C. R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Série II *b*, p. 809-815, 1996
Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*

Une approche intégrale de la théorie des profils minces

Antoine SELLIER

LADHYX, École Polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX, France.

Résumé. On présente une théorie des profils minces applicable à tout ordre. La démarche proposée consiste à écrire et à résoudre asymptotiquement un système d'équations intégrales singulières et couplées ayant pour inconnues des densités linéiques de sources et de tourbillons à répartir sur la frontière exacte du profil.

An integral method to derive thin-airfoil theory

Abstract. *A formal thin-airfoil theory is built that can apply to any order. The proposed method consists in asymptotically solving a system of singular and integral equations where the unknown quantities are distributions of sources and vortices to be spread over the exact boundary of the airfoil.*

Abridged English Version

(Equation numbers refer to the French version.)

Consider a cartesian coordinate system (O, x', y') and also a motionless and thin-airfoil $\mathcal{A}_i$ which is a simply connected subset of $\mathbb{R}^2$ and such that $(x''Ox')$ is directed along its main chord $[O, E]$, whose length is L (see *fig.*). If e denotes the main thickness of $\mathcal{A}_i$, then $\epsilon = e/L \ll 1$ and $\mathcal{C}^+$ (resp. $\mathcal{C}^-$) designates the upper (resp. lower) side of boundary $\mathcal{C} = \partial\mathcal{A}_i$. The problem consists in finding with respect to ϵ the steady, incompressible and irrotational flow (of velocity $\underline{u}$) around $\mathcal{A}_i$ of an inviscid and of constant density fluid such that as $x'' \to -\infty$ then $\underline{u} \to \underline{u}_\infty = u_\infty[\cos(\alpha\epsilon)\underline{e}_x + \sin(\alpha\epsilon)\underline{e}_y]$ with $u_\infty > 0$ and $\alpha = O(1)$.

Under proposed assumptions there exists a potential function ϕ which obeys $\underline{u} = \underline{u}_\infty + \underline{\mathrm{grad}}[\phi]$ and also satisfies equations (2.1) and (2.2). Part of (2.2), $u^+(E) = u^-(E)$ is denoted $(\overline{KJ})$ and means that at the trailing edge E the tangential velocity depends on the side of the airfoil. Such a property is actually provided (via Bernoulli's theorem) by Kutta-Joukowsky condition which states that pressure remains continuous at E and is needed to ensure a well-posed problem. The well-known

Note présentée par Henri CABANNES.

method of singularities applies to this kind of problem and thereafter one may obtain potential ϕ by spreading over C unknown sources and normal doublet densities. As far as induced velocity is concerned, note that normal doublets may be replaced by adequate vortices directed along $\underline{k} = \underline{e}_x \wedge \underline{e}_y$ and this justifies why we actually spread over C source density q and vortex density $-\gamma \underline{k}$. Thus (2.1) holds whereas flow-tangency condition for $M \in C \setminus \{O, E\}$ leads to two integral equations (2.3) where symbol vp means an integration in the principal value sense of Cauchy. At this stage, only two integral equations (2.3) bear on four unknowns, q^+, q^-, γ^+ and γ^-. Consequently, two other relations are needed. For $M \in C \setminus \{O, E\}, (\underline{n}, \underline{t})$ is directed as shown by figure and for $h > 0, M_i^h$ obeys $\underline{MM_i^h} = -h\underline{n}(M)$. The additional equations are supplied by assigning a value to $d(M) = \underline{u}(M_i).\underline{t}(M)$ for $M \in C \setminus \{O, E\}$ and $M_i = \lim_{h \to 0, h>0} M_i^h$. Nevertheless, since $\underline{\mathrm{rot}}(\underline{u}) = \underline{0}$ and $\mathcal{A}_i$ is simply connected, one has to fulfill a compatibility relation $\int_{C^+} d(M)dl = \int_{C^-} d(M)dl$. Noting that choice $d(M) = u_\infty \underline{e}_x.\underline{t}(M)$ is suitable, it is possible to deduce integral equations (2.4) and also a new Kutta-Joukowsky condition (2.5). Change of scale $(x, y) = (L^{-1}x', e^{-1}y')$ with $C^{\pm}_{-}$ defined by $y = \overset{+}{f}_{-}(x), 0 < x < 1$ is employed in order to exhibit small parameter ϵ. More precisely, introduction of a new unknown $(\overset{+}{\lambda}_{-}(x), \overset{+}{\Gamma}_{-}(x)) = u_\infty^{-1}\sqrt{1 + [\epsilon f^{(1)\pm}(x)]^2}(\overset{+}{q}_{-}(x), \overset{+}{\gamma}_{-}(x))$ makes it possible to rewrite equations (2.3), (2.4) and (2.5) in terms of linear operators $I_a^h[.]$ and $J_a^h[.]$ where for $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ new functions h_i and a_i are respectively defined by equations (2.6), (2.7) and by $a_1 = a_2 = f^{(1)+}(x), a_3 = a_4 = f^{(1)-}(x)$.

Clearly, the next basic step consists in finding the asymptotic expansion with respect to small parameter ϵ of previous integral equations and new (KJ) condition. This task is carried out by studying the asymptotic behaviour of $I_a^h[g]$ and $J_a^h[g]$. Such a question turns out to be difficult, especially as one seeks the asymptotic behaviour up to any order. Consequently, a systematic formula has been derived (*see* Sellier, 1994, 1996). For this latter work the main tool is the powerful concept of integration in the finite part sense of Hadamard which is denoted $pf \int$. For instance, equalities (3.1) to (3.5) detail the asymptotic behaviour up to order $o(\epsilon^2)$ and throughout this paper it is assumed that $f^{(k)\pm}(x) = O(1)$ for $k \in \mathbb{N}$ and $0 < x < 1$.

Introduction of asymptotic expansions for $I_a^h[g]$ and $J_a^h[g]$ into integral equations suggests that solution $(\overset{+}{\lambda}_{-}, \overset{+}{\Gamma}_{-})$ should be sought under the form: $(\overset{+}{\lambda}_{-}, \overset{+}{\Gamma}_{-}) = \epsilon(\overset{+}{\lambda}_{1}^{-}, \overset{+}{\Gamma}_{1}^{-}) + \epsilon^2(\overset{+}{\lambda}_{2}^{-}, \overset{+}{\Gamma}_{2}^{-}) + o(\epsilon^2)$. Thus, condition (KJ) yields $\Gamma_i^+(1) + \Gamma_i^-(1) = d_i$ with $d_1 = 0, 2d_2 = [f^{(1)+}(1)]^2 - [f^{(1)-}(1)]^2$ and also previous integral equations lead for each new unknown $(\lambda_i^+, \lambda_i^-, \Gamma_i^+, \Gamma_i^-)$ for $i \in \{1, 2, 3\}$ to the new set of integral equations (4.1) to (4.4) where $L[s](x) = -J_{a,0}^h[s](x)$ and $d_3^1(x) = d_4^1(x)$. Whereas $(\lambda_i^+, \lambda_i^-)$ clearly obeys $\lambda_i^+(x) + \lambda_i^-(x) = [d_1^i(x) - d_2^i(x)]/2$ but also $\lambda_i^+(x) - \lambda_i^-(x) = D_i(x)$ which is given by compatibility relation $d_3^{i+1}(x) = d_4^{i+1}(x)$ one obtains $\Gamma_i^+ + \Gamma_i^- = L_d^{-1}[d_1 + d_2]$ where $L_d^{-1}[s]$ denotes the solution of integral problem (4.5). These remarks (*see* Muskhelishvili, 1958 and Zabreyko, 1975) ensure results (4.6) and (4.7).

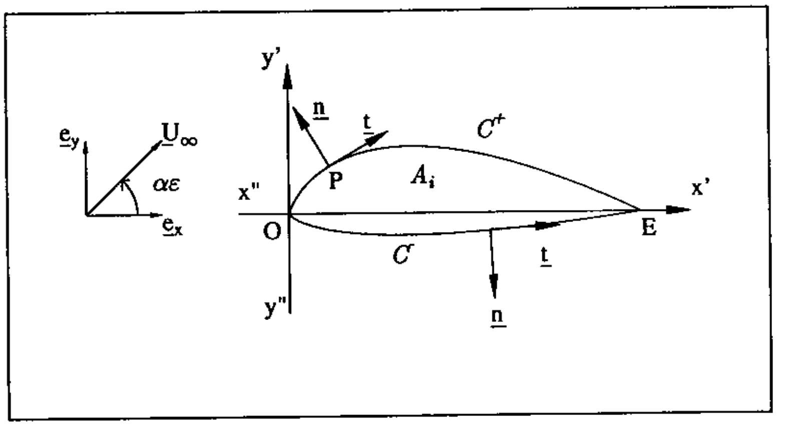
If classical functions g and τ obey $2g = f^+ + f^-$ and $2\tau = f^+ - f^-$ note that $g(0) = g(1) = \tau(0) = \tau(1)$. For a first- order solution one immediately obtains $d_1^1(x) = 2[f^{(1)^+}(x) - \alpha], d_2^1(x) = 2[f^{(1)^-}(x) - \alpha]$ and also $d_3^2(x) = \alpha^2 - A_+^x[\Gamma_1^+, \Gamma_1^-, -\lambda_1^-] - 2\alpha f^{(1)^+}(x), d_4^2(x) = \alpha^2 - A_-^x[\Gamma_1^+, \Gamma_1^-, -\lambda_1^-] - 2\alpha f^{(1)^-}(x)$ with $A_{\overset{+}{-}}^x[u, v, s]$ defined by (5.1). Thus, $D_1(x) = \lambda_1^+(x) - \lambda_1^-(x) = 2\alpha + L[\Gamma_1^+ + \Gamma_1^-](x)$ and (5.2) holds. Moreover $d_1^2(x) = A_+^x[\lambda_1^+, \lambda_1^-, \Gamma_1^-], d_2^2(x) = A_-^x[\lambda_1^+, \lambda_1^-, \Gamma_1^+]$ and the reader may check the proposed forms obtained for functions $d_1^2(x), d_2^2(x), d_3^2(x), d_3^3(x)$ and $d_4^3(x)$. Finally, after some algebra, one deduces second order solution given by (5.4).

1. Introduction

La théorie des profils minces en faible incidence est l'un des modèles les plus connus de l'Aérodynamique et repose sur l'application de la technique des Développements Asymptotiques raccordés au problème local associé (Ashley et Landhal, 1965; Van Dyke, 1975). Une telle méthode conduit cependant aux ordres élevés d'approximation à des conditions de raccord très laborieuses. Cette Note propose une technique de résolution du cas stationnaire s'appliquant à tout ordre. L'approche choisie repose sur l'inversion asymptotique d'un système pyramidal d'équations intégrales singulières. L'approximation de la solution est ici proposée au second ordre inclus.

2. Le système d'équations intégrales singulières

Soit un repère cartésien (O, x', y') et un profil mince $\mathcal{A}_i$ de corde principale $OE = L$, d'épaisseur typique e avec $\epsilon = e/L \ll 1$ et de frontière $\mathcal{C} = \partial\mathcal{A}_i = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ où les exposants $^+$ et $^-$ désigneront respectivement l'extrados et l'intrados. Pour $M \in \mathcal{C} \setminus \{O, E\}$ on introduit (voir *fig.*) les vecteurs unitaires $\underline{n}(M)$ et $\underline{t}(M)$ et pour $h > 0$ les points M_o^h, M_i^h, M_o et M_i tels que $\underline{MM_o^h} = h\underline{n}(M), \underline{MM_i^h} = -h\underline{n}(M), M_o = \lim_{h\to 0, h>0} M_o^h$ et $M_i = \lim_{h\to 0, h>0} M_i^h$.



Définition des coordonnées cartésiennes.

Definition of the cartesian coordinate system.

On cherche la vitesse $\underline{u}$ d'un fluide parfait et homogène en écoulement permanent, incompressible et potentiel autour de $\mathcal{A}_i$ et qui présente à l'infini amont une vitesse $\underline{u}_\infty$ d'incidence $\beta = (\underline{e}_x, \underline{u}_\infty) = \alpha\epsilon$ où $\alpha = O(1)$ et une pression p_∞. Pour obtenir une solution unique il faut ajouter la condition de Kutta-Joukowsky, notée (KJ), qui stipule (Anderson, 1991; Moran, 1984) que $u^+(E) = u^-(E)$ si $u^{\pm}(E) = \lim_{M\to E, M\in\mathcal{C}^{\pm}} [\underline{u}(M_o).\underline{t}(M)]$. Ainsi, si $\underline{u} = \underline{u}_\infty + \underline{\mathrm{grad}}[\phi]$, le potentiel de perturbation inconnu ϕ vérifie non seulement

$$(2.1) \qquad \Delta[\phi] = \mathrm{div}(\underline{\mathrm{grad}}[\phi]) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}_i \cup \mathcal{C}; \qquad \underline{\mathrm{grad}}[\phi] \to \underline{0}, \text{ à l'infini,}$$

mais aussi les conditions de glissement sur le corps et de Kutta-Joukowsky, c'est-à-dire

$$(2.2) \quad \underline{\mathrm{grad}}_M[\phi](M_o).\underline{n}(M) = -\underline{u}_\infty.\underline{n}(M), \quad M \in \mathcal{C} \setminus \{O, E\}; \qquad u^+(E) = u^-(E), \quad (KJ).$$

Ici ϕ est obtenu en répartissant des sources et des doublets normaux sur C ce qui assure (2.1). La vitesse induite par ces doublets normaux étant équivalente à celle créée par des tourbillons normaux au plan du profil (Dautray et Lions, 1988), on choisit de construire $\underline{u} - \underline{u}_\infty$ en usant sur C de répartitions linéiques de sources q et de tourbillons $-\gamma \underline{k}$, si $\underline{k} = \underline{e}_x \wedge \underline{e}_y$. Alors pour $M \in C \setminus \{O, E\}, \underline{u}(M_o) = \underline{u}(M_i) + q(M)\underline{n}(M) - \gamma(M)\underline{k} \wedge \underline{n}(M)$ et la condition de glissement mène pour l'inconnue $(q^+, q^-, \gamma^+, \gamma^-)$ à deux équations intégrales

$$\begin{aligned}(2.3)\qquad & \pi q^{\overset{+}{-}}(M) + \int_{C^{\overset{+}{-}}} q^{\overset{+}{-}}(P)\underline{\mathrm{grad}}_M[\log(PM)].\underline{n}(M)dl_P \\ &+ \int_{C^{\overset{-}{+}}} q^{\overset{-}{+}}(P)\underline{\mathrm{grad}}_M[\log(PM)].\underline{n}(M)dl_P \\ &- vp\int_{C^{\overset{+}{-}}} \gamma^{\overset{+}{-}}(P)\frac{\underline{k} \wedge \underline{PM}}{PM^2}.\underline{n}(M)dl_P \\ &- \int_{C^{\overset{-}{+}}} \gamma^{\overset{-}{+}}(P)\frac{\underline{k} \wedge \underline{PM}}{PM^2}.\underline{n}(M)dl_P = -2\pi\underline{u}_\infty.\underline{n}(M),\end{aligned}$$

où dl_P désigne une abscisse curviligne croissant de O vers E sur C^+ et C^- et vp la valeur principale au sens de Cauchy. Puisque le champ $\underline{u}$ ainsi construit est irrotationnel dans le domaine simplement connexe $\mathcal{A}_i$ alors $\oint \underline{u}(M_i).\underline{dl} = 0$, à savoir avec l'orientation de $\underline{t}(M)$, $\int_{C^+} \underline{u}(M_i).\underline{t}(M)dl_M = \int_{C^-} \underline{u}(M_i).\underline{t}(M)dl_M$. Pour $u_\infty = ||\underline{u}_\infty||$ et $M \in C \setminus \{O, E\}$, le choix $d(M) = \underline{u}(M_i).\underline{t}(M) = u_\infty \underline{e}_x.\underline{t}(M)$ est compatible avec cette relation et conduit à

$$\begin{aligned}(2.4)\qquad & vp\int_{C^{\overset{+}{-}}} q^{\overset{+}{-}}(P)\underline{\mathrm{grad}}_M[\log(PM)].\underline{t}(M)dl_P \\ &+ \int_{C^{\overset{-}{+}}} q^{\overset{-}{+}}(P)\underline{\mathrm{grad}}_M[\log(PM)].\underline{t}(M)dl_P \\ &\overset{-}{+}\pi\gamma^{\overset{+}{-}}(M) - \int_{C^+ \cup C^-} \gamma(P)\left[\frac{\underline{k} \wedge \underline{PM}}{PM^2}\right].\underline{t}(M)dl_P = 2\pi[u_\infty \underline{e}_x - \underline{u}_\infty].\underline{t}(M),\end{aligned}$$

$$(2.5)\qquad \gamma^+(E) + \gamma^-(E) = u_\infty \underline{e}_x.[\underline{t}^-(E) - \underline{t}^+(E)], \quad (KJ).$$

L'introduction des variables $(x, y) = (L^{-1}x', e^{-1}y')$ (avec $C^{\overset{+}{-}}$ repéré par $y = f^{\overset{+}{-}}(x)$) permet ici de faire intervenir le petit paramètre $\epsilon := e/L$ dans les équations (2.3), (2.4) et (2.5). Si $a_1 = a_2 = f^{(1)^+}(x), a_3 = a_4 = f^{(1)^-}(x)$ les nouvelles densités $(\lambda^{\overset{+}{-}}(x), \Gamma^{\overset{+}{-}}(x)) = u_\infty^{-1}\sqrt{1 + [\epsilon f^{(1)\overset{+}{-}}(x)]^2}(q^{\overset{+}{-}}(x), \gamma^{\overset{+}{-}}(x))$, vérifient alors pour $0 < x < 1$ le système intégral

$$\begin{aligned}&-\lambda^+(x) + I_{a_1}^{h_1}[\lambda^+] + I_{a_2}^{h_2}[\lambda^-] + J_{a_1}^{h_1}[\Gamma^+] + J_{a_2}^{h_2}[\Gamma^-] = -2\left[\epsilon\cos(\alpha\epsilon)f^{(1)^+}(x) - \sin(\alpha\epsilon)\right],\\ &\lambda^-(x) + I_{a_3}^{h_3}[\lambda^+] + I_{a_4}^{h_4}[\lambda^-] + J_{a_3}^{h_3}[\Gamma^+] + J_{a_4}^{h_4}[\Gamma^-] = -2\left[\epsilon\cos(\alpha\epsilon)f^{(1)^-}(x) - \sin(\alpha\epsilon)\right],\\ &\Gamma^+(x) + I_{a_1}^{h_1}[\Gamma^+] + I_{a_2}^{h_2}[\Gamma^-] - J_{a_1}^{h_1}[\lambda^+] - J_{a_2}^{h_2}[\lambda^-] = 2\left[1 - \cos(\alpha\epsilon) - \epsilon\sin(\alpha\epsilon)f^{(1)^+}(x)\right],\\ &\Gamma^-(x) - I_{a_3}^{h_3}[\Gamma^+] - I_{a_4}^{h_4}[\Gamma^-] + J_{a_3}^{h_3}[\lambda^+] + J_{a_4}^{h_4}[\lambda^-] = -2\left[1 - \cos(\alpha\epsilon) - \epsilon\sin(\alpha\epsilon)f^{(1)^-}(x)\right],\\ &\sqrt{1 + [\epsilon f^{(1)^-}(1)]^2}[\Gamma^+(1) + 1] + \sqrt{1 + [\epsilon f^{(1)}(1)^+]^2}[\Gamma^-(1) - 1] = 0, \quad (KJ),\end{aligned}$$

où les fonctions $h_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et les opérateurs linéaires $I_a^h[.]$ et $J_a^h[.]$ obéissent à

$$(2.6)\qquad h_1(u) = f^+(x) - f^+(x+u), \qquad h_2(u) = f^+(x) - f^-(x+u);$$

$$
(2.7) \qquad \begin{cases} h_3(u) = f^-(x) - f^+(x+u), \qquad h_4(u) = f^-(x) - f^-(x+u), \\ \dfrac{I_a^h[g]}{\epsilon} = -vp \displaystyle\int_{-x}^{1-x} \frac{g(x+u)[au + h(u)]}{\pi[u^2 + \epsilon^2 h^2(u)]} du; \\ J_a^h[g] = -vp \displaystyle\int_{-x}^{1-x} \frac{g(x+u)[u - a\epsilon^2 h(u)]}{\pi[u^2 + \epsilon^2 h^2(u)]} du. \end{cases}
$$

3. Développement asymptotique des équations intégrales

L'inversion asymptotique du système intégral précédent passe par la construction du développement asymptotique, en fonction du petit paramètre ϵ, des opérateurs $I_a^h[g]$ et $J_a^h[g]$. Poser brutalement $\epsilon = 0$ pour $J_a^h[g]$ conduit à une intégrale non définie. La difficulté est levée en appliquant une méthode systématique (Sellier, 1994, 1996) qui procure le comportement asymptotique de $I_a^h[g]$ et $J_a^h[g]$ à tout ordre. Si $\Delta_y = \text{sgn}(y)$ pour $y \neq 0$, $\Delta_0 = 0$ et pf désigne une intégration en partie finie au sens d'Hadamard nous obtenons

$$(3.1) \quad L_a^h[g] = L_{a,0}^h[g] + L_{a,1}^h[g]\epsilon + L_{a,2}^h[g]\epsilon^2 + o(\epsilon^2); \qquad pour \quad L \in \{I, J\},$$

$$(3.2) \quad I_{a,0}^h[g] = -\Delta_{h(0)} g(x); \qquad I_{a,1}^h[g] = -\frac{1}{\pi} pf \int_0^1 \frac{g(x_P)[a(x_P - x) + h(x_P - x)]}{(x_P - x)^2} dx_P,$$

$$(3.3) \quad J_{a,0}^h[g] = -\frac{1}{\pi} vp \int_0^1 \frac{g(x_P) dx_P}{x_P - x}; \qquad J_{a,1}^h[g] = \Delta_{h(0)}\{[a + h^{(1)}(0)]g(x) + h(0) g^{(1)}(x)\},$$

$$(3.4) \quad I_h^{a,2}[g] = \Delta_{h(0)}\{[h(0)h^{(2)}(0) + h^{(1)}(0)(a + h^{(1)}(0))]g(x) \\ + [a + 2h^{(1)}(0)]h(0)g^{(1)}(x) + h(0)^2 g^{(2)}(x)/2\};$$

$$(3.5) \quad J_h^{a,2}[g] = \frac{1}{\pi} pf \int_0^1 \frac{g(x_P) h(x_P - x)[a(x_P - x) + h(x_P - x)]}{(x_P - x)^3} dx_P.$$

Sous l'hypothèse $f^{(k)}(x) = O(1)$ pour $0 < x < 1$ le développement asymptotique du système intégral écrit auparavant s'obtient, à tout ordre, en utilisant ces résultats et en développant également la relation (*KJ*) associée à Kutta-Joukowsky.

4. Résolution asymptotique du système intégral

L'étape précédente permet de chercher une approximation de la solution sous la forme $(\lambda^{\pm}, \Gamma^{\pm}) = \epsilon(\lambda_1^{\pm}, \Gamma_1^{\pm}) + \epsilon^2(\lambda_2^{\pm}, \Gamma_2^{\pm}) + o(\epsilon^2)$. Si on pose pour $0 < x < 1$, $L[s](x) = -J_{a,0}^h[s]$ (en remarquant que $J_{a,0}^h$ ne dépend pas de (h, a)), on trouve alors que $\forall i \in \{1, 2, 3\}, (KJ)$ conduit à $\Gamma_i^+(1) + \Gamma_i^-(1) = d_i$ avec $d_1 = 0, 2d_2 = [f^{(1)^+}(1)]^2 - [f^{(1)^-}(1)]^2$ tandis que les équations intégrales fournissent pour chaque inconnue $(\lambda_i^+, \lambda_i^-, \Gamma_i^+, \Gamma_i^-)$ le système intégral suivant

$$(4.1) \qquad \lambda_i^+(x) + \lambda_i^-(x) + L[\Gamma_i^+(x_P) + \Gamma_i^-(x_P)](x) = d_1^i(x), \qquad 0 < x < 1,$$

$$(4.2) \qquad -\lambda_i^+(x) - \lambda_i^-(x) + L[\Gamma_i^+(x_P) + \Gamma_i^-(x_P)](x) = d_2^i(x), \qquad 0 < x < 1,$$

$$(4.3) \qquad \Gamma_i^+(x) - \Gamma_i^-(x) + L[\lambda_i^+(x_P) + \lambda_i^-(x_P)](x) = d_3^i(x), \qquad 0 < x < 1,$$

$$(4.4) \qquad \Gamma_i^+(x) - \Gamma_i^-(x) + L[\lambda_i^+(x_P) + \lambda_i^-(x_P)](x) = d_4^i(x), \qquad 0 < x < 1,$$

où $d_3^1(x) = d_4^1(x) = 0$ et les autres second membres sont construits par récurrence. Le couple $(\lambda_i^+, \lambda_i^-)$ est déterminé par $\lambda_i^+(x) + \lambda_i^-(x) = [d_1^i(x) - d_2^i(x)]/2$ et $\lambda_i^+(x) - \lambda_i^-(x) = D_i(x)$, cette dernière fonction découlant de la relation de compatibilité $d_3^{i+1}(x) = d_4^{i+1}(x)$. Enfin si $h(x) = L_d^{-1}[s](x)$ désigne la solution du problème intégral (L_d) suivant

$$(4.5) \qquad L[h](x) = \frac{1}{\pi} vp \int_0^1 \frac{h(x_P)dx_P}{x_P - x} = s(x) \quad \text{pour } 0 < x < 1; \qquad h(1) = d,$$

alors (Muskhelishvili, 1958; Zabreyko, 1975) la fonction h et le couple (Γ_i^+, Γ_i^-) vérifient

$$(4.6) \qquad h(x) = d + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\left\{ vp \int_0^1 \sqrt{\frac{x_P}{1-x_P}}\left[s(x_P) + \frac{d}{\pi}\log(\frac{x_P}{1-x_P})\right] \frac{dx_P}{x - x_P}\right\},$$

$$(4.7) \qquad \Gamma_i^{\pm}(x) = \frac{1}{4}\{L_d^{-1}[d_1^i(x_P) + d_2^i(x_P)](x) \pm 2d_3^i(x) \mp L[d_1^i(x_P) - d_2^i(x_P)](x)\}.$$

5. La solution au second ordre inclus

Si on introduit la cambrure g et l'épaisseur τ par $2g(x) = f^+(x) + f^-(x), 2\tau(x) = f^+(x) - f^-(x)$ le choix du repère cartésien donne $g(0) = g(1) = \tau(0) = \tau(1) = 0$. Au premier ordre il vient

$$d_1^1(x) = 2[f^{(1)^+}(x) - \alpha], \qquad d_2^1(x) = 2[f^{(1)^-}(x) - \alpha]$$

soit

$$\lambda_1^+(x) + \lambda_1^-(x) = 2\tau^{(1)}(x).$$

Enfin,

$$d_3^2(x) = \alpha^2 - A_+^x[\Gamma_1^+, \Gamma_1^-, -\lambda_1^-] - 2\alpha f^{(1)^+}(x) \quad \text{et} \quad d_4^2(x) = \alpha^2 - A_-^x[\Gamma_1^+, \Gamma_1^-, -\lambda_1^-] - 2\alpha f^{(1)^-}(x)$$

si

$$(5.1) \qquad A_{\mp}^x[u, v, s] = \frac{d}{dx}\{2\tau s(x) - f^{\pm}(x)L[u+v](x) + L[f^+u + f^-v](x)\}.$$

Ainsi $d_3^2(x) = d_4^2(x)$ donne $D_1(x) = \lambda_1^+(x) - \lambda_1^-(x) = 2\alpha + L[\Gamma_1^+ + \Gamma_1^-](x)$, c'est-à-dire

$$(5.2) \qquad \lambda_1^{\pm}(x) = \tau^{(1)}(x) \pm g^{(1)}(x), \qquad \Gamma_1^{\pm}(x) = L_0^{-1}[g^{(1)} - \alpha](x) \mp L[\tau^{(1)}](x).$$

De plus $d_1^2(x) = A_+^x[\lambda_1^+, \lambda_1^-, \Gamma_1^-], d_2^2(x) = A_-^x[\lambda_1^+, \lambda_1^-, \Gamma_1^+]$ soit $\lambda_2^+ = -\lambda_2^-$ car selon (5.2)

$$d_1^2(x) = d_2^2(x) = 2\frac{d}{dx}\{L[(g\tau)^{(1)}](x) - g(x)L[\tau^{(1)}](x) + \tau(x)L_0^{-1}[g^{(1)} - \alpha](x)\},$$

$$\frac{d_3^2(x)}{2} = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{(g+\tau)^{(1)}(x)}{[2\alpha]^{-1}} + \frac{(\tau^2 + g^2)^{(2)}(x)}{2} - \frac{d}{dx}\{L[gL_0^{-1}(g^{(1)} - \alpha) - \tau L(\tau^{(1)})](x)\}.$$

Le lecteur peut vérifier les relations

$$d_3^3(x) = -A_+^x[\Gamma_2^+, \Gamma_2^-, -\lambda_2^-] + B_+^x[-\Gamma_1^-, \lambda_1^+, \lambda_1^-],$$

$$d_4^3(x) = -A_-^x[\Gamma_2^+, \Gamma_2^-, -\lambda_2^+] + B_-^x[-\Gamma_1^+, \lambda_1^+, \lambda_1^-]$$

si on a posé

$$B^x_{\mp} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\{-4f^{(1)\pm}(x)\pm 4\tau^2(x)u^{(1)}(x) + M[b^x_{\mp} v + c^x_{\mp} s](x)\},$$
$$M[s](x) = pf\int_0^1 \frac{s(x_P)dx_P}{\pi(x_P - x)^2}$$

avec (*voir* (2.6)) $b^x_{\mp}(x_P) = [h_{2_{\mp}1}(x_P - x)]^2, c^x_{\mp}(x_P) = [h_{3_{\mp}1}(x_P - x)]^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(5.3)\quad E_2(x) = \lambda_2^+(x) - \lambda_2^-(x) - L[\Gamma_2^+ + \Gamma_2^-](x) = -\tau(x)[\Gamma_1^+ + \Gamma_1^-]^{(1)}(x)\\ + [f^{(1)^-}\Gamma_1^- - f^{(1)^+}\Gamma_1^+](x) + \tau(x)M[\lambda_1^+ + \lambda_1^-](x) - M[f^+\lambda_1^+ + f^-\lambda_1^-](x).\end{aligned}$$

En définitive, la rubrique précédente conduit à l'expression suivante pour $(\lambda_2^+, \lambda_2^-, \Gamma_2^+, \Gamma_2^-)$

$$(5.4)\qquad \lambda_2^{\pm}(x) = \pm\frac{1}{2}\{d_1^2(x) + E_2(x)\}, \qquad \Gamma_2^{\pm}(x) = \frac{1}{2}\{L_{d_2}^{-1}[d_1^2](x) \pm d_3^2(x)\}.$$

La définition de (λ, Γ) en fonction de (q, γ) montre que, sur l'axe $(x'Ox)$, la densité équivalente de sources vaut $S = u_\infty(\lambda^+ + \lambda^-)$ et celle de tourbillons $T = u_\infty(\gamma^+ + \gamma^-)$. Au premier ordre (5.2) redonne le résultat classique de Van Dyke: $S_1 = 2u_\infty\tau^{(1)}, T_1 = 2L_0^{-1}[g^{(1)} - \alpha]$. La cohérence de (5.4) peut être aussi vérifiée.

6. Conclusion

Contrairement aux habitudes la démarche exposée propose de résoudre asymptotiquement, en fonction du petit paramètre ϵ, non pas le problème différentiel local mais le problème intégral associé. L'avantage essentiel de cette approche réside dans le caractère systématique du développement des intégrales singulières rencontrées (Sellier, 1996) ce qui évite les règles de raccord rapidement exhaustives et délicates de la méthode des développements asymptotiques raccordés.

Note remise le 4 octobre 1995, acceptée après révision le 24 avril 1996.

Références bibliographiques

Anderson J. D., 1991. *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill, Second Edition.
Ashley H. et Landhal M., 1965. *Aerodynamics of Wings and Bodies*, Addison-Wesley.
Dautray R. et Lions J. L., 1988. *Analyse mathématique et calcul numérique*, Masson, 6.
Moran J., 1984. *An introduction to theoretical and computational Areodynamics*, Wiley.
Muskhelishvili N. I., 1958. *Singular Integral Equations*, Noordhoff, Gröningen.
Sellier A., 1994. Asymptotic expansions of a class of integrals, *Proc. Roy. Soc. London Ser.* **A**, 445, p. 693-710.
Sellier A., 1996. Asymptotic expansion of a general Integral, *Proc. Roy. Soc. London Ser.* **A** (soumis).
Van Dyke M., 1975. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Parabolic Press.
Zabreyko R. P., 1975. *Integral Equations*, Noordhoff, Leyden, Holland.