

Absolute/convective instability of the Batchelor vortex

Cornel OLENDRARU, Antoine SELLIER, Maurice ROSSI and Patrick HUERRE

C. O., A. S. and P. H. : Laboratoire d'Hydrodynamique (LadHyX),
École Polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX, France ;

M. R. : Laboratoire de Modélisation en Mécanique (LMM),
Université Paris-VI, Tour 66, 4, place Jussieu, 75252 Paris CEDEX 05, France.

Abstract. The absolute/convective nature of the instability sustained by the Batchelor vortex is determined in the plane of swirl and co-flow parameters for different azimuthal wavenumbers. Swirl is shown to induce a transition to absolute instability for jets and wakes without requiring any counter-flow. The transitional helical mode is $n = -1$ for wakes and $n = -2$ or $n = -3$ for co-flowing jets.

Transition instable absolu/instable convectif pour le tourbillon de Batchelor

Résumé. La nature convective ou absolue de l'instabilité du tourbillon de Batchelor est déterminée dans le plan des paramètres de contrôle (vitesse axiale à l'infini-taux de rotation) pour différentes valeurs du nombre d'onde azimuthal. La rotation provoque une transition convectif/absolu dans les jets et les sillages, même en absence de contre-courant. Le mode azimuthal de transition est $n = -1$ pour les sillages et $n = -2$ ou $n = -3$ pour les jets sans contre-courant.

Version française abrégée

Cette Note propose une étude spatio-temporelle, au sens de la stabilité linéaire, d'un écoulement de base de type tourbillon de Batchelor. En coordonnées cylindriques les vitesses axiale et orthoradiale associées U, W obéissent aux relations (1). Notons que ces vitesses et la variable radiale r sont adimensionnées respectivement par la différence entre la vitesse axiale sur l'axe et à l'infini et par la taille typique du cœur visqueux (Batchelor, 1964). Cette distribution de vitesses comporte deux

Note présentée par Pierre PERRIER.

paramètres de contrôle : le paramètre a de vitesse axiale en $r = \infty$ et le paramètre q de rotation (qui compare les vitesses orthoradiale et axiale). Ceci permet de traiter plusieurs situations pratiques : le jet avec éventuellement un écoulement à l'infini ($a \geq 0$) ; le jet avec contre-courant ($-1 < a < 0$) et le sillage avec éventuellement un écoulement à l'infini ($a \leq -1$). Selon les études théoriques et expérimentales (Batchelor, 1964 ; Faler et Leibovich, 1977) l'écoulement (1) reproduit correctement la configuration de base intervenant dans le problème de l'éclatement tourbillonnaire.

En recherchant des perturbations à l'écoulement de base sous la forme de l'onde (2) de pulsation complexe ω , de nombres d'onde axial complexe k et azimuthal n , entier relatif, le problème se ramène (Lessen *et al.*, 1974), grâce aux fonctions auxiliaires γ et Z définies par (3), au problème aux valeurs propres (4), (5) pour l'inconnue Z . Pour (n, a, q) donné, il existe en effet une solution non nulle si et seulement si le couple (k, ω) satisfait la relation de dispersion (6). On appelle alors branche spatiale $k = k(\omega; n, a, q)$ toute solution de l'équation de dispersion obtenue avec ω réelle. Seule une résolution numérique s'avère possible. Dans ce but, (4) est réécrite sous la forme d'un système différentiel du premier ordre et d'inconnue (Z, Z') . Ce système est alors intégré, dans le plan complexe r , le long de deux contours ayant pour extrémité commune un complexe r_A et issus d'un voisinage de l'origine ou de l'infini dans lequel le comportement asymptotique de la solution est exploité. La relation de dispersion s'écrit en fait $W(k, \omega; n, a, q) \equiv Z_1 Z'_2 - Z_2 Z'_1 = 0$, où W est le Wronskien associé aux solutions (Z_1, Z'_1) et (Z_2, Z'_2) prédites en r_A par l'intégration le long de chacun des deux contours. En pratique, cette égalité est numériquement assurée à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson, à condition de disposer d'une solution approchée (k, ω) .

Dans le cas le plus favorable (Huerre et Monkewitz, 1990) les branches $k = k(\omega; n, a, q)$ solutions de l'équation de dispersion présentent le comportement suivant : pour $\omega_i = 0$ on trouve deux branches spatiales k^\pm associées aux domaines $\pm x > 0$ situées entièrement dans le demi-plan $\pm k_i > 0$ pour ω_i assez grand et se rencontrant, lorsque ω_i décroît, en un point $k_0(\omega; n, a, q)$ tel que $\partial\omega/\partial k(k_0) = 0$ avec $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$ et $\omega_{0,i} = \text{Im}(\omega_0)$. Dans un tel cas si $\omega_{0,i} > 0$ ($\omega_{0,i} < 0$) l'écoulement est absolument (convectivement) instable. Selon ce critère la transition instable absolu/instable convectif peut s'observer pour $\omega_{0,i} = 0$, c'est-à-dire dans le cadre d'une étude spatiale de stabilité : il suffit donc de se donner ω réel et d'étudier les branches spatiales $k = k(\omega; n, a, q)$.

Trois figures illustrent nos résultats. La figure 1 représente, pour $n = -1$, le taux de croissance spatiale $-k_i^+$ de la branche spatiale k^+ en fonction de ω réel et du paramètre de rotation q . Ce dernier a un effet déstabilisant pour des valeurs $q < 0,5$ et un effet stabilisant au-delà. Il faut en outre vérifier le bon comportement, en fonction de ω_i croissant, des branches k^+ et k^- au voisinage du point selle k_0 . La figure 2 illustre pour le mode $n = -2$, $a = 0,0022$, c'est-à-dire pour un jet avec un léger courant à l'infini, et $q = 0,6$ un tel exemple de point selle k_0 de transition instable absolu/instable convectif, dans le plan complexe k . En appliquant le critère portant sur le signe de $\omega_{0,i}$ nous avons déterminé pour les modes $n = \pm 1, -2, -3$ (en partie pour $n = -3$), dans le plan (a, q) des paramètres de contrôle, les régions d'instabilité absolue et convective et les courbes de transition associées (fig. 3). Ainsi, pour $q = 0$ le tourbillon de Batchelor se réduit à un jet ou à un sillage pur sans rotation qui s'avèrent absolument instables, en présence de contre-courant suffisamment intense, pour les modes $n = \pm 1$ dans la gamme $-0,8 \leq a \leq -0,4$. Lorsque le taux de rotation q augmente, le domaine instable absolu s'étend de façon très significative (fig. 3) pour contaminer des régimes *sans contre-courant*. La transition convectif/absolu met en jeu des nombres d'ondes azimuthaux différents pour le cas d'un jet ou d'un sillage. Ainsi, du « côté » sillage ($a < -1$), le mode hélicoïdal critique est $n = -1$ et il apparaît pour des valeurs modérées de q sans qu'il y ait contre-courant. Du « côté » jet *sans contre-courant* ($a \geq 0$), le mode hélicoïdal critique est soit $n = -3$ pour $0,1 < q < 0,5$, soit $n = -2$ pour $0,5 < q < 0,7$. Enfin, les jets avec léger contre-courant deviennent instables absolus pour $n = -1$ aux valeurs élevées de q .

En conclusion, ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus par simulation numérique directe de la réponse impulsionnelle du tourbillon de Batchelor (Delbende *et al.*, 1996). La présence d'une transition instable convectif/instable absolu pour les modes $n = -2$ et $n = -3$ au voisinage de $a = 0$, pourrait expliquer certains phénomènes instationnaires observés dans les jets tournants en présence d'éclatement.

1. Introduction

Over the past few decades, numerous hydrodynamic stability studies of vortices with axial flow have been carried out in order to arrive at a satisfactory description of the vortex breakdown phenomenon. Early on, Benjamin (1962) put forward the idea that vortex breakdown is somewhat akin to a hydraulic jump: it can be viewed as a sudden transition from a supercritical flow that can only sustain downstream-travelling waves to a subcritical flow that can sustain both upstream and downstream travelling waves. These notions, which were initially restricted to low-wavenumber non-dispersive waves, were subsequently extended, in a somewhat ad-hoc fashion, to the case of dispersive temporal instability waves of arbitrary wavenumber (Tsai and Widnall, 1980).

The purpose of the present Note is to reexamine these ideas in the context of a consistent spatio-temporal instability analysis: supercritical/subcritical flows should more generally be viewed as basic states that are convectively/absolutely unstable, in the same spirit as for other shear flows (*see* Bers, 1983; Huerre and Monkewitz, 1990, among others, for thorough reviews of these concepts). The Batchelor $a - q$ vortex is selected here as an appropriate basic state. Previous strictly temporal instability analyses of the same flow have been performed in the inviscid case (Lessen *et al.*, 1974; Leibovich, 1983), and in the fully viscous case (Lessen and Paillet, 1974; Khorrami, 1991). The main result of our spatio-temporal investigation is the determination of the absolute/convective instability transition curves in the space of control parameters pertaining to the Batchelor vortex.

2. Eigenvalue problem

Slowly evolving trailing vortices are satisfactorily approximated (Batchelor, 1964; Faler and Leibovich, 1977) in the axial x, r, θ cylindrical coordinate system, by the axial and azimuthal velocity distributions

$$(1) \quad u = U(r) \equiv a + e^{-r^2}, \quad v \equiv 0, \quad w = W(r) \equiv q[1 - e^{-r^2}]/r.$$

The above profiles have been non-dimensionalized by selecting as length scale the typical size of the vortex core and as velocity scale the difference between the centreline axial velocity and the free-stream axial velocity at $r = \infty$. The Batchelor vortex solution (1) defines a two-parameter family of basic flows: the swirl parameter q is a non-dimensional measure of the maximum azimuthal velocity while the co-flow parameter a is a measure of the free-stream axial velocity far from the axis. Co-flowing jets correspond to $a > 0$, counter-flowing jets or wakes to $-1 < a < 0$, co-flowing wakes to $a < -1$.

In standard fashion, the inviscid Euler equations are linearized around the basic flow (1) and perturbations are decomposed into normal modes. For instance, the fluctuating radial velocity component v' is taken to be of the form

$$(2) \quad v'(x, r, \theta, t) = \text{Re}\{iG(r)e^{i(kx+n\theta-\omega t)}\},$$

C. Olendraru *et al.*

where k, n , and ω respectively denote the axial wavenumber, azimuthal wavenumber and frequency, and $G(r)$ is the unknown radial distribution. Upon introducing the auxiliary functions

$$(3) \quad \gamma(r) \equiv kU(r) - \omega + nW(r)/r; \quad Z(r) \equiv rG(r)/\gamma(r),$$

one is led (Lessen *et al.*, 1964) to the following two-point boundary-value problem for $Z(r)$:

$$(4) \quad Z'' + \left[\frac{1}{r} + 2\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{2k^2r}{n^2 + k^2r^2} \right] Z' - \left[\frac{n^2 + k^2r^2}{r^2} + \frac{2n}{\gamma r} \left(\frac{W}{r} \right)' - \frac{4nk^2W}{\gamma r(n^2 + k^2r^2)} - 2\frac{kW}{\gamma^2r^2} (k(rW)' - nU') \right] Z = 0,$$

$$(5) \quad Z(0) = Z(\infty) = 0.$$

The above system defines an eigenvalue problem: for given parameter values (n, a, q) non-zero solutions exist if and only if the complex wavenumber k and frequency ω obey a dispersion relation of the form

$$(6) \quad D[k, \omega; n, a, q] = 0.$$

Previous studies have dealt with the temporal stability analysis (k real, ω complex). Spatial results (k complex, ω real) are succinctly presented here. The calculation of the complex absolute wavenumber k_0 and frequency ω_0 of zero group velocity $\partial\omega/\partial k = 0$ is then shown to lead to the determination of the absolute/convective instability transition curves.

3. Numerical method

For given values of the parameters n, a , and q , the spatial branches $k = k(\omega; n, a, q)$ are numerically determined as a function of the complex frequency ω by making use of a shooting algorithm. The second-order differential equation (4) is first written as a first-order system for Z and $Z' = dZ/dr$. The required asymptotic behaviour near $r = 0$ and $r = \infty$ is calculated analytically from (4), (5). The system is then integrated numerically step by step in the complex r -plane, along two paths originating from $r = 0$ and $r = \infty$ respectively and joining at a specific complex value r_A . In order to avoid critical points associated with zeroes of the denominator $r\gamma(r)[n^2 + k^2r^2]$ in (4), the two complex paths have to lie above or below such zeroes, in order to comply with Lin's (1955) criterion. In such a fashion, the computed inviscid eigenfunctions are ensured to be limits of their viscous counterparts as viscosity becomes vanishingly small. If (Z_1, Z'_1) and (Z_2, Z'_2) denote the values of (Z, Z') on either side of r_A , a complex eigenvalue k satisfying the dispersion relation (6) is then obtained when the Wronskian $W(k, \omega; n, a, q) \equiv Z_1Z'_2 - Z_2Z'_1$ vanishes. This condition is numerically enforced by choosing an appropriate guess value for k and converging to a zero of W via a Newton-Raphson procedure. Realistic guess values are inferred either by exploiting the temporal results (Lessen *et al.*, 1974) or by preliminary calculation of W on a coarse grid in the complex k -plane. The numerical scheme is implemented by making use of IMSL routines.

4. Results

Sample results pertaining to the spatially amplified downstream branch $k^+(\omega; n, a, q)$ are displayed on figure 1 as a function of real frequency ω for the helical mode $n = -1$ of a swirling jet with

zero external flow ($a = 0$). Only the spatial growth rate $-k_i^+$ is represented for increasing values of the swirl parameter q . Note that for zero swirl $q = 0$, the only unstable modes are $n = \pm 1$. As q increases from zero to 0.5, the instability of the helical mode $n = -1$ is seen to be enhanced while further increases in q beyond 0.5 have a stabilizing effect.

In order to determine the absolute/convective nature of the instability, saddle points k_0 such that $\partial\omega/\partial k(k_0) = 0$ have to be located in the complex k -plane. Furthermore, it should be checked that such saddle points correspond to pinching points of distinct $k^+(\omega)$ and $k^-(\omega)$ branches which, for sufficiently large $\omega_i > 0$, lie in the upper and lower half k -plane respectively (see Bers, 1983; Huerre and Monkewitz, 1990). If $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$ denotes the corresponding absolute frequency, the basic flow is then said to be absolutely (resp. convectively) unstable when $\omega_{0,i} > 0$ (resp. $\omega_{0,i} < 0$). The absolute/convective instability transition boundary in the space of control parameters is given by the condition $\omega_{0,i} = 0$. Thus, the strictly spatial approach (ω real, k complex) described above is sufficient to determine the transition curve. In practice, for given parameter values (n, q) and real frequency ω , the saddle point k_0 is located by detecting a pinching point k_0 of the spatial branches k^+ and k^- , as the co-flow parameter a is being varied. It is *a posteriori* checked that for the transition value (n, a, q) , spatial branches k^\pm indeed move away into their respective upper and lower half k -plane as ω_i increases from zero. A sample result of such a procedure is shown on figure 2 for $n = -2$, $a = 0.0022$ (slightly co-flowing jet), $q = 0.6$.

Absolute/convective instability transition curves in the $a - q$ plane are displayed on figure 3 for helical modes $n = \pm 1$, $n = -2$ and $n = -3$. The absolutely unstable (AI) and convectively unstable (CI) regions correspond to $\omega_{0,i} > 0$ and $\omega_{0,i} < 0$ respectively. When $q = 0$ (zero swirl), the Batchelor vortex reduces to a jet or a wake and it is absolutely unstable to the helical modes $n = \pm 1$ in the range $-0.8 \leq a \leq -0.4$, i.e. only when a sufficiently strong counter-flow is present. As the swirl q

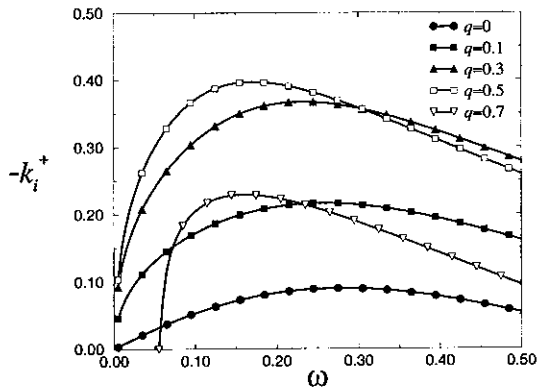


Fig. 1

Fig. 1. - Spatial growth rate $-k_i^+$ of helical mode $n = -1$ versus frequency ω for increasing swirl q . Swirling jet case with zero external flow $a = 0$.

Fig. 1. - Taux de croissance spatiale $-k_i^+$ du mode hélicoïdal $n = -1$ en fonction de la pulsation ω pour un paramètre de rotation q croissant et un jet sans courant à l'infini ($a = 0$).

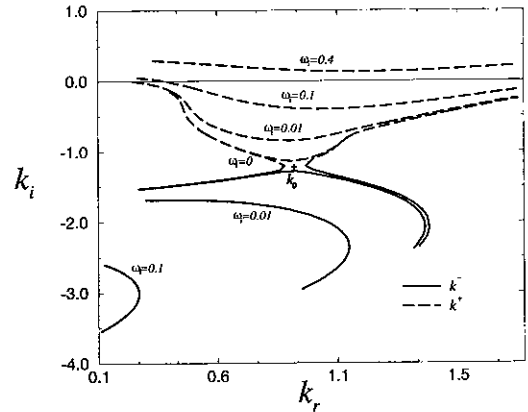


Fig. 2

Fig. 2. - Constant ω_i contours in complex k -plane in vicinity of saddle point k_0 .
—: k^- ; - -: k^+ . $n = -2$, $a = 0.0022$, $q = 0.6$.

Fig. 2. - Contours $\omega_i = \text{constante}$ au voisinage du point selle k_0 dans le plan complexe (k_r, k_i) .
—: k^- ; - -: k^+ . $n = -2$, $a = 0,0022$, $q = 0,6$.

is increased, the region of absolute instability is seen to widen considerably and to be triggered by distinct helical modes on the jet “side” ($a > 0$) and the wake “side” ($a < -1$). On the wake “side” ($a < -1$), moderate values of swirl q lead to absolute instability of the $n = -1$ mode *in the absence of any counter-flow*. On the jet “side” and *without counter-flow* ($a \geq 0$) the critical helical mode leading to absolute instability varies with q : for low q , in the range $0.1 < q < 0.5$, the $n = -3$ mode is critical, while for moderate q in the range $0.5 < q < 0.7$, the mode $n = -2$ becomes critical. Finally, for jets with slight counter-flow ($a \leq 0$) at high q , the $n = -1$ mode is critical. Note that above $q = 1.5$, the Batchelor vortex is stable for all a .

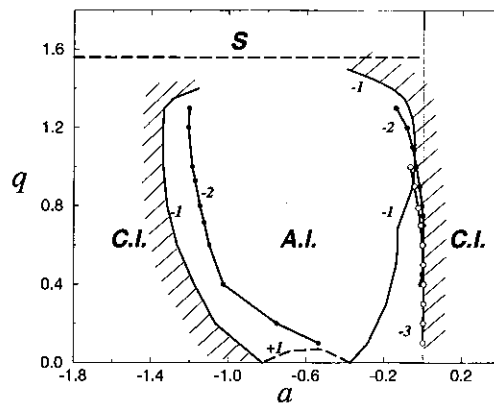


Fig. 3. – Absolute (AI)/convective (CI) instability transition curves in $a - q$ parameter space for helical modes $n = \pm 1$, $n = -2$, $n = -3$. Outer transition boundary is hatched. Basic flow is stable (S) above $q \sim 1.5$.

Fig. 3. – Courbes de transition instable absolu (AI)/instable convectif (CI) dans le plan des paramètres de contrôle (a, q) pour les modes hélicoïdaux $n = \pm 1$, $n = -2$, $n = -3$. La frontière extérieure est hachurée. L'écoulement de base est stable (S) pour $q \sim 1,5$.

5. Concluding remarks

Swirl has been demonstrated to promote absolute instability in jets and wakes, without requiring the presence of a finite counter-flow. The favoured transitional helical mode has been shown to depend on the wake-like or jet-like nature of the flow, as well as on the intensity of the swirl. These results are fully consistent with the alternate approach of Delbende *et al.* (1996) which relies on direct numerical simulations of the impulse response of the Batchelor vortex. The onset of absolute instability for the modes $n = -2$ and $n = -3$ in the vicinity of $a = 0$ may explain some of the unsteady features observed in the breakdown of swirling jets with no external stream. Such questions are currently under investigation.

Acknowledgements. This work was supported by the Direction des Recherches, Études et Techniques (DRET) of the French Ministry of Defense under Grant #92-098. The authors wish to warmly thank I. Delbende and T. Loiseleux for very helpful and stimulating discussions.

Note remise le 3 juin 1996, acceptée le 5 juin 1996.

References

- Batchelor G. K., 1964. Axial flow in trailing line vortices, *J. Fluid Mech.*, 20, pp. 645-658.
- Bers A., 1983. Space-time evolution of plasma instabilities - absolute and convective. In *Handbook of Plasma Physics*, Rosenbluth M. N. and Sagdeev R. Z. Eds., 1, pp. 451-517, Amsterdam, North-Holland.
- Benjamin T. B., 1962. Theory of the vortex breakdown phenomenon, *J. Fluid. Mech.*, 14, pp. 593-629.
- Delbende I., Chomaz J. M. and Huerre P., 1996. Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the impulse response (in preparation).
- Faler J. H. and Leibovich S., 1977. Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown, *Phys. Fluids*, 20, pp. 1385-1400.
- Huerre P. and Monkewitz P. A., 1990. Local and global instabilities in spatially developing flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 22, pp. 473-537.
- Khorrami M. R., 1991. On the viscous modes of instability of a trailing line vortex, *J. Fluid Mech.*, 225, pp. 197-212.
- Leibovich S. and Stewartson K., 1983. A sufficient condition for the instability of columnar vortices, *J. Fluid Mech.*, 126, pp. 335-356.
- Lessen M., Singh P. J. and Paillet F., 1974. The stability of a trailing line vortex. Part 1: Inviscid theory, *J. Fluid Mech.*, 63, pp. 753-763.
- Lessen M. and Paillet F., 1974. The stability of a trailing line vortex. Part 2: viscous theory, *J. Fluid Mech.*, 65, pp. 769-779.
- Lin C. C., 1955. *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press.
- Tsai C. Y. and Widnall S. E., 1980. Examination of group-velocity criterion for breakdown of vortex flow in a divergent duct. *Phys. Fluids*, 23, pp. 864-870.

