (4.6) and (4.7). Note that $L_0^{\theta,z}$ is a two-dimensional term and that the solution of equation $L_0^{\theta,z}[\lambda] = h(\theta, z)$ fulfills the important property (4.3) where $\partial\mathcal{C}(z)$ denotes the boundary of the adimensional and cross-section $\mathcal{C}(z)$ of the body $\mathcal{A}'$. Observe that $S_\lambda(z)$ is actually the total strength of sources spread in this section $\mathcal{C}(z)$ whose adimensional area is $S(z) = \int_0^{2\pi} f^2(\theta, z)/2d\theta$. If $h = 0$ then (Zabreyko, 1975) $\lambda = 0$ and this suggests to seek for λ the asymptotic behaviour (4.4). Since (4.1) holds one easily obtains for unknown $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ the triangular set of two-dimensional problems (4.5)-(4.7). As a consequence and in agreement with Euvrard (1983) it is straightforward to check by using the general property (4.3) that results (4.8) hold for S_{λ_i} if $i \in \{1, 2\}$.

The form (4.4) of function λ makes it possible to build the asymptotic expansion of the pressure coefficient $C_p(\theta, z)$ on the body and up to order $O(\epsilon^4 \log \epsilon)$ by combining (2.1) and (2.3). If the behaviours (4.9) and (4.10) of $c_i(M)$ are easily obtained, the integrals $J_i(\theta, z)$, for $i \in \{1, 2\}$, are treated through a careful application of the basic result (3.2). One thereafter obtains the equality (4.11) with definitions (4.12), (4.13) and (4.14).

To conclude we turn to the particular case of a body of revolution. In these circumstances note that α is not necessarily zero, $f(\theta, z) = f(z), S(z) = \pi f^2(z)$ and the two-dimensional problem $L_0^{\theta,z}[\lambda] = h(\theta, z)$ is very easy to invert in a closed form (*see* (5.1)) with help of the property (4.3). Using algebra the results (5.2) and (5.3) are then obtained for unknown (λ_1, λ_2) and the pressure coefficient $C_p(\theta, z)$ on the body is also provided. These results extend to the case $\alpha \neq 0$ previous works (see Moran, 1963; Handelmans and Keller, 1967 and also Tuck, 1992).

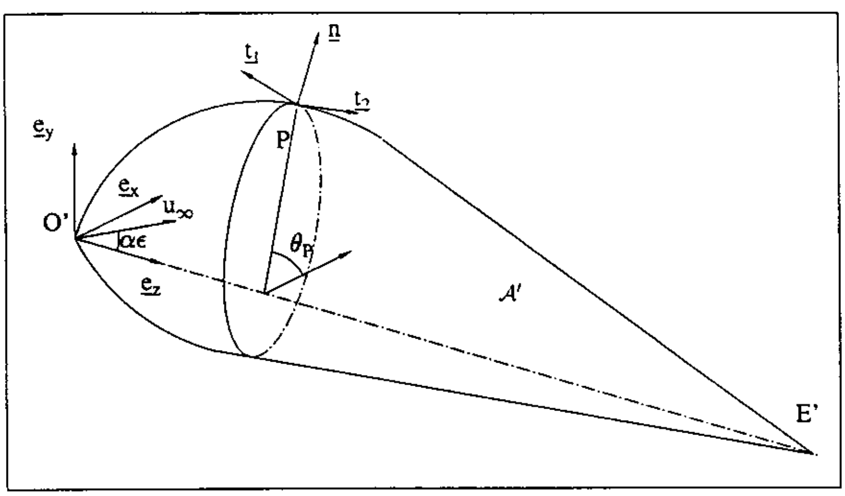
---

1. Introduction

La théorie des corps élancés non portant admet une formulation locale rigoureuse dans le cadre formel des Développements Asymptotiques Raccordés (Van Dyke, 1975; Cole et Kevorkian, 1981; Euvrard, 1983) qui empêche en pratique l'accès aux ordres élevés d'approximation en raison de la lourdeur croissante des règles de raccord. Dans le cas restreint d'un écoulement axisymétrique, une formulation intégrale (Moran, 1963; Handelsman et Keller, 1967) permet cependant un traitement à tout ordre. Cette dernière méthode qui consiste à disposer des singularités sur une partie de l'axe de symétrie du corps souffre de carences (Cade, 1994). Nous proposons dans cette Note une technique de résolution intégrale valable pour une géométrie quelconque dans un écoulement non portant et permettant d'atteindre de manière systématique les ordres élevés d'approximation. En particulier, le comportement du coefficient de pression sur le corps est considéré.

2. Formulation intégrale du problème

Soit un corps élancé (ouvert connexe $\mathcal{A}'$) immobile, d'extrémités O' et E' (voir *fig.)*, de longueur $L := O'E'$ et d'épaisseur typique $e := \epsilon \acute{L}$ avec $0 < \epsilon \ll 1$. La frontière $\partial\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}'$ est régulière sauf en O' et E'. A tout M de $\partial\mathcal{A}' \setminus \{O', E'\}$ est associé le trièdre orthonormé local $(\underline{t}_1(M), \underline{t}_2(M), \underline{n}(M))$ où $\underline{n}(M)$ est la normale sortante à $\partial\mathcal{A}'$ en M et si $\underline{e}_z := \underline{O'E'}/L$ alors $\underline{t}_1(M).\underline{e}_z = 0, \underline{t}_2(M) := \underline{n}(M) \wedge \underline{t}_1(M)$ et enfin $\underline{t}_2(M).\underline{e}_z > 0$. On étudie l'écoulement permanent, incompressible, potentiel et non portant d'un fluide parfait et homogène (masse volumique ρ_∞) autour de $\mathcal{A}'$ connaissant les grandeurs $(p_\infty, \rho_\infty, \underline{u}_\infty)$ à l'infini amont avec une vitesse $\underline{u}_\infty$ de faible incidence $\alpha\epsilon := (\underline{e}_z, \underline{u}_\infty)$ où $\alpha = O(1)$. Le repère orthonormé direct $(O', \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ est tel que $\underline{u}_\infty.\underline{e}_y = 0$.



Définition des notations employées.

Definition of the coordinate systems.

Sous ces hypothèses le théorème de Bernoulli procure dans l'écoulement le coefficient de pression C_p en fonction du module u de la vitesse $\underline{u}$. Sur le corps, où $u_i(M) := \underline{u}(M).\underline{t}_i(M)/u_\infty$ pour $i \in \{1, 2\}$ et $M \in \mathcal{A}' \setminus \{O', E'\}$, il vient

$$(2.1) \quad [\underline{u}.\underline{n}](M) = 0, \qquad C_p(M) := \frac{2(p - p_\infty)}{\rho_\infty u_\infty^2} = 1 - [u_1^2 + u_2^2](M), \qquad M \in \partial\mathcal{A}' \setminus \{O', E'\}.$$

En posant $\underline{u} = \underline{u}_\infty + \underline{\mathrm{grad}}[\phi]$, le potentiel de perturbation ϕ obéit à un classique problème de Neumann extérieur. Pour un écoulement sans portance ϕ peut s'obtenir en disposant seulement une densité surfacique $u_\infty \lambda$ de sources sur $\partial\mathcal{A}'$. Pour $M \in \partial\mathcal{A}' \setminus \{O', E'\}$ et $c_i(M) := \underline{u}_\infty.\underline{t}_i(M)/u_\infty$, la condition de glissement $[\underline{u}.\underline{n}](M) = 0$ et les quantités $u_i(M)$ deviennent

$$\frac{\lambda(M)}{2} + \iint_{\partial\mathcal{A}'} \frac{\lambda(P)\underline{PM}.\underline{n}(M)}{4\pi PM^3} dS'_P = -\frac{\underline{u}_\infty}{u_\infty}.\underline{n}(M) := d(M), \tag{2.2}$$

$$u_i(M) = c_i(M) + vp \iint_{\partial\mathcal{A}'} \frac{\lambda(P)\underline{PM}.\underline{t}_i(M)}{4\pi PM^3} dS'_P; \qquad i \in \{1, 2\}, \tag{2.3}$$

où vp désigne la valeur principale de Cauchy (Kupradze, 1963). Ainsi, nous proposons d'inverser asymptotiquement en fonction du petit paramètre d'élancement ϵ l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce (2.2), d'inconnue λ et de donnée d, puis de déterminer C_p sur le corps grâce à (2.1) et (2.3). Repérons à présent (voir *fig.*) tout point P de $\partial\mathcal{A}' \setminus \{O', E'\}$ par ses coordonnées cylindriques d'axe $\underline{e}_z, (\epsilon f(\theta_P, z_P), \theta_P, L z_P)$, avec $\theta_P = 0$ pour $\underline{O'P}.\underline{e}_y = 0 < \underline{O'P}.\underline{e}_x$ et une fonction de forme f positive admettant des dérivées partielles $\partial_v^j f := \partial^j f/\partial v^j$ d'ordre unité pour $v \in \{\theta, z\}$. En notant $J_0(\theta, z)$ et $J_i(\theta, z)$, pour $i \in \{1, 2\}$, les intégrales figurant respectivement dans les équations (2.2) et (2.3) et en introduisant la fonction s_ϵ telle que

$$s_\epsilon(\theta, z) := \{1 + (f^{-1} f_\theta^1)^2 + (\epsilon f_z^1)^2\}^{1/2}; \qquad dS'_P = \epsilon L[f s_\epsilon](P) d\theta_P dz_P \tag{2.4}$$

il s'avère à la fois aisé et pratique d'établir l'écriture synthétique ci-après

$$J_k(\theta, z) = \frac{\epsilon^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[pf \int_0^1 \frac{[\lambda f s_\epsilon](\theta_P, z_P) A_k^\epsilon(\theta_P, z_P, \theta, z)}{[(z_P - z)^2 + \epsilon^2 H^2(\theta_P, z_P, \theta, z)]^{3/2}} dz_P \right] d\theta_P, \qquad k \in \{0, 1, 2\} \tag{2.5}$$

où pf désigne l'intégration en partie finie au sens d'Hadamard et les fonctions H et A_k^ϵ vérifient

$$H := \{f^2(\theta_P, z_P) + f^2(\theta, z) - 2\cos(\theta_P - \theta) f(\theta, z) f(\theta_P, z_P)\}^{1/2}, \tag{2.6}$$

$$B := f(\theta, z) - f(\theta_P, z_P)[\cos(\theta_P - \theta) - \sin(\theta_P - \theta)(f^{-1} f_\theta^1)(\theta, z)], \tag{2.7}$$

$$A_0^\epsilon := \{(z_P - z) f_z^1(\theta, z) + B(\theta_P, z_P, \theta, z)\}/s_\epsilon(\theta, z), \tag{2.8}$$

$$A_1^\epsilon := \{f_\theta^1(\theta, z) - f(\theta_P, z_P)[\sin(\theta_P - \theta) + \cos(\theta_P - \theta)(f^{-1} f_\theta^1)(\theta, z)]\}/s_0(\theta, z), \tag{2.9}$$

$$A_2^\epsilon := \frac{(z - z_P)}{\epsilon} \frac{s_0(\theta, z)}{s_\epsilon(\theta, z)} + \frac{\epsilon f_z^1(\theta, z) B(\theta_P, z_P, \theta, z)}{s_0(\theta, z) s_\epsilon(\theta, z)}. \tag{2.10}$$

3. Une méthode systématique d'approximation des intégrales concernées

Dans cette partie cruciale pour cette approche nous développons en fonction de ϵ petit les intégrales $J_k(\theta, z)$. Notons d'abord que H ne peut s'annuler que si $\theta_P = \theta$ ce qui conduit à $H > 0$ sur presque tout le domaine de l'intégrale notée $I_k(\theta_P, \theta, z)$ qui porte sur la variable z_P dans l'égalité (2.5). Un développement immédiat des expressions précédentes de s_ϵ et A_k^ϵ en fonction de ϵ ramène alors la construction de l'approximation des quantités $I_k(\theta_P, \theta, z)$ à l'étude, pour $0 < z < 1$ et $h(u) := H(\theta_P, z + u, \theta, z) > 0$, de l'intégrale auxiliaire

$$(3.1) \qquad I_\epsilon^z[v] := pf \int_0^1 \frac{v(z_P)dz_P}{[(z_P - z)^2 + \epsilon^2 H^2(\theta_P, z_P, \theta, z))]^{3/2}} = pf \int_{-z}^{1-z} \frac{v(u+z)du}{[u^2 + \epsilon^2 h^2(u)]^{3/2}},$$

où la fonction v est régulière. Pour $\epsilon = 0$ l'intégrale $I_\epsilon^z[v]$ s'avère hypersingulière ce qui rend très délicate l'obtention de son développement asymptotique. Face à un tel comportement la technique des Développements Asymptotiques Raccordés s'applique mais avec une inflation des calculs pour les ordres élevés d'approximation. Pour contourner cette difficulté nous avons établi (Sellier, 1996) une méthode exploitant le concept d'intégration en partie finie au sens d'Hadamard (Schwartz, 1966) et s'appliquant à tout ordre d'approximation et de manière systématique à une classe étendue d'intégrales éventuellement hypersingulières. En se contentant de développer ici $I_\epsilon^z[v]$ à l'ordre $o(v_m)$ où $v_m := Max_{[0,1]}|v|$ nous trouvons ainsi et sans effort

$$(3.2) \qquad I_\epsilon^z[v] = I_0^z[v]/\epsilon^2 + I_1^z[v]\log\epsilon + I_2^z[v] + o(v_m),$$

$$(3.3) \qquad I_0^z[v] := \frac{2v(z)}{H^2(\theta_P, z, \theta, z)}; \qquad I_1^z[v] := -\frac{d^2 v}{dz_P^2}(z),$$

$$(3.4) \qquad I_2^z[v] := pf \int_0^1 \frac{v(z_P)dz_P}{|z_P - z|^3} - \frac{d^2}{dz_P^2}\left[\left\{1 + \log\left[\frac{H(\theta_P, z_P, \theta, z)}{2}\right]\right\} v(z_P)\right]_{z_P = z}.$$

Si, par rapport à la variable z_P d'intégration, $I_0^z[v]$ est une contribution locale en z notons que $I_1^z[v]$ et $I_2^z[v]$ impliquent respectivement un voisinage du point z et tout le domaine $[0,1]$ d'intégration.

4. Détermination de la densité surfacique de sources puis de C_p sur le corps

Nous débutons par la résolution asymptotique de l'équation intégrale (2.2). Cette dernière s'écrit, en utilisant le résultat (3.2) et l'expression de A_0^ϵ pour construire le développement asymptotique de $J_0(\theta, z)$, sous la forme

$$(4.1) \qquad L_0^{\theta,z}[\lambda] + L_1^{\theta,z}[\lambda]\epsilon^2\log\epsilon + L_2^{\theta,z}[\lambda]\epsilon^2 + o(\lambda_m\epsilon^2) = d_1(\theta, z)\epsilon + d_3(\theta, z)\epsilon^3 + o(\epsilon^3),$$

où les fonctions d_1 et d_3, issues du développement de $d(M)$, et les opérateurs $L_1^{\theta,z}, L_2^{\theta,z}$ sont explicités par la suite tandis que le terme $L_0^{\theta,z}[\lambda]$ est une contribution bidimensionnelle et obéit à

$$(4.2) \qquad L_0^{\theta,z}[\lambda] := \frac{\lambda(\theta, z)}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{[\lambda f s_0](\theta_P, z)B(\theta_P, z, \theta, z)}{2\pi s_0(\theta, z)H^2(\theta_P, z, \theta, z)} d\theta_P.$$

En effet, si $\partial\mathcal{C}(z)$ désigne le contour fermé de la section $\mathcal{C}(z)$ d'ordonnée z du corps, $L_0^{\theta,z}[\lambda]$ s'identifie à la composante normale de la vitesse en M d'un écoulement *plan,* extérieur à $\mathcal{C}(z)$ et créé par la densité linéique de sources $\lambda(\theta_P, z)$ sur ce dernier. Cette interprétation fournit le lien global suivant entre la donnée h et une solution λ de l'équation $L_0^{\theta,z}[\lambda] = h(\theta, z), \theta \in [0, 2\pi]$

$$(4.3) \qquad S_\lambda(z) := \oint_{\partial\mathcal{C}(z)} \lambda(\theta_P, z)dl_P = \int_0^{2\pi} [\lambda f s_0](\theta_P, z)d\theta_P = \int_0^{2\pi} [h f s_0](\theta_P, z)d\theta_P$$

mais indique aussi (Zabreyko, 1975) que l'équation homogène $L_0^{\theta,z}[\lambda] = 0$ admet uniquement la solution nulle. Ce dernier point suggère alors de construire une approximation de la solution de l'équation (4.1) sous la forme

$$(4.4) \qquad \lambda(\theta, z) = \lambda_1(\theta, z)\epsilon + \lambda_2(\theta, z)\epsilon^3\log\epsilon + \lambda_3(\theta, z)\epsilon^3 + o(\epsilon^3).$$

Dès lors, on obtient pour la nouvelle inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ le système pyramidal ci-dessous

(4.5) $L_0^{\theta,z}[\lambda_1] = d_1(\theta, z) := [(f_z^1 - \alpha b)/s_0](\theta, z); \qquad b(\theta, z) := \cos(\theta) + \sin(\theta)(f^{-1}f_\theta^1)(\theta, z),$

(4.6) $L_0^{\theta,z}[\lambda_2] = -L_1^{\theta,z}[\lambda_1] := -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} I_1^z[(\lambda_1 f s_0)(\theta_P, z_P)A_0^0(\theta_P, z_P, \theta, z)]d\theta_P,$

(4.7)
$$L_0^{\theta,z}[\lambda_3] = d_3(\theta, z) - L_2^{\theta,z}[\lambda_1]$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{I_2^z[(\lambda_1 f s_0)(\theta_P, z_P)A_0^0(\theta_P, z_P, \theta, z)] + \frac{\lambda_1(\theta_P, z)B(\theta_P, z, \theta, z)}{s_0(\theta, z)H^2(\theta_P, z, \theta, z)}\left[\left(\frac{f_z^1}{s_0}\right)^2(\theta_P, z) - \left(\frac{f_z^1}{s_0}\right)^2(\theta, z)\right]\Big\}d\theta_P$$
$$+ \left[\frac{\alpha^3 b - 3\alpha^2 f_z^1 - 3d_1(f_z^1)^2/s_0}{6s_0}\right](\theta, z).$$

Les opérateurs linéaires $L_1^{\theta,z}, L_2^{\theta,z}$ et le terme d_3 sont ainsi définis par (4.6) et (4.7). La forme des seconds membres précédents permet d'obtenir, via (4.3) et après quelques calculs, les sommes $S_{\lambda_i}(z)$ des sources λ_i distribuées dans la section $C(z)$ d'aire adimensionnelle $S(z) = \int_0^{2\pi} f^2(\theta, z)/2d\theta$. Par exemple, si $g^{(i)} := d^i g/dz^i$ et conformément à Euvrard (1983), nous obtenons

(4.8) $$S_{\lambda_1}(z) = S^{(1)}(z); \qquad S_{\lambda_2}(z) = (2\pi)^{-1}[SS^{(2)}]^{(1)}(z).$$

Donnons à présent, à l'ordre $O(\epsilon^4 \log \epsilon)$, l'expression asymptotique de $C_p(M)$ pour $M(\theta, z) \in \partial\mathcal{A}' \backslash \{O', E'\}$ en reprenant les relations (2.1) et (2.3) à la lueur de la solution (4.4). Un développement immédiat des termes $c_i(M)$ procure sans peine les comportements

(4.9) $c_1(\theta, z) = a_1(\theta, z)\epsilon + O(\epsilon^3); \qquad a_1(\theta, z) := -\alpha[\sin(\theta) - \cos(\theta)(f^{-1}f_\theta^1)(\theta, z)]/s_0(\theta, z),$

(4.10) $c_2(\theta, z) = 1 + a_2(\theta, z)\epsilon^2 + O(\epsilon^4); \qquad a_2(\theta, z) := -\dfrac{\alpha^2}{2} + \left[\dfrac{f_z^1(2\alpha b - f_z^1)}{2s_0^2}\right](\theta, z).$

L'approximation pour $i \in \{1, 2\}$ de $u_i(M)$ passe alors par celle des intégrales $J_i(\theta, z)$ associées. Si le développement de $u_1(M)$ s'obtient rapidement celui de $u_2(M)$ nécessite pour sa part plus de soins mais s'établit également à l'aide de la formule (3.1). Dans un souci de concision nous fournissons directement l'expression de C_p, à savoir,

(4.11)
$$C_p(M) = -2l_{11}(\theta, z)\epsilon^2 \log \epsilon - \{(a_1 + e_0)^2(\theta, z) + 2(a_2 + l_{21} + e_1)(\theta, z)\}\epsilon^2 - 2l_{12}(\theta, z)\epsilon^4 \log^2 \epsilon + O(\epsilon^4 \log \epsilon)$$

où les nouvelles fonctions $e_i(\theta, z)$ et $l_{ij}(\theta, z)$ sont définies de la manière suivante

(4.12) $$e_0(\theta, z) := \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} I_0^z[(\lambda_1 f s_0)(\theta_P, z_P)A_1^0(\theta_P, z_P, \theta, z)]d\theta_P,$$

(4.13) $$e_1(\theta, z) := \frac{1}{4\pi}\left[\frac{f_z^1}{s_0^2}\right](\theta, z)\int_0^{2\pi} I_0^z[(\lambda_1 f s_0)(\theta_P, z_P)B(\theta_P, z_P, \theta, z)]d\theta_P,$$

(4.14) $$l_{ij}(\theta, z) := \int_0^{2\pi}\frac{I_i^z[(\lambda_j f s_0)(\theta_P, z_P)(z - z_P)]}{4\pi}d\theta_P; \qquad 2 \le i + j \le 3.$$

Pour $j \in \{1,2\}$ le lecteur peut vérifier à ce stade l'égalité $l_{1j}(\theta,z) = S^{(1)}_{\lambda_j}(z)/[2\pi]$ qui montre au passage que l_{1j} ne dépend pas de θ.

5. Cas d'un corps à symétrie de révolution

L'écoulement n'est pas cependant axisymétrique si $\alpha \neq 0$. Dans ce cas $f = f(z)$, l'aire de $C(z)$ devient $S(z) = \pi f^2(z)$ et l'équation $L_0^{\theta,z}[\lambda] = h(\theta,z)$ admet une forme particulièrement simple qui s'inverse analytiquement grâce à la propriété globale (4.3). Plus précisément, on trouve

$$(5.1) \qquad \frac{\lambda(\theta,z)}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{\lambda(\theta_P,z)}{4\pi} d\theta_P = h(\theta,z) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda(\theta,z) = h(\theta,z) - \int_0^{2\pi} \frac{h(\theta_P,z)}{2\pi} d\theta_P.$$

Ce résultat (5.1) autorise une résolution explicite du système pyramidal (4.5)-(4.7). En particulier les densités λ_1 et λ_2 admettent pour expressions

$$(5.2) \qquad \lambda_1(\theta,z) = f^{(1)}(z) - 2\alpha\cos\theta; \qquad \lambda_2(\theta,z) = \left[\frac{2f^{(1)}S^{(2)} + fS^{(3)}}{4\pi}\right](z) + \frac{\alpha S^{(2)}(z)}{\pi}\cos\theta,$$

ce qui étend au cas $\alpha \neq 0$ les résultats antérieurs (*voir* Moran, 1963; Handelsman et Keller, 1967). Après quelques arrangements l'expression précédente (4.11) de C_p procure ici

$$\begin{aligned}(5.3) \qquad C_p(M) = &- 2[ff^{(1)}]^{(1)}(z)\epsilon^2 \log\epsilon \\ &- \Big\{ 4\alpha f^{(1)}(z)\cos\theta + \alpha^2[4\sin^2(\theta) - 1] + 2[ff^{(1)}]^{(1)}(z)\log[f(z)/2] \\ &\quad - pf\int_0^1 \frac{sgn(u-z)}{(u-z)^2} ff^{(1)}(u)du + 2[ff^{(1)}]^{(1)}(z) - [f^{(1)}(z)]^2 \Big\}\epsilon^2 \\ &- [(ff^{(1)})^2 + f^3 f^{(2)}]^{(2)}(z)\epsilon^4\log^2\epsilon + O(\epsilon^4\log\epsilon).\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0$ notre résultat (5.3) s'avère conforme aux conclusions de Tuck (1992).

6. Conclusion

En s'appuyant sur une méthode performante et systématique de développement asymptotique d'intégrales dépendant d'un petit paramètre (Sellier, 1996) nous avons élaboré une théorie des corps élancés pour une géométrie quelconque et un écoulement non portant. Cette approche indirecte fait l'économie des conditions délicates de raccord indissociables d'un traitement de type Développement Asymptotiques Raccordés. Outre les conclusions de travaux antérieurs qui sont retrouvées ici comme cas particuliers ce travail procure sans difficulté supplémentaire le comportement du coefficient de pression sur le corps et permet de construire, si nécessaire, une approximation de l'écoulement uniformément valable dans tout le domaine fluide.

Note remise le 8 septembre 1996, acceptée le 17 septembre 1996.

Références bibliographiques

Cade R., 1994. On integral equations of axisymmetric potential theory, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 53, p. 1-23.
Cole J. D. et Kevorkian J., 1981. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin.
Euvrard D., 1983. La théorie des corps élançés pour un navire avançant en eau calme. Rapport de Recherche 145, ENSTA.

Handelsman R. et Keller J. B., 1967. Axially symmetric potential flow around a slender body, *J. Fluid. Mech.*, 28, p. 131-147.

Kupradze V. D., 1963. *Dynamical problems in elasticity,* Progress in Solid Mech., North Holland.

Moran J., 1963. Line source distributions and slender-body theory, *J. Fluid. Mech.*, 17, p. 285-304.

Schwartz L., 1966. *Théorie des Distributions,* Paris, Hermann.

Sellier A., 1996. Asymptotic expansion of a general Integral, *Proc. Roy. Soc. London Ser.* A (sous presse).

Tuck E. O., 1992. Analytical aspects of slender-body theory, in Waves Asymptotics, **Martin P. A. et Wickham G. R.** éd., Cambridge University Press.

Van Dyke M., 1975. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics,* Parabolic Press.

Zabreyko R. P., 1975. *Integral Equations,* Noordhoff, Leyden, Holland.