

Ondes variqueuses absolument instables dans un canal élastique

Emmanuel de LANGRE

LadHyX, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France
Courriel : delangre@ladhyx.polytechnique.fr

(Reçu le 17 septembre 1999, accepté le 21 septembre 1999)

Résumé. On étudie, à partir de l'équation de dispersion, les conditions dans lesquelles peut apparaître une instabilité absolue sur les parois élastiques d'un canal parcouru par un écoulement potentiel. Le seuil d'instabilité absolue est donné de façon exacte dans le cas des films minces pour des parois formées de plaques en flexion ou de membranes. Le cas général est résolu numériquement et rejoint les résultats classiques pour une paroi en présence d'un domaine fluide semi-infini. On montre que la nature de la rigidité des parois influe fortement sur l'apparition de l'instabilité absolue. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

interaction fluide-structure / canal / instabilité absolue

Absolutely unstable varicose waves in an elastic channel

Abstract. *Conditions for absolute instability of the elastic walls of a plane channel with potential flow are investigated. The absolute instability threshold is given in closed form in the thin film approximation for walls made of plates or membranes. The more general case is solved numerically and is compared with more classical results for a single wall in the presence of a semi-infinite fluid domain. It is found that absolute instability is strongly influenced by the membrane or plate nature of the wall stiffness. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

fluide-structure interaction / channel flow / absolute instability

1. Introduction

Les interactions mécaniques entre un écoulement et une paroi souple élastique sont variées. On sait notamment que la souplesse d'une frontière peut influencer la stabilité de l'écoulement et la trainée d'un obstacle. Réciproquement, l'écoulement peut modifier les caractéristiques mécaniques apparentes de la paroi et induire des instabilités statiques ou dynamiques. Ces instabilités, que l'on doit distinguer des réponses aux instationnarités propres à l'écoulement, telles que la turbulence ou le détachement tourbillonnaire, s'observent dans des régimes d'écoulement et des géométries très variés. On peut citer le collabage des veines, le galop des ailes d'avion et des câbles aériens ou le fouettement des tuyaux d'arrosage.

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

L'étude de configurations géométriquement et mécaniquement simples telles qu'une plaque [1], une membrane [2] ou une poutre [3, 4] en présence d'un écoulement potentiel est riche d'enseignements sur ces mécanismes d'interaction. On peut ainsi quantifier l'effet de l'écoulement sur la propagation d'ondes de parois et notamment l'apparition d'ondes instables.

Parmi ces ondes instables qui se développent en temps et en espace on peut distinguer celles qui sont absolument instables de celles qui sont convectivement instables [5]. Cette distinction fait référence à l'évolution locale à long terme de la réponse impulsionnelle : une instabilité sera dit *convective* si l'écoulement transporte suffisamment les ondes vers l'aval pour que localement la réponse impulsionnelle décroisse finalement. Au contraire, l'instabilité sera dite *absolue* si les ondes instables envahissent progressivement tout le domaine. Cette différence a des conséquences pratiques : l'existence d'ondes absolument instables rend par exemple plus difficile le contrôle des oscillations par des actions en amont, sur l'écoulement ou sur la paroi.

L'objet de cette note est de montrer que la nature des instabilités de paroi est fortement influencée par les caractéristiques mécaniques de celle-ci et par le confinement de l'écoulement. Plus précisément, nous étudions le comportement des ondes variqueuses se propageant le long des parois élastiques d'un canal infiniment long en présence d'un écoulement potentiel.

2. Formulation

Le domaine fluide considéré est infini dans le sens de l'axe du x et d'épaisseur uniforme $2e$, *figure 1*. Les parois inférieures et supérieures de ce canal ont un comportement élastique linéaire tel que leur déplacement latéral en l'absence de fluide est régi par une équation de plaque mince avec tension

$$B \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

où B et T sont respectivement la raideur de flexion et la tension de membrane, m étant la masse surfacique de la paroi. On étudiera successivement le cas de la plaque, $B > 0, T = 0$ et de la membrane, $B = 0, T > 0$. On s'intéresse ici plus particulièrement aux ondes dites variqueuses définies par $Y(x, t) = Y^+(x, t) = -Y^-(x, t)$, où Y^+ et Y^- sont les déplacements de chaque paroi.

Entre ces deux parois s'écoule un fluide incompressible parfait de masse volumique constante ρ . Lorsque les parois sont au repos, le champ de vitesse est uniforme de valeur $\underline{U} = U \underline{e}_x$. La vitesse fluctuante \underline{u} associée aux mouvements des parois est définie par un potentiel $\varphi(x, y, t)$ qui vérifie [1, 6]

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, e, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, -e, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) Y(x, t) \quad (2)$$

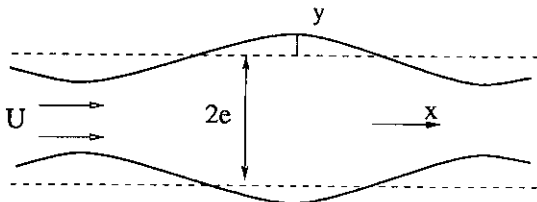


Figure 1. Canal à parois élastiques.
Figure 1. Channel bounded by elastic walls.

et la pression p^+ qui s'applique sur la paroi supérieure est alors

$$p^+(x, t) = -\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x, e, t) \quad (3)$$

Si l'on cherche le mouvement de cette paroi sous la forme d'ondes propagatives, $Y(x, t) = Y_0 e^{i(kx - \omega t)}$, on obtient à l'aide de (1), (2) et (3) l'équation de dispersion pour les ondes de paroi [6]

$$D(k, \omega; U, e) = Bk^4 + Tk^2 - m\omega^2 - \frac{\rho}{k \tanh(ek)} (\omega - Uk)^2 = 0 \quad (4)$$

Une onde périodique en espace (k réel) sera temporellement instable si la partie imaginaire de la pulsation associée à ce nombre d'onde k par l'équation de dispersion est positive. La forme simple de (4) permet d'explicitier la vitesse critique U_C au delà de laquelle il existe au moins une onde instable de nombre d'onde k . On obtient ainsi pour une rigidité de plaque une vitesse critique nulle et pour une rigidité de membrane une vitesse critique finie $U_C = (T/m)^{1/2}$ égale à la vitesse des ondes de paroi en l'absence de fluide.

3. Instabilités absolues et convectives

Le caractère absolu ou convectif de ces instabilités peut se déduire d'une analyse de l'équation de dispersion (4). En effet, [5], pour des paramètres U et e donnés, la réponse impulsionnelle locale varie asymptotiquement comme $e^{\omega_{0,i} t} / \sqrt{t}$ où $\omega_{0,i}$ est la partie imaginaire de la pulsation ω_0 de l'onde de vitesse de groupe nulle définie par

$$D(k_0, \omega_0; U, e) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial k}(k_0, \omega_0; U, e) = 0 \quad (5)$$

L'instabilité sera donc absolue si $\omega_{0,i} > 0$ et convective sinon. Il est également nécessaire que (ω_0, k_0) soit une racine associée au pincement de deux branches $k^+(\omega), k^-(\omega)$ dans le plan complexe des nombres d'onde, lorsque l'on diminue progressivement la partie imaginaire de ω [5].

Nous nous intéressons plus spécialement ici à la valeur de la vitesse de transition $U = U_T$ pour laquelle l'instabilité change de nature, en fonction des autres paramètres. L'équation (5), du fait du caractère entièrement conservatif et symétrique en x du modèle, a des racines soit réelles soit imaginaires conjuguées deux à deux. On a ainsi une instabilité soit absolue lorsqu'une racine est imaginaire, soit marginalement convective lorsque toutes les racines sont réelles. La transition entre instabilité absolue et convective se fait alors nécessairement pour une valeur du paramètre $U = U_T$ où $\omega_0 = \omega_T$ est racine double [1], soit

$$D(k_T, \omega_T; U_T, e) = 0; \quad \frac{\partial D}{\partial k}(k_T, \omega_T; U_T, e) = 0; \quad \frac{\partial^2 D}{\partial k^2}(k_T, \omega_T; U_T, e) = 0 \quad (6)$$

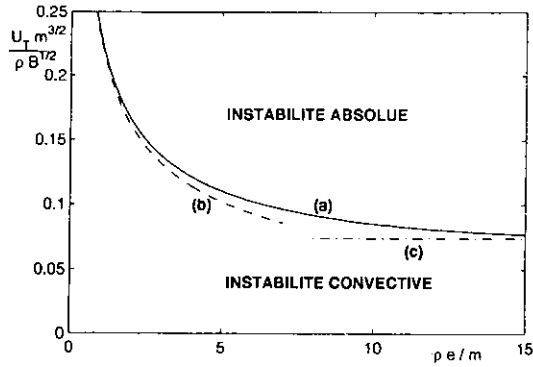


Figure 2. Transition entre instabilité absolue et convective pour des parois ayant une rigidité de flexion. (a) Cas général, (b) film mince, équation (7), (c) domaine infini [1].

Figure 2. Transition between absolute and convective instability in the case of walls with plate bending stiffness. (a) General case, (b) thin film approximation, equation (7), (c) infinite domain [1].

Considérons le cas de parois ayant une rigidité de plaque en flexion, $B > 0, T = 0$. La vitesse de transition U_T se calcule exactement pour la limite des petites épaisseurs, où $\rho e/m$ tend vers 0, ce qui correspond à l'approximation géométrique des films minces. Elle se met sous la forme adimensionnelle

$$\bar{U}_T = \frac{U_T m^{3/2}}{\rho B^{1/2}} = \frac{2^{1/2} 3^2}{5^{5/2}} \frac{1}{\sqrt{\rho e/m}} \approx \frac{0,228}{\sqrt{\rho e/m}} \quad (7)$$

Pour une épaisseur $\rho e/m$ quelconque, l'équation paramétrique (6) qui définit le lien $U_T(e)$ peut être résolue numériquement en éliminant ω_T puis en faisant varier k_T réel. On obtient ainsi la courbe de transition, *figure 2*, cohérente avec le résultat asymptotique (7). On vérifie aisément que les racines (k_T, ω_T) sont bien associées à un pincement de branches k^+, k^- .

On sait par ailleurs que pour une plaque en flexion en présence d'un domaine fluide semi-infini l'instabilité devient absolue au dessus de $\bar{U}_T \approx 0,074$ [1]. On retrouve dans la *figure 2* cette limite pour les grandes épaisseurs, ce qui nous permet d'affirmer que la zone d'instabilité absolue se place bien *au-dessus* de la courbe de transition que nous avons obtenue.

Si les parois ont une rigidité de membrane, $B = 0, T > 0$, la vitesse de transition adimensionnelle dans la limite des faibles épaisseurs est exactement

$$\bar{U}_T = \frac{U_T m^{1/2}}{T^{1/2}} = \frac{2^{5/2}}{3^{3/2}} \approx 1,09 \quad (8)$$

Comme précédemment, la courbe de transition $U_T(e)$ pour une épaisseur $\rho e/m$ quelconque s'obtient numériquement à partir de (6) et rejoint en $\rho e/m = 0$ la solution (8), *figure 3*. La limite pour les grandes épaisseurs est la solution pour un milieu fluide semi-infini [2], $\bar{U}_T = 1,18$.

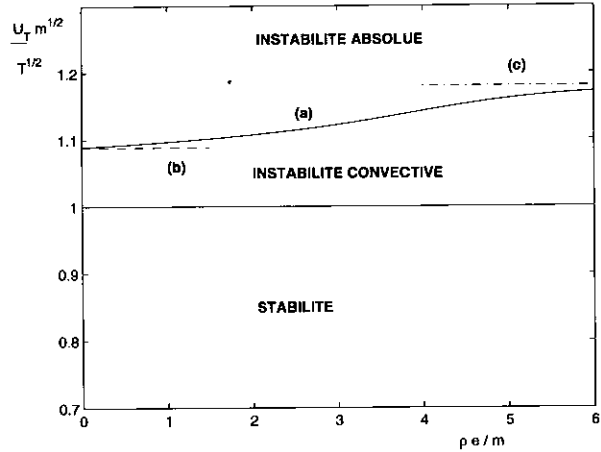
4. Analyse

Les résultats obtenus ici montrent que les seuils d'instabilité absolue sont sensiblement différents pour les deux types de parois étudiées.

Ceci peut s'expliquer qualitativement en analysant les termes de l'équation de dispersion. Ici l'instabilité se produit par coalescence des vitesses de phase amont et aval, lorsque l'écoulement apporte une rigidité négative, $-(\rho/(\rho + mk \tanh(ek))) mU^2 k^2$, qui s'oppose exactement à la

Figure 3. Transition entre instabilité absolue et convective pour des parois ayant une rigidité de membrane. (a) Cas général, (b) film mince, equation (8), (c) domaine infini [2]

Figure 3. Transition between absolute and convective instability in the case of walls with membrane stiffness. (a) General case, (b) thin film approximation, equation (8), (c) infinite domain [2].



rigidité de paroi, à savoir Tk^2 pour une membrane ou Bk^4 pour une plaque. L'instabilité devient absolue lorsque les grands nombres d'onde, qui ont des vitesses de groupe négative, deviennent instables.

Pour des parois de type membrane, l'instabilité se manifeste d'abord sur de petits nombres d'ondes, lorsque le seuil d'instabilité $U_C = (T/m)^{1/2}$ est dépassé. Tous les nombres d'onde sont ensuite progressivement déstabilisés, jusqu'à ceux qui provoquent l'instabilité absolue.

Pour des parois de type plaque, l'instabilité apparaît dès que la vitesse est non nulle, pour les petits nombres d'onde. Par contre l'ordre élevé de l'opérateur de raideur, Bk^4 au lieu de Tk^2 , retarde la déstabilisation des grands nombres d'onde et donc l'instabilité absolue.

Il reste maintenant à relier ces caractéristiques locales des ondes aux instabilités globales des canaux élastiques de longueur finie. Cette démarche, fructueuse en hydrodynamique [5] et en physique des plasmas [7], devrait amener à une meilleure compréhension de la variété des mouvements instables observée expérimentalement [8].

On notera enfin que les ondes sinusoïdales ($Y^+ = Y^-$) ont un comportement tout à fait différent : leurs instabilités sont principalement absolues pour les plaques et convectives pour les membranes [4].

Références bibliographiques

- [1] Crighton D., Oswell J.E., Fluid loading with mean flow. I. Response of an elastic plate to localized excitation, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* A335 (1991) 557–592.
- [2] Kelbert M., Sazonov I., Pulses and other wave processes in fluids, *Modern Approaches in Geophysics*, Kluwer Academic Publisher, 1996.
- [3] Paidoussis M.P., *Fluid-structure Interactions. Slender Structures and Axial Flow*, Vol. 1, Academic Press, 1998.
- [4] de Langre E., Ouvrard A.E., Absolute and convective bending instabilities in fluid-conveying pipes, *J. Fluids Struct.* 13 (1999) 663–680.
- [5] Huerre P., Monkewitz P.A., Local and global instabilities in spatially developing flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 22 (1990) 473–537.
- [6] Walsh C., Flutter in one-dimensional collapsible tubes, *J. Fluids Struct.* 9 (1995) 393–408.
- [7] Bers A., Space-time evolution of plasma instabilities-absolute and convective, in: M.N. Rosenbluth, R.Z. Sagdeev (Eds.), *Handbook of Plasmas Physics*, North-Holland, Amsterdam, 1983, I, pp. 451–517.
- [8] Weaver D., Paidoussis M.P., On collapse and flutter phenomena in thin tubes conveying fluid, *J. Sound Vibr.* 50 (1977) 117–132.